UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

LUCAS VIEIRA GUERREIRO RODRIGUES PERES

**Estudos no modelo de Axelrod de
disseminação cultural:** transição de fase e campo
externo

São Carlos

2014

LUCAS VIEIRA GUERREIRO RODRIGUES PERES

**Estudos no modelo de Axelrod de
disseminação cultural: transição de fase e campo
externo**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Doutor em Ciência.

Área de Concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. José Fernando Fontanari

Versão Original

São Carlos

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rodrigues Peres, Lucas

Estudos no modelo de Axelrod de disseminação cultural: transição de fase e campo externo / Lucas Rodrigues Peres; orientador José Fernando Fontanari - São Carlos, 2014.
191 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Modelos estocásticos. 2. Disseminação cultural. 3. Modelo de Axelrod. 4. Aproximação de campo médio. 5. Mecânica Estatística. I. Fernando Fontanari, José, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Lucas Vieira Guerreiro Rodrigues Peres

Tese apresentada ao Instituto de Física de
São Carlos da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Doutor em
Ciências.
Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 08/08/2014

Comissão Julgadora

Prof(a). Dr(a). Jose Fernando Fontanari

Instituição: IFSC/USP

Prof(a). Dr(a). Paulo Roberto de Araujo Campos

Instituição: UFPE/Recife

Prof(a). Dr(a). Carmen Pimentel Cintra do Prado

Instituição: IF/USP

Prof(a). Dr(a). Osame Kinouchi Filho

Instituição: FFCLRP/USP

Prof(a). Dr(a). Fernando Fagundes Ferreira

Instituição: EACH/USP

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao meu orientador. Este foi, sem dúvida nenhuma, imprescindível para a realização deste trabalho. Além de ser peça fundamental em minha formação acadêmica, e meu exemplo de profissional a ser seguido. Fonta, obrigado por estes seis anos de trabalho! Em seguida agradeço a minha família, estes responsáveis por inserir corriqueiramente caos na minha vida, e por torcer muito pelo sucesso de meu trabalho, mesmo não entendendo absolutamente nada do que faço. Agradeço especialmente meu irmão e minha mãe, um por me fazer de *helpdesk* continuamente, e outra por me mandar mensagens de bom dia, todo santo dia. Agradeço aos meus amigos, que não são muitos e prefiro não nomeá-los pois com certeza esqueceria alguém, mas a existência, a ausência de noção, e principalmente a inexistência de limites na quantidade de álcool ingerida em uma única noite, fizeram estes meus dez anos em São Carlos serem bem mais divertidos e com uma quantidade imensa de histórias. Sem eles eu seria provavelmente mais eficiente, mas, muito provavelmente já teria surtando (mais)! Por isso, obrigado a todos! Agradeço ao Instituto de Física de São Carlos e o CNPq pela infra-estrutura e por auxiliarem financeiramente esta pesquisa.

“Nós somos a fundação!”
— ISAAC ASIMOV

Resumo

PERES, Lucas Rodrigues *Estudos no modelo de Axelrod de disseminação cultural: transição de fase e campo externo*. 2014. 191 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014

Estudos sobre a manutenção da diversidade cultural sugerem que o mecanismo de interação social, normalmente considerado como responsável pela homogeneização cultural, também pode gerar diversidade. Com o intuito de estudar esse fenômeno, o cientista político Robert Axelrod propôs um modelo baseado em agentes que exibe estados absorventes multiculturais a partir de uma interação homofílica homogeneizadora entre os agentes. Nesse modelo, a diversidade (ou desordem) cultural é produzida pela escolha dos fatores culturais iniciais dos agentes e a interação homofílica age apenas no sentido de reduzir a desordem inicial. Em virtude de sua simplicidade, várias releituras e variações do modelo de Axelrod são encontradas na literatura: introdução de uma mídia externa, alterações da conectividade dos agentes, inserção de perturbações aleatórias, etc. Entretanto, essas propostas carecem de uma análise sistemática do comportamento do modelo no limite termodinâmico, ou seja, no limite em que o número de agentes tende a infinito. Essa tese foca primariamente nesse tipo de análise nos casos em que os agentes estão fixos nos sítios de uma rede quadrada ou nos sítios de uma cadeia unidimensional. Em particular, quando os fatores culturais iniciais dos agentes são gerados por uma distribuição de Poisson, caracterizamos, através de simulações de Monte Carlo, a transição entre a fase ordenada (pelo menos um domínio cultural é macroscópico) e a fase desordenada (todos os domínios culturais são microscópicos) na rede quadrada. Entretanto, não encontramos evidência de uma fase ordenada na cadeia unidimensional. Já para fatores culturais iniciais gerados por uma distribuição uniforme, observamos a transição de fase tanto na rede unidimensional como na bidimensional. Por fim, mostramos que a introdução de um campo externo espacialmente uniforme, cuja interpretação é a de uma mídia global influenciando a opinião dos agentes, elimina o regime monocultural do modelo de Axelrod no limite termodinâmico.

Palavras-chave: Modelos estocásticos. Disseminação cultural. Modelo de Axelrod. Aproximação de campo médio. Mecânica estatística.

Abstract

PERES, Lucas Rodrigues *Studies in the Axelrod model of cultural dissemination: Phase transition and external field*. 2014. 191 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014

Studies on the maintenance of cultural diversity suggest that the mechanism of social interaction, generally regarded as responsible for cultural homogenization, may also generate diversity. In order to study this phenomenon, the political scientist Robert Axelrod proposed an agent-based model that exhibits multicultural absorbing states, despite the homophilic and homogenizing character of the interaction between agents. In this model the cultural diversity (or disorder) is produced by the choice of the initial cultural traits of the agents, and the homophilic interaction acts towards the reduction of the initial disorder. Due to its simplicity, several re-examinations and variants of Axelrod's model are found in the literature: the introduction of an external media, changes in the connectivity of the agents, introduction of random perturbations, etc. However, these proposals lack a systematic analysis of the behavior of the model in the thermodynamic limit, i.e., in the limit that the number of agents tends to infinity. This thesis focuses mainly on that type of analysis in the cases the agents are fixed in the sites of a square lattice or in the sites of a chain. In particular, when the initial cultural traits of the agents are generated by a Poisson distribution we characterize, through Monte Carlo simulations, the transition between the ordered phase (at least one macroscopic cultural domain) and the disordered phase (only microscopic domains) in the square lattice. However, we found no evidence of an ordered phase in the one-dimensional lattice (chain). For initial cultural traits generated by a uniform distribution, we find a phase transition in both the one and two-dimensional lattices. Finally, we show that the introduction of a spatially uniform external field, which can be interpreted as a global media influencing the opinion of the agents, eliminates the monocultural regime of Axelrod's model in the thermodynamic limit.

Keywords: Stochastic models. Cultural dissemination. Axelrod model. Mean-field approximation. Statistical mechanics.

Lista de Figuras

- Figura 2.1 - *Diagrama de fluxo com o algoritmo utilizado na simulação das regras de interação do modelo de Axelrod.* 44
- Figura 2.2 - *Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.* 48
- Figura 2.3 - *Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.* 48
- Figura 2.4 - *Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.* 49
- Figura 2.5 - *Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L^2)_{mul}$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.* 49
- Figura 2.6 - *Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.* 52

Figura 2.7 - Dependência da razão entre a raiz do segundo momento do tamanho do maior domínio e o primeiro momento $\sqrt{\mu_2}/\mu_1$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 52

Figura 2.8 - Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 3$ e diversos valores de q . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 53

Figura 2.9 - Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 3$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 53

Figura 2.10 - Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 55

Figura 2.11 - Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 60

Figura 2.12 - Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 60

Figura 2.13 - Dependência da razão entre a raiz do segundo momento do tamanho do maior domínio e o primeiro momento $\sqrt{\mu_2}/\mu_1$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 61

Figura 2.14 -Dependência do valor de $\hat{q}$ em que as curvas para diferentes tamanhos de rede da figura 2.13 se cruzam $\hat{q}_{cruz}$ com o inverso do tamanho enumerador $1/L_{med}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$. A linha contínua representa a extrapolação linear dos pontos. 61

Figura 2.15 -Dependência do parâmetro de ordem $\mu_1 = \langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . A linha contínua representa a função $0.21(3.55 - \hat{q})$ obtida ajustando os dados da curva com $L = 200$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 63

Figura 2.16 -Dependência da relação de escala $L^{\beta/\nu} \mu_1$ com $L^{1/\nu}(\hat{q} - \hat{q}_c)$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $\beta = 1$, $\nu = 2$, $\hat{q}_c = 3.55$, $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. . 63

Figura 2.17 -Dependência da flutuação do tamanho do maior domínio $\mu_2 - \mu_1^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 64

Figura 2.18 -Realização do maior domínio de uma configuração absorvente para $F = 2$, $\hat{q} = 2$ e $L = 200$ com condições abertas de contorno. 64

Figura 2.19 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 66

Figura 2.20 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 66

Figura 2.21 -Dependência do valor de $\hat{q}$ em que as curvas para diferentes tamanhos de rede da figura 2.20 se cruzam $\hat{q}_{\text{cruz}}$ com o inverso do tamanho enumerador $1/L_{\text{med}}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 3$. A linha contínua representa a extrapolação linear dos pontos. 67

Figura 2.22 -Dependência da relação de escala $\langle N_d \rangle / L^2$ com $L^{1/\nu} (\hat{q} - \hat{q}_c)$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $\nu = 2$, $\hat{q}_c = 20.9$, $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 67

Figura 2.23 -Evolução do modelo de Axelrod unidimensional com parâmetros $F = 2$, $q = 2$ e $L = 100$. O eixo das abscissas mostra a posição dos sítios na cadeia e o eixo das ordenadas, o tempo. A dinâmica converge para uma configuração absorvente monocultural. 70

Figura 2.24 -Evolução do modelo de Axelrod unidimensional com parâmetros $F = 2$, $q = 2$ e $L = 100$. O eixo das abscissas mostra a posição dos sítios na cadeia e o eixo das ordenadas, o tempo. A dinâmica converge para uma configuração multicultural. 70

Figura 2.25 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 72

Figura 2.26 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{\text{max}} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 72

Figura 2.27 -Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 73

Figura 2.28 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 73

Figura 2.29 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 76

Figura 2.30 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 76

Figura 2.31 -Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 77

Figura 2.32 -Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty = n_F$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod unidimensional uniforme para diversos valores de F . As linhas contínuas representam as soluções numéricas do sistema 3.48. 77

Figura 2.33 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações. 78

Figura 2.34 -*Dependência do tamanho médio normalizado do maior domínio $\langle S_{max} \rangle/L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme para diversos valores de F e q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.* 79

Figura 2.35 -*Diagrama de fases do modelo de Axelrod unidimensional no espaço (F, q) com fatores culturais iniciais determinados por uma distribuição de probabilidade uniforme no conjunto de inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$. A linha contínua representa a estimativa obtida via análise de pontos críticos do sistema 3.48.* 80

Figura 2.36 -*Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle/L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.* 83

Figura 2.37 -*Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.* 83

Figura 2.38 -*Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle/L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.* 84

Figura 2.39 -*Dependência do número médio de domínios normalizado menos um $\langle N_d \rangle/L^2 - 1$ com a grandeza $\hat{q}^2 L$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.* 84

Figura 2.40 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações. 85

Figura 2.41 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o a grandeza $\hat{q}L^{1/2}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações. 85

Figura 2.42 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 87

Figura 2.43 -Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 87

Figura 2.44 -Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 88

Figura 2.45 -Dependência do número médio de domínios normalizado menos um $\langle N_d \rangle / L^2 - 1$ com a grandeza $\hat{q}^2 L$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 88

Figura 2.46 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações. 89

Figura 2.47 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o a grandeza $\hat{q}L^{1/3}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações. 89

Figura 2.48 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 4$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 91

Figura 2.49 -Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 4$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 91

Figura 2.50 -Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 92

Figura 2.51 -Dependência Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $(1 - \langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 4$ e diversos valores de $\hat{q}$. A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações. 92

Figura 2.52 - Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano para diversos valores de F	93
Figura 3.1 - Dependência do único autovalor não nulo e não complexo μ com o parâmetro λ na aproximação de campo médio proposta por Vilone e colaboradores para o modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $\rho = 0, 0.1, \dots, 1$ diversos valores de F	121
Figura 3.2 - Diagrama de fases do modelo de Axelrod unidimensional no espaço (F, q) com fatores culturais iniciais determinados por uma distribuição de probabilidade uniforme no conjunto de inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$. A linha contínua representa a estimativa obtida via análise de pontos críticos do sistema 3.48.	123
Figura 3.3 - Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty = n_F$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod unidimensional uniforme para diversos valores de F . As linhas contínuas representam as soluções numéricas do sistema 3.48.	123
Figura 4.1 - Diagrama de fluxo com o algoritmo proposto por Shibana e colaboradores (27) para a inserção de uma mídia externa (campo externo) no modelo de Axelrod.	128
Figura 4.2 - Diagrama de fluxo com o algoritmo utilizado nas simulações do modelo de Axelrod com influência de um campo externo genérico.	130
Figura 4.3 - Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.	133

Figura 4.4 - Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. . . 133

Figura 4.5 - Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural cujos fatores culturais são totalmente distintos do campo $1 - \zeta_m/\zeta_h$ com a área da rede L^2 no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . As linhas contínuas representam as extrapolações dos pontos via mínimos quadrados. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 134

Figura 4.6 - Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . A linha contínua representa a fração $(1 - 1/q)^F$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 136

Figura 4.7 - Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio no limite termodinâmico $(1 - \langle S_{max} \rangle / L^2)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$ e $q = 5$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 136

Figura 4.8 - Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 139

Figura 4.9 - Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 139

Figura 4.10 -Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L^2)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod bidimensional sobre influência de diversos campos com $F = 2$ e $q = 8$ 141

Figura 4.11 -Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L^2)_\infty$ com a intensidade do campo p , para p pequeno, no modelo de Axelrod bidimensional sobre influência de diversos campos com $F = 2$ e $q = 8$ 141

Figura 4.12 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 142

Figura 4.13 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 142

Figura 4.14 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo local com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 143

Figura 4.15 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 3$ e diversos valores de p . A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 146

Figura 4.16 -Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico

$(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod unidimensional sobre a influência de um campo estático com $F = 5$ e $q = 3$. A linha contínua representa o ajuste via método de mínimos quadrados pela função $(3.3 \pm 0.2)p^{2.67 \pm 0.02}$ 146

Figura 4.17 -Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional

uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 3$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. . 147

Figura 4.18 -Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio

$1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 3$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. . 147

Figura 4.19 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho

da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 149

Figura 4.20 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho

da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 149

Figura 4.21 -Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico

$(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod unidimensional sobre influência de diversos campos com $F = 5$ e $q = 10$ 150

Figura 4.22 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 152

Figura 4.23 -Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 152

Figura 4.24 -Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo local com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações. 153

Figura E.1 - Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sujeito à perturbações de um único agente com $F = 2$, $q = 10$ e diversos valores de c . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^3$ realizações. 190

Sumário

1	Introdução	31
2	O Modelo de Axelrod	41
2.1	Modelagem	43
2.2	Simulações de Monte Carlo do modelo bidimensional	46
2.2.1	Distribuição inicial uniforme	47
2.2.2	Distribuição inicial de Poisson	57
2.3	Simulações de Monte Carlo do modelo unidimensional	68
2.3.1	Distribuição inicial uniforme	69
2.3.2	Distribuição inicial de Poisson	81
2.4	Comentários finais	94
3	Aproximações de Campo Médio	97
3.1	Distribuição de sítio único	98
3.1.1	Distribuição de sítio único para $F=2$	98
3.1.2	Distribuição de sítio único para F geral	101
3.2	Aproximação de pares	102
3.2.1	Aproximação de pares para $F = 2$	103
3.2.2	Aproximação de pares de Vilone e colaboradores	109

3.2.3	Estimativa do ponto crítico	116
3.2.4	Comparação com as simulações	121
3.2.5	Comentários finais	122
4	Efeito do campo externo no modelo de Axelrod	125
4.1	Modelagem	127
4.2	Simulações de Monte Carlo do modelo bidimensional	131
4.2.1	Campo Estático e Campo de Consenso	131
4.2.2	Campo Local	140
4.3	Simulações de Monte Carlo do modelo unidimensional	144
4.3.1	Campo Estático e Campo de Consenso	144
4.3.2	Campo Local	151
5	Conclusão	155
	Referências	159
	Apêndice A – Cálculo da interação entre agentes	163
	Apêndice B – Contagem de domínios	165
B.1	Contagem em uma rede bidimensional - Algoritmo de Hoshen e Kopelman	165
B.2	Contagem em uma cadeia unidimensional	172
	Apêndice C – Estrutura de Dados	175
C.1	Estrutura recorrente	176
C.2	Lista de ativos	181

Apêndice D – Cálculo dos campos de consenso global e local	185
--	-----

Apêndice E – Perturbação do regime heterogêneo no modelo unidimensional	189
---	-----

1 *Introdução*

O uso de modelos baseados em agentes no estudo da dinâmica de rumores ou opiniões e da difusão cultural vem atraindo a atenção de cientistas políticos, físicos e cientistas da computação, pois essa abordagem reducionista traz esperança de um entendimento da dinâmica de sistemas sociais baseado apenas em uns poucos princípios básicos que regem as interações entre indivíduos. (1) Apesar desse assunto estar em voga atualmente, (2, 3) a conjunção da Mecânica Estatística com a Sociologia foi proposta já na década de 40 por Ettore Majorana. (4) Majorana parte da observação de que um sistema social apresenta diversos graus de liberdade e, analogamente a um problema de muitos corpos, como, por exemplo, um gás interagente, poderíamos estudá-lo com as técnicas da mecânica estatística. (5) A implementação das ideias de Majorana foi realizada pioneiramente por Galam e colaboradores em seu artigo de 1982, (6) onde os autores propõem o termo *sociofísica* como nomenclatura para a abordagem de Majorana. Atualmente, há uma grande variedade de modelos estocásticos baseados em agentes que simulam diversos efeitos no campo da sociologia. Por exemplo, há modelos de dinâmica de opinião como o modelo do voto, (7) o modelo do voto da maioria (8) e o modelo de Sznaid. (9) Há também modelos de evolução cultural como o modelo de Axelrod (10) e modelos de evolução linguística. (11) Nesta tese, vamos concentrar nossa atenção no modelo proposto pelo cientista político Robert Axelrod em 1997, que foi formulado com o objetivo principal de responder a seguinte questão: (10) Supondo que ao interagir as partes interagentes sempre cheguem a um consenso, como podemos explicar a existência da diversidade de opiniões em uma comunidade ou, pensando mais globalmente, da diversidade cultural na civilização humana?

Na formulação original do modelo de Axelrod, cada agente é caracterizado por

um vetor de F componentes inteiras cujos valores variam entre 1 e q , com $q \geq 2$. Essas componentes são denominadas de fatores culturais do agente. Os agentes são organizados em uma rede quadrada com condições de contorno abertas, e interagem apenas com os seus vizinhos mais próximos (vizinhança de von Neumann). A interação entre agentes é definida como a assimilação pelo agente alvo, escolhido aleatoriamente, de um dos fatores culturais distintos de seu vizinho. Essa assimilação ocorre com uma probabilidade proporcional à similaridade cultural dos agentes interagentes, definida como a razão entre o número de fatores culturais em comum entre o agente alvo e seu vizinho e o número total fatores culturais F . Para uma melhor descrição da interação no modelo de Axelrod, veja o apêndice A. Em resumo, partindo-se de uma rede de agentes com fatores culturais escolhidos aleatoriamente, a simulação do modelo de Axelrod é a repetição de três passos: (i) escolhe-se o sítio alvo, (ii) escolhe-se um dos seus vizinhos, e (iii) realiza-se a interação seguindo as regras do modelo de Axelrod. Esse procedimento leva invariavelmente a uma configuração absorvente, na qual os fatores culturais dos agentes ficam congelados pois as regras do modelo não são mais capazes de alterá-los. Simulando redes pequenas (a maior delas foi uma rede quadrada 20×20), Axelrod descobriu que ajustando os valores dos parâmetros F e q poderia obter estados absorventes caracterizados por um ou por vários domínios culturais. Por exemplo, em 10 simulações de uma rede quadrada com 10×10 sítios e $F = 5$ fixo, Axelrod observou apenas configurações absorventes monoculturais para $q = 5$ mas observou configurações multiculturais com 20 ± 10 domínios para $q = 15$. (10) A resposta à questão proposta inicialmente vem com a probabilidade não nula do sistema atingir uma configuração absorvente multicultural, isto é, configurações absorventes em que vários conjuntos de fatores culturais (domínios) coexistem, mesmo que a única interação existente seja tal que aumente a similaridade dos elementos interagentes. Naturalmente, isso só é possível porque as regras do modelo de Axelrod proíbem a interação entre agentes que não exibem nenhum fator cultural em comum, ou seja, são interações homofílicas.

Devido a simplicidade de sua dinâmica e de seus estados absorventes não triviais, o

modelo de Axelrod tem atraído bastante atenção da comunidade científica. São encontrados frequentemente na literatura trabalhos cujo foco é a alteração da regra de adjacência do modelo. O primeiro trabalho nessa linha foi o de Kennedy em 1998. (12) Esse autor removeu a restrição da probabilidade de interação ser proporcional à similaridade cultural, mostrando que esse ingrediente é o responsável pela existência dos estados absorventes desordenados, conforme mencionado acima. Além disso, Kennedy alterou drasticamente a regra de interação: ao invés de uma interação proporcional à similaridade cultural, soma-se os valores dos fatores culturais do agente alvo e do vizinho e, caso a soma do vizinho seja maior que a soma do agente alvo, a interação ocorre. Nessa variante sempre são atingidos estados absorventes completamente ordenados (todos os agentes da rede exibem o mesmo conjunto de fatores culturais) cujos fatores culturais dos agentes possuem valor igual ao máximo valor possível. Portanto, Kennedy propõe o uso deste tipo de interação como um algoritmo de otimização. (13) Vale lembrar que Kennedy foi um dos proponentes do popular método do enxame de partículas (em inglês: *particle swarm optimization*, PSO) em 1995. (14) Reiterando o comentado anteriormente, diversos autores focaram seus estudos em variantes da regra de adjacência: Dybiec e colaboradores (15) introduzem a possibilidade dos agentes discutirem, Radillo e colaboradores (16, 17) introduzem um termo repulsivo, isto é, uma probabilidade não nula dos agentes divergirem em suas opiniões e, diferentemente dos resultados de Kennedy, esses autores mostram que suas propostas preservam os estados absorventes desordenados.

Do ponto de vista da física estatística, um trabalho de grande importância para o desenvolvimento do modelo de Axelrod veio com Castellano e colaboradores. (18) Esses autores mostraram através de simulação de redes grandes que, de fato, havia uma transição de fase no espaço de parâmetros (F, q) no limite termodinâmico e, com o intuito de caracterizar a transição de fase na vizinhança do ponto crítico, alteraram a distribuição uniforme de fatores culturais iniciais para uma distribuição de Poisson. No modelo original, cada fator cultural de cada agente tem probabilidade $1/q$ de assumir um dos valores inteiros $1, 2, \dots, q$ na configuração inicial. Já na versão de Castellano e colaboradores cada

fator cultural inicial de cada agente é uma variável aleatória de Poisson, ou seja, a probabilidade do valor inicial do fator cultural $j = 1, \dots, F$ do agente $i = 1, \dots, L^2$ assumir o valor $k = 0, 1, \dots$ é dada pela distribuição

$$P(\sigma_{i,j} = k) = e^{-\hat{q}} \frac{\hat{q}^k}{k!}. \quad (1.1)$$

A característica marcante e fundamental para essa proposta é a natureza do parâmetro de controle $\hat{q}$: na proposta original, q é um parâmetro discreto e na variante de Castellano e colaboradores $\hat{q}$ é um real positivo. Esses autores mostraram que essa mudança não altera qualitativamente o comportamento do modelo na rede quadrada estudada, posto que ainda é observado uma transição de fase entre dois regimes distintos os quais associaremos nessa etapa aos regimes mono e multicultural. Assim, a alteração da natureza do parâmetro de controle de inteiro para real possibilita o estudo do comportamento do modelo de Axelrod próximo ao ponto crítico.

Outra classe de variante do modelo de Axelrod comumente encontrada na literatura e fundamental para essa tese é aquela em que o foco está na alteração da conectividade dos agentes. Ou seja, são consideradas topologias alternativas àquela proposta originalmente (rede bidimensional quadrada). O primeiro trabalho com esse enfoque foi o de Vilone e colaboradores em 2002 (19) que estudou a versão unidimensional do modelo de Axelrod. Esses autores analisaram a natureza dos estados absorventes com fatores culturais iniciais distribuídos tanto pela distribuição uniforme como pela distribuição de Poisson, e mostraram que a redução da dimensionalidade não altera qualitativamente o comportamento do modelo, já que, independentemente da estrutura (cadeia 1D ou rede 2D) e da distribuição de probabilidade dos fatores culturais iniciais (uniforme ou Poisson) sempre é observado uma transição de fase. Entretanto, argumentaremos nesta tese que para a distribuição de Poisson não há evidências dessa transição na variante unidimensional do modelo. Em particular, nesse caso encontramos apenas uma fase multicultural formada por domínios microscópicos no limite termodinâmico.

Posteriormente ao trabalho de Vilone e colaboradores, diversas proposições para a

topologia do sistema foram publicadas utilizando, além da variação da dimensionalidade, modelos de redes complexas tais como redes livre de escala, redes mundo pequeno, redes completamente conectadas, Barabási-Albert, entre outras. (20–22) Entretanto, não observamos nesses estudos uma análise sistemática da transição de fase: tipicamente altera-se a conectividade dos sítios, descreve-se a evolução temporal do modelo proposto e em seguida apresenta-se uma breve discussão da natureza do estado absorvente. Não encontramos discussões sobre a natureza ou os parâmetros críticos da transição de fase nesses trabalhos. Ainda na linha de mudança da topologia do sistema, há na literatura diversos trabalhos em que a vizinhança de cada agente exibe uma dependência temporal, ou seja, dada uma regra pré-definida, cada agente tem uma probabilidade não nula de inserir ou remover agentes de sua vizinhança. (15, 23–26) Para essa classe de variante, são obtidos inúmeros resultados distintos, já que a condição homofílica da interação de Axelrod pode ser “burlada” ao trocarmos a vizinhança.

Além das contribuições já comentadas, uma variante de suma importância para essa tese, bem como para o desenvolvimento do modelo de Axelrod de forma geral, foi a proposta de Shibantai e colaboradores (27) de introduzir um campo externo, implementado como um vizinho fictício comum a todos os elementos da rede, e que desempenha o papel de uma mídia externa. Essa proposição insere na atualização do modelo uma condição adicional, já que, após escolhermos o sítio alvo, devemos escolher quem o influenciará: sua vizinhança ou a mídia externa. A “força” da influência desse campo é definida *a priori* através de um parâmetro adicional $p \in [0, 1]$ que dá a probabilidade de interação com o vizinho fictício (campo externo). Nessa tese apresentaremos uma análise do modelo de Axelrod sob a influência da mídia externa em redes uni e bidimensionais (capítulo 4). Concluimos que, independentemente da forma do campo externo inserido, o efeito deste é destruir a transição de fase do modelo. Em outras palavras, o modelo sob a influência do campo externo atinge estados absorventes de uma única natureza, mono ou multicultural, dependendo da dimensionalidade da rede e do tipo de campo externo aplicado.

Outro resultado relevante para as conclusões obtidas nessa tese foi obtido por

Klemm e colaboradores. (28) Esses autores inseriram perturbações elementares no modelo, isto é, efetua-se a simulação de forma idêntica à proposta original, porém, no momento em que o sistema atinge uma configuração absorvente, altera-se aleatoriamente um fator cultural aleatório de um agente aleatório, e a dinâmica é então reiniciada. Repetindo-se exaustivamente esse procedimento, aqueles autores demonstraram que estados monoculturais são estáveis frente a esse tipo de perturbação, isto é, independentemente do número de perturbações efetuadas, um sistema que atingiu um estado absorvente monocultural só se estabiliza novamente em um outro estado monocultural. Entretanto, os estados absorventes multiculturais são instáveis, visto que, após um certo número de perturbações, a rede se homogeneiza, e todos os estados absorventes seguintes mantêm a natureza monocultural.

Um resultado que vale a pena mencionar aqui foi obtido por Pace e Prado. (29) Nesse trabalho a alteração da modelagem original vem da tentativa de otimização computacional da implementação das regras do modelo de Axelrod. Os autores escolhem os sítios alvos em uma estrutura extra auxiliar que contém todos os sítios possíveis de sofrerem alterações (sítios ativos), ao invés de escolher aleatoriamente entre todos os sítios da rede. Em seguida escolhe-se um dos vizinhos possíveis desse sítio alvo, e, além disso, verifica-se novamente se o par vizinho/sítio alvo tem uma interação válida. Caso contrário, escolhe-se outro vizinho do sítio alvo. Esta metodologia enviesa a escolha aleatória, devido à segunda verificação, não gerando mais estados absorventes, mas sim estados metaestáveis e um efeito de tensão superficial nas fronteiras de cada domínio. Para recuperarmos o modelo original, uma vez escolhido o sítio alvo e o seu vizinho, caso não haja possibilidade de interação (ou seja, os fatores culturais são totalmente diferentes ou todos iguais) devemos escolher um outro sítio alvo aleatoriamente, e não percorrer seus vizinhos até encontrar um para o qual a interação seja válida. Nesta tese utilizamos uma otimização similar a utilizada por Pace e Prado, entretanto, não temos o viés da segunda escolha, pois em nosso caso armazenamos as ligações ativas, ou seja, nossa lista contém os pares sítio alvo/vizinho que possuem uma interação válida. Escolher ligações aleatoriamente

nessa lista e sortear qual dos agentes é o sítio alvo reproduz o modelo original.

Até aqui mencionamos apenas os trabalhos no modelo de Axelrod que se utilizam de simulações de Monte Carlo. Entretanto, são encontrados na literatura também alguns poucos resultados analíticos baseados em aproximações de campo médio e resultados exatos para o caso de dois estados e $q = 2$. (30–32) Nessa linha, o trabalho relevante para o estudo analítico aqui efetuado é o de Vilone e colaboradores. (19) Esses autores propõem uma aproximação de pares para a variante unidimensional do modelo de Axelrod, mas o método utilizado não apresenta uma forma consistente de aumentarmos a ordem da aproximação. Proporemos neste trabalho uma forma alternativa da aproximação de pares para $F = 2$ a qual, em princípio, apresenta uma forma consistente de aumento de ordem da aproximação, mas essa generalização não será realizada nessa tese.

Nessa tese apresentaremos um estudo da transição de fase e do efeito do campo externo no modelo de Axelrod uni e bidimensional. Na primeira parte da tese, estudaremos o modelo livre da influência do campo externo (capítulo 2) em uma e duas dimensões e com fatores culturais iniciais distribuídos por uma distribuição uniforme e por uma distribuição de Poisson. Descreveremos os resultados das simulações numéricas (seção 2.2 e 2.3) do modelo para diferentes valores dos parâmetros de controle F e q , e mostraremos que, no limite termodinâmico, há dois regimes distintos: um regime ordenado com configurações absorventes caracterizadas por pelo menos um domínio macroscópico e um regime desordenado com configurações absorventes caracterizadas por um número extensivo de domínios microscópicos. No caso bidimensional observamos uma transição de fase contínua para $F = 2$ e uma transição descontínua para $F = 3$ independentemente da distribuição de probabilidades (uniforme ou Poisson) usada para gerar os fatores culturais iniciais. Como comentado anteriormente, a distribuição uniforme (subseção 2.2.1) não nos permite estudar a fundo a natureza da transição mas no caso da distribuição de Poisson (subseção 2.2.2) foi possível estimar os valores de alguns expoentes críticos que caracterizam a transição contínua a qual conjecturamos pertencer a classe de universalidade da percolação direcionada compacta. (33) No caso unidimensional, não encontra-

mos evidência da existência de uma fase ordenada e, portanto, de uma transição de fase quando os fatores culturais iniciais obedecem a distribuição de Poisson (subseção 2.3.2). Para a distribuição uniforme (subseção 2.3.1), encontramos as duas fases como no caso bidimensional e traçamos o diagrama de fases no espaço (F, q) . Por fim, encerrando o estudo do modelo livre, apresentaremos duas aproximações de campo médio para o modelo de Axelrod livre unidimensional (vide capítulo 3). O primeiro cálculo (vide seção 3.1) começou como uma aproximação de sítio único mas acabou resultando num cálculo exato da distribuição de sítio único, já que não foi necessário efetuar nenhuma aproximação. Infelizmente, a distribuição de sítio único mostrou-se desinteressante por ser independente da dinâmica e, portanto, coincidir com a distribuição inicial de fatores culturais. Com isso em mente, passamos para uma aproximação de pares (vide seção 3.2) para o caso $F = 2$. Obtivemos resultados idênticos aos de Vilone e colaboradores. (19) Nossa abordagem apresenta uma forma coerente e autônoma de aproximação de campo médio mas a generalização para $F > 2$ é extremamente complexa de modo que para tratar esse caso geral utilizamos o esquema de aproximação proposto por aqueles autores. Vale ressaltar que, como esperado, a aproximação de pares não representa bem o sistema próximo ao regime crítico. Isto é mostrado explicitamente na previsão $q_c = F$ não condizente com os resultados obtidos via simulações de Monte Carlo.

