UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

PEDRO MANOEL SARDINHA BICO SOARES

Um estudo de interações coletivas para obter
estados de Fock via Hamiltonianos seletivos

São Carlos

2019

PEDRO MANOEL SARDINHA BICO SOARES

Um estudo de interações coletivas para obter estados de Fock via Hamiltonianos seletivos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Yousseff Moussa

Versão Corrigida

São Carlos

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Soares, Pedro Manoel Sardinha Bico

Um estudo de interações coletivas para obter estados de Fock via Hamiltonianos seletivos / Pedro Manoel Sardinha Bico Soares; orientador Miled Hassan Youssef Moussa - versão corrigida -- São Carlos, 2019.

79 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Estados de Fock. 2. Interações coletivas. I. Moussa, Miled Hassan Youssef, orient. II. Título.

*ÀS MEMÓRIAS DE MINHA
MÃE E DE MEU AMIGO CANINO
BONO, E AOS MEUS QUERIDOS
TIOS*

AGRADECIMENTOS

Há cada vez que atravesso o espaço de vivência "Prof. Horácio Carlos Panepucci", muitas lembranças surgem na minha mente. Foram anos fazendo amigos, convivendo com professores e funcionários. Cada um deles, teve a sua respectiva contribuição para a pessoa que me tornei. Vejo jovens pelo IFSC trilhando a mesma trajetória, e quando os aconselho ou ensino à eles um cálculo, percebo que algo em mim mudou. Neste momento em que o ciclo se encerra, me sinto na obrigação de agradecer por tudo o que São Carlos me proporcionou. Aquele menino de Catanduva-SP levará consigo muita bagagem.

Primeiramente, sou grato à uma força maior que me guia em momentos difíceis. e que me ilumina desde a primeira derivada que fiz. Eu gostaria que a minha mãe estivesse aqui para presemciar este final. Uma mulher que juntamente com os meus tios, me ensinou a ser quem eu sou hoje. Eu não poderia deixar de mencionar o meu orientador Prof. Miled H. Y. Moussa, que me ajudou à dar os primeiros passos na área, desde quando eu nem estava sob a sua tutela. Peço desculpas pelos problemas que causei, e declaro a minha gratidão. Aproveito a oportunidade para expor a minha admiração pelo Prof. Celso J. Villas-Boas, que me proporcionou ótimos diálogos sobre Óptica Quântica. Igualmente, dou créditos aos meus amigos/colaboradores Victor Teizen e Gentil Neto, responsáveis pelo meu impulsionamento e motivação. Ainda no campo da pesquisa, tenho o prazer de me referir à André Giuffrida, este talento que otimizou o meu lado programador. Por fim, cumprimento os membros da banca, que se deslocaram para estarem presentes na minha defesa.

Amigo é coisa pra se guardar do lado esquerdo do peito, já dizia a canção. Aos meus companheiros de sala Cleverson, Matheus, João, Olívia e Rogério, o meu muito obrigado pelos papos e cafés. Aline, adorei morar com você e os felinos. No entra e sai do dia-a-dia, ganhei amigos nas portarias. São eles: Cesár, Jota, Duílio, Sérgião, Cerentolla, Antônio, e tantos outros com quem convivi pelos corredores. Caso eu esteja me esquecendo de alguém, peço desculpas. Rafael, Marília e Bono, sou por demais agradecido pelo acolhimento que me deram. Sem este suporte, eu não teria conseguido. No que diz respeito aos externos, deixo o meu forte abraço à Caio Formenton, Robson Milaré, Rogério Rabello, e à Daniela Braghim. Para esta última, deixo os meus mais sinceros votos de sucesso e agradecimento. Sua amizade foi deveras importante durante o meu luto. Reitero o papel da estrutura fornecida pelo Instituto de Física de São Carlos (IFSC-USP), e o quanto é gratificante escrever estas palavras. Concluindo, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*O presente trabalho foi realizado
com o apoio da coordenação de aperfeiçoa-
mento de Pessoal de Nível Superior - Brasil
(CAPES) - Código de Financiamento 001*

*"Deixe que seus amigos subestimem suas qualidades
e que seus inimigos superestimem seus defeitos."*

- O PODEROSO CHEFÃO

Resumo

SOARES, P. M. *Um estudo de interações coletivas para obter estados de Fock via Hamiltonianos seletivos*. 2019. 79 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Dedicamos esse trabalho à geração determinística de estados de Fock num sistema com interações coletivas, descritas por estados de Dicke via um mecanismo seletivo que excita tais estados. Utilizando técnicas providas pela engenharia de interações, Hamiltonianos efetivos são construídos por meio do ajuste dos parâmetros envolvidos. Uma vez que estes são escolhidos precisamente, é possível gerar um estado de Fock $|N\rangle$ em múltiplas etapas, onde N é o número de átomos da amostra. Basta adotar o Hamiltoniano efetivo para cada uma delas, e o tempo de evolução. Também apresentamos estudos numéricos sobre o emaranhamento em um sistema híbrido qubit-cavidade-oscilador, cujos acoplamentos do Hamiltoniano possuem dependência temporal harmônica (coseno) e hiperbólica (secante). Por meio da negatividade $\mathcal{N}(t)$, quantificamos os efeitos induzidos às bipartições.

Palavras-chave: Estados de Fock. Interações coletivas.

Abstract

SOARES, P. M. *A study of collective atom-field interactions to obtain Fock states using selective hamiltonians*. 2019. 79 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

We dedicate this work to the deterministic generation of Fock states in a system with collective interactions, described by Dicke states through a selective mechanism that excites these states. Using techniques provided by engineering interactions, effective Hamiltonians are constructed by adjusting the parameters involved. Once these parameters are accurately selected, it is possible to generate a multi-step Fock $|N\rangle$ state, where N is the number of atoms in the sample. Just adopt the effective Hamiltonian for each of them, and the time of evolution. We also present numerical studies about entanglement in a hybrid system formed by qubit-cavity-oscillator, whose couplings of the Hamiltonian have harmonic (cosine) and hyperbolic (secant) temporal dependence. Through negativity, we quantify the effects induced in bipartite parts.

Keywords: Fock states. Collective Interactions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema de dois níveis (qubit) representado na esfera de Bloch. . .	37
Figura 3.1 – Esquema de níveis atômicos com $ g\rangle$, $ e\rangle$ e $ i\rangle$ ascendentes energeticamente. As transições não-ressonantes mediadas pelos campos quântico, λ , e clássicos, Ω_1 e Ω_2 , Como mostrado no diagrama. As dessintonias são dadas por $\delta = \omega_c - \omega_i$, $\Delta_1 = \omega_1 - (\omega_i - \omega_e)$ e $\Delta_2 = \omega_i - \omega_2$	41
Figura 3.2 – Realização em amostras distintas da aproximação de onda girante exigida pela Eq.(3.12): $ \lambda_{\bar{n},\bar{m}}/\omega_{\bar{n},\bar{m}} $ em função de N . O eixo vertical encontra-se em unidades de $ \Omega_1/\lambda $	44
Figura 3.3 – Dinâmica populacional entre os estados restritos de $\mathcal{H}_{-N/2+1}$: $ 0\rangle N/2, N/2\rangle$ e $ 1\rangle N/2, N/2 - 1\rangle$, para uma amostra com 5 átomos ($N = 5$). O sistema é inicialmente preparado em $ \psi(0)\rangle = 0\rangle 5/2, 5/2\rangle$, e evolui segundo o Hamiltoniano da Eq.(3.14). As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. Parâmetros: $\Delta_1 = \delta$, $\delta/ \lambda = \Delta_2/ \Omega_2 = 30.0$, $ \Omega_1/\lambda = 0.01$ e $ \Omega_2/\lambda \approx 0.99$	46
Figura 3.4 – Para uma amostra com 5 átomos ($N = 5$), mostramos a dinâmica populacional entre os estados restritos de $\mathcal{H}_{-N/2+2}$: $ 0\rangle N/2, N/2 - 1\rangle$, $ 1\rangle N/2, N/2 - 2\rangle$, $ 1\rangle N/2, N/2\rangle$ e $ 2\rangle N/2, N/2 - 1\rangle$. . O sistema é inicialmente preparado em (a) $ \psi(0)\rangle = 0\rangle 5/2, 3/2\rangle$ (b) $ \psi(0)\rangle = 1\rangle 5/2, 5/2\rangle$, e evolui segundo o Hamiltoniano da Eq.(3.15). As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. Parâmetros: (a) $\Delta_1 = \delta$, $\delta/ \lambda = \Delta_2/ \Omega_2 = 30.0$, $ \Omega_1/\lambda = 0.01$ e $ \Omega_2/\lambda \approx 1.99$ (b) $\Delta_1 = \delta$, $\delta/ \lambda = \Delta_2/ \Omega_2 = 30.0$, $ \Omega_1/\lambda = 0.01$ e $ \Omega_2/\lambda \approx 1.99$	47

Figura 3.5 – Dinâmica populacional entre os estados de Dicke $|N/2, m\rangle$ ($|m| \leq N/2$) para uma amostra com 3 átomos ($N = 3$). São apresentados somente aqueles com probabilidade de ocupação não estática. O sistema é inicialmente preparado em $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle|\theta, \varphi\rangle$, e evolui segundo o Hamiltoniano da (a) Eq.(3.14) (b) Eq.(3.15). As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. Parâmetros: (a) $\alpha = 1.0$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 50.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.02$ e $|\Omega_2/\lambda| = 1.0$ (b) $\alpha = 1.0$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = 0$, $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 60.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| = 2.0$ 48

Figura 3.6 – Múltiplas etapas envolvidas na produção do estado de Fock $|N\rangle$. Somos apresentados aos Hamiltonianos efetivos apropriados e às preparações iniciais utilizadas nas etapas do protocolo, bem como ao estado final atingido. 50

Figura 3.7 – (a) Dinâmica populacional para os estados de Fock $|n\rangle$ atinentes à cada etapa. Especialmente para uma amostra com 5 átomos ($N = 5$), consta $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|4\rangle$ e $|5\rangle$. (b) Evolução do número médio de fótons no decorrer do protocolo. As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. Os parâmetros utilizados nos passos constituintes da simulação acham-se na Tabela 3.2. 52

Figura 4.1 – Representação esquemática das interações descritas pelo Hamiltoniano $\mathcal{H}'(t)$ (vide Eq.4.1). (a) Bipartições naturais: oscilador-cavidade/qubit-oscilador. (b) Interação qubit-cavidade mediada indiretamente através das demais bipartições. 62

Figura 4.2 – Dependência harmônica/hiperbólica para $G(t)$ e $\Lambda(t)$. A linha sólida/tracejada mostra a função coseno/secante hiperbólica. O tempo, representado no eixo horizontal, encontra-se em unidades arbitrárias. 64

Figura 4.3 – Procedimento para o cálculo da negatividade entre as partes do sistema híbrido. Os círculos da cor cinza representam os sub-sistemas sob os quais foi realizada a operação de traço parcial. 66

Figura 4.4 – (a) Dinâmica da negatividade relativa $\tilde{\mathcal{N}}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento fraco para a amplitude g_o ($g_o \ll \omega_m$): (a) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.6$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.4$ (b) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.7$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.7$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \tilde{t} \leq 2\pi$, onde $\tilde{t} = \omega_m t$ 68

- Figura 4.5 –(a) Dinâmica da negatividade relativa $\tilde{N}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento fraco para a amplitude g_o ($g_o \ll \omega_m$): (a) $g_o = 0.08$, $\lambda_o = 0.8$, $\Omega_c = 0.6$ e $\Omega_q = 0.6$ (b) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.7$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.1$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$ 69
- Figura 4.6 –(a) Dinâmica da negatividade relativa $\tilde{N}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento forte para a amplitude g_o ($g_o \gg \omega_m$): (a) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.3$ e $\Omega_q = 0.1$ (b) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 2\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$ 70
- Figura 4.7 –(a) Dinâmica da negatividade relativa $\tilde{N}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento forte para a amplitude g_o ($g_o \gg \omega_m$): (a) $g_o = 0.8$, $\lambda_o = 0.6$, $\Omega_c = 0.2$ e $\Omega_q = 0.2$ (b) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$ 71
- Figura 4.8 –Extremos encontrados para a negatividade relativa $\tilde{N}_{qc}(t)$ em função das frequências externas Ω_c e Ω_q com valores fixos das amplitudes g_o e λ_o . Os dados foram obtidos por meio de simulações referentes a $g(t) = g_o \operatorname{sech}(\Omega_c t)$ e $\lambda(t) = \lambda_o \operatorname{sech}(\Omega_q t)$ com $g_o = 0.5$ e $\lambda_o = 0.5$, e análise dentro da faixa temporal $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t}$ foi previamente definido como $\bar{t} = \omega_m t$ 71
- Figura 4.9 –Dinâmica dissipativa da negatividade relativa $\tilde{N}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pela Eq.(4.10) com dependência temporal hiperbólica nos acoplamentos $g(t)$ e $\lambda(t)$. Parâmetros: $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$, $\Omega_q = 0.1$, $\kappa = 10^{-2}$, $n_c = 0$, $\gamma_q = 10^{-3}$, $n_q = 10.0$, $\gamma_m = 10^{-5}$, $n_m = 10.0$. A análise em questão encontra-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$ 72

SUMÁRIO

1	Introdução	21
2	Conceitos Fundamentais	25
2.1	Eletrodinâmica Quântica de Cavidade	25
2.2	Oscilador Harmônico: Estados de Fock	26
2.3	Estados atômicos coletivos e emissão espontânea superradiante	27
2.4	Hamiltonianos efetivos em interações dispersivas	29
2.5	Sistema quântico sob a ação de um banho térmico (OH)	31
2.5.1	A hipótese de acoplamento fraco entre o sistema de interesse e o banho térmico	32
2.5.2	A aproximação de Born-Markov e a equação mestra quântica na forma de Lindblad	33
2.6	Caracterizando estados quânticos: Fidelidade e Pureza	35
2.6.1	Fidelidade	35
2.6.2	Pureza	36
3	Estudo de interações coletivas átomo-campo para obtenção de estados de Fock via Hamiltonianos seletivos	39
3.1	Família de Hamiltonianos coletivos para processos de interação radiação-matéria	39
3.2	Validade das interações efetivas e magnitude do número de átomos na amostra	42
3.3	Preparação determinística de estados de Fock	49
3.4	Material suplementar: Derivação da Eq.(2.23) utilizada na construção da fa- mília de Hamiltonianos efetivos $\mathcal{H}_{k'}$	53
3.5	Material suplementar: Uma aplicação para os Hamiltonianos $\mathcal{H}_{k'}$ via engenha- ria de reservatórios	56
3.5.1	Procedimento de Cirac e Zoller para a engenharia de reservatórios	56

3.5.2 Engenharia dos Liouvillianos de superradiância e superabsorção	58
4 Emaranhamento indireto num sistema cavidade-oscilador-qubit dependente do tempo	61
4.1 Apresentação do modelo	61
4.2 Solução dinâmica do sistema híbrido: $g(t)$ e $\lambda(t)$	64
4.3 Resultados numéricos: $\mathcal{N}_{qc}(t)$, $\mathcal{N}_{qo}(t)$, $\mathcal{N}_{oc}(t)$	65
5 Conclusão e observações finais	73
REFERÊNCIAS	75

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A teoria quântica tem entregue explicações satisfatórias a diversos fenômenos, ainda que não haja consenso sobre seus fundamentos conceituais e interpretativos em algumas situações idealizadas, mesmo após mais de um século de desenvolvimento. O obstáculo conceitual deve-se parcialmente ao fato de que a superposição coerente de estados diferentes de um sistema ocorre na mecânica quântica, fazendo-se necessário o chamado "processo de medida", no qual se dá o postulado de projeção – o famoso colapso da função de onda. Daí nota-se que há um problema de interpretação com relação ao mecanismo através do qual tal estado definido é determinado dentre os resultados possíveis de uma observação, visto que a equação de Schrödinger gera evolução reversível da função de onda, ao contrário do que ocorre com o processo de medida. Além do processo de medida, outro item do formalismo quântico que causa debate é a possibilidade de uma descrição física não-local. Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (1) alegaram que a Mecânica Quântica seria incompleta, afinal esta teria como consequência fenômenos não-locais – para tais autores isso era um contrassenso. Dado um par correlacionado de EPR cujo preparo inicial é de um estado do tipo singlete, a não-localidade manifesta-se por meio da medida, num determinado estado em uma das partículas que compõe o par, "projetando" imediatamente a outra partícula num estado ortogonal ao da primeira. No entanto, por muito tempo, não houve uma circunstância experimental concreta para mostrar a (não) localidade na Mecânica Quântica e tal questão permaneceu filosófica até 1964, quando Bell elabora as ditas 'desigualdades de Bell' (2-3) cuja violação foi corroborada experimentalmente (4-5), complementando o entendimento da natureza quântica.¹ Adicionalmente, na mecânica quântica também ocorrem efeitos da chamada decoerência que interferem na

¹ Observe que a violação das desigualdades de Bell tem como consequência que as hipóteses de realismo (objetos microscópicos possuem propriedades reais que determinam resultados de medidas quânticas) e de localidade (realidade em um local não é influenciada por medidas realizadas num local distante) não podem ser cumpridas simultaneamente pela mecânica quântica.

habilidade de implementação de alguns processos quânticos (6).

Investigar como funciona fisicamente a transmissão, processamento e armazenamento de informação no contexto quântico é uma das motivações da área de informação quântica – com o objetivo de confeccionar o chamado computador quântico, que consiste em uma máquina que utiliza plenamente princípios da mecânica quântica no tratamento de informação para resolução e simulação de problemas matemáticos e físicos (como, por exemplo, o problema de fatoração numérica (7)). Em termos de complexidade de tempo, o algoritmo de fatoração de números inteiros de Shor mostra o tratamento informacional quântico transcendendo o clássico. Se o fato é recorrente, desconhecemos. Apenas afirmamos que para um conjunto de problemas específicos, não se encontrou nenhum algoritmo clássico que viabilize a mesma empreitada com complexidade de tempo subexponencial.

