**ESTUDO DE PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS DE DOIS QUBITS
DEFINIDAS EM UM SUBESPAÇO LIVRE DE DECOERÊNCIA PARA UM
SISTEMA DE QUATRO QUBITS ACOPLADO AO RESTO DO UNIVERSO
POR UM AGENTE DEGENERADO**

Paulo Eduardo Marques Furtado de Mendonça

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de
São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a
obtenção do título de Mestre em Ciências: “Física
Básica”.

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo J. Napolitano

São Carlos
2004

Mendonça, Paulo Eduardo Marques Furtado de

“Estudo de portas lógicas quânticas de dois qubits definidas em um subespaço livre de decoerência para um sistema de quatro qubits acoplado ao resto do universo por um agente degenerado”

Paulo Eduardo Marques Furtado de Mendonça - São Carlos, 2004

Dissertação (Mestrado) - Área de Física da Universidade de São Paulo, 2004 - Páginas: 130

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

1. Computação Quântica.

I. Título

À minha amada esposa Suely
e queridas filhas Beatriz e Laura

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano, orientador e idealizador deste projeto de mestrado. Seu exemplo de pesquisador é o maior legado que espero ter assimilado.

Agradeço ao Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa e ao Prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco, membros da banca examinadora, pelo comparecimento na defesa, correções, sugestões e elogios.

Agradeço ao Dr. Marcelo A. Marchioli pelas constantes discussões e valiosas sugestões durante toda a realização da pesquisa. Agradeço também pela incansável revisão final dessa dissertação, apontando erros e oferecendo soluções.

Agradeço o apoio da FAPESP que tornou possível esta pesquisa através do apoio financeiro e científico. Meu sincero agradecimento ao assessor deste projeto.

Agradeço o INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, onde tive o privilégio de graduar-me e permanecer até a conclusão deste mestrado.

Como não poderia deixar de ser, agradeço grandemente a meus pais Eduardo Furtado de Mendonça (*in memoriam*) e Sonia Maria M. Furtado de Mendonça, pelo carinho e cuidado a mim dispensados por toda a vida. Ainda que seja classificado como clichê, torna-se inédito quando é sincero: “devo tudo a vocês”.

Às minhas irmãs Maria Raquel e Maria Beatriz, pela inenarrável oportunidade de ter convivido durante a infância e parte da juventude ao lado de pessoas adoráveis. Além do agradecimento, fica também a saudade e o desejo de nos encontrarmos mais, ainda que a vida insista em nos mandar pros lugares mais remotos...

À minha esposa Suely, pela cumplicidade e amor incondicional. Por ter renunciado a uma vida inteira para construir outra nova junto de mim; por ter amor forte e tolerante para suportar as agonias de um graduando e um mestrando em vésperas de exames; por ter confiado em mim até mesmo quando eu não conseguia ser convincente e por ter gerado as duas maiores preciosidades da minha vida.

Às duas maiores preciosidades da minha vida, Beatriz e Laura. À primeira por ser o arquétipo de filha que todo homem delineia. À segunda por fazer meu amor paterno

multiplicar-se em vez de dividir-se (coisa que ela consegue sem nenhum esforço: só dormindo, chorando e mamando).

Ao Edson Mosman, pela amizade e presença em momentos inesquecíveis. Pelas boas risadas, cervejadas de um ou dois copos, picolés, padarias, churrascadas na trevo, mudanças, nascimentos, fotografias, aniversários surpresa, pinturas de parede, cachoeiras para os homens de coração puro, acendimento de churrasqueiras e todos os outros serviços exclusivos da Mosman & Mosman Incorporações.

Ao Arie, pelas numerosas e verdadeiras demonstrações de amizade e pelas discussões físicas, meta-físicas e “não-físicas”. A alegria da sua presença representou *fôlego novo* no momento mais difícil desse mestrado.

Aos eternos companheiros da graduação: Fernandão, Fernandinho e Fábio. Que tenhamos sempre muitas histórias pra contar quando nos revermos; e se não tivermos, a gente faz como sempre: conta as mesmas histórias de novo.

Ao Claudemir e à Luciane, pelas tantas tentativas (normalmente frustradas) de tentar entender o ponto de vista de um matemático puro sobre este trabalho. Das próximas vezes tentaremos de novo sem vinho.

Aos companheiros de sala Felipe e Yuri, por terem ouvido pacientemente minhas entusiasmadas manifestações de alegria frente às “descobertas revolucionárias deste trabalho” (sempre seguidas de um pouco de bom senso para perceber que havia erro nas considerações iniciais).

À Lia, pela atenção e boa vontade em ajudar. Pelas “animadas” noitadas de estudos nas vésperas das provas, listas de exercícios, apresentações, e todas as situações estafantes em que ela aconselhava “Muita calma nessa hora...”.

Gostaria de agradecer especialmente aos amigos Vagner e Lúcia, à minha esposa Suely, à minha filha Beatriz e à equipe médica do Hospital Nossa Senhora do Carmo de Coronel Fabriciano - MG. Graças a essas pessoas eu pude manter o ingrediente indispensável para a realização de qualquer projeto: a vida.

Finalmente agradeço a todos aqueles que de um jeito ou de outro acabei conhecendo e que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho... Meu sincero muito obrigado a todos os amigos, professores, funcionários e familiares.

Conteúdo

Agradecimentos	iii
Lista de Figuras	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Conceitos Fundamentais	3
2.1 Noções Elementares de Computação Quântica	4
2.1.1 <i>Qubit</i>	4
2.1.2 Emaranhamento	6
2.1.3 Operações Reversíveis	8
2.1.4 Paralelismo Quântico	11
2.2 Medidas de Distância	13
3 Portas Lógicas Quânticas	15
3.1 Hamiltoniano	16
3.2 Condições para Dinâmica Livre de Decoerência	17
3.3 Quatro spins	20
3.4 Restrição ao Hamiltoniano	23
3.5 Conjunto Universal de Portas Lógicas	27
3.6 Hamiltonianos para as Portas Lógicas	29
3.6.1 A porta C-NOT	32
3.6.2 A porta T1	33
3.6.3 A porta T2	34
3.6.4 A porta Hadamard 1	34
3.6.5 A porta Hadamard 2	35

3.7	Fidelidade durante a operação da porta C-NOT	36
3.8	Sistemas Indeterminados	39
4	Implementação: Junções Josephson	41
4.1	Supercondutividade	42
4.2	Quantização do Fluxo Magnético	45
4.3	Equações de Josephson	46
4.4	<i>Qubits</i> via Junções de Josephson	48
4.4.1	<i>Qubits</i> baseados no grau de liberdade associado ao fluxo magnético .	48
4.4.2	<i>Qubits</i> baseados no grau de liberdade associado a carga elétrica	49
4.5	Perspectivas para realização das portas lógicas	52
5	Efeito Zenão Quântico	53
5.1	Revisão da Literatura	54
5.1.1	Artigo 1: O paradoxo de Zenão na teoria quântica	55
5.1.2	Artigo 2: Paradoxo de Zenão na teoria quântica	60
5.1.3	Artigo 3: Efeito Zenão quântico	63
5.1.4	Artigo 4: Computação quântica usando dissipação para permanecer num subespaço livre de decoerência	65
5.2	Nossa abordagem	70
5.2.1	Contaminação do Hamiltoniano	71
5.2.2	Operador Evolução Temporal	73
5.3	Demonstração do EZQ no Cenário de Interação	76
5.4	Fidelidade durante operação da porta C-NOT perturbada	82
5.4.1	Integrações	85
5.5	Resultados	86
6	Conclusões	90
7	Apêndices	x
	Apêndice A: Independência Linear	x
	Apêndice B: Hamiltonianos para portas lógicas	xiv
	Apêndice C: Paradoxos de Zenão	xviii
	Apêndice D: Manipulações Matemáticas I	xxii
	Apêndice E: Manipulações Matemáticas II	xxvii
	Apêndice F: Manipulações Matemáticas III	xxxi
	Apêndice G: Valores médios de operadores deslocamentos	xxxiii

Lista de Figuras

3.1	Representação da matriz bloco diagonal na base computacional referente ao operador $\mathbf{H}_0(t)$	25
3.2	Fidelidade entre o estado em evolução regida pela porta C-NOT e o estado esperado teoricamente.	39
4.1	SQUID anelar – a junção Josephson interrompe o contorno Γ levando à modificação da lei de quantização do fluxo usual.	46
4.2	A seqüência de potenciais com Φ_x crescente, revela a mudança da posição de equilíbrio inicial de uma configuração estável em $\Phi_x = 0$, para uma biestável (<i>qubit</i>) em $\Phi_x = \frac{\Phi_0}{2}$ e finalmente para uma configuração metaestável em $\Phi_x = \Phi_0$	49
4.3	Caixa de par de Cooper – dispositivo usado para implementar o <i>qubit</i> através do grau de liberdade associado a carga elétrica.	50
4.4	A energia potencial associada às cargas armazenadas na caixa depende da carga q , ou da tensão aplicada V_g . O gráfico tem como parâmetro o número n , que dá o número de pares de Cooper em excesso na caixa.	51
4.5	Próximo aos pontos de degenerescência, o termo fraco de acoplamento mistura os estados de carga e modifica a energia dos auto-estados. Na vizinhança desses pontos o sistema se comporta efetivamente como um sistema de dois níveis.	51
5.1	Número de publicações sobre o efeito Zenão quântico no período de 1976 a 2002.	53
5.2	Diagrama de níveis de energia da proposta de Cook para demonstração do EZQ.	63
5.3	Diagrama de níveis de energia do $^9\text{Be}^+$ num campo magnético B	64
5.4	Resultado experimental e teórico das probabilidades de transição $1 \rightarrow 2$ em função do número n de pulsos de medida.	64

5.5	Dois átomos em posições fixas na cavidade para realização de operações quânticas.	66
5.6	Efeito do termo perturbativo de primeira ordem removendo o sistema do SLD.	84
5.7	Efeito do termo perturbativo de segunda ordem: preservação parcial do sistema no SLD.	84
5.8	A fidelidade oscila com amplitudes progressivamente menores à medida em que aumentamos o valor de Λ . Além disso é possível ver no detalhe que as oscilações são amortecidas, mostrando que uma vez que o sistema é retirado do SLD não ocorre retorno do mesmo para lá. Na figura o tempo da porta é $\theta = 1$ e $\nu_c = 10^5$	87
5.9	O comportamento global do gráfico é crescente, conforme seria de se esperar pela teoria do EZQ. O trecho decrescente inicial surge como consequência da aplicação de teoria de perturbação com o agente perturbador muito intenso; o trecho oscilatório apresenta comportamento médio crescente e tende assintoticamente a 1.	88
7.1	A tartaruga larga com vantagem S_0 em relação a Aquiles. Instantes depois, Aquiles alcança a posição inicial da tartaruga, mas ela já se deslocou $\frac{v_T}{v_A} S_0$. Assim, a separação entre os competidores vai diminuindo segundo potências da razão $\frac{v_T}{v_A}$ cada vez que Aquiles alcança a posição prévia da tartaruga. . . .	xix

Resumo

Nesta dissertação estudamos, no âmbito teórico, algumas propostas recentes de processamento de informação quântica passiva, isto é, descartando protocolos de correção de erros. Recorrendo à criação de subespaços livres de decoerência através de um sistema físico de quatro spins $\frac{1}{2}$ acoplados ao resto do universo por um agente degenerado, mostramos ser possível construir um conjunto universal de portas lógicas (**C-NOT**, **T** e **Hadamard**) neste mesmo subespaço, alcançando, por conseguinte, a realização de qualquer operação computacional, insensivelmente ao resto do universo.

Partimos de um hamiltoniano geral com interações individuais de cada spin com campos externos, além de acoplamentos controlados entre pares de spins. Experimentalmente, hamiltonianos deste tipo são comuns no contexto de junções Josephson, motivo pelo qual tratamos esta implementação em um capítulo especial.

Introduzindo perturbativamente ao hamiltoniano operadores espúrios ao subespaço livre de decoerência, incluímos sensibilidade do sistema frente ao ambiente, criando a possibilidade da incursão de erros através de mecanismos de dissipação. Tais mecanismos foram investigados em termos da intensidade do parâmetro de acoplamento entre o sistema e o ambiente, revelando uma clara evidência teórica do Efeito Zenão Quântico, através da excelente concordância entre resultados de operações realizadas em subespaços livres de decoerência e operações realizadas em sistemas fortemente acoplados ao resto do universo. Neste sentido, selecionamos a fidelidade como medida de distância entre um estado em evolução a partir de um certo estado inicial do subespaço livre de decoerência (e submetido a dissipação), e um estado em evolução regida pela mesma operação quântica e a partir das mesmas condições iniciais no caso ideal, livre de decoerência.

Essa abordagem explícita permitiu-nos obter a razão necessária entre os parâmetros associados a perturbação (que remove o estado do subespaço original) e acoplamento (entendido como a frequência entre as medidas promovidas pelo resto do universo), para alcançar a eficiência desejada na realização de uma certa porta lógica.

Tecnicamente, o trabalho envolveu vários resultados matemáticos novos e operacionalmente úteis, levando a simplificações importantes durante os cálculos envolvidos.

Abstract

In this dissertation we studied theoretical aspects of some recent proposals of passive quantum information processing, that is, discarding error correction protocols. Falling back upon the creation of decoherence-free subspaces through a physical system of four spins $\frac{1}{2}$ coupled to the rest of the universe by a degenerate agent, we showed to be possible to build a universal set of logical quantum gates (**C-NOT**, **T** and **Hadamard**) in this same subspace, reaching, consequently, the accomplishment of any computational operation, callously to the rest of the universe.

We started from a general Hamiltonian with individual interactions of each spin with external fields, besides controlled couplings between spin pairs. Experimentally, Hamiltonians like this are common in the context of Josephson junctions and, therefore, we treated this implementation in a special chapter.

Perturbatively introducing spurious operators to the hamiltonian in the decoherence-free subspace, we included sensibility of the system to the environment, creating the possibility of the incursion of errors through dissipation mechanisms. Such mechanisms were investigated in terms of the intensity of the coupling parameter between the system and the environment, revealing an obvious theoretical evidence of the Quantum Zeno Effect, through the excellent agreement between the results of operations accomplished in decoherence free subspace and operations accomplished in systems strongly coupled to the rest of the universe. In this sense, we selected the fidelity as the distance measure between a state in evolution starting from a certain initial state of the decoherence-free subspace (and submitted to the dissipation), and a state in evolution governed by the same quantum operation and starting from the same initial conditions in the ideal decoherence-free case.

This explicit approach allowed us to obtain the necessary quotient between the associated disturbance parameter (that removes the state from the original subspace) and coupling parameter (understood as the frequency between the measurements promoted by the rest of the universe), to reach the efficiency desired in the accomplishment of a logic gate.

Technically, the work involved several new operationally useful mathematical results, leading to important simplifications during the involved calculations.

Introdução

Em meados da década de 80 do último século, Feynman percebeu que as leis da física aparentemente não impunham qualquer barreira à redução do tamanho dos computadores [1]. Dessa forma, o único limite para tal miniaturização ocorreria quando os *bits* assumissem o tamanho dos átomos; escala em que imperam as leis da mecânica quântica. Esta foi certamente a largada de uma corrida que ainda não se encerrou: a busca da construção dos *computadores quânticos*.

Duas décadas de intensa pesquisa já se passaram desde a proposta original de Feynman; tempo suficiente para transformar o assunto em projetos de pesquisas milionários por todo o mundo, envolvendo cientistas ávidos por implementar os processadores quânticos ou para definitivamente refutá-los. Embora ainda não se tenha previsão precisa de quando teremos resultados conclusivos (um computador quântico ou uma demonstração incontestável de sua impossibilidade), um incontável e crescente número de desdobramentos da proposta original incita físicos das mais diversas áreas a direcionarem seus esforços para a teoria da informação quântica, situando o assunto num campo ainda mais efervescente.

Certamente, tantos investimentos intelectuais e financeiros não se consolidariam se a teoria da computação quântica não apresentasse claramente suas vantagens sobre a computação clássica. De fato, o desenvolvimento de algoritmos quânticos evidencia que é possível realizar eficientemente tarefas intratáveis classicamente. Atualmente, a mais forte motivação para a construção de computadores quânticos é a possibilidade de implementar o algoritmo de fatoração de Shor [2]. Este mostra que a decomposição em fatores primos de um número de n dígitos pode ser realizada num tempo polinomial em n (em contraste com a complexidade exponencial dos algoritmos clássicos para esta tarefa). Além deste, o algoritmo de Grover [3], mostra que a localização de um dado num banco de n entradas é realizada mais rapidamente se utilizamos as leis da mecânica quântica. Juntos, os algoritmos de Shor e Grover representam uma ameaça fatal para os mais modernos protocolos de crip-

tografia, colocando a pesquisa em computação quântica como objeto de interesse militar e empresarial, além de acadêmico.

Neste mestrado buscamos estudar alguns aspectos relevantes da computação quântica, como conjuntos universais de portas lógicas quânticas, emaranhamento quântico, decoerência, subespaços livres de decoerência, efeito Zenão quântico, etc.. Consideramos que a realização deste projeto representou um precioso aprendizado dos conceitos fundamentais da teoria da informação quântica, bem como uma primeira tentativa de participação nesta nova área de pesquisa. Dividimos esta dissertação da seguinte forma:

No **Capítulo 2** revisamos os principais conceitos físicos e matemáticos necessários a realização do trabalho, como o *qubit*, o emaranhamento, as portas lógicas quânticas, a fidelidade, etc..

No **Capítulo 3**, partindo de um hamiltoniano geral que dá a interação entre até dois spins, construímos explicitamente hamiltonianos de um conjunto universal padrão de portas lógicas, ou seja, um conjunto que aproxima com precisão arbitrária qualquer operação lógica desejada. Mais do que isso, os hamiltonianos obtidos foram cuidadosamente vinculados a operar somente em um certo subespaço livre de decoerência. Com isso, garantimos que além de conseguirmos efetuar qualquer operação lógica, as mesmas serão eficientemente realizadas – livres dos efeitos deletérios impostos ao sistema pelo resto do universo durante o processamento da informação.

No **Capítulo 4** estudamos uma implementação particular de *qubit*: dispositivos com junções supercondutoras de Josephson. Neste estudo, mostramos duas maneiras distintas de se implementar sistemas quânticos de dois níveis truncando sistemas de muitos níveis. A escolha desta proposta particular justifica-se na semelhança entre os hamiltonianos típicos destes dispositivos do estado sólido e nosso hamiltoniano de partida.

No **Capítulo 5** voltamos a tratar a operação das portas lógicas, mas desta vez permitindo que as operações se realizassem também fora do subespaço livre de decoerência. Dessa forma, mostramos que no limite de acoplamentos fortes entre o sistema e o ambiente, o efeito Zenão quântico protege a informação da decoerência. Neste capítulo, usamos teoria de perturbação para introduzir o acoplamento entre os hamiltonianos obtidos no **Capítulo 3** e o resto do universo. Dessa forma verificamos a partir de primeiros princípios a ocorrência do efeito Zenão quântico, ao invés de simplesmente incorporá-lo *a priori* como é comumente feito na literatura. Finalmente, através de uma análise numérica, pudemos quantificar a razão necessária entre as intensidades da perturbação e do acoplamento com o ambiente para que as operações quânticas se realizem com a eficiência desejada.

Concluimos a dissertação no **Capítulo 6**.

Conceitos Fundamentais

A história da computação quântica se inicia no século passado e na década de 80, muitos anos depois da descoberta da mecânica quântica. Evidentemente que o desenvolvimento desta nova teoria encontrou na mecânica quântica sua válvula propulsora, muito bem expressa na célebre questão proposta por Feynman [1]: sendo a mecânica clássica resultante de um limite da mecânica quântica, não seriam os computadores clássicos também limitações de uma família de máquinas muito mais poderosas – os *computadores quânticos*?

Mesmo com a questão aberta há décadas, ainda hoje não há consenso sobre como respondê-la, e a dúvida divide os cientistas em posturas antagônicas. Neste trabalho, assumimos uma posição positiva com relação à questão de Feynman, acreditando na possibilidade da existência de computadores quânticos no futuro, e investigando formas de se contornar as dificuldades encontradas no presente. Para tanto, nossa ferramenta de trabalho é a mecânica quântica, germe de grande parte das pesquisas físicas realizadas no último século.

Embora não tenhamos a pretensão de apresentar aqui uma revisão de mecânica quântica, alguns conceitos merecem destaque no escopo desta dissertação, principalmente aqueles mais fortemente vinculados à computação quântica. Neste sentido, este capítulo procura atender a dois objetivos principais:

1. Descrever as necessidades e dificuldades do desenvolvimento de computadores quânticos;
2. Tornar o trabalho consistente, apresentando ao leitor o ferramental que iremos usar.

Vamos iniciá-lo discutindo o que é computação quântica, e como acreditamos que ela deva ser realizada.

2.1 Noções Elementares de Computação Quântica

Em poucas palavras, podemos definir computação quântica como o estudo de tarefas de processamento de informação que podem ser realizadas usando sistemas físicos quânticos. Embora a definição seja simples, a realização, ao contrário, é um dos grandes desafios impostos aos físicos do século XXI. É para entender o porquê dessas dificuldades que preparamos esta seção.

Em vez de listarmos aqui os problemas envolvidos, vamos abordar a questão de forma mais aprazível: discutindo as vantagens de um computador quântico sobre um computador clássico, vamos nos deparar com as dificuldades reais de sua implementação, satisfazendo nosso propósito original. Assim, ao final da discussão, além de entendermos os problemas, teremos também aprendido um pouco sobre os recursos disponíveis aos computadores quânticos e ausentes nos computadores clássicos.

Embora a proposta seja atraente, a sua execução irretocável é algo ainda inacessível para a ciência atual. Na referência [4], por exemplo, encontramos:

“O que faz o processamento quântico de informação poderoso? O que separa os mundos clássico e quântico? Que recursos, ausentes no mundo clássico, estão sendo usados por um computador quântico? As respostas existentes para essas questões são ainda nebulosas e incompletas; é nossa esperança que as nuvens baixem nos anos por vir, para que possamos obter uma clara apreciação das possibilidades e limitações do processamento quântico de informação.”

Portanto, valendo-nos do direito de ser nebulosos e incompletos, vamos começar a apontar algumas importantes características da computação quântica.

2.1.1 Qubit

Assim como a computação clássica usa o chaveamento de sinais elétricos para codificar a informação na linguagem dos bits 0 e 1, a computação quântica, analogamente, codifica a informação usando sistemas de dois níveis, normalmente representados na base computacional $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Sendo esses estados vetores do espaço de Hilbert, surge a primeira diferença fundamental entre os computadores clássicos e os computadores quânticos: enquanto que os clássicos estão exclusivamente nos estados 0 ou 1, os computadores quânticos admitem superposições lineares para o estado do sistema, ou seja,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle . \quad (2.1)$$

Dessa forma, a computação quântica não dispõe de dois estados apenas, mas de tantos quantos forem as combinações possíveis de α e β (números complexos) que satisfaçam a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Os estados da forma da Eq. (2.1) recebem então o nome de *qubit* – designando o bit quântico. Veremos, posteriormente, que estados de superposição representam um inestimável avanço da computação quântica em relação à clássica, possibilitando um paralelismo natural na execução de operações lógicas.

Vamos analisar, à luz do formalismo de operadores densidade, algumas das muitas diferenças entre o *bit* e o *qubit*. Fazendo $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, temos

$$\rho = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^* |0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta |1\rangle\langle 0|. \quad (2.2)$$

Este estado, com α e β não nulos, usado como portador de informação, revela uma característica peculiar da computação quântica: a informação não está codificada somente nos termos $|n\rangle\langle n|$, com $n \in \{0, 1\}$ (populações) do *qubit*, mas também nos termos $|n\rangle\langle m|$, com $n \neq m$ e $n, m = \{0, 1\}$ (coerências). É claro que as coerências jamais poderiam aparecer no contexto clássico, pois elas se originam na superposição da Eq. (2.1). Dessa forma, as coerências são elementos fundamentais para a teoria da informação quântica, mas infelizmente são também bastante sensíveis.

Em 1991, Zurek mostrou que a interação entre um sistema físico com uma coleção de osciladores harmônicos (simulando o ambiente), leva a uma evolução não unitária do operador densidade inicial, resultando no quase imediato desaparecimento das coerências [5]. Em outras palavras, se não conseguirmos isolar nossos *qubits* dos muitos graus de liberdade do ambiente, parte da informação será perdida como consequência do desaparecimento das coerências, e o computador rapidamente perde sua característica genuinamente quântica. Este fenômeno, conhecido como decoerência, é encarado como o agente conversor de toda realidade hipoteticamente quântica para esta versão clássica do mundo que observamos cotidianamente. É devido à decoerência que não observamos, por exemplo, estados de gatos vivos e mortos superpostos. No contexto da informação quântica, acredita-se que a decoerência seja o principal obstáculo a ser vencido, o que fica patente nesta sentença extraída da referência [6]:

“O processamento de informação quântica será uma realidade quando um controle ótimo da coerência quântica em ambientes ruidosos forem alcançados.”

Vamos ilustrar as virtudes dos estados de superposição mais adiante. Antes, porém, vamos tratar um outro elemento sem análogo clássico de grande utilidade para a computação quântica.

2.1.2 Emaranhamento

O emaranhamento é uma característica exclusivamente quântica de sistemas compostos (duas ou mais entidades), e do ponto de vista matemático, muito simples de se definir:

Seja um sistema constituído de duas partes A e B descritas inicialmente pelos estados $|\psi\rangle_A$ e $|\varphi\rangle_B$. O estado global inicial deste sistema, $|\Psi\rangle$, é dado, segundo o procedimento padrão da mecânica quântica, pelo produto tensorial

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B \equiv |\psi\varphi\rangle, \quad (2.3)$$

no qual definimos o *ket* $|\psi\varphi\rangle$, omitindo a apresentação do produto tensorial e assumindo a correspondência entre a primeira posição deste *ket* com o estado do sistema A e a segunda posição com o estado do sistema B . Entretanto, após a interação entre os dois sistemas, não podemos garantir que o estado global resultante continuará sendo expresso numa forma fatorada das partes A e B . Quando a fatoração não é possível, diz-se que acessamos um estado emaranhado. Vamos ilustrar este fenômeno com um exemplo simples.

Sejam os operadores de levantamento e abaixamento do momento angular total para um sistema de dois spins $\frac{1}{2}$, os componentes do hamiltoniano de interação:

$$H = \frac{\omega}{\hbar} (\mathbf{J}_+ \otimes \mathbf{J}_- + \mathbf{J}_- \otimes \mathbf{J}_+),$$

onde ω é uma frequência característica que dá a dimensão de energia ao hamiltoniano. Calculando o operador de evolução temporal associado, e aplicado-o a um estado inicial fatorado, arbitrariamente escolhido como $|01\rangle$ (estamos indicando, na base computacional, que $|\psi\rangle_A = |0\rangle$ e $|\varphi\rangle_B = |1\rangle$), temos:

$$e^{-iHt/\hbar} |01\rangle = \cos(\omega t) |01\rangle - i \sin(\omega t) |10\rangle. \quad (2.4)$$

Esta dinâmica evidencia que para certas durações da interação entre os sistemas, o estado resultante é emaranhado. Por exemplo, tomando $t = \frac{\pi}{4\omega}$, resulta o estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - i |10\rangle). \quad (2.5)$$

Igualando-o à forma fatorada mais geral

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - i |10\rangle) &= (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes (\gamma |0\rangle + \delta |1\rangle) \\ &= \alpha\gamma |00\rangle + \alpha\delta |01\rangle + \beta\gamma |10\rangle + \beta\delta |11\rangle, \end{aligned}$$

resulta o sistema impossível

$$\begin{cases} \alpha\gamma = 0 \\ \alpha\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta\gamma = -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \beta\delta = 0, \end{cases}$$

deixando claro que o estado da Eq. (2.5) é realmente um estado emaranhado.

Embora a interação seja necessária para criar o emaranhamento, nem sempre ela é suficiente. No nosso próprio exemplo, para um tempo $t = \frac{\pi}{2\omega}$, o estado resultante é $-i|10\rangle$, que é obviamente fatorado.

Como dissemos, matematicamente é fácil entender o emaranhamento. Entretanto, seu significado físico, origens e aplicações são aspectos de intensa investigação atualmente. O fato de não conseguirmos decompor o estado do sistema global nas suas partes constituintes introduz um aspecto curioso à mecânica quântica: a não localidade. Muita discussão já se fez sobre esta característica aparentemente “fantasmagórica”, dando origem a temas controversos como o “Paradoxo de EPR” [7, 8], as variáveis ocultas, as desigualdades de Bell [9, 10], etc... Embora estes sejam tópicos obrigatórios no estudo do emaranhamento, não vamos discutí-los aqui, porque encontram-se fora do escopo desta dissertação. Entretanto, o leitor interessado encontrará uma preciosa iniciação a esses temas nas referências aqui citadas. Além destas, uma numerosa produção literária encontra-se disponível na internet e nos mais reconhecidos periódicos científicos, o que reflete a importância magnificente destes assuntos.