Na segunda parte dessa tese (capítulo 4), analisaremos o efeito de um campo externo no modelo de Axelrod. Na proposta original de Shibantai e colaboradores, (27) esse campo externo é implementado como um vizinho fictício comum a todos os agentes da rede, e cada agente tem uma probabilidade p de interagir com esse vizinho fictício. Três implementações distintas para esse campo são analisadas: uma influência externa, constante e indiferente ao estado da rede (Campo Estático), a influência do consenso de todos os agentes (Campo de Consenso) e a influência do consenso da vizinhança de cada agente (Campo Local). Para cada um dos três diferentes tipos de campo externo analisaremos sua influência nos dois regimes do modelo (ordenado e desordenado) nas redes uni e bidimensionais, mostrando que o efeito do campo externo é eliminar um

desses dois regimes.

2 *O Modelo de Axelrod*

O objetivo deste capítulo é estudar a natureza das configurações absorventes do modelo proposto em 1997 pelo cientista político Robert Axelrod (10) a fim de descrever a disseminação cultural em uma rede quadrada bidimensional. Além disso, analisaremos a variante unidimensional do modelo de Axelrod proposta por Vilone e colaboradores. (19) Nosso interesse nessa variante foi motivado pela enorme redução do esforço computacional necessário à execução das simulações e pela esperança de que a redução de dimensionalidade não resultasse em nenhuma mudança qualitativa das propriedades estatísticas das configurações absorventes. Ademais, a variante unidimensional presta-se a um estudo analítico por meio da aproximação de campo médio, que será tratada no capítulo 3. Como veremos na seções seguintes, essa expectativa revelou-se correta no caso em que os fatores culturais iniciais dos agentes são escolhidos de forma independente segundo uma distribuição uniforme no conjunto de inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$, que é a forma de escolha originalmente usada por Axelrod. Entretanto, no caso em que os fatores culturais são escolhidos de forma independente segundo uma distribuição de Poisson com parâmetro $\hat{q}$ de modo que os fatores culturais assumem agora valores inteiros $k = 0, 1, 2, \dots$ com pesos $e^{-\hat{q}}\hat{q}^k/k!$, a versão unidimensional resultou muito mais difícil de tratar do que a versão bidimensional. Essa modificação na forma de escolha da configuração inicial foi proposta por Castellano e colaboradores (18) com o intuito de analisar o comportamento do modelo próximo à transição de fase. De fato, a forma da escolha dos fatores culturais iniciais não altera nenhuma característica da transição de fase observada na rede bidimensional. Sabemos da literatura (10, 18, 34) que o modelo de Axelrod na rede quadrada exibe uma transição de fase de um regime monocultural, onde todos os agentes apresentam o mesmo estado ao final da simulação, para um regime multicultural onde agentes com estados

distintos coexistem na rede.

Esta exposição tem como foco o estudo da transição de fase entre os regimes monocultural e multicultural por meio de simulações computacionais. Nosso objetivo é verificar a existência da transição de fase tanto no caso unidimensional (1D) como no bidimensional (2D) e, dentro do possível, caracterizar a transição usando a teoria de escala finita. No caso da distribuição uniforme de fatores culturais iniciais encontramos uma transição de fase bem definida em 1D e 2D. Mas, não podemos caracterizá-la adequadamente pois os parâmetros do modelo são todos discretos e, portanto, não se pode estudar a região próxima ao parâmetro crítico. No caso da distribuição de Poisson de fatores culturais iniciais encontramos uma transição contínua para $F = 2$ e descontínua para $F \geq 3$ em 2D (similarmente ao encontrado para a distribuição uniforme). Entretanto, não encontramos evidência de transição de fase em 1D, em oposição a análise preliminar de Vilone e colaboradores. (19) Veremos nesse capítulo que a denominação das fases não é apropriada e proporemos uma denominação mais simples: se o estado absorvente exibe pelo menos um domínio macroscópico no limite termodinâmico teremos a fase *ordenada*, caso contrário, ou seja, se todos os domínios forem microscópicos então teremos a fase *desordenada*.

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na seção 2.1 apresentaremos os elementos básicos da modelagem proposta por Axelrod: a estrutura do sistema, as características de cada agente e a forma como eles interagem no decorrer da simulação. Além disso, mostraremos como foi feita a alteração de dimensionalidade proposta. Nas seções 2.2 e 2.3 exibiremos os resultados das simulações 2D e 1D, respectivamente. Essas seções são divididas da mesma maneira: primeiramente apresentaremos uma subseção destinada às simulações cuja distribuição de fatores culturais iniciais é uniforme (subseções 2.2.1 e 2.3.1) e, em seguida, apresentaremos uma subseção com a variante em que os fatores culturais iniciais são determinados pela distribuição de Poisson (subseções 2.2.2 e 2.3.2).

2.1 Modelagem

Em sua formulação original, (10) o modelo de Axelrod de disseminação cultural é um modelo baseado em agentes, em que cada agente é caracterizado por um conjunto de F fatores culturais, os quais possuem q valores distintos possíveis, isto é, cada agente é representado por um vetor de F componentes, cada qual pertencente ao conjunto $\{1, 2, \dots, q\}$. Por exemplo, o conjunto $[1, 2, 2, 1, 1]$ é um estado possível de um agente para os parâmetros $F = 5$ e $q \geq 2$.

Na proposta original de Axelrod os agentes permanecem fixos em uma rede quadrada bidimensional com L^2 sítios e interagem apenas com seus vizinhos mais próximos (vizinhança de von Neumann). Seguindo a formulação original, no estudo da rede bidimensional usaremos exclusivamente condições de contorno abertas, de modo que agentes situados nas bordas da rede possuem uma vizinhança menor do que aqueles situados no interior da rede. Em particular, agentes situados nas arestas da rede quadrada possuem três vizinhos enquanto que os situados nos cantos possuem apenas dois vizinhos. Naturalmente, agentes no interior da rede possuem quatro vizinhos. As condições de contorno abertas facilitam a contagem do número de domínios e de seus tamanhos pelo algoritmo de Hoshen e Kopelman (35, 36) (vide apêndice B para uma discussão detalhada da implementação deste algoritmo). Já para a variante unidimensional, usaremos condições abertas de contorno no caso da distribuição uniforme de fatores culturais e condições periódicas de contorno (anel) no caso da distribuição de Poisson de fatores culturais. A razão para essa mudança foi a necessidade de compararmos quantitativamente nossos resultados para cadeias pequenas com os de Vilone e colaboradores. (19) Entretanto, como o foco de nosso estudo é a obtenção do comportamento do sistema no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$), a escolha da condição de contorno torna-se irrelevante nesse caso (verificamos isso no caso unidimensional). Vale ressaltar que a variável que representa o tamanho do sistema nos casos 1D e 2D será definida por L . Usaremos a denominação agente e sítio de forma intercambiável nessa tese.

Figura 2.1 – Diagrama de fluxo com o algoritmo utilizado na simulação das regras de interação do modelo de Axelrod.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A interação entre agentes começa com a escolha aleatória de um elemento da rede (agente alvo) e de um de seus vizinhos. Em seguida, com probabilidade diretamente proporcional a similaridade cultural entre esses dois agentes, definida como a fração de fatores culturais em comum entre eles, um dos fatores distintos do agente alvo é igualado ao respectivo fator de seu vizinho (vide figura 2.1 e apêndice A para maiores detalhes).

Conforme já mencionado, consideraremos duas possibilidades ou situações para a inicialização da simulação, ou seja, para a construção da configuração inicial da rede. Na primeira situação que segue a formulação original de Axelrod, geramos cada fator cultural de cada agente de forma independente segundo uma distribuição uniforme no conjunto de inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$, isto é, cada fator cultural de cada agente é escolhido aleatoriamente com uma probabilidade constante $1/q$ (subseções 2.2.1 e 2.3.1). Na segunda situação que segue a variante proposta por Castellano e colaboradores, (18) geramos cada fator cultural de cada agente de forma independente segundo uma distribuição de Poisson de parâmetro $\hat{q}$ (subseções 2.2.2 e 2.3.2), ou seja, a probabilidade do j -ésimo fator cultural do i -ésimo

agente $(\sigma_{i,j})$ assumir o valor $k = 0, 1, \dots$ em $t = 0$ é dada por

$$P(\sigma_{i,j} = k) = e^{-\hat{q}} \frac{\hat{q}^k}{k!}. \quad (2.1)$$

Com a configuração inicial definida, repete-se exaustivamente o processo ilustrado na figura 2.1 até o sistema atingir um estado absorvente. Este é um estado em que cada agente possui uma vizinhança cujos fatores culturais são totalmente idênticos ou completamente distintos do agente em questão.

Devido ao enorme número de iterações necessárias para o sistema atingir os estados absorventes, foi proposta a inserção de uma estrutura auxiliar - a lista de ligações ativas (para detalhes específicos da implementação desta seção veja o apêndice C). Essa lista exhibe todos os pares sítio alvo e vizinho cuja interação possa resultar na mudança da rede. Assim, em vez de escolhermos aleatoriamente um agente na rede, como proposto originalmente por Axelrod, escolhemos aleatoriamente um elemento dessa lista. É de suma importância lembrar que o fato de uma ligação ser ativa não garante a ocorrência da interação: a interação ocorre com probabilidade proporcional à similaridade entre os dois agentes associados a ligação ativa selecionada. A inserção dessa nova estrutura no nosso programa aumenta o número de operações por atualização da rede. Entretanto, essa abordagem diminui significativamente o número de atualizações necessárias para atingir um estado absorvente, aumentando a eficiência do código em algumas ordens de grandeza. Outra vantagem dessa estrutura é a obtenção de um critério sistemático de parada, pois o sistema atinge um estado absorvente quando a lista de ativos esvazia-se. Portanto, a simulação resume-se em repetir as operações da figura 2.1, sendo os agentes interagentes dados pela particular ligação ativa, até a lista ser esvaziada.

2.2 Simulações de Monte Carlo do modelo bidimensional

Nesta seção apresentaremos os resultados das simulação computacionais do modelo de Axelrod em uma rede quadrada bidimensional com L^2 sítios. Três funções de estados serão usadas para caracterizar as configurações absorventes do modelo: o número médio de domínios normalizado pelo número de agentes $\langle N_d \rangle / L^2$, o tamanho médio do maior domínio normalizado pelo número de agentes $\langle S_{max} \rangle / L^2$, e a fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h . Em todas as simulações dessa seção foram utilizadas condições de contorno abertas. Para uma discussão detalhada do algoritmo utilizado na obtenção dessas funções veja o apêndice B.

Primeiramente vamos considerar o caso em que os fatores culturais iniciais são gerados pela distribuição uniforme nos inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$ (subseção 2.2.1). Devido à alta demanda computacional (o modelo no regime monocultural apresenta uma complexidade $O(L^4)$ intrínseca), vamos considerar apenas os casos $F = 2$ e $F = 3$ que são suficientes para entendermos a natureza das fases e a ordem da transição de fase para F geral. A impossibilidade prática de se obter resultados para o diagrama de fases do modelo bidimensional no espaço de parâmetros (F, q) nos levou a investigar o modelo unidimensional (subseção 2.3.1). A seguir, iremos considerar a variante proposta por Castellano e colaboradores (18) em que os fatores culturais iniciais são dados por uma distribuição de Poisson de parâmetro $\hat{q}$ (subseção 2.2.2). Essa variante foi proposta justamente para possibilitar o estudo do comportamento do sistema próximo ao ponto crítico, posto que o parâmetro $\hat{q} \in [0, \infty)$ não está restrito ao conjunto de inteiros. Vale ressaltar que nesse caso não há uma restrição fixa do intervalo de valores que um fator cultural pode assumir inicialmente, ou seja, mesmo para $\hat{q}$ pequeno, há uma probabilidade não nula de um fator cultural de um agente da rede assumir um valor inteiro arbitrariamente grande. Como já mencionado, as duas formas de escolha dos fatores culturais iniciais – distribuição uniforme ou Poisson – produzem os mesmos resultados.

2.2.1 Distribuição inicial uniforme

Nesta subseção mostraremos os resultados das simulações do modelo de Axelrod bidimensional com fatores culturais iniciais escolhidos aleatoriamente segundo uma distribuição uniforme no conjunto dos inteiros $1, 2, \dots, q$. Essa é a versão original do modelo proposto por Axelrod. Relembrando o comentado na seção de modelagem (seção 2.1), em cada simulação exibida nesta subseção os agentes estão fixos em uma rede quadrada bidimensional com L^2 sítios e condições de contorno abertas. Assim, cada agente interage apenas com seus primeiros vizinhos e, dados os parâmetros de controle do modelo q e F , cada um dos F fatores culturais de cada agente pode assumir inicialmente qualquer um dos q valores possíveis com probabilidade $1/q$. A dinâmica do modelo é a repetição do procedimento exibido na figura 2.1 até o sistema atingir um estado absorvente. Conforme já mencionado, as regras de interação de Axelrod promovem a homogeneização de um estado inicialmente fragmentado e a existência de estados absorventes multiculturais é devida ao vínculo da interação entre dois agentes vizinhos ser proporcional a sua similaridade cultural.

Iniciaremos nossa análise com o caso $F = 2$. Primeiramente, mostramos na figura 2.2 a dependência do número de domínios escalado pelo número de total agentes na rede $\langle N_d \rangle / L^2$ em função da dimensão linear L da rede. Observamos que, independentemente do valor de q , o sistema atinge um estado absorvente multicultural no limite $L \rightarrow \infty$. Concluimos isso pois os pontos não caem sobre a linha contínua da figura 2.2, essa sendo a função $1/L^2$ que descreve o estado absorvente monocultural ($\langle N_d \rangle = 1$). Ainda, uma vez que $\langle N_d \rangle / L^2$ parece tender a um valor constante para L grande podemos inferir que os estados absorventes multiculturais são caracterizados por um número extensivo de domínios. Essa é toda a informação que podemos extrair dessa figura.

A figura 2.3 exibe o comportamento da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h em função da dimensão linear da rede. Note que para $q = 2$ obtivemos uma mistura de amostras monoculturais e multiculturais sendo

Figura 2.2 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.3 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.4 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.5 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L^2)_{mul}$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de q . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

aproximadamente 30% das amostras monoculturais. Já para $q > 2$ praticamente todas as amostras são multiculturais para L grande.

Uma melhor compreensão da natureza dos estados absorventes pode ser obtida com a análise do comportamento do tamanho médio do maior domínio escalado pelo número total de agentes $\langle S_{max} \rangle / L^2$ que é mostrado na figura 2.4 como função da dimensão linear da rede L . Para valores pequenos de q (ou melhor, para $q < 7$ como mostraremos a seguir) observamos que $\langle S_{max} \rangle / L^2$ tende a um valor constante positivo no limite $L \rightarrow \infty$, sendo que esse valor limite diminui a medida que aumentamos q , como esperado. Este resultado significa que nesse regime de valores de q , o limite termodinâmico do modelo exibe pelo menos um domínio macroscópico ($\langle S_{max} \rangle / L^2 > 0$) juntamente com um conjunto extensivo de domínios microscópicos ($\langle N_d \rangle / L^2 > 0$). Por outro lado, para q grande (ou melhor, para $q \geq 7$) vemos que $\langle S_{max} \rangle / L^2$ tende a 0 no limite termodinâmico indicando que nessa situação temos domínios microscópicos apenas. Naturalmente, o número desses domínios deve ser extensivo em acordo com os resultados mostrados na figura 2.2.

Note que $\langle S_{max} \rangle / L^2$ pode ser considerado o parâmetro de ordem do modelo já que $\langle S_{max} \rangle / L^2 \rightarrow 0$ na fase multicultural totalmente fragmentada e $\langle S_{max} \rangle / L^2 > 0$ na fase com domínios macroscópicos. Por outro lado, $\langle N_d \rangle / L^2$ não é um parâmetro de ordem já que nunca se anula.

O caso $q = 2$ merece uma atenção especial devido à mistura de amostras mono e multiculturais: é necessário observar o comportamento do tamanho médio do maior domínio apenas considerando-se as amostras multiculturais. Essa grandeza é mostrada na figura 2.5 para todos os valores de q considerados. Como esperado, para L grande não há alteração nos resultados para $q > 2$, já que nesse caso raramente encontramos configurações absorventes monoculturais. Por outro lado, para $q = 2$ a retirada dessas configurações da estatística leva a uma considerável diminuição do tamanho do maior domínio, como esperado. Em particular, o maior domínio nesse caso abrange aproximadamente 60% dos sítios da rede. Assim, no limite termodinâmico as amostras multiculturais no caso $q = 2$

exibem as mesmas propriedades das amostras nos casos $q < 7$: há pelo menos um domínio macroscópico juntamente com um número extensivo de domínios microscópicos.

Os resultados exibidos até agora indicam a existência de uma transição de fase ocorrendo para algum valor de q entre 5 e 8. Uma forma eficaz de se determinar o parâmetro crítico e também obter alguma informação sobre a ordem da transição é plotar o parâmetro de ordem $\langle S_{max} \rangle / L^2$ contra q para diversos tamanhos de rede como mostrado na figura 2.6. Para $q < 7$ observamos que o valor do parâmetro de ordem tende a um valor positivo para L grande enquanto que para $q \geq 7$ o parâmetro de ordem tende a zero. Isso não é novidade alguma, mas o fato de não haver cruzamento entre as curvas para diferentes valores de L indica tratar-se de uma transição de fase contínua. Nesse caso é importante analisar o comportamento da razão $\sqrt{\mu_2}/\mu_1 \geq 1$, onde $\mu_2 = \langle S_{max}^2 \rangle / L^2$ é o segundo momento (média quadrática) do tamanho do maior domínio e $\mu_1 = \langle S_{max} \rangle / L^2$ é o primeiro momento (média). De acordo com a sugestão de Binder, (37) essa razão deve apresentar um cruzamento entre as curvas para diferentes tamanhos de rede caso ocorra uma transição de fase, independentemente da ordem. A análise dos cruzamentos permite uma boa estimativa do parâmetro crítico q_c . Com isso em mente, exibimos essa razão na figura 2.7, de onde podemos concluir que $q_c \in [6, 7]$. Não é possível definir exatamente o valor de q_c posto que o parâmetro de ordem q é um inteiro, portanto definimos para $F = 2$ $q_c = 6.5 \pm 0.5$, ou seja, temos com certeza uma fase ordenada em $q = 6$ e uma fase desordenada em $q = 7$.

Concluída a análise de $F = 2$, vamos discutir agora o caso $F = 3$, enfatizando as diferenças observadas no comportamento do modelo em relação ao estudo anterior. Analogamente ao efetuado para $F = 2$, nossa análise começa com a dependência do número médio de domínios escalado pelo número total de agentes da rede $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L mostrada na figura 2.8. Diferentemente dos resultados exibidos na figura 2.2, observa-se dois comportamentos nitidamente distintos: para valores de $q < 15$ vemos que $\langle N_d \rangle / L^2$ tende a zero no limite termodinâmico o que caracteriza uma fase com um número finito (isto é, não extensivo) de domínios enquanto que para $q > 15$ vemos

Figura 2.6 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.7 – Dependência da razão entre a raiz do segundo momento do tamanho do maior domínio e o primeiro momento $\sqrt{\mu_2}/\mu_1$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.8 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 3$ e diversos valores de q . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.9 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 3$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

que $\langle N_d \rangle / L^2$ tende a valores positivos indicando a presença de um número extensivo de domínios.

Somente a análise do tamanho do maior domínio pode nos dar mais informação sobre a natureza das duas fases observadas na figura 2.8. Nesse sentido, a figura 2.9 mostra a dependência do tamanho médio do maior domínio escalado pelo número total de agentes $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L . Observamos a existência de um domínio macroscópico que abrange todos os sítios da rede para L grande e valores pequenos de q , indicando a existência de uma fase monocultural. Por outro lado, para valores de $q > 15$ temos domínios de tamanho microscópico apenas, indicando a presença de uma fase multicultural totalmente fragmentada. Já para $q = 15$ observamos um comportamento problemático: embora para redes pequenas a tendência seja de uma fase multicultural, os resultados de redes grandes indicam uma tendência a fase monocultural. Mas, não é possível determinar o que realmente acontece para $q = 15$ com os tamanhos de rede considerados ($L \leq 200$). De fato, esse comportamento não monotônico é observado também para $q < 15$. Como veremos a seguir, o valor crítico separando essas duas fases deve estar próximo a $q = 15$. Em suma, a fase monocultural que ocorre para q pequeno é caracterizada pelo fato de todos os elementos da rede exibirem o mesmo conjunto de fatores culturais e a fase multicultural que ocorre para q grande é caracterizada pela presença de um número extensivo de domínios microscópicos. Os resultados na análise de ζ_h (não mostrados) corroboram essa conclusão. Em particular, para $q < 15$ encontramos uma mistura de amostras mono e multiculturais mas nos dois tipos temos a presença de um domínio gigante.

Podemos visualizar melhor a transição de fase para $F = 3$, bem como estimar o valor do parâmetro crítico q_c onde ocorre a transição apresentando $\langle S_{max} \rangle / L^2$ como função de q para valores fixos de L , como mostra a figura 2.10. Observamos claramente um cruzamento dos resultados para diferentes valores de L de forma a podermos afirmar que $\langle S_{max} \rangle / L^2 \rightarrow 1$ para $q < q_c$ e $\langle S_{max} \rangle / L^2 \rightarrow 0$ para $q > q_c$. O valor crítico encontra-se entre $q = 15$ e $q = 16$ e podemos conjecturar tratar-se de uma transição descontínua,

Figura 2.10 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod bidimensional uniforme com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

embora faça pouco sentido discutir a ordem da transição quando o parâmetro de controle do modelo é discreto. Observamos que para $F = 3$ tanto $\langle S_{max} \rangle / L^2$ como $\langle N_d \rangle / L^2$ podem ser vistos como parâmetros de ordem.

É possível afirmar que nossas conclusões para o caso $F = 2$, ou seja, a existência de uma fase com pelo menos um domínio macroscópico para $q < q_c$ e de uma fase multicultural composta apenas por domínios microscópicos para $q > q_c$, são válidas para o caso geral $F > 2$. Relembrando o comentado na seção de modelagem (seção 2.1), após a escolha aleatória de um elemento na lista de ligações ativas, o sítio alvo interagirá com seu vizinho próximo com uma probabilidade proporcional à similaridade cultural, de modo que, ao aumentarmos F mantendo q fixo, aumentamos a probabilidade de dois vizinhos interagirem, visto que isso aumenta a probabilidade de que os agentes tenham algum fator cultural em comum. Assim, se para os parâmetros q^* e F^* encontrarmos uma fase caracterizada por um domínio macroscópico, então essa fase certamente existirá para os parâmetros q^* e $F > F^*$ e podemos esperar que esse domínio macroscópico seja ainda

maior que antes. De fato, nossos resultados para $F = 2$ e $F = 3$ com $q < q_c$ confirmam essa previsão: para $F = 2$ temos (pelo menos) um domínio macroscópico e um número infinito de domínios microscópicos que juntos ocupam uma fração macroscópica de sítios da rede, mas para $F = 3$ temos apenas um domínio macroscópico que ocupa toda a rede. Podemos, então, garantir que existe uma fase com um domínio macroscópico para todo F no caso do modelo de Axelrod bidimensional e ainda que para $F \geq 3$ esse domínio ocupa toda a rede no limite termodinâmico.

Um argumento semelhante ao esboçado acima nos guia em relação a existência da fase multicultural totalmente fragmentada em que todos os domínios são microscópicos. Ora, se para os parâmetros q^* e F^* encontrarmos uma fase caracterizada por domínios microscópicos apenas, então essa fase certamente existirá para os parâmetros q^* e $F < F^*$ e podemos esperar que seja ainda mais fragmentada.

Nesse estágio, vamos introduzir uma denominação mais adequada para designar as fases do modelo, que foram referidas até o momento como monocultural e multicultural seguindo a nomenclatura da literatura da área. Naturalmente, essa nomenclatura não é adequada pois no caso $F = 2$ nos deparamos com uma transição de fase entre duas fases multiculturais. Vamos, portanto, denominar de fase *ordenada* qualquer fase que contenha pelo menos um domínio macroscópico, independente de seu tamanho, e de fase *desordenada* a fase caracterizada apenas por domínios microscópicos. Essa denominação fica natural se lembrarmos que o parâmetro q determina o grau de desordem da configuração inicial e que nos casos tratados até aqui a fase ordenada aparece na região de q pequeno e a fase desordenada na região de q grande. Naturalmente, a qualificação q pequeno ou grande depende do valor de F .

Finalmente, podemos oferecer um argumento intuitivo da razão de haver um cruzamento das curvas para diferentes tamanhos de rede no caso da existência de uma transição de fase continua. Primeiramente notemos que a razão $\sqrt{\mu_2}/\mu_1$ é uma medida adimensional da intensidade das flutuações. De fato, quando essa razão for 1 temos a variância

$\langle S_{max}^2 \rangle - \langle S_{max} \rangle^2 = 0$ que indica ausência de flutuações. Longe do ponto crítico, isto é, fase desordenada, vale a lei dos grandes números e podemos concluir que a variância escala com o número de agentes L^2 assim como o primeiro momento, daí temos $\sqrt{\mu_2}/\mu_1 = 1 + O(1/L)$ de modo que quanto maior L mais próximo a 1 será a razão. Próximo ao ponto crítico, esperamos que as flutuações tenham a escala da rede, ou seja, a raiz da variância escale com L^2 de modo que a razão $\sqrt{\mu_2}/\mu_1$ deve crescer com o aumento de L . Assim, devemos esperar um cruzamento dessa razão para diferentes valores de L .

2.2.2 Distribuição inicial de Poisson

Nessa subseção estudaremos o modelo de Axelrod em sua versão na rede quadrada de L^2 sítios com a distribuição inicial de fatores culturais dada pela distribuição de Poisson de parâmetro $\hat{q} > 0$. Essa utilizada primeiramente por Castellano e colaboradores (18) para estudar a transição entre as fases ordenada e desordenada observada na subseção anterior. Em particular, vamos supor que o valor inicial do fator cultural $j = 1, \dots, F$ do agente $i = 1, \dots, L^2$ assuma o valor $k = 0, 1, \dots$ segundo a distribuição de probabilidade

$$P(\sigma_{i,j} = k) = e^{-\hat{q}} \frac{\hat{q}^k}{k!}. \quad (2.2)$$

Algumas considerações devem ser feitas sobre a escolha dessa distribuição para os fatores culturais iniciais. Primeiro, temos que $\hat{q}$ é um número real positivo possibilitando, em princípio, o estudo do comportamento do modelo muito próximo ao ponto crítico (ou seja, a caracterização da transição de fase), o que é impossível no caso uniforme devido à natureza discreta do parâmetro q . Segundo, os valores que os fatores culturais podem assumir não são limitados. De fato, no caso uniforme, dado o parâmetro q , sabemos exatamente quais os finitos valores possíveis que cada fator cultural pode assumir (isto é, $1, 2, \dots, q$), mas na variante Poissoniana, independentemente do valor de $\hat{q}$, há uma probabilidade não nula de termos fatores culturais arbitrariamente grandes. Apesar disso, mostraremos que a variante Poissoniana não altera qualitativamente o comportamento do modelo bidimensional visto que, analogamente à variante uniforme (seção 2.2.1), observamos uma

transição de fase contínua para $F = 2$ e uma transição de fase descontínua para $F \geq 3$. Nossa análise nessa subseção será restrita apenas à dependência das funções de estado com o parâmetro de controle $\hat{q}$ pois esta forma de visualizar os dados é mais apropriada para determinar e caracterizar a transição de fase. Ainda, como na subseção anterior trataremos somente os casos $F = 2$ e $F = 3$ nessa ordem.

Iniciamos nosso estudo com a apresentação da figura 2.11 que exhibe dependência do número médio de domínios escalado pelo número total de agentes $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro $\hat{q}$ para $F = 2$. Observamos para L finito um comportamento suave com extremos $\langle N_d \rangle / L^2 \rightarrow 0$ para $\hat{q} \rightarrow 0$ e $\langle N_d \rangle / L^2 \rightarrow 1$ para $\hat{q} \rightarrow \infty$. Como feito no caso de fatores culturais iniciais distribuídos uniformemente discutido na subseção anterior, a análise da dependência do número de domínios com a dimensão linear da rede L indica que esse comportamento suave permanece no limite termodinâmico. Assim, para $\hat{q} > 0$ os estados absorventes são sempre caracterizados por um número macroscópico de domínios pois $\langle N_d \rangle / L^2 > 0$ para todo $\hat{q} > 0$ no limite $L \rightarrow \infty$.

Apesar de instrutivo, os dados da figura 2.11 não nos retornam nenhuma informação sobre a existência de uma transição entre as fases ordenada e desordenada, já que ambas as fases podem exibir um número macroscópico de domínios no limite termodinâmico. Por isso é que analisaremos a seguir o tamanho médio do maior domínio escalado pelo número total de agentes $\langle S_{max} \rangle / L^2$, mostrado na figura 2.12 como função do parâmetro $\hat{q}$ para $F = 2$ e diversos valores de L . A escala logarítmica no eixo das ordenadas realça o fato de $\langle S_{max} \rangle / L^2$ tender a zero rapidamente para $\hat{q} > 4$ a medida que L aumenta, e tender a um valor independente de L para valores pequenos de $\hat{q}$. Mais adiante mostraremos esses mesmos dados numa escala linear no eixo das ordenadas. Concluimos dos resultados mostrados nessa figura que existe uma fase ordenada, caracterizada pela presença de pelo menos um domínio macroscópico $\langle S_{max} \rangle / L^2 > 0$ no limite termodinâmico, para $\hat{q}$ pequeno e uma fase desordenada, caracterizada por domínios microscópicos apenas $\langle S_{max} \rangle / L^2 \rightarrow 0$ no limite termodinâmico. Como no caso de fatores culturais iniciais uniformemente distribuídos, a fase ordenada consiste de alguns domínios

macroscópicos (pelo menos um) e de um número extensivo de domínios microscópicos. Assim, a natureza das duas fases do modelo com fatores culturais iniciais Poissonianos é idêntica a do modelo com fatores culturais iniciais uniformes analisado na subseção anterior. A fim de determinar o valor crítico $\hat{q}_c$ onde ocorre a transição (contínua) entre as fases ordenada e desordenada usamos novamente a razão entre a raiz quadrada da média quadrática do tamanho médio do maior domínio $\mu_2 = \langle S_{max}^2 \rangle / L^2$ e a média do tamanho do maior domínio $\mu_1 = \langle S_{max} \rangle / L^2$, mostrada na figura 2.13. Lembremos que essa razão é uma medida adimensional das flutuações no tamanho do maior domínio. O comportamento observado é análogo ao da figura 2.12: no limite $L \rightarrow \infty$ a razão $\sqrt{\mu_2}/\mu_1$ tende para um valor finito independente de L para $\hat{q} < \hat{q}_c$ e tende a 1 para $\hat{q} > \hat{q}_c$. Isso implica que os pontos onde ocorrem os cruzamentos das curvas para diferentes tamanhos de rede podem ser utilizados como estimativas para o valor de $\hat{q}_c$.