Avanços tecnológicos recentes na manipulação da interação radiação-matéria no nível microscópico, envolvendo alguns átomos e fótons, possibilitaram grandes avanços na implementação de protocolos de processamento informacional quântico, por vezes utilizando algumas das características da mecânica quântica mencionadas nos parágrafos anteriores como base conceitual. Nas últimas décadas, esses aspectos fundamentais da mecânica quântica que careciam de métodos empíricos, ganharam implementações experimentais (usualmente) para uma quantidade reduzida de partículas, já que no contexto microscópico, o tratamento quântico é imprescindível.

Um dos sistemas quânticos mais simples, o sistema de dois níveis, pode ser usado para implementar o qubit (a unidade mais básica de informação de um computador quântico) em alguns contextos experimentais, nos quais os computadores quânticos possuem certo potencial. Alguns exemplos são os esquemas para o aprisionamento de um único íon atômico (8–9), sistemas de ressonância magnética nuclear, eletrodinâmica de cavidades, junções Josephson, pontos quânticos, sistema de íons armadilhados e o sistema optomecânico quântico.

Nesse momento nos referiremos de forma particular ao sistema de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC) e o sistema de íons aprisionados. Vários estudos teóricos e experimentais envolvendo a interação radiação-matéria em íons aprisionados e EQC foram realizados nos últimos anos. Podemos citar como exemplo, a preparação de superposição de estados do tipo 'gato de Schrödinger' ($|\psi\rangle \propto (|\alpha e^{i\phi}\rangle + |\alpha e^{-i\phi}\rangle)$) com $|\alpha|^2 \approx 10$, em cavidades de alto fator de qualidade (alto-Q) (10) e em íons aprisionados (11), possibilitando o exame dos efeitos da coerência quântica. Outro exemplo seria o do preparo de uma pluralidade de estados não-clássicos reportada em ambos contextos experimentais (10–13), incluindo a geração e detecção de estados de Fock do campo de radiação

(14). Além disso foram medidas as oscilações de Rabi de átomos em estados circulares de Rydberg (15), revelando a natureza quântica do campo de radiação (16). Concomitante aos aperfeiçoamentos em EQC, as técnicas de manipulação de estados eletrônicos e vibracionais de íons aprisionados via campos clássicos (17) possibilitaram a verificação de fenômenos quânticos fundamentais, como a realização de diversas propostas para simulação, computação (18) e comunicação quânticas.

Além dos sistemas de íons aprisionados e de EQC, o sistema optomecânico quântico (19) desponta como uma plataforma para efetuar, e.g., a geração de estados quânticos para a luz e os graus de liberdade da matéria (19–22). O imediato alcance a interação não-linear (trilinear) de fótons únicos entre ressonadores mecânicos e as cavidades ópticas possibilita a obtenção de estados quânticos em diversos regimes optomecânicos (19). Aliás, as habilidades de resfriar as excitações fonônicas até seu estado fundamental (23–27), e de desempenhar a tomografia de estados de ressonadores mecânicos (28), fornecem um terreno fértil para produzir estados fonônicos de uma forma controlável (20,29–30).

Motivado pelo controle e armazenamento informacional no contexto de poucas partículas (31–33), houve um aumento do número de implementações experimentais que usam um conjunto de algumas partículas (ao invés de utilizar uma ou poucas) (34) ou propõem protocolos contendo processos coletivos (35), com a meta de implantar sistemas quânticos capazes de operações computacionais mais complexas, objetivando superar a capacidade computacional dos sistemas (clássicos) atualmente utilizados, e talvez revelar características físicas novas.

A produção de estados de Fock tem provado ser de absoluta importância para aplicações fundamentais e experimentais em mecânica quântica (36–37). Usualmente, esquemas para preparo de estados de Fock (30) são intrínsecamente probabilísticos, já que são usualmente baseados em medidas de um grau de liberdade para "colapsar" outro grau de liberdade com o qual o primeiro foi originalmente emaranhado (constituindo a chamada fonte de fóton "anunciado"), gerando o estado desejado. Designs determinísticos também são possíveis dirigindo os sistemas a estados desejados via diversos protocolos (9,38–41). Outros esquemas determinísticos também podem ser alcançados via protocolos de engenharia de reservatório (9). Tal método submete o sistema à influências complementares junto à (inevitável) ação do ambiente, com o intuito de proteger o sistema de interesse dos mecanismos de decoerência – possibilitando, por exemplo, o preparo de superposições de dois pacotes de onda (38–39). A técnica de (9), demonstrada experimentalmente em um sistema de íons aprisionados (40), consiste em um estágio de absoluta relevância para a implantação de recursos de informação quântica. Propostas desse tipo tem como alvo a

preparação dissipativa de estados quânticos de n corpos (41) e de eventualmente servir como plataforma para computação (42) (e simulação (43)) quântica.

Estados de Dicke(44–46) – os análogos dos estados coerentes para o caso de estados eletrônicos coletivos – são muito importantes no tratamento de problemas envolvendo muitas partículas interagentes envolvendo graus de liberdade eletrônicos. Introduzidos em 1954 como uma ferramenta no estudo de emissão coerente espontânea por gases moleculares (também conhecido como superradiância), foram também explorados sob um contexto de informação quântica mais tarde(47). Estados de Dicke são importantes na produção de estados emaranhados, em protocolos de informação quântica e podem ser generalizados para maiores momentos angulares. Tais estados foram experimentalmente observados em diversos sistemas, incluindo sistemas ópticos lineares, não-lineares, de cavidades e de estado sólido.

Esse trabalho, dedica-se à geração determinística de estados de Fock num sistema com interações coletivas, descritas por estados de Dicke via um mecanismo seletivo que excita tais estados. Utilizando técnicas providas pela engenharia de interações, Hamiltonianos efetivos são construídos por meio do ajuste dos parâmetros envolvidos. Uma vez que estes são escolhidos precisamente, é possível gerar um estado de Fock $|N\rangle$ em múltiplas etapas, onde N é o número de átomos da amostra. Basta adotar o Hamiltoniano efetivo para cada uma das etapas, e o tempo de evolução. Inclui-se também, os resultados a respeito do emaranhamento entre as partes num sistema híbrido qubit-cavidade-oscilador, descrito por um Hamiltoniano dependente do tempo. O mesmo apresenta acoplamentos dinâmicos (qubit-cavidade e oscilador-cavidade), cujas formas funcionais são as bem conhecidas: harmônica (coseno) e hiperbólica (secante). Através de um algoritmo, calculamos a negatividade buscando a otimização das correlações entre qubit e oscilador, mediada indiretamente pelos demais.

Dividiremos a tese da forma seguinte. No capítulo 2, fizemos uma breve revisão conceitual para o desenvolvimento do trabalho. No Capítulo 3, apresentamos uma família de Hamiltonianos efetivos usados para a geração de estados de Fock com um protocolo determinístico, no qual estes são parte essencial. No Capítulo 4, temos o estudo numérico sobre emaranhamento entre qubit e oscilador no sistema híbrido, e a análise do papel da temporalidade nos acoplamentos. Por fim, temos no Capítulo 5 uma síntese do conteúdo desenvolvido ao longo da tese, concluindo-a, além de discutir certas perspectivas sobre trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 Eletrodinâmica Quântica de Cavity

Do ponto de vista experimental, os sistemas de cavidades figuram entre os mais importantes para a mecânica quântica. Nestes, partículas passageiras tem seus graus de liberdade eletrônicos acoplados aos do campo de radiação, consistindo no que se chama Eletrodinâmica Quântica de Cavity (EQC, em português e CQED, *cavity QED* – ou simplesmente QED – em inglês). O objetivo do aparato é possibilitar a observação, no regime quântico, da interação entre tais graus de liberdade. Em seu trabalho, Purcell mostra que aumenta-se a probabilidade de emissão espontânea por um fator $3Q\lambda^3/4\pi V$, onde V é o volume da cavidade, Q o seu fator de qualidade, e λ , o comprimento de onda da emissão fotônica. Além disso salientamos também que o deslocamento de níveis energéticos e efeitos quânticos associados à transferência de energia entre radiação e matéria (no caso de graus de liberdade eletrônicos em átomos de dois níveis), dá origem às oscilações de Rabi e ao modelo de Jaynes–Cummings (48-49). A emergência de lasers de frequência ajustável possibilitou a confecção de estados eletrônicos altamente excitados em átomos de Rydberg, cujas características físicas são interessantes para feitura experimental. Tais características são: acoplamento forte com o campo eletromagnético, compatibilidade com cavidades para frequências na faixa de microondas e tempos de vida longos com relação ao decaimento espontâneo. Alguns pontos negativos englobam o uso de comprimentos de onda menores do que os de radiação infravermelha, resultando na influência da radiação térmica de corpo negro sobre os sistemas em estudo, obrigando que empregue-se o resfriamento da cavidade para extinguir tal efeito.

2.2 Oscilador Harmônico: Estados de Fock

Sob o ponto de vista da formulação clássica do problema, trata-se da solução aproximada para a dinâmica de uma partícula de massa m , suficientemente próxima ao ponto de equilíbrio estável de um potencial unidimensional $V(X)$ ao qual está submetida. Fixadas as condições iniciais de posição e momento do oscilador, executará movimento harmônico simples em torno do equilíbrio, limitando-se aos pontos de retorno permitidos. O oscilador harmônico (OH) é frequentemente utilizado para modelar sistemas físicos que sob certas condições podem ser descritos por um Hamiltoniano da forma:

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega_o^2 X^2}{2}, \quad (2.1)$$

onde ω_o é a frequência natural de oscilação.

No contexto da Mecânica Quântica, costuma-se tratar o Hamiltoniano acima utilizando operadores não-hermitianos definidos em termos dos observáveis posição e momento(50).

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m\omega_o}{\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega_o}} P \right] \text{ e} \quad (2.2a)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m\omega_o}{\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega_o}} P \right]. \quad (2.2b)$$

Lembrando que tais observáveis obedecem a regra de comutação $[X, P] = i\hbar$, reescrevemos (2.1) de acordo com as definições acima de a e $a^\dagger$:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_o \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (2.3)$$

Os estados que formam a base diagonal à $\mathcal{H}$ são chamados de estados de número (Fock):

$$\{|n\rangle\}, \quad \langle m | n \rangle = \delta_{m,n} \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

cujo nome provém da interpretação física do espectro de auto-valores de $N = a^\dagger a$ como sendo o número de excitações no sistema(51). Logo, N também é conhecido como operador número. É possível mostrar que formam uma base completa:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathcal{I} \quad (2.5)$$

e que $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ também são auto-estados de N com seus respectivos auto-valores

diminuído e aumentado. Tal resultado implica em

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \text{ e} \quad (2.6a)$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.6b)$$

logo a e $a^\dagger$ recebem os nomes de operador de destruição e criação(52-53).

2.3 Estados atômicos coletivos e emissão espontânea superradiante

Uma amostra contendo N átomos de dois níveis é convenientemente descrita através dos operadores de spin-1/2 $\sigma_x^{(\ell)}$, $\sigma_y^{(\ell)}$ e $\sigma_z^{(\ell)}$, ou pelos operadores de conexão entre níveis $\sigma_\pm^{(\ell)}$ ($\ell = 1, 2, \dots, N$). Tais níveis estão separados pela diferença de energia $\hbar\omega_o$ e se relacionam aos estados atômicos individuais $|e^{(\ell)}\rangle$ e $|g^{(\ell)}\rangle$, respectivamente de maior e menor energia(54). No mais, os operadores associados

$$\sigma_z^{(\ell)} = |e^{(\ell)}\rangle\langle e^{(\ell)}| - |g^{(\ell)}\rangle\langle g^{(\ell)}|, \quad (2.7a)$$

$$\sigma_+^{(\ell)} = |e^{(\ell)}\rangle\langle g^{(\ell)}|, \quad (2.7b)$$

e

$$\sigma_-^{(\ell)} = |g^{(\ell)}\rangle\langle e^{(\ell)}|, \quad (2.7c)$$

atuam apenas no seu devido sub-espaco e obedecem às bem conhecidas regras de comutação $[\sigma_z^{(\ell)}, \sigma_\pm^{(\ell)}] = \pm 2\sigma_\pm^{(\ell)}$ e $[\sigma_+^{(\ell)}, \sigma_-^{(\ell)}] = \sigma_z^{(\ell)}$.

A coletividade inerente à amostra atômica torna-se mais evidente através dos operadores de spin coletivos: J_x , J_y e J_z , definidos de acordo com os relativos operadores de spin-1/2 individuais(55), ou seja:

$$J_x = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N \sigma_x^{(\ell)}, \quad (2.8a)$$

$$J_y = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N \sigma_y^{(\ell)}, \quad (2.8b)$$

e

$$J_z = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N \sigma_z^{(\ell)}. \quad (2.8c)$$

Da mesma maneira, os operadores individuais de conexão entre níveis $\sigma_{\pm}^{(\ell)}$ passam a ter seus correspondentes coletivos:

$$J_{\pm} = \sum_{\ell=1}^N \sigma_{\pm}^{(\ell)}, \quad (2.9)$$

que diferentemente dos primeiros, não só promovem transição atômica no ℓ -ésimo átomo, elevando ou diminuindo a energia da amostra de uma excitação, como também fazem isso de forma a distribuí-la por todos os átomos. As regras de comutação para os novos operadores coletivos: $[J_+, J_-] = J_z$ e $[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$ são facilmente obtidas utilizando as individuais, estabelecidas no início desta sessão.

O intuito por trás da analogia entre átomos e partículas de spin-1/2 é explorar a álgebra de momento angular que decorre do modelo. Para tanto, é útil introduzir o operador de momento angular total

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad (2.10)$$

que por construção, possui comutador nulo com os já conhecidos operadores coletivos J_x , J_y , e J_z . Segue disso que J^2 e J_z , por exemplo, compartilham os mesmos auto-estados $|j, m_j\rangle$, conhecidos como estados de Dicke, com

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad -j \leq m \leq j \quad (2.11)$$

e

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, \quad (2.12)$$

primeiramente apresentados em 1954(44) no tratamento dado à uma amostra atômica, que ao interagir com o campo eletromagnético sob certas condições, emite um pulso de radiação coerente. O auto-valor j é chamado de número de cooperação, devido à sua importância no estudo da emissão cooperativa pelos N átomos da amostra. Para $j = N/2$, o auto-valor m se relaciona à inversão de população atômica, ou seja, a diferença entre o número de átomos excitados e no estado fundamental. Logo, a energia do estado $|j, m\rangle$ é definida por

m . Segue da álgebra de momento angular a forma de atuação dos operadores $J_{\pm}$:

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle, \quad (2.13)$$

que aumenta ou diminui o auto-valor m de uma unidade.

Consideremos agora a análise da taxa de emissão espontânea por uma amostra com N átomos (ω_o) que interage (λ) com um dos modos do campo eletromagnético (ω_c). Todos os átomos se acoplam da mesma maneira com o campo de radiação, uma das características da superradiância. O Hamiltoniano total é dado por:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_o J_z + \hbar\lambda(aJ_+ + a^\dagger J_-), \quad (2.14)$$

onde nota-se a presença dos operadores coletivos discutidos. Quando os N átomos são inicialmente preparados num estado de Dicke $|N/2, m\rangle$, e o campo no vácuo, temos a seguinte taxa de emissão para o fóton:

$$\Gamma = \gamma(N/2 + m)(N/2 - m + 1), \quad (2.15)$$

onde γ é a taxa individual de decaimento atômico(49). A expressão acima mostra que a taxa de decaimento aumenta de um valor igual a $N\gamma$ para $m = N/2$ (todos os átomos excitados), até o valor $N/2(N/2 + 1)\gamma$ para $m = 0$ (metade dos átomos excitados). A partir disso, entendemos que a taxa de emissão aumenta fortemente quando o sistema desce a escada de estados perdendo energia com taxa máxima proporcional a N^2 obtida para $N \gg 1$. No momento em que sistema atinge o nível $m = -N/2$, a taxa de emissão se anula e a emissão cessa.

2.4 Hamiltonianos efetivos em interações dispersivas

Nesta trabalho utilizamos frequentemente o método de obtenção de Hamiltonianos efetivos, proposto por James e Jerke(56). O método consiste na determinação do Hamiltoniano efetivo de sistemas que interagem dispersivamente, lançando mão do processo de iteração da solução formal da equação de Schrodinger, além de aproximações apropriadas, conforme descreveremos a seguir.