No contexto da computação quântica, a forma fatorada da Eq. (2.3) torna possível localizarmos toda a informação, codificada nos *qubits*, distribuída pelas partes constituintes do sistema. Por outro lado, a não localidade se expressa no fato de que a informação pode ser codificada não somente nos sistemas físicos em si, mas também nas correlações (não-locais) entre eles – são essas correlações que impedem a fatoração de estados como o da Eq. (2.5). Assim, a computação quântica se apóia pesadamente sobre o fenômeno do emaranhamento para dispor dessas correlações não-locais como repositórios de informação. Daí seguem algumas dificuldades: esta *informação não-local* costuma ser difícil de recuperar, isto porque o processo de medida quântico destrói as correlações, danificando parte da informação codificada. Na **subseção 2.1.4** veremos uma forma de extrair a informação das correlações. A busca de procedimentos como este criou uma área de especialização da teoria de informação quântica conhecida como Algoritmos Quânticos.

Se por um lado o emaranhamento é a matéria prima da computação quântica, por outro lado ele também pode causar sérios problemas. O emaranhamento de um certo sistema físico com o resto do universo distribui a informação nas infinitas correlações com o ambiente. Porém, sendo o emaranhamento o resultado de uma interação, temos um canal

aberto para a ação da decoerência. É claro que, tornando clássico o que era quântico, a decoerência fará com que toda a informação colocada nas correlações seja perdida e, portanto, todo o processamento comprometido.

No **capítulo 3** veremos como impedir o emaranhamento do sistema com os graus de liberdade do universo, promovendo eficientemente o processamento de informação quântico.

2.1.3 Operações Reversíveis

De nada adiantaria dispor de estados de superposição e estados emaranhados se não pudéssemos operar com a informação codificada neles. Felizmente, é possível construir *portas lógicas quânticas*, em analogia às portas lógicas clássicas. Na verdade, as primeiras nada mais são do que matrizes de evolução temporal.

Tomando o hamiltoniano do sistema físico adotado e calculando o operador de evolução temporal associado, teremos sempre matrizes unitárias (considerando a hermiticidade dos hamiltonianos). Se formos capazes de modificar o hamiltoniano, estaremos modificando também as matrizes de evolução temporal. Neste sentido, a habilidade de controlar as interações do sistema físico determina que tipo de modificação imprimimos ao seu estado inicial, ou seja, que porta lógica quântica estaremos implementando.

Uma vez que as portas lógicas quânticas são unitárias (sempre admitem inversa), as operações por elas promovidas são sempre reversíveis. Isto é, olhando para os *qubits* de saída podemos *sempre* inferir quais foram os *qubits* de entrada. Embora a computação clássica possa, em princípio, ser realizada reversivelmente através da porta de Toffoli [4], na prática outras portas lógicas irreversíveis são usadas, e normalmente associamos a irreversibilidade como característica típica dos computadores clássicos.

O estudo das vantagens de operar com portas lógicas reversíveis é freqüentemente associado à grandezas termodinâmicas como energia e entropia, e culmina na crença de que as operações quânticas não envolveriam um custo energético [11]. É relativamente simples entender as razões disso, considerando o princípio de Landauer [12]:

Princípio de Landauer: Suponha que um computador apaga um *bit* de informação. A quantidade de energia dissipada no ambiente é *no mínimo* $k_B T \ln 2$, onde k_B é a constante de Boltzmann, e T a temperatura do ambiente onde se encontra o computador.

Mesmo que o computador quântico gere uma enorme quantidade de dados durante a execução de suas operações, esses não precisam ser apagados quando se tornarem inúteis (depois de impressos, por exemplo). Basta repetir todo o procedimento no sentido inverso, reduzindo todo o “lixo” acumulado de volta ao estado inicial.

Vamos comentar algumas importantes portas lógicas quânticas envolvidas neste trabalho.

Portas lógicas de 1 *qubit*

Essas são portas que admitem apenas um *qubit* na entrada. Assim sendo, o conjunto das portas de 1 *qubit* é tão grande quanto o grupo de matrizes unitárias 2×2 . Essa é uma característica de certa forma surpreendente das portas lógicas quânticas, dado que no contexto clássico só existe uma porta de 1 *bit*: a porta NOT, transformando 0 em 1 e 1 em 0.

Todas as matrizes de Pauli, por exemplo, podem ser encaradas como portas lógicas quânticas:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde estamos usando a base computacional nas expressões das matrizes acima. Aqui os vetores da base computacional representam os spins para cima ou para baixo na direção $\hat{z}$:

$$|0\rangle = |\uparrow\rangle, \quad |1\rangle = |\downarrow\rangle.$$

Note que a matriz σ_x desempenha o papel da porta clássica NOT:

$$\begin{aligned} \sigma_x |0\rangle &= |1\rangle, \\ \sigma_x |1\rangle &= |0\rangle. \end{aligned}$$

Nesta dissertação, abordaremos duas importantes portas lógicas de 1 *qubit*, a porta **T** (também conhecida como $\frac{\pi}{8}$) e a porta de **Hadamard**:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A porta **T** simplesmente introduz a fase $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ao *qubit* de saída quando o *qubit* de entrada for $|1\rangle$, e funciona como uma identidade para a entrada $|0\rangle$. Já a porta de **Hadamard** opera menos trivialmente, de acordo com as igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \\ \mathbf{H} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

A importância da porta de **Hadamard** fica evidente nessas equações, afinal ela transforma estados ordinários como $|0\rangle$ e $|1\rangle$ em estados de superposição, o que faz com que esta porta tenha vasta aplicação na elaboração de algoritmo quântico.

Portas lógicas de 2 *qubits* controladas

Assim como o conjunto das portas de um *qubit* se constitui do grupo das matrizes unitárias 2×2 , as portas de dois *qubits* são representadas pelo grupo das matrizes unitárias 4×4 . Entretanto, nesta dissertação estaremos interessados apenas nas portas de dois *qubits* controladas, isto é, aquelas em que um dos *qubits* é usado como controle sobre se uma certa operação será ou não realizada sobre o outro *qubit*. Nesse sentido, as portas de dois *qubits* controladas não são muito diferentes das portas de um *qubit*. Em essência, o *qubit* adicional serve apenas para decidir se uma certa operação de um *qubit* será aplicada ou não.

O primeiro *qubit* é chamado de *qubit controle*, e o segundo de *qubit alvo*. Para denotar as portas de dois *qubits* controladas, normalmente acrescenta-se a letra **C** (controle), na frente do nome da porta de um *qubit* associada. Assim, de forma geral, as portas de dois *qubits* controladas são escritas como **C-U**, onde **U** é uma matriz unitária 2×2 qualquer

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Na base computacional de dois *qubits* $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, as portas controladas são dadas em sua forma mais geral por:

$$\mathbf{C-U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}.$$

A aplicação dessa matriz aos vetores da base esclarece o funcionamento das portas controladas:

$$\begin{aligned} \mathbf{C-U} |00\rangle &= |00\rangle, & \mathbf{C-U} |10\rangle &= |1\rangle \otimes \mathbf{U} |0\rangle, \\ \mathbf{C-U} |01\rangle &= |01\rangle, & \mathbf{C-U} |11\rangle &= |1\rangle \otimes \mathbf{U} |1\rangle. \end{aligned}$$

Fica óbvio, a partir dessas equações, que a operação **U** só se aplica ao *qubit alvo* se o *qubit controle* for $|1\rangle$, caso contrário, o estado não sofre qualquer transformação.

Talvez a porta mais usada nos circuitos quânticos atuais seja a porta **C-NOT**, que nada mais é do que a porta σ_x controlada:

$$\mathbf{C-NOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, sua aplicação aos estados da base leva a:

$$\begin{aligned} \mathbf{C-NOT} |00\rangle &= |00\rangle , & \mathbf{C-NOT} |10\rangle &= |11\rangle , \\ \mathbf{C-NOT} |01\rangle &= |01\rangle , & \mathbf{C-NOT} |11\rangle &= |10\rangle . \end{aligned}$$

Usaremos as portas de **Hadamard**, **T** e **C-NOT** ao longo desta dissertação.

2.1.4 Paralelismo Quântico

Os elementos discutidos nas subseções anteriores são suficientes para apreciarmos a solução oferecida pela mecânica quântica a um problema insolúvel classicamente: o *Problema de Deutsch*.

A exposição que faremos aqui é inspirada na referência [11] e servirá para ilustrar como os estados de superposição, as correlações não-locais e as operações reversíveis são explorados na realização de algoritmos quânticos. Vamos enunciar o problema.

Imagine que tenhamos um caixa preta que calcula a função de um *bit* $f(x)$, sendo x o *bit* de entrada. Não estamos interessados em conhecer os valores da função $f(0)$ e $f(1)$ (embora saibamos que eles só possam ser 0 ou 1), mas tão somente em responder se a função f é balanceada ($f(0) \neq f(1)$) ou constante ($f(0) = f(1)$).

Um computador clássico resolve nossa questão em dois passos, primeiro calculando $f(0)$, depois $f(1)$ e só então realizando a comparação entre os resultados. A pergunta que se faz é: um computador quântico consegue resolver o problema em somente um processamento? – este é o problema de Deutsch. Vamos mostrar como Deutsch respondeu afirmativamente a essa questão em 1985, criando o primeiro algoritmo quântico da história.

Já que vamos usar teoria de informação quântica, devemos mudar nossa linguagem de *bits* x e $f(x)$ para os respectivos *qubits* $|x\rangle$ e $|f(x)\rangle$. Como a operação lógica f pode ser não-inversível (caso contrário saberíamos que a função é sempre balanceada), e as operações lógicas quânticas têm que ser reversíveis, precisamos introduzir um outro *qubit* ao problema para instaurar a necessária reversibilidade. Tomamos o *qubit* $|y\rangle$ e a operação lógica $\mathbf{U}_f$ de dois *qubits*, tais que:

$$\mathbf{U}_f |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle ,$$

onde o sinal $\oplus$ indica adição módulo 2. É fácil perceber que essa porta é uma porta controlada, entretanto, o *qubit* controle não é $|x\rangle$, mas sim $|f(x)\rangle$. Em outras palavras, o segundo *qubit* é invertido se $|f(x)\rangle = |1\rangle$ e nada ocorre quando $|f(x)\rangle = |0\rangle$.

A engenhosidade de Deutsch não se encerra na proposta desta porta lógica, mas continua na seleção de quais *qubits* serão utilizados nas entradas $|x\rangle$ e $|y\rangle$. Como primeira

etapa, escolhe-se o *qubit alvo* no seguinte estado de superposição

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) .$$

Mantendo ainda o *qubit* $|x\rangle$ nesta forma geral, a atuação de U_f leva a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} U_f |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle (|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) \\ &= \frac{(-1)^{f(x)}}{\sqrt{2}} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Escolhendo então

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) ,$$

e substituindo na Eq. (2.7), é imediato obter que:

$$\frac{1}{2} U_f (|0\rangle + |1\rangle) (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2} \left[(-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle \right] (|0\rangle - |1\rangle) . \quad (2.8)$$

Note, portanto, que tanto $f(0)$ quanto $f(1)$ estão calculadas num só processamento no estado do primeiro *qubit*, graças ao fato de termos usado estados de superposição nas entradas. Porém, só isso não é suficiente para resolvermos o problema de Deutsch; afinal, se medirmos o estado do primeiro *qubit* na base computacional, vamos extrair apenas o valor de $f(0)$ ou $f(1)$, e não uma comparação entre eles. Nesse sentido, embora os valores de $f(0)$ e $f(1)$ estejam impressos nas fases do primeiro *qubit*, não conseguiríamos acessá-las simultaneamente.

A solução natural para este impasse é medir o estado do primeiro *qubit* em outra base, por exemplo, na base

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle) .$$

Assim, fica claro que sempre que o resultado da medida for $(\pm) |+\rangle$, tivemos $f(0) = f(1)$, e quando for $(\pm) |-\rangle$, tivemos $f(0) \neq f(1)$. Solucionando assim o problema de Deutsch.

Essa habilidade de realizar duas tarefas num tempo em que só se realizaria uma, lembra o que se conhece classicamente por computação paralela, onde vários processadores dividem o trabalho para concluí-lo mais rapidamente. Na computação quântica, esse paralelismo surge naturalmente como consequência do uso de estados superpostos, e então fala-se em *paralelismo quântico*.

Finalmente, gostaríamos de destacar a presença das correlações não-locais que discutimos quando falamos em emaranhamento. Numa primeira análise, o fato de medirmos apenas o primeiro *qubit* para extrair a relação procurada entre $f(0)$ e $f(1)$, pode sugerir que toda a informação estava localizada neste *qubit*. Entretanto, há de se lembrar que a escolha

do estado do segundo *qubit* foi fundamental para que chegássemos à Eq. (2.8). De fato, a primeira linha da Eq. (2.7) expressa muito bem a mencionada não-localidade. Lá, vemos que embora o *bit* x apareça no estado do primeiro *qubit*, o *bit* $f(x)$ aparece no estado do segundo *qubit*, ou seja, a informação sobre $f(x)$ expressa no segundo *qubit* $|f(x)\rangle$ está intrinsecamente correlacionada com o estado $|x\rangle$ do primeiro *qubit*. O fato de medirmos apenas o primeiro *qubit* aparece como uma condição suficiente para atender a nossa proposta; mas para perguntas a respeito de outras propriedades da função f , outras maneiras de extrair informações não-locais devem ser desenvolvidas.

Estabelecidas essas noções básicas de computação quântica, vamos partir para a parte mais técnica deste capítulo, em que apresentamos a grandeza fidelidade, usada na abordagem de nosso problema ao longo da dissertação.

2.2 Medidas de Distância

Durante esse trabalho vamos lidar com portas lógicas operando em estados convenientemente preparados inicialmente, considerando duas situações distintas:

1. Idealmente as portas lógicas operam sem a incursão de erros (decoerência) e, portanto, é fácil prever o *qubit* de saída se conhecermos a operação a ser realizada pela porta e o estado inicial. Construiremos essa situação ideal através da realização das operações quânticas dentro de subespaços livres de decoerência.
2. Quando as portas lógicas, por algum motivo, promovem evoluções para fora dos subespaços livres de decoerência, o resultado a ser extraído da computação não é mais, necessariamente, aquele que se alcançaria no caso ideal. Isto é o reflexo da perda da dinâmica unitária provocada pela interação com o ambiente.

Nessas duas situações, iremos querer comparar, quantitativamente, os resultados obtidos com os resultados esperados no final da operação. Mais do que isso, gostaríamos de realizar tal comparação instantaneamente, a todo momento da evolução promovida pela porta lógica quântica, a fim de observar como a dinâmica nos leva de nosso estado inicial até o estado final, seja ele o esperado ou não.

Medidas como essas são conhecidas como medidas de distância, e dado que erros também ocorrem na computação clássica, quantidades que medem a distância entre seqüências de *bits* já existem há muito tempo. Por exemplo, a *distância de Hamming* [4], definida como o número de posições em que duas seqüências de bits diferem entre si:

$$\text{Distância Hamming entre } 00010 \text{ e } 10011 = 2$$

No contexto da teoria da informação quântica, a *distância de Hamming* não se aplica porque os rótulos que usamos para expressar um certo estado no espaço de Hilbert são modificados quando fazemos uma mudança de base, embora os estados continuem sendo exatamente os mesmos e, portanto, mantenham a mesma distância.

Para atender a demanda de grandezas que medissem a distância entre dois estados quânticos, propostas como a *fidelidade* e a *distância traço* [4] foram feitas. Nesta dissertação optamos por trabalhar com a fidelidade.

Da forma mais trivial possível, e aplicada ao caso particular do primeiro item estabelecido anteriormente, calculamos a fidelidade entre dois estados puros: $|\psi_{ref}\rangle$ (o estado esperado), e $|\psi(t)\rangle$ (o estado em evolução), fazendo:

$$\mathcal{F}(t) = |\langle \psi_{ref} | \psi(t) \rangle|^2. \quad (2.9)$$

É claro que, dada a normalização desses estados, a fidelidade só assume valores reais entre 0 e 1, sendo nula quando os estados são ortogonais entre si (indicando máxima distância entre eles), e unitária quando os estados são iguais. Note que a fidelidade é máxima quando a distância é mínima.

No caso do item 2, porém, a interação do sistema com o meio faz com que o estado inicial evolua para um estado de mistura; portanto, devemos usar o formalismo de operadores densidades. Dessa forma, sendo ϱ_{ref} o estado de referência (ou esperado), e $\varrho(t)$ o estado em evolução, a fidelidade é dada pelo traço

$$\mathcal{F}(t) = \text{Tr} [\varrho_{ref} \varrho(t)]. \quad (2.10)$$

É fácil perceber que essa expressão reproduz a Eq. (2.9) no caso em que os operadores densidade são projetores (associados a estados puros), conforme as equações abaixo:

$$\begin{aligned} \varrho_{ref} &= |\psi_{ref}\rangle \langle \psi_{ref}|, \\ \varrho(t) &= |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|, \end{aligned}$$

resultando em

$$\mathcal{F}(t) = \text{Tr} [|\psi_{ref}\rangle \langle \psi_{ref}| \psi(t)\rangle \langle \psi(t)|].$$

Graças a ciclicidade da operação traço, a expressão acima toma a forma da Eq. (2.9):

$$\mathcal{F}(t) = \text{Tr} [|\psi_{ref}\rangle \langle \psi_{ref}| \psi(t)\rangle \langle \psi(t)|] = \langle \psi(t) | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \psi(t) \rangle = |\langle \psi_{ref} | \psi(t) \rangle|^2.$$

Conhecidos esses conceitos e grandezas, definimos os elementos necessários à realização de nosso trabalho propriamente dito. Começaremos a apresentá-lo a seguir.

Portas Lógicas Quânticas

Neste capítulo, vamos explorar o hamiltoniano do sistema físico que iremos tratar, justificando sua escolha e impondo sobre ele condições suficientes para a obtenção de um conjunto universal de portas lógicas quânticas.

Mais do que simplesmente gerar tais portas, queremos que as mesmas promovam evoluções temporais insensíveis a presença de operadores externos, razão pela qual seremos levados a construir subespaços livres de decoerência (SLD).

Através de um desenvolvimento matemático simples, mostraremos que a comutação do hamiltoniano do sistema com o agente de acoplamento *degenerado* entre o sistema físico e o ambiente figura como uma *condição suficiente* para a formação de SLD; embora um tratamento mais rigoroso, revele que a degenerescência do agente de acoplamento (gerador de erros) é uma condição *necessária*, além de *suficiente* [13]. Para essa demonstração, assim como em todo o restante do trabalho, nos valem da hipótese simplista de privilegiar um certo agente de acoplamento para mediar a interação entre sistema e banho.

Uma vez definido o hamiltoniano e escolhido um dos subespaços como arena de trabalho, partiremos para a obtenção das portas lógicas quânticas, mostrando explicitamente que a dinâmica livre de decoerência suporta computação universal [13]. Neste sentido, escolhemos um conjunto universal padrão da literatura [4], dado pelas portas **C-NOT**, **Hadamard** e **T**, e mostramos que todas elas podem ser obtidas através de escolhas adequadas para os termos do hamiltoniano do sistema. A rigor, veremos que os termos do hamiltoniano de partida constituem sistemas lineares indeterminados e, portanto, há infinitas maneiras distintas de se obter a mesma porta lógica. Essa liberdade será aqui utilizada para simplificar as expressões matemáticas dos hamiltonianos de cada porta; entretanto, no contexto experimental, acreditamos que tal liberdade possa ser útil na determinação de intensidades viáveis para campos magnéticos e outras grandezas características de cada implementação física.

Vamos começar estabelecendo o hamiltoniano de partida.

3.1 Hamiltoniano

Assumimos inicialmente a forma mais geral do hamiltoniano de interação para um sistema de quatro spins $\frac{1}{2}$ (esclareceremos mais adiante a escolha deste número de spins), em que cada spin pode interagir com um campo magnético externo fixado arbitrariamente na direção $\hat{z}$ e/ou com outro spin:

$$\begin{aligned} H_0(t) = & -\frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^4 B_n(t) \sigma_z^n \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \sum_{n,m=1}^4 \begin{bmatrix} \sigma_x^m & \sigma_y^m & \sigma_z^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{xx}^{mn}(t) & G_{xy}^{mn}(t) & G_{xz}^{mn}(t) \\ G_{yx}^{mn}(t) & G_{yy}^{mn}(t) & G_{yz}^{mn}(t) \\ G_{zx}^{mn}(t) & G_{zy}^{mn}(t) & G_{zz}^{mn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^n \\ \sigma_y^n \\ \sigma_z^n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aqui, σ_α^i representa a matriz de Pauli referente a componente α do i -ésimo spin, satisfazendo a bem conhecida relação de comutação

$$[\sigma_\alpha^i, \sigma_\beta^j] = 2i\delta_{ij} \sum_{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma^i. \quad (3.2)$$

Adotamos o padrão de usar letras gregas (α, β, γ) para representar as componentes x, y ou z ; e letras latinas (i, j) para o número do spin (spin 1, spin 2, spin 3 ou spin 4). Com δ_{ij} , representamos a distribuição delta de Kronecker, enquanto que $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ dá o tensor de Levi-Civita.

Os campos externos $B_n(t)$ nos oferecem a possibilidade de interagir individualmente com cada uma das componentes z dos quatro spins disponíveis. Finalmente, a matriz $G_{\alpha\beta}^{ij}(t)$ dá as intensidades dos acoplamentos entre pares de spins, ou seja, esta descreve a intensidade da interação controlada entre o spin σ_α^i com o spin σ_β^j . Através de escolhas convenientes para os campos e acoplamentos, buscaremos construir hamiltonianos geradores de um conjunto universal de portas lógicas quânticas.

A primeira soma da Eq. (3.1) apresenta, obviamente, 4 parcelas. A segunda, porém, adiciona 144 outras parcelas ao hamiltoniano, totalizando assim 148 termos. Para satisfazer certas condições que discutiremos a seguir, restrições serão aplicadas a esse hamiltoniano, levando a uma significativa redução no número de elementos.

A primeira restrição que deve ser satisfeita por qualquer hamiltoniano físico é a hermiticidade. Para verificar quais vínculos ela traz ao nosso hamiltoniano, consideramos ini-

cialmente o operador adjunto

$$\begin{aligned} H_0^\dagger(t) = & -\frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^4 B_n^*(t) \sigma_z^n \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \sum_{n,m=1}^4 \begin{bmatrix} \sigma_x^m & \sigma_y^m & \sigma_z^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{xx}^{nm*}(t) & G_{yx}^{nm*}(t) & G_{zx}^{nm*}(t) \\ G_{xy}^{nm*}(t) & G_{yy}^{nm*}(t) & G_{zy}^{nm*}(t) \\ G_{xz}^{nm*}(t) & G_{yz}^{nm*}(t) & G_{zz}^{nm*}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^n \\ \sigma_y^n \\ \sigma_z^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Em seguida, igualamos esta expressão ao hamiltoniano da Eq. (3.1), resultando nas expressões:

$$B_n(t) \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

$$G_{zz}^{mn}(t) = G_{zz}^{nm*}(t), \quad G_{yy}^{mn}(t) = G_{yy}^{nm*}(t), \quad G_{xx}^{mn}(t) = G_{xx}^{nm*}(t), \quad (3.4)$$

$$G_{zx}^{mn}(t) = G_{xz}^{nm*}(t), \quad G_{zy}^{mn}(t) = G_{yz}^{nm*}(t), \quad G_{yx}^{mn}(t) = G_{xy}^{nm*}(t). \quad (3.5)$$

Na verdade, a condição (3.3) é mais forte do que a imposta pela hermiticidade; bastaria que $B_n(t) = B_n^*(t)$ para que o operador fosse hermitiano. Entretanto, como estamos representando campos magnéticos reais com a grandeza $B_n(t)$, preferimos já impor o anulamento de uma eventual parte imaginária de $B_n(t)$, obtendo assim o vínculo (3.3).

Já comentamos, no princípio deste capítulo, que queremos o hamiltoniano operando em subespaços livres de decoerência (SLD). Por isso, na próxima seção vamos somar operadores do meio ambiente ao hamiltoniano da Eq. (3.1), e em seguida discutir as condições para que este hamiltoniano global não emaranhe os estados do sistema com os estados do banho, evitando desse modo o processo de decoerência sobre o sistema físico de interesse.

3.2 Condições para Dinâmica Livre de Decoerência

A próxima restrição que colocaremos vem do fato de que queremos isolar as portas lógicas do ambiente. Para procedermos com a aplicação desta restrição, vamos elucidar a maneira pela qual ela se expressa matematicamente.

Vamos considerar o hamiltoniano global (sistema + banho térmico) dado por

$$H(t) = H_0(t) + H_B + J_z \sum_{k=1}^{\infty} g'_k q_k, \quad (3.6)$$

onde escolhemos como único agente de acoplamento entre o banho e as portas lógicas, o operador J_z (componente z do spin total). Na equação acima, H_B representa um banho térmico modelado por uma coleção de osciladores harmônicos em que se inserem nossos

spins,

$$\mathbf{H}_B = \hbar \sum_n \omega_n \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_n, \quad (3.7)$$

nos quais g'_k são constantes de acoplamento e $\mathbf{q}_k$ é o operador de posição do k -ésimo oscilador (massa m_k), proporcional a soma dos operadores de criação ($\mathbf{a}_k^\dagger$) e destruição ($\mathbf{a}_k$).

$$\mathbf{q}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_k\omega_k}} (\mathbf{a}_k^\dagger + \mathbf{a}_k)$$

Sabemos que o acoplamento com o ambiente, introduzido pelo operador $\mathbf{J}_z$ na Eq. (3.6), causa decoerência [5] (erro) na informação codificada em nossos spins. Para que a porta lógica possa operar de maneira adequada esse fenômeno deve ser sobrepujado.

Para lidar com estes erros, recentemente uma importante teoria de correção de erros foi criada [14], mas sua eficiência se resume a uma pequena classe de erros: aqueles que ocorrem independentemente em alguns poucos *qubits*. Na prática, porém, quando os *qubits* estão espacialmente próximos, erros correlacionados afetando muitos (ou todos) os *qubits* começam a acontecer, e neste caso os protocolos de correção de erros não oferecem uma solução real.

Uma proposta para evitar esta forma mais geral de decoerência consiste em isolar-mos subespaços de um autovalor degenerado do agente de acoplamento e realizar todas as operações dentro deles. A estes, é dado o nome de subespaços livres de decoerência. No artigo [13], usando um tratamento de semigrupos, os autores mostram que para qualquer hamiltoniano do tipo

$$\mathbf{H}_{SB} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_S \otimes \mathbf{H}_B + \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \otimes \mathbf{B}_{\alpha},$$

com $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_B$, $\mathbf{F}_{\alpha}$ e $\mathbf{B}_{\alpha}$ sendo, respectivamente, o hamiltoniano do sistema, o hamiltoniano do banho, os agentes de acoplamento (geradores de erros) e operadores associados ao banhos; vale o teorema:

Teorema: *Uma condição necessária e suficiente para a dinâmica livre de decoerência num subespaço $\tilde{\mathcal{H}} = \text{Span} \left[\{|i\rangle\}_{i=1}^{N_0} \right]$ do espaço de Hilbert do registrador é que todos os estados da base $|i\rangle$ sejam estados degenerados do gerador de erros $\mathbf{F}_{\alpha}$: $\mathbf{F}_{\alpha} |i\rangle = c_{\alpha} |i\rangle$, $\forall \alpha$.*

Nos cálculos que se seguem, ilustramos de forma simples e restrita, mas esclarecedora, a *suficiência* desta proposta.

Seja o hamiltoniano da Eq. (3.6) e um estado global do sistema (índice S) mais banho

térmico (índice B), dado por

$$|\Psi\rangle = (\alpha |1\rangle_S + \beta |2\rangle_S) \otimes |\xi\rangle_B ,$$

com $\mathbf{H}_0(t) |1\rangle_S = E_1(t) |1\rangle_S$ e $\mathbf{H}_0(t) |2\rangle_S = E_2(t) |2\rangle_S$. Escolhendo um caso especial (a ser apresentado posteriormente) da dependência temporal de $\mathbf{H}(t)$ (ou $\mathbf{H}_0(t)$), tal que o operador evolução temporal possa ainda ser obtido por simples exponenciação, e impondo a condição de comutação (discutiremos seu significado na **Seção 3.4**)

$$[\mathbf{H}_0, \mathbf{J}_z] = 0 , \quad (3.8)$$

a evolução temporal para o estado global $|\Psi\rangle$, é dada por

$$e^{-i\mathbf{H}t/\hbar} |\Psi\rangle = e^{-i\mathbf{H}_0 t/\hbar} e^{-i(\mathbf{H}_B + \mathbf{J}_z \sum_k g'_k \mathbf{q}_k)t/\hbar} |\Psi\rangle .$$

A aplicação dos operadores $\mathbf{H}_0$ aos estados do sistema leva a

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{H}t/\hbar} |\Psi\rangle &= \alpha(t) e^{-i(\mathbf{H}_B + \mathbf{J}_z \sum_k g'_k \mathbf{q}_k)t/\hbar} |1\rangle_S \otimes |\xi\rangle_B \\ &+ \beta(t) e^{-i(\mathbf{H}_B + \mathbf{J}_z \sum_k g'_k \mathbf{q}_k)t/\hbar} |2\rangle_S \otimes |\xi\rangle_B , \end{aligned} \quad (3.9)$$

com

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha e^{-iE_1(t)t/\hbar} , \\ \beta(t) &= \beta e^{-iE_2(t)t/\hbar} . \end{aligned}$$

Da álgebra, sabemos que a comutação entre $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{J}_z$ possibilita escrever uma base de autovetores comuns para estes operadores. Sejam eles os próprios $|1\rangle_S$ e $|2\rangle_S$, portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_z |1\rangle_S &= m |1\rangle_S , \\ \mathbf{J}_z |2\rangle_S &= n |2\rangle_S . \end{aligned}$$

Estas igualdades, usadas na Eq. (3.9), permitem sua reformulação para

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{H}t/\hbar} |\Psi\rangle &= \alpha(t) e^{-i(\mathbf{H}_B + m \sum_k g'_k \mathbf{q}_k)t/\hbar} |1\rangle_S \otimes |\xi\rangle_B \\ &+ \beta(t) e^{-i(\mathbf{H}_B + n \sum_k g'_k \mathbf{q}_k)t/\hbar} |2\rangle_S \otimes |\xi\rangle_B , \end{aligned}$$

ou, simplificada em

$$e^{-i\mathbf{H}t/\hbar} |\Psi\rangle = \alpha(t) |1\rangle_S \otimes \mathcal{O}_B |\xi\rangle_B + \beta(t) |2\rangle_S \otimes \mathcal{O}'_B |\xi\rangle_B ,$$

com $\mathcal{O}_B$ e $\mathcal{O}'_B$ operadores que só operam nos estados do banho. É fácil ver que esse estado potencialmente emaranhado assume uma forma fatorada, por exemplo, se $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}'_B$; o que leva à igualdade

$$n = m. \quad (3.10)$$

Como resultado, apresentamos abaixo a forma fatorada do estado evoluído temporalmente

$$e^{-i\mathbf{H}t/\hbar}|\Psi\rangle = [\alpha(t)|1\rangle_S + \beta(t)|2\rangle_S] \otimes e^{-i(\mathbf{H}_B + m \sum_k g'_k \mathbf{q}_k)t/\hbar}|\xi\rangle_B. \quad (3.11)$$

Concluindo, vimos que a obtenção deste estado não emaranhado, envolveu duas hipóteses:

1. Comutação do hamiltoniano com o agente de acoplamento, Eq. (3.8);
2. Degenerescência do agente de acoplamento, Eq. (3.10).