Vamos agora estimar o valor de $\hat{q}_c$ através da análise do cruzamento das curvas mostradas na figura 2.13. Essa análise resume-se em obter os valores de $\hat{q}$ em que as curvas para diferentes valores de L se cruzam e, a partir desses dados, inferir o comportamento no limite $L \rightarrow \infty$. A primeira dificuldade encontrada está em definirmos quais cruzamentos são relevantes e como enumerá-los. Em nosso caso, vamos usar apenas cruzamentos entre curvas de tamanhos de rede adjacentes, isto é, os cruzamentos das curvas de $L = 25$ com $L = 50$, de $L = 50$ com $L = 100$, e de $L = 100$ com $L = 200$. Além disso, usaremos como enumerador de cada cruzamento o valor médio dos dois tamanhos de rede considerados. A fim de termos uma maior precisão na estimativa do valor de $\hat{q}$ onde ocorre o cruzamento utilizamos o algoritmo de Neville (38) para interpolarmos a região entre os pontos das curvas da figura 2.13. Assim, mostramos na figura 2.14 o valor do ponto de cruzamento $\hat{q}_{cruz}$ em função do inverso do tamanho enumerador $1/L_{med}$. Assumindo um comportamento linear obtemos $\hat{q}_c \approx 3.55$.

De posse de uma boa estimativa para $\hat{q}_c$ podemos agora tentar caracterizar a região crítica. O primeiro passo é investigar como o parâmetro de ordem $\mu_1 = \langle S_{max} \rangle / L^2$ tende a zero a medida que nos aproximamos do ponto crítico na fase ordenada. Para isso,

Figura 2.11 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F=2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.12 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F=2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.13 – Dependência da razão entre a raiz do segundo momento do tamanho do maior domínio e o primeiro momento $\sqrt{\mu_2}/\mu_1$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.14 – Dependência do valor de $\hat{q}$ em que as curvas para diferentes tamanhos de rede da figura 2.13 se cruzam $\hat{q}_{cruz}$ com o inverso do tamanho enumerador $1/L_{med}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$. A linha contínua representa a extrapolação linear dos pontos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

reproduzimos a figura 2.12 sem a escala logarítmica e ajustamos os dados da curva para $L = 200$ com a função $a(3.55 - \hat{q})^b$ onde a e b são parâmetros de ajuste. O ajuste mostrado na figura 2.15 resulta em $a = 0.21$ e $b = 1$ indicando então que μ_1 vai a zero linearmente com a distância ao ponto crítico. Seguindo a tradição da área de fenômenos críticos (35) vamos introduzir o expoente crítico β como sendo o expoente que determina a forma como o parâmetro de ordem tende a zero nas proximidades do ponto crítico. Assim $\mu_1 \sim (\hat{q}_c - \hat{q})^\beta$, de modo que $\beta = 1$.

Conhecido o expoente β podemos agora utilizar a relação de escala de tamanho finito

$$\mu_1(\hat{q}) = L^{-\beta/\nu} \hat{\mu}_1 \left[L^{1/\nu} (\hat{q} - \hat{q}_c) \right], \quad (2.3)$$

válida apenas próximo a $\hat{q}_c$ para estimar o expoente crítico ν que governa a divergência do comprimento de correlação no ponto crítico. (39) Aqui $\hat{\mu}_1$ é uma função de escala. A figura 2.16 apresenta os mesmos dados da figura 2.15 plotados em termos das variáveis reescaladas numa região próxima a $\hat{q}_c$ e com a escolha $\nu = 2$ que permitiu o colapso das curvas para diferentes tamanhos de rede conforme a previsão da relação de escala 2.3.

É interessante analisarmos o comportamento das flutuações do tamanho do maior domínio próximo ao ponto crítico $\hat{q}_c$. Essas flutuações são dadas por $\mu_2 - \mu_1^2$ e mostradas na figura 2.17. O ponto importante é que não se observa divergência nas flutuações em $\hat{q}_c$. Ao contrário, as flutuações tendem a zero nesse ponto. Assim, não podemos fazer a analogia da flutuação no parâmetro de ordem com a susceptibilidade magnética e, conseqüentemente, explorar outros expoentes críticos e as relações de escala entre esses expoentes.

Finalizando o estudo da transição de fase contínua para $F = 2$, cabe observar que os expoentes críticos $\beta = 1$ e $\nu = 2$ caracterizam a classe de universalidade da percolação direcionada compacta em uma rede quadrada em que uma das dimensões é o tempo, (33) daí a qualificação “direcionada” para esse tipo de percolação. De fato a figura 2.18, que mostra apenas o maior domínio em uma configuração absorvente para $\hat{q} = 2$ e $L = 200$,

Figura 2.15 – Dependência do parâmetro de ordem $\mu_1 = \langle S_{max} \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . A linha contínua representa a função $0.21(3.55 - \hat{q})$ obtida ajustando os dados da curva com $L = 200$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.16 – Dependência da relação de escala $L^{\beta/\nu} \mu_1$ com $L^{1/\nu} (\hat{q} - \hat{q}_c)$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $\beta = 1$, $\nu = 2$, $\hat{q}_c = 3.55$, $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.17 – Dependência da flutuação do tamanho do maior domínio $\mu_2 - \mu_1^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.18 – Realização do maior domínio de uma configuração absorvente para $F = 2$, $\hat{q} = 2$ e $L = 200$ com condições abertas de contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor.

exibe um domínio relativamente compacto comparado, por exemplo, ao domínio de sítios ativos da percolação direcionada.

Partimos agora para o estudo do caso $F = 3$. Lembremos inicialmente que a existência de uma fase ordenada para $F = 2$ implica na existência dessa fase também para $F = 3$. Analogamente ao caso $F = 2$, iniciamos nossa discussão observando a dependência do número médio de domínios escalado pelo número total de agentes $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson exibido na figura 2.19. Novamente não vemos um cruzamento ou um comportamento independente do tamanho da rede nas curvas exibidas, mas a análise de $\langle N_d \rangle / L^2$ contra L indica que essa quantidade se anula para $\hat{q}$ pequeno (ou seja, na fase ordenada) similarmente ao encontrado no caso de fatores culturais iniciais uniformemente distribuídos. Isso implica que a fase ordenada para $F = 3$ é caracterizada por um número não extensivo de domínios.

Para redes de tamanho finito, a dependência do número médio de domínios com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ não difere qualitativamente daquela encontrada na análise do caso $F = 2$. Entretanto, o tamanho médio do maior domínio escalado pelo número total de agentes da rede, cuja dependência com $\hat{q}$ é exibida na figura 2.20, produz um comportamento totalmente distinto daquele observado para $F = 2$, mas análogo ao do reportado no caso de $F = 3$ com fatores culturais iniciais uniformes (figura 2.10). Em particular, o cruzamento das curvas para diferentes tamanhos de rede indica que há uma descontinuidade do parâmetro de ordem $\mu_1 = \langle S_{max} \rangle / L^2$ na fronteira entre as fases ordenada e desordenada, ou seja, no limite $L \rightarrow \infty$ temos que $\mu_1 = 1$ para $\hat{q} < \hat{q}_c$ e $\mu_1 = 0$ para $\hat{q} > \hat{q}_c$.

Como os cruzamentos ocorrem entre as curvas do parâmetro de ordem para diferentes valores de L , não será necessário considerar a razão entre os momentos como fizemos para $F = 2$. Mas, vamos utilizar o mesmo procedimento usando apenas cruzamentos entre curvas de tamanhos de rede adjacentes ($L = 25$ com $L = 50$, $L = 50$ com $L = 100$ e $L = 100$ com $L = 200$) e tomando o valor médio desses pares L_{med} como enumerador. Na figura 2.21 mostramos o valor do cruzamento $\hat{q}_{cruz}$, obtido com o algoritmo de Neville para

Figura 2.19 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.20 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.21 – Dependência do valor de $\hat{q}$ em que as curvas para diferentes tamanhos de rede da figura 2.20 se cruzam $\hat{q}_{cruz}$ com o inverso do tamanho enumerador $1/L_{med}$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $F = 3$. A linha contínua representa a extrapolação linear dos pontos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.22 – Dependência da relação de escala $\langle N_d \rangle / L^2$ com $L^{1/\nu}(\hat{q} - \hat{q}_c)$ no modelo de Axelrod bidimensional Poissoniano com $\nu = 2$, $\hat{q}_c = 20.9$, $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

interpolarmos a região entre os valores de $\hat{q}$ simulados, como função do inverso do tamanho enumerador $1/L_{med}$. Novamente assumindo uma dependência linear obtemos $\hat{q}_c \approx 20.9$.

Mesmo tratando-se de uma transição descontínua com respeito ao parâmetro de ordem μ_1 , podemos tentar calcular o expoente ν que nos dá uma medida de como a largura da região em torno de $\hat{q}_c$ diminui com o aumento da rede. Não conseguimos obter um colapso razoável dos dados usando as curvas da figura 2.20, possivelmente porque os pontos de cruzamento estão muito distantes do ponto crítico $\hat{q}_c \approx 20.9$. Entretanto, a figura 2.22 mostra que o número médio de domínios exibe a relação de escala $\langle N_d \rangle / L^2 = f[L^{1/\nu}(\hat{q} - \hat{q}_c)]$ próximo a $\hat{q}_c$ com $\nu = 2$ e onde $f(x)$ é uma função de escala. Temos aqui uma situação análoga a da percolação de sítios em que a probabilidade de que um domínio percole apresenta uma descontinuidade na concentração crítica. Mas, podemos caracterizar a largura da transição para L finito pelo expoente $\nu = 4/3$. (35) Devemos mencionar que não é possível produzir um colapso similar para $F = 2$ usando as curvas da figura 2.11.

Naturalmente, para $F > 3$ esperamos obter uma transição descontínua com largura da região de transição para L finito determinada pelo expoente $\nu = 2$. É curioso que esse expoente tenha o mesmo valor para $F = 2$ e $F = 3$ embora as transições de fase nesses casos exibam naturezas bem distintas.

2.3 Simulações de Monte Carlo do modelo unidimensional

Nesta seção apresentaremos os resultados das simulações numéricas do modelo de Axelrod na versão unidimensional, seguindo um procedimento análogo aquele realizado para o modelo bidimensional na seção anterior. Novamente, os estados absorventes serão caracterizados pelo número médio de domínios normalizado pelo número total de agentes $\langle N_d \rangle / L$, pelo tamanho médio do maior domínio normalizado pelo número total de agentes $\langle S_{max} \rangle / L$, e pela fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural

ζ_h .

A organização da seção também é idêntica aquela da seção 2.2. Primeiramente estudaremos o modelo de Axelrod unidimensional com distribuição uniforme de fatores culturais iniciais (subseção 2.3.1) e condições de contorno abertas. Nesse caso mostraremos que há uma transição de fase já para $F \geq 2$. Como no caso bidimensional, o fato de todos os parâmetros serem discretos não nos permite explorar a natureza dessa transição, mas pelo menos agora poderemos obter o diagrama de fases no espaço (F, q) de modo identificar as regiões desse espaço dominadas pela fase ordenada (caracterizada pela presença de domínios macroscópicos) e pela fase desordenada (caracterizada pela presença de domínios microscópicos apenas). Em seguida, investigaremos a distribuição de Poisson com parâmetro $\hat{q}$ para gerar fatores culturais iniciais (subseção 2.3.2). Esse foi o estudo que mais demandou recursos computacionais nessa tese (quase dois anos de execução em clusters de processadores I7) e, apesar disso, não chegamos a uma conclusão definitiva. A razão disso é que não obtivemos evidência da existência da fase ordenada no limite termodinâmico mesmo para $\hat{q} \rightarrow 0$. Para os casos $F = 2$ e $F = 3$ nossos resultados numéricos indicam fortemente que essa fase não existe mesmo. Todavia, para o caso $F = 4$, podemos apenas oferecer uma indicação mais fraca, mas esperamos, convincente da inexistência do regime ordenado. A análise numérica dessa questão para $F \geq 5$ é simplesmente impraticável.

2.3.1 Distribuição inicial uniforme

A fim de melhorarmos nossa intuição sobre a dinâmica do modelo de Axelrod mostramos primeiramente a evolução temporal de duas realizações do modelo com parâmetros $F = 2$, $q = 2$ e $L = 100$ nas figuras 2.23 e 2.24. A diferença principal entre essas realizações é a configuração inicial dos fatores culturais. Embora a sequência dos agentes escolhidos para interagir não seja a mesma nas duas realizações, essa diferença é menos importante (além de ser incontornável). Ainda, não custa lembrar que nessa seção usaremos condições de contorno abertas. Diferentemente do modelo bidimensional, existe uma forma elegante

Figura 2.23 – Evolução do modelo de Axelrod unidimensional com parâmetros $F = 2$, $q = 2$ e $L = 100$. O eixo das abscissas mostra a posição dos sítios na cadeia e o eixo das ordenadas, o tempo. A dinâmica converge para uma configuração absorvente monocultural.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.24 – Evolução do modelo de Axelrod unidimensional com parâmetros $F = 2$, $q = 2$ e $L = 100$. O eixo das abscissas mostra a posição dos sítios na cadeia e o eixo das ordenadas, o tempo. A dinâmica converge para uma configuração multicultural.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de mostrar o comportamento temporal do modelo em uma dimensão: representamos a cadeia de agentes no eixo das abscissas e o tempo (número da iteração) no eixo das ordenadas. Na primeira realização (figura 2.23) é atingido um estado absorvente monocultural e, na segunda (figura 2.24), um estado absorvente multicultural. Cada agente exhibe apenas quatro estados possíveis ($00 \rightarrow$ amarelo, $01 \rightarrow$ verde claro, $10 \rightarrow$ verde escuro, $11 \rightarrow$ laranja) e, devido à probabilidade de interação ser proporcional a similaridade cultural, cada um desses estados interage com apenas dois outros. Como era esperado, temos que a condição inicial aleatória é a geradora da desordem cultural, visto que as realizações da dinâmica apresentam, independentemente do estado final atingido, um estado altamente fragmentado em $t = 0$. Fica claro pelas figuras que o resultado da aplicação das regras de evolução do modelo de Axelrod é a homogeneização, embora nem sempre total, de um sistema inicialmente fragmentado devido à condição inicial. Graças ao vínculo imposto pela probabilidade de interação proporcional à semelhança cultural que impede agentes totalmente distintos de interagirem, a dinâmica apresenta uma probabilidade não nula de atingir um estado absorvente multicultural.

Devido à simplicidade da dinâmica do modelo de Axelrod, nosso foco de estudo está na configuração dos agentes após o congelamento da dinâmica. Começamos nossa análise com a dependência das funções de estado ($\langle N_d \rangle / L$, $\langle S_{max} \rangle / L$ e ζ_h) com o tamanho da cadeia L para $F = 2$ fixo e q variando conforme mostrado nas figuras 2.25, 2.26, 2.27.

A dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia (figura 2.25) indica a existência de um número extensivo de domínios para $q > 2$. O coeficiente de proporcionalidade entre $\langle N_d \rangle$ e L aumenta com o valor de q , como esperado, indicando uma maior fragmentação das configurações absorventes. O resultado para $q = 2$ mostra um comportamento peculiar: embora o número de domínios não seja extensivo neste caso, também não indica a presença de uma fase monocultural já que os dados da simulação não tendem à curva $1/L$ dada pela linha contínua na figura 2.25.

O mesmo padrão de comportamento aparece quando investigamos o tamanho do

Figura 2.25 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.26 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.27 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.28 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

maior domínio como função de L , mostrado na figura 2.26. Os resultados para $q > 2$ indicam que $\langle S_{max} \rangle / L$ tende a zero para L grande e portanto que todos os domínios são microscópicos, ou seja, trata-se da mesma fase desordenada observada na análise da versão bidimensional do modelo. Por outro lado, os resultados para $q = 2$ indicam a presença de um domínio grande mas que não domina a cadeia totalmente uma vez que $\langle S_{max} \rangle / L < 1$. De acordo com nossa terminologia, trata-se da fase ordenada introduzida anteriormente.

Para entendermos melhor o caso $q = 2$, consideremos a figura 2.27 que mostra a fração de amostras ζ_h que resultaram em configurações absorventes monoculturais. Verificamos que, mesmo no limite $L \rightarrow \infty$, uma fração $\zeta_h \approx 0.25$ das realizações atinge estados absorventes monoculturais e uma fração $1 - \zeta_h \approx 0.75$ atinge estados multiculturais, o que é condizente com os resultados de Vilone e colaboradores. (19) Entretanto, se olharmos a figura 2.25, veremos que $\langle N_d \rangle / L \rightarrow 0$ para $q = 2$, de modo que essas configurações multiculturais devem ser formadas por um número não extensivo (isto é, que cresce mais lentamente que L) de domínios. De fato, essa conclusão vem de escrevermos

$$\frac{\langle N_d \rangle}{L} = \zeta_h \frac{1}{L} + (1 - \zeta_h) \frac{\langle N_d^{mul} \rangle}{L}, \quad (2.4)$$

onde $\langle N_d^{mul} \rangle$ é o número médio de domínios considerando-se apenas os estados absorventes multiculturais e $\zeta_h \approx 0.25$ para L grande. Como $\langle N_d \rangle / L \rightarrow 0$, devemos ter $\langle N_d^{mul} \rangle / L \rightarrow 0$. Consideremos agora a figura 2.26, onde temos $\langle S_{max} \rangle / L \rightarrow 0.7$ para $L \rightarrow \infty$. Podemos escrever

$$\frac{\langle S_{max} \rangle}{L} = \zeta_h + (1 - \zeta_h) \frac{\langle S_{max}^{mul} \rangle}{L} \quad (2.5)$$

onde $\langle S_{max}^{mul} \rangle$ é o tamanho médio do maior domínio considerando-se apenas as configurações absorventes multiculturais. Como $\zeta_h \approx 0.25$, temos $\langle S_{max}^{mul} \rangle / L \rightarrow 0.6$. Esse resultado implica que, tipicamente, as configurações multiculturais para $q = 2$ são compostas por um domínio gigantesco que abrange 60% dos sítios da cadeia. Uma vez que $\langle N_d^{mul} \rangle / L \rightarrow 0$ podemos concluir também que deve haver mais domínios macroscópicos para abranger a porção extensiva restante da cadeia. A figura 2.28 que mostra a dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado restrito às realizações que atingiram um estado

absorvente multicultural ($\langle S_{max} \rangle / L$)_{mul} pelo tamanho da rede L exibe o comportamento discutido acima. O importante é que, independentemente da amostra ser monocultural ou multicultural, há pelo menos um domínio macroscópico o que portanto caracteriza a fase ordenada.

Uma vez determinada a existência da fase ordenada para $q = 2$ e da fase desordenada para $q > 2$ vamos definir uma faixa crítica no espaço de parâmetros de modo que, por exemplo, para $F = 2$ temos a faixa crítica $q_c = 2.5 \pm 0.5$. O limite inferior dessa faixa ($q = 2$) deve corresponder com certeza à fase ordenada enquanto que o limite superior ($q = 3$), à fase desordenada. É importante enfatizar que uma vez que a fase ordenada aparece para $F = 2$ ela deverá aparecer também para qualquer $F > 2$ e o maior domínio deverá abranger um número maior de sítios da cadeia.

Consideremos agora o caso $F = 4$. Observamos dois comportamentos distintos no limite $L \rightarrow \infty$. Para $q = 2$ e $q = 3$ os estados absorventes nesse limite são todos monoculturais, pois os valores de $\langle N_d \rangle / L$ coincidem com a curva $1/L$ (linha contínua na figura 2.29) para L grande. Ainda, $\langle S_{max} \rangle / L$ claramente tende a 1 à medida que L aumenta (vide figura 2.30), indicando a existência de um domínio cultural que se estende por toda a cadeia. Mas esse resultado é mais claro na figura 2.31, onde observamos que a fração de realizações que resultam em estados absorventes monoculturais ζ_h tende a 1 para cadeias grandes. Por outro lado, para $q = 4$, $q = 5$ e $q = 6$ (ou $q \geq 4$ em geral), todas as realizações levam a configurações multiculturais no limite termodinâmico. Essas configurações são caracterizadas por um número extensivo de domínios (vide figura 2.29) de tamanho microscópico (veja figura 2.30) e portanto correspondem a fase desordenada do modelo. Assim, de acordo com nossa definição de faixa crítica, temos $q_c = 3.5 \pm 0.5$ para $F = 4$.

Complementando o estudo do comportamento da grandeza $\langle N_d \rangle / L$ no limite termodinâmico, efetuamos a extrapolação $L \rightarrow \infty$ das curvas das figuras 2.25 e 2.29 para $F = 2$ e $F = 4$, bem como para outros valores de $F \leq 10$ não mostrados até agora a fim

Figura 2.29 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.30 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.31 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.32 – Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty = n_F$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod unidimensional uniforme para diversos valores de F . As linhas contínuas representam as soluções numéricas do sistema 3.48.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.33 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $F = 4$ e diversos valores de q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de obter a figura 2.32. Os dados para F fixo mostrados nessa figura indicam claramente a existência de uma transição de fase. Nesse caso a fase ordenada é caracterizada por $(\langle N_d \rangle / L)_\infty = 0$ e a fase desordenada por $(\langle N_d \rangle / L)_\infty > 0$. Assim $(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ é visto como o parâmetro de ordem do modelo, posto que seu valor (zero ou positivo) caracteriza as duas possíveis fases do modelo. (39). As linhas contínuas mostradas nessa figura foram obtidas com a aproximação de pares para o modelo de Axelrod introduzida por Vilone e colaboradores (19) e discutida no capítulo 3.

Para finalizar essa seção, vamos determinar o diagrama de fases do modelo de Axelrod unidimensional no espaço de parâmetros (F, q) . Um método bastante efetivo de determinar as fases do modelo para um valor fixo de F é traçar as curvas mostradas na figura 2.33, que exhibe a dependência do tamanho médio normalizado do maior domínio $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L para $F = 4$. Essa é a mesma figura 2.30 mas sem a escala logarítmica no eixo das ordenadas, de modo que podemos apreciar melhor a diferença de comportamento para $q = 3$ (fase ordenada) e $q = 4$ (fase desordenada).

Figura 2.34 – Dependência do tamanho médio normalizado do maior domínio $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme para diversos valores de F e q . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^5$ realizações.

Figura 2.35 – Diagrama de fases do modelo de Axelrod unidimensional no espaço (F, q) com fatores culturais iniciais determinados por uma distribuição de probabilidade uniforme no conjunto de inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$. A linha contínua representa a estimativa obtida via análise de pontos críticos do sistema 3.48.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Lembremos que nesse caso definimos a faixa crítica como $q_c = 3.5 \pm 0.5$. Esse procedimento foi repetido para os valores $F = 2, 3, \dots, 10$ e os resultados mostrados na figura 2.34. Os dados para $F = 6$ ilustram a vantagem de se considerar uma faixa crítica para o parâmetro q : temos certeza que $q = 3, 4$ correspondem a fase ordenada e que $q = 6, 7$ correspondem a fase desordenada, mas não sabemos o que ocorre exatamente com $q = 5$ (precisaríamos considerar mais amostras e redes maiores). Assim, definindo a faixa crítica como $q_c = 5 \pm 1$ para $F = 6$ levamos em conta tanto o efeito da natureza discreta dos parâmetros como a imprecisão na determinação do comportamento da dinâmica no limite termodinâmico para alguns valores de q .

Concluindo, a figura 2.35 apresenta o diagrama de fases do modelo de Axelrod unidimensional com fatores culturais iniciais determinados por uma distribuição de probabilidade uniforme no conjunto de inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$. Relembrando, o modelo exibe duas fases: uma fase ordenada caracterizada pela presença de pelo menos um domínio ma-

croscópico e uma fase desordenada caracterizada pela presença de domínios microscópicos apenas. A linha $q_c = F$ é a estimativa obtida com a aproximação de pares discutida no capítulo 3.

2.3.2 Distribuição inicial de Poisson

Agora focaremos nossa atenção no modelo de Axelrod em sua versão unidimensional com a distribuição inicial de fatores culturais dada por uma distribuição de Poisson de parâmetro $\hat{q}$. Essa, utilizada primeiramente por Castellano e colaboradores (18) para estudar o modelo bidimensional. Em particular, para $t = 0$ a probabilidade do fator cultural j do agente i assumir o valor $k = 0, 1, \dots$ é dada por

$$P(\sigma_{i,j} = k) = e^{-\hat{q}} \frac{\hat{q}^k}{k!}. \quad (2.6)$$

O estudo da versão unidimensional do modelo de Axelrod com essa distribuição de fatores culturais iniciais foi realizado por Vilone e colaboradores. (19) Esses autores mostraram que quando os fatores culturais iniciais são gerados pela distribuição de Poisson, a transição de fase para $F = 2$ desaparece e o modelo exibe apenas a fase desordenada, isto é, uma fase multicultural onde todos os domínios são microscópicos no limite termodinâmico. Entretanto, deixaram a entender que a transição de fase permaneceria para os demais valores de $F > 2$. Nosso objetivo aqui é revisar esses resultados. Através de uma análise minuciosa do comportamento do modelo de Axelrod no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$, não encontramos evidência da presença de uma fase ordenada, isto é, configurações absorventes com pelo menos um domínio macroscópico, para $F \leq 4$. Ainda, lembremos que somente nesse caso utilizamos condições de contorno periódicas, de modo que a cadeia de agentes é melhor descrita por um anel de agentes. Isso foi necessário para compararmos quantitativamente nossos resultados de cadeias finitas com os resultados de Vilone e colaboradores. (19)

Postas essas considerações, começaremos nossa análise com o caso $F = 2$. As figuras 2.36 e 2.37 exibem, respectivamente, o número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ e

a fração de estados absorventes monoculturais ζ_h com o tamanho da cadeia L para vários valores de $\hat{q}$.

Para os valores de $\hat{q}$ mostrados nessas figuras, temos uma indicação clara de que no limite termodinâmico as configurações absorventes são multiculturais com o número de domínios crescendo linearmente com o tamanho da cadeia L e sem a presença de estados absorventes monoculturais. Um melhor entendimento desse regime é obtido com a análise do tamanho dos domínios, em particular, do tamanho total dos domínios fora o maior domínio, como mostrado na figura 2.38. Essa mudança de foco para $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ deve-se somente ao uso da escala logarítmica no eixo das ordenadas. O fato desse tamanho, devidamente escalado com L , tender a 1, ou seja, do tamanho do maior domínio escalado tender a 0 indica que as configurações absorventes multiculturais são completamente fragmentadas, com todos o domínios de tamanho microscópico no limite termodinâmico. Temos portanto uma fase desordenada.

Naturalmente, não há nenhuma razão para que as conclusões acima sejam válidas para $\hat{q} < 0.01$ e o desafio agora é encontrar evidências de que esse comportamento (isto é, a existência de uma única fase desordenada) ocorra para qualquer valor de $\hat{q} > 0$. De fato, conseguimos a evidência de que esse resultado é correto mostrando que o número médio de domínios $\langle N_d \rangle$ é função apenas da variável $\hat{q}^2 L$ para $\hat{q} \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$, conforme exibido na figura 2.39. Isso garante que para qualquer $\hat{q} > 0$ fixo, se aumentarmos L arbitrariamente obteremos um número arbitrariamente grande de domínios. Embora não se possa afirmar nada sobre o tamanho desses domínios, podemos garantir que a fase não é monocultural. Obtemos também, como esperado, $\zeta_h(\hat{q}, L) = \zeta_h(\hat{q}^2 L)$.

Uma vez entendido que no limite termodinâmico as configurações absorventes monoculturais não estão presentes, achamos conveniente analisar também os resultados para cadeias finitas eliminando essas configurações da estatística. De fato, esse procedimento diminui bastante as flutuações dos dados e, conseqüentemente, reduz o número de amostras utilizadas. Na figura 2.40 exibimos o tamanho do maior domínio normalizado como

Figura 2.36 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.37 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.38 – Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.39 – Dependência do número médio de domínios normalizado menos um $\langle N_d \rangle / L^2 - 1$ com a grandeza $\hat{q}^2 L$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.40 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.41 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com a grandeza $\hat{q}L^{1/2}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 2$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

função de $\hat{q}$ para diversos tamanhos de cadeia L . Para $\hat{q}$ fixo, o aumento de L resulta na diminuição do tamanho do maior domínio. Como esperado, a figura 2.41 exibe de forma quantitativa essa relação ao mostrar que $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ é de fato função de $\hat{q}L^{1/2}$ (ou, equivalentemente, de $\hat{q}^2 L$) para $\hat{q} \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$.

Finalmente, podemos concluir que para $F = 2$ o modelo de Axelrod unidimensional com fatores culturais iniciais gerados pela distribuição de Poisson apresenta apenas uma fase multicultural extremamente fragmentada onde todos os domínios são microscópicos (fase desordenada). É importante observar que Vilone e colaboradores (19) chegaram a essa mesma conclusão analisando apenas a figura 2.38 com $L < 2000$. Naturalmente, nossa descoberta da variável de escala $\hat{q}L^{1/2}$ oferece uma evidência muito mais forte para esse resultado.

Consideremos agora o caso $F = 3$, seguindo o mesmo plano de apresentação usado no caso anterior. As figuras 2.42 e 2.43 exibem, respectivamente, a dependência do número médio de domínios e da fração de amostras monoculturais com o tamanho da cadeia. Observamos um comportamento semelhante aquele para $F = 2$, exceto que a tendência ao regime multicultural ($\langle N_d \rangle / L \rightarrow cte$ e $\zeta_h \rightarrow 0$) só é observada para tamanhos de cadeia L muito maiores do que naquele caso.

Essa mesma conclusão vale para o tamanho total dos domínios excluído o maior domínio, exibido na figura 2.44. Observamos uma tendência bastante lenta de variação dessa grandeza até $L < 2000$, a partir do que vemos um crescimento significativo indicando a tendência a fase desordenada. Note que para $\hat{q} = 0.02$ observa-se uma diminuição de $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com L para $L < 2000$ o que poderia levar à conclusão equivocada da existência de uma fase ordenada no limite termodinâmico. Provavelmente, foi esse tipo de comportamento não monotônico que levou Vilone e colaboradores (19) ao resultado incorreto de que haveria uma transição de fase para $F = 3$.

A lógica para a extrapolação dos resultados da figura 2.42 para pequenos valores de $\hat{q} > 0$ é mostrada na figura 2.45 que indica que o número de domínios escala com $\hat{q}^3 L$

Figura 2.42 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.43 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.44 – Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.45 – Dependência do número médio de domínios normalizado menos um $\langle N_d \rangle / L^2 - 1$ com a grandeza $\hat{q}^2 L$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.46 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.47 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com a grandeza $\hat{q}L^{1/3}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de L . A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^7$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

para $\hat{q}$ pequeno e L grande. Esse resultado explica também porque é necessário usar cadeias muito grandes para começarmos a observar o comportamento correto no limite termodinâmico.

Finalmente, a dependência do tamanho médio do maior domínio com $\hat{q}$ no caso de amostras multiculturais é mostrado na figura 2.46. Novamente, como no caso $F = 2$ para $\hat{q}$ fixo, o aumento do tamanho da cadeia L leva a uma diminuição do tamanho dos domínios indicando a presença da fase desordenada no limite termodinâmico. Já a figura 2.47 mostra que $(\langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ depende apenas da combinação $\hat{q}L^{1/3}$ conforme indicado pelo colapso dos dados da figura anterior para $\hat{q}$ pequeno e L grande.

A conclusão que chegamos sobre o comportamento do modelo de Axelrod unidimensional com distribuição Poissoniana de fatores culturais iniciais para $F = 3$ é a mesma que para o caso $F = 2$: existe apenas uma fase desordenada. Entretanto, chegar a essa conclusão nesse caso foi muito mais difícil uma vez que são necessárias muito mais amostras para se obter um número estatisticamente aceitável de configurações absorventes multiculturais para $L < 3 \times 10^4$, como indicado na figura 2.43, embora saibamos que para $L \rightarrow \infty$ todas as amostras resultem em configurações absorventes multiculturais. A essa altura já se pode prever que essa dificuldade será grandemente exacerbada para $F > 3$.