Partimos da equação de Schrödinger em uma dada representação:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.16)$$

obtemos a solução formal

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \mathcal{H}(t') |\psi(t')\rangle dt', \quad (2.17)$$

que conduzida de volta à Eq.(2.16), leva à expressão:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H}(t) |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t) \int_0^t \mathcal{H}(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (2.18)$$

Assumindo que o Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$ possua partes altamente oscilantes comparadas à contribuição em segunda ordem, podemos, via aproximação de ondas girantes, desprezar o primeiro termo da Eq.(2.18). Além disso, utilizamos a aproximação Markoviana para retirar o vetor de estado do integrando do segundo termo. Estas aproximações resultam na dinâmica simplificada descrita pela equação

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \approx \mathcal{H}_{ef} |\psi(t)\rangle, \quad (2.19)$$

onde o Hamiltoniano efetivo $\mathcal{H}_{ef}$, é dado por

$$\mathcal{H}_{ef} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t) \int_0^t \mathcal{H}(t') dt'. \quad (2.20)$$

Dado que o Hamiltoniano efetivo (2.20) é frequentemente não hermitiano, a evolução a ele associada será não unitária, fato que ocorre devido à remoção pela média temporal das componentes que apresentam oscilações rápidas. Isto se dá de forma análoga ao que ocorre durante a dedução da equação mestra, quando traçamos os graus de liberdade do reservatório para a descrição de sistemas quânticos abertos. Para reter apenas a dinâmica dos termos hermitianos, devemos realizar a simetrização:

$$\mathcal{H}_{ef}^{(s)} \equiv \frac{(\mathcal{H}_{ef} + \mathcal{H}_{ef}^\dagger)}{2}. \quad (2.21)$$

Para sistemas onde a dependência temporal é harmônica, tal que o Hamiltoniano seja da forma

$$\mathcal{H}(t) = \sum_n (h_n e^{-i\nu_n t} + h_n^\dagger e^{i\nu_n t}), \quad (2.22)$$

podemos obter a seguinte expressão para Hamiltoniano efetivo

$$\mathcal{H}_{ef}^{(s)} \equiv \sum_{m,n} \frac{1}{\hbar \nu_{m,n}} [h_m^\dagger, h_n] e^{i(\nu_m - \nu_n)t}, \quad (2.23)$$

com

$$\frac{1}{v_{m,n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_m} + \frac{1}{v_n} \right). \quad (2.24)$$

Destacamos, por fim, que o Hamiltoniano (2.21) oferece uma boa descrição da dinâmica de sistemas interagindo dispersivamente no regime de acoplamento fraco, para tempos superiores a vários períodos de interação (tempo característicos do sistema). Sob estas condições, os efeitos transientes devido às componentes altamente oscilantes se anulam.

2.5 Sistema quântico sob a ação de um banho térmico (OH)

No estudo de fenômenos quânticos que envolvem a troca de energia entre sistema de interesse e o ambiente, um banho térmico composto por infinitos osciladores harmônicos desacoplados é o modelo mais utilizado. Logo, o Hamiltoniano do banho é descrito por

$$\mathcal{H}_B = \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad [b_j, b_k^\dagger] = \delta_{j,k} \quad (2.25)$$

onde os operadores b_k e $b_k^\dagger$ são responsáveis respectivamente por destruir e criar uma excitação com energia $\hbar\omega_k$, enquanto o operador $b_k^\dagger b_k$ conta o número de excitações com a mesma energia(57).

Um oscilador harmônico quântico (OH), discutido com detalhes na seção (2.2), interage com os infinitos modos de um banho térmico da seguinte forma: a cada excitação destruída no sistema de interesse, outra é criada em cada modo do banho, e vice-versa. Portanto, o Hamiltoniano a ser estudado é

$$\mathcal{H} = \underbrace{\hbar\omega_o a^\dagger a + \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k}_{\mathcal{H}_o: \text{evolução livre}} + \underbrace{\hbar \sum_k g_k (a b_k^\dagger + a^\dagger b_k)}_{V: \text{interação entre o OH e o banho}}, \quad (2.26)$$

onde g_k é a constante de acoplamento entre o OH e o k -ésimo modo do banho(52, 58).

É conveniente tratar Hamiltonianos similares à Eq.(2.26) utilizando a representação de interação(51). Para isso, primeiramente definimos o operador unitário

$$U_o(t) = e^{-i\mathcal{H}_o t/\hbar}. \quad U_o^\dagger(t)U_o(t) = \mathcal{I} \quad (2.27)$$

A mudança de representação faz com que nos preocupemos somente com a interação entre o OH e o banho, além de preservar a equação dinâmica para o operador densidade:

$$\frac{d\rho^{(l)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}^{(l)}(t), \rho^{(l)}(t)], \quad (2.28)$$

onde $\rho^{(l)}(t) = U_o^\dagger(t)\rho(t)U_o(t)$ e $\mathcal{H}^{(l)}(t) = U_o^\dagger(t)VU_o(t)$ são respectivamente o operador densidade e o Hamiltoniano escritos na nova representação. Com o auxílio do teorema de Baker-Hausdorff-Campbell encontramos $\mathcal{H}^{(l)}(t)$ para o nosso problema:

$$\mathcal{H}^{(l)}(t) = \hbar [a\Gamma^\dagger(t) + a^\dagger\Gamma(t)]. \quad \Gamma(t) = \sum_k g_k b_k e^{i(\omega_o - \omega_k)t} \quad (2.29)$$

2.5.1 A hipótese de acoplamento fraco entre o sistema de interesse e o banho térmico

O número de graus de liberdade do banho é muito maior em comparação ao sistema de interesse (OH), haja vista que o primeiro possui uma coleção infinita de osciladores. Assim, é natural imaginarmos que a informação sobre o banho contida em $\rho^{(l)}(t)$ permaneça inalterada durante a evolução dinâmica do conjunto (OH + banho):

$$\rho^{(l)}(t) \approx \rho_S^{(l)}(t) \otimes \rho_B. \quad \rho_B = \frac{e^{-\mathcal{H}_B/k_B T}}{\text{Tr}_B \{e^{-\mathcal{H}_B/k_B T}\}} \quad (2.30)$$

Esta aproximação é também conhecida como: hipótese de acoplamento fraco sistema-banho(57).

Antes de prosseguirmos, lembremos que buscamos por uma equação dinâmica para o operador densidade reduzido, obtido facilmente através de $\rho_S^{(l)}(t) = \text{Tr}_B\{\rho^{(l)}(t)\}$ (59). A operação de traço parcial sobre os graus de liberdade do banho contabiliza os efeitos do mesmo sobre o sistema de interesse (OH), porém o Hamiltoniano que nos interessa (2.29) não contribui em primeira ordem para a dinâmica reduzida: $\langle \mathcal{H}^{(l)}(t) \rangle_B = \text{Tr}_B\{\mathcal{H}^{(l)}(t)\rho_B\} = 0$. Este aparente entrave é resolvido expandindo iterativamente (2.28) até a segunda ordem:

$$\frac{d\rho^{(l)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}^{(l)}(t), \rho^{(l)}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 [\mathcal{H}^{(l)}(t), [\mathcal{H}^{(l)}(t_1), \rho^{(l)}(t_1)]] \quad (2.31)$$

Como já esperado, haverá somente contribuição do segundo termo do lado direito:

$$\frac{d\rho_S^{(l)}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \left\{ [\mathcal{H}^{(l)}(t), [\mathcal{H}^{(l)}(t_1), \rho_S^{(l)}(t_1) \otimes \rho_B]] \right\}. \quad (2.32)$$

Ao se calcular o traço parcial sobre duplo comutador no integrando de (2.31), nota-se o surgimento das correlações $\langle \Gamma(t)\Gamma(t_1) \rangle_B$, $\langle \Gamma(t)\Gamma^\dagger(t_1) \rangle_B$, $\langle \Gamma^\dagger(t)\Gamma(t_1) \rangle_B$, $\langle \Gamma^\dagger(t)\Gamma^\dagger(t_1) \rangle_B$ e seus respectivos complexos conjugados. Como exemplo, vamos aqui mostrar que $\langle b_j b_k \rangle_B$ e

obviamente $\langle b_j^\dagger b_k^\dagger \rangle_{\mathcal{B}}$ são identicamente nulos:

$$\begin{aligned}
 \langle b_j b_k \rangle_{\mathcal{B}} &= \text{Tr}_{\mathcal{B}}\{b_j b_k \rho_{\mathcal{B}}\} \\
 &= \sum_{\{n\}} \langle n_1, \dots, n_j, n_k, \dots | b_j b_k \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_j \otimes \rho_k \otimes \dots | n_1, \dots, n_j, n_k, \dots \rangle \\
 &= \sum_{n_j, n_k} \rho(n_j) \rho(n_k) \langle n_j, n_k | b_j b_k | n_j, n_k \rangle \\
 &= 0 \quad \forall (i, j),
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

o que nos leva à: $\langle \Gamma(t) \Gamma(t_1) \rangle_{\mathcal{B}} = \langle \Gamma^\dagger(t) \Gamma^\dagger(t_1) \rangle_{\mathcal{B}} = 0$. Prosseguindo com os cálculos, temos:

$$\begin{aligned}
 \langle b_j^\dagger b_k \rangle_{\mathcal{B}} &= \text{Tr}_{\mathcal{B}}\{b_j^\dagger b_k \rho_{\mathcal{B}}\} \\
 &= \sum_{\{n\}} \langle n_1, \dots, n_j, n_k, \dots | b_j^\dagger b_k \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_j \otimes \rho_k \otimes \dots | n_1, \dots, n_j, n_k, \dots \rangle \\
 &= \sum_{n_j, n_k} \rho(n_j) \rho(n_k) \langle n_j, n_k | b_j^\dagger b_k | n_j, n_k \rangle \\
 &= \bar{n}_k \delta_{j,k},
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $\bar{n}_k$ é o número médio de excitações do k -ésimo modo do banho, descrito pela distribuição de Bose-Einstein(52,58). Portanto:

$$\langle \Gamma(t) \Gamma^\dagger(t_1) \rangle_{\mathcal{B}} = \sum_k g_k^2 e^{i(\omega_o - \omega_k)(t - t_1)} (\bar{n}_k + 1) \text{ e} \tag{2.35a}$$

$$\langle \Gamma^\dagger(t) \Gamma(t_1) \rangle_{\mathcal{B}} = \sum_k g_k^2 e^{-i(\omega_o - \omega_k)(t - t_1)} \bar{n}_k. \tag{2.35b}$$

2.5.2 A aproximação de Born-Markov e a equação mestra quântica na forma de Lindblad

Os processos chamados markovianos são caracterizados pela total ausência de memória(60). Classicamente, apenas é necessário o conhecimento da distribuição inicial de probabilidades para que possamos prevê-la em tempos futuros. Em analogia com a equação de Fokker-Planck, desejamos que a equação mestra quântica para o sistema de interesse (OH) possua as mesmas características markovianas. Para que a Eq.(2.32) se transforme em uma equação somente diferencial, faremos a seguinte hipótese: $\rho_S^{(l)}(t_1)$ não

sofre mudança significativa durante o intervalo de tempo em que as funções de correlação do banho contribuem para o integrando. Neste caso, podemos fazer a mudança:

$$\rho_S^{(l)}(t_1) \longrightarrow \rho_S^{(l)}(t), \quad (2.36)$$

conhecida como aproximação de Born-Markov(57).

Por se tratar de um modelo fenomenológico, no sentido que o banho (coleção de osciladores harmônicos independentes) não é obtido a partir de primeiros princípios, é impossível ter acesso às informações como: os valores das constantes de acoplamento g_k ou a frequência ω_k de cada modo do banho. Apesar disso, podemos fazer algumas considerações sobre a distribuição do espectro. Admitindo que as frequências do banho sejam muito próximas umas das outras, tomamos o limite para o contínuo:

$$\sum_k \{\dots\} \longrightarrow \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sigma(\omega) \{\dots\}, \quad (2.37)$$

onde $\sigma(\omega)$ é a densidade espectral do banho. Geralmente, a literatura apresenta banhos térmicos de densidade espectral constante. Tal escolha torna a ação do banho uniforme para qualquer faixa de frequências, o que significa dizer que o mesmo injeta ruído térmico branco sobre o sistema de interesse (OH).

A passagem para o contínuo na Eq.(2.37) tem como consequência imediata a solução analítica das integrais relacionadas às funções de correlação do banho dadas nas Eqs. (2.35a) e (2.35b). Particularmente para $\langle \Gamma^\dagger(t) \Gamma(t_1) \rangle_B$ temos:

$$\int_0^t dt_1 \langle \Gamma^\dagger(t) \Gamma(t_1) \rangle_B = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sigma(\omega) g^2(\omega) e^{-i(\omega_o - \omega)(t - t_1)} \bar{n}(\omega). \quad (2.38)$$

A presença da exponencial oscilante no integrando faz com que a contribuição das funções de ω seja somente relevante para $\omega \sim \omega_0$. Podemos então fatorar $\sigma(\omega_0) g^2(\omega_0) \bar{n}(\omega_0)$ e estender o limite inferior de integração em ω ao infinito negativo, encontrando um resultado aproximado para a Eq.(2.38):

$$\int_0^t dt_1 \langle \Gamma^\dagger(t) \Gamma(t_1) \rangle_B \approx \frac{\sigma(\omega_0) g^2(\omega_0) \bar{n}(\omega_0)}{2}. \quad (2.39)$$

O procedimento para $\langle \Gamma(t) \Gamma^\dagger(t_1) \rangle_B$ é análogo ao apresentado.

Retornando para a representação de Schrödinger(51), obtém-se finalmente a equação mestra quântica na forma de Lindblad(57) para o sistema de interesse (OH):

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_S(t)}{dt} = & -i\omega_0[a^\dagger a, \rho_S(t)] \\
& + \frac{\kappa[\bar{n}(\omega_0) + 1]}{2}[2a\rho_S(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho_S(t) - \rho_S(t)a^\dagger a] \\
& + \frac{\kappa\bar{n}(\omega_0)}{2}[2a^\dagger \rho_S(t)a - a a^\dagger \rho_S(t) - \rho_S(t)a a^\dagger],
\end{aligned} \tag{2.40}$$

onde $\kappa = \sigma(\omega_0)g^2(\omega_0)$ é a taxa de atenuação devido às interações microscópicas com o banho e

$$\bar{n}(\omega_0) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}} - 1}. \tag{2.41}$$

O segundo e o terceiro termo do lado direito da Eq.(2.40) estão respectivamente relacionados aos fenômenos de emissão (estimulada e espontânea) e absorção, já que mesmo na ausência de excitações térmicas ($T = 0$), o sistema de interesse (OH) continua sofrendo a ação do banho(52). A dedução é análoga para demais sistemas físicos (qubits e amostras atômicas), possuindo assim, equações mestras similares.

2.6 Caracterizando estados quânticos: Fidelidade e Pureza

2.6.1 Fidelidade

Na teoria da informação quântica, fidelidade(6) é uma medida da proximidade de dois estados quânticos. A fidelidade não é uma métrica no espaço dos operadores densidade, mas pode ser usada para definir a métrica de Bures, uma medida de distância infinitesimal entre estados quânticos. A distância de Bures que decorre de tal métrica é dada por:

$$D_B(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2 \left(1 - \text{Tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right\} \right)}. \tag{2.42}$$

Considerando dois estados ρ e σ , define-se fidelidade por:

$$\mathcal{F}(\rho, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}}. \tag{2.43}$$

Particularmente, quando ρ e σ são ambos puros, temos: $\mathcal{F}(\rho, \sigma) = |\langle \psi_\rho | \psi_\sigma \rangle|$.

Algumas das propriedades importantes da fidelidade são:

- Simetria. $\mathcal{F}(\rho, \sigma) = \mathcal{F}(\sigma, \rho)$.

- Valores limitados. Para qualquer ρ e σ , $0 \leq \mathcal{F}(\rho, \sigma) \leq 1$ e $\mathcal{F}(\rho, \rho) = 1$.
- Preserva-se sob transformações unitárias, i.e., $\mathcal{F}(\rho, \sigma) = \mathcal{F}(U\rho U^{-1}, U\sigma U^{-1})$ para qualquer operador unitário U .

Note que a fidelidade quase comporta-se como uma métrica, o que pode ser visto e tornado útil ao estabelecer que $\cos \theta_{\rho\sigma} = \mathcal{F}(\rho, \sigma)$, como o ângulo entre os estados ρ e σ . Usando as propriedades acima, vê-se que $\theta_{\rho\sigma}$ é não-negativo, simétrico em suas entradas, e é igual a zero apenas quando $\rho = \sigma$. Adicionalmente, pode-se provar que $\theta_{\rho\sigma}$ obedece à desigualdade triangular sendo, portanto, uma métrica no espaço de estados.

2.6.2 Pureza

A pureza de um estado quântico é definida por $\text{Tr}\rho^2$, onde ρ é o operador densidade. É uma grandeza que oferece informações sobre quanto um estado quântico é misto, o que é muito relevante devido à associação com os efeitos do ambiente. Um estado quântico puro pode ser representado como um único vetor $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert. No formalismo do operador densidade, um estado puro é representado por $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e um estado misto (que não pode ser descrito por um único vetor de estado) é dado em termos duma combinação linear de estados puros(61):

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.44)$$

com

$$\sum_i p_i = 1. \quad (2.45)$$

A pureza de um estado quântico normalizado satisfaz $1/d \leq \text{Tr}\rho^2 \leq 1$, onde d é a dimensão do espaço de Hilbert referente. Se ρ é um estado puro, então $\text{Tr}\rho^2 = \text{Tr}\rho = 1$. O limite inferior é obtido pelo estado completamente misturado, representado pela matriz $\mathcal{I}_d/d$. De fato, a pureza é $1/d$ quando o estado é completamente misturado, ou seja:

$$\rho = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \frac{\mathcal{I}_d}{d} \quad (2.46)$$

na qual $|\phi_i\rangle$ constituem uma base ortonormal no espaço de Hilbert.