Neste caso, impusemos a fatoração entre estados do banho e do ambiente como indicador de evolução livre de decoerência. De fato, o não emaranhamento desses estados indica que o banho e o sistema não se acoplam, e portanto não pode haver decoerência.

3.3 Quatro spins

Na **Seção 3.1**, dissemos que o sistema físico selecionado para o nosso trabalho se constitui de quatro spins. Vamos agora justificar esta *escolha*.

Para se construir um conjunto universal de portas lógicas, precisamos no mínimo de portas lógicas de 1 e 2 *qubits*, conforme mostrado em [15]. Naturalmente, operações com dois spins $\frac{1}{2}$ exigem espaços (ou subespaços) de Hilbert de 4 dimensões, e como escolhemos tomar o agente de acoplamento degenerado para garantir o isolamento do ambiente, precisamos de um bloco da matriz de $\mathbf{J}_z$ quatro vezes degenerado. Abaixo, ilustramos que o menor número de spins para se alcançar um bloco deste tamanho é 4:

1 spin

Base: $\{|0\rangle = |\uparrow\rangle, |1\rangle = |\downarrow\rangle\}$

$$\mathbf{J}_z = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_z = \hbar \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{2 \times 2},$$

2 spins

Base: $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

$$\mathbf{J}_z = \frac{\hbar}{2} (\boldsymbol{\sigma}_z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_z) = \hbar \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 4},$$

3 spins

Base: $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |100\rangle, |011\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$

$$\mathbf{J}_z = \frac{\hbar}{2} (\boldsymbol{\sigma}_z \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_z)$$

$$\mathbf{J}_z = \hbar \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & & -\frac{1}{2} & & & \\ & & & & & -\frac{1}{2} & & \\ 0 & & & & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & & & & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}_{8 \times 8},$$

4 spins

Base: $\{|0000\rangle, |0001\rangle, |0010\rangle, |0100\rangle, |1000\rangle, |0011\rangle, |0101\rangle, |1001\rangle, |0110\rangle, |1010\rangle, |1100\rangle, |0111\rangle, |1011\rangle, |1101\rangle, |1110\rangle, |1111\rangle\}$

$$\mathbf{J}_z = \frac{\hbar}{2} (\boldsymbol{\sigma}_z \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_z)$$

3.4 Restrição ao Hamiltoniano

A escolha de um estado inicial do subespaço escolhido acima não é suficiente para garantir que não teremos decoerência. Devemos também impor que o hamiltoniano não levará o estado inicial a evoluir para fora do SLD – é o que expressa a condição $[\mathbf{H}_0, \mathbf{J}_z] = 0$, encontrada na **Seção 3.2**. Um rápido desenvolvimento matemático esclarece essa interpretação.

Seja $|\psi\rangle$ um estado do subespaço degenerado de autovalor $+1$ do operador $\mathbf{J}_z$. Escrever o comutador $[\mathbf{H}_0, \mathbf{J}_z] = 0$ corresponde a escrever

$$[\mathbf{H}_0, \mathbf{J}_z] |\psi\rangle = 0,$$

ou

$$\mathbf{J}_z \mathbf{H}_0 |\psi\rangle = \mathbf{H}_0 \mathbf{J}_z |\psi\rangle.$$

Como $|\psi\rangle$ pertence ao subespaço de $m = +1$ (com m expressando os autovalores de $\mathbf{J}_z$), é verdade que $\mathbf{J}_z |\psi\rangle = |\psi\rangle$, portanto

$$\mathbf{J}_z (\mathbf{H}_0 |\psi\rangle) = +1 (\mathbf{H}_0 |\psi\rangle).$$

Esta equação mostra que $\mathbf{H}_0 |\psi\rangle$ é também autoestado de $\mathbf{J}_z$ com autovalor $+1$, e portanto pertence ao mesmo subespaço que o estado inicial $|\psi\rangle$. Vamos restringir o hamiltoniano da Eq. (3.1) de acordo com essa regra de comutação.

Considerando

$$\mathbf{J}_z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sigma_z^k, \quad (3.12)$$

o comutador fica dado por

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_0, \mathbf{J}_z] = & -\frac{\hbar}{4} \sum_{k,n=1}^4 B_n(t) [\sigma_z^n, \sigma_z^k] \\ & + \frac{\hbar^2}{8} \sum_{k,n,m=1}^4 \left\{ G_{xx}^{mn}(t) [\sigma_x^m \sigma_x^n, \sigma_z^k] + G_{xy}^{mn}(t) [\sigma_x^m \sigma_y^n, \sigma_z^k] + G_{xz}^{mn}(t) [\sigma_x^m \sigma_z^n, \sigma_z^k] \right. \\ & + G_{yx}^{mn}(t) [\sigma_y^m \sigma_x^n, \sigma_z^k] + G_{yy}^{mn}(t) [\sigma_y^m \sigma_y^n, \sigma_z^k] + G_{yz}^{mn}(t) [\sigma_y^m \sigma_z^n, \sigma_z^k] \\ & \left. + G_{zx}^{mn}(t) [\sigma_z^m \sigma_x^n, \sigma_z^k] + G_{zy}^{mn}(t) [\sigma_z^m \sigma_y^n, \sigma_z^k] + G_{zz}^{mn}(t) [\sigma_z^m \sigma_z^n, \sigma_z^k] \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que as matrizes de Pauli são definidas no espaço de 4 spins (matrizes 16×16), de acordo

com os produtos tensoriais abaixo:

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha^1 &= \sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \\
 \sigma_\alpha^2 &= \mathbb{1} \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \\
 \sigma_\alpha^3 &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{1}, \\
 \sigma_\alpha^4 &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_x.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Neste caso, $\mathbb{1}$ denota a matriz identidade e σ_α ($\alpha = x, y, z$) as matrizes 2×2 de um spin $\frac{1}{2}$.

Os comutadores $[\sigma_z^n, \sigma_z^k]$ são naturalmente nulos, levando ao desaparecimento dos campos $B_n(t)$ da Eq. (3.13). Os demais comutadores, entretanto, devem ser calculados usando a identidade $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$ juntamente com a Eq. (3.2). Tais cálculos levam à forma simplificada

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H}_0, \mathbf{J}_z] &= \\
 \frac{i\hbar^2}{4} \sum_{n,m=1}^4 &\{ [G_{yy}^{mn}(t) - G_{xx}^{mn}(t)] [\sigma_x^m \sigma_y^n + \sigma_y^m \sigma_x^n] + [G_{xy}^{mn}(t) + G_{yx}^{mn}(t)] [\sigma_x^m \sigma_x^n - \sigma_y^m \sigma_y^n] \\
 &+ G_{zy}^{mn}(t) \sigma_z^m \sigma_x^n + G_{yz}^{mn}(t) \sigma_x^m \sigma_z^n - G_{zx}^{mn}(t) \sigma_z^m \sigma_y^n - G_{xz}^{mn}(t) \sigma_y^m \sigma_z^n \}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pode-se mostrar (**Apêndice A**) que os operadores do conjunto

$$\{ \sigma_x^m \sigma_y^n + \sigma_y^m \sigma_x^n, \sigma_x^m \sigma_x^n - \sigma_y^m \sigma_y^n, \sigma_z^m \sigma_x^n, \sigma_x^m \sigma_z^n, \sigma_z^m \sigma_y^n, \sigma_y^m \sigma_z^n \}, \tag{3.16}$$

são linearmente independentes para $m \neq n$. Portanto, igualar a Eq. (3.15) a zero, implica em assumir nulos os coeficientes de cada um desses operadores, ou seja

$$\begin{aligned}
 G_{yy}^{mn}(t) &= G_{xx}^{mn}(t), \\
 G_{xy}^{mn}(t) &= -G_{yx}^{mn}(t), \\
 G_{xz}^{mn}(t) &= G_{zx}^{mn}(t) = G_{yz}^{mn}(t) = G_{zy}^{mn}(t) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

A rigor, esses resultados são condições *necessárias* somente para o caso em que $m \neq n$. Todavia, como são condições *suficientes* para o caso $m = n$, vamos assumí-los indistintamente para todo m e n .

Aplicando esses vínculos à Eq. (3.1) do hamiltoniano, este se reduz à forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(t) = & -\frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^4 B_n(t) \sigma_z^n \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \sum_{n,m=1}^4 \begin{bmatrix} \sigma_x^m & \sigma_y^m & \sigma_z^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{xx}^{mn}(t) & G_{xy}^{mn}(t) & 0 \\ -G_{xy}^{mn}(t) & G_{xx}^{mn}(t) & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz}^{mn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^n \\ \sigma_y^n \\ \sigma_z^n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de modo que, das condições de hermiticidade expressas nas Eq. (3.3), (3.4) e (3.5), restam apenas

$$B_n(t) \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

$$G_{zz}^{mn}(t) = G_{zz}^{nm*}(t), \quad G_{xx}^{mn}(t) = G_{xx}^{nm*}(t), \quad G_{xy}^{mn}(t) = -G_{xy}^{nm*}(t). \quad (3.19)$$

Com essas simplificações o número de parcelas do hamiltoniano cai de 148 para 52, e o produto matricial resulta numa forma compacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(t) = & -\frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^4 B_n(t) \sigma_z^n \\ & + \frac{\hbar^2}{4} \sum_{n,m=1}^4 [G_{zz}^{mn}(t) (\sigma_z^m \sigma_z^n) + G_{xx}^{mn}(t) (\sigma_y^m \sigma_y^n + \sigma_x^m \sigma_x^n) + G_{xy}^{mn}(t) (\sigma_x^m \sigma_y^n - \sigma_y^m \sigma_x^n)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Figura 3.1: Representação da matriz bloco diagonal na base computacional referente ao operador $\mathbf{H}_0(t)$.

A representação matricial do hamiltoniano segue como consequência da construção das matrizes de Pauli envolvidas – veja Eq. (3.14), e resulta em uma matriz 16×16 bloco diagonal, como esquematizado ao lado (os números nos blocos representam o valor de m , autovalor de J_z). Vamos omitir a apresentação de todos os blocos, mesmo porque só estamos interessados no bloco de 4 dimensões em destaque com $m = +1$, o qual nos leva a

$$\mathbf{H}_0^b(t) = \hbar^2 \begin{bmatrix} D_{11}(t) & \Re[G_{xx}^{34}] + i\Re[G_{xy}^{34}] & \Re[G_{xx}^{24}] + i\Re[G_{xy}^{24}] & \Re[G_{xx}^{14}] + i\Re[G_{xy}^{14}] \\ \Re[G_{xx}^{34}] - i\Re[G_{xy}^{34}] & D_{22}(t) & \Re[G_{xx}^{23}] + i\Re[G_{xy}^{23}] & \Re[G_{xx}^{13}] + i\Re[G_{xy}^{13}] \\ \Re[G_{xx}^{24}] - i\Re[G_{xy}^{24}] & \Re[G_{xx}^{23}] - i\Re[G_{xy}^{23}] & D_{33}(t) & \Re[G_{xx}^{12}] + i\Re[G_{xy}^{12}] \\ \Re[G_{xx}^{14}] - i\Re[G_{xy}^{14}] & \Re[G_{xx}^{13}] - i\Re[G_{xy}^{13}] & \Re[G_{xx}^{12}] - i\Re[G_{xy}^{12}] & D_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

em que $\Re$ representa “parte real”, já que os acoplamentos podem ser, em princípio, números complexos. Além disso, suprimimos a apresentação da dependência temporal nos argumentos dos acoplamentos $G_{\alpha\beta}^{ij}(t)$; essa medida tomada tão somente para tornar a apresentação da matriz mais sucinta. Por esse mesmo motivo, também representamos os elementos da diagonal pelas funções $D_{nn}(t)$, explicitadas abaixo (onde a apresentação da dependência temporal dos campos $B_n(t)$ foi também suprimida):

$$\begin{aligned} D_{11}(t) &= \sum_{n=1}^4 \left(\frac{G_{zz}^{nn}}{4} + \frac{G_{xx}^{nn}}{2} \right) - \frac{1}{2\hbar} (B_1 + B_2 + B_3 - B_4) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\Re(G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}) + i(G_{xy}^{11} + G_{xy}^{22} + G_{xy}^{33} - G_{xy}^{44})], \\ D_{22}(t) &= \sum_{n=1}^4 \left(\frac{G_{zz}^{nn}}{4} + \frac{G_{xx}^{nn}}{2} \right) - \frac{1}{2\hbar} (B_1 + B_2 - B_3 + B_4) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\Re(G_{zz}^{12} - G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}) + i(G_{xy}^{11} + G_{xy}^{22} - G_{xy}^{33} + G_{xy}^{44})], \\ D_{33}(t) &= \sum_{n=1}^4 \left(\frac{G_{zz}^{nn}}{4} + \frac{G_{xx}^{nn}}{2} \right) - \frac{1}{2\hbar} (B_1 - B_2 + B_3 + B_4) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\Re(-G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} + G_{zz}^{34}) + i(G_{xy}^{11} - G_{xy}^{22} + G_{xy}^{33} + G_{xy}^{44})], \\ D_{44}(t) &= \sum_{n=1}^4 \left(\frac{G_{zz}^{nn}}{4} + \frac{G_{xx}^{nn}}{2} \right) - \frac{1}{2\hbar} (-B_1 + B_2 + B_3 + B_4) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\Re(-G_{zz}^{12} - G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24} + G_{zz}^{34}) + i(-G_{xy}^{11} + G_{xy}^{22} + G_{xy}^{33} + G_{xy}^{44})]. \end{aligned}$$

Embora estas equações tenham dependência explícita na constante imaginária i , uma rápida inspeção pelas Eqs. (3.18) e (3.19) garante que a matriz acima é mesmo hermitiana, e portanto as funções $D_{nn}(t)$ são reais. Isto se observa facilmente a partir dos resultados abaixo, derivados a partir daquelas equações:

$$\begin{aligned} B_n(t), G_{zz}^{nn}(t), G_{xx}^{nn}(t) &\in \mathbb{R}, \\ G_{xy}^{nn} &\in \mathbb{C}_{puro}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde denotamos o conjunto dos números imaginários puros por $\mathbb{C}_{puro}$.

A liberdade que temos na escolha dos elementos da matriz hamiltoniana faz dela

uma matriz hermitiana absolutamente geral. Esta característica garante que qualquer matriz unitária poderá ser obtida a partir de nosso hamiltoniano por exponenciação, portanto temos um “hamiltoniano universal” para computação quântica. Nas próximas seções, vamos estudar como criar um conjunto universal particular de portas lógicas quânticas a partir deste hamiltoniano.

Finalmente, destacamos que a matriz obtida (3.21) não é diagonal, de modo que a base computacional não é composta por autovetores de H_0 . Este fato não deve causar insegurança com relação a validade do resultado obtido nos cálculos ilustrativos da **Seção 3.2**. Embora tenhamos lá usado a base de autovetores comuns de H_0 e J_z para mostrar o descorrelacionamento entre o sistema e o ambiente, asseguramos que resultado análogo continua válido também neste caso. Conforme vimos no teorema apresentado na página 18, o que realmente importa para extinguir a decoerência é selecionar vetores degenerados de J_z para compor o SLD.

3.5 Conjunto Universal de Portas Lógicas

Um conjunto universal de portas lógicas quânticas é definido como uma coleção de matrizes unitárias capazes de aproximar, com precisão arbitrária, qualquer outra matriz unitária [4]. De fato, o conceito de *universalidade* existe desde a computação clássica, onde um conjunto universal de portas lógicas seria capaz de computar uma função clássica arbitrária. Neste contexto, as portas lógicas **AND**, **XOR** e **NOT** desempenham esse papel universal, havendo ainda outras possibilidades: a porta **NAND**, por exemplo, pode ser usada sozinha em substituição àquelas três.

Na computação quântica, um conjunto universal bastante conhecido é dado pelas portas **C-NOT**, **Hadamard** e **T**, abaixo apresentadas nas bases $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ (**C-NOT**) e $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (**Hadamard** e **T**):

$$U_{\text{C-NOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}.$$

Note que a dimensão das matrizes deixa claro que a porta **C-NOT** opera com dois *qubits*, e as demais com apenas um *qubit*. Entretanto, se dispomos de dois *qubits* – rotulados 1 e 2, as portas Hadamard e T precisam especificar qual deles está sendo operado, o que se consegue com os produtos tensoriais

$$\begin{aligned}
U_{H1} = U_H \otimes \mathbf{1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & U_{T1} = U_T \otimes \mathbf{1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}, \\
U_{H2} = \mathbf{1} \otimes U_H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & U_{T2} = \mathbf{1} \otimes U_T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

agora, com todas as matrizes escritas na base de dois spins. O fato dessas matrizes serem unitárias expressa a reversibilidade da computação quântica discutida no capítulo anterior, isto é, olhando para o *qubit* de saída, podemos “adivinhar” quais foram os *qubits* de entrada. Essa virtude fica ilustrada nas tabelas verdade apresentadas a seguir. Pode-se observar que para uma mesma porta, os *qubits* de saída nunca se repetem, ou seja, há uma relação biunívoca entre entrada e saída:

Porta C-NOT

Entrada	Saída
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 10\rangle$	$ 11\rangle$
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$

Porta T1

Entrada	Saída
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 10\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{4}} 10\rangle$
$ 11\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{4}} 11\rangle$

Porta T2

Entrada	Saída
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{4}} 01\rangle$
$ 10\rangle$	$ 10\rangle$
$ 11\rangle$	$e^{i\frac{\pi}{4}} 11\rangle$

Hadamard 1		Hadamard 2	
Entrada	Saída	Entrada	Saída
$ 00\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle + 10\rangle)$	$ 00\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle + 01\rangle)$
$ 01\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (01\rangle + 11\rangle)$	$ 01\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle - 01\rangle)$
$ 10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle - 10\rangle)$	$ 10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (10\rangle + 11\rangle)$
$ 11\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (01\rangle - 11\rangle)$	$ 11\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (10\rangle - 11\rangle)$

O mesmo não ocorre na computação clássica, o que pode ser constatado através das tabelas verdade de algumas importantes portas lógicas clássicas:

Porta NAND		Porta OR		Porta XOR	
Entrada	Saída	Entrada	Saída	Entrada	Saída
00	1	00	0	00	0
01	1	01	1	01	1
10	1	10	1	10	1
11	0	11	1	11	0

Além disso, a unitariedade das portas lógicas quânticas garante que elas podem ser encaradas como operadores de evolução temporal associados a hamiltonianos hermitianos, como é o caso de $H_0^b(t)$.

3.6 Hamiltonianos para as Portas Lógicas

O hamiltoniano de que dispomos é dado, na sua forma mais geral, pela Eq. (3.21) na base $\{|0001\rangle, |0010\rangle, |0100\rangle, |1000\rangle\}$ do espaço de Hilbert de 4 spins. Uma vez que espaços de mesma dimensão são comprovadamente isomórficos, podemos pensar esse subespaço como um espaço de 2 spins, em concordância com os espaços em que operam as portas lógicas **C-NOT**, **Hadamard 1**, **Hadamard 2**, **T1** e **T2**. Para mapear o subespaço de 4 spins no espaço de 2 spins, fazemos a seguinte correspondência entre os vetores da base:

$$\begin{aligned}
 |0001\rangle &\mapsto |\overline{00}\rangle, & |0100\rangle &\mapsto |\overline{10}\rangle, \\
 |0010\rangle &\mapsto |\overline{01}\rangle, & |1000\rangle &\mapsto |\overline{11}\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde estamos usando a barra sobre os *kets* de dois spins para denotar que estes vetores são resultados de um mapeamento.

Para obter as matrizes $U_{\text{C-NOT}}$, U_{T1} , U_{T2} , U_{H1} e U_{H2} , devemos resolver a equação de

Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t) = \mathbf{H}_0^b(t)U(t), \quad \text{com} \quad U(0) = \mathbb{1}, \quad (3.24)$$

na qual estamos considerando um sistema de unidades em que $\hbar = 1$, escolha que sustentaremos daqui por diante. Uma vez que o hamiltoniano possui dependência temporal, essa pode ser uma tarefa difícil. Para simplificá-la, vamos assumir que tal dependência é do tipo Heaviside, ou seja, tudo o que podemos fazer com o hamiltoniano é chavear entre ligado e desligado os valores dos campos externos e acoplamentos controlados. Essa consideração é útil pois permite resolver a Eq. (3.24) com $\mathbf{H}_0^b(t)$ constante (0 se todas as funções desligadas, ou algum múltiplo de um valor constante se mais de uma delas ligada).

A solução é o bem conhecido operador de evolução temporal

$$U(t) = e^{-i\mathbf{H}_0^b t}. \quad (3.25)$$

Isso significa que as matrizes que queremos obter associam-se ao hamiltoniano segundo uma operação de exponenciação com um certo tempo τ , que é o tempo em que os campos e acoplamentos devem estar ligados para que a operação se realize, ou seja, é o “tempo da porta”. Nesse sentido, para comparar objetos de mesma natureza, temos duas alternativas: (i) exponenciar o hamiltoniano da Eq. (3.21) e igualar seus elementos a cada elemento das cinco portas lógicas que desejamos obter; ou (ii) encontrar as matrizes hamiltonianas que exponenciadas levam a cada uma das portas lógicas, e assim comparar hamiltonianos com hamiltonianos.

Uma vez que as matrizes das portas lógicas são mais simples, vamos operar com elas, tomando a segunda alternativa. O procedimento que usaremos para calcular esses hamiltonianos é o seguinte:

1. Calculamos os autovetores de cada uma das portas lógicas procuradas e escrevemos estas nessa base, ou seja, diagonalizamos as portas lógicas;
2. Com matrizes diagonais, a operação de exponenciação é trivial e portanto também o é a operação inversa; assim calculamos a matriz hamiltoniana diagonal em sua forma mais geral, correspondente a cada porta lógica;
3. Em seguida, calculamos a matriz de mudança de base e, aplicando-as aos hamiltonianos diagonais do item anterior, obtemos o hamiltoniano novamente na base original $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$;
4. Finalmente, mais uma mudança de base seria necessária para escrever o hamiltoniano da Eq. (3.21) na base em que foram escritos os hamiltonianos das portas lógicas, possibilitando uma identificação elemento a elemento. Mas devido a

escolha particular do mapeamento (3.23), essa operação é desnecessária, pois a matriz de mudança de base a ela associada é uma identidade.

Direcionamos a apresentação das etapas associadas a este algoritmo para o **Apêndice B**, e mostramos aqui somente as matrizes resultantes para o hamiltoniano de cada porta na base computacional mapeada $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$:

- Hamiltoniano para porta **C-NOT**

$$\frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'' + k''' + \frac{1}{2} & -k'' + k''' - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -k'' + k''' - \frac{1}{2} & k'' + k''' + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

- Hamiltoniano para porta **T1**

$$\frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2m'' - \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2m''' - \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

- Hamiltoniano para porta **T2**

$$\frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2n' - \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n''' - \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

- Hamiltoniano para porta **Hadamard 1**

$$\frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} \eta^- (j''' + \frac{1}{2}) + \eta^+ j & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} (j - j''' - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta^- (j'' + \frac{1}{2}) + \eta^+ j' & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} (j' - j'' - \frac{1}{2}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (j - j''' - \frac{1}{2}) & 0 & \eta^+ (j''' + \frac{1}{2}) + \eta^- j & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} (j' - j'' - \frac{1}{2}) & 0 & \eta^+ (j'' + \frac{1}{2}) + \eta^- j' \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

- Hamiltoniano para porta **Hadamard 2**

$$\frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} \eta^- (l'' + \frac{1}{2}) + \eta^+ l & \frac{\sqrt{2}}{2} (l - l'' - \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (l - l'' - \frac{1}{2}) & \eta^+ (l'' + \frac{1}{2}) + \eta^- l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^- (l''' + \frac{1}{2}) + \eta^+ l' & \frac{\sqrt{2}}{2} (l' - l''' - \frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} (l' - l''' - \frac{1}{2}) & \eta^+ (l''' + \frac{1}{2}) + \eta^- l' \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

Neste caso, fixamos

$$\eta^\pm = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e todas as demais constantes pertencentes ao conjunto dos números inteiros.

Nas próximas subseções, promovemos a identificação elemento a elemento de cada uma dessas matrizes com a matriz hamiltoniana da Eq. (3.21), determinando todos os possíveis valores dos campos $B_n(t)$ e acoplamentos controlados $G_{\alpha\beta}^{ij}(t)$, tais que cada uma das portas de nosso conjunto universal seja gerada.

3.6.1 A porta C-NOT

A igualdade entre as matrizes das equações (3.21) e (3.26) leva aos vínculos

$$\begin{aligned}
 \Re[G_{xx}^{34}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{34}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{24}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{24}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{14}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{14}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{23}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{23}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{13}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{13}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{12}] &= \frac{\pi}{\tau} \left(k''' - k'' - \frac{1}{2} \right) & \Re[G_{xy}^{12}] &= 0
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{\pi}{\tau} (k + k') + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{11} + \frac{1}{2} \Re[G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}] \\
 B_2 &= B_1 + i[G_{xy}^{22} - G_{xy}^{11}] + \Re[-G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24}] \\
 B_3 &= -\frac{\pi}{\tau} (k - k' + k'' + k''' + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{33} + \frac{1}{2} \Re[-G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} + G_{zz}^{34}] \\
 B_4 &= B_3 + \frac{2\pi}{\tau} (k - k') + i[G_{xy}^{44} - G_{xy}^{33}] + \Re[-G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24}].
 \end{aligned} \right. \quad (3.31)$$

Uma escolha de valores para os campos e acoplamentos concordantes com as equações acima permite a construção da porta **C-NOT**. Para ilustrar a construção da porta, realizamos uma escolha simples e condizente com o sistema indeterminado acima, zerando todas as constantes inteiras e os acoplamentos livres, de modo a restar somente alguns campos externos (B_3 e B_4) e a parte real do acoplamento G_{xx}^{12} , com os valores então determinados por

$$\Re[G_{xx}^{12}] = B_3 = B_4 = -\frac{\pi}{2\tau}.$$

Devemos nos lembrar que, de acordo com a Eq. (3.19), se o acoplamento G_{xx}^{12} é não nulo, o acoplamento G_{xx}^{21} também não o será, assumindo o valor

$$\Re[G_{xx}^{21}] = \Re[G_{xx}^{12}] = -\frac{\pi}{2\tau}.$$

Tudo isso, substituído na Eq. (3.20), permite obtermos a seguinte forma operacional

para o hamiltoniano da porta **C-NOT**:

$$H_{\text{C-NOT}} = \frac{\pi}{4\tau} (\sigma_z^3 + \sigma_z^4 - \sigma_x^1 \sigma_x^2 - \sigma_y^1 \sigma_y^2) . \quad (3.32)$$

Note que os valores dos campos e acoplamentos são inversamente proporcionais a τ . Dessa forma a porta pode, em princípio, ser executada em tempos progressivamente curtos, na medida em que as intensidades dos campos e acoplamentos aumentam enquanto o tempo diminui. Podemos tirar conclusões semelhantes a essas para os casos de todas as demais portas lógicas de nosso conjunto universal, além da **C-NOT**.