Tratemos agora do caso $F = 4$. A dependência do número médio de domínios com o tamanho da cadeia mostrada na figura 2.48 não é informativa já que para $L < 3 \times 10^4$ não observamos um desvio significativo dos dados com relação ao comportamento monocultural (curva $1/L$ mostrada na figura). Já a fração de amostras resultante em configurações absorventes monoculturais mostrada na figura 2.49 é mais informativa e ilustra a dificuldade da extrapolação dos resultados de L finito para o limite termodinâmico. Inicialmente, a fração de amostras monoculturais aumenta com L até atingir um patamar em que fica praticamente constante (a largura desse patamar aumenta com a diminuição de $\hat{q}$) para só então começar a diminuir com o aumento de L . Assim, nossa conclusão é de que não haverá configurações absorventes monoculturais no limite termodinâmico.

Figura 2.48 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 4$ e diversos valores de $\hat{q}$. A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.49 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 4$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.50 – Dependência do tamanho médio total dos domínios excluindo o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 3$ e diversos valores de $\hat{q}$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.51 – Dependência do tamanho médio total dos domínios excluindo o maior domínio $(1 - \langle S_{max} \rangle / L)_{mul}$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano com $F = 4$ e diversos valores de $\hat{q}$. A estatística é feita apenas com as amostras multiculturais. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^9$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.52 – Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ com o parâmetro de Poisson $\hat{q}$ no modelo de Axelrod unidimensional Poissoniano para diversos valores de F .

Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante notar que o tamanho da cadeia L exerce um papel não trivial na determinação do comportamento do modelo. Por exemplo, para $\hat{q}$ fixo existe um valor bem determinado de L em que o comportamento “homogêneo” do modelo é amplificado. Isso é verificado não apenas no comportamento de ζ_h mas também no comportamento do tamanho dos domínios conforme ilustrado na figura 2.50.

A figura 2.51 apresenta o mesmos dados da figura anterior retirando-se as amostras monoculturais da estatística. O comportamento é essencialmente o mesmo, como deveria ser. O ponto importante é que quando excluímos as amostras monoculturais o tamanho médio do maior domínio escalado por L não fica mais tão próximo a 1, facilitando a visualização e reduzindo as flutuações.

Algumas considerações devem ser feitas sobre o comportamento do modelo para $F = 4$. Devido ao efeito homogeneizador do aumento do parâmetro F (vide figuras 2.37, 2.43 e 2.49), todas as análises feitas para $F = 2$ e $F = 3$ no limite $q \rightarrow 0$ são inviáveis para $F = 4$, pois a quantidade de amostras necessárias para obtermos um número esta-

tisticamente significativo de amostras multiculturais é exorbitante para $L < 3 \times 10^4$. Esse número diminui para valores de L muito grandes e, eventualmente, todas as amostras passam a ser multiculturais no limite $L \rightarrow \infty$. O problema é que cadeias com L muito grande também são custosas de simular de modo que nossa análise ficou restrita à região $\hat{q} \geq 0.3$ e $L < 3 \times 10^4$. Dada essa limitação, não podemos apresentar nenhuma conclusão definitiva sobre o comportamento do modelo para $F = 4$ mas a tendência mostrada pelos nossos resultados é de que o comportamento nesse caso seja o mesmo que para $F = 2$ e $F = 3$, ou seja, no limite $L \rightarrow \infty$ o modelo exhibe apenas a fase desordenada.

Finalizamos a análise do caso unidimensional com fatores culturais iniciais Poissonianos mostrando os resultados obtidos com a extrapolação para $L \rightarrow \infty$ do número de domínios para diversos valores de F (figura 2.52). Ao contrário do caso em que os fatores culturais iniciais são uniformemente distribuídos, não encontramos evidência de que $(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ se anule para valores pequenos de $\hat{q}$ e, portanto, evidência da existência de uma fase ordenada.

Finalmente, devemos mencionar que não há nada intrínseco à distribuição de Poisson para os fatores culturais iniciais que possa favorecer a fase desordenada, uma vez que essa distribuição praticamente não afeta o comportamento do modelo no caso bidimensional, onde encontramos uma fase ordenada para $F = 2$ e, conseqüentemente, também para $F > 2$. Ainda, é intuitivo e bem estabelecido na literatura (40) que a diminuição da conectividade dos agentes e, portanto, a redução da dimensionalidade da rede, favorece o regime desordenado de modo que a ausência da fase ordenada no modelo de Axelrod unidimensional com fatores culturais Poissonianos, embora misteriosa e frustrante, não viola nenhuma expectativa física em relação ao comportamento esperado do modelo.

2.4 Comentários finais

Vamos concluir esse capítulo, que tratou do modelo de Axelrod livre, ou seja, sem a presença de um campo externo, com uma breve recapitulação dos principais resultados ob-

tidos. Foram estudados quatro casos: o modelo bidimensional com distribuição uniforme dos fatores culturais iniciais (subseção 2.2.1), o modelo bidimensional com distribuição Poissoniana dos fatores culturais iniciais (subseção 2.2.2), o modelo unidimensional com distribuição uniforme dos fatores culturais iniciais (subseção 2.3.1), e o modelo unidimensional com distribuição Poissoniana dos fatores culturais iniciais (subseção 2.3.2).

No caso bidimensional ratificamos os resultados encontrados por Castellano e colaboradores (18) e, em particular, comprovamos que o modelo de Axelrod bidimensional exibe o mesmo comportamento qualitativo para ambas distribuições de fatores culturais iniciais. Mais especificamente, observamos uma transição de fase contínua entre as fases ordenada e desordenada para $F = 2$ tanto no caso da distribuição uniforme (figura 2.6 como no caso da distribuição Poissoniana (figura 2.15). Já para $F = 3$ observamos uma transição descontínua entre essas fases (figura 2.10 para o caso da distribuição uniforme e figura 2.20 para o caso da distribuição Poissoniana). Além disso, no caso da distribuição Poissoniana dos fatores culturais iniciais obtivemos uma boa estimativa para o valor do parâmetro $\hat{q}_c$ em que ocorre a transição (vide figura 2.14 para o caso $F = 2$ e 2.21 para o caso $F = 3$). Para $F = 2$ mostramos que o parâmetro de ordem $\langle S_{max} \rangle / L^2$ tende a zero linearmente com a distância ao parâmetro crítico e que a largura da região crítica para L finito escala com $L^{1/2}$. Esses resultados no permitiram determinar os expoentes críticos $\beta = 1$ e $\nu = 2$. Já para a transição descontínua de $F = 3$ podemos somente explorar a largura da região crítica para L finito e, novamente, obtivemos que essa largura obedece a escala $L^{1/2}$, de modo que temos $\nu = 2$.

No caso unidimensional (seção 2.3.1), nossos resultados exibem uma discrepância com os resultados da literatura. (19) Em nossa análise, confirmamos a existência de uma transição descontínua entre a fase ordenada ($\langle S_{max} \rangle / L$ é não nulo para $L \rightarrow \infty$) e a fase desordenada ($\langle S_{max} \rangle / L \rightarrow 0$ para $L \rightarrow \infty$) para o caso da distribuição uniforme de fatores culturais iniciais (figura 2.34). Além disso, obtivemos o diagrama de fases do modelo nesse caso (figura 2.35). Vale ressaltar que graças à natureza discreta do parâmetro q não é possível obter com precisão o valor crítico q_c , por isso utilizamos as barras de erro na

figura 2.35. No caso da distribuição Poissoniana de fatores culturais iniciais, diferentemente dos resultados da literatura, não encontramos evidências que ratifiquem a hipótese da existência da transição de fase. Aparentemente, o uso da distribuição de Poisson para gerar a configuração inicial impede a formação da fase ordenada no limite termodinâmico, de modo que nesse limite existe apenas a fase desordenada. Mostramos isso para $F = 2$ (figura 2.37) e $F = 3$ (figura 2.43), mas não foi possível obter uma extrapolação confiável para o limite termodinâmico nos casos $F > 3$. A dificuldade é o comportamento não monotônico do parâmetro de ordem com L que para redes pequenas e de tamanho intermediário parece favorecer o ordenamento mas para redes muito grandes tende ao regime desordenado. A existência de um valor de L característico em que ocorre essa mudança de comportamento do parâmetro de ordem pode ser devida ao fato de que para a distribuição de Poisson não há uma restrição nos possíveis valores que cada fator cultural pode assumir inicialmente. Portanto, aumentar o valor de L funciona efetivamente como um aumento do valor de q (ou seja, do número de fatores culturais diferentes), visto que aumentamos o número de amostras (LF) geradas pela distribuição de Poisson com parâmetro $\hat{q}$ fixo.

Finalmente, finalizamos esse capítulo repetindo um argumento de validade geral. Ao aumentarmos o valor de F para q ou $\hat{q}$ fixos, proporcionamos um aumento do número de fatores culturais, o que por sua vez aumenta a probabilidade de que alguns desses fatores sejam comuns entre agentes vizinhos, deslocando assim o equilíbrio dinâmico em direção à homogeneidade. Assim, se para os parâmetros q^* e F^* encontrarmos uma fase caracterizada por um domínio macroscópico (fase ordenada), então essa fase certamente existirá para os parâmetros q^* e $F > F^*$ e podemos esperar que esse domínio macroscópico seja ainda maior que para F^* . Portanto, se encontrarmos uma fase ordenada para $F = 2$ essa fase deve existir também para $F > 2$. A dificuldade encontrada no caso unidimensional com distribuição Poissoniana de fatores culturais iniciais é que não observamos uma fase ordenada para $F = 2$ e $F = 3$, e portanto não podemos inferir nada sobre a existência dessa fase para $F > 3$.

3 *Aproximações de Campo Médio*

O objetivo deste capítulo é guiar o leitor no desenvolvimento de uma aproximação de campo médio para o modelo de Axelrod em sua variante unidimensional. Compararemos nossa teoria com a encontrada na literatura, (19) e mostraremos que apesar de ser mais complexa, nossa metodologia gera uma forma sistemática de aumentar a ordem da aproximação. Duas ordens serão mostradas: sítio único e de pares. A primeira ordem é um cálculo exato e não prevê dinâmica alguma, já que as variáveis são constantes no decorrer do tempo. Por esse motivo é que a aproximação de pares é proposta. Esta descreve o modelo com uma boa precisão para regimes longe do ponto crítico, como esperado de uma aproximação de campo médio.

Este capítulo é organizado da seguinte forma: Na seção 3.1 demonstraremos a distribuição de sítio único para $F = 2$ e em seguida generalizamos este procedimento para um F qualquer. Vale ressaltar que neste cálculo não será realizado nenhuma aproximação. Na seção 3.2 mostraremos os cálculos da aproximação de pares. Em particular, obteremos o conjunto de equações diferenciais que descrevem o modelo, e via análise de pontos fixos, inferiremos o valor de q em que ocorre a transição entre as fases ordenada e desordenada.

Antes de iniciarmos o cálculo propriamente dito, é necessário alterar a forma de olhar para o sistema. Uma cadeia unidimensional de tamanho $L = 6$ e parâmetros $F = 3$ e $q = 2$ é canonicamente apresentada como uma sequência de vetores linha

$$\begin{pmatrix} 121 & 111 & 122 & 112 & 222 & 112 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Todavia, a fim de facilitarmos a identificação da similaridade cultural, isto é, o número de fatores culturais respectivos em comum de dois agentes (vide apêndice A para maiores detalhes na interação de Axelrod), transporemos todos os vetores de estado chegando à

seguinte representação

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Aqui as colunas representam os sítios (agentes) e as linhas os fatores culturais. Além desta alteração, definimos $P_x(t)$ como a probabilidade de encontrarmos uma particular configuração de x sítios consecutivos no instante de tempo t . Em nossa notação escreveremos explicitamente a configuração em questão, como mostrado na expressão

$$P_x(t) \rightarrow P_x^t \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{x,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1,F} & \cdots & \sigma_{x,F} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde $\sigma_{i,j}$ representa o j -ésimo fator do i -ésimo sítio da cadeia.

3.1 Distribuição de sítio único

Nessa seção mostraremos o cálculo exato da distribuição de sítio único. A fim de facilitarmos o entendimento do cálculo, consideraremos separadamente os casos $F = 2$ (subseção 3.1.1) e F qualquer (subseção 3.1.2).

3.1.1 Distribuição de sítio único para $F=2$

Por definição, o modelo de Axelrod consiste na evolução de uma cadeia inicialmente aleatória, ou seja, os fatores culturais iniciais dos sítios são variáveis aleatórias independentes. Assim, assumiremos, sem perda de generalidade, que cada fator cultural de cada agente do sistema recebe inicialmente um valor σ com uma distribuição marginal $\Theta(\sigma)$, e a probabilidade de encontrarmos um sítio de fatores culturais $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, sendo a e

b valores possíveis quaisquer, em $t = 0$ é dada por

$$P_1(t = 0) = P_1^0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \Theta(a)\Theta(b). \quad (3.4)$$

Da teoria de equações mestras, sabemos que a evolução temporal de $P_1^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ é descrita como a diferença entre os fluxos de probabilidade “para dentro” (probabilidade de existência de estados que criem a configuração em questão) e “para fora” (probabilidade de existência de estados que destroem a configuração em questão). Portanto, para obtermos cada um dos fluxos é necessário especificar quais configurações de dois sítios são responsáveis pela criação e destruição de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Começando com as configurações que geram $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e assumindo que a interação ocorra com o vizinho da esquerda, temos que as configurações seguintes são responsáveis pela criação daquela configuração,

$$\begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a \\ b & \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Já para a interação com o vizinho da direita tem-se as seguintes configurações geradoras

$$\begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a \\ \gamma & b \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

É importante ressaltar neste ponto do cálculo que em todas as configurações mostradas acima $a, b, \gamma = 1, \dots, q$ e γ deve ser diferente de a ou b quando estiver na mesma linha que um desses valores. O fluxo para dentro é a soma da probabilidade de existência de cada uma das configurações mostradas anteriormente, ou seja,

$$\Phi_{dentro} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left[\sum_{\gamma \neq a} P_2^t \begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & b \end{pmatrix} + \sum_{\gamma \neq b} P_2^t \begin{pmatrix} a & a \\ b & \gamma \end{pmatrix} + \sum_{\gamma \neq a} P_2^t \begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & b \end{pmatrix} + \sum_{\gamma \neq b} P_2^t \begin{pmatrix} a & a \\ \gamma & b \end{pmatrix} \right]. \quad (3.7)$$

Note que o primeiro fator $1/2$ é a probabilidade de escolhermos um dos dois vizinhos

possíveis e o segundo fator $1/2$ é a probabilidade de interação proporcional à similaridade cultural, já que todas as configurações acima possuem apenas um fator cultural em comum e $F = 2$.

De forma análoga, o cálculo do fluxo “para fora” começa pela caracterização das as configurações que destroem $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Primeiramente, estabelecemos que a interação ocorrerá com o vizinho da esquerda, assim as configurações destruidoras são

$$\begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a \\ \gamma & b \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Em seguida caracterizamos as configurações destruidoras quando a interação ocorre com o vizinho da direita, essas dadas por

$$\begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a \\ b & \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Somando sobre todas as possibilidades, temos que o fluxo de probabilidade “para fora” de $P_1^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ é

$$\Phi_{fora} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left[\sum_{\gamma \neq a} P_2^t \begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & b \end{pmatrix} + \sum_{\gamma \neq b} P_2^t \begin{pmatrix} a & a \\ b & \gamma \end{pmatrix} + \sum_{\gamma \neq a} P_2^t \begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & b \end{pmatrix} + \sum_{\gamma \neq b} P_2^t \begin{pmatrix} a & a \\ \gamma & b \end{pmatrix} \right]. \quad (3.10)$$

Obtivemos $\Phi_{dentro} = \Phi_{fora}$, consequentemente podemos concluir que a probabilidade $P_1^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ é uma constante no decorrer no tempo, com valor definido pela condição inicial do problema

$$P_1^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P_1^0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \Theta(a)\Theta(b). \quad (3.11)$$

3.1.2 Distribuição de sítio único para F geral

Nessa seção generalizaremos o cálculo anterior para o caso em que F é um inteiro qualquer maior que 2. De forma semelhante ao feito anteriormente, nossa análise começa com o estudo da configuração inicial do problema. Essa, por construção do modelo, é aleatória, descorrelacionada e com uma distribuição marginal Θ . Portanto, a probabilidade de encontrarmos uma configuração $\begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_F \end{pmatrix}^T$, lembrando que escrevemos o estado em sua forma transposta, é dada pelo produto

$$P_1(t=0) = P_1^0 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_F \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^F \Theta(\sigma_i). \quad (3.12)$$

Novamente, a evolução temporal de P_1^t é descrita pela diferença entre os fluxos de probabilidade “para fora” e “para dentro”. O desafio agora é encontrar quais configurações geram e quais configurações destroem $\begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_F \end{pmatrix}^T$. Vamos assumir que a interação ocorra com o vizinho da direita, assim, este par sítio alvo e vizinho deve conter $k = 1, \dots, F-1$ fatores culturais distintos entre si. Suponha, sem perda de generalidade, que o i -ésimo fator é o alterado, então segue que a configuração geradora neste caso será um conjunto de $k-1$ duplas de fatores do tipo $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, a dupla que será alterada $\begin{pmatrix} \gamma & a \end{pmatrix}$ na i -ésima posição, e finalmente $F-k$ duplas do tipo $\begin{pmatrix} a & a \end{pmatrix}$. Representaremos este estado por $\Psi_{F,k}(i, \{ \gamma \ a \})$. Já para a interação com o vizinho da esquerda tem-se exatamente a mesma situação só alterando a ordem das colunas, ou seja, $\Psi_{F,k}(i, \{ a \ \gamma \})$.

O fluxo “para dentro” é obtido quando se soma sobre todas as probabilidades de existência de configurações que constroem o estado em questão,

$$\begin{aligned} \Phi_{dentro} &= \sum_{i=1}^F \sum_{k=1}^{F-1} \sum_{\gamma \neq a} \frac{1}{2} \left(\frac{F-k}{F} \right) \binom{F-1}{k-1} P_2^t \left(\Psi_{F,k}(i, \{ \gamma \ a \}) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^F \sum_{k=1}^{F-1} \sum_{\gamma \neq a} \frac{1}{2} \left(\frac{F-k}{F} \right) \binom{F-1}{k-1} P_2^t \left(\Psi_{F,k}(i, \{ a \ \gamma \}) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

O fator $1/2$ é a probabilidade de escolhermos um dos dois vizinhos possíveis, o fator $(F - k)/F$ é a probabilidade de interação proporcional à similaridade cultural e o termo combinatorial vem da contagem de quantas configurações de $F - 1$ fatores tem $k - 1$ deles distintos. Apenas embaralhamos $k - 1$ fatores em $F - 1$ posições pois um dos fatores culturais distintos é aquele que será alterado, e sua posição é definida pelo índice i . Finalmente, somamos em todos os valores de γ , em todos os valores possíveis de k , e todas as posições em que se pode alterar um fator cultural.

Vamos agora encontrar as configurações que destroem o estado $\left(\sigma_1 \dots \sigma_F \right)^T$. Analogamente ao discutido para a configurações construtoras, as configurações destruidoras, assumindo que a interação ocorra com o vizinho da direita, são definidas por um conjunto de $k - 1$ duplas de fatores culturais do tipo $(a \ b)$, uma dupla localizada na posição i do tipo $(a \ \gamma)$ e $F - k$ duplas de fatores culturais do tipo $(a \ a)$. O fluxo de probabilidade “para fora” é dado pela seguinte soma

$$\begin{aligned} \Phi_{fora} = & \sum_{i=1}^F \sum_{k=1}^{F-1} \sum_{\gamma \neq a} \frac{1}{2} \left(\frac{F-k}{F} \right) \binom{F-1}{k-1} P_2^t \left(\Psi_{F,k}(i, \{a \ \gamma\}) \right) \\ & + \sum_{i=1}^F \sum_{k=1}^{F-1} \sum_{\gamma \neq a} \frac{1}{2} \left(\frac{F-k}{F} \right) \binom{F-1}{k-1} P_2^t \left(\Psi_{F,k}(i, \{\gamma \ a\}) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Encontramos, como esperado, $\Phi_{dentro} = \Phi_{fora}$ e portanto a probabilidade de que um agente qualquer exiba uma certa disposição de fatores é independente do tempo e definida pela distribuição inicial. Esse resultado é geral pois não fizemos nenhuma aproximação na sua derivação. Assim, se quisermos caracterizar a dinâmica do modelo precisamos considerar probabilidades envolvendo dois (ou mais) sítios.

3.2 Aproximação de pares

Como mostrado anteriormente, a distribuição de sítio único não é útil para representar a dinâmica do modelo. Por isso é necessário aumentar a ordem da aproximação, ou seja, analisar a evolução temporal de probabilidades que envolvem dois ou mais sítios.

Nesta seção mostraremos a metodologia proposta para obter a aproximação de pares no modelo de Axelrod (Subseção 3.2.1). Em comparação com aquela encontrada na literatura, (19) (Subseção 3.2.2) a proposta oferece uma forma sistemática de aumento de ordem, mantendo a equivalência dos resultados. Entretanto, devido à complexidade de nossa metodologia, efetuaremos apenas a aproximação no caso $F = 2$.

3.2.1 Aproximação de pares para $F = 2$

Usaremos como variáveis desse problema o seguinte conjunto:

$$\begin{cases} x_0 = P_2^t \begin{pmatrix} = \\ = \end{pmatrix} = P_2^t \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, \\ x_1 = P_2^t \begin{pmatrix} \neq \\ = \end{pmatrix} = P_2^t \begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & b \end{pmatrix}, \\ x_2 = P_2^t \begin{pmatrix} \neq \\ \neq \end{pmatrix} = P_2^t \begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & \beta \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.15)$$

sendo x_n a probabilidade de existir ligações em que os sítios vizinhos possuam $n = 0, 1, 2$ fatores culturais distintos. Analogamente à seção 3.1 temos que $a, b, \gamma, \beta = 1, \dots, q$ são estritamente distintos quando aparecerem na mesma linha da matriz. Por exemplo, na primeira equação do conjunto 3.15, b pode ser igual a a , e na segunda podemos ter novamente $b = a$, mas $a \neq \gamma$ necessariamente. Por fim, na terceira equação podemos ter $b = a$, $\gamma = \beta$, ou qualquer outra combinação de igualdades, desde que a restrição $a \neq \gamma$ e $b \neq \beta$ seja respeitada. Desta forma, a condição de normalização que deve levar em conta todas as possibilidades de construção de cada estado é dada por

$$q^2 x_0 + 2q^2 (q-1) x_1 + q^2 (q-1)^2 x_2 = 1. \quad (3.16)$$

Note que há um fator 2 no segundo termo do lado esquerdo da equação 3.16, pois somam-se as possibilidades em que a primeira dupla de fatores seja idêntica com as possibilidades

em que a segunda dupla de fatores seja idêntica. Consequentemente, é possível eliminar uma das três variáveis do conjunto 3.15. Escolhemos, sem perda de generalidade, x_1 , que é dado por

$$x_1 = \frac{1}{2q^2(q-1)} [1 - q^2 x_0 - q^2 (q-1)^2 x_2]. \quad (3.17)$$

Calcularemos agora a evolução temporal das variáveis x_0 e x_2 a partir das respectivas equações mestras. Vamos primeiramente considerar as possibilidades de criação e destruição da configuração $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ cuja probabilidade é definida como x_0 . Vamos supor, que o sítio alvo seja o representado pela primeira coluna. É claro que a interação com o vizinho da direita não pode alterar essa configuração, então as possibilidades de mudança são devidas à interação com o vizinho da esquerda. Assim, esse tipo de configuração poderá ser destruído se tivermos a estrutura

$$\begin{pmatrix} \gamma & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & a & a \\ \gamma & b & b \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde $\gamma \neq a$ na primeira configuração e $\gamma \neq b$ na segunda. Como essas configurações (equação 3.18) aparecem com a mesma probabilidade, podemos escrever a taxa de destruição (ou fluxo para “fora” de x_0) como

$$\Phi_{fora} = \sum_{\gamma \neq a} 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} P_3^t \begin{pmatrix} \gamma & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Aqui o fator 2 vem de considerarmos as duas possibilidades mostradas em 3.18; um fator 1/2 vem da probabilidade de escolhermos o vizinho da esquerda; o outro fator 1/2 vem da probabilidade de que a interação ocorra (a similaridade cultural entre o primeiro e o segundo sítio é 1/2).

Consideremos agora as configurações que podem criar o estado $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$. Novamente, o sítio alvo é a primeira coluna dessa representação. Supondo que a interação

ocorra com o vizinho da direita, então nossa configuração é gerada por

$$\begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a \\ \gamma & b \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

onde $\gamma \neq a$ na primeira e $\gamma \neq b$ na segunda. Agora, suponha que a interação ocorra com o vizinho da esquerda. A configuração em questão será gerada por

$$\begin{pmatrix} a & \gamma & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & \gamma & b \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Assim, seguindo o mesmo raciocínio de antes, o fluxo para “dentro” da variável x_0 será

$$\Phi_{dentro} = \sum_{\gamma \neq a} 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} P_2^t \begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & b \end{pmatrix} + \sum_{\gamma \neq a} 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} P_3^t \begin{pmatrix} a & \gamma & a \\ b & b & b \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Lembrando que as probabilidades não dependem do valor específico de $\gamma \neq a$ temos

$$\dot{x}_0 = \Phi_{dentro} - \Phi_{fora} \quad (3.23a)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \neq a} \left[P_2^t \begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & b \end{pmatrix} + P_3^t \begin{pmatrix} a & \gamma & a \\ b & b & b \end{pmatrix} - P_3^t \begin{pmatrix} \gamma & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \right] \quad (3.23b)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{q-1}{2} \left[P_2^t \begin{pmatrix} c & a \\ b & b \end{pmatrix} + P_3^t \begin{pmatrix} a & c & a \\ b & b & b \end{pmatrix} - P_3^t \begin{pmatrix} c & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \right] \quad (3.23c)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{q-1}{2} \left[x_1 + P_3^t \begin{pmatrix} a & c & a \\ b & b & b \end{pmatrix} - P_3^t \begin{pmatrix} c & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \right], \quad (3.23d)$$

onde a, b e $c \neq a$ são valores fixos quaisquer do conjunto $\{1, \dots, q\}$.

Nosso trabalho agora é encontrar uma aproximação para os dois últimos termos do lado direito da equação 3.23d. Para o primeiro termo temos que

$$P_3^t \begin{pmatrix} a & c & a \\ b & b & b \end{pmatrix} = P_{1|2}^t \begin{pmatrix} a & c & a \\ b & b & b \end{pmatrix} P_2^t \begin{pmatrix} c & a \\ b & b \end{pmatrix} \approx P_{1|1}^t \begin{pmatrix} a & c \\ b & b \end{pmatrix} P_2^t \begin{pmatrix} c & a \\ b & b \end{pmatrix} \quad (3.24a)$$

$$P_3^t \begin{pmatrix} a & c & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \approx \frac{P_2^t \begin{pmatrix} a & c \\ b & b \end{pmatrix}}{P_1^t \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}} P_2^t \begin{pmatrix} c & a \\ b & b \end{pmatrix} = \frac{x_1^2}{P_1^t \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}}, \quad (3.24b)$$

onde o primeiro passo da equação 3.24a é oriundo da definição de probabilidade condicional: a probabilidade de existir um estado com 3 agentes $P_3(t)$ é a probabilidade de existir um estado de um agente dado uma hipótese de existência de um estado de dois agentes $P_{1|2}(t)$ multiplicado pela existência da hipótese de um estado de dois agentes $P_2(t)$. (41) Já o segundo passo da equação 3.24a é a aproximação de pares, visto que reduzimos o número de sítios na hipótese da probabilidade condicional. Como

$$P_1^t \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \sum_{f_1, f_2} P_2^t \begin{pmatrix} f_1 & c \\ f_2 & b \end{pmatrix} \quad (3.25a)$$

$$P_1^t \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = P_2^t \begin{pmatrix} c & c \\ b & b \end{pmatrix} + 2(q-1)P_2^t \begin{pmatrix} a & c \\ b & b \end{pmatrix} + (q-1)^2 P_2^t \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \quad (3.25b)$$

$$P_1^t \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = x_0 + 2(q-1)x_1 + (q-1)^2 x_2 \quad (3.25c)$$

$$P_1^t \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{q^2}, \quad (3.25d)$$

sendo a última igualdade resultante da condição de normalização 3.16. Conclui-se que

$$P_3^t \begin{pmatrix} a & c & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \approx q^2 x_1^2. \quad (3.26)$$

O resultado 3.25d pode ser obtido da aproximação de sítio único: o número de configurações $\begin{pmatrix} \gamma \\ b \end{pmatrix}$ tal que $\gamma, b = 1, \dots, q$ é q^2 , como $\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$ é uma configuração particular, sua probabilidade será $1/q^2$. Lembremos que os fatores culturais da configuração inicial são escolhidos usando uma distribuição uniforme entre os inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$. Usando o mesmo

procedimento para tratar o segundo termo da equação 3.23d obtemos

$$P_3^t \begin{pmatrix} c & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \approx \frac{P_2^t \begin{pmatrix} c & a \\ b & b \end{pmatrix}}{P_1^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P_2^t \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = \frac{x_0 x_1}{P_1 \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}} = q^2 x_0 x_1. \quad (3.27)$$

Portanto

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1(q-1)}{2} [q^2(x_1 - x_0) + 1]. \quad (3.28)$$

Executaremos agora exatamente o mesmo procedimento para determinar a evolução temporal da variável x_2 associada à configuração $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. O fluxo para “fora” dessa configuração ocorre através de

$$\begin{pmatrix} \gamma & a & b \\ c & c & d \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a & b \\ \gamma & c & d \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

onde $\gamma \neq a$ na primeira e $\gamma \neq c$ na segunda. Então,

$$\Phi_{fora} = \sum_{\gamma \neq a} 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} P_3^t \begin{pmatrix} \gamma & a & b \\ c & c & d \end{pmatrix} \quad (3.30a)$$

$$\Phi_{fora} = \frac{1}{2} \left[(q-2) P_3^t \begin{pmatrix} e & a & b \\ c & c & d \end{pmatrix} + P_3^t \begin{pmatrix} b & a & b \\ c & c & d \end{pmatrix} \right], \quad (3.30b)$$

onde $e \neq a$ e $e \neq b$. O fluxo para “dentro” da configuração $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ocorre através das configurações

$$\begin{pmatrix} a & \gamma & b \\ c & c & d \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & a & b \\ c & \gamma & d \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

onde $\gamma \neq a$ na primeira e $\gamma \neq c$ na segunda. Daí

$$\Phi_{dentro} = \sum_{\gamma \neq a} 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} P_3^t \begin{pmatrix} a & a & b \\ c & \gamma & d \end{pmatrix} \quad (3.32a)$$

$$\Phi_{dentro} = \frac{1}{2} \left[(q-2)P_3^t \begin{pmatrix} a & a & b \\ c & e & d \end{pmatrix} + P_3^t \begin{pmatrix} a & a & b \\ c & d & d \end{pmatrix} \right]. \quad (3.32b)$$

Executando a diferença dos dois fluxos, observamos que os termos multiplicados por $(q-2)$ se anulam, de modo que ficamos com

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} \left[P_3^t \begin{pmatrix} a & a & b \\ c & d & d \end{pmatrix} - P_3^t \begin{pmatrix} b & a & b \\ c & c & d \end{pmatrix} \right]. \quad (3.33)$$

De forma análoga à efetuada para a variável x_0 , as aproximações para as probabilidades de três sítios são

$$P_3^t \begin{pmatrix} a & a & b \\ c & c & d \end{pmatrix} \approx \frac{P_2^t \begin{pmatrix} a & a \\ c & d \end{pmatrix}}{P_1^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P_2^t \begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} = \frac{x_1^2}{1/q^2} = q^2 x_1^2. \quad (3.34)$$

$$P_3^t \begin{pmatrix} b & a & b \\ c & c & d \end{pmatrix} \approx \frac{P_2^t \begin{pmatrix} b & a \\ c & c \end{pmatrix}}{P_1^t \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}} P_2^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{x_1 x_2}{1/q^2} = q^2 x_1 x_2. \quad (3.35)$$

Conclui-se então que o sistema de equações diferenciais ordinárias que descrevem o modelo de Axelrod unidimensional com $F = 2$ na aproximação de pares proposta nesta tese é

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \left[q^2(x_1 - x_0) + 1 \right] \frac{(q-1)}{2}, \\ \dot{x}_1 = \frac{1}{2q^2(q-1)} \left[1 - q^2 x_0 - q^2(q-1)^2 x_2 \right], \\ \dot{x}_2 = x_1(x_1 - x_2) \frac{q^2}{2}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Vamos discutir a solução numérica dessa equação no final desse capítulo, mas desde já lembramos que no estado estacionário devemos ter $x_1 = 0$.