É adequado pensarmos num sistema de dois níveis (qubit) através da seguinte representação geométrica:

Figura 2.1 – Sistema de dois níveis (qubit) representado na esfera de Bloch.
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle, \quad (2.47)$$

onde θ e φ são números reais que definem um ponto numa esfera tridimensional unitária, como mostra a Fig.2.1, enquanto $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ são os estados do sistema. Esta esfera é frequentemente chamada de esfera de Bloch (6), provendo um meio útil para a visualização do estado de um único qubit. Estados puros são representados por um ponto na superfície da esfera de Bloch, enquanto estados mistos encontram-se em seu interior. Neste caso, a pureza de um estado pode ser visualizada como o grau de proximidade à superfície da esfera de Bloch. Por exemplo, o estado completamente misturado tem o centro da esfera como a sua localização. Uma intuição gráfica de pureza pode ser obtida por meio da conexão de ρ esfera de Bloch. Utilizando o fato de que qualquer estado de um sistema de dois níveis pode ser representado por

$$\rho = \frac{\mathcal{I} + \vec{d} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad (2.48)$$

onde $\vec{d}$ é o vetor que representa o estado quântico (sobre ou dentro da esfera), $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ é o vetor cujos elementos são as matrizes de Pauli, e por fim, $\mathcal{I}$ é a matriz identidade. A partir desta definição, temos, imediatamente

$$\text{Tr}\rho^2 = \frac{1 + |\vec{d}|^2}{2}. \quad (2.49)$$

CAPÍTULO 3

ESTUDO DE INTERAÇÕES COLETIVAS ÁTOMO-CAMPO PARA OBTENÇÃO DE ESTADOS DE FOCK VIA HAMILTONIANOS SELETIVOS

Neste capítulo, utilizaremos uma família de Hamiltonianos coletivos seletivos para produzir estados de Fock(51) de maneira determinística. Protocolos de alta eficiência são de importância absoluta para o campo da informação quântica(6).

3.1 Família de Hamiltonianos coletivos para processos de interação radiação-matéria

Uma vez enfatizado que o protocolo para a derivação de interações coletivas do tipo radiação-matéria aplica-se em cavidades e eletrodinâmica quântica de circuitos, assim como íons armadilhados, comecemos por considerar o Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) = & \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_e \sum_{\ell=1}^N \sigma_{ee}^{(\ell)} + \hbar\omega_i \sum_{\ell=1}^N \sigma_{ii}^{(\ell)} + \hbar \sum_{\ell=1}^N \left(\lambda a \sigma_{ig}^{(\ell)} + \lambda^* a^\dagger \sigma_{gi}^{(\ell)} \right) \\ & + \hbar \sum_{\ell=1}^N \left(\Omega_1 \sigma_{ie}^{(\ell)} e^{-i\omega_1 t} + \Omega_1^* \sigma_{ei}^{(\ell)} e^{i\omega_1 t} \right) + \hbar \sum_{\ell=1}^N \left(\Omega_2 \sigma_{ig}^{(\ell)} e^{-i\omega_2 t} + \Omega_2^* \sigma_{gi}^{(\ell)} e^{i\omega_2 t} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

que descreve uma amostra de N átomos sob a ação de um modo quântico de frequência ω_c e dois campos clássicos de frequências ω_1 e ω_2 . Aqui, $a^{(\dagger)}$ remete ao operador de aniquilação (criação) do campo quantizado e $\sigma_{rs}^{(\ell)} = |r^{(\ell)}\rangle\langle s^{(\ell)}|$ ($r, s = g, e, i$) às transições

entre os estados atômicos do ℓ -ésimo átomo: $|g^{(\ell)}\rangle$, $|e^{(\ell)}\rangle$ e $|i^{(\ell)}\rangle$, dispostos em ordem crescente de energia. Além da transição dipolar $g \leftrightarrow i$ induzida pelo campo quântico, com acoplamento λ e dessintonia $\delta = \omega_c - \omega_i$, tem-se as demais $e \leftrightarrow i$ e $g \leftrightarrow i$ atribuídas aos campos clássicos com os respectivos acoplamentos Ω_1 e Ω_2 , e dessintonias adjuntas $\Delta_1 = \omega_1 - (\omega_i - \omega_e)$ e $\Delta_2 = \omega_i - \omega_2$ (ver Fig.3.1). Após a mudança para a representação de interação:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I(t) = & \hbar \sum_{\ell=1}^N \left(\lambda a \sigma_{ig}^{(\ell)} e^{-i\delta t} + \lambda^* a^\dagger \sigma_{gi}^{(\ell)} e^{i\delta t} \right) + \hbar \sum_{\ell=1}^N \left(\Omega_1 \sigma_{ie}^{(\ell)} e^{-i\Delta_1 t} + \Omega_1^* \sigma_{ei}^{(\ell)} e^{i\Delta_1 t} \right) \\ & + \hbar \sum_{\ell=1}^N \left(\Omega_2^* \sigma_{gi}^{(\ell)} e^{-i\Delta_2 t} + \Omega_2 \sigma_{ig}^{(\ell)} e^{i\Delta_2 t} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

todos os termos presentes na Eq.(3.2) são altamente oscilantes, e permitem uma boa aproximação em segunda ordem que mediante as condições: $\delta \gg \sqrt{\hbar}|\lambda|$, $\Delta_1 = \delta \gg |\Omega_1|$, e $\Delta_2 \gg |\Omega_2|$, leva ao Hamiltoniano efetivo(56). Este, torna-se dependente do tempo após uma nova mudança de representação, definida por

$$U_1(t) = \exp \left\{ -i \left[\frac{N|\lambda|^2}{2\delta} a^\dagger a + \left(\frac{|\Omega_1|^2}{\delta} + \frac{|\Omega_2|^2}{\Delta_2} \right) J_z - \frac{|\lambda|^2}{\delta} a^\dagger a J_z \right] t \right\}. \quad (3.3)$$

Portanto, calculamos $\mathcal{H}_{ef}(t) = U_1^\dagger(t) \mathcal{H}_{ef}^{(s)} U_1(t)$, que resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ef}(t) = & \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j-1} \left(\lambda_{n,m} |n-1\rangle\langle n| \otimes |j, m+1\rangle\langle j, m| e^{-i\omega_{n,m}t} \right. \\ & \left. + \lambda_{n,m}^* |n\rangle\langle n-1| \otimes |j, m\rangle\langle j, m+1| e^{i\omega_{n,m}t} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde

$$\lambda_{n,m} = \frac{\lambda \Omega_1^*}{\delta} \sqrt{n(j-m)(j+m+1)} \quad (3.5a)$$

e

$$\omega_{n,m} = \frac{|\lambda|^2}{\delta} \left(n - m + \frac{N}{2} - 1 \right) - \frac{|\Omega_1|^2}{\delta} - \frac{|\Omega_2|^2}{\Delta_2}, \quad (3.5b)$$

com $|m| \leq j \leq N/2$ (44, 46). Os estados atômicos $|j, m\rangle$ já foram definidos anteriormente, vide Eqs. (2.11) e (2.12).

No subsequente desenvolvimento, nos restringiremos a estados coletivos de momento

Figura 3.1 – Esquema de níveis atômicos com $|g\rangle$, $|e\rangle$ e $|i\rangle$ ascendentes energeticamente. As transições não-ressonantes mediadas pelos campos quântico, λ , e clássicos, Ω_1 e Ω_2 , Como mostrado no diagrama. As dessintonias são dadas por $\delta = \omega_c - \omega_i$, $\Delta_1 = \omega_1 - (\omega_i - \omega_e)$ e $\Delta_2 = \omega_i - \omega_2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

angular total $j = N/2$, caracterizados pelas maiores taxas de emissão entre os estados de Dicke. Torna-se assim conveniente a definição da matriz

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{1,-N/2} & \lambda_{1,-N/2+1} & \cdots & \lambda_{1,N/2-2} & \lambda_{1,N/2-1} \\ \lambda_{2,-N/2} & \lambda_{2,-N/2+1} & \cdots & \lambda_{2,N/2-2} & \lambda_{2,N/2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{N,-N/2} & \lambda_{N,-N/2+1} & \cdots & \lambda_{N,N/2-2} & \lambda_{N,N/2-1} \\ \lambda_{N+1,-N/2} & \lambda_{N+1,-N/2+1} & \cdots & \lambda_{N+1,N/2-2} & \lambda_{N+1,N/2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad (3.6)$$

cujos elementos são os acoplamentos do Hamiltoniano efetivo mostrado na Eq.(3.4). Evidentemente, Λ reduz-se à uma matriz finita $n_{\text{máx}} \times N$ ($1 \leq n \leq n_{\text{máx}}$) desde que a probabilidade de ocupação do n -ésimo estado de Fock do campo seja nula para $n > n_{\text{máx}}$, situação esta satisfeita para estados do sistema conjunto amostra-campo nos quais a excitação total não excede $n_{\text{máx}}$. Para o caso no qual o campo encontra-se inicialmente no estado de vácuo e a amostra no estado em que todos os átomos estão excitados, $|N/2, N/2\rangle$, Λ será uma matriz quadrada de dimensão $N \times N$. Os inteiros $k = n - m$ são introduzidos devido ao papel que desempenham rotulando as diagonais da matriz acima, além de auxiliarem no ajuste dos parâmetros que conduzem à $\omega_{n',m'} = 0$ para um valor fixo $k = k'$, onde k' é relativo ao conjunto de pares degenerados (n', m') . Imediatamente, é utilizada

a aproximação de onda girante com o objetivo de assegurar

$$\left| \frac{\lambda_{n,m}}{\omega_{n,m}} \right| \ll 1 \quad (3.7)$$

para $k \neq k'$, e assim derivar uma família de interações coletivas dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{k'} = & \hbar \sum_{n=1}^{n_{\text{máx}}} \left(\lambda_{n,n-k'} |n-1\rangle\langle n| \otimes |N/2, n-k'+1\rangle\langle N/2, n-k'| \right. \\ & \left. + \lambda_{n,n-k'}^* |n\rangle\langle n-1| \otimes |N/2, n-k'\rangle\langle N/2, n-k'+1| \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

com k' variando de $-N/2+2$ (quando $n=1$ e $m=N/2-1$) até $N/2+2$ (quando $n=n_{\text{máx}}$, o número máximo de fótons no campo, e $m=N/2$). Segue-se disso que para $k'=N/2+1$, o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{N/2+1}$ (associado à diagonal principal da matriz Λ) acopla dois a dois todos os estados de Dicke vizinhos, de $|N/2, N/2\rangle$ à $|N/2, -N/2\rangle$, o que também é observado nos Hamiltonianos referentes às diagonais abaixo da principal ($k' > N/2+1$). Todavia, aqueles associados às diagonais acima da principal excluem algumas transições entre estados de Dicke. Começemos pelo Hamiltoniano $\mathcal{H}_{N/2}$ (associado à primeira diagonal acima da principal), que exclui $|N/2, -N/2\rangle$ da escada de estados, enquanto o Hamiltoniano seguinte $\mathcal{H}_{N/2-1}$ exclui $|N/2, -N/2+1\rangle$ e $|N/2, -N/2\rangle$ (os dois estados com o menor número de excitações), e assim até $\mathcal{H}_{-N/2+2}$ que exclui todos os demais estados com exceção de $|N/2, N/2\rangle$ e $|N/2, N/2-1\rangle$, os dois mais excitados.

3.2 Validade das interações efetivas e magnitude do número de átomos na amostra

Para fins de validação da aproximação que leva aos Hamiltonianos $\mathcal{H}_{k'}$ exibidos na Eq.(3.8), notemos primeiramente que as frequências definidas na Eq.(3.5b) são reduzidas a

$$\omega_{n,m} = \frac{|\lambda|^2}{\delta} (n - m - k') \quad (3.9)$$

após a imposição de $\omega_{n,m} = 0$ para um valor de k' fixo, ocasionando portanto o vínculo entre os parâmetros (vide Eq.3.5b)

$$\frac{|\lambda|^2}{\delta} \left(k' + \frac{N}{2} - 1 \right) = \frac{|\Omega_1|^2}{\delta} + \frac{|\Omega_2|^2}{\Delta_2}, \quad (3.10)$$

e para $k \neq k'$, a relação

$$\left| \frac{\lambda_{n,m}}{\omega_{n,m}} \right| = \left| \frac{\Omega_1}{\lambda} \right| \sqrt{n(N/2 - m)(N/2 + m + 1)} / |n - m - k'|. \quad (3.11)$$

Em seguida, fixando o número de átomos N e variando n e m , calculamos numericamente as razões indicadas pela Eq.(3.11) (em unidades de $|\Omega_1/\lambda|$) para encontrar o valor máximo $|\lambda_{\bar{n},\bar{m}}/\omega_{\bar{n},\bar{m}}|$ (para um dado par $\bar{n}$ e $\bar{m}$), o qual exigimos que satisfaça, sob a aproximação de onda girante e para $k \neq k'$, a condição

$$\left| \frac{\lambda_{\bar{n},\bar{m}}}{\omega_{\bar{n},\bar{m}}} \right| \ll 1, \quad (3.12)$$

que culmina na família de Hamiltonianos efetivos já apresentada na Eq.(3.8). Mediante a investigação dos dados numéricos, encontramos que a extremalização alcançada ocorre para $\bar{k} = k' + 1$, visto que a razão $|\lambda_{n,m}/\omega_{n,m}|$ acima decai monotonicamente com n e m . Na Fig.3.2 traçamos, contando com uma escala log-log, as razões $|\lambda_{\bar{n},\bar{m}}/\omega_{\bar{n},\bar{m}}|$ contra N para cinco diferentes diagonais: as três primeiras diagonais ($k' = -N/2 + 2, -N/2 + 3, -N/2 + 4$), a primeira diagonal acima da principal ($k' = N/2$), e a principal ($k' = N/2 + 1$). Em vista disso, uma regressão linear aplicada às curvas fornece a forma funcional

$$\left| \frac{\lambda_{\bar{n},\bar{m}}}{\omega_{\bar{n},\bar{m}}} \right| = \left| \frac{\Omega_1}{\lambda} \right| N^r e^s \ll 1, \quad (3.13)$$

r e s sendo os respectivos coeficientes angular e linear de cada reta associada a uma diagonal (ver Tabela). Da Eq.(3.13), verifica-se que a razão $|\Omega_1/\lambda|$ estabelece o número máximo de átomos que viabiliza os Hamiltonianos efetivos da Eq.(3.8).

Figura 3.2 – Realização em amostras distintas da aproximação de onda girante exigida pela Eq.(3.12): $|\lambda_{\bar{n}, \bar{m}}/\omega_{\bar{n}, \bar{m}}|$ em função de N . O eixo vertical encontra-se em unidades de $|\Omega_1/\lambda|$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3.1 – Parâmetros do ajuste linear aplicado às curvas $|\lambda_{\bar{n}, \bar{m}}/\omega_{\bar{n}, \bar{m}}|$ contra N mostradas na Fig.3.2, em concordância com a dependência funcional da Eq.(3.13).

k'	r	s
$-N/2 + 2$	0.49999999999999045	0.3465735902800078
$-N/2 + 3$	0.5300446741147407	0.5621432207379463
$-N/2 + 4$	0.5345957034090256	0.7469649506577375
$N/2$	1.4134694948193482	-0.5782230946656411
$N/2 + 1$	1.3794606381255272	-0.4271465518285934

Fonte: Elaborada pelo autor.

Estipulado $|\lambda_{\bar{n}, \bar{m}}/\omega_{\bar{n}, \bar{m}}| = 0.1$, analisemos a magnitude máxima de N para alguns valores de $|\Omega_1/\lambda|$. Conforme mostrado nas curvas da Fig.3.2, apoiadas pelos parâmetros na Tabela, valores de $|\Omega_1/\lambda|$ próximos à unidade comprometem a execução da família de Hamiltonianos em questão. Mesmo $|\Omega_1/\lambda| \approx 0.1$ é ineficaz para uma amostra ($N \geq 2$). Desse modo, a existência das interações efetivas para uma quantidade razoável de átomos está ligada à $|\Omega_1/\lambda| \approx 0.01$. Quanto mais numerosa a amostra a qual deseja-se a implementar $\mathcal{H}_{k'}$, ainda menor será a razão $|\Omega_1/\lambda|$.