3.6.2 A porta T1

A igualdade entre as matrizes das equações (3.21) e (3.27) leva aos vínculos

$$\begin{aligned} \Re[G_{xx}^{34}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{34}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{24}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{24}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{14}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{14}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{23}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{23}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{13}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{13}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{12}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{12}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_1 &= \frac{\pi}{\tau} (-m - m' + m'' - m''') + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{11} + \frac{1}{2} \Re[G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}] \\ B_2 &= B_1 + \frac{2\pi}{\tau} (m''' - m'') + i[G_{xy}^{22} - G_{xy}^{11}] + \Re[-G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24}] \\ B_3 &= \frac{\pi}{\tau} (-m + m' + m'' + m''' + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{33} + \frac{1}{2} \Re[-G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} + G_{zz}^{34}] \\ B_4 &= B_3 + \frac{2\pi}{\tau} (m - m') + i[G_{xy}^{44} - G_{xy}^{33}] + \Re[-G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24}] . \end{aligned} \right. \quad (3.33)$$

Nota-se que a porta **T1** não exige nenhum acoplamento ligado além dos campos, e portanto, nossa escolha simplificador seria zerar todos os acoplamentos e constantes, obtendo valores não nulos apenas para os campos magnéticos, isto é,

$$B_3 = B_4 = \frac{\pi}{4\tau} .$$

Este valor, se aplicado a Eq. (3.20), leva à seguinte expressão para o hamiltoniano da porta **T1**:

$$H_{\text{T1}} = -\frac{\pi}{8\tau} (\sigma_z^3 + \sigma_z^4) . \quad (3.34)$$

3.6.3 A porta T2

A igualdade entre as matrizes das equações (3.21) e (3.28) leva aos vínculos

$$\begin{aligned}
 \Re[G_{xx}^{34}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{34}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{24}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{24}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{14}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{14}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{23}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{23}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{13}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{13}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{12}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{12}] &= 0
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 B_1 &= \frac{\pi}{\tau} (-n + n' - n'' - n''') + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{11} + \frac{1}{2} \Re[G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}] \\
 B_2 &= \frac{\pi}{\tau} (-n + n' + n'' + n''' + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{22} + \frac{1}{2} \Re[G_{zz}^{12} - G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}] \\
 B_3 &= B_1 + \frac{2\pi}{\tau} (n''' - n') + i[G_{xy}^{33} - G_{xy}^{11}] + \Re[-G_{zz}^{12} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{34}] \\
 B_4 &= B_2 + \frac{2\pi}{\tau} (n - n'') + i[G_{xy}^{44} - G_{xy}^{22}] + \Re[-G_{zz}^{12} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} + G_{zz}^{34}].
 \end{aligned} \right. \quad (3.35)$$

Repetimos aqui também o mesmo tipo de escolha que fizemos até agora, zerando as constantes e os acoplamentos livres. Como resultado, obtemos as igualdades abaixo, muito semelhantes àquelas obtidas para a porta **T1**:

$$B_2 = B_4 = \frac{\pi}{4\tau}.$$

Aplicando os valores escolhidos e determinados à Eq. (3.20), o hamiltoniano da porta **T2** resulta em:

$$H_{T2} = -\frac{\pi}{8\tau} (\sigma_z^2 + \sigma_z^4). \quad (3.36)$$

3.6.4 A porta Hadamard 1

A igualdade entre as matrizes das equações (3.21) e (3.29) leva aos vínculos

$$\begin{aligned}
 \Re[G_{xx}^{34}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{34}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{14}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{14}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{23}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{23}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{12}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{12}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{24}] &= -\frac{\sqrt{2}\pi}{2\tau} (j''' - j + \frac{1}{2}) & \Re[G_{xy}^{24}] &= 0 \\
 \Re[G_{xx}^{13}] &= -\frac{\sqrt{2}\pi}{2\tau} (j'' - j' + \frac{1}{2}) & \Re[G_{xy}^{13}] &= 0
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = -\frac{\pi}{\tau} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} + j + \frac{\sqrt{2}}{2} j' - \frac{\sqrt{2}}{2} j'' + j''' \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{11} + \frac{1}{2} \Re[G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}] \\ B_2 = -\frac{\pi}{\tau} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} j + j' + j'' - \frac{\sqrt{2}}{2} j''' \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{22} + \frac{1}{2} \Re[G_{zz}^{12} - G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}] \\ B_3 = B_1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{\tau} \left(-j'' + j' - \frac{1}{2} \right) + i[G_{xy}^{33} - G_{xy}^{11}] + \Re[-G_{zz}^{12} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{34}] \\ B_4 = B_2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{\tau} \left(-j''' + j - \frac{1}{2} \right) + i[G_{xy}^{44} - G_{xy}^{22}] + \Re[-G_{zz}^{12} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} + G_{zz}^{34}] \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Na porta de **Hadamard**, dois acoplamentos diferentes se mostram necessariamente não nulos, além disso, pela primeira vez teremos que usar os quatro campos externos de que dispomos para construir essa porta segundo nossa escolha de zerar as constantes e os acoplamentos livres. Dessa forma, consideraremos:

$$\begin{aligned} \Re[G_{xx}^{13}] &= \Re[G_{xx}^{24}] = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4\tau}, \\ B_1 &= B_2 = -\frac{\pi}{2\tau} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4\tau}, \\ B_3 &= B_4 = -\frac{\pi}{2\tau} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4\tau}, \end{aligned}$$

e mais as condições de hermiticidade da Eq. (3.19):

$$\begin{aligned} \Re[G_{xx}^{31}] &= \Re[G_{xx}^{13}], \\ \Re[G_{xx}^{42}] &= \Re[G_{xx}^{24}]. \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados, o hamiltoniano para a porta **Hadamard 1** fica dado por

$$\mathbf{H}_{H1} = \frac{\pi}{4\tau} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sigma_z^1 + \sigma_z^2) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sigma_z^3 + \sigma_z^4) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_x^1 \sigma_x^3 + \sigma_y^1 \sigma_y^3 + \sigma_x^2 \sigma_x^4 + \sigma_y^2 \sigma_y^4) \right]. \quad (3.38)$$

3.6.5 A porta Hadamard 2

A igualdade entre as matrizes das equações (3.21) e (3.30) leva aos vínculos

$$\begin{aligned} \Re[G_{xx}^{24}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{24}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{14}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{14}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{23}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{23}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{13}] &= 0 & \Re[G_{xy}^{13}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{34}] &= -\frac{\pi\sqrt{2}}{2\tau} (-l + l'' + \frac{1}{2}) & \Re[G_{xy}^{34}] &= 0 \\ \Re[G_{xx}^{12}] &= -\frac{\pi\sqrt{2}}{2\tau} (-l' + l''' + \frac{1}{2}) & \Re[G_{xy}^{12}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = -\frac{\pi}{\tau} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} + l + \frac{\sqrt{2}}{2} l' + l'' - \frac{\sqrt{2}}{2} l''' \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{11} + \frac{1}{2} \Re[G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} - G_{zz}^{34}] \\ B_2 = B_1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{\tau} \left(-l' + l''' + \frac{1}{2} \right) + i[G_{xy}^{22} - G_{xy}^{11}] + \Re[-G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24}] \\ B_3 = -\frac{\pi}{\tau} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} l + l' - \frac{\sqrt{2}}{2} l'' + l''' \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [G_{zz}^{nn} + 2G_{xx}^{nn}] + iG_{xy}^{33} + \frac{1}{2} \Re[-G_{zz}^{12} + G_{zz}^{13} - G_{zz}^{14} + G_{zz}^{23} - G_{zz}^{24} + G_{zz}^{34}] \\ B_4 = B_3 - \frac{\pi\sqrt{2}}{\tau} \left(-l + l''' + \frac{1}{2} \right) + i[G_{xy}^{44} - G_{xy}^{33}] + \Re[-G_{zz}^{13} + G_{zz}^{14} - G_{zz}^{23} + G_{zz}^{24}]. \end{array} \right. \quad (3.39)$$

A exemplo do que ocorreu entre as portas **T1** e **T2**, a solução para o sistema acima é bastante semelhante a solução do sistema correspondente a porta **Hadamard 1**. De fato, dá-se apenas uma mudança nos índices que rotulam os spins. No caso de **Hadamard 1**, a interação spin-spin se dava entre spins alternados (1,3) e (2,4); para a **Hadamard 2**, veremos que os acoplamentos se dão entre spins vizinhos (1,2) e (3,4) conforme os valores abaixo:

$$\Re[G_{xx}^{12}] = \Re[G_{xx}^{34}] = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4\tau},$$

$$B_1 = B_3 = -\frac{\pi}{2\tau} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4\tau},$$

$$B_2 = B_4 = -\frac{\pi}{2\tau} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4\tau}.$$

As condições de hermiticidade da Eq. (3.19) são dadas nesse caso por:

$$\Re[G_{xx}^{12}] = \Re[G_{xx}^{21}],$$

$$\Re[G_{xx}^{34}] = \Re[G_{xx}^{43}].$$

Todos esses vínculos, substituídos na Eq. (3.21), levam o hamiltoniano da porta **Hadamard 2** a adquirir a seguinte forma:

$$\mathbf{H}_{H2} = \frac{\pi}{4\tau} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\sigma_z^1 + \sigma_z^3) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\sigma_z^2 + \sigma_z^4) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2 + \sigma_x^3 \sigma_x^4 + \sigma_y^3 \sigma_y^4) \right]. \quad (3.40)$$

3.7 Fidelidade durante a operação da porta C-NOT

Nesta seção, vamos verificar a eficiência da operação da porta lógica **C-NOT**, obtida através do operador evolução temporal associado ao hamiltoniano (3.32). O procedimento que usaremos poderia ser aplicado para todas as demais portas. No entanto, vamos ilustrá-lo apenas no caso da porta **C-NOT**.

O processo de exponenciação da Eq. (3.32) nos leva a um operador de evolução temporal 16×16 bloco diagonal. Abaixo, apresentamos cada um de seus blocos.

- **Bloco m=+2**

Base: $\{|0000\rangle\}$

$$\left[e^{-i\frac{\pi t}{2\tau}} \right]_{1 \times 1}, \quad (3.41)$$

- **Bloco m=+1**

Base: $\{|0001\rangle, |0010\rangle, |0100\rangle, |1000\rangle\}$ ou $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 + e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & \frac{1}{2} \left(1 - e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & \frac{1}{2} \left(1 + e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad (3.42)$$

- **Bloco m=0**

Base: $\{|0011\rangle, |0101\rangle, |1001\rangle, |0110\rangle, |1010\rangle, |1100\rangle\}$

$$\begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi t}{2\tau}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi t}{2\tau} & i \sin \frac{\pi t}{2\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i \sin \frac{\pi t}{2\tau} & \cos \frac{\pi t}{2\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \frac{\pi t}{2\tau} & i \sin \frac{\pi t}{2\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \sin \frac{\pi t}{2\tau} & \cos \frac{\pi t}{2\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\frac{\pi t}{2\tau}} \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad (3.43)$$

- **Bloco m=-1**

Base: $\{|0111\rangle, |1011\rangle, |1101\rangle, |1110\rangle\}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + e^{i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & \frac{1}{2} \left(-1 + e^{i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(-1 + e^{i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & \frac{1}{2} \left(1 + e^{i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad (3.44)$$

- **Bloco m=-2**

Base: $\{|1111\rangle\}$

$$\left[e^{i\frac{\pi t}{2\tau}} \right]_{1 \times 1}. \quad (3.45)$$

Como a matriz de evolução temporal tem forma bloco diagonal, a escolha de um estado inicial pertencente a um certo subespaço, faz com que os blocos da matriz de evolução temporal associados a outros subespaços não realizem operação nenhuma, podendo ser dis-

pensados. Nas seções anteriores, nos concentramos em fazer o bloco $m = +1$ reproduzir a porta **C-NOT** quando $t = \tau$. Portanto, vamos escolher sempre estados iniciais do subespaço $m = +1$ para que possamos apreciar operações da porta **C-NOT**.

A substituição de $t = \tau$ nos elementos do bloco $m = +1$ da matriz de evolução temporal deixa claro que, passado o “tempo da porta”, o estado inicial realmente terá sofrido a operação **C-NOT**. Entretanto, gostaríamos de observar a dinâmica dessa operação para tempos intermediários, ou seja, para $0 < t < \tau$.

Vamos considerar, por exemplo, o estado inicial

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0100\rangle - |0001\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{1}\bar{0}\rangle - |\bar{0}\bar{0}\rangle) . \quad (3.46)$$

É claro que, se desejamos realizar a operação **C-NOT**, depois de um tempo τ esperamos obter o estado

$$|\varphi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1000\rangle - |0001\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{1}\bar{1}\rangle - |\bar{0}\bar{0}\rangle) . \quad (3.47)$$

Vamos medir o quão *distante* deste estado desejado ficam os estados $|\varphi(t)\rangle$ para $0 \leq t \leq \tau$. Uma medida de distância adequada para este propósito é a fidelidade, já discutida na **Seção 2.2** e definida neste caso por

$$\mathcal{F}(t) = |\langle \varphi(\tau) | \exp(-i\mathbf{H}_{\text{C-NOT}}t) | \varphi(0) \rangle|^2 , \quad (3.48)$$

cujas expressão matricial no espaço mapeado é:

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{4} \left| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 + e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & \frac{1}{2} \left(1 - e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) & \frac{1}{2} \left(1 + e^{-i\frac{\pi t}{\tau}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|^2 . \quad (3.49)$$

Realizadas as operações indicadas acima, obtem-se

$$\mathcal{F}(t) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) . \quad (3.50)$$

O primeiro teste que somos tentados a fazer é verificar se a fidelidade em $t = \tau$ é mesmo 100%. De fato, é imediato concluir que $\mathcal{F}(\tau) = 1$, mostrando que a porta **C-NOT** realmente se completa no tempo $t = \tau$. Além disso, a fidelidade inicial $\mathcal{F}(0)$ revela que a semelhança entre o estado inicial e o almejado é de 25%, e para tempos intermediários a evolução é dirigida monotonicamente à obtenção do estado desejado, alcançado-o finalmente em $t = \tau$, como mostra a **Figura 3.2**.

De fato, se deixarmos os acoplamentos ligados por um tempo maior que τ , a Eq.

Figura 3.2: Aumento da fidelidade entre o estado em evolução regida pela porta **C-NOT** e o estado esperado teoricamente. Na figura, o “tempo da porta” tomado foi $\tau = 1$.

(3.50) mostra que vamos atingir o estado desejado em todo tempo $t = (2n + 1)\tau$ com $n \in \mathbb{Z}$.

Todo esse sucesso só é possível por estarmos operando dentro de um SLD, mantendo o sistema isolado dos graus de liberdade do ambiente, o que representa uma situação ideal. Mostraremos no **Capítulo 5** que o emaranhamento com o ambiente faz com que as portas não sejam sempre tão eficientes assim; mas se aproximem tanto quanto se deseje dessa situação ideal na proporção em que aumentamos a intensidade do acoplamento entre o sistema e o resto do universo.

3.8 Sistemas Indeterminados

Vimos que a construção de um conjunto universal de portas lógicas é possível mesmo sob as condições de dinâmica livre de decoerência; e está sempre associada, no nosso contexto, a solução de um sistema linear indeterminado. Essa característica é, sem dúvida, uma virtude no que concerne a implementação física de portas lógicas quânticas.

Nosso hamiltoniano fornece uma grande variedade de tipos de acoplamentos, como grandezas reais e complexas. Entretanto, a realização de um acoplamento complexo pode ser uma dificuldade na prática. Nesse sentido, a indeterminação do sistema nos possibilita anular as componentes imaginárias. Uma outra hipótese, é que seja difícil realizar acoplamentos negativos. Para isto, a liberdade sobre as constantes inteiras sempre se mostra útil, pois uma escolha criteriosa sempre poderá oferecer campos e acoplamentos positivos.

No próximo capítulo, vamos abordar a implementação física de *qubits* e portas lógicas quânticas em junções de Josephson. Embora nosso objetivo não seja definir esta implementação física para nosso problema, essas junções oferecem hamiltonianos que se parecem muito e, efetivamente, funcionam como hamiltonianos para spins interagentes com campos externos atuando independentemente, cada qual no sítio de um respectivo spin, mais as interações controladas entre os *qubits*. Acreditamos que essa característica represente um forte apelo para o estudo desse tipo de implementação, e é por isso que escolhemos tratá-la num novo capítulo.

Implementação: Junções Josephson

Neste capítulo vamos apresentar uma possível proposta de implementação física dos hamiltonianos das portas lógicas obtidos no capítulo anterior, destacando triunfos e obstáculos rumo à construção do computador quântico.

Muitos são os sistemas físicos candidatos à realização de *qubits*. A princípio, qualquer sistema de dois níveis pode ser utilizado para representar a informação quântica. De fato, ao lembrarmos que alguns sistemas físicos podem ser *truncados* em sub-sistemas compostos de dois níveis, restringindo-os assim subespaços de duas dimensões [16], rapidamente concluímos que a oferta de implementações para a computação quântica é vasta.

Todavia, embora seja enorme o número de candidatos, até hoje não temos um computador quântico, provavelmente porque este deve ser muito mais do que um simples sistema de dois níveis. De fato, os critérios à serem satisfeitos para a construção de um computador quântico foram muito bem listados por DiVincenzo [17]:

1. É necessário um sistema quântico de dois níveis bem definidos para representar a informação. Isto significa que outros estados, além dos dois em questão, presentes na maioria dos sistemas físicos reais, não devem ser excitados durante as manipulações.
2. Deve ser possível preparar o estado inicial dos *qubits* com precisão arbitrariamente grande.
3. Um longo tempo de coerência é necessário, suficiente para permitir um grande número de manipulações coerentes (por exemplo, cerca de 10^4).
4. Controle suficiente sobre o hamiltoniano dos *qubits* para realizar as transformações unitárias necessárias (portas lógicas quânticas de 1 e 2 *qubits*). Para isso devemos ser capazes de controlar os campos nos sítios de cada *qubit* isoladamente e aco-

plar dois *qubits* de forma controlada (de preferência dispondo da possibilidade de ligar e desligar as interações entre os *qubits*). Fisicamente falando, esses tipos de operações permitem a criação de estados arbitrários de superposição e de estados acoplados não triviais, como estados emaranhados.

5. Finalmente, uma medida é necessária para extrair os resultados da computação, tanto no fim do processamento quanto durante sua realização para propósitos de correção de erros, por exemplo.

É claro que tantos critérios restringem muito o número de candidatos, mas mesmo assim, felizmente, vários sistemas físicos permanecem em voga e sob constante estudo, buscando assim explorar suas virtudes e superar seus defeitos. Tamanha é a pesquisa realizada em cada proposta, que a busca de uma implementação para o computador quântico talvez seja hoje uma das áreas da física que mais mobilize reconhecidos grupos experimentais por todo o mundo.

Nesta dissertação, vamos dar destaque à implementações com dispositivos supercondutores do estado sólido, particularmente as junções Josephson. Acreditamos que esta seja uma das mais promissoras propostas atuais por ser capaz de satisfazer as demandas de longos tempos de decoerência (1 ms), curtos tempos de operação (1 ps), escalabilidade e manufaturabilidade [18]. Além disso, nossa escolha por este tipo de dispositivo também expressa a expectativa de que toda a tecnologia desenvolvida nos últimos anos para a construção dos computadores clássicos atuais, possa também ser utilizada na construção dos computadores quânticos no futuro.

Para mostrar como as junções supercondutoras de Josephson podem servir para representar os *qubits* de forma controlada, vamos começar fazendo uma breve revisão a seu respeito nas próximas seções. Somente depois de fixados os conceitos e grandezas necessárias é que mostraremos como a computação quântica pode tirar proveito dessas junções.

4.1 Supercondutividade

Vamos começar revisando o conceito de supercondutividade para podermos introduzir de forma mais consistente as equações de Josephson na próxima seção. A revisão que apresentamos é uma adaptação do capítulo 21 da referência [19] e pretende mostrar que a função de onda da mecânica quântica pode assumir, em certas circunstâncias, um significado mais palpável do que a abstrata interpretação da “amplitude de probabilidade”.

Inicialmente, escrevemos a equação de Schrödinger para uma partícula de massa m

e carga q num potencial elétrico ϕ ,

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi + q\phi\psi.$$

Lembrando que a prescrição da mecânica quântica para a introdução de um campo magnético de potencial vetor $\mathbf{A}$ é dada pela troca

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A},$$

a equação de Schrödinger nessas circunstâncias fica dada por

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi + q\phi\psi. \quad (4.1)$$

Com a densidade de probabilidade escrita em termos da função de onda

$$P(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t),$$

podemos escrever a equação de conservação de probabilidade

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J},$$

com $\mathbf{J}$ sendo uma *corrente de probabilidade* e cuja expressão pode ser obtida com o auxílio da Eq. (4.1), isto é,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2m} \left[\psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi + \psi \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi^* \right]. \quad (4.2)$$

Até aqui, grandezas como ψ , P e $\mathbf{J}$ estão abstratamente associadas a amplitudes, densidades e (densidade de) correntes de probabilidade, respectivamente. Vamos discutir como essas grandezas podem assumir significados mais concretos no contexto da supercondutividade.

Imaginemos uma situação em que um grande número de partículas distribuídas numa certa região do espaço possua a mesma função de onda ψ . A probabilidade de se encontrar uma dessas partículas numa dada posição é $\psi\psi^*$ (em um elemento de volume $dx dy dz$ dessa região, iremos encontrar um número aproximadamente igual a $\psi\psi^* dx dy dz$ de partículas). Portanto, nessa situação de alta população de um estado, a função P pode ser entendida como densidade de partículas (em vez de simplesmente densidade de probabilidade). Além disso, se introduzimos a carga q na definição de ψ , $\psi\psi^*$ passa a denotar a densidade de carga elétrica (ρ) e conseqüentemente, a forma mais geral para escrevermos ψ é

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad (4.3)$$

com θ sendo uma fase arbitrária, a princípio. É claro que, com tudo isso, a corrente de probabilidade $\mathbf{J}$ passa a ser a própria densidade de corrente elétrica.

O problema com o elétron (carga elétrica a que iremos nos referir daqui por diante) é sua natureza fermiônica, impedindo que mais de um elétron ocupe o mesmo estado. Por esse motivo, por muito tempo se pensou que a função de onda dos elétrons nunca viesse a ter o significado macroscópico enunciado no parágrafo anterior. Em 1957, J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer [20] mostraram que sob certas circunstâncias, os elétrons poderiam formar pares de natureza bosônica.

Os pares de Cooper constituem ligações fracas entre dois elétrons mediadas pelos fônons da rede a que pertencem os elétrons (portanto, sua carga é duas vezes a carga eletrônica). Devido a fraca interação (indireta) entre os elétrons, esses pares só podem ser observados a baixíssimas temperaturas; mesmo porque pequenas energias são capazes de rompê-los, levando sua decomposição a dois *elétrons normais*. O comportamento bosônico dos pares de Cooper é facilmente compreendido se lembrarmos que uma permutação dos elétrons do par leva a uma dupla mudança (ou mudança nenhuma) no sinal da sua função de onda. A condução de eletricidade livre de resistência (supercondutividade), segue como consequência dessa configuração, já que a inexistência do princípio de exclusão de Pauli faz com que todos os pares de Cooper procurem coexistir no mesmo estado, e portanto se comportem da mesma maneira, minimizando colisões e outros mecanismos de ejeção do fluxo regular.

Finalmente, vamos discutir o significado da fase θ da função de onda da Eq. (4.3). A substituição desta na Eq. (4.2), mais a consideração de ρ constante, nos leva a

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \left(\nabla\theta - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \right) \rho. \quad (4.4)$$

Essa igualdade esclarece que a fase absoluta θ não é observável, mas se seu gradiente é conhecido em todo lugar, a fase também é conhecida a menos de uma constante. Valendo a consideração de $\mathbf{J}$ ser a densidade de corrente, podemos escrevê-lo como o produto $\rho\mathbf{v}$, em que $\mathbf{v}$ é a velocidade do movimento dos elétrons. Usando essa igualdade na equação acima, é fácil obter que

$$\hbar\nabla\theta = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}, \quad (4.5)$$

mostrando que o gradiente da fase resulta no momentum dinâmico, conhecido desde antes do advento da mecânica quântica.

Todos esses significados macroscópicos para grandezas a princípio tão abstratas seguem da supercondutividade. Através dela, os físicos puderam apreciar numa escala macroscópica fenômenos genuinamente quânticos, testando a teoria e construindo dispositivos de ampla utilidade tecnológica como as junções Josephson. Vamos discutir, na próxima

seção, um importante fenômeno relacionado à supercondutividade que nos será útil mais adiante.

4.2 Quantização do Fluxo Magnético

A discussão desse tema é necessária para o entendimento de dispositivos supercondutores como os SQUIDS, que discutiremos mais adiante. Vamos abordá-la considerando que em um anel supercondutor a densidade de corrente elétrica localiza-se exclusivamente na superfície do material, nunca em seu interior [21]. Nessas condições, a imposição de $J = 0$ em (4.4) resulta na igualdade

$$\hbar \nabla \theta = q \mathbf{A}. \quad (4.6)$$

Aplicando integrais de linha a ambos os membros da igualdade acima, ao longo de uma curva Γ que contorna o anel próximo ao centro de sua seção transversal sem nunca se aproximar de sua superfície, temos

$$\hbar \oint_{\Gamma} \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = q \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.7)$$

Usando a lei de Stokes no segundo membro da equação acima, é fácil constatar que este dá o fluxo magnético Φ através da superfície S' determinada pelo contorno Γ ,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi,$$

e que, portanto, o fluxo magnético fica dado por

$$\Phi = \frac{\hbar}{q} \oint_{\Gamma} \nabla \theta \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.8)$$

A integral restante é naturalmente a variação de θ e nesse sentido poderíamos pensar que, uma vez que o anel é fechado, $\Delta\theta = 0$. Esse resultado seria válido para uma peça supercondutora convexa, porém, não necessariamente verdadeira para um anel. A única requisição física é que *só haja um valor para a função de onda em cada ponto do anel*, e dado que esta função de onda é dada por $\sqrt{\rho}e^{i\theta}$, este objeto sempre assumirá um mesmo valor para cada volta completa em torno do anel se $\Delta\theta = 2\pi n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Com isso, fica evidente a quantização do fluxo magnético, expressa na seguinte igualdade:

$$\Phi = n\Phi_0 \quad \text{com} \quad \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{q} \approx 2,09 \times 10^{-7} \text{ gauss cm}^2, \quad (4.9)$$

onde comumente se denomina *fluxóide* a constante Φ_0 .

Na prática, estaremos interessados em anéis em que o contorno Γ não é fechado, mas interrompido por uma junção Josephson (estrutura conhecida como SQUID), como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1: SQUID anelar – a junção Josephson interrompe o contorno Γ levando à modificação da lei de quantização do fluxo Φ .

Nesse caso a quantização do fluxo magnético deve ser recalculada de acordo com as integrais abaixo:

$$\Phi = \frac{\hbar}{q} \oint_{\Gamma} \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} - \frac{\hbar}{q} \int_2^1 \nabla \theta \cdot d\mathbf{l}.$$

Definindo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, é imediato escrevermos

$$\Phi = \frac{\hbar}{q} (2\pi n - \Delta\theta),$$

e ao recorrermos à definição do fluxóide Φ_0 empregada em (4.9), obtem-se

$$\Phi = \Phi_0 \left(n - \frac{\Delta\theta}{2\pi} \right). \quad (4.10)$$

É imediato ver que para $\Delta\theta = 0$, recupera-se a Eq. (4.9), que dá a quantização do fluxo magnético usual de um anel uniforme.

4.3 Equações de Josephson

Nesta seção vamos apreciar o efeito Josephson derivando-o matematicamente a partir dos fundamentos da mecânica quântica. As equações resultantes desse procedimento, além de usadas para a melhor compreensão do efeito, serão úteis posteriormente quando introduziremos algumas maneiras de se implementar *qubits* através de junções Josephson.

Vamos considerar dois pedaços (designados por 1 e 2) de material supercondutor separados por um outro material (isolante) de espessura d . Se d é muito grande, os dois supercondutores não sentem a presença um do outro, e a dinâmica obedece as equações de

Schrödinger desacopladas

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= E_1 \psi_1, \\ -i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= E_2 \psi_2. \end{aligned}$$

Por outro lado, se d é pequeno o bastante para que ocorra sobreposição das funções de onda dos dois lados da junção, é razoável escrever as equações de Schrödinger na forma acoplada abaixo:

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= E_1 \psi_1 + K \psi_2, \\ -i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= E_2 \psi_2 + K \psi_1, \end{aligned}$$

onde K é uma constante característica da junção. Introduzindo uma diferença de potencial $V = V(t)$ entre os supercondutores e assumindo, por conveniência, o zero de energia na região entre os supercondutores, as equações acima podem ser escritas como

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \frac{qV}{2} \psi_1 + K \psi_2, \\ -i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -\frac{qV}{2} \psi_2 + K \psi_1. \end{aligned}$$

Substituindo nessas equações a forma geral das funções de onda ψ_1 e ψ_2 , obtidas na Eq. (4.3), um procedimento matemático elementar leva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= 2 \frac{K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\theta_2 - \theta_1), \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{qV}{2\hbar}, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{qV}{2\hbar}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agora, assumindo $\rho_1 \approx \rho_2$, recorrendo à definição da seção anterior para $\Delta\theta$ e definindo

$$J_0 = \frac{2K\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\hbar},$$

as Eqs. (4.11) podem ser rescritas de forma mais simples, bastando para isso lembrar que a densidade de corrente $\mathbf{J}$ através da junção é a própria variação temporal da densidade de

carga no supercondutor 1, ou seja,

$$J = J_0 \sin \Delta\theta, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} = \frac{qV}{\hbar}. \quad (4.13)$$

Este par de equações resume o celebrado efeito Josephson, mostrando que a diferença entre as fases das funções de onda de cada supercondutor podem se ajustar para permitir o transporte de uma corrente constante de intensidade máxima J_0 na ausência de qualquer diferença de potencial mensurável (Efeito Josephson DC). Para correntes superiores a J_0 , uma voltagem DC aparece na junção, resultando em oscilações de corrente de alta frequência (Efeito Josephson AC). Uma análise detalhada desses dois casos encontra-se na referência [22].