3.2.2 Aproximação de pares de Vilone e colaboradores

A generalização do formalismo apresentado na seção anterior para o caso $F > 2$ é bastante complexa. Felizmente há uma abordagem mais simples graças a Vilone e colaboradores, (19) que passaremos a discutir agora. Trata-se de uma teoria tipo campo médio, mas as aproximações não são realizadas de forma explícita como na formulação descrita anteriormente para $F = 2$. A análise começa definindo $A_n^{i,j}$ como a ligação entre os sítios i e j com n fatores culturais distintos. A pergunta que almejamos responder é: o que acontece com essa variável quando um dos sítios sofre uma mudança devido às regras de interação de Axelrod?

Partiremos de três sítios adjacentes $\begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \end{pmatrix}$ cujas ligações são definidas por $A_n^{\Psi_1, \Psi_2}$ e $A_m^{\Psi_2, \Psi_3}$. Ao interagir Ψ_2 (sítio alvo) com Ψ_1 (vizinho), observa-se $n \rightarrow n - 1$, pois o efeito da interação de Axelrod é homogeneizar os sítios interagentes. No entanto, não temos essa certeza quanto a variável m : sabemos apenas que ela pode aumentar de 1, diminuir de 1 ou ainda permanecer constante ($m \rightarrow m + j$ sendo $j = 0, \pm 1$). Um exemplo explícito do efeito exposto é

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & \mathbf{4} & 5 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

onde o sítio alvo Ψ_2 assimilou o quarto fator cultural (fator em negrito) de seu vizinho Ψ_1 , de modo que $n = 3 \rightarrow n = 2$ e $m = 2 \rightarrow m = 3$.

Com as variáveis de estudo definidas, necessitamos das taxas de transição entre elas para completarmos a especificação da dinâmica. Isto é, deve-se encontrar a probabilidade da “reação” $A_n^{\Psi_1, \Psi_2} + A_m^{\Psi_2, \Psi_3} \rightarrow A_{n-1}^{\Psi_1, \Psi_2} + A_{m+j}^{\Psi_2, \Psi_3}$ ocorrer. Novamente, vamos considerar os três sítios $\begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \end{pmatrix}$, e assumir como dupla interagente os sítios Ψ_2 (sítio alvo) e Ψ_1 (vizinho). É de suma importância lembrar que essa escolha é completamente arbitrária e que cada dupla possível tem igual probabilidade de ser escolhida. Em

seguida, deve-se escolher aleatoriamente uma dupla de fatores culturais, sendo um de Ψ_1 e outro (respectivo) de Ψ_2 . A interação de Axelrod ocorre apenas se a dupla escolhida for idêntica. Essa é uma forma alternativa de entendermos a interação proporcional à similaridade cultural dos agentes, já que a probabilidade de escolhermos uma dupla idêntica é igual à similaridade cultural. Definiremos este evento como evento tipo 1 e sabemos que a sua probabilidade de ocorrência é $F - n$, o número de fatores idênticos, dividido pelo número total de fatores F , ou seja,

$$R_n^1 = \left(1 - \frac{n}{F}\right) (1 - \delta_{n,0}). \quad (3.38)$$

Note que a delta de Kronecker foi inserida pois quando $n = 0$ (agentes totalmente idênticos) a interação ocorre com probabilidade um. Todavia, como não há alteração no conjunto de fatores culturais dos agentes em questão removemos essa situação da dinâmica.

O evento tipo 2 na interação de Axelrod é definido como o efeito da assimilação pelo sítio alvo Ψ_2 de um dos fatores culturais distintos de seu vizinho Ψ_1 . Devemos analisar como esse efeito altera a ligação entre Ψ_2 e Ψ_3 . Sabemos que há três possibilidades distintas de alteração: a redução da diversidade ($m \rightarrow m - 1$) quando o fator cultural respectivo de Ψ_3 for idêntico ao novo fator de Ψ_2 , o aumento da diversidade ($m \rightarrow m + 1$) quando o fator cultural respectivo de Ψ_3 for idêntico ao antigo fator cultural de Ψ_2 e diferente do novo fator cultural respectivo de Ψ_2 e, finalmente, a manutenção da diversidade ($m \rightarrow m$) quando o respectivo fator cultural de Ψ_3 for diferente do novo e do antigo fator cultural de Ψ_2 . Começando pela probabilidade de aumentarmos a diversidade, sabe-se que ela é a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um dos $F - m$ fatores possíveis, dada por

$$R_{m,+1}^2 = \frac{F - m}{F} = 1 - \frac{m}{F}. \quad (3.39)$$

Já para a probabilidade de reduzirmos a diversidade cultural $R_{m,-1}^2$, temos uma dependência com a igualdade dos respectivos fatores de Ψ_1 e Ψ_3 , que definiremos como um

parâmetro λ adicional à teoria. Portanto, a forma explícita de $R_{m,-1}^2$ é dada por

$$R_{m,-1}^2 = \frac{m\lambda}{F}, \quad (3.40)$$

sendo m/F a probabilidade de que o fator escolhido seja diferente entre Ψ_2 e Ψ_3 e λ a probabilidade de que seja igual entre Ψ_1 e Ψ_3 . Consequentemente, a probabilidade da diversidade manter-se após interação ($m \rightarrow m$) é a probabilidade do respectivo fator cultural de Ψ_3 ser diferente do fator respectivo de Ψ_1 ($1 - \lambda$) e do respectivo fator de Ψ_2 (m/F), dada por

$$R_{m,0}^2 = \frac{m(1 - \lambda)}{F}, \quad (3.41)$$

É direto ver que a normalização das três probabilidades é obedecida, ou seja, $R_{m,0}^2 + R_{m,1}^2 + R_{m,-1}^2 = 1$. Em suma, a probabilidade da “reação” $A_n^{\Psi_1, \Psi_2} + A_m^{\Psi_2, \Psi_3} \rightarrow A_{n-1}^{\Psi_1, \Psi_2} + A_{m+j}^{\Psi_2, \Psi_3}$ ocorrer é dada pelo produto das probabilidades dos dois eventos $R_n^1 R_{m,j}^2$, sendo R_n^1 , a probabilidade de interação proporcional à similaridade cultural e $R_{m,j}^2$ o efeito da interação no outro vizinho próximo do sítio alvo.

Efetuada uma aproximação de sítio único, λ torna-se a probabilidade de que duas variáveis aleatórias independentes (α e γ) assumam valores idênticos entre si e distintos de uma terceira variável aleatória (β). Nosso intuito agora será encontrar a dependência explícita de λ com os parâmetros do modelo F e q e, para isso definiremos k como o valor da variável aleatória (β) e $p_\beta(k)$ sua distribuição de probabilidade. Assim, da definição de probabilidade condicional, (41) podemos escrever λ como

$$\lambda = \sum_k p_\beta(k) \lambda_k, \quad (3.42)$$

sendo λ_k a probabilidade de que α e γ assumam o mesmo valor e este seja diferente de k . Por isso λ_k será a soma, em todos os valores possíveis de k , da distribuição de probabilidade de α , quando este é diferente de k , multiplicado pela distribuição de probabilidade de β , quando este também é diferente de k , com o vínculo de ambos serem idênticos,

$$\lambda_k = \sum_{i \neq k, j \neq k} \bar{p}_\alpha(i) \bar{p}_\beta(j) \delta_{i,j}, \quad (3.43)$$

onde $\bar{p}_\alpha = p_\alpha(i)/\sum_{l \neq k} p_\alpha(l)$ é definido como a distribuição de probabilidade da variável α dado que α é diferente de k . Faremos a premissa de que a probabilidade $p_\alpha(k)$ seja constante durante toda a evolução com valor $1/q$, isto é, a distribuição de probabilidade inicial. Portanto, λ terá a seguinte forma

$$\lambda = \sum_k p_\beta(k) \left[\sum_{i \neq k, j \neq k} \bar{p}_\alpha(i) \bar{p}_\beta(j) \delta_{i,j} \right] = \sum_k p_\beta(k) \left[\sum_{i \neq k, j \neq k} \frac{p_\alpha(i)}{\sum_{l \neq k} p_\alpha(l)} \frac{p_\beta(j)}{\sum_{m \neq k} p_\beta(m)} \delta_{i,j} \right] \quad (3.44a)$$

$$\lambda = \sum_k p_\beta(k) \left[\sum_{i \neq k} \frac{p_\alpha(i)}{\sum_{l \neq k} 1/q} \frac{p_\beta(j)}{\sum_{m \neq k} 1/q} \right] = \sum_k p_\beta(k) \left[\sum_{i \neq k} \frac{1/q}{(q-1)/q} \frac{1/q}{(q-1)/q} \right] \quad (3.44b)$$

$$\lambda = \sum_k p_\beta(k) \left[\left(\frac{1}{q-1} \right)^2 \sum_{i \neq k} 1 \right] = \sum_k p_\beta(k) \left[\left(\frac{1}{q-1} \right)^2 (q-1) \right] \quad (3.44c)$$

$$\lambda = \frac{1}{q-1} \sum_k \frac{1}{q} = \frac{1}{q-1}. \quad (3.44d)$$

Calcularemos agora a evolução temporal da densidade de ligações com k elementos distintos n_k . Primeiramente focaremos nos elementos em que apenas o evento tipo 1 influencia. Uma ligação com $k+1$ fatores distintos sofrendo a ação do evento 1 cuja probabilidade é dada por $R_{k+1}^1 n_{k+1}$ contribui para o fluxo para “dentro”. Já para uma ligação com k fatores distintos sofrendo a ação do evento 1 cuja probabilidade é $R_k^1 n_k$ contribui para o fluxo para “fora”. Portanto a equação mestra parcial é dada por

$$\dot{n}_k = R_{k+1}^1 n_{k+1} - R_k^1 n_k + E_2 \quad (3.45)$$

onde E_2 contém termos diretamente proporcionais à R_k^2 , ou seja, efeitos do evento 2.

De forma análoga à feita anteriormente, devemos encontrar as contribuições “para fora” e “para dentro” do evento 2. Começaremos pela situação em que a diversidade cultural aumenta ($j = 1$). Sabe-se que ele contribui para o fluxo para “dentro” quando uma ligação com $k-1$ elementos sofre sua influência, e sua probabilidade de ocorrência é $n_{k-1} R_{k-1,1}^2$. Já para o caso em que a diversidade cultural diminui $j = -1$, temos uma contribuição para o fluxo para “dentro” quando uma ligação $k+1$ sofre sua influência, e sua probabilidade de ocorrência é $n_{k+1} R_{k+1,-1}^2$. Em suma, as contribuições do evento 2

são

$$n_k R_{k,+1}^2 + n_k R_{k,-1}^2 = n_k (R_{k,+1}^2 + R_{k,-1}^2) = n_k (1 - R_{k,0}^2). \quad (3.46)$$

Note que a última igualdade é obtida através da normalização das probabilidades. Como esses efeitos acontecem independentemente do número de sítios distintos da ligação influenciada pelo evento 1, deve-se multiplicar este termo pelo fator $\sum_{i=1}^{F-1} R_i^1 n_i$ que dá a probabilidade de que o sítio alvo tenha sido alterado. Finalmente temos a equação mestra completa deste sistema

$$\dot{n}_k = R_{k+1}^1 n_{k+1} - R_k^1 n_k + \left[n_{k-1} R_{k-1,1}^2 + n_{k+1} R_{k+1,-1}^2 - n_k (1 - R_{k,0}^2) \right] \sum_{i=1}^{F-1} R_i^1 n_i. \quad (3.47)$$

Substituindo a forma explícita das probabilidades (equações 3.38, 3.39, 3.40, 3.41) e do parâmetro λ (equação 3.44), temos o conjunto de equações diferenciais acopladas que definem a dinâmica do modelo de Axelrod unidimensional segundo o esquema de aproximação de Vilone e colaboradores, (19)

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = & \left(1 - \frac{k+1}{F} \right) n_{k+1} - \left(1 - \frac{k}{F} \right) (1 - \delta_{k,0}) n_k \\ & + \left[n_{k-1} \left(1 - \frac{k-1}{F} \right) + n_{k+1} \frac{k+1}{F(q-1)} - n_k \left(1 - \frac{k}{F} \left(\frac{q-2}{q-1} \right) \right) \right] \left[\sum_{i=1}^{F-1} \left(1 - \frac{i}{F} \right) n_i \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Note que $n_{-1} \equiv n_{F+1} \equiv 0$. Pelo fato desta ser uma aproximação tipo campo médio, ela negligencia flutuações espaciais. Nada até o presente momento foi discutido sobre a condição inicial. Como nas simulações originais do modelo (vide subseções 2.2.1 e 2.3.1) usamos condições iniciais uniformes, temos que

$$n_k(t=0) = \left(\frac{1}{q} \right)^{F-k} \left(1 - \frac{1}{q} \right)^F \binom{F}{k}. \quad (3.49)$$

A segunda parte da análise será a demonstração da equivalência entre o conjunto de equações por nós obtidas para $F = 2$ (equação 3.36) com as obtidas por Vilone e colaboradores (equação 3.48). Primeiramente, vamos encontrar a relação entre as duas variáveis propostas (x_k e n_k). No primeiro caso, x_k é a probabilidade de ligações em que os sítios vizinhos possuam k fatores culturais distintos, independentemente dos valores

explícitos de cada um. Por exemplo, x_0 leva em consideração estados do tipo $\begin{pmatrix} = \\ = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$, sendo a e b todos os q valores possíveis, inclusive aqueles em que a condição $a = b$ seja válida. Já para o segundo caso, n_k é a densidade de ligações com k elementos distintos levando em consideração o valor de cada fator cultural; portanto, para o caso $F = 2$, temos as seguintes relações

$$\begin{cases} n_0 &= q^2 x_0 \\ n_1 &= 2q^2(q-1)x_1 \\ n_2 &= q^2(q-1)^2 x_2 \end{cases} \quad (3.50)$$

Vamos agora escrever explicitamente, a partir do conjunto 3.48, as equações diferenciais para o caso $F = 2$. Note que a somatória do segundo termo do lado direito dessa equação depende apenas do valor de F , calculando-a primeiramente,

$$\sum_{i=1}^{F-1} \left(1 - \frac{i}{F}\right) n_i = \sum_{i=1}^{2-1} \left(1 - \frac{i}{2}\right) n_i = \sum_{i=1}^1 \left(1 - \frac{i}{2}\right) n_i = \left(1 - \frac{1}{2}\right) n_1 = \frac{n_1}{2}. \quad (3.51)$$

Lembremos que para $F = 2$ o índice de n_k assume os valores $k = 0, 1, 2$ apenas. Para $k = 0$ temos que

$$\dot{n}_0 = \left(1 - \frac{0+1}{2}\right) n_{0+1} - \left(1 - \frac{0}{2}\right) (1 - \delta_{0,0}) n_0 \quad (3.52a)$$

$$+ \left[n_{0-1} \left(1 - \frac{0-1}{2}\right) n_{0+1} \left(\frac{0+1}{2}\right) \frac{1}{q-1} - n_0 \left(1 - \frac{0}{2} \left(1 - \frac{1}{q-1}\right)\right) \right] \frac{n_1}{2}$$

$$\dot{n}_0 = \frac{n_1}{2} + \left[\frac{n_1}{2(q-1)} - n_0 \right] \frac{n_1}{2} = \frac{n_1}{2} \left[1 + \frac{n_1}{2(q-1)} - n_0 \right]. \quad (3.52b)$$

Efetuada-se o mesmo procedimento para os outros valores de k , obtém-se o seguinte conjunto de equações diferenciais para aproximação proposta por Vilone e colaboradores

para o caso $F = 2$

$$\begin{cases} \dot{n}_0 &= \frac{n_1}{2} \left(1 - n_0 + \frac{n_1}{2(q-1)} \right), \\ \dot{n}_1 &= \frac{n_1}{2} \left\{ n_0 + \frac{n_2}{q-1} - n_1 \left[\frac{q}{2(q-1)} \right] - 1 \right\}, \\ \dot{n}_2 &= \frac{n_1}{2} \left[\frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{q-1} \right]. \end{cases} \quad (3.53)$$

Vamos agora substituir a reescala 3.50, no conjunto 3.53. Iniciando por n_0 temos

$$\dot{n}_0 = \frac{n_1}{2} \left(1 - n_0 + \frac{n_1}{2(q-1)} \right) \quad (3.54a)$$

$$q^2 \dot{x}_0 = \frac{2q^2(q-1)x_1}{2} \left(1 - q^2 x_0 + \frac{2q^2(q-1)x_1}{2(q-1)} \right) \quad (3.54b)$$

$$\dot{x}_0 = (q-1)x_1 (1 - q^2 x_0 + q^2 x_1) \quad (3.54c)$$

$$\dot{x}_0 = (q-1)x_1 (1 + q^2(x_1 - x_0)) \quad (3.54d)$$

Note que a última igualdade é a primeira equação do conjunto 3.36 a menos de um fator $1/2$. Esse fator será interpretado como uma reescala temporal. Analogamente para n_2

$$\dot{n}_2 = \frac{n_1}{2} \left(\frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{q-1} \right) \quad (3.55a)$$

$$q^2(q-1)^2 \dot{x}_2 = \frac{2q^2(q-1)x_1}{2} \left[\frac{2q^2(q-1)x_1}{2} - \frac{q^2(q-1)^2 x_2}{q-1} \right] \quad (3.55b)$$

$$(q-1)\dot{x}_2 = x_1 [q^2(q-1)x_1 - q^2(q-1)x_2] \quad (3.55c)$$

$$\dot{x}_2 = q^2 x_1 (x_1 - x_2). \quad (3.55d)$$

Novamente é obtida uma equação idêntica à segunda equação do conjunto 3.36 a menos da reescala temporal. Finalmente, para a terceira variável usaremos o critério de normalização, ou seja,

$$\sum_{i=0}^2 n_i = n_0 + n_1 + n_2 = q^2 x_0 + 2q^2(q-1)x_1 + q^2(q-1)^2 x_2 = 1 \quad (3.56a)$$

$$2q^2(q-1)x_1 = 1 - q^2(x_0) - q^2(q-1)^2 x_2 \quad (3.56b)$$

$$x_1 = \frac{1}{2q^2(q-1)} [1 - q^2(x_0) - q^2(q-1)^2 x_2], \quad (3.56c)$$

mostrando assim que ambas as metodologias proporcionam o mesmo resultado. Todavia,

a metodologia por nós proposta apresenta uma forma coerente e autônoma de efetuarmos a aproximação de campo médio.

3.2.3 Estimativa do ponto crítico

Nesta subseção vamos calcular o valor de q em que observamos a transição de fase do modelo de Axelrod unidimensional perante à aproximação de pares proposta por Vilone e colaboradores. (19) Mostraremos explicitamente a metodologia para $F = 2$ e $F = 3$. Devido ao aumento no número de equações, o caso F geral será analisado numericamente.

Sabemos que mesmo para $F = 2$ (vide equação 3.53) o sistema de equações obtido pela aproximação de pares não é linear, portanto deve-se primeiro linearizá-lo em torno de um ponto fixo. Por construção do modelo, os pontos fixos são caracterizados por $n_k = 0$ quando $k = 1, \dots, F - 1$, e $n_0 + n_F = 1$, ou seja, não há ligações ativas na cadeia. Para simplificarmos a notação denotaremos o valor de n_0 no ponto fixo por ρ . Não usaremos o conjunto de equações 3.53, pois queremos um sistema de equações com a dependência explícita em λ . Este é o parâmetro adicional à teoria que representa a probabilidade de um fator cultural qualquer de um sítio aleatório ser igual ao respectivo fator cultural do vizinho de seu vizinho (vide equação 3.44). Pela aproximação feita anteriormente temos que λ dependerá apenas de q e da distribuição inicial dos fatores culturais. Para o caso uniforme mostramos que $\lambda = 1/(q - 1)$.

Recalculando o conjunto de equações para o caso $F = 2$ e lembrando que $k = 0, 1, 2$ temos

$$\begin{aligned} \dot{n}_0 = & - \left(1 - \frac{0}{2}\right) (1 - \delta_{0,0})n_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) n_1 \\ & + \frac{n_1}{2} \left[-n_0 \left(1 - \frac{0}{2}(1 - \lambda)\right) + n_{-1} \left(1 - \frac{(-1)}{2}\right) + n_1 \left(\frac{1}{2}\lambda\right) \right] \end{aligned} \quad (3.57a)$$

$$\dot{n}_0 = \frac{n_1}{2} + \frac{n_1}{2} \left(-n_0 + \frac{n_1\lambda}{2} \right) \quad (3.57b)$$

$$\dot{n}_0 = \frac{n_1}{2} \left(1 - n_0 + \frac{\lambda}{2} n_1 \right); \quad (3.57c)$$

analogamente para $k = 1$

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 = & -\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 - \delta_{1,0})n_1 + \left(1 - \frac{2}{2}\right)n_2 \\ & + \frac{n_1}{2} \left[-n_1 \left(1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda)\right) + n_0 \left(1 - \frac{0}{2}\right) + n_2 \left(\frac{2}{2}\lambda\right) \right]\end{aligned}\quad (3.58a)$$

$$\dot{n}_1 = -\frac{n_1}{2} + \frac{n_1}{2} \left[-n_1 \left(\frac{2-1+\lambda}{2}\right) + n_0 + \lambda n_2 \right] \quad (3.58b)$$

$$\dot{n}_1 = \frac{n_1}{2} \left[-1 + n_0 - \frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \lambda n_2 \right]; \quad (3.58c)$$

e finalmente para $k = 2$

$$\begin{aligned}\dot{n}_2 = & -\left(1 - \frac{2}{2}\right)(1 - \delta_{1,0})n_1 + \left(1 - \frac{2}{2}\right)n_2 \\ & + \frac{n_1}{2} \left[-n_1 \left(1 - \frac{2}{2}(1 - \lambda)\right) + n_0 \left(1 - \frac{0}{2}\right) + n_2 \left(\frac{2}{2}\lambda\right) \right]\end{aligned}\quad (3.59a)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{n_1}{2} \left[-n_2(1 - 1 + \lambda) + \frac{n_1}{2} \right] \quad (3.59b)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{n_1}{2} \left[\frac{n_1}{2} - \lambda n_2 \right]. \quad (3.59c)$$

Para linearizarmos o sistema $\dot{X} = AX$ devemos calcular o jacobiano da matriz A aplicado no ponto fixo $n_1 = 0$, $n_0 = \rho$ e $n_2 = 1 - \rho$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \left[\frac{n_1}{2} \left(1 - n_0 + \frac{\lambda n_1}{2}\right) \right] = \frac{n_1}{2} \frac{\partial}{\partial n_0} \left(1 - n_0 + \frac{\lambda n_1}{2}\right) = -\frac{n_1}{2} \rightarrow 0 \quad (3.60a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{n_1}{2} \left(1 - n_0 + \frac{\lambda n_1}{2}\right) \right] &= \frac{1}{2} \left(1 - n_0 + \frac{\lambda n_1}{2}\right) + \frac{n_1}{2} \left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n_0}{2} + \frac{\lambda n_1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(1 - \rho)\end{aligned}\quad (3.60b)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2} \left[\frac{n_1}{2} \left(1 - n_0 + \frac{\lambda n_1}{2}\right) \right] = 0 \quad (3.60c)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_0} \left\{ \frac{n_1}{2} \left[-1 + n_0 - \frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \lambda n_2 \right] \right\} \\ = \frac{n_1}{2} \frac{\partial}{\partial n_0} \left[-1 + n_0 - \frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \lambda n_2 \right] = \frac{n_2}{2} \rightarrow 0\end{aligned}\quad (3.60d)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_1} \left\{ \frac{n_1}{2} \left[-1 + n_0 - \frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \lambda n_2 \right] \right\} \\ = \frac{1}{2} \left[-1 + n_0 - \frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \lambda n_2 \right] + \frac{n_1}{2} \left[-\frac{1}{2}(1 + \lambda) \right] \\ = -\frac{1}{2} + \frac{n_0}{2} - \frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \frac{n_2 \lambda}{2} \rightarrow \frac{1}{2}[\rho + (1 - \rho)\lambda - 1] = -\frac{1}{2}(1 - \rho)(1 - \lambda)\end{aligned}\quad (3.60e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_2} \left\{ \frac{n_1}{2} \left[-1 + n_0 + -\frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \lambda n_2 \right] \right\} \\ = \frac{n_1}{2} \frac{\partial}{\partial n_2} \left[-1 + n_0 + -\frac{n_1}{2}(1 + \lambda) + \lambda n_2 \right] = \frac{n_1 \lambda}{2} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.60f)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \left[\frac{n_1}{2} \left(\frac{n_1}{2} - \lambda n_2 \right) \right] = 0 \quad (3.60g)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{n_1}{2} \left(\frac{n_1}{2} - \lambda n_2 \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{2} - \lambda n_2 \right) + \frac{n_1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (n_1 - \lambda n_2) \rightarrow -\frac{\lambda}{2} (1 - \rho) \quad (3.60h)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2} \left[\frac{n_1}{2} \left(\frac{n_1}{2} - \lambda n_2 \right) \right] = \frac{n_1}{2} \frac{\partial}{\partial n_2} \left[\frac{n_1}{2} - \lambda n_2 \right] = -\frac{n_1 \lambda}{2} \rightarrow 0. \quad (3.60i)$$

Resumindo, ficamos com o seguinte jacobiano

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1 - \rho) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(1 - \rho)(1 - \lambda) & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2}(1 - \rho) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

A estabilidade dos pontos críticos é inferida a partir do estudo do sinal dos autovalores de J_2 . (42) Graças as duas colunas nulas de J_2 , sabe-se que o único autovalor não nulo é

$$\mu = -\frac{1}{2}(1 - \rho)(1 - \lambda). \quad (3.62)$$

Desta equação é imediato ver que para $\rho = 1$ (estado absorvente monocultural) obtém-se $\mu = 0$ independentemente do valor de λ ; portanto a estabilidade do ponto fixo não pode ser inferida diretamente. Todavia, essa estabilidade pode ser inferida indiretamente pela estabilidade de outros pontos fixos. Supondo que todos os outros pontos fixos sejam instáveis, o ponto $\rho = 1$ será estável, analogamente, ao supor que todos os outros pontos fixos sejam estáveis, o ponto $\rho = 1$ será instável. Essa inferência é válida pois sabemos que fisicamente o sistema sempre atinge um ponto fixo (configuração absorvente). Este argumento nos provê a base para concluirmos que para valores de q tal que μ seja negativo o sistema de equações convergirá exponencialmente para um valor de $\rho < 1$, isto é um estado absorvente multicultural. Já para o caso em que μ é positivo, o único ponto de atração está em $\rho = 1$ ou seja, estados absorventes monoculturais. Combinando essa argumentação com a dependência de μ com λ mostrada na figura 3.1a o valor crítico de

q para o caso $F = 2$ será

$$\lambda_c = 1 \quad (3.63a)$$

$$\frac{1}{q_c - 1} = 1 \quad (3.63b)$$

$$q_c = 2. \quad (3.63c)$$

A segunda parte desta seção exibe o mesmo procedimento para $F = 3$. De forma análoga a feita anteriormente, deve-se primeiramente encontrar explicitamente o sistema de equações diferenciais a partir da expressão geradora 3.48, não inserindo a dependência explícita de λ com q . Como $F = 3$ sabe-se que teremos um sistema de quatro equações, pois $k = 0, 1, 2, 3$. Assim

$$\begin{aligned} \dot{n}_0 = & -\left(1 - \frac{0}{3}\right)(1 - \delta_{0,0})n_0 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)n_1 \\ & + \left[\sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{i}{3}\right)n_i\right] \left[-n_0 \left(1 - \frac{0}{3}(1 - \lambda)\right) + n_{-1} \left(1 - \frac{-1}{3}\right) + n_1 \left(\frac{1}{3}\right)\lambda\right] \end{aligned} \quad (3.64a)$$

$$\dot{n}_0 = \frac{2n_1}{3} + \left[\frac{2n_1}{3} + \frac{n_2}{3}\right] \left[\frac{\lambda n_1}{3} - n_0\right] \quad (3.64b)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 = & -\left(1 - \frac{1}{3}\right)(1 - \delta_{1,0})n_1 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)n_2 \\ & + \left[\sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{i}{3}\right)n_i\right] \left[-n_1 \left(1 - \frac{1}{3}(1 - \lambda)\right) + n_0 \left(1 - \frac{0}{3}\right) + n_2 \left(\frac{2}{3}\right)\lambda\right] \end{aligned} \quad (3.64c)$$

$$\dot{n}_1 = -\frac{2n_1}{3} + \frac{n_2}{3} + \left[\frac{2n_1}{3} + \frac{n_2}{3}\right] \left[n_0 - \frac{\lambda n_1}{3}(2 + \lambda) + \frac{2\lambda n_2}{3}\right] \quad (3.64d)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_2 = & -\left(1 - \frac{2}{3}\right)(1 - \delta_{2,0})n_2 + \left(1 - \frac{3}{3}\right)n_3 \\ & + \left[\sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{i}{3}\right)n_i\right] \left[-n_2 \left(1 - \frac{2}{3}(1 - \lambda)\right) + n_1 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + n_3 \left(\frac{3}{3}\right)\lambda\right] \end{aligned} \quad (3.64e)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{n_2}{3} + \left[\frac{2n_1}{3} + \frac{n_2}{3}\right] \left[\frac{2n_1}{3} - \frac{\lambda n_2}{3}(1 + 2\lambda) + \lambda n_3\right] \quad (3.64f)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_3 = & -\left(1 - \frac{3}{3}\right)(1 - \delta_{3,0})n_3 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)n_4 \\ & + \left[\sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{i}{3}\right)n_i\right] \left[-n_3 \left(1 - \frac{3}{3}(1 - \lambda)\right) + n_2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) + n_4 \left(\frac{4}{3}\right)\lambda\right] \end{aligned} \quad (3.64g)$$

$$\dot{n}_3 = \left[\frac{2n_1}{3} + \frac{n_2}{3}\right] \left[\frac{n_2}{3} - \lambda n_3\right]. \quad (3.64h)$$

A segunda parte do nosso procedimento consiste em derivar todas as equações acima com respeito a n_0, n_1, n_2, n_3 . Como todas as funções são polinômios dessas variáveis a derivação é trivial e por isso omitiremos os cálculos. O jacobiano deste sistema tem a forma

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}(1-\rho) & -\frac{\rho}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}(1-\rho) & \frac{1}{3}(1+\rho) & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda}{3}(1-\rho) & \frac{1}{3}[(1-\rho)\lambda - 1] & 0 \\ 0 & -\frac{2\lambda}{3}(1-\rho) & -\frac{\lambda}{3}(1-\rho) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Calculando os autovalores da matriz J_3 , encontra-se dois autovalores nulos e o par

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}[(1-\rho)(\lambda-2) - 1] \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3}[(1-\rho)(\lambda-2) - 1] \right]^2 + \frac{8\lambda}{27}(1-\rho^2)} \right\} \quad (3.66)$$

Portanto, se $\rho = 1$ todos os autovalores da matriz J_3 são nulos, não nos retornando informação alguma sobre a estabilidade do ponto fixo homogêneo. No entanto, ao usarmos o mesmo argumento apresentado para o caso $F = 2$ podemos inferir indiretamente sua estabilidade. Para $\lambda > 2$, ou seja, $q > 2$ o autovalor μ_- é sempre negativo e portanto não nos dá nenhuma informação. Devemos então analisar a dependência de μ_+ com λ para obtermos o valor crítico. Da figura 3.1b obtemos

$$\lambda_c = 0.5 \quad (3.67a)$$

$$\frac{1}{q_c - 1} = 0.5 \quad (3.67b)$$

$$q_c = 3. \quad (3.67c)$$

O caso genérico será efetuado numericamente com o auxílio da biblioteca *sympy* a qual nos permite executar cálculos algébricos em *python*. Dado um F qualquer, o *script* gera o sistema de equações diferenciais, calcula as componentes do jacobiano e obtém seus autovalores. Encontra-se, independentemente do valor de F , dois autovalores nulos, pois inserimos *ad hoc* a relação $n_0 + n_F = 1$. Os outros $F - 3$ autovalores estão divididos em três categorias: complexos, positivos independentemente do valor de ρ e λ , e negativos independentemente do valor de ρ e λ . Estes não nos auxiliam na análise da estabilidade

Figura 3.1 – Dependência do único autovalor não nulo e não complexo μ com o parâmetro λ na aproximação de campo médio proposta por Vilone e colaboradores para o modelo de Axelrod unidimensional uniforme com $\rho = 0, 0.1, \dots, 1$ diversos valores de F .