Ao fim da seção 3.1, apresentamos aos Hamiltonianos efetivos $\mathcal{H}_{k'}$, bem como às interações seletivas entre estados de Dicke numa breve discussão qualitativa. A potencial

complexidade destes Hamiltonianos pede uma maior atenção. Para exemplificar, comece-mos pelo membro mais simples da família ligado à $k' = -N/2 + 1$, ou seja, à primeira diagonal da matriz Λ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-N/2+1} = & \hbar(\lambda_{1,N/2-1} |0\rangle\langle 1| \otimes |N/2, N/2\rangle\langle N/2, N/2-1| \\ & + \lambda_{1,N/2-1}^* |1\rangle\langle 0| \otimes |N/2, N/2-1\rangle\langle N/2, N/2|), \end{aligned} \quad (3.14)$$

com $\lambda_{1,N/2-1} = \lambda\Omega_1^*\sqrt{N}/\delta$. A Eq.(3.14) prevê dinâmica excludente para quaisquer outros estados diferentes de $|0\rangle|N/2, N/2\rangle$ e $|1\rangle|N/2, N/2-1\rangle$, com escala de tempo ditada por $2\pi/|\lambda_{1,N/2-1}|$. Neste ponto, é obrigatória a realização de testes computacionais a fim de comprovar as aproximações que dão ao Hamiltoniano original da Eq.(3.2) o comportamento efetivo. Um código em *Python* foi escrito visando a solução numérica da equação de Schrödinger, tanto para a dinâmica original, mediada por $\mathcal{H}(t)$, quanto para aquelas relacionadas aos Hamiltonianos efetivos $\mathcal{H}_{k'}$. Neste, fizemos uso de bibliotecas presentes no *QuTiP (Quantum Toolbox in Python)*. A Fig.3.3 mostra o mais contrastante cenário de preparação inicial para $\mathcal{H}_{-N/2+1}$: $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|N/2, N/2\rangle$. Diferentemente do usual modelo de Tavis-Cummings, onde uma amostra atômica de dois níveis interage com o campo de radiação, as excitações presentes nos átomos não se distribuem entre os estados de Fock, restringindo as populações do campo entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$. O teste é realizado durante o período $2\pi/|\lambda_{1,3/2}|$ utilizando como parâmetros $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 30.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| \approx 0.99$. A diagonal seguinte, correspondente à $k' = -N/2 + 2$, é a escolha natural para a continuidade do estudo. O Hamiltoniano que a representa

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-N/2+2} = & \hbar(\lambda_{1,N/2-2} |0\rangle\langle 1| \otimes |N/2, N/2-1\rangle\langle N/2, N/2-2| \\ & + \lambda_{1,N/2-2}^* |1\rangle\langle 0| \otimes |N/2, N/2-2\rangle\langle N/2, N/2-1|) \\ & + \hbar(\lambda_{2,N/2-1} |1\rangle\langle 2| \otimes |N/2, N/2\rangle\langle N/2, N/2-1| \\ & + \lambda_{2,N/2-1}^* |2\rangle\langle 1| \otimes |N/2, N/2-1\rangle\langle N/2, N/2|) \end{aligned} \quad (3.15)$$

supera o anterior em diversidade de interações, apresentando acoplamentos efetivos $\lambda_{1,N/2-2} = \lambda\Omega_1^*\sqrt{2(N-1)}/\delta$ e $\lambda_{2,N/2-1} = \lambda\Omega_1^*\sqrt{2N}/\delta$. Bem como o seu predecessor, também é dinamicamente limitado, mais precisamente a dois conjuntos de estados. O primeiro, composto por $|0\rangle|N/2, N/2-1\rangle$ e $|1\rangle|N/2, N/2-2\rangle$, relaciona-se à interação cuja força é ditada por $\lambda_{1,N/2-2}$. De modo igual, o segundo conjunto contém $|1\rangle|N/2, N/2\rangle$ e $|2\rangle|N/2, N/2-1\rangle$,

Figura 3.3 – Dinâmica populacional entre os estados restritos de $\mathcal{H}_{-N/2+1}$: $|0\rangle |N/2, N/2\rangle$ e $|1\rangle |N/2, N/2 - 1\rangle$, para uma amostra com 5 átomos ($N = 5$). O sistema é inicialmente preparado em $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |5/2, 5/2\rangle$, e evolui segundo o Hamiltoniano da Eq.(3.14). As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. Parâmetros: $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 30.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| \approx 0.99$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

e detém o seu particular acoplamento efetivo $\lambda_{2,N/2-1}$. A verificação isolada de um ou de outro regime requer preparações iniciais consistentes com o conjunto em análise, uma vez que

$$\mathcal{H}_{-N/2+2} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{1,N/2-2} & 0 & 0 \\ \lambda_{1,N/2-2}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{2,N/2-1} \\ 0 & 0 & \lambda_{2,N/2-1}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

é bloco-diagonalizável quando representado matricialmente através dos quatro estados em destaque. As escolhas de $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |N/2, N/2 - 1\rangle$ e $|\psi(0)\rangle = |1\rangle |N/2, N/2\rangle$ são suficientes para garantir oscilações coerentes de períodos associados $2\pi/|\lambda_{1,N/2-2}|$ e $2\pi/|\lambda_{2,N/2-1}|$, confinadas em seu conjunto de estados (ver Fig.3.4). Os parâmetros utilizados na simulação: $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 30.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| \approx 1.99$ se mostraram suficientes para ambos os testes. Os estados não pertencentes à família analisada apresentam populações $\sim 10^{-14}$, ou seja, desprezíveis.

Apenas por matéria de completeza, é interessante verificar o papel exercido pela incorporação de termos não dinâmicos. Em caso de preparação inicial em $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle |\theta, \varphi\rangle$, com $|\alpha\rangle$ e $|\theta, \varphi\rangle$ sendo os devidos estados coerentes do campo e da amostra atômica, tere-

Figura 3.4 – Para uma amostra com 5 átomos ($N = 5$), mostramos a dinâmica populacional entre os estados restritos de $\mathcal{H}_{-N/2+2}$: $|0\rangle |N/2, N/2 - 1\rangle$, $|1\rangle |N/2, N/2 - 2\rangle$, $|1\rangle |N/2, N/2\rangle$ e $|2\rangle |N/2, N/2 - 1\rangle$. O sistema é inicialmente preparado em (a) $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |5/2, 3/2\rangle$ (b) $|\psi(0)\rangle = |1\rangle |5/2, 5/2\rangle$, e evolui segundo o Hamiltoniano da Eq.(3.15). As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. Parâmetros: (a) $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 30.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| \approx 1.99$ (b) $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 30.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| \approx 1.99$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

mos acesso a todos os estados de Fock $|n\rangle$ e Dicke $|N/2, m\rangle$ com probabilidades não-nulas. Em conformidade com o ajuste de parâmetros, algumas combinações destes estados não serão ativadas por $\mathcal{H}_{k'}$, permanecendo os mesmos estáticos. Esta situação é observada na Fig.3.5 para os Hamiltonianos das Eq.(3.14) e Eq.(3.15) já debatidos e testados. Os

Figura 3.5 – Dinâmica populacional entre os estados de Dicke $|N/2, m\rangle$ ($|m| \leq N/2$) para uma amostra com 3 átomos ($N = 3$). São apresentados somente aqueles com probabilidade de ocupação não estática. O sistema é inicialmente preparado em $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle |\theta, \varphi\rangle$, e evolui segundo o Hamiltoniano da (a) Eq.(3.14) (b) Eq.(3.15). As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. Parâmetros: (a) $\alpha = 1.0$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 50.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.02$ e $|\Omega_2/\lambda| = 1.0$ (b) $\alpha = 1.0$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = 0$, $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 60.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| = 2.0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

parâmetros escolhidos para estes testes foram (a) $\alpha = 1.0$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 50.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.02$ e $|\Omega_2/\lambda| = 1.0$ (b) $\alpha = 1.0$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = 0$, $\Delta_1 = \delta$, $\delta/|\lambda| = \Delta_2/|\Omega_2| = 60.0$, $|\Omega_1/\lambda| = 0.01$ e $|\Omega_2/\lambda| = 2.0$. Note que a ação de $\mathcal{H}_{-N/2+1}$ afeta somente a troca entre populações de $|N/2, N/2\rangle$ e $|N/2, N/2 - 1\rangle$, enquanto $\mathcal{H}_{-N/2+2}$ pro-

voca alteração simultânea entre $|N/2, N/2\rangle$, $|N/2, N/2 - 1\rangle$, e $|N/2, N/2 - 2\rangle$. É visível que a presença de estados inertes em $|\psi(0)\rangle$ adiciona mais erro ao processo de confirmação, dificultando a busca pela melhor curva. De qualquer forma, os gráficos ainda seguem acordados. Afinal, os estados participantes na dinâmica: (a) $|3/2, 3/2\rangle$ e $|3/2, 1/2\rangle$ (b) $|3/2, 3/2\rangle$, $|3/2, 1/2\rangle$ e $|3/2, -1/2\rangle$, possuem probabilidades que acompanham o invólucro (curva sólida). Já os estados inertes: (a) $|3/2, -1/2\rangle$ e $|3/2, -3/2\rangle$ (b) $|3/2, -3/2\rangle$ apresentam dinâmica com flutuação próxima de zero, e portanto, aceitável durante o período das simulações: (a) $2\pi/|\lambda_{1,3/2}|$ (b) $2\pi/|\lambda_{1,1/2}|$.

3.3 Preparação determinística de estados de Fock

Os Hamiltonianos $\mathcal{H}_{k'}$ revelaram novos aspectos sobre interações seletivas. Nos dedicamos à estudar os limites do modelo, e à provar sua veracidade através de simulações computacionais, que guiaram a escolha de parâmetros, propiciando gráficos consistentes com as suposições teóricas. O passo seguinte, portanto, é a aplicação das idéias exibidas até aqui. Nitidamente, os inúmeros membros da família de Hamiltonianos, apontados na Eq.(3.8), são compostos por estados de Fock e de Dicke, que combinam-se aos pares de maneira peculiar. Desvendado o padrão das combinações, criamos um protocolo para a geração determinística de estados de Fock (vide M. Hofheinz et al., Nature 459, 546 - 2009; K. Xia et al., Optics Express, 20, 27198), cerne desta seção.

O sistema é inicializado com o campo no estado de vácuo $|0\rangle$, e a amostra no estado mais energético dentre os estados de Dicke: $|N/2, N/2\rangle$, que representa o caso em que todos os átomos encontram-se excitados. Definido o estado de partida $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |N/2, N/2\rangle$, a execução da primeiro passo do protocolo passa pela regulação dos campos clássicos, cujos parâmetros $\Omega_1^{(1)}$ e $\Omega_2^{(1)}$ engendram o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{-N/2+1}$. A evolução livre por meio desta interação efetiva durante o intervalo $0 \leq t \leq t_1$ conduz à

$$|\psi(t)\rangle = \cos(|\lambda_{1,N/2-1}|t) |0\rangle |N/2, N/2\rangle + i e^{-i\phi} \sin(|\lambda_{1,N/2-1}|t) |1\rangle |N/2, N/2 - 1\rangle, \quad (3.17)$$

onde ϕ é a fase relativa entre os campos quântico λ e clássico Ω_1 , e t_1 é adequadamente escolhido de forma a satisfazer $|\lambda_{1,N/2-1}|t_1 = \pi/2$. Esta determinação faz de $|\psi(t_1)\rangle$ o estado inicial do passo posterior, e nos induz à modificação dos parâmetros para $\Omega_1^{(2)}$ e $\Omega_2^{(2)}$, construindo assim o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{-N/2+3}$. Mais uma vez, o sistema evolui livremente, agora sob a nova interação e respeitando $t_1 \leq t \leq t_2$:

O protocolo é inicializado em $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |N/2, N/2\rangle$

- **Passo 1:** $\Omega_2^{(1)} \Rightarrow \mathcal{H}_{-N/2+2}$
 $0 \leq t \leq t_1$ para $|\lambda_{1,N/2-1}| t_1 = \pi/2$
 $|\psi(t_1)\rangle \propto |1\rangle |N/2, N/2 - 1\rangle$
- **Passo 2:** $\Omega_2^{(2)} \Rightarrow \mathcal{H}_{-N/2+4}$
 $t_1 \leq t \leq t_2$ para $|\lambda_{2,N/2-2}| (t_2 - t_1) = \pi/2$
 $|\psi(t_2)\rangle \propto |2\rangle |N/2, N/2 - 2\rangle$
- $\vdots$
- **Passo N-1:** $\Omega_2^{(N-1)} \Rightarrow \mathcal{H}_{3N/2-2}$
 $t_{N-2} \leq t \leq t_{N-1}$ para $|\lambda_{N-1,-N/2+1}| (t_{N-1} - t_{N-2}) = \pi/2$
 $|\psi(t_{N-1})\rangle \propto |N-1\rangle |N/2, -N/2 + 1\rangle$
- **Passo N:** $\Omega_2^{(N)} \Rightarrow \mathcal{H}_{3N/2}$
 $t_{N-1} \leq t \leq t_N$ para $|\lambda_{N,-N/2}| (t_N - t_{N-1}) = \pi/2$
 $|\psi(t_N)\rangle \propto |N\rangle |N/2, -N/2\rangle$

Figura 3.6 – Múltiplas etapas envolvidas na produção do estado de Fock $|N\rangle$. Somos apresentados aos Hamiltonianos efetivos apropriados e às preparações iniciais utilizadas nas etapas do protocolo, bem como ao estado final atingido.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$|\psi(t)\rangle = ie^{-i\phi} \left\{ \cos[|\lambda_{2,N/2-2}| (t - t_1)] |1\rangle |N/2, N/2 - 1\rangle + ie^{-i\phi} \sin[|\lambda_{2,N/2-2}| (t - t_1)] |2\rangle |N/2, N/2 - 2\rangle \right\}, \quad (3.18)$$

t_2 sendo o instante de tempo para o qual $|\lambda_{2,N/2-2}| (t_2 - t_1) = \pi/2$, e $|\psi(t_2)\rangle$ dando seguimento aos passos futuros. Ao procedermos continuamente, alcançaremos estados de Fock cada vez mais altos. As inúmeras iterações são efetuadas até que todas as excitações atômicas sejam transferidas para o campo, fazendo com que este seja finalmente levado ao estado $|N\rangle$. Por inferência, chega-se ao Hamiltoniano empregado no desenvolvimento do i -ésimo passo, denotado por $\mathcal{H}_{-N/2+2i}$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Na Fig.3.6, temos uma representação esquemática das etapas transcorridas para a produção de N fótons no campo. Destaca-se a mudança parcial imposta sobre os parâmetros Ω_1 e Ω_2 . Estes, influem no tipo de interação efetiva criada, e consequentemente, nos acoplamentos úteis que especificam a duração do protocolo.

Tal como trabalhado na seção passada, daremos ênfase às avaliações computacionais. Haja vista que este protocolo trata-se de sucessivas aproximações, os erros irão propagar-se a medida que passarmos pelas partes deste. Visando minimizar tais efeitos nocivos, fizemos uso de um algoritmo de busca pela simulação de mínimo desvio em relação à uni-

dade, calculando a fidelidade média no período entre dados teóricos e estimados. Melhor dizendo, a otimização dos parâmetros é peça crucial para o sucesso do protocolo. O meio mais lógico de se provar a sua eficácia é através do monitoramento de p_n , a probabilidade de ocupação para a n -ésimo estado de Fock. O caso $N = 5$ é ilustrado na Fig.3.7 para o conjunto de parâmetros da Tabela 3.2. De passo em passo, o estado $|0\rangle$ é efetivamente elevado à $|5\rangle$ com alta margem de fidelidade em relação ao modelo exato. Do ponto de vista gráfico, o intervalo entre etapas diminui à proporção que o protocolo aproxima-se do término. Tem-se também o número médio de fótons para fins de complementação.

O sucesso do protocolo é medido através da fidelidade do estado de Fock alvo. Em cada uma das etapas obtivemos fidelidades próximas da unidade: 0.998, 0.992, 0.985, 0.970 e 0.940, sendo estas relativas à produção de $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|3\rangle$ e $|5\rangle$, respectivamente.

Tabela 3.2 – Parâmetros utilizados na simulação computacional do protocolo que leva $|0\rangle$ à $|5\rangle$.

i	$\delta/ \lambda $ e $\Delta_2/ \Omega_2 $	$ \Omega_1/\lambda $
1	30.0	0.01
2	30.0	0.01
3	40.0	0.01
4	50.0	0.01
5	50.0	0.01

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.7 – (a) Dinâmica populacional para os estados de Fock $|n\rangle$ atinentes à cada epapa. Especialmente para uma amostra com 5 átomos ($N = 5$), consta $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|4\rangle$ e $|5\rangle$. (b) Evolução do número médio de fótons no decorrer do protocolo. As linhas sólidas traduzem o comportamento efetivo e servem de suporte aos resultados aproximados, aqui representados por pontos. O parâmetros utilizados nos passos constituintes da simulação acham-se na Tabela 3.2.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Material suplementar: Derivação da Eq.(2.23) utilizada na construção da família de Hamiltonianos efetivos $\mathcal{H}_k$

A derivação tem como ponto de partida a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (3.19)$$

onde

$$\mathcal{H}(t) = \sum_n (h_n e^{-i\nu_n t} + h_n^\dagger e^{i\nu_n t}) \quad (3.20)$$

possui a dependência harmônica desejada.

- Expansão iterativa para obtenção do Hamiltoniano efetivo em segunda ordem $\mathcal{H}_{ef}$

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{H}(t') |\psi(t')\rangle dt' \quad (3.21)$$

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{H}(t') |\psi(0)\rangle dt' - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^{t'} \mathcal{H}(t') \mathcal{H}(t'') |\psi(t'')\rangle dt' dt''$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} &= \mathcal{H}(t) |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t) \int_0^t \mathcal{H}(t') |\psi(t')\rangle dt' \\ &\approx -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t) \int_0^t \mathcal{H}(t') |\psi(t)\rangle dt' = \mathcal{H}_{ef} |\psi(t)\rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde

$$\mathcal{H}_{ef} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t) \int_0^t \mathcal{H}(t') dt'. \quad (3.23)$$

Dentro da hipótese markoviana, consideramos a não variação de $|\psi(t')\rangle$ durante o intervalo de integração (vide Eq.3.22), o que possibilita a aproximação $|\psi(t')\rangle \approx |\psi(t)\rangle$.