4.4 Qubits via Junções de Josephson

A construção de sistemas de dois níveis em junções de Josephson é um assunto já bem discutido na literatura e ramifica-se em duas propostas principais, cada qual privilegiando um certo grau de liberdade do sistema físico. A primeira se baseia no grau de liberdade associado ao *fluxo magnético* e a segunda na *carga elétrica*. Vamos discutir essas propostas separadamente.

4.4.1 Qubits baseados no grau de liberdade associado ao fluxo magnético

Qubits baseados no fluxo magnético são simplesmente implementados em SQUIDS anelares como o da **Figura 4.1**. Aplicando-se perpendicularmente um campo magnético através do anel, o fluxo total é dado por

$$\Phi = \Phi_x + Li, \quad (4.14)$$

onde Φ_x é o fluxo devido ao campo aplicado, L é a auto-indutância do anel e i é a corrente total que circula pelo SQUID. Em particular, a corrente i é composta por duas parcelas distintas:

$$i = i_0 \sin \Delta\theta + C \frac{dV}{dt}, \quad (4.15)$$

na qual estamos desprezando toda a corrente originada por elétrons não pareados, ou seja, estamos assumindo a inexistência de elétrons isolados. O primeiro termo da Eq. (4.15) refere-se a *corrente Josephson* obtida na Eq. (4.12), e tem origem física no tunelamento dos pares de Cooper através da junção. Já o segundo termo é uma *corrente de polarização*, decorrente da capacitância C finita da junção.

A substituição da expressão desta corrente total na equação do fluxo total, aliada a aplicação da lei de Faraday para $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ e da Eq. (4.10) para $\Delta\theta = -2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} + 2\pi n$, leva-nos à seguinte equação de movimento:

$$C \frac{d^2\Phi}{dt^2} + i_0 \sin\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + \frac{1}{L}(\Phi - \Phi_x) = 0.$$

Tal equação retrata uma partícula de coordenada Φ submetida a um potencial $U(\Phi)$, isto é,

$$C \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} = 0, \quad (4.16)$$

com

$$U(\Phi) = \frac{1}{2L}(\Phi - \Phi_x)^2 - E_J \cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (4.17)$$

na qual definimos $E_J = \frac{\Phi_0 i_0}{2\pi}$ que representa uma importante escala de energia associada ao tunelamento dos pares de Cooper através da junção Josephson, sendo comumente chamada de *energia de acoplamento Josephson*.

A análise desse potencial revela que para um fluxo aplicado $\Phi_x = \frac{\Phi_0}{2}$, o potencial assume a forma biestável, em contraste com a forma assumida para outros valores de Φ_x , conforme ilustra a **Figura 4.2**.

Figura 4.2: A seqüência de potenciais com Φ_x crescente, revela a mudança da posição de equilíbrio inicial de uma configuração estável em $\Phi_x = 0$, para uma biestável (*qubit*) em $\Phi_x = \frac{\Phi_0}{2}$ e finalmente para uma configuração meta-estável em $\Phi_x = \Phi_0$.

Assim, com as condições externas convenientemente escolhidas para obter um potencial biestável, podemos restringir o espaço de Hilbert a um espaço de duas dimensões, o que cria o *qubit* procurado. Os dois auto-estados correspondem aos possíveis estados de fluxo magnético interno ao SQUID (0 ou Φ_0).

4.4.2 Qubits baseados no grau de liberdade associado a carga elétrica

Para essa proposta utilizam-se dispositivos conhecidos como *Caixas de Pares de Co-*

oper. Estes consistem de uma junção Josephson acoplando duas partes supercondutoras (reservatório e ilha), sendo a ilha ligada a uma fonte de tensão através de uma capacitância (C_g), conforme mostra a **Figura 4.3**.

A figura representa o desenho mais simplista desse tipo de *qubit*, útil para entendermos seu funcionamento. Na prática, porém, desenhos mais complexos dão maior sofisticação e eficiência a esta proposta. Baseando-nos nesse modelo elementar, vamos discutir como este dispositivo pode implementar um *qubit*.

Pares de Cooper podem, em princípio, tunelar através da junção e entrar na caixa (supercondutor ilha - representado pelo supercondutor de baixo da figura). Entretanto, esses dispositivos são construídos com uma capacitância C_J extremamente pequena ($\leq 10^{-15}$ F); portanto, a escala de energia associada à inserção de cargas na caixa é muito grande, tornando improvável este fenômeno,

$$E_C = \frac{e^2}{2(C_g + C_J)} . \quad (4.18)$$

Esta é a energia que um elétron isolado (carga e) deveria adquirir para entrar na caixa. Podemos expressar a dificuldade de transferir os pares de Cooper com a desigualdade $E_C \gg E_J$. Este caso é o oposto ao que acontecia com o *qubit* implementado na seção anterior, onde a energia dominante do problema era a energia de acoplamento Josephson, ou seja, $E_J \gg E_C$.

Escolhendo convenientemente as escalas de energia para operar apenas com pares de Cooper (evitando o tunelamento de elétrons isolados), é possível controlar o número de pares transferidos do reservatório e armazenados na caixa através da aplicação de uma tensão V_g adequada. Com isso, a energia potencial devido as cargas no capacitor C_J é dada por

$$U_c = E_C (2n - q)^2 , \quad (4.19)$$

na qual $q = \frac{C_g V_g}{e}$ é o número de elétrons induzidos na ilha através do capacitor C_g e n é o número de pares de Cooper em excesso na ilha, ou seja, o número de pares que tunelaram através da junção e ficaram armazenados na caixa.

Graficamente, a energia potencial fica dada segundo a **Figura 4.4**, em que a Eq. (4.19) foi plotada para diferentes valores de n .

Figura 4.3: Caixa de par de Cooper – dispositivo usado para implementar o *qubit* através do grau de liberdade associado a carga elétrica.

Figura 4.4: A energia potencial associada às cargas armazenadas na caixa depende da carga q , ou da tensão aplicada V_g . O gráfico tem como parâmetro o número n , que dá o número de pares de Cooper em excesso na caixa.

Além desta energia potencial, há de se considerar o efeito do termo de acoplamento Josephson, conforme mostra a Eq. (4.17). Incluindo-o na Eq. (4.19), temos a seguinte expressão para a energia potencial:

$$U_c = E_C (2n - q)^2 - E_J \cos \Delta\theta. \quad (4.20)$$

Como $E_C \gg E_J$, o efeito do termo de acoplamento dá o aspecto da **Figura 4.5** para o potencial.

Figura 4.5: Próximo aos pontos de degenerescência, o termo fraco de acoplamento mistura os estados de carga e modifica a energia dos auto-estados. Na vizinhança desses pontos o sistema se comporta efetivamente como um sistema de dois níveis.

A figura deixa claro que ao considerarmos uma tensão $V_g = \frac{3e}{C_g}$, por exemplo, o sistema estará nas vizinhanças dos estados de carga $n = 0$ e 1 , comportando-se assim como um sistema de dois níveis nessa faixa de tensão.

4.5 Perspectivas para realização das portas lógicas

As duas implementações do *qubit* discutidas nas seções anteriores são foco de muita pesquisa para a construção de portas lógicas quânticas de até dois *qubits*, como as obtidas teoricamente no capítulo anterior. Embora seja difícil julgar qual grau de liberdade, carga ou fluxo, representa a proposta mais promissora rumo ao computador quântico, mais realizações foram alcançadas até agora através de *qubits* implementados em estados de carga. Para endossar essa afirmação devemos mencionar que até hoje nunca foi observado diretamente o tunelamento coerente entre os estados de fluxo implementados com SQUIDs [23]. Frente a isso, vamos discutir brevemente a construção de portas lógicas quânticas usando as Caixas de pares de Cooper [24].

Como são necessárias operações que exigem mais do que um *qubit*, várias junções Josephson, cada qual com sua própria fonte de tensão, são conectadas em paralelo entre si e também com um indutor mútuo. Esse conjunto representa o registrador quântico. Portas de um e dois *qubits* podem ser implementadas pela aplicação de seqüências de tensões apropriadas e da sintonia em ressonância dos *qubits* selecionados. É animador o conhecimento de que tunelamento coerente dos pares de Cooper e características relacionadas a estados superpostos de carga já tenham sido demonstrados experimentalmente [25].

Todavia esse projeto simples apresenta vários desafios: requer alta precisão no controle do tempo de ligar e desligar as tensões, além de envolver interações residuais de dois *qubits* que produzirão erros. Um outro problema sério é a escalabilidade: para um número maior de *qubits* com paralelismo massivo, surgem exigências como progressos na área de nanotecnologia, redução da temperatura de trabalho, controle quase perfeito das tensões dependentes do tempo e tempos de decoerência mais longos.

Um relatório recente da ARDA (Advanced Research and Development Activity) [26], serve para posicionar a tecnologia atual frente ao que se deve alcançar para construir o computador quântico em dispositivos supercondutores. Segundo este relatório, o que é factível experimentalmente é a implementação dos *qubits* com preparação e leitura de ambos os estados, além da realização de operações de um *qubit* com demonstrações de oscilações de Rabi, bem como a demonstração de que os tempos de decoerência são muito mais longos do que os períodos dessas oscilações. Além disso, tudo é inédito. Não se tem até agora nenhuma demonstração experimental de operações de mais do que um *qubit* em dispositivos supercondutores.

Apesar desses resultados pessimistas, o relatório prevê que até 2012 todos os obstáculos terão sido superados, e o computador quântico supercondutor será uma realidade. Enquanto isso, nossos hamiltonianos das portas lógicas do capítulo anterior aguardam por uma realização experimental.

Efeito Zenão Quântico

Desde 1977, quando pela primeira vez se falou em uma possível versão quântica de um dos paradoxos de Zenão, um gradual aumento no número de publicações acerca deste fenômeno se iniciou.

Motivado por interpretações conflitantes, experimentos polêmicos e aplicações relevantes, atualmente este fenômeno se mantém em voga também devido a sua inserção no contexto de computação e informação quântica. A **Figura 5.1** apresenta uma pesquisa sobre o número de publicações que mencionam o efeito Zenão no título, palavras chaves ou *abstract*, desde 1976 até 2002 (dados do ISI Web of Science).

Figura 5.1: Aumento do número de publicações sobre o efeito Zenão quântico no período de 1976 a 2002.

É notável o pequeno número de publicações durante a primeira década de descoberta do efeito por B. Misra e E. C. G. Sudarshan [27], em 1977. Somente a partir de 1990, com a primeira observação experimental (de validade ainda debatida) por W. M. Itano *et al* [28], é que um apreciável crescimento no número de publicações começou a acontecer.

Desta forma, o Efeito Zenão Quântico (EZQ) pode ser considerado ainda um capítulo recente da mecânica quântica, objeto de estudo e pesquisa de físicos teóricos e experimentais.

Neste capítulo pretendemos, usando uma abordagem explícita, mostrar como o EZQ pode proteger a informação quântica de mecanismos de decoerência através do confinamento dos estados portadores de informação dentro de subespaços livres de decoerência (SLD). Embora a propriedade de proteção da informação já seja conhecida [29], acreditamos que a abordagem aqui usada seja inédita e consequentemente, passível de oferecer novos resultados.

A fim de situar nosso trabalho no contexto das mais de 300 publicações sobre o tema, vamos começar fazendo uma revisão literária de alguns artigos que nos guiaram durante a realização deste mestrado. Além de contextualizar nosso trabalho, construímos a referida revisão objetivando introduzir o leitor ao EZQ, esclarecendo o seu significado e importância dentro do âmbito atual da teoria quântica.

5.1 Revisão da Literatura

Inicialmente, gostaríamos de destacar que a revisão bibliográfica que passamos a apresentar deve ser encarada como um guia para o EZQ no contexto deste mestrado. Com isso, queremos dizer que os artigos não mencionados aqui, embora importantes num contexto geral, têm suas contribuições figurando como elementos secundários para a elaboração específica deste projeto. Foi usando este crivo de primordialidade que selecionamos quatro artigos, de um universo de centenas, para compor esta revisão. É claro que uma redução desta ordem deixa lacunas na compreensão completa de qualquer assunto; entretanto, no que diz respeito ao EZQ em particular, muitas dessas lacunas restariam mesmo após uma leitura integral do que se publicou até hoje, pois como dissemos, esse fenômeno ainda é gerador de muita controvérsia entre os cientistas.

Em suma, o esforço concentrado nesta revisão literária busca sintetizar os resultados mais importantes, dos artigos considerados indispensáveis, minimizando tanto quanto possível o número de lacunas no entendimento do papel do EZQ perante a teoria de informação quântica. Vamos iniciá-la com o artigo considerado germe deste importante fenômeno.

5.1.1 Artigo 1: O paradoxo de Zenão na teoria quântica

Embora este não tenha sido propriamente o primeiro artigo a apreciar o efeito em que estamos interessados, freqüentemente atribui-se a ele a descoberta do EZQ. De fato, foi a partir desta publicação [27], que o efeito foi colocado num contexto mais geral e matematicamente rigoroso. É também devido a B. Misra e E. C. G. Sudarshan o nome “Paradoxo de Zenão Quântico”¹, por razões que elucidaremos mais adiante.

Conforme colocado no primeiro parágrafo do artigo, os autores se propõe a discutir um resultado aparentemente paradoxal que ocorreria durante a evolução de um sistema quântico instável sob observação contínua num dado intervalo de tempo. Depois de definir algumas grandezas necessárias ao desenvolvimento matemático formal (apresentaremos essas definições posteriormente), e de uma breve discussão a respeito da validade de se considerar medidas contínuas (repetição de uma medida com o “tempo morto” entre medidas arbitrariamente pequeno), os autores antecipam o surpreendente resultado:

“Uma partícula instável, constantemente observada para constatar se decaída ou não, nunca será encontrada decaída!”

Segue então uma rápida justificativa para a evocação do nome de Zenão para este efeito (a título de curiosidade e completeza, apresentamos uma versão mais detalhada sobre os paradoxos de Zenão e o seu paralelo com o EZQ no **Apêndice C**). No que diz respeito ao nome *paradoxo*, a própria conclusão destacada acima, além da analogia com os *paradoxos* consagrados de Zenão, já serviriam para justificá-lo. Todavia os autores reforçam ainda mais esta característica com o seguinte comentário, a respeito do famoso experimento mental com o gato de Schrödinger, conforme tradução transcrita abaixo,

“Pode ser lembrado que o aparato consiste de uma partícula (quântica) instável colocada numa caixa equipada com um contador eficiente, e um gato dentro de uma câmara de aço. Se a partícula decai, o contador registra o ocorrido e, por sua vez, ativa um pequeno martelo que quebra um frasco de cianeto na câmara de aço. O monitoramento das funções vitais do gato serve para observar se a partícula decaiu ou não. Em vista do paradoxo de Zenão formulado acima, deveríamos concluir que a partícula nunca decai? Irá o gato escapar da morte cruel que o aguarda, contra a qual é indefeso, se os sinais vitais forem constantemente e carinhosamente observados?”

¹Na época do artigo, o efeito foi batizado de *paradoxo* de Zenão quântico, frente ao desconcerto que causou nos autores e em toda comunidade científica. Todavia a natureza paradoxal é hoje praticamente descartada. De fato, como diz Feynman, não devem haver paradoxos em ciência. Assim, adotamos a notação “efeito” em vez de “paradoxo” nesta dissertação.

Nas páginas seguintes, vamos tratar dos aspectos matemáticos do artigo, formalizando o problema em termos de grandezas adequadas oferecidas pela teoria quântica. As seguintes definições são relevantes:

- $E \equiv$ Projetor no subespaço dos estados não decaídos do sistema,
- $U(t) \equiv$ Operador evolução temporal do sistema,
- $\rho \equiv$ Operador densidade em que o sistema é preparado (não decaído),
- $\Delta \equiv$ Intervalo de tempo $[0, t]$,
- $P(\Delta; \rho) \equiv$ Probabilidade de que o sistema, preparado no estado ρ no tempo $t = 0$, seja encontrado decaído em algum instante do intervalo Δ , quando submetido a medidas contínuas sobre ter decaído ou não durante esse intervalo,
- $Q(\Delta; \rho) \equiv$ Probabilidade complementar de $P(\Delta; \rho)$, ou seja, probabilidade de que o sistema, preparado no estado ρ no tempo $t = 0$, seja encontrado *não* decaído em algum instante do intervalo Δ quando submetido a medidas contínuas sobre ter decaído ou não durante esse intervalo.

Vale destacar, como fazem os autores, que a probabilidade

$$q(t) = \text{Tr} \left[\rho U^\dagger(t) E U(t) \right], \quad (5.1)$$

não deve ser identificada com $Q(\Delta; \rho)$ (e nem a complementar $p(t) = 1 - q(t)$, com $P(\Delta; \rho)$). A probabilidade $q(t)$, de expressão fornecida por procedimentos já bem estabelecidos da teoria quântica padrão, é interpretada como a probabilidade de se encontrar o sistema inicialmente preparado em ρ no estado não decaído no instante t . De fato, ela se refere ao resultado de uma medida realizada no tempo t , tendo ficado o sistema sem ocorrência de medições no intervalo Δ .

Fica claro assim que a expressão para $Q(\Delta; \rho)$ não pode ser a mesma que aquela dada na Eq. (5.1). Os autores argumentam então que a teoria quântica só seria completa se fosse hábil na construção de um algoritmo para o cálculo de probabilidades como $P(\Delta; \rho)$ e/ou $Q(\Delta; \rho)$, e mostram, em seguida, como realizar este procedimento.

Inicialmente introduzem a probabilidade $Q(\Delta, n; \rho)$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(\Delta, n; \rho) = Q(\Delta; \rho). \quad (5.2)$$

O objetivo da introdução de $Q(\Delta, n; \rho)$ é tornar contável o número de medidas instantâneas realizadas em instantes de tempo discretos: $0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \dots, \frac{(n-1)t}{n}$ e obter o regime de medidas contínuas somente como resultado de uma operação limite. Como consequência, faz-se conveniente também definir $\rho(n, t)$ como o estado *não decaído* do sistema depois de $(n + 1)$ medidas.

Lançando mão da particularização de medidas ideais (em que o resultado é unicamente determinado pela observável medida, não levando em conta os detalhes do aparato de medida), os autores estabelecem que uma primeira medida de ρ , que resulte em um estado também não decaído $\rho(0, t)$, se processa segundo

$$\rho \rightarrow \rho(0, t) = E\rho E, \quad (5.3)$$

em que $\rho(0, t)$ representa o operador densidade do sistema imediatamente após a primeira medida. Como entre uma medida e outra o sistema evolui segundo a equação de Schrödinger tradicional, imediatamente antes da segunda medida o sistema estará no estado

$$U\left(\frac{t}{n}\right) E\rho E U^\dagger\left(\frac{t}{n}\right). \quad (5.4)$$

Alternando medidas ideais e evoluções de Schrödinger, pode-se inferir sobre o estado do sistema em função do número da medida a que será submetido ou que acaba de sofrer:

$$\begin{aligned} \text{Imediatamente após a } 2^{\text{a}} \text{ medida: } & \rho(1, t) = E U\left(\frac{t}{n}\right) E\rho E U^\dagger\left(\frac{t}{n}\right) E \\ \text{Imediatamente antes da } 3^{\text{a}} \text{ medida: } & U\left(\frac{t}{n}\right) E U\left(\frac{t}{n}\right) E\rho E U^\dagger\left(\frac{t}{n}\right) E U^\dagger\left(\frac{t}{n}\right) \\ \text{Imediatamente após a } 3^{\text{a}} \text{ medida: } & \rho(2, t) = E U\left(\frac{t}{n}\right) E U\left(\frac{t}{n}\right) E\rho E U^\dagger\left(\frac{t}{n}\right) E U^\dagger\left(\frac{t}{n}\right) E \\ \vdots & \vdots \\ \text{Imediatamente após } n+1 \text{ medidas: } & \rho(n, t) = T_n(t) \rho T_n^\dagger(t), \end{aligned}$$

onde definiu-se convenientemente

$$T_n(t) = \left[E U\left(\frac{t}{n}\right) E \right]^n, \quad (5.5)$$

graças a propriedade do projetor $E^2 = E$.

Agora, via procedimento padrão da teoria quântica, é imediato que

$$Q(\Delta, n; \rho) = \text{Tr} [\rho(n, t) E] = \text{Tr} [\rho(n, t)] = \text{Tr} [T_n(t) \rho T_n^\dagger(t)], \quad (5.6)$$

já que a probabilidade $Q(\Delta, n; \rho)$ se parece com $q(t)$: o fato de não termos tomado o limite $n \rightarrow \infty$ implica que as medidas não são realizadas continuamente. Assim, o que se calcula é a probabilidade do estado inicial não decaído $\rho(n, t)$ continuar não decaído durante um intervalo de tempo $\frac{t}{n}$, ao final do qual se realiza uma única medida.

Somente agora é que considera-se o limite de infinitas medidas. A condição para que o estado do sistema $\rho(t)$ se sustente não decaído depois das infinitas medidas é dada por

$$\rho(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, t), \quad (5.7)$$

o que ocorre com probabilidade $Q(\Delta; \rho)$, já definida na Eq. (5.2) e rescrita em termos da expressão explícita de $Q(\Delta, n; \rho)$ da Eq. (5.6):

$$Q(\Delta; \rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr} \left[\mathbf{T}_n(t) \rho \mathbf{T}_n^\dagger(t) \right]. \quad (5.8)$$

É portanto necessário que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}_n(t) = \mathbf{T}(t) \quad (5.9)$$

exista para que seja possível não haver decaimento. Em termos desse limite, escrevemos a expressão final para $Q(\Delta; \rho)$ como

$$Q(\Delta, \rho) = \text{Tr} \left[\rho \mathbf{T}^\dagger(t) \mathbf{T}(t) \right]. \quad (5.10)$$

Segue então um extenso esforço matemático, culminando na demonstração de um elegante teorema. Este pode ser usado para mostrar que $Q(\Delta; \rho) = 1$ para todo o intervalo Δ finito, significando que um estado preparado não decaído, quando submetido a medidas constantes durante um intervalo de tempo Δ , tem probabilidade 100% de não decair. Não apresentaremos aqui a demonstração do teorema, apenas o enunciaremos e mostraremos como ele permite chegar a conclusão do EZQ.

Teorema: *Seja $\mathbf{U}(t) = e^{-i\mathbf{H}t}$, t real, um grupo de operadores unitários de um parâmetro fortemente contínuo no espaço (separável) de Hilbert $\mathcal{H}$. Além disso, seja $\mathbf{E}$ um projetor ortogonal em $\mathcal{H}$. Assuma que:*

- (i) *O gerador auto-adjunto $\mathbf{H}$, do grupo $\mathbf{U}(t)$, seja semi-limitado;*
- (ii) *Exista um operador (anti-unitário) θ tal que*

$$\theta \mathbf{E} \theta^{-1} = \mathbf{E}, \quad \theta \mathbf{U}(t) \theta^{-1} = \mathbf{U}(-t) \text{ para todo } t;$$

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{E} \mathbf{U}(\frac{t}{n}) \mathbf{E}]^n \equiv \mathbf{T}(t)$ exista para todo $t \geq 0$;

- (iv) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{T}(t) = \mathbf{E}$.

Então $\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{E} \mathbf{U}(\frac{t}{n}) \mathbf{E}]^n \equiv \mathbf{T}(t)$ existe para todo t real e goza das seguintes propriedades:

- (a) *A função $t \rightarrow \mathbf{T}(t)$ é fortemente contínua e, para todo t e s real, satisfaz a lei de semigrupo*

$$\mathbf{T}(t) \mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(t + s).$$

(b) Além disso

$$\mathbf{T}^\dagger(t) = \mathbf{T}(-t).$$

Uma vez que todas as hipóteses matemáticas estão de acordo com as hipóteses físicas, o teorema acima vem mostrar que o objeto $\mathbf{T}^\dagger(t)\mathbf{T}(t)$ da Eq. (5.10) pode ser escrito como

$$\mathbf{T}^\dagger(t)\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}(-t)\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}(0) \rightarrow \mathbf{E}. \quad (5.11)$$

Portanto,

$$Q(\Delta; \rho) \rightarrow \text{Tr}(\rho \mathbf{E}) = 1, \quad (5.12)$$

concluindo a ocorrência do EZQ.

É notável que os próprios autores demonstrem desconfiança em relação ao resultado encontrado:

“Que conclusões poderíamos tirar do paradoxo de Zenão na teoria quântica? Seria ele um curioso, mas inocente, resultado matemático ou uma manifestação real dos fundamentos da teoria quântica?”

Segue-se então uma interessante discussão final a respeito do decaimento de partículas instáveis numa câmara de bolhas (onde a partícula estaria supostamente sendo observada de forma constante, e portanto não deveria decair). Os autores assumem a posição paradoxal de que esse decaimento observado experimentalmente estaria em contradição com o EZQ, mas admitem outras possíveis atitudes que eliminariam o paradoxo:

1. Ausência de significado operacional da probabilidade $Q(\Delta; \rho)$: existência de um princípio fundamental, até então desconhecido, que proibisse observações contínuas.
2. Como o EZQ é baseado na consideração de medidas contínuas e ideais, as medidas envolvidas na construção do rastro da partícula na câmara de bolhas deveriam ser não-ideais (dessa forma o tempo de vida da partícula instável não dependeria apenas da partícula, mas também dos detalhes do processo de observação/-medida).
3. O processo de medida na câmara de bolhas poderia ser descontínuo, ou seja, este envolveria uma seqüência discreta de observações (nesse caso haveria ao menos um aumento no tempo de vida da partícula instável, fato que não se conseguia verificar).

4. Seria errado assumir uma evolução temporal de um sistema quântico constantemente observado descrita por um operador linear como $T(t)$. Esta deveria ser dada apenas em termos de uma interação persistente entre o sistema quântico e o aparato clássico de medida. Entretanto não havia teoria detalhada para descrever o real acoplamento entre sistemas quânticos e aparatos clássicos, o que mantinha o problema insolúvel.

Os autores finalizam o artigo com várias propostas de trabalho para desenvolvimentos posteriores, acreditando que as probabilidades envolvidas em processos de várias medidas sobre sistemas quânticos seria tópico para pesquisas futuras. A **Figura 5.1**, apresentada no início deste capítulo, revela que eles estavam cobertos de razão.

Vale a pena acrescentar à revisão desse primeiro artigo, alguns resultados fundamentais obtidos por C. B. Chiu, B. Misra e E. C. G. Sudarshan poucos meses depois, num segundo artigo [30]. Analisando cuidadosamente a evolução (livre de medidas) do estado quântico de uma partícula instável, os autores obtêm 3 regimes de decaimento distintos:

- (i) $0 < t < T_1$: região de tempos curtos, decaimento $Q(t) \approx 1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) t^\beta$ (com α e β constantes);
- (ii) $T_1 < t < T_2$: região de tempos intermediários, decaimento tipo exponencial;
- (iii) $t > T_2$: região de tempos longos, decaimento com lei de potências negativas de t .

Além disso, sugerem que as medidas, mediadas por interações com os átomos da câmara de bolhas, não poderiam se repetir num intervalo de tempo menor do que

$$\Delta t = \frac{\text{mínima separação interatômica}}{\text{máxima velocidade da partícula medida}} = \frac{10^{-10}m}{3 \times 10^8 m/s} \approx 3 \times 10^{-19} s. \quad (5.13)$$

Com esta idéia, e mostrando que o EZQ estaria intimamente relacionado com o regime de decaimento para tempos curtos com duração T_1 estimada em $10^{-21}s$, os autores conseguem uma justificativa plausível para ocorrência de decaimento de partículas instáveis em câmaras de bolhas: o menor intervalo de tempo possível entre medidas é muito grande se comparado a duração do regime de decaimento (i), não permitindo assim a realização de mais de uma medida naquele período.

Com esta explicação ficou resolvido o paradoxo da câmara de bolhas do primeiro artigo; entretanto, a mais importante contribuição deste segundo artigo foi revelar um aspecto do EZQ que viria a ser largamente explorado no futuro: sua íntima ligação com regimes de decaimento não-exponenciais.

5.1.2 Artigo 2: Paradoxo de Zenão na teoria quântica

Os artigos discutidos até agora usavam explicitamente teoria quântica de medida para verificar o EZQ. Foi A. Peres, num artigo de pouco mais de uma página e meia [31], que

confrontou a teoria do EZQ até então desenvolvida com o seguinte resultado experimental:

“Há núcleos que apresentam nêutrons β -ativos com tempo de vida menor do que o tempo de vida de nêutrons livres”

Este fato colocava novamente um caráter paradoxal na teoria desenvolvida para o EZQ: as constantes observações dos demais núcleons sobre o nêutron nuclear deveriam estender o tempo de vida do nêutron nuclear em relação ao tempo de vida do nêutron livre. A. Peres mostra então que o efeito de medidas não seria o único elemento responsável pelo EZQ. Este poderia ser apreciado através da evolução hamiltoniana ordinária, desde que o hamiltoniano contivesse os termos do sistema e do ambiente (no caso do exemplo, o hamiltoniano deveria ser o do núcleo completo: nêutron + núcleons).