Fonte: Efetuada pelo autor.

dos pontos fixos. Todavia, sempre é encontrado um autovalor real (μ) cujo sinal depende do valor de ρ e λ , além do mais, o valor de λ no qual este autovalor se anula, denotado por λ_0 , independe do valor de ρ . A dependência explícita de μ com λ , para vários valores de ρ , é mostrado nas figuras 3.1a, 3.1b, 3.1c e 3.1d. Pelas figuras encontramos

$$\lambda_0 = \frac{1}{F-1}. \quad (3.68)$$

Como $\lambda = 1/(q-1)$ concluímos que o valor de q em que o sistema transiciona da fase ordenada para a fase desordenada será $q_c = F$.

3.2.4 Comparação com as simulações

O objetivo desta subseção é comparar a dinâmica obtida neste capítulo (problema de valor inicial 3.48 e 3.49) com aquela simulada computacionalmente na seção 2.3.1 do

capítulo 2. Mais especificamente, focaremos nossa comparação nos estados estacionários no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$). Em suma, resolveremos o problema de valor inicial 3.48 numericamente, obtendo a dependência temporal das variáveis n_k , mas nos concentraremos apenas nos pontos fixo obtidos no limite $t \rightarrow \infty$. Devido à topologia unidimensional do modelo é possível comparar os resultados da abordagem de campo médio com as simulações de Monte Carlo, posto que o número de domínios normalizado pelo tamanho da rede ($\langle N_d \rangle / L$) é numericamente igual à fração de ligações totalmente distintas (n_F). Esta igualdade fica mais clara ao calcularmos $\langle N_d \rangle / L$ e n_F no estado absorvente abaixo:

$$\begin{pmatrix} 222 & 111 & 111 & 222 & 222 & 111 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Neste caso, temos $N_d = 4$ e o número de ligações completamente diferentes é $n_F L = 4$. Note que o cálculo do número de ligações completamente distintas assume as condições periódicas de contorno (anel), ou seja, para um estado do tipo

$$\begin{pmatrix} 222 & 111 & 111 & 222 & 222 & 222 \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

em que o “último” agente é idêntico ao primeiro, logo membros do mesmo domínio, temos $N_d = 2$ e $n_F L = 2$. Sem mais delongas, temos na figura 3.2 o diagrama de fase do modelo de Axelrod unidimensional uniforme, e na figura 3.3 as curvas do limite termodinâmico do número de domínios normalizados. Estas figuras nos mostram um resultado canônico de aproximações de campo médio: elas não representam bem o modelo para regimes próximos ao ponto crítico; no entanto, espera-se que aumentando a ordem da aproximação uma melhor precisão seja alcançada.

3.2.5 Comentários finais

Concluindo este capítulo de caráter analítico, devemos mencionar que um fator simplificador da análise apresentada foi a equivalência entre os distintos fatores culturais devido à distribuição uniforme desses fatores na configuração inicial. Tanto a aplicação de um campo externo que diferencia fatores culturais associados ao campo ou uma dis-

Figura 3.2 – Diagrama de fases do modelo de Axelrod unidimensional no espaço (F, q) com fatores culturais iniciais determinados por uma distribuição de probabilidade uniforme no conjunto de inteiros $\{1, 2, \dots, q\}$. A linha contínua representa a estimativa obtida via análise de pontos críticos do sistema 3.48.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.3 – Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty = n_F$ com o parâmetro q no modelo de Axelrod unidimensional uniforme para diversos valores de F . As linhas contínuas representam as soluções numéricas do sistema 3.48.

Fonte: Elaborada pelo autor.

tribuição inicial com diferentes pesos para os fatores culturais (Poisson, por exemplo), tornam o cálculo muito mais complexo resultando em equações de pouca utilidade prática.

4 *Efeito do campo externo no modelo de Axelrod*

Neste capítulo iremos analisar e discutir os efeitos do campo externo no modelo de Axelrod. Este é interpretado como a ação da mídia impondo aos agentes sua mensagem. O conteúdo dessa mensagem pode ser totalmente aleatório (influência alienígena externa), o consenso global da rede ou o consenso da vizinhança local de cada agente. Iniciaremos nossa discussão com a caracterização da influência deste campo no modelo original bidimensional. (10) Em seguida, reduziremos a dimensionalidade deste e caracterizaremos, de forma análoga ao feito para o modelo livre, a influência do campo. Nosso foco nesta parte é mostrar que esta ação é invariante perante a redução da dimensionalidade. Vale lembrar que esta redução da dimensão foi proposta originalmente por Vilone e colaboradores. (19)

Inicialmente, mostraremos a existência de um efeito contra intuitivo para o modelo bidimensional: o campo externo sem dependência espacial aumenta a heterogeneidade do sistema. Isto é, dado F e q tal que sempre seja alcançado um estado absorvente monocultural na ausência do campo; ao “ligarmos” o campo externo, passaremos a atingir, com probabilidade 1 no limite termodinâmico, um estado absorvente multicultural. (43) A primeira vista temos um resultado anômalo pois o efeito esperado do campo externo seria homogeneizar os agentes com sua mensagem. Entretanto, ao inserirmos o campo na dinâmica, inserimos nos estados absorventes um segundo vínculo de parada: o estado final de cada agente deve ser totalmente idêntico, ou completamente distinto do campo externo, além de ser completamente idêntico ou totalmente distinto de cada um dos agentes de sua vizinhança. Isto ocorre porque tratamos o campo externo como um vizinho fictício adicional de cada agente, portanto, este segue as mesmas regras de interação de Axelrod (vide apêndice A para mais detalhes). Assim, apesar de individualmente o campo homogenei-

zar os agentes, este vínculo elimina inúmeras configurações monoculturais, aumentando a probabilidade de existência de configurações multiculturais. Além disso, mostraremos também que estas configurações absorventes multiculturais são compostas de um domínio macroscópico ($\approx 95\%$ dos agentes) e de um conjunto extensivo de domínios microscópicos, e, no limite em que a intensidade do campo aplicado vai a zero, os domínios microscópicos desaparecem, (44) corroborando o fato de que a interação local de Axelrod é a geradora de homogeneidade.

Ainda no modelo bidimensional, queremos verificar a existência deste mesmo tipo de resultado para o limite livre multicultural. Ou seja, dado uma dupla F e q tal que na ausência do campo sempre é atingido estados absorventes multiculturais, ao “ligarmos” o campo o sistema sempre congelará numa configuração absorvente monocultural. (34, 45) Mostraremos que não é encontrado este tipo de efeito. (44) O campo externo altera sim a fragmentação dos estados absorventes. Todavia, ele não altera o comportamento, apesar dele modificar a fragmentação, ainda temos apenas configurações absorventes multiculturais no limite termodinâmico. Por fim, uma breve discussão do campo local será feita. Este, por não ser uniforme espacialmente, influencia o sistema de forma singular: todos as configurações absorventes atingidos pelo sistema são monoculturais, independentemente do comportamento do sistema na ausência do campo.

Já para o sistema unidimensional, o foco é mostrar que a ação do campo externo é qualitativamente idêntica ao sistema bidimensional. Ou seja, queremos verificar a persistência do efeito obtido no sistema bidimensional: o campo externo uniforme espacialmente elimina os estados monoculturais do modelo, e um campo sem essa dependência elimina os estados multiculturais deste. O que é observado é um comportamento similar para o regime livre (isto é, sem campo) monocultural: o campo destrói o equilíbrio dinâmico em favor da heterogeneidade. Entretanto, este efeito é mais severo no modelo unidimensional. Visto que a aplicação do campo externo heterogeneiza completamente o sistema no limite termodinâmico, isto é, o estado final é uma rede composta apenas por domínios pequenos, independente da intensidade do campo externo aplicado. Para o

regime livre multicultural mostraremos uma total equivalência entre os modelos, já que a influência do campo externo altera a fragmentação do sistema, mas não altera qualitativamente seu comportamento. Por último, mostraremos que o campo local também destrói os estados multiculturais, analogamente ao encontrado para o modelo bidimensional.

Finalmente, da literatura observamos que alguns autores defendem a existência de uma transição de fase em função da intensidade do campo externo. (34, 45) Mostraremos, no entanto, que este é um efeito espúrio gerado pelo tamanho das redes utilizadas naqueles estudos, já que não observamos tal transição no limite termodinâmico independentemente da dimensão do modelo.

A estrutura deste capítulo é a seguinte: na seção 4.1 explicaremos os elementos do modelo, discutiremos a forma de inserirmos o campo, as três diferentes implementações de campos externos utilizadas e como adaptar a técnica da lista de sítios ativos neste caso. As duas seções posteriores (seções 4.2 e 4.3) são divididas semelhantemente. Em ambas tem-se uma análise do campo estático e do campo de consenso (campos uniforme espacialmente) para o sistema livre monocultural e para o sistema livre multicultural (subseções 4.2.1 e 4.3.1, respectivamente). Em seguida uma subseção especial para o campo local (subseções 4.2.2 e 4.3.2), já que este possui uma dependência espacial a qual altera significativamente a resposta do sistema perante a sua ação.

4.1 Modelagem

Como explicado no capítulo 2, no modelo de Axelrod original (10) cada agente é caracterizado por um conjunto de F fatores culturais, os quais podem assumir q valores distintos e interagem com seus vizinhos mais próximos com uma probabilidade proporcional a sua similaridade cultural (veja o apêndice A para mais detalhes sobre a regra de adjacência do modelo). Nas análises deste capítulo, os agentes serão dispostos primeiramente em uma rede bidimensional (seção 4.2), em seguida (seção 4.3) em uma cadeia unidimensional (vide apêndice C para informações técnicas da implementação da estru-

Figura 4.1 – Diagrama de fluxo com o algoritmo proposto por Shibanaí e colaboradores (27) para a inserção de uma mídia externa (campo externo) no modelo de Axelrod.

Fonte: Elaborada pelo autor.

tura de dados). Em ambas as seções a variável que representa o tamanho do sistema (dimensão na primeira seção e comprimento na segunda) será L . Vale ressaltar que em ambos os casos usa-se condições abertas de contorno. A configuração inicial para todas as simulações deste capítulo é aleatória e uniforme. Escolheram-se condições abertas a fim de compararmos os resultados entre os sistemas 1D e 2D, já que a condição aberta facilita o cálculo dos domínios em duas dimensões por meio do algoritmo de Hoshen e Kopelman. (35, 36) (no apêndice B há uma discussão detalhada deste algoritmo) Veja que a escolha da condição de contorno é irrelevante, pois o objeto de estudo é o limite termodinâmico

$(L \rightarrow \infty)$.

O campo externo é inserido através da metodologia proposta por Shibanaí e colaboradores, (27) segundo a qual cada agente da cadeia possui um vizinho fictício adicional e uma probabilidade p de interagir com esse vizinho. Em termos da simulação, ao escolher um agente da rede, este tem uma probabilidade p de interagir com o campo externo e $1 - p$ de interagir com um agente de sua vizinhança. Note que p representa a intensidade do campo externo: para $p = 1$ os agentes apenas interagem com o campo e para $p = 0$ retomamos o sistema livre. Assim, foi inserida no algoritmo da figura 2.1 uma escolha adicional: interagir com sua vizinhança ou com o campo externo. Visto que o campo é modelado como um vizinho fictício, essa interação também obedece a regra da semelhança cultural. Assim, elementos completamente distintos ou completamente iguais ao campo não sofrem sua influência. O algoritmo é resumido na figura 4.1. Como comentado anteriormente, essa mudança também altera a natureza dos estados absorventes possíveis. Agora, além da condição original de que cada agente tenha uma vizinhança idêntica ou totalmente distinta, cada agente deve ter também seus fatores culturais idênticos ou completamente distintos do campo externo. Em resumo, podemos classificar os estados absorventes possíveis em três categorias: monocultural cujos agentes exibem o conjunto de fatores culturais do campo externo, $(q - 1)^F$ monoculturais cujos F fatores culturais são completamente distintos do campo externo, e multiculturais compostos por domínios idênticos ao campo externo e outros completamente distintos.

Para completarmos a caracterização do modelo, é necessário definir o valor de cada componente do campo externo e como elas se modificam no decorrer da simulação. A literatura oferece três formas distintas de campo: estático, consenso e local. (27) O campo estático é definido como um conjunto aleatório de fatores culturais escolhidos no início da simulação que permanecem constantes durante todo o tempo. O campo de consenso é definido como o conjunto de fatores culturais mais comum na rede, e o campo local é definido como o conjunto de fatores culturais mais comum na vizinhança de cada sítio (para uma descrição mais detalhada veja o apêndice D).

Figura 4.2 – Diagrama de fluxo com o algoritmo utilizado nas simulações do modelo de Axelrod com influência de um campo externo genérico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, foi usada a técnica da lista de ligações ativas para diminuir o tempo de execução das simulações. Todavia, não podemos inserir todas as conexões ativas em uma única lista, pois a probabilidade de interagir com a mídia p é um parâmetro do sistema. Assim, uma segunda estrutura auxiliar é criada - a lista de elementos ativos em relação ao campo externo. Não lidaremos com as ligações entre os agentes e o campo, pois, diferentemente da interação com a vizinhança, em que a cada passo é necessário definir um sítio alvo e um vizinho possível, o vizinho possível é fixo (campo externo). Portanto, implementaremos uma lista de sítios ativos em relação ao campo (para uma discussão detalhada da implementação das listas veja o apêndice C). Com ambas as listas, a ordem das escolhas mostrada na figura 4.1 é alterada: escolhe-se primeiro o tipo de interação que será efetuada (campo ou vizinhança) e em seguida escolhe-se aleatoriamente um elemento

de sua respectiva lista. O algoritmo é resumido na figura 4.2. Analogamente ao modelo livre (capítulo 2), a simulação termina quando ambas as listas estiverem vazias.

4.2 Simulações de Monte Carlo do modelo bidimensional

4.2.1 Campo Estático e Campo de Consenso

Nesta seção, dois regimes serão estudados: o regime livre monocultural cujos parâmetros são $F = 5$ e $q = 5$ e o regime livre multicultural com parâmetros $F = 2$ e $q = 8$. Para o primeiro, mostraremos o efeito encontrado por Shibani (27) e por diversos outros autores, (34, 43, 45–47) a saber, dado um regime livre monocultural, ao inserirmos um campo externo uniforme espacialmente, a dinâmica passa a congelar em estados absorventes multiculturais. Mostraremos também que a hipótese de existência de uma transição de fase em função da intensidade do campo é incorreta, sendo devido ao pequeno tamanho das redes utilizadas. (34, 45) Verificaremos que a ação do campo é muito mais extrema; sua influência oblitera as configurações absorventes monoculturais do modelo no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$), isto é, independentemente da intensidade do campo p e dos parâmetros F e q tal que o sistema encontra-se no regime livre monocultural, é sempre observado um congelamento do sistema em um estado absorvente multicultural. Para o regime livre multicultural, comprovaremos a hipótese de similaridade de campos externos constantes, isto é, o sistema responderá da mesma forma para o campo estático e o campo de consenso global no limite termodinâmico. Mostraremos também que não há um efeito contra intuitivo análogo ao regime livre monocultural, já que ao aplicarmos o campo externo este apenas altera a fragmentação dos domínios, mantendo qualitativamente o comportamento multicultural do sistema. Por último estudaremos o efeito do campo local. Este, por definição, exibe uma dependência espacial, e, surpreendentemente, elimina as configurações absorventes multiculturais, isto é, o sistema atinge com probabilidade 1 um estado absorvente monocultural quando aplicamos o campo externo local

com $0 < p < 1$.

Regime livre monocultural

Para o caso do regime livre monocultural consideraremos apenas o campo estático. Na sequência mostraremos que todas as conclusões obtidas para este campo podem ser generalizadas para o campo de consenso. Isto ocorre pois as componentes do campo de consenso global permanecem praticamente constantes, fazendo-o durante a dinâmica se comportar de maneira semelhante à um campo estático. A única diferença entre estes campos está em seu valor inicial, já que há uma correlação entre os valores iniciais das componentes dos agentes com as componentes iniciais do campo de consenso global. Esta correlação, por outro lado, é inexistente para o campo estático, já que cada componente deste, por construção, é um valor aleatório definido no início da simulação. Sem perda de generalidade assumiremos todas as componentes do campo estático iguais à 1.

Usando uma metodologia semelhante à do capítulo 2, nosso estudo começa observando a dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ em função da dimensão da rede L , mostrado na figura 4.3. Vale lembrar que um domínio é caracterizado por um conjunto de agentes vizinhos entre si com o mesmo conjunto de fatores culturais. Das análises da literatura, sabemos que para os parâmetros $F = 5$ e $q = 5$ espera-se uma transição de fase em $p_c \approx 0.3$. (34) Todavia, as curvas da figura 4.3 mostram que esta conclusão é equivocada já que independentemente da intensidade do campo, a medida que aumentamos o tamanho da rede o sistema sempre atinge um estado absorvente multicultural. Além disso, vimos que o caso $p = 1$ é muito mais fragmentado, já que neste caso os agentes interagem apenas com o campo, e, devido a forma de inserção do campo no modelo, agentes totalmente distintos deste possuem probabilidade nula de alterar seu conjunto de fatores culturais. Isto corrobora a hipótese de que a interação local é a responsável pela homogeneização da rede.

Uma forma alternativa de ilustrarmos o efeito do campo externo quando aumentamos o tamanho da rede L é oferecida na figura 4.4. Nesta, temos a dependência da fração

Figura 4.3 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.4 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.5 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural cujos fatores culturais são totalmente distintos do campo $1 - \zeta_m/\zeta_h$ com a área da rede L^2 no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . As linhas contínuas representam as extrapolações dos pontos via mínimos quadrados. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com L . Esta figura mostra mais claramente a predominância de estados absorventes monoculturais para redes de tamanho intermediário, o que originou a hipótese de transição de fase encontrada na literatura. (34, 45) A figura 4.4 mostra também o efeito heterogeneizador do campo externo, já que todas as curvas no limite termodinâmico vão a zero. Outrossim, notamos que o estado monocultural para redes grandes é composto apenas por fatores culturais idênticos a média. Com isso em mente é que exibimos os resultados da figura 4.5. Nesta figura temos a dependência de $1 - \zeta_m/\zeta_h$ com a área da rede L^2 , sendo ζ_m a fração de amostras monoculturais cujas componentes são idênticas as do campo externo. Portanto $1 - \zeta_m/\zeta_h$ é a fração de amostras monoculturais cujos fatores culturais são completamente distintos dos do campo. Como mostrado na figura 4.5, esta variável decresce exponencialmente, mostrando que para L grande as raras configurações absorventes monoculturais são todas idênticas ao campo externo.

Os resultados das figuras 4.3 e 4.4 apenas ratificam a hipótese do campo externo promover a diversidade cultural, já que a heterogeneidade das configurações absorventes só aumenta ao aplicarmos este campo. Contudo, essa é uma visão um pouco insólita da situação. De fato, observamos em todas as simulações executadas até agora que o maior domínio é composto de agentes idênticos ao campo. Não só isso, o tamanho deste domínio é maior que a soma de todos os outros domínios, como mostrado na figura 4.6 que exibe a dependência do tamanho médio normalizado dos domínios não pertencentes ao maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L^2$ com o tamanho da rede L . Vale ressaltar que apesar de alguns domínios pequenos terem os fatores culturais do campo externo, eles são contados separadamente pois estão desconectados do maior domínio, um efeito conhecido como diáspora cultural. (40) De acordo com as conclusões tiradas das figuras 4.3, 4.4 e 4.6, a **soma** dos domínios diferentes do campo externo ocupam uma porção finita, ou seja, macroscópica da rede no limite $L \rightarrow \infty$. Neste limite, o tamanho médio dos domínios excluindo o maior pode ser calculado pela razão

$$\frac{1 - \langle S_{max} \rangle / L^2}{\langle N_d \rangle / L^2} \quad (4.1)$$

que nos retorna aproximadamente 3 agentes por domínio independentemente do valor de p , de modo que podemos concluir tratar-se de domínios microscópicos. Isto implica que estes estados absorventes multiculturais possuem apenas um grande domínio com fatores culturais idênticos ao campo externo e, no limite $p \rightarrow 0$, este domínio tende a ocupar a rede inteira. Este resultado é mostrado explicitamente na figura 4.7 onde exibimos o comportamento assintótico do tamanho médio dos domínios não pertencentes ao maior domínio em função da intensidade do campo p .

A figura 4.6 nos indica que há algo trivial nesses domínios microscópicos distintos do campo externo. Para tentar entender a situação de uma forma simples, dois pontos devem ser enfatizados. Primeiro, quando os agentes interagem apenas com o campo externo ($p = 1$) as configurações absorventes são multiculturais (vide figura 4.3), já que agentes cujos F fatores culturais iniciais são distintos do campo externo são inertes a ação deste.

Figura 4.6 – Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 5$ e diversos valores de p . A linha contínua representa a fração $(1 - 1/q)^F$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.7 – Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio no limite termodinâmico $(1 - \langle S_{max} \rangle / L^2)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$ e $q = 5$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por exemplo, a linha horizontal da figura 4.6 nos mostra o número de agentes distintos da mídia independentemente da disposição dos domínios no caso em que as interações locais sejam “desligadas”, ou seja, $(1 - 1/q)^F$. Como comentado anteriormente, estes agentes não alteram seus fatores culturais no decorrer da dinâmica. Segundo, existem muito mais agentes diferentes da mídia para $p = 1$ do que para $p < 1$, ou seja, a interação local homogeneizadora contribui para aumentar o número de agentes com os fatores culturais do campo externo. Em suma, graças ao vínculo de probabilidade de interação proporcional à similaridade cultural, o campo externo no modelo de Axelrod bidimensional não promove a homogeneidade; pelo contrário, há mais diversidade cultural quando o campo é o único provedor de dinâmica.

Regime livre multicultural

Trataremos agora da influência do campo externo em um sistema livre multicultural ($F = 2$ e $q = 8$). Nossa intenção aqui é observar um efeito contra intuitivo análogo ao reportado na literatura para o sistema livre monocultural, isto é, a homogeneização do sistema no limite $p \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$ devido à ação de um campo estático ou de um campo de consenso global. (34, 45) Identicamente ao feito para o regime monocultural, a análise é iniciada através do gráfico do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ em função do tamanho da rede L , mostrado na figura 4.8 para o campo estático e na figura 4.9 para o campo de consenso.

Antes de tudo, é direto ver que o efeito contra intuitivo motivador do trabalho não é encontrado nesse conjunto de parâmetros, ou seja, a ação do campo estático e de consenso não altera qualitativamente o comportamento do sistema que permanece multicultural, apenas modifica a fragmentação dos domínios. É observado também que ambos os campos atingem o máximo de fragmentação quando a única interação permitida é com o campo externo ($p = 1$). Isto corrobora a hipótese de que a interação local de Axelrod é a provedora de homogeneização do sistema. Novamente, o motivo pelo qual é atingido a fragmentação máxima em $p = 1$ é o fato do campo externo ser um vizinho adicional do agente alvo

e sua interação também ser proporcional a sua similaridade cultural com aquele agente. Portanto, sítios cujos fatores culturais iniciais são totalmente distintos do campo externo não se alteram no decorrer da dinâmica, gerando a fragmentação da rede.

Um segundo resultado interessante observado nas figuras 4.8 e 4.9 é que o número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) salta descontinuamente para um valor menor assim que p afasta-se infinitesimalmente da unidade. Todavia, observa-se um comportamento contínuo desta variável no intervalo $p \in (0, 1)$ e um segundo salto de $\langle N_d \rangle / L^2$ em $p = 0$, agora para um valor maior. Pelo fato de termos obtido este tipo de comportamento em redes de tamanho finito, concluimos que os estados absorventes multiculturais são instáveis perante perturbações de um único agente (vide apêndice E). Esta conclusão é corroborada pelo fato do número de domínios (juntamente com a diversidade cultural) diminuir quando o campo ou a interação local são “ligados”. De uma forma resumida, o número de domínios decresce descontinuamente de $p = 0$ para $p > 0$ e de $p = 1$ para $p < 1$.

O fato de que o regime livre multicultural é instável perante perturbações de um único agente corrobora os resultados de Klemm e colaboradores. (28) Mas, devido a não aleatoriedade da perturbação que inserimos no modelo, pois ela é um campo estático uniforme espacialmente, não obtemos os mesmos resultados. Aqueles autores, obtêm estados absorventes monoculturais a partir de um regime livre multicultural perturbado por alterações de um único sítio aleatório. Para mais detalhes veja o apêndice E.

Notamos também que para o caso em que os agentes apenas interagem com o campo externo $p = 1$, o campo de consenso é fixado com os valores mais comuns da configuração inicial aleatória. No entanto, para L finito observamos que o comportamento do sistema ao sofrer a influência do campo estático (figura 4.8) difere consideravelmente deste ao sofrer a ação do campo de consenso (figura 4.9). Como comentado anteriormente, observamos que os fatores culturais do campo estático são escolhidos aleatoriamente no início da simulação, e estes fatores são descorrelacionados dos fatores culturais dos agentes,

Figura 4.8 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.9 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

os quais também são escolhidos aleatoriamente no início da simulação. Já para o caso do campo de consenso, os fatores culturais do campo não são independentes dos fatores culturais dos agentes, pela construção do campo de consenso (vide apêndice D). Esta correlação é significativa para redes de tamanho pequeno, no entanto, torna-se irrelevante à medida que aumentamos o tamanho do sistema. Visto que no regime L grande e campo de consenso, a fração dos agentes que compartilham um fator cultural com o campo externo não é muito maior que $1/q$ que é o valor esperado para o mesmo regime só que sofrendo a influência do campo estático.

As descontinuidades em $p = 0$ e $p = 1$ ficam mais explícitas na figura 4.10, a qual mostra a dependência da extrapolação para redes infinitas ($L \rightarrow \infty$) do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a intensidade do campo p . Primeiramente, observa-se um comportamento praticamente indistinguível entre os dois campos, como era esperado. Obtivemos $(\langle N_d \rangle / L^2)_\infty \rightarrow 0.425 \pm 0.001$ para $p \rightarrow 0$ e $(\langle N_d \rangle / L^2)_\infty \rightarrow 0.869 \pm 0.001$ para $p \rightarrow 1$, valor igual para ambos os campos. Observa-se também que os dados não nos dão nenhuma evidência de que a extrapolação do número médio de domínios irá a zero no limite e $p \rightarrow 0$ (veja figura 4.11).

Por fim, obtivemos que o tamanho médio do maior domínio $\langle S_{max} \rangle$ cresce com $\ln L$ no regime de L grande, e que o tamanho típico de um domínio é da ordem de 1 independentemente do tipo de campo externo aplicado no sistema (vide figuras 4.12 e 4.13). Estes resultados são similares ao encontrados na literatura para o Modelo do Voto da maioria. (48)

4.2.2 Campo Local

Das implementações propostas para o valor e para a atualização dos fatores culturais do campo externo, o consenso local é o único que apresenta uma dependência espacial, ou seja, diferentemente dos campos discutidos anteriormente, esse campo pode assumir valores distintos para cada elemento da cadeia, já que ele representa o consenso da vizi-

Figura 4.10 – Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L^2)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod bidimensional sobre influência de diversos campos com $F = 2$ e $q = 8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.11 – Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L^2)_\infty$ com a intensidade do campo p , para p pequeno, no modelo de Axelrod bidimensional sobre influência de diversos campos com $F = 2$ e $q = 8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.12 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.13 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.14 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sobre influência de um campo local com $F = 2$, $q = 8$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

nhança de cada agente. Isto é, dado um agente da rede, cada fator cultural do campo local deste agente é o valor mais frequente de sua vizinhança, e, no caso de empate, escolhe-se aleatoriamente entre os fatores mais frequentes. Uma outra forma de ver a ação desse campo é uma interação do tipo modelo do voto da maioria (vide apêndice D). Nossa pergunta é: esse tipo de campo gerará uma resposta do sistema diferente daquelas mostradas anteriormente para campos espacialmente uniformes?

De forma similar ao feito em todas as análises anteriores, vamos nos concentrar na dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com o tamanho da rede L , mostrado na figura 4.14. Essa figura exhibe um comportamento completamente diferente do reportado para os campos anteriores: observamos no intervalo $p \in (0, 1)$, a predominância de amostras monoculturais, sendo o sistema livre multicultural. O espantoso é que para $L \gtrsim 500$ observa-se 100% de configurações absorventes monoculturais. Assim, o limite termodinâmico consiste em uma configuração monocultural, exceto nos

casos extremos $p = 0$ e $p = 1$.

4.3 Simulações de Monte Carlo do modelo unidimensional

Encerrada a caracterização da ação do campo externo no modelo de Axelrod bidimensional, focaremos agora em analisar esta ação na variante unidimensional do modelo, proposta por Vilone e colaboradores. (19) Nesta variante, temos os mesmos agentes do modelo original dispostos lado a lado, e conseqüentemente, cada agente agora possui uma vizinhança de 2 sítios (direita e esquerda). Apenas a estrutura espacial foi modificada, ainda será repetido exaustivamente o processo descrito na figura 4.2 até não termos mais elementos nas listas de ativos. Esta análise é relevante pois a simulação desta variante é mais rápida e graças à semelhança qualitativa com os resultados do modelo bidimensional, que será mostrada em seguida, podemos inferir alguns comportamentos do modelo original através dos resultados unidimensionais.

4.3.1 Campo Estático e Campo de Consenso

Nesta seção, analogamente ao feito no modelo bidimensional, separamos nosso estudo em dois casos: regime livre monocultural ($F = 5$ e $q = 3$) e regime livre multicultural ($F = 5$ e $q = 10$). Em cada caso, será discutido o efeito dos campos, e compararemos os nossos resultados com os da literatura e com os resultados anteriores do modelo bidimensional. Como citado acima, mostraremos que a mudança da dimensionalidade não altera o comportamento do sistema frente à influência de um campo externo. Devido a particularidade do campo local não ser constante para todos os elementos da cadeia, vamos estudá-lo separadamente.