- Substituindo $\mathcal{H}(t)$ na Eq.(3.23)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{ef} &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t) \int_0^t \mathcal{H}(t') dt' = -\frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} (h_m e^{-i\nu_m t} + h_m^\dagger e^{i\nu_m t}) \int_0^t (h_n e^{-i\nu_n t'} + h_n^\dagger e^{i\nu_n t'}) dt' \\
 &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} (h_m e^{-i\nu_m t} + h_m^\dagger e^{i\nu_m t}) \left[h_n \frac{(e^{-i\nu_n t} - 1)}{-i\nu_n} + h_n^\dagger \frac{(e^{i\nu_n t} - 1)}{i\nu_n} \right] \\
 &= \frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} \frac{1}{\nu_n} [h_m^\dagger h_n e^{i(\nu_m - \nu_n)t} - h_m h_n^\dagger e^{-i(\nu_m - \nu_n)t} + h_m^\dagger h_n^\dagger e^{i(\nu_m + \nu_n)t} - h_m h_n e^{-i(\nu_m + \nu_n)t}] \\
 &\approx \frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} \frac{1}{\nu_n} [h_m^\dagger h_n e^{i(\nu_m - \nu_n)t} - h_m h_n^\dagger e^{-i(\nu_m - \nu_n)t}] \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Após a média temporal sobre a dinâmica, os termos altamente oscilantes, em destaque na Eq.(3.24), são eliminados no regime de baixas frequências:

$$e^{\pm i\nu_n t}, e^{\pm i(\nu_m + \nu_n)t} \approx 0. \quad (3.25)$$

- Simetrização de $\mathcal{H}_{ef}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{ef}^{(s)} &= \frac{\mathcal{H}_{ef} + \mathcal{H}_{ef}^\dagger}{2} \\
 &= \frac{1}{2\hbar} \sum_{m,n} \frac{1}{\nu_n} [h_m^\dagger h_n e^{i(\nu_m - \nu_n)t} - h_m h_n^\dagger e^{-i(\nu_m - \nu_n)t} + h_n^\dagger h_m e^{-i(\nu_m - \nu_n)t} - h_n h_m^\dagger e^{i(\nu_m - \nu_n)t}] \\
 &= \frac{1}{2\hbar} \sum_{m,n} \left[\frac{1}{\nu_n} h_m^\dagger h_n e^{i(\nu_m - \nu_n)t} - \frac{1}{\nu_n} h_m h_n^\dagger e^{-i(\nu_m - \nu_n)t} + \frac{1}{\nu_m} h_n^\dagger h_m e^{i(\nu_m - \nu_n)t} - \frac{1}{\nu_m} h_m h_n^\dagger e^{-i(\nu_m - \nu_n)t} \right] \\
 &= \frac{1}{2\hbar} \sum_{m,n} \left(\frac{1}{\nu_m} + \frac{1}{\nu_n} \right) [h_m^\dagger h_n e^{i(\nu_m - \nu_n)t} - h_m h_n^\dagger e^{-i(\nu_m - \nu_n)t}] \\
 &= \frac{1}{2\hbar} \sum_{m,n} \left(\frac{1}{\nu_m} + \frac{1}{\nu_n} \right) [h_m^\dagger h_n - h_n h_m^\dagger] e^{i(\nu_m - \nu_n)t} \\
 &= \frac{1}{2\hbar} \sum_{m,n} \left(\frac{1}{\nu_m} + \frac{1}{\nu_n} \right) [h_m^\dagger, h_n] e^{i(\nu_m - \nu_n)t} \\
 &= \frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} \frac{1}{\nu_{mn}} [h_m^\dagger, h_n] e^{i(\nu_m - \nu_n)t}, \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

com

$$\frac{1}{\nu_{mn}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_m} + \frac{1}{\nu_n} \right). \quad (3.27)$$

- Identificando os operadores $h_n^{(\dagger)}$ e as frequências ν_n na Eq.(3.2)

$$(1) \quad h_1 = \hbar\lambda a \sum_{\ell=1}^N \sigma_{ig}^{(\ell)} \quad h_1^\dagger = \hbar\lambda^* a^\dagger \sum_{\ell=1}^N \sigma_{gi}^{(\ell)} \quad \nu_1 = \delta$$

$$(2) \quad h_2 = \hbar\Omega_1 \sum_{\ell=1}^N \sigma_{ie}^{(\ell)} \quad h_2^\dagger = \hbar\Omega_1^* \sum_{\ell=1}^N \sigma_{ei}^{(\ell)} \quad \nu_2 = \Delta_1$$

$$(3) \quad h_3 = \hbar\Omega_2^* \sum_{\ell=1}^N \sigma_{gi}^{(\ell)} \quad h_3^\dagger = \hbar\Omega_2 \sum_{\ell=1}^N \sigma_{ig}^{(\ell)} \quad \nu_3 = \Delta_2$$

Uma vez em posse dos resultados aqui presentes, os cálculos sugeridos pela Eq.(2.23) tornam-se imediatos.

3.5 Material suplementar: Uma aplicação para os Hamiltonianos $\mathcal{H}_k$ via engenharia de reservatórios

Na última década, a pesquisa relacionada a sistemas quânticos tem sido dedicada ao estudo de mecanismos que contornem o problema da decoerência. Dentre as técnicas criadas para isso, destacamos nesta seção a engenharia de reservatórios(9). Esta técnica consiste em adicionar a interação com um sistema auxiliar, de forma que a ação natural do ambiente seja efetivamente desconsiderada na dinâmica. Estas interações são minuciosamente construídas para modificar o liouvilliano de forma específica para que o sistema atinja o equilíbrio com o reservatório artificial, porém com alta fidelidade para o estado protegido.

A engenharia de reservatórios possui aplicação bem conhecida para sistemas de dois níveis e íons armadilhados. É importante frisar que a engenharia de reservatórios está profundamente conectada à engenharia de Hamiltonianos, discutida na seção 2.4. O objetivo principal da engenharia de reservatórios é obter, na representação de interação, uma equação mestra na forma

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{\Gamma}{2}(2\mathcal{O}\rho(t)\mathcal{O}^\dagger - \mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}\rho(t) - \rho(t)\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}), \quad (3.28)$$

onde Γ é taxa efetiva associada ao reservatório artificial, que está acoplado ao sistema de interesse, caracterizado pelo operador $\mathcal{O}$. O estado de equilíbrio puro a ser protegido é o auto-estado $|\psi\rangle$ do operador $\mathcal{O}$ com auto-valor nulo, com a garantia de que não exista outro estado $|\phi\rangle$ tal que $[\mathcal{O}, \mathcal{O}^\dagger]|\phi\rangle = 0$. Este conceito de proteção de estados pode ser estendido para operadores de Lindblad dependentes do tempo $\mathcal{O}(t)$, desde que a taxa de mudança do mesmo seja menor que Γ .

3.5.1 Procedimento de Cirac e Zoller para a engenharia de reservatórios

O ponto de partida de uma teoria geral para a construção dos reservatórios artificiais para sistemas atômicos interagentes com um campo de radiação é o Hamiltoniano efetivo abaixo

$$\mathcal{H}_{ef} = \hbar\chi (a\mathcal{O}^\dagger + a^\dagger\mathcal{O}), \quad (3.29)$$

onde a e $a^\dagger$ são os respectivos operadores de destruição e criação do campo(52), enquanto $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}^\dagger$ são os operadores associados ao sistema de interesse, e χ é o acoplamento efetivo entre o modo e o sistema. Esta interação possui forma bilinear e é similar à interação entre o modo e seu reservatório natural, que leva ao conhecido liouvilliano responsável pelo mecanismo de dissipação. Assim, a interação construída deve gerar efetivamente um liouvilliano artificial que compete com o natural(57). Quando a taxa efetiva criada é significativamente maior que a natural, o liouvilliano artificial governará a dinâmica do sistema.

Uma vez que a interação entre sistema e campo está estabelecida na Eq.(3.29), adicionamos o mecanismo de dissipação do modo através da equação mestra:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & -\frac{\iota}{\hbar} [\mathcal{H}_{ef}, \rho(t)] \\ & + \frac{\kappa}{2} [2a\rho(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho(t) - \rho(t)a^\dagger a], \end{aligned} \quad (3.30)$$

escrita na mesma representação qual foi obtido o $\mathcal{H}_{ef}$. A consante κ representa a taxa de dissipação natural do modo. Reforçamos que a equação mestra (3.30) indica a evolução do conjunto sistema-campo. A partir da mesma é possível encontrar a evolução dinâmica das matrizes $\rho_{n,n'} = \langle n|\rho|n'\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{n,n'}(t)}{dt} = & -\iota\chi \left[\sqrt{n+1}\mathcal{O}^\dagger \rho_{n+1,n'}(t) - \sqrt{n'}\rho_{n,n'-1}(t)\mathcal{O}^\dagger \right] \\ & -\iota\chi \left[\sqrt{n}\mathcal{O} \rho_{n-1,n'}(t) - \sqrt{n'+1}\rho_{n,n'+1}(t)\mathcal{O} \right] \\ & + \kappa\sqrt{(n+1)(n'+1)}\rho_{n+1,n'+1}(t) - \frac{\kappa}{2}(n+n')\rho_{n,n'}(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assumimos também que a constante de decaimento κ é muito maior que o acoplamento efetivo χ . Esta condição é facilmente satisfeita para cavidades com baixo fator de qualidade $Q = \omega_c/\kappa$, onde ω_c é a frequência do modo. Juntamente com a aproximação de reservatório à temperatura zero, este regime torna possível que consideremos apenas o sub-espço $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ do espaço de Fock. Desta forma, a Eq.(3.31) pode ser bem descrita através do conjunto de equações:

$$\frac{d\rho_{0,0}(t)}{dt} = -\iota\chi [\mathcal{O}^\dagger \rho_{1,0}(t) - \rho_{0,1}(t)\mathcal{O}] + \kappa\rho_{1,1}(t), \quad (3.32)$$

$$\frac{d\rho_{1,1}(t)}{dt} \approx -\imath\chi [\mathcal{O}\rho_{0,1}(t) - \rho_{1,0}(t)\mathcal{O}^\dagger] - \kappa\rho_{1,1}(t), \quad (3.33)$$

$$\frac{d\rho_{0,1}(t)}{dt} \approx -\imath\chi [\mathcal{O}^\dagger\rho_{1,1}(t) - \rho_{0,0}(t)\mathcal{O}^\dagger] - \frac{\kappa}{2}\rho_{0,1}(t), \quad (3.34a)$$

$$\frac{d\rho_{1,0}(t)}{dt} \approx -\imath\chi [\mathcal{O}\rho_{0,0}(t) - \rho_{1,1}(t)\mathcal{O}] - \frac{\kappa}{2}\rho_{1,0}(t), \quad (3.34b)$$

onde graças à forte taxa de decaimento, podemos eliminar $\rho_{0,1}$ e $\rho_{1,0}$ da dinâmica. A eliminação adiabática é equivalente a assumir

$$\frac{d\rho_{0,1}(t)}{dt} = \frac{d\rho_{1,0}(t)}{dt} = 0, \quad (3.35)$$

que permite escrever

$$\rho_{0,1}(t) = \frac{2\imath\chi}{\kappa} [\rho_{0,0}(t)\mathcal{O}^\dagger - \mathcal{O}^\dagger\rho_{1,1}(t)] \quad (3.36a)$$

e

$$\rho_{1,0}(t) = \frac{2\imath\chi}{\kappa} [\rho_{1,1}(t)\mathcal{O} - \mathcal{O}^\dagger\rho_{0,0}(t)]. \quad (3.36b)$$

Substituindo este resultado nas equações e considerando que

$$\begin{aligned} \rho_s &= \text{Tr}_c \rho \\ &= \sum_n \langle n | \rho | n \rangle \approx \rho_{0,0} + \rho_{1,1}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

obtemos a equação mestra para o operador densidade reduzido do sistema:

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = \frac{\Gamma}{2} [2\mathcal{O}\rho_s(t)\mathcal{O}^\dagger - \mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}\rho_s(t) - \rho_s(t)\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}], \quad (3.38)$$

onde $\Gamma = 4\chi^2/\kappa$ é a taxa efetiva engendrada.

3.5.2 Engenharia dos Liouvillianos de superradiância e superabsorção

Esta técnica pode ser diretamente aplicada às interações construídas na seção (3.1). Ao invertermos os papéis dos campos quântico (λ) e clássico (Ω_1) na Fig.3.1, criamos uma interação similar àquela mostrada na Eq.(3.8), porém do tipo anti-Jaynes-Cummings

(termos contra-girantes). Os Hamiltonianos seletivos do tipo Jaynnes-Cummings (JC) e anti-Jaynnes-Cummings (AJC) possuem a mesma estrutura que (3.29), e todas as considerações feitas na derivação da equação mestra (3.38) permanecem válidas. O regime adotado, de forte taxa de decaimento κ , elimina as degenerescências nas transições e permite a construção de liouvillianos que atuam somente uma única transição entre estados de Dicke. De forma geral, temos:

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = \frac{\Gamma_{k'}}{2} \left[2\mathcal{O}_{k'}\rho_s(t)\mathcal{O}_{k'}^\dagger - \mathcal{O}_{k'}^\dagger\mathcal{O}_{k'}\rho_s(t) - \rho_s(t)\mathcal{O}_{k'}^\dagger\mathcal{O}_{k'} \right], \quad (3.39)$$

onde $\Gamma_{k'}$ está intimamente ligado às informações contidas nos Hamiltonianos $\mathcal{H}_{k'}$.

Os operadores $\mathcal{O}_{k'}$ e $\mathcal{O}_{k'}^\dagger$ se relacionam à uma dada transição entre estados de Dicke, previamente selecionada. Para o Hamiltoniano seletivo do tipo Jaynnes-Cummings (JC) obtemos um liouvilliano de emissão com

$$\mathcal{O}_{k'} = |N/2, 1 - k'\rangle\langle N/2, 2 - k'|, \quad (3.40)$$

e para o anti-Jaynnes-Cummings (AJC), um liouvilliano de absorção com

$$\mathcal{O}_{k'} = |N/2, -1 + k'\rangle\langle N/2, -2 + k'|. \quad (3.41)$$

Este último resultado faz com que seja possível superabsorver numa dada transição entre estados coletivos. Para que os efeitos naturais do reservatório sejam desconsiderados, é necessário que $\Gamma_{k'} \gg \gamma$.

Os liouvillianos aqui construídos confinam a dinâmica entre dois estados atômicos coletivos. Efetivamente temos um sistema de dois níveis capaz de emitir ou absorver excitação de forma incoerente. Toda a população presente num dado estado de Dicke é transferida para o nível mais próximo, superior (absorção) ou inferior (emissão), e as populações restantes permanecem inalteradas.

CAPÍTULO 4

EMARANHAMENTO INDIRETO NUM SISTEMA CAVIDADE-OSCILADOR-QUBIT DEPENDENTE DO TEMPO

Neste capítulo, apresentamos estudos numéricos sobre o emaranhamento num sistema híbrido qubit-cavidade-oscilador, cujos acoplamentos do Hamiltoniano possuem dependência temporal harmônica (coseno) e hiperbólica (secante). Por meio da negatividade $\mathcal{N}(t)$, quantificamos os efeitos induzidos às bipartições.

4.1 Apresentação do modelo

Nossos estudos serão pautados num sistema híbrido formado pelo modo da cavidade, um oscilador optomecânico e um sistema de dois níveis (qubit). A parte mecânica do sistema se acopla ao campo através de uma interação trilinear, que é oriunda da pressão de radiação exercida pelo campo. Da mesma forma, o qubit também se liga ao oscilador. É natural esperar que luz e qubit compartilhem informação durante a dinâmica. Com o objetivo de explorar as condições que levem à máxima interação indireta entre os componentes em questão, consideremos aqui acoplamentos dependentes do tempo. Com isso, o modelo é descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) = & \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_m b^\dagger b + \frac{\hbar\omega_q}{2} \sigma_z \\ & - \hbar g(t) a^\dagger a (b + b^\dagger) - \hbar\lambda(t) \sigma_z (b + b^\dagger), \end{aligned} \quad (4.1)$$

Figura 4.1 – Representação esquemática das interações descritas pelo Hamiltoniano $\mathcal{H}'(t)$ (vide Eq.4.1). (a) Bipartições naturais: oscilador-cavidade/qubit-oscilador. (b) Interação qubit-cavidade mediada indiretamente através das demais bipartições.

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde ω_c , ω_m e ω_q são respectivamente as frequências naturais do campo, oscilador mecânico e qubit, enquanto $g(t)$ é o acoplamento devido à pressão de radiação entre o modo da cavidade e o oscilador, e $\lambda(t)$, o acoplamento do mesmo com o qubit. No que diz respeito aos constituintes do Hamiltoniano, $a^{(\dagger)}$ e $b^{(\dagger)}$ são os operadores de aniquilação (criação) relativos ao campo de radiação e ao objeto mecânico do conjunto. Por fim, σ_z é a bem conhecida matriz de Pauli (sugerimos a leitura complementar: Quantum technologies with hybrid systems – DOI: 10.1073/pnas.1419326112). O primeiro e terceiro termos diagonais na Eq.(4.1) são irrelevantes ao processo interativo, podendo ser eliminados deste por meio da transformação unitária

$$U(t) = e^{-i(\omega_c a^\dagger a + \omega_q \sigma_z/2)t}, \quad (4.2)$$

o que resulta no Hamiltoniano transformado

$$\mathcal{H}'(t) = \hbar\omega_m b^\dagger b - \hbar g(t) a^\dagger a (b + b^\dagger) - \hbar\lambda(t) \sigma_z (b + b^\dagger), \quad (4.3)$$

alvo das futuras investigações.

A princípio, tal Hamiltoniano propicia dinâmica sem solução analítica. Com o auxílio do operador de ordenamento temporal $\mathcal{T}$, é possível a definição de

$$U'(t) = \mathcal{T} \left\{ \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{H}'(\tau) d\tau \right) \right\}, \quad (4.4)$$

o operador de evolução temporal para o sistema. Além de ser uma árdua tarefa, isto traz

consigo restrições, como por exemplo, limitação para os estados de partida. Para o cenário onde a dependência temporal é ignorada, quando $g(t) \rightarrow g$ e $\lambda(t) \rightarrow \lambda$, temos

$$U'(\bar{t}) = e^{i(\bar{g}a^\dagger a + \bar{\lambda}\sigma_z)^2(\bar{t} - \sin \bar{t})} e^{i(\bar{g}a^\dagger a + \bar{\lambda}\sigma_z)(\eta b^\dagger - \eta^* b)} e^{-i\bar{t}b^\dagger b}, \quad (4.5)$$

onde $\eta \equiv \eta(\bar{t}) = 1 - e^{-i\bar{t}}$ (62). Utilizamos aqui $\bar{g} = g/\omega_m$, $\bar{\lambda} = \lambda/\omega_m$, e $\bar{t} = \omega_m t$ para melhor apresentar a Eq.(4.5). Observa-se que os auto-estados de $a^\dagger a$ e σ_z são inóquos na composição de $|\psi(0)\rangle$, já que não produzem a troca almejada entre cavidade e qubit. Melhor dizendo, a superposição nas bases de autoestados de $a^\dagger a$ e σ_z é peça fundamental. Apesar de existirem ferramentas poderosas na busca de soluções exatas, como a técnica dos invariantes proposta por Lewis–Riesenfeld(63), visamos uma análise livre por meio de simulações computacionais, buscando novos aspectos e talvez, a otimização da interação entre as partes do sistema híbrido.