Para mostrar como o EZQ surgiria diretamente da equação de Schrödinger, o autor escolhe uma base ortornormal $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$ e escreve o hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}, \quad (5.14)$$

tal que $\mathbf{H}_0$ contivesse todos os elementos diagonais e $\mathbf{V}$ os elementos não diagonais, definindo os autovalores de $\mathbf{H}_0$ através da equação: $\mathbf{H}_0 |m\rangle = E_m |m\rangle$. Em seguida, expande a função de onda segundo a expansão padrão

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m a_m(t) e^{-iE_m t} |m\rangle, \quad (5.15)$$

de tal forma que a equação de Schrödinger seja mapeada em termos das amplitudes de probabilidade $a(t)$, isto é,

$$i\dot{a}_k(t) = \sum_{m \neq k} \langle k | \mathbf{V} | m \rangle a_m(t) e^{i(E_k - E_m)t}. \quad (5.16)$$

Se o estado inicial é preparado em $|k\rangle$, $a_k(t)$ dá a amplitude de probabilidade da sobrevivência do sistema nesse estado. A equação acima mostra que mudanças nessa amplitude ocorrem devido às demais amplitudes $a_m(t)$. Logo, se algum mecanismo fosse capaz de removê-las, a amplitude $a_k(t)$ permaneceria constante e a dinâmica ficaria “congelada”, como reza o EZQ. É claro que para remover $a_m(t)$, basta destruímos as coerências entre o estado inicial preparado $|k\rangle$ e os demais estados acessíveis do sistema $|m\rangle$. É exatamente para a rápida destruição dessas coerências que se invocavam medidas continuadas. Todavia o autor mostra que outros recursos também poderiam ter sido considerados.

Num exemplo explícito descrevendo um sistema de dois níveis, $(1, 0)^t$ “original”

e $(0, 1)^t$ “decaído”, o autor escreve o hamiltoniano mais simples possível que permita a mudança de estado,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega \\ i\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

o que leva a oscilação das populações entre os dois níveis do sistema $[\cos(\omega t), \sin(\omega t)]^t$. Um sistema como esse é passível de apresentar EZQ, pois para tempos curtos sua lei de decaimento é do tipo quadrática [30]: $\cos^2(\omega t) \approx 1 - \omega^2 t^2$.

Para evidenciar o EZQ surgindo do próprio hamiltoniano, o autor incorpora neste sistema de dois níveis um terceiro estado acoplado somente ao estado decaído,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega & 0 \\ i\omega & 0 & -i\Omega \\ 0 & i\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{com } |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Nesse caso, o estado inicial passa a ser $(1, 0, 0)^t$ e $a(t)$ dá a amplitude de probabilidade de sobrevivência do estado inicial. A solução da equação de Schrödinger para essa amplitude resulta em $(\delta^2 = \omega^2 + \Omega^2)$

$$a(t) = \frac{\omega^2}{\delta^2} \cos \delta t + \frac{\Omega^2}{\delta^2}, \quad (5.19)$$

que apresenta o limite

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} a(t) = 1. \quad (5.20)$$

Dessa forma, para um sistema preparado no estado “original”, não haverá transição para o estado “decaído” se este estiver *fortemente* acoplado (destruição das coerências) a um terceiro estado qualquer. O autor comenta ainda um modelo clássico bastante ilustrativo desse resultado

“Considere dois pêndulos idênticos fracamente acoplados. Se o primeiro pêndulo é posto a oscilar, gradualmente perderá sua energia para o outro devido aos batimentos. Agora acople o segundo pêndulo, através de uma mola de alta constante elástica, a um terceiro pêndulo de grande massa. O primeiro pêndulo não mais perderá sua energia.”

Este resultado, enunciado pela primeira vez nesse artigo, foi fundamental no sentido em que mostrou suficiência, mas não necessidade, da teoria quântica de medida para a observação do EZQ.

5.1.3 Artigo 3: Efeito Zenão quântico

Seguindo uma proposta experimental de R. J. Cook [32], W. M. Itano *et al* realizaram a primeira observação experimental do EZQ [28] treze anos após a previsão teórica do efeito por B. Misra e E. C. G. Sudarshan [27].

A proposta de R. J. Cook consistia numa alternativa à observação do EZQ através da inibição de emissão espontânea. Embora houvesse um grande apelo para sua observação nesse contexto, o decaimento quadrático na emissão espontânea era muito rápido para que se pudesse realizar várias medidas. A saída foi tentar observar o efeito através da inibição de transições induzidas em armadilhas iônicas.

A estrutura de níveis do íon em questão é admitida como a da **Figura 5.2**, em que o nível 1 representa o estado fundamental, o nível 2 um estado excitado metaestável e o nível 3, um outro estado excitado que só decai para o nível 1. Se uma perturbação de frequência $(E_2 - E_1)/\hbar$ é aplicada, um estado de superposição coerente é criado, e a probabilidade de sobrevivência no estado fundamental (estado inicial) será dada naturalmente por $P_1(t) = \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$, com Ω sendo a frequência de Rabi. Dessa forma a probabilidade de transição para tempos curtos é do tipo quadrática, e portanto passível de observação do EZQ.

Figura 5.2: Diagrama de níveis de energia da proposta de Cook para demonstração do EZQ (figura extraída da referência [28]).

Para a realização das medidas é que se faz uso do nível 3, que deve estar fortemente acoplado com o nível 1. Um pulso estimulando a transição $1 \rightarrow 3$ é aplicado, e como resultado a função de onda é projetada no nível 1 ou 2, dependendo do estado em que se encontrava quando da aplicação do pulso: se estivesse em 1, o pulso provoca oscilações entre os estados $1 \leftrightarrow 3$, com conseqüente emissão de fótons; se estivesse em 2, o pulso seria ineficiente e nenhum fóton seria emitido. Dessa forma o estado do íon fica registrado no campo de radiação.

Tendo em mãos esse sistema, a proposta de R. J. Cook buscava observar a inibição da transição estimulada através de um pulso- π entre os níveis 1 e 2, via repetição de um número n de medidas igualmente espaçadas durante a aplicação do pulso. Um rápido desenvolvimento matemático, usando a representação vetorial para um sistema de dois níveis, permite chegar a seguinte probabilidade de transição para um número de medidas n grande

$$P_2(t) \approx \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\pi^2/2n}\right), \quad (5.21)$$

que mostra claramente seu comportamento monotônico e decrescente.

Na prática o experimento foi realizado com íons ${}^9\text{Be}^+$ numa armadilha de Penning cilíndrica. O nível 1 ($m_I = 3/2, m_J = 1/2$) e 2 ($m_I = 1/2, m_J = 1/2$) foram obtidos a partir da estrutura hiperfina do estado fundamental $2s^2S_{1/2}$ do íon, enquanto que o nível 3 ($m_I = 3/2, m_J = 3/2$) foi obtido da estrutura hiperfina do estado $2p^2P_{3/2}$, conforme o esquema mostrado na **Figura 5.3**.

Esta mesma figura também deixa clara a natureza dos pulsos utilizados: o pulso- π sendo um pulso de rádio frequência, e o pulso de medida obtido a partir de um laser de corante de comprimento de onda 313 nm. Outros detalhes experimentais são discutidos no artigo, entretanto a abordagem que demos aqui nos é suficiente para a ilustração desta realização experimental.

Com relação aos resultados, os autores apresentam gráficos de barra em que comparam a probabilidade de transição medida com a probabilidade calculada em função do número de medidas realizadas.

Figura 5.3: Diagrama de níveis de energia do ${}^9\text{Be}^+$ num campo magnético B (figura extraída da referência [28]).

Figura 5.4: Resultado experimental e teórico das probabilidades de transição $1 \rightarrow 2$ em função do número n de pulsos de medida (figura extraída da referência [28]).

A **Figura 5.4** diz respeito a um dos resultados do artigo para a transição $1 \rightarrow 2$. É notável a diminuição das transições com o aumento do número de medidas. Além disso, a concordância entre dados experimentais e cálculos teóricos é excelente, atestando o sucesso do experimento na observação do EZQ.

Frente a importante conquista que este experimento representa, é claro que muita polêmica se criou, fazendo este artigo alvo de muitas críticas [33]. A maioria destas,

porém, repousava sobre o âmbito interpretativo [34] e até hoje não há refutação conclusiva do experimento de 1990.

Este artigo, além de importante por veicular a realização experimental de uma antiga previsão teórica, é fonte inspiradora para propostas atuais de computação quântica, conforme discutido na referência [29].

5.1.4 Artigo 4: Computação quântica usando dissipação para permanecer num subespaço livre de decoerência

Este último artigo [29] apresenta o elemento coesivo entre o já discutido EZQ e a teoria da computação quântica, objeto de nosso interesse. Por isso nos ateremos a mais detalhes na revisão deste artigo do que fizemos com os anteriores. Quando iniciarmos a apresentação de nossos próprios esforços relativos ao EZQ, recorreremos a comparações e analogias com os procedimentos aqui utilizados, fazendo-se importante a leitura deste *estudo* para a melhor compreensão das seções seguintes.

A motivação dessa publicação consiste numa proposta de manipular estados pertencentes a um subespaço livre de decoerência, preservando-os no mesmo subespaço. Uma vez que a decoerência é encarada como um dos principais obstáculos para a computação quântica, esta é, sem dúvida, uma proposta bastante atraente.

Até este artigo, exemplos de SLD eram conhecidos, mas consistindo em subespaços tão isolados do resto do universo que o acesso aos estados internos era uma enorme dificuldade (gerando a desconfortável sensação de possuir uma *máquina* potencialmente eficiente, mas inacessível).

Após a apresentação de um procedimento teoricamente simples para a construção de um SLD, os autores se valem do EZQ no sentido de evitar que uma interação adicionada ao hamiltoniano do sistema, genuinamente capaz de corrompê-lo, remova o estado inicial do SLD. Assim, o efeito da interação se limita a mudanças de estado confinadas ao subespaço, representando uma maneira de acessar e manipular estados do SLD sem deteriorar a estrutura que os protege da decoerência. Para exemplificar sua proposta, os autores constroem uma porta **C-NOT** dentro do SLD, ou seja, realizam uma importante operação da computação quântica livre de decoerência. Por razões de clareza, reestruturamos o artigo em 5 seções que descrevem o conteúdo original.

Descrição do sistema e Formas de decoerência

O sistema escolhido consiste em N átomos idênticos de três níveis colocados lado a lado, linearmente. Cada átomo é rotulado pelo índice i , e os níveis considerados são

$$\begin{aligned} |0\rangle_i, \quad |1\rangle_i &: \text{Estado fundamental (com quebra de degenerescência),} \\ |2\rangle_i &: \text{Estado excitado.} \end{aligned}$$

O ambiente consiste de um *continuum* de modos de campos eletromagnéticos em torno dos átomos e de uma cavidade, conforme a **Figura 5.5**. Esta última é usada para realizar operações entre átomos vizinhos ($i=1,2$) da seguinte forma: movem-se dois átomos para dentro da cavidade (ressonante apenas com a transição $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$), e o acoplamento entre os átomos e a cavidade permite então a ocorrência dessa transição, operando certa porta lógica. Se isso fosse tudo, teríamos a possibilidade de operar portas lógicas eficientemente, sem a incursão de erros. Porém, há de se considerar emissões espontâneas e imperfeições da cavidade, fatores estes responsáveis pela decoerência no sistema proposto.

Figura 5.5: Vista esquemática do sistema. Dois átomos em posições fixas na cavidade para realização de operações quânticas (figura extraída da referência [29]).

Assume-se então as taxas para os mecanismos de decoerência

- Γ : Taxa de emissão espontânea para átomos fora da cavidade,
- Γ_{cav} : Taxa de emissão espontânea para átomos dentro da cavidade,
- κ : Taxa de perda de fótons através dos espelhos da cavidade.

Em suma, podemos dizer que a emissão de fótons pelo sistema representa decoerência. É nesse sentido que os autores buscam, através da *quantum jump description*, um hamiltoniano que dê a evolução do sistema com a condição de não ocorrência de emissão de fótons, resultando em

$$\mathbf{H}_{cond} = i\hbar g \sum_{i=1}^2 \left[\mathbf{b} |2\rangle_{ii}\langle 1| - \mathbf{b}^\dagger |1\rangle_{ii}\langle 2| \right] - i\hbar \Gamma_{cav} \sum_{i=1}^2 |2\rangle_{ii}\langle 2| - i\hbar \Gamma \sum_{i=3}^N |2\rangle_{ii}\langle 2| - i\hbar \kappa \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}, \quad (5.22)$$

onde g é a constante de acoplamento de um átomo com a cavidade e $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}^\dagger$) o operador de aniquilação (criação) de um fóton do campo na cavidade.

Critério para SLD e Base do SLD

O hamiltoniano da seção anterior é não-hermitiano devido aos três últimos termos (responsáveis pela decoerência). Assim, sendo $|\psi\rangle$ o estado inicial, a norma do vetor de estado evoluído temporalmente

$$|\psi^0(t)\rangle = e^{-i\mathbf{H}_{cond}t/\hbar} |\psi\rangle, \quad (5.23)$$

decrece com o tempo. Como a norma do vetor acima deve dar a probabilidade de não

observar fótons emitidos até o tempo t ,

$$P_0(t, \psi) = \langle \psi^0(t) | \psi^0(t) \rangle , \quad (5.24)$$

a probabilidade de observar fótons aumenta com o passar do tempo. Assim, para sustentar a validade de nosso hamiltoniano, devemos satisfazer a condição

$$\langle \psi^0(t) | \psi^0(t) \rangle = 1 ,$$

$$\langle \psi | e^{i\mathbf{H}_{cond}^\dagger t/\hbar} e^{-i\mathbf{H}_{cond} t/\hbar} | \psi \rangle = 1 , \quad (5.25)$$

o que nos remete, naturalmente, a uma escolha adequada dos estados iniciais $|\psi\rangle$ que satisfaçam a equação acima, já que $\mathbf{H}_{cond} \neq \mathbf{H}_{cond}^\dagger$ por definição. É nesse contexto que constrói-se o SLD: encontrando os estados $|\psi\rangle$ que satisfaçam a condição de normalização, estamos impondo que não houve emissão de fótons, o que significa também que nenhum mecanismo de decoerência foi ativado. Um conjunto linearmente independente de vetores de estado que satisfaça a Eq. (5.25), constitui uma base para um SLD.

É comum ter a taxa de emissão espontânea dentro da cavidade reduzida em relação à externa. Devido a esse fato, e objetivando aumentar a dimensão do SLD, os autores assumem desprezível a emissão espontânea no interior da cavidade ($\Gamma_{cav} = 0$). Como consequência, obtêm a seguinte base para o SLD:

$$\left\{ |000\rangle , |001\rangle , |010\rangle , |011\rangle , |a\rangle \equiv \frac{|012\rangle - |021\rangle}{\sqrt{2}} \right\} , \quad (5.26)$$

em que usa-se a notação $|n\alpha\beta\rangle = |n\rangle \otimes |\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2$ (com n para o número de fótons, α para o estado do átomo 1 e β para o estado do átomo 2). Note que $|a\rangle$ é um estado totalmente emaranhado dos dois átomos, o que mostra a potencialidade desse sistema para a realização de computação quântica.

Entretanto, é fácil verificar que $\mathbf{H}_{cond} |\psi\rangle = 0$, ou seja, o hamiltoniano de que dispomos não consegue modificar o estado dentro do subespaço livre de decoerência, o que mostra a já comentada inacessibilidade. Para acessá-lo, um termo adicional deve ser somado a $\mathbf{H}_{cond}$. Naturalmente que um termo adicional no hamiltoniano modificaria o SLD, eventualmente até o destruindo, e é nesse ponto que invocamos o EZQ. Apresentaremos mais detalhes com relação ao termo adicional numa subseção posterior. Na subseção seguinte, vamos mostrar qual o efeito do ambiente sobre o sistema, e como interpretá-lo em termos do EZQ.

Inclusão do EZQ

Se preparamos o sistema fora do SLD, podemos definir um intervalo de tempo Δt como o “tempo mínimo necessário para que o sistema definitivamente emita um fóton”. Dessa forma, a observação do campo de radiação fora da cavidade durante um tempo Δt , pode ser interpretada como uma medida do ambiente sobre se o estado inicial pertence ou não ao SLD, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Emissão de fóton detectada} & \Rightarrow \text{Estado não pertence a SLD} \\ \text{Emissão de fóton não detectada} & \Rightarrow \text{Estado pertence a SLD} \end{array} \right.$$

Como a interação entre o sistema e o ambiente é contínua, o sistema está sob constante observação, e nesse caso, já vimos que o EZQ “congela” a dinâmica natural do sistema, ou seja, para um sistema inicialmente preparado no SLD, a transição para fora do subespaço é inibida pelo EZQ (ainda que o hamiltoniano apresente elementos que permitam este tipo de evolução). Nas palavras dos autores:

“Dessa forma a interação com o ambiente protege o sistema da dissipação. Por outro lado, a dinâmica interna ao SLD não sente as medidas, e se realiza quase que indiferentemente.”

É por isso que a inclusão de uma interação adicional *fraca* ao hamiltoniano não destrói o SLD, mas pelo contrário, permite que manipulemos os estados internamente ao subespaço, sendo qualquer tentativa de evolução para fora imediatamente bloqueada pelo EZQ.

Interação Adicional

Para a realização de operações dentro do SLD, os autores propõem que um laser seja apontado para cada um dos átomos dentro da cavidade, conforme descrito pelo hamiltoniano

$$\mathbf{H}_{laser} = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^1 \left[\Omega_j^{(i)} |j\rangle_{ii}\langle 2| + \Omega_j^{(i)} |2\rangle_{ii}\langle j| \right], \quad (5.27)$$

onde $\Omega_j^{(i)}$ dá a frequência de Rabi da transição $j - 2$ do i -ésimo átomo. É fácil ver que este hamiltoniano é hábil em retirar o sistema do SLD, o que explicitamos na equação abaixo para o estado inicial particular $|010\rangle$ pertencente ao SLD:

$$\mathbf{H}_{laser} |010\rangle = \frac{\hbar}{2} \left[\Omega_1^{(1)} |020\rangle + \Omega_0^{(2)} |012\rangle \right], \quad (5.28)$$

na qual constatamos que o *ket* do lado direito não pertence ao SLD. De fato, já esperávamos

por isto e também sabemos que a solução consiste em invocar o EZQ. Portanto, o hamiltoniano efetivo (considerando o EZQ), fica dado por

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbb{P}_{SLD}(\mathbf{H}_{cond} + \mathbf{H}_{laser})\mathbb{P}_{SLD}, \quad (5.29)$$

em que $\mathbb{P}_{SLD}$ são os operadores de projeção no SLD. É claro que o laser deve ser fraco o bastante para que o EZQ possa sobrepujar a tentativa de escapar do SLD. Essa afirmação pode ser reformulada em termos de constantes de tempo ou frequências: o inverso da frequência de Rabi dá a escala de tempo para as transições estimuladas pelo laser; para que o EZQ ocorra eficientemente, um número grande de medidas tem que ser realizado, e portanto a escala de tempo das transições tem que ser muito maior do que a escala de tempo das medidas:

$$\frac{1}{|\Omega_j^{(i)}|} \gg \frac{1}{\kappa} e \frac{\kappa}{g^2}. \quad (5.30)$$

Além disso, na prática, não conseguimos fazer $\Gamma_{cav} = 0$, como estamos considerando aqui. Portanto, uma boa aproximação deste caso ideal é

$$\Gamma_{cav} \ll |\Omega_j^{(i)}| \ll \kappa e \frac{g^2}{\kappa}. \quad (5.31)$$

Na seção seguinte vamos mostrar como o hamiltoniano efetivo $\mathbf{H}_{eff}$ pode gerar uma porta C-NOT.

Construção da porta C-NOT

Lembrando da convenção $|n\alpha\beta\rangle = |n\rangle \otimes |\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2$, vamos considerar α como o bit de controle e β como o bit alvo para a implementação da porta lógica quântica C-NOT. Isso significa que o valor inicial de β (0 ou 1) só é modificado se $\alpha = 1$.

Um procedimento matemático semelhante ao utilizado para determinar os valores dos acoplamentos controlados (ver **Subseções 3.6.1 a 3.6.5**), revela que as frequências de Rabi

$$\Omega_1^{(1)} - \Omega_1^{(2)} = \sqrt{2}\Omega, \quad \Omega_0^{(2)} = \sqrt{2}\Omega, \quad \Omega_0^{(1)} = 0, \quad (5.32)$$

quando usadas no desenvolvimento da Eq. (5.29), levam ao hamiltoniano efetivo,

$$\mathbf{H}_{eff} = \frac{\hbar}{2} [\Omega (|010\rangle \langle 0a| - |0a\rangle \langle 011|) + \text{H.c.}], \quad \text{com} \quad |a\rangle \equiv \frac{|012\rangle - |021\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.33)$$

O operador evolução temporal resultante para uma duração de pulso laser $\tau = \frac{\sqrt{2}\pi}{|\Omega|}$, resulta no operador evolução temporal abaixo, notoriamente satisfazendo os vínculos da operação

C-NOT,

$$U_{eff}(\tau) = e^{-i\mathbf{H}_{eff}\tau/\hbar} = |010\rangle\langle 011| + |011\rangle\langle 010|. \quad (5.34)$$

Com isso revisamos os elementos que mais nos interessam deste artigo. A seguir, iniciamos a apresentação de nosso próprio trabalho no contexto do EZQ.

5.2 Nossa abordagem

Nesta seção, vamos dar início ao nosso trabalho associado ao EZQ, apresentando desenvolvimentos matemáticos, resultados obtidos e comparações com o material da literatura revisada na seção anterior.

Como já destacado no princípio da revisão deste último artigo, nosso trabalho revela várias características afins com esta publicação, entretanto algumas diferenças marcantes podem ser enumeradas:

1. As implementações físicas propostas são distintas pois nosso hamiltoniano é inspirado em dispositivos de estado sólido. Entretanto, existe clara correspondência entre os termos de nosso hamiltoniano com os termos do hamiltoniano do artigo [29].
2. Embora também tenhamos construído um SLD e acrescentado posteriormente a interação adicional, não atribuímos a nossa interação o papel de gerar as portas lógicas quânticas. Não precisamos desse grau de sofisticação, já que possuímos de antemão um conjunto universal de portas lógicas operando dentro do SLD.
3. Uma vez que nossa interação adicional não é necessária para gerar portas lógicas, nós a encaramos como um defeito indesejável, uma contaminação na implementação física das portas submetendo os estados portadores de informação à decoerência.
4. Em vez de simplesmente aplicar projetores do SLD em torno do hamiltoniano para incorporar o EZQ, recorreremos a teoria de perturbação para mostrar a ocorrência do efeito. Essa abordagem possibilitou uma estimativa para as intensidades da interação adicional com relação ao valor do acoplamento entre o sistema e o ambiente

Tendo em vista estas diferenças, vamos iniciar o detalhamento matemático do trabalho introduzindo o agente responsável por remover o sistema do SLD.

5.2.1 Contaminação do Hamiltoniano

O hamiltoniano da Eq. (3.6) foi construído de tal forma a manter o estado inicial dentro do subespaço em que foi preparado. O acoplamento com o meio não atua efetivamente pois a dinâmica do sistema em estudo permanece unitária, ditada apenas por $\mathbf{H}_0$.

Queremos agora estudar, no regime de fortes acoplamentos com o ambiente, a evolução do estado inicial. É claro que agora precisamos que o estado preparado no SLD evolua para fora do mesmo de modo a ser percebido pelo ambiente, comprometendo assim a unitariedade da evolução temporal. Com este fim, vamos somar a $\mathbf{H}_0$ uma *contaminação*¹ $\epsilon \mathbf{J}_x$, tal que

$$[\mathbf{H}_0 + \epsilon \mathbf{J}_x, \mathbf{J}_z] \neq 0. \quad (5.35)$$

Deste modo, o hamiltoniano total agora se escreve como

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_B + \lambda \mathbf{J}_z \mathbf{G}_B + \epsilon \mathbf{J}_x, \quad (5.36)$$

no qual introduzimos o fator λ no termo do acoplamento para controlar a intensidade da interação do sistema com o ambiente, e definimos $\mathbf{G}_B$ através da relação

$$\mathbf{G}_B = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k \mathbf{q}_k = \sum_{k=1}^{\infty} g_k (\mathbf{a}_k^\dagger + \mathbf{a}_k). \quad (5.37)$$

Encarando o termo $\epsilon \mathbf{J}_x$ como uma perturbação, a análise deste termo e do resto do hamiltoniano pode ser feita separadamente. Começamos passando o hamiltoniano não-perturbado (np) para o cenário de interação (I),

$$\mathbf{H}_I^{np}(t) = \lambda \mathbf{J}_z e^{i\mathbf{H}_B t} \mathbf{G}_B e^{-i\mathbf{H}_B t}. \quad (5.38)$$

Note que neste processo, o termo $\mathbf{H}_0$ do hamiltoniano das portas desaparece por ter sido construído satisfazendo $[\mathbf{H}_0, \mathbf{J}_z] = 0$.

Dando continuidade aos cálculos, podemos mostrar que valem as igualdades

$$e^{i\mathbf{H}_B t} \mathbf{a}_k^\dagger e^{-i\mathbf{H}_B t} = e^{i \sum_n \omega_n \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_n t} \mathbf{a}_k^\dagger e^{-i \sum_n \omega_n \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_n t} = \mathbf{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t}, \quad (5.39)$$

$$e^{i\mathbf{H}_B t} \mathbf{a}_k e^{-i\mathbf{H}_B t} = e^{i \sum_n \omega_n \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_n t} \mathbf{a}_k e^{-i \sum_n \omega_n \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_n t} = \mathbf{a}_k e^{-i\omega_k t}, \quad (5.40)$$

e portanto, o hamiltoniano não-perturbado, no cenário de interação, fica dado por

$$\mathbf{H}_I^{np}(t) = \lambda \mathbf{J}_z \sum_k \left[g_k \left(\mathbf{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t} + \mathbf{a}_k e^{-i\omega_k t} \right) \right]. \quad (5.41)$$

¹A escolha particular do operador $\epsilon \mathbf{J}_x$ é absolutamente arbitrária. Nosso único objetivo é desfazer a comutação entre o hamiltoniano e o agente de acoplamento $\mathbf{J}_z$. Portanto, qualquer outra escolha como $\mathbf{J}_y$, $\mathbf{J}_\pm$, etc., seria também aceitável.

Na próxima seção, buscaremos o operador evolução temporal para o hamiltoniano $\mathbf{H}_I^{np}(t)$. Aqui, vamos assumir que este seja representado por $\mathbf{U}(t)$.

Agora queremos levar o hamiltoniano completo da Eq. (5.36) para o cenário de interação. Vamos começar considerando a equação de Schrödinger com a perturbação e a transformação unitária abaixo (a mesma usada para passar ao cenário de interação o hamiltoniano não-perturbado)

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_B + \lambda \mathbf{J}_z \mathbf{G}_B + \epsilon \mathbf{J}_x) |\psi(t)\rangle_S, \quad (5.42)$$

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_B)t} |\psi(t)\rangle_S, \quad (5.43)$$

onde o índice S indica cenário de Schrödinger. Reescrevendo a equação nesse *ket* transformado, obtemos

$$i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = [\mathbf{H}_I^{np}(t) + e^{i\mathbf{H}_0 t} \epsilon \mathbf{J}_x e^{-i\mathbf{H}_0 t}] |\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (5.44)$$

Em seguida, é conveniente multiplicar ambos os lados da igualdade por $\mathbf{U}^\dagger(t)$ e definir $|\Psi(t)\rangle_I = \mathbf{U}^\dagger(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle$ como o vetor do cenário de interação no caso perturbado. A equação de Schrödinger escrita em termos deste *ket*, fica dada por

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I = \epsilon \mathbf{U}^\dagger(t) e^{i\mathbf{H}_0 t} \mathbf{J}_x e^{-i\mathbf{H}_0 t} \mathbf{U}(t) |\Psi(t)\rangle_I. \quad (5.45)$$

É o cenário de interação que escolhemos para realizar nossos cálculos, já que nele o hamiltoniano adquire a forma mais simétrica

$$\mathbf{H}_I(t) = \epsilon \mathbf{U}^\dagger(t) e^{i\mathbf{H}_0 t} \mathbf{J}_x e^{-i\mathbf{H}_0 t} \mathbf{U}(t). \quad (5.46)$$

Na próxima seção iremos calcular uma expressão analítica para $\mathbf{U}(t)$. Porém, vamos já antecipar que a regra de comutação

$$[\mathbf{U}(t), \mathbf{H}_0] = 0 \quad (5.47)$$

é satisfeita para todos os $\mathbf{H}_0$ encontrados no **Capítulo 3**, possibilitando a troca de ordem dos operadores da Eq. (5.46), ou seja,

$$\mathbf{H}_I(t) = \epsilon e^{i\mathbf{H}_0 t} \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{J}_x \mathbf{U}(t) e^{-i\mathbf{H}_0 t}. \quad (5.48)$$

Embora este hamiltoniano admita o uso de qualquer $\mathbf{H}_0$ das portas lógicas de nosso conjunto universal, iremos proceder tratando particularmente a porta **C-NOT**, já que esta é a única de dois *qubits*, foco de nossa proposta de estudo.