Regime livre monocultural

Novamente, vamos considerar apenas o campo externo estático para o caso livre monocultural. Além disso, suporemos novamente que todos os fatores culturais do campo sejam fixos no valor 1, sem perda de generalidade. A análise começa pelo número médio de domínios normalizados em função do tamanho da cadeia L mostrado na figura 4.15. Obtivemos curvas similares às reportadas na seção 4.2.1 (figura 4.3) para o modelo bidimensional e, portanto, concluímos que, independentemente do valor de p , no limite termodinâmico o campo externo favorece o regime multicultural. Especificamente, fazendo a extrapolação das curvas da figura 4.15 para $L \rightarrow \infty$ e exibindo os resultados em uma escala dilogarítmica (figura 4.16) temos que no limite $p \rightarrow 0$

$$\frac{\langle N_d \rangle}{L} \approx p^{2.67 \pm 0.02}. \quad (4.2)$$

Outra forma de demonstrar esse efeito é através das curvas da figura 4.17 e da figura 4.18, as quais mostram uma predominância do regime monocultural para redes pequenas. No entanto, com o aumento da rede, o número de configurações absorventes monoculturais decresce. Um segundo resultado interessante é observado nas configurações monoculturais: todas as realizações atingem estados idênticos ao campo externo estático, diferentemente do modelo bidimensional (figura 4.5) em que no regime de redes pequenas há uma probabilidade não nula do sistema atingir uma configuração absorvente monocultural cujo conjunto de fatores culturais dos agentes seja completamente distintos do campo externo.

Apesar da excepcional semelhança entre os resultados dos modelos uni e bidimensionais até agora, a figura 4.18 revela um comportamento dependente da dimensionalidade do sistema. Para o caso bidimensional, a fração dos agentes não pertencentes ao maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ é finita e tende a zero quando $p \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$ (figura 4.6). Entretanto, para o caso unidimensional essa fração tende a 1 independentemente do valor de p . Isso mostra um efeito drástico do campo externo, visto que um pequeno valor de p é suficiente para destruir completamente a homogeneidade do sistema. Esse resultado,

Figura 4.15 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 3$ e diversos valores de p . A linha contínua representa a função $1/L$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.16 – Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod unidimensional sobre a influência de um campo estático com $F = 5$ e $q = 3$. A linha contínua representa o ajuste via método de mínimos quadrados pela função $(3.3 \pm 0.2)p^{2.67 \pm 0.02}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.17 – Dependência da fração de amostras que atingiram um estado absorvente monocultural ζ_h com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 3$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.18 – Dependência do tamanho médio total dos domínios excluído o maior domínio $1 - \langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 3$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

à primeira vista, discorda dos resultados de Klemm e colaboradores, (28) pois esses autores afirmam que alterações de um único agente em um sistema (estamos considerando o limite $p \rightarrow 0$) resultam em uma configuração absorvente monocultural (vide anexo E). A explicação dessa discordância está na ordem em que são efetuados os limites $L \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$. Como primeiramente efetuamos $L \rightarrow \infty$ e depois $p \rightarrow 0$, as transformações de um único agente são recorrentes durante toda a simulação. Consequentemente, temos um efeito mais parecido com o da deriva cultural, (46) mostrando que não há conflito entre os resultados. Inferimos então que, para um sistema livre homogêneo sob a influência de um campo externo estático, não há diferença qualitativa entre as redes uni e bidimensional, a menos da fragmentação do estado heterogêneo atingido por cada um. Para uma rede unidimensional observamos um estado totalmente fragmentado, enquanto em uma rede bidimensional temos um domínio macroscópico e um conjunto macroscópico de domínios microscópicos.

Regime livre multicultural

Trataremos agora da influência do campo externo em um sistema livre multicultural ($F = 5$ e $q = 10$). Mais uma vez, queremos verificar o efeito contra intuitivo análogo ao relatado para o sistema livre monocultural, isto é, a homogeneização do sistema no limite $p \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$ devido à ação de um campo estático ou de um campo de consenso global. (34) Identicamente ao feito para o regime monocultural, a análise é iniciada através do gráfico do número médio de domínios normalizado em função do tamanho da cadeia L , mostrado na figura 4.19 para o campo estático e na figura 4.20 para o campo de consenso.

Antes de tudo, é direto ver que, novamente, o efeito contra intuitivo motivador do estudo não é encontrado nesse tipo de simulação, ou seja, a ação do campo estático e de consenso não altera a homogeneidade do sistema. É observado também um comportamento qualitativamente semelhante ao modelo bidimensional, isto é, observa-se um maior número de domínios para $p = 1$. Este efeito é esperado pois o campo é considerado um agente e, assim, a regra de interação proporcional à similaridade cultural deve ser levada

Figura 4.19 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.20 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.21 – Dependência do número médio de domínios normalizado no limite termodinâmico $(\langle N_d \rangle / L)_\infty$ com a intensidade do campo p no modelo de Axelrod unidimensional sobre influência de diversos campos com $F = 5$ e $q = 10$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

em conta (vide apêndice A). Esse efeito ratifica novamente a hipótese de que a interação local de Axelrod é a responsável pela homogeneização do sistema.

Em ambas as figuras, $\langle N_d \rangle / L$ apresenta um decréscimo descontínuo de $p = 1$ para $p < 1$, um crescimento descontínuo de $p = 0$ para $p > 0$ e um comportamento contínuo no intervalo $p \in (0, 1)$, analogamente ao encontrado no caso bidimensional (figuras 4.8 e 4.9). Como nessas figuras há apenas redes de tamanho finito, a existência das descontinuidades demonstra que as configurações absorventes multiculturais também são instáveis por mudanças de um único agente quando reduzimos a dimensionalidade do sistema (vide apêndice E). Os resultados descritos estão novamente de acordo com as conclusões de Klemm e colaboradores; (28) a única diferença está no fato de que a alteração inserida pela interação de Axelrod quando $p \rightarrow 1$ e pelo campo quando $p \rightarrow 0$ não é aleatória, por isso o sistema não atinge um estado absorvente monocultural como previsto por aqueles autores.

Analogamente ao encontrado no modelo bidimensional, para o caso $p = 1$, o con-

senso dos agentes não será alterado durante a simulação e, portanto, ele atua como um campo estático. Entretanto, as curvas das figuras 4.19 e 4.20 nos apresentam comportamentos completamente distintos. Como discutido anteriormente, essa diferença é gerada graças à aleatoriedade do campo estático que não apresenta nenhuma correlação com os valores iniciais dos agentes, diferentemente do campo de consenso, cujos valores dependem dos estados dos agentes na condição inicial. Como esperado, essa correlação é forte para redes pequenas e irrelevante para redes grandes.

A fim de facilitar a visualização das descontinuidades, extrapolamos as curvas das figuras 4.19 e 4.20 para $L \rightarrow \infty$ e graficamos os resultados em função da intensidade do campo (figura 4.21). O primeiro resultado observado foi a fantástica semelhança entre as curvas do campo estático e do campo de consenso: são praticamente indistinguíveis. Da mesma forma que feito para o regime monocultural, obtivemos $(\langle N_d \rangle / L)_\infty = 0.38 \pm 0.01$ no limite $p \rightarrow 0$ e $(\langle N_d \rangle / L)_\infty = 0.66 \pm 0.01$ para $p \rightarrow 1$. Estes dados confirmam que não há possibilidade de existir o efeito contra intuitivo de homogeneização via inserção de um campo externo. Para isso ocorrer deveríamos obter $(\langle N_d \rangle / L)_\infty \rightarrow 0$ no limite $p \rightarrow 0$.

Consideremos agora o tamanho do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ mostrado em função do tamanho da rede para o campo estático na figura 4.22 e para o campo de consenso na figura 4.23. Em ambos os casos foi encontrada uma dependência com o $\ln L$ para grandes valores de L . Esses resultados são similares aos encontrados para o modelo do voto da maioria. (48)

4.3.2 Campo Local

É sabido que das implementações propostas para o valor e para a atualização dos fatores culturais do campo externo, o consenso local é o único que apresenta uma dependência espacial, já que este representa uma interação do tipo modelo do voto da maioria (vide apêndice D). Dada essa informação vamos verificar se a influência desse tipo de campo é sensível a dimensionalidade da rede.

Figura 4.22 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo estático com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.23 – Dependência do tamanho médio do maior domínio normalizado $\langle S_{max} \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo global com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.24 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o tamanho da cadeia L no modelo de Axelrod unidimensional uniforme sobre influência de um campo local com $F = 5$, $q = 10$ e diversos valores de p . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^4$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos nos concentrar na dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ com o comprimento da cadeia L mostrado na figura 4.24. Essa figura nos mostra um comportamento completamente diferente do observado para os campos anteriores, mas, análogo, até certo ponto, ao observado no modelo bidimensional. Primeiramente, quando os agentes interagem apenas com o campo ($p = 1$), encontramos configurações absorventes menos fragmentadas do que no sistema livre ($p = 0$). Este é um efeito de dimensionalidade, pois, ao simular este campo em uma rede bidimensional, obtém-se o máximo para $p = 1$ (vide figura 4.14). A menos deste resultado, o efeito do campo local é o mesmo encontrado no caso bidimensional, ou seja, favorecer fortemente as configurações absorventes monoculturais.

5 *Conclusão*

O trabalho apresentado nessa tese teve como foco o estudo do modelo de disseminação de opiniões proposto pelo cientista político Robert Axelrod em 1997 (10) cujo objetivo na época era obter, via princípios básicos, uma explicação simples para a pergunta: Supondo que ao interagir, as partes interagentes sempre cheguem a um consenso, como então podemos explicar a existência da diversidade de opiniões em uma comunidade ou, pensando mais globalmente, da diversidade cultural na civilização humana? O modelo proposto por Axelrod é um modelo baseado em agentes, no qual cada agente é representado por um vetor de F fatores culturais, cujas componentes assumem valores inteiros entre 1 e q , e interage com seus primeiros vizinhos apenas. Por definição, a interação entre os agentes ocorre com uma probabilidade diretamente proporcional à similaridade cultural do agente alvo e seu vizinho (interação homofílica), e sempre resulta no aumento da similaridade cultural dos agentes interagentes.

O modelo de Axelrod original exibe dois parâmetros de controle F e q e, dependendo dos valores desses parâmetros, pode exibir um regime estacionário (configurações absorventes) em que domínios culturais distintos coexistem. A comunidade de mecânica estatística (e essa tese em particular) contribuiu para o entendimento desse modelo através do estudo quantitativo do tamanho e número desses domínios no limite termodinâmico. Os valores dos parâmetros de controle determinam as diferentes fases ou regimes estacionários do modelo, que receberam diferentes nomes na literatura (e nessa tese também). Na interpretação “sociológica” do modelo as expressões regime monocultural ou homogêneo e regime multicultural ou heterogêneo, utilizadas por Axelrod, são mais naturais. Entretanto, na caracterização mais rigorosa das fases, necessária ao estudo da transição de fase, percebemos que o que define uma fase é a existência ou não de um ou mais domínios de

tamanho macroscópico no limite termodinâmico e, assim, adotamos a nomenclatura tradicional da mecânica estatística, chamando de fase ordenada aquela que exibe domínios macroscópicos e de fase desordenada aquela que exibe somente domínios microscópicos no limite termodinâmico. Como resultado podemos ter uma fase ordenada tanto mono como multicultural, mas a fase desordenada sempre é multicultural. Como ficou claro no decorrer da tese, o estudo do limite termodinâmico do modelo de Axelrod revelou-se uma tarefa extremamente difícil, que ainda está longe de ser completada a contento, devido ao enorme tempo de relaxação necessário para redes grandes atingirem as configurações absorventes.

A seguir apresentamos um breve resumo dos principais resultados obtidos na tese. Na primeira parte da tese (capítulos 2 e 3) focamos nossa atenção no modelo livre, isto é, na dinâmica de Axelrod sem nenhuma influência externa. Executamos simulações de Monte Carlo para redes uni e bidimensionais, e para distribuições de fatores culturais iniciais uniformes e Possonianas. No caso bidimensional, obtivemos uma invariância qualitativa do comportamento do modelo perante alterações da distribuição dos fatores culturais iniciais, visto que obtivemos uma transição contínua para $F = 2$ e descontínua para $F = 3$ para as duas distribuições consideradas, ratificando assim a hipótese de Castellano e colaboradores. (18) Já no caso unidimensional, obtivemos resultados distintos daqueles obtidos por Vilone e colaboradores. (19) Em nossa análise, confirmamos a existência de uma transição descontínua entre a fase ordenada e a fase desordenada para o caso da distribuição uniforme de fatores culturais iniciais. Entretanto, no caso da distribuição Poissoniana não encontramos evidências que corroborem a hipótese da existência da transição de fase. Aparentemente, o uso da distribuição de Poisson para gerar a configuração inicial de fatores culturais impede a formação da fase ordenada no limite termodinâmico. Um resultado importante obtido nessa parte da tese foi a caracterização da transição de fase contínua na rede quadrada $L \times L$ para $F = 2$ no caso da distribuições Poissoniana de fatores culturais iniciais. Obtivemos que o parâmetro de ordem (tamanho do maior domínio dividido pelo número de sítios L^2) anula-se linearmente

com a distância ao parâmetro crítico, resultando no expoente crítico $\beta = 1$. Adicionalmente, a relação de escala de tamanho finito para o parâmetro de ordem nos dá o expoente $\nu = 2$, indicando que a largura da região crítica para L finito varia com $L^{1/2}$. Esses dois expoentes críticos são característicos da percolação direcionada compacta (33) numa rede quadrada em que uma das dimensões é o tempo. Dada a natureza da regra de interação do modelo de Axelrod que deixa poucas chances de haver muitos “buracos” dentro dos domínios macroscópicos, produzindo, portanto, domínios tipicamente compactos, o resultado de que a transição contínua do modelo de Axelrod pertence a classe de universalidade da percolação direcionada compacta talvez não chegue a ser surpreendente.

Na segunda parte da tese (capítulo 4), nosso objeto de estudo foi o efeito de um campo externo no modelo de Axelrod, introduzido com o objetivo de modelar o efeito da mídia na disseminação de opiniões. Como o interesse desse tipo de estudo está na caracterização mais refinada das configurações absorventes sob a ação do campo externo, utilizamos a denominação usual de regime monocultural (um único domínio) e multicultural (mais de um domínio) usada na literatura. O campo externo é inserido no modelo usando a ideia de que ele é um vizinho comum a todos os agentes da rede, (27) e seu conjunto de fatores culturais representa algum tipo de influência a ser modelada. Três influências diferentes foram implementadas nessa tese: uma influência alienígena externa, ou seja, todos os fatores culturais do campo são aleatórios e constantes no decorrer da simulação (campo estático), a influência do consenso global, isto é, o campo exibe os fatores culturais mais comuns entre todos os agentes (campo global) e, por último, a influência do consenso local, ou seja, o campo exibe os fatores culturais mais comuns na vizinhança de cada sítio (campo local). Dividimos nossa análise em dois casos, dependendo se o sistema livre é monocultural ou multicultural e, então, observamos o efeito do campo sobre os domínios culturais. No caso do sistema livre monocultural, os campos estático e global heterogeneizam o sistema no limite termodinâmico, independentemente de suas intensidades. No caso do sistema livre multicultural, observamos que o sistema mantém a multiculturalidade também independentemente da intensidade desses campos. Já para

o campo local, observamos um comportamento totalmente oposto ao exibido pelos dois campos anteriores: obtemos a completa homogeneização da rede no limite termodinâmico. Resumindo, a ação de um campo externo no modelo de Axelrod resulta na inibição dos estados absorventes multiculturais no caso do campo ser local, e na inibição de estados absorventes monoculturais no caso de campos estático e global. Não encontramos dependência significativa com a dimensionalidade da rede.

Muito ainda há para ser explorado no modelo de Axelrod. Esse modelo permite uma vasta gama de variantes, as quais podem exibir comportamentos altamente não triviais como, por exemplo, a introdução do efeito de uma mídia ou campo externo realizada por Shibana e colaboradores, (27) que motivou diversos trabalhos (inclusive essa tese) no âmbito da mecânica estatística. Pretendemos, em trabalhos futuros, focar na variante do modelo de Axelrod em que os agentes são móveis. Nosso objetivo principal será investigar o processo de difusão de informação usando um campo externo local que fará o papel do agente de inovação. Nessa linha, vamos estudar também o efeito da difusão ou expansão demográfica, ou seja, vamos considerar que não apenas as ideias possam se propagar de agente a agente, mas que os agentes também possam se mover pela rede.

Referências

- 1 CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 2, p. 591–646, 2009.
- 2 WEINBERGER, S. Web of war. *Nature*, v. 471, p. 566–568, 2011.
- 3 GALAM, S. *Sociophysics a physicist's modeling of psycho-political phenomena*. New York: Springer, 2012.
- 4 RECAMI, E. L'articolo di etttore majorana su "Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali" (ettore majorana's article on "The value of statistical laws in physics and in social sciences"). 2007. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0709.3537>>.
- 5 REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics*. 3rd. ed. Weihheim: Wiley-VCH, 2009.
- 6 GALAM, S.; GEFEN, Y.; SHAPIR, Y. Sociophysics: a new approach of sociological collective behavior. i. mean-behavior description of a strike. *Journal of Mathematical Sociology Sociology*, v. 9, p. 1–13, 1982.
- 7 CLIFFORD, P.; SUDBURY, A. A model for spatial conflict. *Biometrika*, v. 60, n. 3, p. 581–588, 1973.
- 8 GALAM, S. Minority opinion spreading in random geometry. *The European Physical Journal B*, v. 25, n. 4, p. 403–406, 2002.
- 9 SZNAJD-WERON, K.; SZNAJD, J. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, v. 11, n. 06, p. 1157–1165, 2000.
- 10 AXELROD, R. The dissemination of culture. *Journal of Conflict Resolution*, v. 41, n. 2, p. 203–226, 1997.
- 11 STAUFFER, D.; SCHULZE, C. Microscopic and macroscopic simulation of competition between languages. *Physics of Life Reviews*, v. 2, n. 2, p. 89–116, 2005.
- 12 KENNEDY, J. Thinking is social. *Journal of Conflict Resolution*, v. 42, n. 1, p. 56–76, 1998.
- 13 FONTANARI, J. F. Social interaction as a heuristic for combinatorial optimization problems. *Physical Review E*, v. 82, n. 5, p. 056118, 2010.
- 14 KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *IEEE International Conference on Neural Networks*. Perth, WA: IEEE, 1995. v. 4, p. 1942–1948.

- 15 DYBIEC, B. Axelrod model with extended conservativeness. *International Journal of Modern Physics C*, v. 23, n. 12, p. 50086, 2012.
- 16 RADILLO-DÍAZ, A.; PÉREZ, L. A.; CASTILLO-MUSSOT, M. D. Axelrod models of social influence with cultural repulsion. *Physical Review E*, v. 80, n. 6, p. 066107, 2009.
- 17 RADILLO-DÍAZ, A.; PÉREZ, L. A.; CASTILLO-MUSSOT, M. D. Axelrod model of social influence with cultural hybridization. *International Journal of Modern Physics C*, v. 23, n. 12, p. 1250081, 2012.
- 18 CASTELLANO, C.; MARSILI, M.; VESPIGNANI, A. Nonequilibrium phase transition in a model for social influence. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 16, p. 3536, 2000.
- 19 VILONE, D.; VESPIGNANI, A.; CASTELLANO, C. Ordering phase transition in the one-dimensional Axelrod model. *The European Physical Journal B*, v. 30, n. 3, p. 399–406, 2002.
- 20 KLEMM, K. et al. Nonequilibrium transitions in complex networks: a model of social interaction. *Physical Review E*, v. 67, n. 2, p. 026120, 2003.
- 21 GANDICA, Y. et al. Cluster-size entropy in the Axelrod model of social influence. *Physical Review E*, v. 84, n. 4, p. 046109, 2011.
- 22 KIM, Y.; CHO, M.; YOON, S.-H. Effects of the underlying topology on perturbation spreading in the Axelrod model for cultural dissemination. *Physica A*, v. 390, n. 21-22, p. 3989–3995, 2011.
- 23 GUERRA, B. et al. Dynamical organization towards consensus in the Axelrod model on complex networks. *Physical Review E*, v. 81, n. 5, p. 056105, 2010.
- 24 GRACIA-LÁZARO, C. et al. Coevolutionary network approach to cultural dynamics controlled by intolerance. *Physical Review E*, v. 84, n. 6, p. 067101, 2011.
- 25 SINGH, P. et al. Accelerating consensus on coevolving networks: the effect of committed individuals. *Physical Review E*, v. 85, n. 4, p. 046104, 2012.
- 26 PFAU, J.; KIRLEY, M.; KASHIMA, Y. The co-evolution of cultures, social network communities, and agent locations in an extension of Axelrod's model of cultural dissemination. *Physica A*, v. 392, n. 2, p. 381–391, 2013.
- 27 SHIBANAI, Y.; YASUNO, S.; ISHIGURO, I. Effects of global information feedback on diversity. *Journal of Conflict Resolution*, v. 45, n. 1, p. 80–96, 2001.
- 28 KLEMM, K. et al. Global culture. *Physical Review E*, v. 67, n. 4, p. 045101, 2003.
- 29 PACE, B.; PRADO, C. P. C. Axelrod's model with surface tension. 2012. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1212.2843>>.
- 30 VAZQUEZ, F.; REDNER, S. Non-monotonicity and divergent time scale in Axelrod model dynamics. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 78, n. 1, p. 18002, 2007.

- 31 LANCHIER, N.; SCHWEINSBERG, J. Consensus in the two-state Axelrod model. *Stochastic Processes and their Applications*, v. 122, n. 11, p. 3701–3717, 2012.
- 32 LANCHIER, N. The Axelrod model for the dissemination of culture revisited. *The Annals of Applied Probability*, v. 22, n. 2, p. 860–880, 2012.
- 33 ESSAM, J. W. Directed compact percolation: cluster size and hyperscaling. *Journal of Physics A*, v. 22, n. 22, p. 4927, 1989.
- 34 GONZÁLEZ-AVELLA, J. C. et al. Local versus global interactions in nonequilibrium transitions. *Physical Review E*, v. 73, n. 4, p. 046119, 2006.
- 35 STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. 2nd. ed. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- 36 HOSHEN, J.; KOPELMAN, R. Percolation and cluster distribution. i. cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, v. 14, n. 8, p. 3438, 1976.
- 37 BINDER, K. Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, v. 43, n. 2, p. 119–140, 1981.
- 38 VETTERLING, W. T. *Numerical recipes example book (C)*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- 39 PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. *Statistical mechanics*. 2nd. ed. Oxford Boston: Butterworth-Heinemann, 1996.
- 40 GREIG, J. M. The end of geography? *Journal of Conflict Resolution*, v. 46, n. 2, p. 225–243, 2002.
- 41 FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. 3rd. ed. New York: Wiley, c1968.
- 42 BOYCE, W. E.; DiPrima, R. C. *Elementary differential equations*. Hoboken: John Wiley & Sons, c1986.
- 43 PERES, L. R.; FONTANARI, J. F. The mass media destabilizes the cultural homogenous regime in Axelrod’s model. *Journal of Physics A*, v. 43, n. 5, p. 055003, 2010.
- 44 PERES, L. R.; FONTANARI, J. F. The media effect in Axelrod’s model explained. *Europhysics Letters*, v. 96, n. 3, p. 38004, 2011.
- 45 GONZÁLEZ-AVELLA, J. C.; COSENZA, M. G.; TUCCI, K. Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. *Physical Review E*, v. 72, n. 6, p. 065102, 2005.
- 46 MAZZITELLO, K. I.; CANDIA, J.; DOSSETTI, V. Effects of mass media and cultural drift in a model for social influence. *International Journal of Modern Physics C*, v. 18, n. 09, p. 1475–1482, 2007.

-
- 47 CANDIA, J.; MAZZITELLO, K. I. Mass media influence spreading in social networks with community structure. *Journal of Statistical Mechanics*, v. 2008, n. 07, p. P07007, 2008.
- 48 PERES, L. R.; FONTANARI, J. F. Statistics of opinion domains of the majority-vote model on a square lattice. *Physical Review E*, v. 82, n. 4, p. 046103, 2010.
- 49 FORBELLONE, A. L. V. *Lógica de programação*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall.
- 50 ZIVIANI, N. *Projeto de algoritmos com implementações em PASCAL e C*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- 51 STALLINGS, W. *Computer organization and architecture*. 8th. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, c2010.
- 52 KLEMM, K. et al. Role of dimensionality in Axelrod's model for the dissemination of culture. *Physica A*, v. 327, n. 1–2, p. 1–5, 2003.

APÊNDICE A – Cálculo da interação entre agentes

Neste apêndice demonstraremos com um exemplo simples as regras do modelo de Axelrod para a interação entre dois agentes. Primeiramente, define-se o estado de um certo agente a pelo conjunto de fatores culturais $\Psi^a = \{\Psi_1^a, \Psi_2^a, \dots, \Psi_F^a\}$. Usando esta notação, temos que a similaridade cultural entre os agentes a e b , definida como o número de fatores em comum entre eles, é escrita pela seguinte soma de deltas de Kronecker:

$$\sigma_{a,b} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^F \delta_{\Psi_i^a, \Psi_i^b} : \quad (\text{A.1})$$

Assim, para o par com $F = 5$ e $q = 4$, mostrado abaixo

$$\begin{pmatrix} 12341 & 12211 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

temos a seguinte semelhança cultural

$$\sigma_{a,b} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^F \delta_{\Psi_i^a, \Psi_i^b} = \frac{1}{5} [\delta_{1,1} + \delta_{2,2} + \delta_{3,2} + \delta_{4,1} + \delta_{1,1}] = \frac{3}{5}, \quad (\text{A.3})$$

que corresponde à probabilidade de esses dois agentes interagirem. Na prática, geramos um número aleatório R uniforme no intervalo $[0, 1]$, de modo que a interação ocorre se $R < 3/5$.

Assumindo que a interação ocorra e que o elemento da esquerda da equação A.2 seja o sítio alvo, a interação dá-se alterando um fator distinto do sítio alvo de modo a igualar-se ao fator respectivo de seu vizinho. Esse fator a ser alterado é escolhido aleatoriamente. Suporemos que o terceiro fator seja escolhido. Portanto, temos o seguinte par após a interação

$$\begin{pmatrix} 12241 & 12211 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

e sua similaridade cultural agora passa a ser $4/5$. É nesse sentido que dizemos que a interação no modelo de Axelrod tende a homogeneizar a cultura dos agentes.

APÊNDICE B – Contagem de domínios

Como mostrando exhaustivamente nos capítulos anteriores, a caracterização dos estados absorventes foi efetuada via número médio de domínios normalizado ($\langle N_d \rangle / L$) e o tamanho médio do maior domínio normalizado ($\langle S_{max} \rangle / L$). Neste apêndice iremos discutir e demonstrar a implementação da função de contagem de domínios, e comentar as diferenças entre os casos 1D e 2D. Para o caso bidimensional, (seção B.1) utilizamos o algoritmo de Hoshen e Kopelman. (35, 36) E no caso unidimensional (seção B.2) o algoritmo de rotulação simples foi implementado. Vale lembrar que em nenhum ponto do trabalho a eficiência desses algoritmos foi posta a prova, visto que menos de 1% do tempo total de execução do programa é gasto com essa contagem. Todo o esforço de implementar da forma mais eficiente possível foi feito nas funções que executam a simulação da dinâmica propriamente dita.

B.1 Contagem em uma rede bidimensional - Algoritmo de Hoshen e Kopelman

O método de Hoshen e Kopelman surge de uma correção para o algoritmo de rotulação. Este algoritmo é um laço por todos os elementos da rede, partindo do elemento do canto superior esquerdo, o qual compara o conjunto de fatores culturais de cada agente com o conjunto de seus vizinhos norte e oeste. Graças a vizinhança de von Neumann e as condições abertas de contorno, cada agente encontra-se em uma das 3 configurações seguintes: ele possui 2, 1 ou nenhum vizinho com um conjunto de fatores culturais idênticos ao seu. Isto posto, rotula-se o agente alvo de acordo com a situação encontrada, podendo este ser membro de um domínio existente ou criador de um novo domínio. Devido à simplicidade desta ideia, há uma probabilidade não nula de encontrarmos situações

conflitantes, como demonstrada no exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Aqui, representamos os agentes com o valor 1 e buracos pelo valor 0. A rotulação será apenas dos agentes. Portanto, temos que o rótulo do primeiro sítio ocupado (posição $i = 0, j = 0$) é definido como 1. Para o sítio adjacente não é necessário darmos rótulo pois seu valor é nulo; seguindo para a esquerda, rotulamos o segundo sítio ocupado como 2 e conseqüentemente o terceiro sítio ocupado como 3. A próxima linha começa com um sítio ocupado vizinho a um sítio rotulado como 1, portanto o rotulamos como 1. O segundo sítio está vazio e o terceiro está ao lado de um sítio rotulado como 2, assim o rotularemos como 2. O quarto sítio é vizinho apenas de um rotulado como 2, assim também o rotularemos como 2. Temos até o momento a seguinte matriz de rótulos de domínios.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & ? \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

A pergunta a se respondida agora é: Qual rótulo deve ser escolhido para o sítio marcado com a interrogação? Seu vizinho à oeste diz 2 e seu vizinho ao norte diz 3. Neste caso todos os sítios rotulados como 3 e como 2 pertencem ao mesmo domínio o qual rotularemos como 2 a fim de termos sempre os menores números possíveis para os rótulos. Tendo ocorrido o efeito do rótulo comum no sítio em questão temos então que voltar ao começo da matriz e re-rotular todos os sítios de rótulo 3 para 2, o que aumentaria gigantescamente a complexidade do código. A otimização deste algoritmo foi proposta por Hoshen e Kolpeman. (36)

Esta otimização baseia-se em dividir o conjunto de rótulos em subconjuntos de rótulos bons e ruins. Os rótulos bons são aqueles que caracterizam domínios distintos, já os rótulos ruins são aqueles que à primeira vista caracterizam um novo domínio, mas ao prosseguirmos com o cálculo tornam-se parte de um domínio já definido. Para efetuarmos

essa divisão introduzimos os rótulos de rótulos.

Para o exemplo da matriz B.1, ao chegarmos no sítio do ponto de interrogação, tínhamos 3 rótulos marcados como bons, $R(1) = 1$, $R(2) = 2$, $R(3) = 3$, onde R é a função rótulo de rótulo, pois ao definimos o primeiro sítio ocupado com a rotulação 1, o segundo sítio da primeira linha a matriz B.1 como 2, e finalmente o terceiro sítio como 3. Ao avançarmos com o calculo nada foi alterado para $R(1)$ e $R(2)$, no entanto, encontramos que 3 é um rótulo ruim, assim temos $R(3) = 2$.

Concluindo o cálculo para a terceira linha da matriz, o primeiro sítio ocupado possui apenas um vizinho norte com o rótulo 1, rotulamos então como 1, mantendo $R(1)$ inalterado. O segundo sítio também será rotulado como 1, devido à sua vizinhança oeste. O conflito de rótulos é gerado no terceiro sítio entre os rótulos 1 e 2, tendo então que $R(2) = 1$. Obtivemos então a seguinte matriz de rótulos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

com o seguinte conjunto de rótulos de rótulos $R(1) = 1$, $R(2) = 1$, $R(3) = 2$. Após a obtenção dos rótulos e dos rótulos de rótulos, o número de domínios é calculado subtraindo o valor do maior rótulo com o número de rótulos de rótulos. Para o tamanho de cada domínio e, conseqüentemente, o tamanho do maior, será necessário percorrer a matriz novamente re-rotulando cada sítio e contando os tamanhos. A fim de evitar o segundo laço, contamos os tamanhos assim que geramos os rótulos originais, e aplicamos a função R nos tamanhos.