Prosseguindo com a análise do modelo, voltemos nossas atenções para a forma funcional dos acoplamentos $g(t)$ e $\lambda(t)$. Sob o ponto de vista matemático, inúmeras são as escolhas para a forma funcional dos mesmos. Inclusive, poderíamos supor dependência estocástica(60) e analisar a influência da injeção de ruído(64). No entanto, seremos mais simplistas na escolha. Acreditamos que ao estabelecermos $g(t) = g_o G(\Omega_c t)$ e $\lambda(t) = \lambda_o \Lambda(\Omega_q t)$, estejamos dando o primeiro passo na direção correta (sugerimos também a leitura: Dynamics of a qubit-oscillator system with periodically varying coupling – arXiv:1911.00138v1 [quant-ph]). As amplitudes g_o e λ_o são intrínsecas ao sistema, e suas magnitudes definem o regime do acoplamento (fraco/forte) oscilador-cavidade e qubit-oscilador. As frequências externas Ω_c e Ω_q desempenham o papel de dar ao Hamiltoniano a temporalidade desejada. Portanto, é esperado que as funções $G(t)$ e $\Lambda(t)$ aproximem-se da unidade para $\Omega_c, \Omega_q \sim 0$.

Neste ponto, gostaríamos de frisar que o objetivo principal aqui é a indução indireta de emaranhamento entre cavidade e oscilador, inicialmente descorrelacionados. É natural imaginar que as bipartições, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, emaranhem-se ao longo da dinâmica, e que eventualmente, o oscilador funcione como um canal ligando os integrantes desacoplados. No entanto, a introdução da temporalidade por meio dos acoplamentos $g(t)$ e $\lambda(t)$ nos leva a incertezas. Da mesma maneira que existe a chance de ganhos comparados ao modelo usual com acoplamentos constantes, temos também que estarmos conscientes de que surjam pequenas melhorias, e também perdas (estes conceitos serão esclarecidos no futuro). Com isso em mente, partimos em busca de tais resultados.

4.2 Solução dinâmica do sistema híbrido: $g(t)$ e $\lambda(t)$

Dentre as particularidades da interação cavidade-oscilador-qubit, a temporalidade explícita, recentemente incorporada ao Hamiltoniano da Eq(4.3), é a que mais merece consideração primária. Iremos considerar dois tipos de dependência funcional para $G(t)$ e $\Lambda(t)$: harmônica (coseno) e hiperbólica (secante), ou seja,

$$G(t), \Lambda(t) = \cos(\Omega_{c,q} t) \quad (4.6a)$$

e

$$G(t), \Lambda(t) = \operatorname{sech}(\Omega_{c,q} t) . \quad (4.6b)$$

A primeira é caracterizada por se repetir periodicamente, conservando a máxima amplitude do acoplamento. ao passo que a segunda o enfraquece no decorrer evolução (vide Fig.4.2). Note que ambas estão consistentes com a hipótese $G(t), \Lambda(t) \sim 1$ quando $\Omega_c, \Omega_q \sim 0$. A dinâmica para $|\psi(t)\rangle$ é encontrada mediante solução numérica. A partir deste momento, todos os parâmetros envolvidos nos termos de interação: g_o , λ_o , Ω_c e Ω_q , serão escritos em unidades de ω_m . Logo, utilizaremos $\omega_m = 1.0$ em todas as simulações computacionais, ou seja, a frequência do oscilador mecânico surge como uma escala no modelo.

Figura 4.2 – Dependência harmônica/hiperbólica para $G(t)$ e $\Lambda(t)$. A linha sólida/tracejada mostra a função coseno/secante hiperbólica. O tempo, representado no eixo horizontal, encontra-se em unidades arbitrárias.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados analíticos, obtidos para o caso independente do tempo, servem de base

para a preparação inicial a ser adotada(65). Esta abordagem faz com que as previsões matemáticas nos guiem durante o percurso. Todavia, tais previsões não são uma garantia de sucesso imediato. Como destacado anteriormente, estados diagonais da cavidade e do q-bit devem ser excluídos de $|\psi(0)\rangle$, com $|\psi_c\rangle$, $|\psi_o\rangle$ e $|\psi_q\rangle$ formando a configuração de onde o conjunto irá evoluir. O sistema de dois níveis (qubit) será aqui representado pelo estado puro

$$|\psi_q\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle, \quad (4.7)$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ sendo os ângulos da esfera de Bloch (vide seção 2.6.2). Nos testes que sucedem esta discussão, utilizaremos $\theta = \pi/2$ e $\varphi = 0$, correspondente ao estado de máxima superposição para o qubit. Por sua vez, o modo da cavidade inicia a sua dinâmica numa superposição simples de estados de Fock: $|\psi_c\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, em conformidade com a exigência citada acima. Finalmente, temos o oscilador mecânico partindo do estado coerente $|\beta\rangle$, com $\beta > 0$. Por enquanto, desconsideremos efeitos dissipativos.

4.3 Resultados numéricos: $\mathcal{N}_{qc}(t)$, $\mathcal{N}_{qo}(t)$, $\mathcal{N}_{oc}(t)$

Com o intuito de minimizar o custo computacional, desenvolveremos as análises numéricas para $\beta = 1.0$. Tal valor, favorece o truncamento do espaço de Hilbert referente ao oscilador, evitando erros nas simulações. As amplitudes g_o e λ_o são estabelecidas de modo a cobrir dois regimes de acoplamentos: fraco ($g_o, \lambda_o \ll \omega_m$) e forte ($g_o, \lambda_o \sim \omega_m$). Quanto às frequências externas Ω_c e Ω_q , iremos estudar o intervalo limitado inferiormente (superiormente) por $\Omega_c, \Omega_q \sim 0.1$ (~ 1). A escolha do mesmo deve-se ao fato de que para interações altamente dispersivas, as correlações são destruídas.

Dado que neste trabalho visamos investigar as correlações induzidas: qubit-oscilador, oscilador-cavidade e principalmente, qubit-cavidade, torna-se necessário definirmos uma medida de emaranhamento. Usualmente, utilizamos a negatividade $\mathcal{N}(t)$ para quantificar, dinamicamente, o grau de emaranhamento em sistemas com bipartição, que ao decorrer da dinâmica tornam-se correlacionados.

- Sistemas com bipartição: $H_1 \otimes H_2$
 $t = 0$: $\rho_1(0) \otimes \rho_2(0)$.
 $t > 0$: $\rho(t)$.

(a) traço parcial sobre o parte mecânica: $\rho_{qc}(t) \Rightarrow \mathcal{N}_{qc}(t)$

(b) traço parcial sobre o campo: $\rho_{qo}(t) \Rightarrow \mathcal{N}_{qo}(t)$

(c) traço parcial sobre o sistema de 2 níveis: $\rho_{oc}(t) \Rightarrow \mathcal{N}_{oc}(t)$

Figura 4.3 – Procedimento para o cálculo da negatividade entre as partes do sistema híbrido. Os círculos da cor cinza representam os sub-sistemas sob os quais foi realizada a operação de traço parcial.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A grandeza em questão é definida como:

$$\mathcal{N}(t) = \frac{1}{2} \sum_i (|\varepsilon_i| - \varepsilon_i), \quad (4.8)$$

onde ε_i são os autovalores instantâneos da matriz densidade parcialmente transposta. Vamos trazer esta discussão para o nosso contexto. Ao executarmos a operação de traço parcial sobre uma das partes que formam o sistema híbrido, somos capazes de calcular a negatividade entre as duas restantes. Por exemplo, podemos traçar a parte mecânica, e obter o operador densidade reduzido $\rho_{qc}(t)$. Nele, está contida a informação sobre a bipartição qubit-cavidade que permite o cálculo de $\mathcal{N}_{qc}(t)$ (Fig.4.3a). A mesma idéia pode ser aplicada às outras bipartições (Fig.4.3b e Fig.4.3c). Obter resultados analíticos requer esforço, já que muitas vezes as matrizes densidades são intratáveis devidos às suas dimensões. O obstáculo tornou-se ainda maior quando introduzimos acoplamentos dependentes do tempo. Outra vez, reforçamos a importância do cálculo numérico para a resolução deste aparente entrave.

As estimativas advindas do caso especial com acoplamentos constantes, e calculadas

através da informação mútua(6) entre os sub-sistemas qubit e cavidade, mostram um pico de máxima interação entre as partes para $\bar{t} = 2\pi$ e $\bar{g}_o\bar{\lambda}_o = 1/8$, o que resulta para os mesmos valores em $\mathcal{N}_{qc} \sim 0.5$ (65). Esta relação de proporcionalidade inversa apontada, torna-se indesejável à medida que o aumento de g_o implica no decréscimo inevitável de λ_o , e vice-versa. Assim, seria deveras apreciável a relaxação de tal vínculo nesta nova roupagem do modelo. O instante para o qual ocorre a citada extremalização, também merece destaque pelo papel que desempenha nos processos de informação quântica. É útil que o emaranhamento seja atingido no menor tempo possível, o que nos motiva a buscar pelo adiantamento do fenômeno.

Recorremos novamente à elaboração de um código em *Python* que faz uso das bibliotecas do *QuTiP (Quantum Toolbox in Python)*, afim de desvendar o melhor grupo de parâmetros $\{g_o, \lambda_o, \Omega_c, \Omega_q\}$, e por conseguinte, o valor ótimo para a negatividade indireta $\mathcal{N}_{qc}(t)$. Vale ressaltar que esta é prioritária com relação às demais $\mathcal{N}_{qo}(t)$ e $\mathcal{N}_{oc}(t)$, da mesma forma que ao referente instante de extremalização.

A priori, esta seria a abordagem lógica do problema. No momento em que se introduz temporalidade ao Hamiltoniano do modelo, surge a necessidade de um critério comparativo, algo que nos indique o aumento/decrécimo com relação ao caso com acoplamentos constantes. Definimos para uso exclusivo neste trabalho, a negatividade relativa como sendo a diferença entre aquelas referentes às duas situações citadas acima:

$$\bar{\mathcal{N}}(t) = \mathcal{N}^t(t) - \mathcal{N}^c(t). \quad (4.9)$$

Havendo superação de $g(t)$ e $\lambda(t)$ sobre o caso com acoplamentos constantes ($\Omega_c, \Omega_q = 0$), teremos $\bar{\mathcal{N}}(t) > 0$, ou vice-versa, $\bar{\mathcal{N}}(t) < 0$. Em casos para os quais não há melhora ou piora, observa-se $\bar{\mathcal{N}}(t)$ assumindo valor nulo.

O algoritmo de otimização executa todas as possíveis combinações dentro dos intervalos $g_o, \lambda_o = 0.01, \dots, 0.09, 0.1, \dots, 0.9$ e $\Omega_c, \Omega_q = 0.1, \dots, 0.9$ (em unidades de ω_m), contabilizando um total de 26244 simulações para cada uma das formas funcionais fixadas para $G(t)$ e $\Lambda(t)$: (a) coseno (b) secante hiperbólica. Mais precisamente, temos:

- (a) $g(t) = g_o \cos(\Omega_c t)$ e $\lambda(t) = \lambda_o \cos(\Omega_q t)$.
- (b) $g(t) = g_o \operatorname{sech}(\Omega_c t)$ e $\lambda(t) = \lambda_o \operatorname{sech}(\Omega_q t)$.

Em concordância com a Eq.(4.9), devemos também gerar as simulações correspondentes para o caso com acoplamentos constantes: $g_o, \lambda_o = 0.01, \dots, 0.09, 0.1, \dots, 0.9$ e $\Omega_c, \Omega_q = 0$, as quais servirão de base para a comparação. Adotaremos a notação $\bar{t} = \omega_m t$ para tornar

o tempo uma quantidade adimensional, seguindo o que foi feito com as demais variáveis do problema. Com enfoque na amplitude g_o , partimos para os resultados das simulações.

Figura 4.4 – (a) Dinâmica da negatividade relativa $\tilde{\mathcal{N}}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento fraco para a amplitude g_o ($g_o \ll \omega_m$): (a) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.6$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.4$ (b) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.7$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.7$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 2\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao investigar o regime de acoplamento fraco ($g_o \ll \omega_m$) para o qual tem-se $g_o = 0.01, \dots, 0.09$, obtemos emaranhamento relativo máximo entre qubit e cavidade no valor de (a) 0.0032 (b) 0.0066 para (a) $\bar{t} = 3.3$ (b) $\bar{t} = 3.7$, condizentes à $0 \leq \bar{t} \leq 2\pi$. Na Fig.4.4, ilustramos a dinâmica do emaranhamento entre os sub-sistemas para o correspondente grupo de parâmetros encontrados: (a) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.6$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.4$ (b) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.7$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.7$. Nela, estão representados os valores de negatividade relativa para as bipartições qubit-cavidade, qubit-oscilador, e oscilador-cavidade: $\tilde{\mathcal{N}}_{qc}(t)$, $\tilde{\mathcal{N}}_{qo}(t)$, e $\tilde{\mathcal{N}}_{oc}(t)$, na mesma ordem. (a) Para o caso harmônico, o emaranhamento relativo entre qubit e oscilador se desenvolve numa crescente ínfima, atinge seu limite, e decresce ao fim da janela temporal analisada. Nesta faixa, o sistema híbrido é indiferente à introdução de temporalidade nos acoplamentos, apresentando um ganho muito pequeno para a bipartição qubit-cavidade. A partir do referido instante de máximo, a presença de $g(t)$ e $\lambda(t)$ torna-se prejudicial ao emaranhamento indireto. Nota-se também a intensificação do ganho na bipartição qubit-oscilador, assim como a ausência de alterações para a bipartição oscilador-cavidade. (b) Ainda no regime de acoplamento fraco para g_o , e utilizando a dependência hiperbólica, vemos na Fig.4.4b um comportamento bastante similar ao gráfico anterior: pequeno ganho seguido de perda para $\tilde{\mathcal{N}}_{qc}(t)$ (vide Fig.4.4a).

Ainda no regime de acoplamento fraco para g_o , porém olhando para uma janela temporal

maior ($0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$), seguimos com a análise dos resultados. Os melhores parâmetros relacionados à dependência (a) harmônica (b) hiperbólica são: (a) $g_o = 0.08$, $\lambda_o = 0.8$, $\Omega_c = 0.6$ e $\Omega_q = 0.6$ (b) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.7$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.1$. (a) Na Fig.4.5, a indiferença com relação à presença de acoplamentos harmônicos manifesta-se para tempos curtos na bipartição qubit-cavidade. Além disso, temos dois picos de perda na curva $\bar{\mathcal{N}}_{qc}(t)$, e finalmente, um pico de ganho no valor de 0.4959 para $\bar{t} = 15.7$. (b) Quando utilizamos acoplamentos que decaem de acordo com a função secante hiperbólica, temos ao longo da dinâmica de $\bar{\mathcal{N}}_{qc}(t)$: irrelevância, uma pequena perda, uma região com ganhos na ordem de 0.05, um pico de perda, outra região com ganhos na ordem de 0.1, mais perda, e um pico máximo de 0.2222 para $\bar{t} = 24.8$.

Figura 4.5 – (a) Dinâmica da negatividade relativa $\bar{\mathcal{N}}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento fraco para a amplitude g_o ($g_o \ll \omega_m$): (a) $g_o = 0.08$, $\lambda_o = 0.8$, $\Omega_c = 0.6$ e $\Omega_q = 0.6$ (b) $g_o = 0.09$, $\lambda_o = 0.7$, $\Omega_c = 0.1$ e $\Omega_q = 0.1$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Semelhantermente, analisemos os resultados para o regime de acoplamento forte ($g_o \gg \omega_m$): $g_o = 0.1, \dots, 0.9$, focados nas dependências (a) harmônica (b) hiperbólica para $g(t)$ e $\lambda(t)$. Dentro deste contexto, comecemos novamente pela faixa temporal $0 \leq \bar{t} \leq 2\pi$ (vide Fig.4.6). Os próximos resultados respaldam-se nos seguintes parâmetros aprimorados: (a) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.3$ e $\Omega_q = 0.1$ (b) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$. (a) Começando pela forma funcional harmônica, temos a negatividade relativa na bipartição qubit-cavidade permanecendo em zero, e crescendo gradualmente até atingir 0.3661 em $\bar{t} = 6.2$. (b) Prosseguindo para forma funcional hiperbólica, notamos semelhanças com os gráficos apresentados na Fig.4.6a. No que diz respeito a mesma bipartição em análise, temos ganho maior no valor de 0.4247 para o mesmo instante de

tempo,

Figura 4.6 – (a) Dinâmica da negatividade relativa $\tilde{\mathcal{N}}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento forte para a amplitude g_o ($g_o \gg \omega_m$): (a) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.3$ e $\Omega_q = 0.1$ (b) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 2\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Prosseguindo no mesmo regima para g_o , analisemos os resultados encontrados para $0 \leq \bar{t} \leq 2\pi$ (vide Fig.4.7). Como de costume, apresentamos o melhor conjunto de parâmetros: (a) $g_o = 0.8$, $\lambda_o = 0.6$, $\Omega_c = 0.2$ e $\Omega_q = 0.2$ (b) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$, vinculados ao caso (a) harmônico (b) hiperbólico. (a) Utilizando a dependência harmônica, nos deparamos com as curvas mais intrigantes até então. Aparentemente, os valores de g_o , λ_o , Ω_c e Ω_q fazem com que as bipartições qubit-oscilador e oscilador-cavidade se comportem de forma parecida. Já a negatividade relativa para a bipartição qubit-cavidade, que motiva nossos estudos, atinge extremo de 0.4999 e $\bar{t} = 15.7$. (b) Coincidentemente, a última análise nos traz o melhor resultado. A Fig.4.7b mostra negatividade relativa $\tilde{\mathcal{N}}_{qc}(t)$ assumindo somente valores próximos de zero ou positivos. Portanto, temos ganhos para quase toda a dinâmica. Além disso, o pico de 0.4291 ocorre para $\bar{t} = 6.4$, um valor bastante próximo de um período da frequência ω_m do oscilador mecânico.