Finalmente, vamos também antecipar que iremos obter a evolução do estado inicial

através da teoria de perturbação. Para tanto, escrevemos a equação de Schrödinger para $|\Psi(t)\rangle_I$ em sua forma integral

$$|\Psi(t)\rangle_I = |\Psi(0)\rangle + (-i) \int_0^t dt' \mathbf{H}_I(t') |\Psi(t')\rangle_I. \quad (5.49)$$

Em seguida, aplicamos recursivamente $|\Psi(t)\rangle_I$ no integrando da equação acima e aproximamos $|\Psi(t')\rangle_I \approx |\Psi(0)\rangle$, resultando na série perturbativa abaixo, expandida até primeira ordem em ϵ :

$$|\Psi(t)\rangle_I \approx |\Psi(0)\rangle + (-i) \int_0^t dt' \mathbf{H}_I(t') |\Psi(0)\rangle. \quad (5.50)$$

Embora tenhamos escolhido trabalhar no cenário de interação, vale mostrar as transformações de conversão entre os cenários de Schrödinger e de interação:

$$\begin{aligned} \text{Schrödinger} \rightarrow \text{Interação} \quad & |\Psi(t)\rangle_I = \mathbf{U}^\dagger(t) e^{i(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_B)t} |\psi(t)\rangle_S \\ \text{Interação} \rightarrow \text{Schrödinger} \quad & |\psi(t)\rangle_S = e^{-i(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_B)t} \mathbf{U}(t) |\Psi(t)\rangle_I \end{aligned} \quad (5.51)$$

Isto posto, partimos para o cálculo do operador de evolução temporal $\mathbf{U}(t)$.

5.2.2 Operador Evolução Temporal

O cálculo do operador evolução temporal apresentado nesta seção é uma adaptação para o nosso caso específico do procedimento apresentado no apêndice da referência [6].

Iniciamos o cálculo do operador evolução temporal no cenário de interação – onde o hamiltoniano $\mathbf{H}_I^{np}(t)$ tem dependência explícita do tempo. Por isso, usamos o operador ordenamento temporal de Dyson,

$$\mathbf{U}(t) = \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^t dt' \sum_k \left[\lambda \mathbf{J}_z g_k \left(\mathbf{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t'} + \mathbf{a}_k e^{-i\omega_k t'} \right) \right] \right\}. \quad (5.52)$$

Resta-nos, então, o cálculo do objeto ao lado direito da igualdade. Alguns facilitadores nos auxiliam na realização deste cálculo: hamiltonianos do tipo

$$\sum_k \mu_k \left(\mathbf{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t'} + \mathbf{a}_k e^{-i\omega_k t'} \right), \quad (5.53)$$

como é o caso de $\mathbf{H}_I^{np}(t)$ quando $\mu_k = \lambda \mathbf{J}_z g_k$, satisfazem a igualdade abaixo [35], facilitando

o cálculo do ordenamento temporal.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^t dt' \mathbf{H}_I^{np}(t') \right] &= \exp \left[\sum_k \mathbf{a}_k^\dagger \Phi_k(t) \right] \\ &\times \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^t dt' \sum_k e^{-i\omega_k t'} e^{-\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')} \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{a}_k e^{\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')} \right], \end{aligned} \quad (5.54)$$

sendo $\Phi_k(t)$ definido como

$$\Phi_k(t) = -i\boldsymbol{\mu}_k \int_0^t dt' e^{i\omega_k t'} = \boldsymbol{\mu}_k \phi_k(t), \quad (5.55)$$

na qual $\phi_k(t) = \frac{1 - e^{i\omega_k t}}{\omega_k}$.

Note que a fórmula utilizada não elimina o ordenamento temporal (para isto, outras manipulações são necessárias). O cálculo do produto definido por $\mathbf{F}_k(t')$, participante do integrando da fórmula (5.54), é fundamental nesse sentido, ou seja,

$$\mathbf{F}_k(t') = e^{-\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')} \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{a}_k e^{\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')}. \quad (5.56)$$

Para tanto, vamos derivar $\mathbf{F}_k(t')$ com relação a t' , de modo a obter:

$$\frac{d\mathbf{F}_k(t')}{dt'} = e^{-\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')} \left[\boldsymbol{\mu}_k \mathbf{a}_k, \sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \frac{d\Phi_{k'}(t')}{dt'} \right] e^{\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')}. \quad (5.57)$$

A natureza de nosso $\boldsymbol{\mu}_{k'}$ permite-nos retirá-lo do comutador, como faríamos com uma constante qualquer. Agora, utilizando a definição da Eq. (5.55) para o cálculo da derivada temporal de $\Phi_{k'}(t')$, ficamos com

$$\frac{d\mathbf{F}_k(t')}{dt'} = e^{-\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')} \left\{ \sum_{k'} \boldsymbol{\mu}_k^2 \frac{d\phi_{k'}(t')}{dt'} [\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k'}^\dagger] \right\} e^{\sum_{k'} \mathbf{a}_{k'}^\dagger \Phi_{k'}(t')}. \quad (5.58)$$

Como $[\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k'}^\dagger] = \mathbb{1} \delta_{k,k'}$, o somatório é eliminado em favor da única componente k . Além disso, o elemento central entre chaves comuta com as exponenciais das extremidades, fazendo com que as mesmas se cancelem. Conseqüentemente, a derivada fica dada por

$$\frac{d\mathbf{F}_k(t')}{dt'} = \boldsymbol{\mu}_k^2 \frac{d\phi_k(t')}{dt'}. \quad (5.59)$$

A solução desta equação diferencial, com a condição inicial $\mathbf{F}_k(0) = \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{a}_k$ resulta em:

$$\mathbf{F}_k(t') = \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{a}_k + \boldsymbol{\mu}_k^2 \phi_k(t'), \quad (5.60)$$

que substituída na expressão para $U(t)$, leva-nos a obter:

$$U(t) = \exp \left[\sum_k \mathbf{a}_k^\dagger \boldsymbol{\mu}_k \phi_k(t) \right] \mathcal{T} \exp \left[-i \sum_k \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{a}_k \int_0^t dt' e^{-i\omega_k t'} - i \sum_k \boldsymbol{\mu}_k^2 \int_0^t dt' e^{-i\omega_k t'} \phi_k(t') \right]. \quad (5.61)$$

Salta aos olhos que não necessitamos mais do operador ordenamento temporal, uma vez que os operadores que restaram, constituintes das parcelas da segunda exponencial, comutam entre si, ou seja, podemos quebrar a segunda exponencial em duas. Eliminando o operador ordenamento temporal e realizando a primeira integração, ficamos com

$$U(t) = \exp \left[\sum_k \mathbf{a}_k^\dagger \boldsymbol{\mu}_k \phi_k(t) \right] \exp \left[- \sum_k \mathbf{a}_k \boldsymbol{\mu}_k \phi_k^*(t) \right] \exp \left[-i \sum_k \boldsymbol{\mu}_k^2 \int_0^t dt' e^{-i\omega_k t'} \phi_k(t') \right]. \quad (5.62)$$

Como é verdade que $[\mathbf{a}_k, [\mathbf{a}_k^\dagger, \mathbf{a}_k]] = [\mathbf{a}_k^\dagger, [\mathbf{a}_k^\dagger, \mathbf{a}_k]] = 0$, podemos nos valer do resultado $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}$, para escrever a equação do operador $U(t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp \left[\sum_k \mathbf{a}_k^\dagger \boldsymbol{\mu}_k \phi_k(t) - \mathbf{a}_k \boldsymbol{\mu}_k \phi_k^*(t) \right] \exp \left[\sum_k \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_k^2 |\phi_k(t)|^2 \right] \\ &\times \exp \left[-i \sum_k \boldsymbol{\mu}_k^2 \int_0^t dt' e^{-i\omega_k t'} \phi_k(t') \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

A única integral restante é trivial pois

$$\int_0^t dt' e^{-i\omega_k t'} \phi_k(t') = \frac{\phi_k^*(t)}{i\omega_k} - \frac{t}{\omega_k}. \quad (5.64)$$

Ao substituírmos esse resultado na Eq. (5.63), ficamos com

$$U(t) = \exp \left[\sum_k \mathbf{a}_k^\dagger \boldsymbol{\mu}_k \phi_k(t) - \mathbf{a}_k \boldsymbol{\mu}_k \phi_k^*(t) \right] \exp \left\{ \sum_k \boldsymbol{\mu}_k^2 \left[\frac{|\phi_k(t)|^2}{2} - \frac{\phi_k^*(t)}{\omega_k} + \frac{it}{\omega_k} \right] \right\}. \quad (5.65)$$

Explicitando $\phi_k(t)$, $\boldsymbol{\mu}_k$, e simplificando o argumento da segunda exponencial, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp \left[\lambda \mathbf{J}_z \sum_k \mathbf{a}_k^\dagger g_k \frac{1 - e^{i\omega_k t}}{\omega_k} - \lambda \mathbf{J}_z \sum_k \mathbf{a}_k g_k \frac{1 - e^{-i\omega_k t}}{\omega_k} \right] \\ &\times \exp \left[i\lambda^2 \mathbf{J}_z^2 \sum_k g_k^2 \frac{\omega_k t - \sin(\omega_k t)}{\omega_k^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.66)$$

É conveniente adotar as definições que listamos abaixo para escrever $U(t)$ na forma abreviada

$$U(t) = e^{i\alpha(t)\mathbf{J}_z^2} e^{-\gamma(t)\mathbf{J}_z}, \quad (5.67)$$

isto é,

$$\alpha(t) \equiv \lambda^2 \sum_k g_k^2 \frac{\omega_k t - \sin(\omega_k t)}{\omega_k^2}, \quad (5.68)$$

$$\gamma(t) \equiv \sum_k \left[\mathbf{a}_k^\dagger f_k(t) - \mathbf{a}_k f_k^*(t) \right], \quad (5.69)$$

$$f_k(t) \equiv -\lambda g_k \frac{1 - e^{i\omega_k t}}{\omega_k}. \quad (5.70)$$

Por consequência dessas definições, é imediato concluir também que $\gamma(t)$ é anti-hermitiano, e portanto

$$\mathbf{U}^\dagger(t) = e^{\gamma(t)\mathbf{J}_z} e^{-i\alpha(t)\mathbf{J}_z^2}.$$

De posse desse resultado, partimos para a formulação do EZQ propriamente dita.

5.3 Demonstração do EZQ no Cenário de Interação

Embora tenhamos tratado com vetores de estado até o presente momento para motivar o cálculo do operador evolução temporal – Eq. (5.50), convém agora migrarmos para o formalismo de operadores densidade. Neste formalismo, a série perturbativa no cenário de interação (até segunda ordem) pode ser obtida a partir da própria Eq. (5.50), resultando em [36]:

$$\boldsymbol{\varrho}_I(t) \approx \boldsymbol{\varrho}(0) + (-i) \int_0^t dt_1 [\mathbf{H}_I(t_1), \boldsymbol{\varrho}(0)] + (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [\mathbf{H}_I(t_1), [\mathbf{H}_I(t_2), \boldsymbol{\varrho}(0)]] . \quad (5.71)$$

Já conhecemos a definição de $\mathbf{H}_I(t)$ da Eq. (5.48), que repetimos abaixo

$$\mathbf{H}_I(t) = \epsilon e^{i\mathbf{H}_0 t} \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{J}_x \mathbf{U}(t) e^{-i\mathbf{H}_0 t}.$$

Conhecemos também cada um dos componentes do operador acima:

- $\mathbf{H}_0$: Hamiltoniano da porta **C-NOT**

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\pi}{4\tau} (\sigma_z^3 + \sigma_z^4 - \sigma_x^1 \sigma_x^2 - \sigma_y^1 \sigma_y^2);$$

- $\mathbf{U}(t)$: Operador de evolução temporal do hamiltoniano não-perturbado $\mathbf{H}_I^{np}(t)$

$$\mathbf{U}(t) = e^{i\alpha(t)\mathbf{J}_z^2} e^{-\gamma(t)\mathbf{J}_z};$$

- $\mathbf{J}_x$: Momento angular total na direção x

$$\mathbf{J}_x = \frac{1}{2} (\sigma_x^1 + \sigma_x^2 + \sigma_x^3 + \sigma_x^4),$$

com σ_x^n as matrizes de Pauli já definidas na Eq. (3.14).

Dessa forma, conhecemos completamente $H_I(t)$, mas iniciaremos essa demonstração com um extenso procedimento de manipulação deste operador. Com exceção da função $e^{\pm\gamma(t)}$, queremos eliminar todas as demais funções de operadores da expressão de $H_I(t)$, decompondo-as em produtos de operadores com funções *c-numbers*. Este procedimento simplificará sobremaneira a forma final de $\varrho_I(t)$, possibilitando assim uma análise simples para a observação do EZQ.

Antes de iniciarmos a manipulação propriamente dita, vamos definir algumas grandezas de grande utilidade ao longo deste tratamento matemático:

- $J_{\pm}$: Operadores de levantamento e abaixamento

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y = \sum_{k=0}^4 \sigma_{\pm}^k \quad \text{com} \quad \sigma_{\pm}^k = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^k \pm i\sigma_y^k \right) \quad (5.72)$$

- Z_{4n} : Soma dos produtos n a n dos 4 operadores σ_z^k , com $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$Z_{40} = \mathbb{1} \quad (5.73)$$

$$Z_{41} = \sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \sigma_z^3 + \sigma_z^4 \quad (= 2J_z) \quad (5.74)$$

$$Z_{42} = \sigma_z^1 \sigma_z^2 + \sigma_z^1 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^4 + \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^2 \sigma_z^4 + \sigma_z^3 \sigma_z^4 \quad (5.75)$$

$$Z_{43} = \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 + \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^4 + \sigma_z^1 \sigma_z^3 \sigma_z^4 + \sigma_z^2 \sigma_z^3 \sigma_z^4 \quad (5.76)$$

$$Z_{44} = \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 \sigma_z^4 \quad (5.77)$$

Com estas definições estamos prontos para iniciar a mencionada manipulação. Vamos apresentar aqui somente os resultados de cada etapa, relegando aos apêndices os detalhes matemáticos que levaram aos resultados usados.

Começamos pelo termo do produto central da expressão de $H_I(t)$, isto é,

$$\Xi(t) \equiv U^\dagger(t) J_x U(t). \quad (5.78)$$

No **Apêndice D**, mostramos que esta expressão pode ser escrita como

$$\Xi(t) = \frac{e^{i\alpha(t)}}{2} \left[e^{\gamma(t)} e^{-2iJ_z \alpha(t)} J_+ + e^{-\gamma(t)} e^{2iJ_z \alpha(t)} J_- \right], \quad (5.79)$$

e conseqüentemente

$$H_I(t) = \frac{\epsilon}{2} e^{i\alpha(t)} \left[e^{\gamma(t)} e^{-2i\alpha(t)J_z} e^{iH_0 t} J_+ e^{-iH_0 t} + e^{-\gamma(t)} e^{2i\alpha(t)J_z} e^{iH_0 t} J_- e^{-iH_0 t} \right], \quad (5.80)$$

na qual utilizamos a comutação de $H_0(t)$ com $\gamma(t)$ e J_z .

Considerando a forma particular de $\mathbf{H}_0(t)$ da porta **C-NOT**, mostramos no **Apêndice E** que

$$e^{i\mathbf{H}_0 t} \mathbf{J}_\pm e^{-i\mathbf{H}_0 t} = \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) \mathbf{J}_\pm \pm i \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) \mathbf{J}'_\pm, \quad (5.81)$$

com

$$\mathbf{J}'_\pm = \sigma_z^1 \sigma_\pm^2 + \sigma_z^2 \sigma_\pm^1 + \sigma_\pm^3 + \sigma_\pm^4, \quad (5.82)$$

em que a ‘linha’ representa a modificação causada pelos operadores σ_z^1 e σ_z^2 no que seria um operador $\mathbf{J}_\pm$ genuíno. Além deste resultado, mostramos também no **Apêndice E** igualdades análogas a esta para as outras portas do conjunto universal, atestando que o mesmo tratamento poderia ser realizado para qualquer uma delas.

Todavia, a substituição da Eq. (5.81) em (5.80) não elimina todas as funções operatoriais, restando ainda o objeto $e^{\pm 2i\alpha(t)\mathbf{J}_z}$. Para eliminar esta exponencial, mostramos no **Apêndice F** a fórmula

$$\exp\left[\pm i\alpha(t) \sum_{k=1}^m \sigma_z^k\right] = \sum_{n=0}^m (\pm i)^n \cos^{m-n}[\alpha(t)] \sin^n[\alpha(t)] \mathbf{Z}_{mn}. \quad (5.83)$$

É claro que, tendo em vista a definição de $\mathbf{J}_z$ da Eq. (3.12), esta fórmula é o que precisamos para mostrar que

$$e^{\pm 2i\alpha(t)\mathbf{J}_z} = \sum_{n=0}^4 \mu_n^\pm(t) \mathbf{Z}_{4n}, \quad (5.84)$$

com

$$\mu_n^\pm(t) = (\pm i)^n \cos^{4-n}[\alpha(t)] \sin^n[\alpha(t)]. \quad (5.85)$$

Valendo-nos de todos estes resultados, podemos escrever $\mathbf{H}_I(t)$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_I(t) = & \frac{\epsilon}{2} e^{i\alpha(t)} \sum_{n=0}^4 \left\{ \mu_n^-(t) \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) e^{\gamma(t)} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{J}_+ + i \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) e^{\gamma(t)} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{J}'_+ \right] \right. \\ & \left. + \mu_n^+(t) \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) e^{-\gamma(t)} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{J}_- - i \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) e^{-\gamma(t)} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{J}'_- \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Almejando uma notação mais compacta para $\mathbf{H}_I(t)$, definiremos agora as matrizes

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) & -i \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) & i \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad O = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_- & \mathbf{J}'_- \\ \mathbf{J}_+ & \mathbf{J}'_+ \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

em conjunto com as funções de argumento inteiro

$$s(x) = \operatorname{sgn} [-(-1)^x] , \quad (5.88)$$

$$\bar{s}(x) = \operatorname{sgn} [(-1)^x] , \quad (5.89)$$

nas quais sgn denota a função sinal, ou seja,

$$s(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ -1, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases} \quad e \quad \bar{s}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ +1, & \text{se } x \text{ é par} . \end{cases} \quad (5.90)$$

Com isso, conseguimos uma forma simplificada para $\mathbf{H}_I(t)$,

$$\mathbf{H}_I(t) = \frac{\epsilon}{2} e^{i\alpha(t)} \sum_{a,b=1}^2 \sum_{n=0}^4 \mu_n^{s(a)}(t) V_{ab}(t) e^{\bar{s}(a)\gamma(t)} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab} . \quad (5.91)$$

Com esta notação, é imediato obter os comutadores dos integrandos da série da Eq. (5.71) para cada ordem de perturbação:

- Primeira ordem

$$[\mathbf{H}_I(t_1), \boldsymbol{\varrho}(0)] = \frac{\epsilon}{2} e^{i\alpha(t_1)} \sum_{a,b=1}^2 \sum_{n=0}^4 \mu_n^{s(a)}(t_1) V_{ab}(t_1) \left[e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \boldsymbol{\varrho}(0) \right] , \quad (5.92)$$

- Segunda ordem

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_I(t_1), [\mathbf{H}_I(t_2), \boldsymbol{\varrho}(0)]] &= \frac{\epsilon^2}{4} e^{i[\alpha(t_1)+\alpha(t_2)]} \sum_{a,b,j,l=1}^2 \sum_{n,q=0}^4 \mu_n^{s(a)}(t_1) \mu_q^{s(j)}(t_2) V_{ab}(t_1) V_{jl}(t_2) \\ &\times \left[e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \left[e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl}, \boldsymbol{\varrho}(0) \right] \right] . \end{aligned} \quad (5.93)$$

Assim, alcançamos nosso primeiro objetivo, ou seja, determinamos $\boldsymbol{\varrho}_I(t)$ excluindo as funções de operadores do sistema. Como segunda etapa, vamos agora também eliminar as exponencias do operador $\gamma(t)$ presente nos comutadores das equações acima. Para tal, calculamos o traço parcial sobre os graus de liberdade do ambiente sobre o operador densidade $\boldsymbol{\varrho}_I(t)$. Este procedimento faz com que, ao invés de olharmos para o operador densidade global (sistema + ambiente), tratemos exclusivamente o operador densidade reduzido (sistema), o que verdadeiramente nos interessa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varrho}_I^{sis}(t) = \operatorname{Tr}_A [\boldsymbol{\varrho}_I(t)] &= \operatorname{Tr}_A [\boldsymbol{\varrho}(0)] + (-i) \int_0^t dt_1 \operatorname{Tr}_A \{ [\mathbf{H}_I(t_1), \boldsymbol{\varrho}(0)] \} \\ &+ (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \operatorname{Tr}_A \{ [\mathbf{H}_I(t_1), [\mathbf{H}_I(t_2), \boldsymbol{\varrho}(0)]] \} . \end{aligned} \quad (5.94)$$

Esta equação deixa claro que os agentes responsáveis pela dinâmica não-unitária aparecem somente nos termos de primeira e segunda ordem. Para calcular cada um dos três termos da equação acima, vamos assumir que o estado global inicial seja fatorado nos estados do sistema e ambiente, isto é,

$$\varrho(0) = \varrho^{sis}(0) \otimes |\{0\}\rangle \langle\{0\}|. \quad (5.95)$$

Aqui, estamos considerando que inicialmente o ambiente encontra-se em um estado de vácuo para todos os osciladores que o compõem – o que indicamos com $|\{0\}\rangle$. Esta não é uma consideração essencial para a análise pois o banho poderia ser preparado em qualquer estado coerente que o nosso procedimento permaneceria válido.

Assumindo estas condições, é fácil verificar que os traços de cada ordem serão dados por:

- Ordem zero

$$\text{Tr}_A [\varrho(0)] = \varrho^{sis}(0), \quad (5.96)$$

- Primeira ordem

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \{[\mathbf{H}_I(t_1), \varrho(0)]\} &= \\ \frac{\epsilon}{2} e^{i\alpha(t_1)} \sum_{a,b=1}^2 \sum_{n=0}^4 \mu_n^{s(a)}(t_1) V_{ab}(t_1) \langle\{0\}| e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} |\{0\}\rangle [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \varrho^{sis}(0)] , \end{aligned} \quad (5.97)$$

- Segunda ordem

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \{[\mathbf{H}_I(t_1), [\mathbf{H}_I(t_2), \varrho(0)]]\} &= \\ \frac{\epsilon^2}{4} e^{i[\alpha(t_1)+\alpha(t_2)]} \sum_{a,b,j,l=1}^2 \sum_{n,q=0}^4 \mu_n^{s(a)}(t_1) \mu_q^{s(j)}(t_2) V_{ab}(t_1) V_{jl}(t_2) \\ &\times \left\{ \langle\{0\}| e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} |\{0\}\rangle [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl} \varrho^{sis}(0)] \right. \\ &\quad \left. - \langle\{0\}| e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} |\{0\}\rangle^* [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \varrho^{sis}(0) \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl}] \right\}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Note que agora toda a parte operatorial é independente do tempo e se resume ao cálculo dos comutadores. No **Apêndice G**, calculamos os valores médios resultantes da operação traço, obtendo os resultados listados abaixo:

$$\langle\{0\}| e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} |\{0\}\rangle = e^{-\lambda^2 A(t)}, \quad (5.99)$$

$$\langle\{0\}| e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} |\{0\}\rangle = M_{aj}(t_1, t_2), \quad (5.100)$$

em que

$$M(t, t') = \begin{pmatrix} e^{-\lambda^2 C(t, t')} e^{i\lambda^2 B(t, t')} & e^{-\lambda^2 A(t-t')} e^{-i\lambda^2 B(t, t')} \\ e^{-\lambda^2 A(t-t')} e^{-i\lambda^2 B(t, t')} & e^{-\lambda^2 C(t, t')} e^{i\lambda^2 B(t, t')} \end{pmatrix} \quad (5.101)$$

sendo

$$A(t) = \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k^2} [1 - \cos(\omega_k t)], \quad (5.102)$$

$$B(t, t') = \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k^2} \{ \sin(\omega_k t') - \sin(\omega_k t) + \sin[\omega_k(t - t')] \}, \quad (5.103)$$

$$C(t, t') = \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k^2} \{ 3 - 2 \cos(\omega_k t) - 2 \cos(\omega_k t') + \cos[\omega_k(t - t')] \}. \quad (5.104)$$

Uma rápida análise das funções acima, permite concluir que todas elas são reais e positivas (ou nulas), mas nunca negativas. Dessa forma, concluímos que todos os elementos da matriz $M(t_1, t_2)$ e os valores médios de primeira ordem são funções oscilantes e exponencialmente decrescentes no parâmetro de acoplamento λ . Acrescentando-se a isto o fato de que as funções $\mu_n^\pm(t)$ e $e^{i\alpha(t)}$ são exclusivamente oscilantes em λ e mais nenhuma outra função apresenta dependência nesse parâmetro, concluímos que os termos de primeira e segunda ordem tendem a zero no limite de λ grande, restando apenas o termo de ordem zero (o qual independente de λ),

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varrho_I^{sis}(t) = \varrho^{sis}(0). \quad (5.105)$$

Note que o ambiente é o grande responsável pelo limite acima, pois foi a atuação de seus operadores sobre seu estado inicial que proporcionou o decaimento exponencial, cancelando assim as rápidas oscilações promovidas pelo sistema para grandes acoplamentos.

Há de se destacar que estamos operando no cenário de interação, e portanto o limite obtido não implica num congelamento da evolução do estado, mantendo-o sempre no estado inicial. A sua correta interpretação deve considerar que, no cenário de interação, a dependência temporal nos estados somente aparece na presença da perturbação, e portanto o limite revela a insensibilidade do sistema à perturbações para acoplamentos grandes entre os spins e o ambiente, ou seja, a dinâmica se processa unitária e internamente ao SLD.

Embora tenhamos tratado o caso específico da porta **C-NOT**, não é difícil estender esse resultado a todas as outras portas do conjunto universal, assegurando que o EZQ é uma característica geral da teoria quântica, e não uma peculiaridade de uma porta lógica em especial pois a dependência em λ causada pelo ambiente é sempre oscilante e independente da porta. Assim, o decaimento exponencial causado pelo ambiente sempre estará hábil a anular as oscilações para λ grande. O único papel desempenhado diferentemente por cada porta está expresso na dependência temporal nos elementos da matriz $V(t)$ e nos operadores $J'_\pm$ da matriz O . Portanto, tratar com uma porta ou outra não modifica o comportamento

global, mas apenas as características da oscilação temporal ocorrentes para λ pequeno.

Uma leitura em termos de postulados da mecânica quântica pode ser feita a respeito desse fenômeno: no limite de interações fortes, o ambiente passou a funcionar como um aparato clássico de medida, projetando continuamente para dentro do SLD toda tentativa de evolução do estado para fora do mesmo.

Pode-se ainda especular sobre a possibilidade de termos associados a ordens superiores violarem o limite que estamos propondo, levando a evolução do estado inicial para fora do SLD. Entretanto não é esse o caso. A mesma estrutura relativa aos operadores de deslocamento continua sendo aplicável para ordens superiores e não é difícil induzir que, para qualquer ordem, as condições encontradas seriam muito semelhantes às de primeira e segunda ordens, e o limite continuaria valendo.

Com a Eq. (5.105), mostramos a ocorrência da versão mais drástica do EZQ, em que a dinâmica do estado inicial para fora do SLD é totalmente inibida. Todavia, acoplamentos infinitos são abstrações matemáticas e por isso, na seção seguinte, investigamos a fidelidade entre o estado em evolução pela porta **C-NOT** e o estado esperado como saída dessa porta no caso livre de decoerência. Expressaremos essas fidelidades em função do acoplamento e do tempo. Este estudo ilustrará a dinâmica evolutiva do estado inicial para acoplamentos finitos, oferecendo também uma relação entre os parâmetros λ e ϵ , tal que o estado evoluído esteja tão próximo do estado esperado quanto se queira.