A implementação deste método é relativamente simples: basta compararmos, para cada agente, os vizinhos e os seus respectivos rótulos de domínios, e assim através de um **case** executarmos os procedimentos apropriados para cada situação. Como mencionado anteriormente, cada agente encontra-se em 3 situações distintas: 2, 1 ou 0 vizinhos com um conjunto de fatores culturais idênticos ao seu. Contudo, ao adicionarmos os rótulos de

rótulos, a situação de dois vizinhos idênticos desmembra-se em duas situações possíveis: dois vizinhos idênticos cujos rótulos de domínios são idênticos ou dois vizinhos idênticos cujos rótulos de domínios são distintos. Resumindo, há 3 ações possíveis: rotular o agente com o rótulo de seu(s) vizinho(s) (caso em que o agente tenha 1 vizinho idêntico ou 2 vizinhos idênticos cujos rótulos de domínios são idênticos), adicionar um novo rótulo (caso em que o agente tenha 0 vizinhos idênticos) ou adicionar um rótulo de rótulo (caso em que o agente tenha 2 vizinhos idênticos cujos rótulos de domínios são distintos). A função abaixo calcula qual ação (resumido na variável *crit*) deverá ser tomada para cada agente.

```

1  int crit_count(int target,int F,int S,Person* Sist,int *crit, int*
    core)
2  {
3      register int j,k;
4      int aux_int;
5      (*crit)=0;
6      Sist[target].cluster=0;
7      for (j=0;j<=3;j=j+3)
8          if(((j==0)&&(target/S!=0))||((j==3)&&(target%S!=0)))
9          {
10             aux_int=0;
11             for(k=0;k<F;k++)
12                 if(Sist[target].cult[k]==Sist[target].neigh[j]->cult[k])
13                     aux_int++;
14             if (aux_int==F)
15             {
16                 core[(*crit)]=j;
17                 (*crit)++;
18             }
19         }
20     if((((*crit)==2)&&(Sist[target].neigh[0]->cluster==Sist[target].
        neigh[3]->cluster))
21         (*crit)++;
22     return(0);

```

23 } }

Esta função resume-se em um laço na vizinhança do agente alvo (linha 7) com a condição de ser o vizinho norte ou oeste (linha 8). Dentro deste laço temos a comparação do conjunto de fatores culturais do agente alvo com seu respectivo vizinho (linha 14 à linha 16). O vetor *core* armazena quais são os vizinhos que possuem um conjunto de fatores culturais idênticos ao alvo. Foi necessário este armazenamento já que, por definição, deve-se sempre atribuir ao agente o menor índice de domínio. Por último temos a comparação do rótulo de rótulo (linha 20). É de suma importância ressaltar que foi adicionado um novo campo na estrutura do sistema (vide Apêndice C), cada elemento tem agora um índice de domínio denominado *cluster*.

Para a a contagem propriamente dita, temos sua implementação

```

1  int cont_cluster(int Np,int F,int q,int S,Person *Sist)
2  {
3      register int i;
4      int crit,core[2],*LTag,LClust;
5      long int icont=1;
6      Sist[0].cluster=icont;
7      LClust=calloc(Np, sizeof(int));
8      LTag=calloc(Np, sizeof(int));
9      LTag[0]=1;
10     LClust[0]=1;
11     core[0]=0;
12     core[1]=0;
13     for(i=1;i<Np;i++)
14     {
15         crit_count (i,F,S,Sist,&crit,core);
16         switch (crit)
17         {
18             case 0:
19                 {
20                     icont++;

```

```

21         LClust[icont-1]++;
22         LTag[icont-1]=icont;
23         Sist[i].cluster=icont;
24         break;
25     }
26     case 1:
27     {
28         Sist[i].cluster=Sist[i].neigh[core[0]]->cluster;
29         LClust[Sist[i].cluster-1]++;
30         break;
31     }
32     case 2:
33     {
34         if( Sist[i].neigh[0]->cluster > Sist[i].neigh[3]->cluster
35             )
36         {
37             Sist[i].cluster=Sist[i].neigh[3]->cluster;
38             LClust[Sist[i].neigh[3]->cluster-1]++;
39             LTag[Sist[i].neigh[0]->cluster-1]=Sist[i].neigh[3]->
40                 cluster;
41             LClust[Sist[i].neigh[0]->cluster-1]--;
42             LClust[Sist[i].neigh[3]->cluster-1]++;
43             Sist[i].neigh[0]->cluster=Sist[i].neigh[3]->cluster;
44         }
45         else
46         {
47             Sist[i].cluster=Sist[i].neigh[0]->cluster;
48             LClust[Sist[i].neigh[0]->cluster-1]++;
49             LTag[Sist[i].neigh[3]->cluster-1]=Sist[i].neigh[0]->
50                 cluster;
51             LClust[Sist[i].neigh[3]->cluster-1]--;
52             LClust[Sist[i].neigh[0]->cluster-1]++;
53             Sist[i].neigh[3]->cluster=Sist[i].neigh[0]->cluster;
54         }
55     }

```



```

52         break;
53     }
54     case 3:
55     {
56         Sist[i].cluster=Sist[i].neigh[0]->cluster;
57         LClust[Sist[i].cluster-1]++;
58         break;
59     }
60 }
61 }
62 free(LClust);
63 free(LTag);
64 return(0);
65 }

```

Como comentado anteriormente, essa implementação é basicamente um **case** para cada uma das possibilidades. Assim, na linha 16 temos o laço em cada elemento da rede, e dentro do bloco deste laço chamamos a função discutida acima (linha 18) e em seguida o bloco do **case**. Para o caso $crit = 0$ temos que o agente alvo não tem vizinhos idênticos, assim adiciona-se um elemento na lista de domínios (estrutura *LClust*). Quando temos $crit = 1$ ou $crit = 3$ o agente alvo tem seu domínio bem definido, visto que este tem apenas um vizinho com o mesmo conjunto de fatores culturais, ou dois vizinhos com o mesmo conjunto de fatores culturais e mesmo rótulo de domínio respectivamente. Assim, para estes casos, o código apenas atribui o valor do rótulo de domínio do vizinho para o agente alvo e soma no tamanho total do domínio. Já para $crit = 2$ temos dois vizinhos com o mesmo conjunto de fatores culturais rótulos de domínios distintos. Assim, o código atribui ao agente alvo o menor entre os dois rótulos, por isso o conjunto **IF-ELSE**, e adiciona um elemento na lista de rótulos de rótulos (variável *LTag*)

B.2 Contagem em uma cadeia unidimensional

É sabido que a redução da dimensionalidade transforma a contagem de domínios em uma tarefa trivial, posto que a borda de um domínio é caracterizada por uma dupla de agentes cujos conjunto de fatores culturais são distintos entre si. Portanto, para o sistema seguinte cujos parâmetros são $L = 5$, $F = 3$, $q = 2$, e definimos condições abertas de contorno

$$\left(\begin{matrix} 111 & 111 & 222 & 222 & 222 \end{matrix} \right), \quad (\text{B.4})$$

temos 2 domínios já que a dupla (sítio alvo $i = 2$ e vizinho $j = 3$) possui um conjunto de fatores culturais distintos. Vale ressaltar que os domínios estão intimamente ligados à condição de contorno, já que esta altera a vizinhança dos agentes situados nas extremidades. Como utilizaremos ambas as condições de contorno para o caso unidimensional, a diferença no algoritmo de contagem em função da condição de contorno esta na comparação adicional do primeiro elemento com o L -ésimo elemento. Ou seja, no exemplo B.4 com condições periódicas de contorno as duplas distintas são sítio alvo $i = 2$ com vizinho $j = 3$, e sítio alvo $i = 5$ e vizinho $j = 1$. É claro que no exemplo B.4 o número de domínios é invariante perante a alteração da condição de contorno, visto que os elementos da borda são distintos. No entanto, para o caso em que os elementos das bordas são idênticos, como mostrado abaixo

$$\left(\begin{matrix} 111 & 111 & 222 & 222 & 111 \end{matrix} \right), \quad (\text{B.5})$$

temos 3 domínios quando as condições de contorno são abertas e 2 domínios para condições periódicas de contorno.

O código fonte da função que calcula o número e o tamanho dos domínios para o caso unidimensional e condições periódicas de contorno é a seguinte

```

1 | int cont_cluster(int Np,int F,Person *Sist)
2 | {
3 |     register int i,j,k;
4 |     int aux_int,sfirst=1;
```

```

5   long int ndom=1,smax=0,full_list,cult_div=1,count=1;
6   for(i=1;i<Np;i++)
7       if(Sist[i].cult[0]!=Sist[i].neigh[0]->cult[0])
8           {
9               ndom++;
10              if(count>smax) smax=count;
11              count=1;
12          }
13      else
14          {
15              if(ndom==1) sfirst++;
16              count++;
17          }
18      if((Sist[0].cult[0]==Sist[Np-1].cult[0])&&(ndom>1))
19          {
20              ndom--;
21              count+=sfirst;
22          }
23      if(count>smax) smax=count;
24      return(0);
25  }

```

Este apresenta um laço em todos os elementos da rede na linha 8, e a cada passo compara-se os conjuntos do agente alvo com o conjunto de seu vizinho a direita (linha 9). Caso seja um vizinho idêntico, apenas conta-se o tamanho (da linha 16 à linha 19), e caso seja distinto aumenta-se o número de domínios (da linha 10 à linha 14). Em seguida (da linha 20 à linha 24) temos a comparação entre o primeiro e o último elemento. Este bloco de código deve ser comentado para o caso de condições abertas de contorno. Um ponto importante de ressaltar está na variável auxiliar *sfirst*, esta armazena o tamanho do primeiro domínio, já que será necessário somar o tamanho do último domínio com o primeiro a fim de termos o tamanho real deste domínio e assim compararmos com o valor do maior (linha 25). Esta função armazena o número total de domínios na variável *ndom*

e o tamanho do maior domínio na variável *smax*.

APÊNDICE C – Estrutura de Dados

Antes de tudo, é importante lembrar que todas as implementações que mostraremos neste apêndice foram escritas em **C**. É sabido que uma aplicação qualquer é composta por duas partes: um conjunto de cálculos a ser executado nas variáveis do programa (algoritmo), e uma lógica de armazenamento dessas variáveis na memória (estrutura dos dados). Em **C**, uma estrutura é uma coleção de variáveis referenciadas por um nome, fornecendo uma maneira conveniente de se agrupar e se retornar dados para a região de cálculos. (49, 50) Em outras palavras, esta é uma estrutura lógica que visa facilitar a aquisição dos dados da memória, aumentando significativamente a eficiência do código, visto que a velocidade de busca da memória é muito menor que a velocidade de processamento da CPU. (51) É claro que não só a estrutura aumenta a eficiência, a quantidade de *cache miss* durante cada passo, cálculos recorrentes, entre outros, também alteram a eficiência do código. Entretanto, foge ao escopo deste apêndice analisar todas estas variáveis, nosso foco aqui é apenas introduzir, explicar e demonstrar as estruturas de dados utilizadas nas simulações do modelo de Axelrod.

Tomaremos uma agenda como exemplo de implementação de uma estrutura de dados. Nesta, é necessário o uso de um aglomerado para os campos de cada contato, exemplificado abaixo:

```

1 | struct contato
2 | {
3 |     char nome[500], end[1000];
4 |     int tel[12];
5 | }
```

Temos nessa estrutura a aglomeração de 3 variáveis: duas *strings* (declaradas como vetores do tipo *char* na linha 3), e um vetor de inteiros. As *strings* armazenam o nome do

contato e o endereço deste respectivamente, e o vetor de inteiros o telefone. Com a estrutura declarada, podemos declarar uma variável do tipo **struct contatos**, a qual conterá “dentro” dela, todos os campos da estrutura. Outra forma de inserirmos uma *struct* no código sem necessitarmos da reescrita da palavra-chave **struct** a cada nova declaração é através do comando **typedef**. Este, cria um tipo abstrato de variável, com um nome definido pelo programador. Comentamos sobre esta artimanha pois as implementações deste apêndice sempre terão o comando **typedef**, posto que facilita a implementação e a leitura do código.

Para o modelo discutido neste trabalho será necessário a implementação de duas estruturas: a estrutura espacial, a qual será denominada estrutura recorrente (seção C.1), e a lista de ativos (seção C.2). A segunda possui uma variante, cuja utilização é necessária quando inserimos no modelo o campo externo (capítulo 4). Nas seções posteriores iremos explicar cada uma das estruturas, assim como mostrar o código fonte em C.

C.1 Estrutura recorrente

Para simularmos o modelo de Axelrod, independentemente de sua dimensionalidade, é necessário, para cada agente do modelo, um vetor de dimensão F contendo seu conjunto de fatores culturais. Além disso, é necessário definirmos a forma espacial do modelo (rede ou cadeia). Para o caso unidimensional de tamanho L e F fatores culturais por agente, inicialmente declaramos uma matriz $L \times F$, assim o elemento $\{i, j\}$, será o j -ésimo fator cultural do i -ésimo agente. Analogamente, para o modelo bidimensional, teremos uma matriz volumétrica de dimensões $L \times L \times F$, onde o elemento $\{i, j, k\}$, é o k -ésimo fator cultural do elemento posicionado em $\{i, j\}$. A fim de reduzir o número de índices no caso bidimensional, propusemos a transformação linear C.1, esta torna o último elemento da i -ésima linha vizinho do primeiro elemento da $(i+1)$ -ésima linha,

$$k = iL + j \tag{C.1}$$

e sua inversa dada pelo conjunto de equações C.2,

$$i = \frac{k}{L}, \quad (\text{C.2a})$$

$$j = \text{mod}(k, L). \quad (\text{C.2b})$$

Portanto, teremos o mesmo tipo de declaração independentemente da dimensão do sistema simulado, isto é, sempre teremos como a estrutura do sistema, uma matriz sendo o elemento desta na posição $\{i, j\}$ o j -ésimo fator cultural do i -ésimo agente. O que deve ser tratado com cuidado são os novos valores dos índices de primeiros vizinhos. Sabemos que perante esta transformação, o vizinho norte e o sul do k -ésimo sítio estão na posição $k + L$ e $k - L$ respectivamente, e os outros dois vizinhos do k -ésimo sítio estão na posição $k + 1$ e $k - 1$ como esperado. Vale ressaltar que para outras topologias será necessário redefinir a transformação linear C.1, a fim de termos sempre um vetor de tamanho igual ao número de agentes.

Apesar de simples, esta estrutura não satisfaz todas as necessidades do nosso modelo, posto que a regra de interação de Axelrod (vide apêndice A) necessita de um conjunto de informações do agente alvo e de um respectivo vizinho. Consequentemente, será necessário uma segunda matriz adjacente a qual contém a vizinhança de cada agente, ou, alternativamente a cada passo recalcularmos o índice do vizinho. Como o cálculo do índice seria recorrente durante a simulação, e consequentemente ineficiente para nossa aplicação, optamos por armazenar os índices de todos os agentes. Resumindo, para cada agente será necessário armazenar seu conjunto de fatores culturais e sua vizinhança, logo, ao invés de criarmos dois *arrays* separadamente, e ter que lidar com os índices a cada nova necessidade de dados, criamos um *array* de estruturas do tipo abaixo:

```

1 | typedef struct stragent
2 | {
3 |     int *cult;
4 |     struct stragent **neigh;
5 | } agent;
```

Vários pontos devem ser ressaltados dessa estrutura. Primeiro, adicionamos o comando **typedef**, criando o tipo abstrato de variável *agent* concomitantemente com a declaração da estrutura. Vale ressaltar que o comando **struct** obriga o programador a nomear a estrutura, assim como o comando **typedef**, por isso é que nomeamos a estrutura de *stragent* e o novo tipo de variável de *agent*. Segundo, é a declaração recorrente da linha 4, esta declara, no escopo da declaração da variável **struct stragent** (parte interior do bloco), uma variável do tipo **struct stragent**. Para entender qual é a necessidade desta recorrência, temos o código abaixo que declara nossa estrutura, a inicializa, e no final libera o espaço na memória para o modelo de Axelrod bidimensional com parâmetros $L = 100$, $F = q = 3$. É necessário lembrar que ao trabalhar com alocações dinâmicas de memória (**malloc**, **calloc**), o desenvolvedor é obrigado a desalocar a memória usada manualmente (**free**), diferentemente de alocações estáticas.

```
1  #include<stdio.h>
2
3  typedef struct stragent
4  {
5      int *cult;
6      struct stragent **neigh;
7  } agent;
8
9  int main (int argc, char **argv)
10 {
11
12     int L=100,F=3,q=3,Np=0;
13     register int i;
14     agent *Sist;
15     Np=L*L;
16     Sist=calloc(Np,sizeof(agent));
17     for(i=0;i<Np;i++)
18     {
19         Sist[i].cult=calloc(F,sizeof(int));
20         Sist[i].neigh=calloc(4,sizeof(agent*));
```



```

21         if(!(i/L)) Sist[i].neigh[0]=NULL;
22         else Sist[i].neigh[0]=&Sist[i-L];
23         if(i%L==L-1)Sist[i].neigh[1]=NULL;
24         else Sist[i].neigh[1]=&Sist[i+1];
25         if(i/L==L-1)Sist[i].neigh[2]=NULL;
26         else Sist[i].neigh[2]=&Sist[i+L];
27         if(!(i%L))Sist[i].neigh[3]=NULL;
28         else Sist[i].neigh[3]=&Sist[i-1];
29     }
30     for (i=0;i<Np;i++)
31     {
32         free(Sist[i].cult);
33         free(Sist[i].neigh);
34     }
35     free(Sist);
36 }

```

Este código é dividido em 3 regiões: inclusão das bibliotecas (linha 1), declaração das estruturas (da linha 3 a linha 7), e o programa principal (da linha 7 até o final). O programa principal começa com a declaração das variáveis; note que na declaração já é efetuado a atribuição dos valores de L , F , e q . Além disso, declaramos um ponteiro para o novo tipo de dado *agent* (o vetor de estruturas do nosso sistema) e uma variável do tipo **register int** a qual é usada apenas nos laços do programa, já que a palavra-chave **register** obriga a alocação dessa variável no registrador do processador, eliminando *cache miss* de variável auxiliar de laço. Em seguida, tem-se a alocação do vetor de estruturas (linha 16), e o laço com a inicialização das variáveis internas de cada agente. Neste laço, aloca-se dinamicamente, para cada agente, o vetor de fatores culturais (linha 19) e o vetor de ponteiros para elementos do tipo *agent* (a vizinhança), por isso que na geração da estrutura foi colocado um ponteiro para ponteiros. Assim, definimos a vizinhança de cada agente como um vetor de ponteiros que “apontam” para elementos do vetor de estruturas, isto é, cada agente possui um vetor cujos elementos são endereços da memória

dos seus vizinhos sendo estes vizinhos elementos do vetor de estruturas. Apesar de só termos mostrado a implementação bidimensional, para o sistema unidimensional basta reduzir o vetor de vizinhos para 2 e levar em conta apenas os vizinhos da direita e da esquerda. Por último, o conjunto de **IF-ELSE** na atribuição dos endereços de memória (da linha 21 até a linha 28), gera as condições de contorno abertas, já que um vizinho com endereço **NULL** representa um vizinho inexistente. Para condições de contorno periódicas só é necessário alterar o valor **NULL** para o sítio correspondente.

A pergunta a ser respondida agora é: Qual a vantagem deste tipo de implementação em comparação com a mostrada anteriormente, já que a nova é mais custosa de implementar e entender? Primeiramente temos versatilidade; como a estrutura está intimamente ligada à vizinhança de cada agente e não a disposição espacial, esta estrutura nos permite a implementação de qualquer estrutura espacial de agentes: rede 2D, cadeia 1D, uma rede totalmente conexa, as redes livre de escala, entre outras comumente encontradas na literatura. (20, 21, 52) Além disso, simulações onde a rede altera no decorrer da dinâmica (15, 23–26) também são facilmente implementadas, já que basta adicionar, retirar ou modificar um elemento no vetor de vizinhança. Um terceiro caso, que ratifica a versatilidade desta estrutura é simulações do modelo em que os agente não estão fixos na rede, basta adicionar um índice que representa a posição do agente na estrutura. Não apenas ganha-se versatilidade com essa implementação, esta estrutura facilita de obtenção dos dados da vizinhança de cada agente. No exemplo do modelo de Axelrod, este coage a aquisição do conjunto de fatores culturais do agente alvo e do respectivo vizinho e com esta implementação o i -ésimo fator cultural do j -ésimo vizinho do i -ésimo agente é obtido por

```
1 || S i s t [ i ] . n e i g h [ j ] - > c u l t [ 1 ]
```

Essa facilidade vem da recorrência intrínseca da estrutura, ela possibilita também ao desenvolvedor a obtenção de dados de vizinhos dos vizinhos, e assim por diante. Em suma, a estrutura proposta é mais versátil para implementar qualquer rede complexa, facilita a obtenção dos dados (mais eficiente) e não é limitada pelo modelo de Axelrod,

podendo ser utilizada para quase todo tipo de simulação de modelos estocásticos, e para outros algoritmos como resolução de equações diferenciais parciais via diferenças finitas ou elementos finitos. (42)

C.2 Lista de ativos

Nesta seção mostraremos a implementação geral da lista de ativos. Dissertaremos sobre o tipo de estrutura usada, as motivações de nossa escolha, explicitaremos os códigos das funções de adição e de remoção na lista e discutiremos as diferenças entre uma lista de sítios ativos, usado na variante do modelo com o campo externo (veja o capítulo 4) e uma lista de ligações ativas. Algumas perguntas devem ser feitas para escolhermos qual estrutura a ser utilizada: Quantas vezes por iteração será necessário percorrer esta lista? A quantidade de elementos é grande? Se for percorrer a lista a cada iteração, quantos elementos serão percorridos em média? O tamanho médio da lista altera-se consideravelmente? Como é feita a escolha do elemento durante a iteração? Quanto há de memória RAM disponível? Em nosso caso não temos uma lista de tamanho gigantesco, visto que o tamanho máximo é 4 vezes o número de agentes (lista de ligações), portanto as estruturas que visam uma administração mais eficiente de memória não nos interessam. A característica fundamental da nossa classe de algoritmo é a escolha aleatória de um elemento da lista a cada iteração. Portanto a melhor estrutura é o vetor, já que este tem uma indexação intrínseca, ou seja, o vetor é a única estrutura em que o acesso aos seus elementos é feito através de um índice. Todas as outras estruturas possíveis usam ligações via ponteiros, portanto para acessar o segundo elemento, deve-se passar pelo primeiro e pelo segundo. No entanto, a desvantagem de utilizarmos vetores está em sua péssima administração de memória, já que este deve ser declarado estaticamente no início do programa. Algumas alternativas envolvendo filas embaralhadas, ou até mesmo listas embaralhadas foram implementadas, entretanto, elas mostraram-se ineficientes para a simulação, além disso elas inserem na dinâmica um problema de embaralhamento. Portanto, apesar de mais custoso quanto ao uso de memória, nossas listas de ativos serão vetores.

Um segundo ponto importante na implementação da lista é a adição e a remoção de elementos desta. Definimos que a adição de um novo elemento deve ser sempre no final da lista, sua respectiva função segue abaixo

```
1 | int add_active (int target, long int* ListSize, int* List, int*  
  | ListInv)  
2 | {  
3 |     List[ListSize]=target;  
4 |     (*ListSize)++;  
5 |     ListInv[target]=ListSize;  
6 |     return(0);  
7 | }
```

Note que esta função aumenta o tamanho da lista na linha 4, insere na lista (variável *List*) o alvo (variável *target*) na linha 3, e a linha 5 temos a adição do alvo o vetor inverso (variável *ListInv*). Este último nos dá a posição do alvo na lista de ativos, sua importância será mostrada em seguida.

Definiremos agora a remoção dos elementos. Esta acontecerá em qualquer posição do vetor, e transferiremos o último elemento da lista para a posição removida. Esta última operação é feita para mantermos a lista contígua, isto é, sem espaços vazios, facilitando a escolha aleatória. Devido à esta transferência é que necessitamos do vetor inverso. Segue abaixo a função de remoção de elementos.

```
1 | int purge_active (int target, long int* ListSize, int* List, int*  
  | ListInv)  
2 | {  
3 |     int aux, aux2;  
4 |     aux=ListInv[target];  
5 |     aux2= List[ListSize-1];  
6 |     List[aux]=aux2;  
7 |     ListInv[aux2]=aux;  
8 |     ListInv[target]=0;  
9 |     (*ListSize)--;
```

```

10  |   List[ListSize]=0;
11  |   return(0);
12  | }

```

Para esta função duas variáveis locais auxiliares foram necessárias (*aux* e *aux2*). A primeira armazena a posição do alvo na lista, e a segunda armazena o valor do último elemento da lista de sítios ativos. Assim, na linha 6 transferimos o último elemento para a posição do elemento removido, na linha 7 atualizamos a posição do último elemento para sua nova posição, e finalmente nas linhas 8 e 10 anulamos os valores da posição do alvo removido e do último elemento da lista de ativos respectivamente. Para facilitar o entendimento do algoritmo de remoção temos abaixo o exemplo com um sistema de 4 elementos que removerá da lista o elemento 2

Linha	<i>List</i>	<i>ListInv</i>	
	2413	3142	
6	3413	3142	
7	3413	3112	
8	3413	3012	
10	3410	3012	(C.3)

Com as operações de inserção e remoção da lista exemplificadas, basta definirmos como identificamos os elementos (ligações e agentes) em cada uma das duas listas. Para a lista de ligações ativas, utilizada na simulação da interação local de Axelrod em uma topologia d-dimensional com vizinhança de von Neumman, definimos a ligação entre o i-ésimo agente com o seu vizinho (j-ésimo agente) como um inteiro l tal que

$$i = \frac{l}{2*d} \quad \text{e} \quad j = \text{mod}(l, 2*d). \quad (\text{C.4})$$

Portanto, a lista de ligações ativas será um vetor cujo valor de cada componente é um inteiro com as propriedades C.4. Vale ressaltar que a obtenção de i, j está intimamente ligada à topologia do sistema representada pelo parâmetro d . Além disso temos que esta

implementação possui a não comutatividade intrínseca da interação de Axelrod, posto que armazenamos o caso em que o agente A é o alvo e o agente B é seu vizinho e o caso em que o agente B é o alvo e A seu respectivo vizinho. Já para o caso da lista de agentes ativos, utilizada na simulação do modelo de Axelrod com influência de um campo externo (capítulo 4), cada elemento do vetor é um inteiro com a posição do agente na rede para o caso unidimensional, e o índice k (veja a transformação C.1) para uma topologia bidimensional.

APÊNDICE D – Cálculo dos campos de consenso global e local

Neste apêndice ilustraremos com um exemplo simples o cálculo dos campos de consenso global e local, ambos utilizados no capítulo 4. Usaremos como exemplo uma cadeia de tamanho $L = 6$ com parâmetros $F = 3$ e $q = 2$, cujos agentes (ou sítios) exibem os seguintes fatores culturais:

$$\begin{pmatrix} 121 & 111 & 122 & 112 & 222 & 112 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Da definição de campo de consenso global, cada componente do conjunto de fatores culturais desse campo representa a realização mais comum da respectiva componente de cada sítio da cadeia. Assim, para obtermos esse campo é necessário contar essas realizações e selecionar a mais frequente. Na nossa implementação, armazenamos essas contagens (histogramas) em uma matriz H de dimensão $F \times q$, cujo elemento $h_{i,j}$ é o número de vezes que o valor j aparece no i -ésimo fator cultural, considerando-se todos os sítios da cadeia. Para o exemplo D.1 temos

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Dessa estrutura, observa-se que há cinco realizações do valor 1 (sítios 1,2,3,4,6), e uma realização do valor 2 (sítio 5) no primeiro fator cultural de toda a cadeia. Portanto, o primeiro fator cultural do campo de consenso será 1. De forma análoga obtém-se que o terceiro fator do campo de consenso global será 2. No caso de empate (segundo fator do exemplo), é necessário escolher aleatoriamente entre os valores empatados, independentemente do número total de valores. Assim, o campo de consenso global para a cadeia D.1

é

$$\begin{pmatrix} 1R2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

onde R pode assumir os valores 1 ou 2 com igual probabilidade. Esse campo atua em todos os sítios da cadeia. Para aumentar a eficiência das simulações, a cada passo atualizamos a matriz H em vez de recalculá-la. O maior problema nesse tipo de simulação está na lista de sítios ativos em relação ao campo, uma vez que, quando se altera um fator do campo, é necessário verificar a atividade de todos os elementos da rede e inserir ou remover elementos da lista. Isso insere no programa um laço proporcional ao tamanho da rede L e operações de manutenção da lista, diminuindo a eficiência do código.

Já para o campo de consenso local, aplicaremos a mesma ideia do consenso global; no entanto, não temos apenas uma matriz H , e sim um conjunto L de matrizes, pois cada sítio da rede possui uma vizinhança distinta. Logo, é calculada, uma matriz H para cada sítio da rede, como mostrado na equação D.4, e em seguida calcula-se o campo local, mostrado na cadeia D.5, sendo R um elemento aleatório, como anteriormente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{pmatrix} 111 & 12R & 11R & R22 & 112 & 222 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Um detalhe importante a ser levado em conta é que, devido às condições abertas de contorno, o número máximo de realizações para os elementos da borda é menor. Em particular, o campo local na borda é idêntico ao estado cultural de seu único vizinho. Para o caso bidimensional esse efeito não ocorre, já que cada sítio da rede possui pelo menos dois vizinhos.

Finalmente, mencionamos que o campo externo é descrito por

$$\begin{pmatrix} RRR \end{pmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

independentemente dos estados dos agentes. Os elementos aleatórios R_s são escolhidos no início da simulação e mantidos fixos até o final desta.

APÊNDICE E – Perturbação do regime heterogêneo no modelo unidimensional

Neste apêndice reproduziremos os resultados de Klem e colaboradores (28) com a intenção de demonstrar que não há contradição entre as conclusões daqueles autores e os resultados mostrados no capítulo 4. Vamos inserir perturbações de um único sítio na cadeia com o intuito de mostrar a instabilidade dos estados absorventes multiculturais perante esse tipo de perturbação. Ou seja, evolui-se uma cadeia livre de campo externo a partir de uma configuração inicial aleatória até esta atingir um estado absorvente multicultural. Em seguida, altera-se aleatoriamente um fator aleatório de um sítio aleatório e inicia-se a evolução novamente. Este processo é repetido c vezes. Idealmente, o número de ciclos c deveria ser infinito para garantirmos a estabilidade (ou instabilidade) do regime multicultural, mas a tendência observada quando c aumenta é suficiente para tirarmos conclusões confiáveis.

Vamos considerar a dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L$ em função do tamanho da rede L mostrado na figura E.1. Note que, de forma semelhante ao obtido na referência, (28) essas perturbações tornam o sistema monocultural para L finito, visto que o aumento de c provoca um aumento de pontos na curva $1/L$, ou seja, $\langle N_d \rangle = 1$. À medida que L aumenta, torna-se necessário aumentar o número de ciclos c para desestabilizar o regime multicultural. Fica claro, a partir desses resultados, que, para qualquer L finito, existe um valor de c que eventualmente leva o sistema ao regime monocultural. É interessante observar que o regime monocultural, por outro lado, é estável a esse tipo de perturbação.

As simulações executadas com campo externo de intensidade p em um sistema

Figura E.1 – Dependência do número médio de domínios normalizado $\langle N_d \rangle / L^2$ com a dimensão linear da rede L no modelo de Axelrod bidimensional uniforme sujeito à perturbações de um único agente com $F = 2$, $q = 10$ e diversos valores de c . A linha contínua representa a função $1/L^2$. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 10^3$ realizações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

livre multicultural (subseções 4.2.1 e 4.3.1) mostraram que, no limite $p \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$, o sistema permanece multicultural. Todavia, observe que o limite $p \rightarrow 0$ corresponde exatamente ao tipo de perturbação que estamos considerando: a interação com o campo é tão rara que só ocorre após o sistema ter alcançado uma configuração “absorvente”. Isso aparentemente mostraria a estabilidade das configurações multiculturais, em contradição com os resultados da figura E.1. De fato, a explicação dessa discrepância está na ordem em que os limites $p \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$ são tomados. Os resultados da figura E.1 mostram um comportamento do modelo para L fixo (grande ou não) e $p \rightarrow 0$. Assim, tomamos primeiro o limite $p \rightarrow 0$ e depois $L \rightarrow \infty$. Por outro lado, os resultados das subseções 4.2.1 e 4.3.1 são obtidos fixando-se p (pequeno ou não) e tomando-se o limite $L \rightarrow \infty$. Nesse caso tomamos primeiro o limite $L \rightarrow \infty$ e depois o limite $p \rightarrow 0$ (veja figura 4.21). Fisicamente, isso significa que as perturbações ocorrem antes de o sistema atingir uma configuração absorvente, ou seja, são perturbações recorrentes. Mas a própria figura E.1 mostra que para $L \rightarrow \infty$, qualquer valor finito de c , não importando quão grande seja,

não é suficiente para desestabilizar o regime multicultural.