Pode-se dizer que as curvas mostradas na Fig.4.7b sejam o ponto alto da investigação, o que justifica o aprofundamento a seguir. Fixando os valores das amplitudes em $g_o = 0.5$ e $\lambda_o = 0.5$, que compõem o conjunto ótimo de parâmetros, varremos os valores das frequências externas Ω_c e Ω_q . Com base nos valores de pico de $\tilde{\mathcal{N}}_{qc}(t)$, encontrados nas simulações condizentes com a dependência hiperbólica/faixa temporal $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, levantamos o gráfico tridimensional mostrado na Fig.4.8. A superfície possui um máximo local para $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$, valores estes referentes à melhor simulação por nós en-

Figura 4.7 – (a) Dinâmica da negatividade relativa $\tilde{\mathcal{N}}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pelo Hamiltoniano da Eq.(4.3) com dependência temporal (a) harmônica (b) hiperbólica. Parâmetros aprimorados dentro do regime de acoplamento forte para a amplitude g_o ($g_o \gg \omega_m$): (a) $g_o = 0.8$, $\lambda_o = 0.6$, $\Omega_c = 0.2$ e $\Omega_q = 0.2$ (b) $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$. Os valores analisados encontram-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

contrada. Esta abordagem através de um espaço parâmetros representa os nossos esforços até aqui.

Figura 4.8 – Extremos encontrados para a negatividade relativa $\tilde{\mathcal{N}}_{qc}(t)$ em função das frequências externas Ω_c e Ω_q com valores fixos das amplitudes g_o e λ_o . Os dados foram obtidos por meio de simulações referentes a $g(t) = g_o \operatorname{sech}(\Omega_c t)$ e $\lambda(t) = \lambda_o \operatorname{sech}(\Omega_q t)$ com $g_o = 0.5$ e $\lambda_o = 0.5$, e análise dentro da faixa temporal $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t}$ foi previamente definido como $\bar{t} = \omega_m t$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Concluindo a discussão sobre o melhor cenário encontrado: $g(t) = g_o \operatorname{sech}(\Omega_c t)$ e $\lambda(t) = \lambda_o \operatorname{sech}(\Omega_q t)$ com $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$ e $\Omega_q = 0.1$ para $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, analisemos os efeitos dissipativos sobre as curvas da Fig.4.7b. Para isso, consideremos a seguinte equação mestra para o sistema híbrido:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}'(t), \rho(t)] + \kappa\mathcal{L}[a] + \gamma_m(\bar{n}_m + 1)\mathcal{L}[b] + \gamma_m\bar{n}_m\mathcal{L}[b^\dagger] + \gamma_q(\bar{n}_q + 1)\mathcal{L}[\sigma_-] + \gamma_q\bar{n}_q\mathcal{L}[\sigma_+], \quad (4.10)$$

onde

$$\mathcal{L}[\mathcal{O}] = \mathcal{O}\rho(t)\mathcal{O}^\dagger - \frac{1}{2}\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O}\rho(t) - \frac{1}{2}\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger\rho(t) \quad (4.11)$$

resume a forma de Lindblad para qualquer operador $\mathcal{O}$ (vide seção 2.5 para maiores detalhes). Aqui, κ , γ_m e γ_q representam as taxas de dissipação para cavidade, oscilador mecânico, e qubit, respectivamente. Cada um dos sistemas possui reservatório térmico individual com $\bar{n}_m$ e $\bar{n}_q$ sendo o número médio de excitações daqueles relacionados aos dois últimos citados. Por sua vez, o reservatório para o qual a cavidade dissipa não possui excitações térmicas ($\bar{n}_c = 0$). Sendo assim, temos na Fig.4.9 a ação do ambiente sobre os resultados já apresentados na Fig.4.7b. Para tal, foram utilizados os seguintes parâmetros: $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$, $\Omega_q = 0.1$, $\kappa = 10^{-2}$, $n_c = 0$, $\gamma_q = 10^{-3}$, $n_q = 10.0$, $\gamma_m = 10^{-5}$, $n_m = 10.0$. As taxas κ , γ_m e γ_q são escritas em unidades de ω_m . Visivelmente, os efeitos destrutivos são praticamente irrelevantes, o que torna o resultado satisfatório.

Figura 4.9 – Dinâmica dissipativa da negatividade relativa $\tilde{N}(t)$ para as bipartições: qubit-cavidade, qubit-oscilador e oscilador-cavidade, provida pela Eq.(4.10) com dependência temporal hiperbólica nos acoplamentos $g(t)$ e $\lambda(t)$. Parâmetros: $g_o = 0.5$, $\lambda_o = 0.5$, $\Omega_c = 0.4$, $\Omega_q = 0.1$, $\kappa = 10^{-2}$, $n_c = 0$, $\gamma_q = 10^{-3}$, $n_q = 10.0$, $\gamma_m = 10^{-5}$, $n_m = 10.0$. A análise em questão encontra-se no intervalo $0 \leq \bar{t} \leq 8\pi$, onde $\bar{t} = \omega_m t$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO E OBSERVAÇÕES FINAIS

No trabalho que dá título a esta tese, mostramos uma técnica para a preparação de estados de Fock num contexto de interações coletivas em cavidades. O protocolo apresentado se utiliza de uma família de Hamiltonianos efetivos para tal. Aliada aos estados coletivos de Dicke, as múltiplas etapas proporcionam uma preparação determinística do estado $|N\rangle$, onde N é o número de átomos da amostra. A primeira e mais evidente limitação do protocolo é o erro acumulado durante os passos da preparação, uma vez que trata-se de uma solução dinâmica aproximada. Quanto maior o valor de N , mais etapas serão necessárias para atingir o estado almejado. Consequentemente, teremos mais perdas agregadas ao processo. Outro problema factual relaciona-se às perdas naturais envolvidas. Os acoplamentos efetivos são, tipicamente, menores uma ordem de grandeza quando comparados à frequência de Rabi. Isto, juntamente com os baixos valores adotados para $\Omega_1 \sim 0.01$, torna necessária a implementação em átomos estáveis/cavidades com alto fator Q . Algumas das perspectivas futuras deste trabalho seguem. Sistemas de muitas partículas possuem maior complexidade computacional, e seu tratamento algumas vezes necessita de supercomputadores ou clusteres. Pretendemos explorar os limites desses Hamiltonianos para valores de $N \sim 10$ ou 100 , criando mecanismos para minimizar os erros inerentes ao protocolo. Além do mais, é possível gerar uma família semelhante de interações efetivas, mas do tipo anti-Jaynes-Cummings. Aplicando a estes Hamiltonianos a técnica da engenharia de reservatórios(9), somos capazes de construir um arquétipo para a superabsorção(66).

Num segundo estudo, notamos que a incorporação de temporalidade no sistema híbrido qubit-cavidade-oscilador, expõe antigas e novas características. Sobre tais resultados, pode-se dizer que a inspeção através do algoritmo computacional mostrou-se eficiente, porém ainda é necessário uma abordagem analítica. De modo diferente, é difícil conjecturar algo a respeito dos parâmetros livres do Hamiltoniano da Eq.(4.3), ligados aos

acoplamentos dinâmicos $g(t)$ e $\lambda(t)$. Apenas é possível varrer intervalos maiores para g_o , λ_o , Ω_c e Ω_q , e analisar as correlações entre estes no espaço de parâmetros. Para isso, precisaríamos de máquinas com um poder de processamento maior, já que o intuito é acessar uma enorme quantidade de dados. Talvez, um ajuste funcional destes responda perguntas relacionadas aos máximos de emaranhamento na bipartição qubit-oscilador, e consequentemente, aos seus respectivos instantes de tempo. Seguindo a mesma idéia, outras dependências funcionais para $G(t)$ e $\Lambda(t)$, como preparações iniciais devem ser testadas na próxima fase da pesquisa. O objetivo continua sendo superar resultados pregressos, conseguidos para acoplamentos constantes(65). Não podemos nos esquecer da possibilidade de encontrarmos uma solução exata(63). Sempre que possível, iremos de encontro à analiticidade, tentando compreender mais a fundo as minúcias do modelo.

REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A.; PODOLSKI, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Physical Review*, v. 47, n. 10, p. 0777-0780, 1935.
- 2 BELL, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, v. 1, n. 3, p. 195-200, 1964.
- 3 BELL, J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Review of Modern Physics*, v. 38, n. 3, p. 447-452, 1966.
- 4 ASPECT, A.; GRANGLER, P.; ROGER, G. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. *Physical Review Letters*, v. 47, n. 7, p. 460-463, 1981.
- 5 GIUSTINA, M. et al. Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption. *Nature*, v. 497, n. 7448, p. 227-230, 2013.
- 6 NIELSEN, M.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 7 SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Review*, v. 41, n. 2, p. 303-332, 1999.
- 8 LEIBFRIED, D. et al. Quantum dynamics of a single trapped ion. *Reviews of Modern Physics*, v. 75, n. 1, p. 281-324, 2003.
- 9 POYATOS, J. F.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 23, p. 4728, 1996.
- 10 BRUNE, M. et al. Observing the progressive decoherence of the 'meter' in a quantum measurement. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 24, p. 4887-4890, 1996.
- 11 MONROE, C. et al. A Schrödinger cat superposition state of an atom. *Science*, v. 272, n. 5265, p. 1131-1136, 1996.

- 12 MEEKHOF, D. M. et al. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1796–1799, 1996.
- 13 LEIBFRIED, D. et al. Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 21, p. 4281–4285, 1996.
- 14 BRATTKE, S.; VARCOE, B. T. H.; WALTHER, H. Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 16, p. 3534–3537, 2001.
- 15 BRUNE, M. et al. Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1800–1803, 1996.
- 16 KNIGHT, P. The discrete charm of the photon. *Nature*, v. 380, n. 6573, p. 392–393, 1996.
- 17 JAMES, D. F. V. Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation. *Applied Physics B*, v. 66, n. 2, p. 181–190, 1998.
- 18 SØRENSEN, A.; MØLMER, K. Quantum computation with ions in thermal motion. *Applied Physics B*, v. 82, n. 9, p. 1971–1974, 1999.
- 19 ASPELMEYER, M.; KIPPENBERG, T. J.; MARQUARDT, F. Cavity optomechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 86, n. 4, p. 1391, 2014.
- 20 BOSE, S.; JACOBS, K.; KNIGHT, P. L. Preparation of nonclassical states in cavities with a moving mirror. *Physical Review A*, v. 56, n. 5, p. 4175, 1997.
- 21 KLECKNER, D. et al. Optomechanical trampoline resonators. *Optics Express*, v. 19, n. 20, p. 24, 2011.
- 22 VERHAGEN, E. et al. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. *Nature*, v. 63, n. 26, p. 482, 2012.
- 23 VANNER, M. R. et al. Cooling-by-measurement and mechanical state tomography via pulsed optomechanics. *Nature Communications*, v. 4, n. 26, p. 2295, 2013.
- 24 O'CONNELL, A. D. et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature*, v. 464, n. 26, p. 697, 2010.
- 25 OJANEN, T.; BØRKJE, K. Ground-state cooling of mechanical motion in the unresolved sideband regime by use of optomechanically induced transparency. *Physical Review A*, v. 90, n. 1, p. 013824, 2014.
- 26 MARTIN, I. et al. Ground-state cooling of mechanical resonators. *Physical Review B*,

v. 69, n. 12, p. 125339, 2014.

27 RAO, D. D. B.; MOMENZADEH, S. A.; WRACHTRUP, J. Heralded control of mechanical motion by single spins. *Physical Review Letters*, v. 117, n. 7, p. 077203, 2016.

28 VANNER, M. R. et al. Pulsed quantum optomechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 108, n. 39, p. 16182-16187, 2011.

29 WOLLMAN, E. E. et al. Quantum squeezing of motion in a mechanical resonator. *Science*, v. 349, n. 26, p. 6251, 2015.

30 LATMIRAL, L.; MINTERT, F. Deterministic preparation of highly non-classical macroscopic quantum states. *Quantum Information*, v. 4, n. 44, p. 1-6, 2018.

31 BOOZER, A. D. et al. Reversible state transfer between light and a single trapped atom. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 19, p. 193601, 2007.

32 KIMBLE, H. J. Strong interactions of single atoms and photons in cavity QED. *Physica Scripta*, v. 1998, n. T76, p. 127, 1998.

33 HIGGINBOTTOM, D. B. et al. Pure single photons from a trapped atom source. *New Journal of Physics*, v. 18, n. 9, p. 093038, 2016.

34 WANG, X.-L. et al. 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom. *Physical Review Letters*, v. 120, n. 26, p. 260502, 2018.

35 BRENNECKE, F. et al. Cavity optomechanics with a Bose-Einstein condensate. *Science*, v. 322, n. 5899, p. 235-238, 2008.

36 ROMERO-ISART, O. et al. Large quantum superpositions and interference of massive nanometer-sized objects. *Physical Review Letters*, v. 107, n. 2, p. 020405, 2011.

37 BOSE, S. et al. Spin entanglement witness for quantum gravity. *Physical Review Letters*, v. 119, n. 24, p. 240401, 2017.

38 LIAO, J.-Q.; TIAN, L. Macroscopic quantum superposition in cavity optomechanics. *Physical Review Letters*, v. 116, n. 16, p. 163602, 2016.

39 ASJAD, M.; VITALI, D. J. Reservoir engineering of a mechanical resonator: generating a macroscopic superposition state and monitoring its decoherence. *Journal of Physics B*, v. 47, n. 26, p. 045502, 2014.

40 MYATT, C. J. et al. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs. *Nature*, v. 403, n. 26, p. 269, 2000.

- 41 REITER, F. ; REEB, D. ; SØRENSEN, A. S. Scalable dissipative preparation of many-body entanglement. *Physical Review Letters*, v. 117, n. 4, p. 040501, 2016.
- 42 VERSTRAETE, F.; WOLF, M. W.; CIRAC, J. I. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. *Nature Physics*, v. 5, n. 26, p. 633, 2009.
- 43 BARREIRO, J. T. et al. An open-system quantum simulator with trapped ions. *Nature*, v. 470, n. 26, p. 486, 2011.
- 44 DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes, *Physical Review*, v. 93, n. 1, p. 99-110, 1954.
- 45 ARECCHI, F. T. et al. Atomic coherent states in quantum optics. *Physical Review A*, v. 6, n. 6, p. 2211, 1972.
- 46 GARRAWAY, B. M. The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited. *Philosophical Transactions of the Royal Society A R. Soc. A*, v. 369, n. 1939, p. 1137, 2011.
- 47 STOCKTON, J. K., VAN HANDEL, R.; MABUCHI, H. Deterministic Dicke-state preparation with continuous measurement and control. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022106, 2004.
- 48 ORSZAG, M. *Quantum optics: including noise reduction, trapped ions, quantum trajectories, and decoherence*. Berlin: Springer Verlag, 2000. 361p. (Advances texts in physics).
- 49 YAMAMOTO, Y.; IMAMOGLU, A. *Mesoscopic quantum optics*. New York: John Wiley, 1999.
- 50 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. San Francisco: Addison-Wesley Publishing Company, 2010.
- 51 LOUISELL, W. H. *Quantum statistical properties of radiation*. New York: John Wiley Sons, 1990.
- 52 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- 53 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, S. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 54 COHEN-TANNOUJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum mechanics*. New York: Wiley, 1977.
- 55 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

- 56 JAMES, D. F.; JERKE, J. Effective hamiltonian theory and its applications in quantum information. *Canadian Journal of Physics*, v. 85, n. 6, p. 625–632, 2007.
- 57 BREUER, H. P.; PETRUCCIONE, F. *The theory of open quantum systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- 58 CARMICHAEL, H. *Statistical methods in quantum optics 1: master equations and Fokker-Planck equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- 59 BLUM, K. *Density matrix theory and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- 60 REICHL, A. *A modern course in statistical physics*. New York: Wiley, 2009.
- 61 BALIAN, R. *From microphysics to macrophysics: methods and applications of statistical physics*. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- 62 MONTENEGRO, V.; FERRARO, A.; BOSE, S. Nonlinearity-induced entanglement stability in a qubit-oscillator system. *Physical Review A*, v. 90, n. 1, p. 013829, 2014.
- 63 LEWIS, H. R. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians. *Physical Review Letters*, v. 18, n. 13, p. 510, 1967.
- 64 BUDINI, A. A. Non-Markovian Gaussian dissipative stochastic wave vector. *Physical Review A*, v. 63, n. 1, p. 012106-1-012106-11, 2001.
- 65 MONTENEGRO, V.; de MORAES NETO, G. D.; BOSE, S. *Mechanical qubit-light entanglers in hybrid nonlinear qubit-optomechanics*. 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1906.02404>>. Acesso em: 14 out. 2019
- 66 HIGGINS, K. D. B. et al. Superabsorption of light via quantum engineering. *Nature Communications*, v.5, n.4705, 2014. doi:10.1038/ncomms5705.