5.4 Fidelidade durante operação da porta **C-NOT** perturbada

Tendo em vista a discussão realizada na **Seção 3.7** e referente a fidelidade entre dois estados quânticos, vamos calcular agora $\mathcal{F}(\lambda; t)$ para uma situação específica envolvendo os operadores densidades reduzidos $\varrho_I^{sis}(t)$ e ϱ_{ref} (resultado esperado pela eficiente atuação da porta **C-NOT**, isto é, no caso livre de decoerência). Tal fidelidade oferecerá uma clara percepção sobre o efeito do ambiente na evolução de um estado quântico. Matematicamente, queremos calcular o objeto abaixo:

$$\mathcal{F}(\lambda; t) = \text{Tr} [\varrho_{ref} \varrho_I^{sis}(t)] . \quad (5.106)$$

Como estamos operando no cenário de interação, temos que

$$\varrho_{ref} = \varrho_I^{sis}(0) , \quad (5.107)$$

tendo em vista que os efeitos perturbativos nessa evolução ideal não se encontram presentes, e portanto não haverá dependência temporal neste cenário em questão. Por outro lado, o estado $\varrho_I^{sis}(t)$ foi obtido na seção anterior através da Eq. (5.94) e com o auxílio dos resultados

(5.96) a (5.98). Abaixo sintetizamos os resultados dessas quatro equações:

$$\begin{aligned}
\varrho_I^{sis}(t) = & \varrho^{sis}(0) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{a,b=1}^2 \sum_{n=0}^4 [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \varrho^{sis}(0)] \int_0^t dt_1 e^{i\alpha(t_1)} \mu_n^{s(a)}(t_1) V_{ab}(t_1) e^{-\lambda^2 A(t_1)} \\
& - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{a,b,j,l=1}^2 \sum_{n,q=0}^4 [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl} \varrho^{sis}(0)] \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i[\alpha(t_1)+\alpha(t_2)]} \mu_n^{s(a)}(t_1) \mu_q^{s(j)}(t_2) V_{ab}(t_1) V_{jl}(t_2) M_{aj}(t_1, t_2) \\
& + \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{a,b,j,l=1}^2 \sum_{n,q=0}^4 [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \varrho^{sis}(0) \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl}] \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i[\alpha(t_1)+\alpha(t_2)]} \mu_n^{s(a)}(t_1) \mu_q^{s(j)}(t_2) V_{ab}(t_1) V_{jl}(t_2) M_{aj}^*(t_1, t_2) .
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Note que os termos com as integrais duplas se originam da segunda ordem de perturbação, a integração simples vem da primeira ordem e o operador $\varrho^{sis}(0)$ da ordem zero. O produto dos operadores apresentados nas duas últimas equações e a subsequente aplicação do traço, resulta na expressão para a fidelidade

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lambda; t) = & \text{Tr}[\varrho^{sis}(0)^2] - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{a,b=1}^2 \sum_{n=0}^4 I_1 \text{Tr}[\varrho^{sis}(0) [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \varrho^{sis}(0)]] \\
& - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{a,b,j,l=1}^2 \sum_{n,q=0}^4 \{ I_2 \text{Tr}[\varrho^{sis}(0) [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl} \varrho^{sis}(0)]] - I_3 \text{Tr}[\varrho^{sis}(0) [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \varrho^{sis}(0) \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl}]] \}
\end{aligned}$$

em que estamos usando I_1 , I_2 e I_3 para indicar, respectivamente, a primeira, segunda e terceira integrações da Eq. (5.108). A rigor, estes nomes deveriam deixar explícita a dependência das integrais nas variáveis das somas e no tempo t ; entretanto, vamos omitir a apresentação do argumento dessas funções, subentendendo essas dependências. Antes de discutirmos essas integrações, vamos primeiro calcular os traços indicados na equação acima. Para tanto, vamos assumir que o sistema tenha sido preparado num estado puro, tal que

$$\varrho^{sis}(0) = |\varphi\rangle \langle \varphi| . \tag{5.109}$$

Com isso, o traço do termo de ordem zero é trivial,

$$\text{Tr}(|\varphi\rangle \langle \varphi|^2) = 1 . \tag{5.110}$$

Este resultado já era esperado, uma vez que em ordem zero não ocorre perturbação e a dinâmica do estado inicial se dá internamente ao SLD (como estamos no cenário de interação, não vemos essa dinâmica interna e tudo se dá como se o estado alcançado fosse o próprio estado inicial neste cenário, levando a uma fidelidade unitária). O termo de ordem zero corresponde a evolução ideal do estado inicial apresentada na **Seção 3.7**, porém aqui expressa no cenário de interação.

Em primeira ordem, temos

$$\text{Tr} [\varrho^{sis}(0) [Z_{4n} O_{ab}, \varrho^{sis}(0)]] = \langle \varphi | Z_{4n} O_{ab} | \varphi \rangle - \langle \varphi | Z_{4n} O_{ab} | \varphi \rangle = 0. \quad (5.111)$$

Com este resultado, não precisamos nos preocupar em calcular a integral I_1 , pois esta sempre estará multiplicada por 0. Também não é surpreendente o anulamento do termo de primeira ordem: seu comutador revela a completa transição de qualquer estado inicial de $m = 1$ para subespaços de $m = 2$ ou $m = 0$ via os elementos da matriz O , conforme ilustrado na **Figura 5.6**. Desta forma, a fidelidade associada a este termo deve sempre resultar nula, pois os estados de subespaços distintos em nada se parecem.

Figura 5.6: Efeito do termo de primeira ordem removendo o sistema do SLD.

Finalmente, em segunda ordem, teremos o primeiro agente perturbativo capaz de modificar a função fidelidade do caso ideal. Os traços de seus comutadores não são necessariamente nulos, sendo fácil mostrar que

$$\text{Tr} [\varrho^{sis}(0) [Z_{4n} O_{ab}, Z_{4q} O_{jl} \varrho^{sis}(0)]] = \langle \varphi | Z_{4n} O_{ab} Z_{4q} O_{jl} | \varphi \rangle, \quad (5.112)$$

e

$$\text{Tr} [\varrho^{sis}(0) [Z_{4n} O_{ab}, \varrho^{sis}(0) Z_{4q} O_{jl}]] = - \langle \varphi | Z_{4q} O_{jl} Z_{4n} O_{ab} | \varphi \rangle. \quad (5.113)$$

Figura 5.7: Efeito do termo de segunda ordem: preservação parcial do sistema no SLD.

A **Figura 5.7** ilustra os acoplamentos associados aos comutadores da segunda ordem. Neste caso, diferente do que acontecia com o termo de primeira ordem, há preservação de parte do sistema dentro do próprio subespaço original. Na segunda ordem, portanto, a fidelidade não é nula e para obtê-la devemos calcular as integrais I_2 e I_3 . Com isso, vemos que a primeira correção ao caso ideal é a de segunda ordem, ou seja,

$$\mathcal{F}(\lambda; t) = 1 - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{\substack{a,b,j,l=1 \\ a \neq j}}^2 \sum_{n,q=0}^4 [I_2 \langle \varphi | \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab} \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl} | \varphi \rangle + I_3 \langle \varphi | \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl} \mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab} | \varphi \rangle], \quad (5.114)$$

com

$$I_2 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i[\alpha(t_1) + \alpha(t_2)]} \mu_n^{s(a)}(t_1) \mu_q^{s(j)}(t_2) V_{ab}(t_1) V_{jl}(t_2) M_{aj}(t_1, t_2), \quad (5.115)$$

$$I_3 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i[\alpha(t_1) + \alpha(t_2)]} \mu_n^{s(a)}(t_1) \mu_q^{s(j)}(t_2) V_{ab}(t_1) V_{jl}(t_2) M_{aj}^*(t_1, t_2). \quad (5.116)$$

Na Eq. (5.114), o vínculo $a \neq j$ foi acrescentado a primeira soma para eliminar alguns valores médios nulos, diminuindo o número de termos do somatório a ser considerado. De fato, se $a = j$, estaremos sempre tratando com operadores do mesmo gênero da matriz $\mathbf{O}$, isto é, operadores do tipo levantamento ($\mathbf{J}_+$ ou $\mathbf{J}'_+$) ou abaixamento ($\mathbf{J}_-$ ou $\mathbf{J}'_-$). A aplicação sucessiva de dois operadores do mesmo gênero a um estado do subespaço $m = 1$ leva-o a *kets* de outros subespaços, e portanto o cruzamento com um *bra* de $m = 1$ resultará nulo. Em outras palavras, esta restrição elimina da nossa expressão todas as setas da **Figura 5.7** que promovem transições entre subespaços distintos. Como escolhemos $|\varphi\rangle$ pertencente ao subespaço $m = 1$, resta apenas a seta que sai de $m = 1$ e retorna para lá.

Embora a restrição $a \neq j$ exclua um grande número de zeros dentre as parcelas do somatório, ela não garante que todos os termos restantes serão não nulos. De fato, dependendo do estado $|\varphi\rangle$ escolhido, teremos mais ou menos anulamentos nos *brackets* da Eq. (5.114).

Finalmente, para uma análise mais direta do efeito da perturbação, gostaríamos de observar graficamente a fidelidade como função do tempo durante a operação da porta **C-NOT**. Com isso, podemos observar com que eficiência o estado esperado é alcançado quando o ambiente está presente, regulada pelo parâmetro λ . Para tal é necessário realizar as integrações I_2 e I_3 , que discutiremos a seguir.

5.4.1 Integrações

A fim de calcular as integrais I_2 e I_3 , algumas considerações mostram-se úteis e simplificadoras. Por exemplo, precisamos realizar as somas das Eqs. (5.68) e (5.102) a (5.104), correspondentes às grandezas $\alpha(t)$, $A(t)$, $B(t, t')$ e $C(t, t')$, envolvidas nos elementos da matriz $M(t, t')$. Como essas somas se dão sobre os modos dos osciladores do meio, escolhemos, por conveniência, o seguinte modelo para o ambiente:

1. Os modos dos osciladores que constituem o ambiente estão pouco espaçados em

freqüência, de tal forma que os somatórios são bem substituídos pela integração

$$\sum_k \rightarrow \int d\omega R(\omega) \quad (5.117)$$

2. A densidade espectral $R(\omega)$ é não ohmica [16], dada por

$$R(\omega) = \frac{\omega^2}{2\omega_c^3} e^{-\omega/\omega_c}, \quad (5.118)$$

onde introduzimos um cut-off exponencial na freqüência de corte ω_c .

3. As constantes de acoplamento g_k são todas iguais para qualquer modo k

$$g_k = g \quad \forall k. \quad (5.119)$$

Por simplicidade tomamos $g = 1$.

Com isso, as somas se transformam em integrais factíveis analiticamente, resultando em

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= \frac{\Lambda^2 \nu_c}{2} \frac{\theta^3}{1 + \nu_c^2 \theta^2}, \\ \lambda^2 A(\theta - \theta') &= \frac{1}{\nu_c} \left[\frac{\alpha(\theta - \theta')}{\theta - \theta'} \right], \\ i\lambda^2 B(\theta, \theta') &= \frac{i}{\nu_c^2} \left[\frac{\alpha(\theta')}{\theta'^2} - \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} + \frac{\alpha(\theta - \theta')}{(\theta - \theta')^2} \right], \\ \lambda^2 C(\theta, \theta') &= \frac{1}{\nu_c^3} \left[(1 + 3\nu_c^2 \theta'^2) \frac{\alpha(\theta')}{\theta'^3} - 2 \frac{\alpha(\theta)}{\theta^3} + \frac{\alpha(\theta - \theta')}{(\theta - \theta')^3} \right], \end{aligned}$$

para as quais definimos as grandezas adimensionais:

$$\begin{aligned} \theta &= \epsilon t, & \Lambda &= \frac{\lambda}{\epsilon}, \\ \theta' &= \epsilon t', & \nu_c &= \frac{\omega_c}{\epsilon}. \end{aligned}$$

De posse dessas quantidades, as integrais I_2 e I_3 foram calculadas numericamente.

5.5 Resultados

Vamos mostrar o comportamento da fidelidade de um estado inicial

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0100\rangle - |0001\rangle)$$

submetido a ação de uma porta **C-NOT** perturbada para diferentes valores de acoplamento entre o sistema e o ambiente. Embora o estado inicial que consideramos aqui seja o mesmo

considerado na **Seção 3.7** (onde tratamos o caso não perturbado), vale destacar que aqui estamos no cenário de interação, enquanto que a **Figura 3.2** apresentava-se no cenário de Schrödinger. Dessa forma, comparações entre os gráficos devem levar em consideração esse fato. O cálculo numérico realizado na Eq. (5.114) leva a **Figura 5.8**:

Figura 5.8: A fidelidade oscila com amplitudes progressivamente menores à medida em que aumentamos o valor de Λ . Além disso é possível ver no detalhe que as oscilações são amortecidas, mostrando que uma vez que o sistema é retirado do SLD não ocorre retorno do mesmo para lá. Na figura o tempo da porta ($\theta_\tau = \epsilon\tau$) é 1 e $\nu_c = 10^5$.

A fidelidade apresenta comportamento oscilatório em função do tempo, mas as amplitudes dessas oscilações são tanto menores (e mais próximas de 1) quanto maior é o acoplamento Λ entre o sistema e o ambiente. No gráfico, apresentamos três valores distintos de Λ para evidenciar esse fato. A curva $\Lambda = 800$ apresenta pequena frequência e grande amplitude (não sendo possível apreciar no gráfico nenhuma de suas oscilações). A curva $\Lambda = 1150$ mostra melhor as oscilações por ter maior frequência e menor amplitude. Em termos do EZQ, vemos que o valor médio da fidelidade assumido para essa curva é muito mais próximo de 1 do que o valor médio da curva $\Lambda = 800$. Isto mostra que o acoplamento mais forte entre o sistema e o ambiente procura preservar mais intensamente o sistema dentro do SLD. Finalmente, a curva $\Lambda = 2000$ apresenta amplitude tão pequena que suas oscilações quase se confundem com a função constante $\mathcal{F} = 1$. Para mostrar que mesmo nesse caso há ocorrência de oscilações, apresentamos a mesma curva numa escala mais adequada no gráfico em detalhe (figura menor superposta). Este detalhe mostra também que as oscilações são levemente amortecidas, o que indica que uma vez que o sistema abandona o SLD devido a decoerência, nunca mais consegue atingir a fidelidade unitária; isto é, não retorna mais ao

SLD. Tal amortecimento está presente para qualquer valor de acoplamento.

Uma medida mais direta da relação entre o parâmetro de acoplamento λ e a intensidade da perturbação ϵ tal que o EZQ sustente a informação no SLD com uma dada eficiência pode ser melhor apreciada através da **Figura 5.9**, também obtida numericamente com os parâmetros $\nu_c = 10^5$ e $\theta_r = \theta = 1$.

Figura 5.9: O comportamento global do gráfico é crescente, conforme seria de se esperar pela teoria do EZQ. O trecho decrescente inicial surge como consequência da aplicação de teoria de perturbação com o agente perturbador muito intenso; o trecho oscilatório apresenta comportamento médio crescente e tende assintoticamente a 1 (figura em detalhe).

A figura mostra que o aumento da razão Λ leva quase sempre ao aumento da fidelidade, com exceção de algumas regiões em que a curva decresce ($0 \lesssim \Lambda \lesssim 500$) e oscila ($\Lambda \gtrsim 1200$). Embora essas regiões apresentem um comportamento diferente do esperado, o padrão global confirma o EZQ.

Na região das oscilações, o detalhe mostra que uma análise em termos do valor médio oferece um comportamento crescente, assintoticamente tendendo a 1. Já o regime decrescente no início do domínio pode ser explicado pelo fato de que nosso tratamento baseou-se em teoria de perturbação truncada em segunda ordem. Isto significa que se tomarmos um ϵ grande (que faz Λ pequeno), a teoria de perturbação não é adequada pois o agente perturbador toma proporções comparáveis aos outros termos do hamiltoniano; o resultado dessa inadequação é visualizado na **Figura 5.9** através do referido trecho decrescente.

Baseados nessa figura, podemos extrair uma clara razão entre o agente perturbador (ϵ) e o agente de acoplamento (λ) para obter uma dada eficiência na realização da porta

lógica **C-NOT** perturbada. Por exemplo, uma fidelidade de 90% é obtida se tomarmos $\Lambda = 1040$, ou seja a porta **C-NOT** se realiza com 90% de eficiência se

$$\lambda = 1040\epsilon.$$

É indiscutível que medidas como essas são valiosas para a implementação experimental de *subespaços quase livres de decoerência*. Portanto, a **Figura 5.9** certamente poderá servir como um guia para quantificar o quão forte deve ser o acoplamento entre o sistema e o ambiente para que o EZQ represente uma alternativa real na busca de computadores quânticos.

É claro que diversas hipóteses simplificadoras foram feitas ao longo deste trabalho para sustentar, tanto quanto possível, a analiticidade dos resultados. Embora tais simplificações sejam preciosas no contexto acadêmico, também distanciam os resultados mostrados de uma proposta real.

Certamente uma abordagem predominantemente numérica poderia ser utilizada para construir curvas como as das **Figuras 5.8 e 5.9** reduzindo bastante o número de considerações simplificadoras. Tal feito ofereceria resultados mais precisos para implementações experimentais. Contudo, acreditamos que essa sofisticação resultaria em apenas pequenas modificações nessas figuras, o que expressa nossa segurança de que os resultados aqui obtidos concentram a essência do papel do EZQ na computação quântica.

Conclusões

Ao longo deste trabalho abordamos diferentes aspectos da computação quântica, abrangendo portas lógicas quânticas, implementações e mecanismos de proteção contra erros. Tratando essa diversidade de assuntos alcançamos nosso objetivo primordial de adquirir o conhecimento básico fundamental da teoria de informação quântica; esperamos que o término desse projeto, além da titulação pleiteada, traga-nos a possibilidade de contribuir diretamente para o desenvolvimento da computação quântica. De fato, já estivemos empenhados nesse sentido desde o princípio de sua realização. Nos parágrafos seguintes vamos resumir os resultados mais importantes obtidos nesta dissertação.

O primeiro resultado relevante foi obtido no **Capítulo 3**, onde mostramos explicitamente que, para o nosso hamiltoniano de partida, o conjunto universal de portas lógicas **C-NOT**, **Hadamard** e **T** pode ser construído num subespaço livre de decoerência, ou seja, é possível realizar qualquer operação quântica sobre um *qubit* isoladamente do resto do universo. Vimos que além de ser possível, existem vários hamiltonianos passíveis de gerar tais portas lógicas, requerendo controle preciso das interações entre pares de spins $\frac{1}{2}$ e de cada spin com campos externos.

No **Capítulo 4** discutimos implementações via junções Josephson, a qual oferece hamiltonianos bastante semelhantes ao considerado no **Capítulo 3**. As junções Josephson constituem atualmente um dos fortes candidatos a implementação da computação quântica por oferecerem longos tempos de decoerência, curtos tempos de operação das portas, escalabilidade e manufaturabilidade. Além disso, os computadores clássicos são implementados em dispositivos de estado sólido, o que naturalmente nos leva a pensar que os computadores quânticos também possam ser. Operações de um *qubit* já são realizadas através de junções Josephson, mas as portas lógicas de 2 *qubits* ainda desafiam os físicos experimentais, impedindo por exemplo, a versão supercondutora da porta lógica **C-NOT**. Todavia, previsões otimistas estimam que o computador quântico supercondutor será realidade até 2012.

Finalmente, no **Capítulo 5**, mostramos que o efeito Zenão quântico pode servir como mecanismo de proteção da informação quando um agente perturbador retira o *qubit* do subespaço livre de decoerência. Nesse caso vimos que o aumento do parâmetro de acoplamento entre o sistema e o ambiente parece projetar de volta ao subespaço original qualquer tentativa de saída do estado em evolução. Nossa abordagem demonstrou esse fenômeno a partir de primeiros princípios, e de forma analítica mostramos que no limite de acoplamentos infinitos o estado fica absolutamente confinado ao subespaço livre de decoerência. Como tais acoplamentos são abstrações matemáticas, estudamos o comportamento do estado para valores finitos dos acoplamentos, e verificamos numericamente o aumento da proteção com o aumento do acoplamento. Como último resultado, nossa abordagem nos permitiu também estimar a razão necessária entre o acoplamento e a perturbação para obter uma proteção desejada. É claro que protegendo a informação da decoerência, estamos tornando a atuação das portas lógicas mais eficientes, e portanto os significados de fidelidade, proteção e eficiência se confundem nesse contexto.

Bibliografia

- [1] R. P. FEYNMAN, *Feynman Lectures on Computation*, (Perseus Press), 1996.
- [2] P. W. SHOR, *Polynomial time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, SIAM J. Comput. **26**, 1484 (1997).
- [3] L. K. GROVER, *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack*, Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [4] M. A. NIELSEN e I. L. CHUANG, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press), 2000.
- [5] W. H. ZUREK, *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical*, Phys. Today **44**, 36 (1991).
- [6] J. H. REINA, L. QUIROGA e N. F. JOHNSON, *Decoherence of quantum registers*, Phys. Rev. A **65**, 032326 (2002).
- [7] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY e N. ROSEN, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [8] D. BOHM, *Quantum Theory*, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ), 1951.
- [9] J. S. BELL, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, (Cambridge University Press), 1987.
- [10] A. PERES, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, (Kluwer Academic Publishers), 1995.
- [11] J. PRESKILL, *Physics 229: Advanced Mathematical Methods of Physics – Quantum Computation and Information*, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229>, California Institute of Technology, 1998.
- [12] R. LANDAUER, *Irreversibility and heat generation in the computing process*, IBM J. Res. Dev. **5**, 183 (1961).

- [13] D. A. LIDAR, I. L. CHUANG e K. B. WHALEY, *Decoherence-Free Subspaces for Quantum Computation*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2594 (1998).
- [14] A. M. STEANE, *Error Correcting Codes in Quantum Theory*, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1996).
- [15] D. P. DIVINCENZO, *Two-bit gates are universal for quantum computation*, Phys. Rev. A **51**, 1015 (1995).
- [16] A. J. LEGGETT, S. CHAKRAVARTY et al, *Dynamics of the dissipative two-state system*, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).
- [17] D. P. DIVINCENZO, *The Physical Implementation of Quantum Computation*, quant-ph/0002077 (2001).
- [18] T. P. ORLANDO, S. LLOYD et al, *Flux-based Superconducting Qubits for Quantum Computation*, Physica C **372**, 194 (2001).
- [19] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON e M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics*, v. III, (Addison-Wesley), 1965.
- [20] J. BARDEEN, L. N. COOPER e J. R. SCHRIEFFER, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [21] N. W. ASHCROFT e N. D. MERMIN, *Solid State Physics*, (Saunders College), 1976.
- [22] R. DALVEN, *Introduction to Applied Solid State Physics*, (Plenum Press), 1990.
- [23] Y. MAKHLIN, G. SCHÖN e A. SHNIRMAN, *Quantum-state engineering with Josephson-junction devices*, Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).
- [24] H. E. BRANDT, *Qubit Devices and the Issue of Quantum Decohrence*, Prog. Quant. Elect. **22**, 257 (1998).
- [25] Y. NAKAMURA, C. D. CHEN e J. S. TSAI, *Spectroscopy of energy-level splitting between two macroscopic quantum states of charge coherently superposed by Josephson coupling*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2328 (1997).
- [26] *Superconducting Approaches to Quantum Information Processing and Quantum Computing*, <http://qist.lanl.gov> (section 6.6), 2002.
- [27] B. MISRA e E. C. G. SUDARSHAN, *The Zeno's paradox in quantum theory*, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977).
- [28] W. M. ITANO, D. J. HEINZEN et al, *Quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).

- [29] A. BEIGE, D. BRAUN et al, *Quantum computing using dissipation to remain in a decoherence-free subspace*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1762 (2000).
- [30] C. B. CHIU, E. C. G. SUDARSHAN e B. MISRA, *Time evolution of unstable quantum states and a resolution of Zeno's paradox*, Phys. Rev. D **16**, 520 (1977).
- [31] A. PERES, *Zeno paradox in quantum theory*, Am. J. Phys **48**, 931 (1980).
- [32] R. J. COOK, *What are Quantum Junps*, Phys. Scr. **T21**, 49 (1988).
- [33] L. E. BALLENTINE, *Comment on "Quantum Zeno effect"*, Phys. Rev. A **43**, 5165 (1991).
- [34] W. M. ITANO, D. J. HEINZEN et al, *Reply to "Comment on 'Quantum Zeno effect'"*, Phys. Rev. A **43**, 5168 (1991).
- [35] G. D. MAHAN, *Many-Particle Physics*, (Plenum, New York), 2^a ed., 1990.
- [36] W. H. LOUISELL, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (John Wiley & Sons, New York), 1^a ed., 1973.
- [37] <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/paradzenao.htm>;
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Zeno_of_Elea.html;
<http://www.mundodosfilosofos.com.br/zenao.htm>;
<http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/>.
- [38] S. M. BARNETT e P. M. RADMORE, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, (Clarendon Press, Oxford), 1997.

Apêndices

Apêndice A: Independência Linear

Para que as Eqs. (3.17) sejam condições *necessárias* ao anulamento do comutador da Eq. (3.15), devemos mostrar em princípio que o conjunto de operadores apresentado em (3.16) é linearmente independente. Para tanto, vamos mostrar que a igualdade

$$\alpha (\sigma_x^m \sigma_y^n + \sigma_y^m \sigma_x^n) + \beta (\sigma_x^m \sigma_x^n - \sigma_y^m \sigma_y^n) + \gamma (\sigma_z^m \sigma_x^n) + \delta (\sigma_x^m \sigma_z^n) + \theta (\sigma_z^m \sigma_y^n) + \varphi (\sigma_y^m \sigma_z^n) = 0, \quad (\text{A.1})$$

só é satisfeita se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \theta = \varphi = 0$.

Dividimos nossa abordagem em dois casos, cada qual resultando nas seguintes conclusões:

1. Para $m = n$, o conjunto é LD e portanto as Eqs. (3.17) não são condições *necessárias* ao anulamento do comutador, embora sejam *suficientes*;
2. Para $m \neq n$, o conjunto é LI de forma que as Eqs. (3.17) são realmente *necessárias*.

Embora haja essa diferença, tratamos ambos os casos indistintamente ao longo da dissertação, adotando as Eqs. (3.17) para quaisquer valores de m e n . Essa consideração impõem vínculos desnecessários à forma final do hamiltoniano; entretanto, mesmo assim resta bastante liberdade para a construção do conjunto universal de portas lógicas quânticas. Vamos tratar explicitamente casos particulares de $m = n$ e $m \neq n$ para induzir as conclusões enumeradas acima.

Caso $m = n$

Para mostrar a primeira conclusão, mais do que considerar $m = n$, vamos assumir que $m = n = 1$ e então, usando as definições das matrizes de Pauli da Eq. (3.14), escrever a

matriz correspondente ao primeiro membro da Eq. (A.1) e igualá-la a matriz nula. Embora trabalhem com um caso particular para realizar um tratamento mais simples e direto, garantimos que as condições obtidas aqui também apareceriam para outros valores possíveis de m e n tais que $m = n$.

Vamos começar escrevendo o primeiro membro da Eq. (A.1) com $m = n = 1$ na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^* & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & -A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & -A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A^* & 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

com

$$A = \gamma - \delta - i(\theta - \varphi) \quad e \quad B = 2\beta.$$

É claro que essa matriz, igualada a zero, implica no anulamento de cada um de seus elementos. Isto, em termos dos coeficientes resulta em

$$\beta = 0, \tag{A.2}$$

$$\theta = \varphi, \tag{A.3}$$

$$\gamma = \delta. \tag{A.4}$$

Note que β é o único coeficiente necessariamente nulo, o coeficiente α pode assumir qualquer valor, e os coeficientes θ, ϕ, γ e δ devem satisfazer os vínculos das duas últimas equações, o que não os determina nulos. Dessa forma, mostramos que para $m = 1$ e $n = 1$, o conjunto de operadores em (3.16) é LD.

Se repetíssemos esse tratamento para os outros valores de m e n tais que $m = n$, observaríamos os mesmos vínculos das Eqs. (A.2) a (A.4), concluindo então sua validade para o caso geral $m = n$. Com esses resultados, concluímos que a Eq. (3.17) não expressa uma condição *necessária* neste caso. De fato, trocando os coeficientes gregos pelos respectivos acoplamentos, as condições *necessárias* para zerar o comutador da Eq. (3.15) no caso $m = n$ implicam em:

$$G_{xy}^{mn}(t) = -G_{yx}^{mn}(t), \quad (\text{A.5})$$

$$G_{zx}^{mn}(t) = G_{xz}^{mn}(t), \quad (\text{A.6})$$

$$G_{zy}^{mn}(t) = G_{yz}^{mn}(t), \quad (\text{A.7})$$

que são muito mais fracas do que as condições da Eq. (3.17), embora admitam-nas como caso particular.

Caso $m \neq n$

Analogamente ao que fizemos no caso $m = n$, vamos selecionar um exemplo de valores de m e n distintos para mostrar a independência linear dos operadores em (3.16). Considerando $m = 1$ e $n = 2$, e escrevendo o primeiro membro da matriz (A.1) na forma

matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C^* & D^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^* & D^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^* & D^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^* & D^* & 0 & 0 & -A \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D^* & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D^* & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^* & 0 \\ A & 0 & 0 & -D & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & -D^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & -C^* \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & -D & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D & -C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} A &= 2i\alpha, & C &= \gamma + i\theta, \\ B &= 2\beta, & D &= \delta + i\varphi. \end{aligned}$$

A igualdade desta matriz com a matriz nula, impõe o anulamento de todos os seus termos, o que, posto nos coeficientes gregos, resulta também no anulamento simultâneo de todos eles, confirmando a independência linear expressa na Eq. (3.17).

Embora tenhamos mostrado o anulamento dos coeficientes gregos somente para o caso $m = 1$ e $n = 2$, asseguramos que para qualquer escolha de m e n com $m \neq n$, os mesmos elementos apareceriam nas matrizes correspondentes, mudando apenas de posição. Dessa forma, garantimos que o anulamento dos coeficientes gregos é uma característica geral do caso $m \neq n$, e portanto, a Eq. (3.17) expressa as condições *necessárias* para o anulamento do comutador da Eq. (3.15) neste caso.

Apêndice B: Hamiltonianos para portas lógicas

Neste apêndice, detalhamos os cálculos que nos permitiram obter as matrizes associadas aos operadores hamiltonianos, cujos operadores evolução temporal correspondem as portas lógicas **C-NOT**, **T1**, **T2**, **Hadamard 1** e **Hadamard 2**.

A diagonalização das matrizes $U_{\text{C-NOT}}$, U_{T1} , U_{T2} , U_{H1} e U_{H2} , apresentadas na **Seção 3.5**, possibilita escrevermos com grande facilidade seus respectivos hamiltonianos nessas bases diagonais. Abaixo, apresentamos as matrizes associadas aos hamiltonianos de cada porta lógica na base diagonal, conforme estabelecido no item 2 do procedimento da página 31:

- Porta **C-NOT**

$$\underline{\text{Base:}} \left\{ |\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, \frac{|\overline{11}\rangle - |\overline{10}\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|\overline{11}\rangle + |\overline{10}\rangle}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\mathbf{H}_{\text{C-NOT}}^{\text{diag}} = \frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k'' + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k''' \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

com $k, k', k'', k''' \in \mathbb{Z}$.

- Porta **Hadamard 1**

$$\underline{\text{Base:}} \left\{ \frac{(\sqrt{2}+1)|\overline{00}\rangle + |\overline{10}\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{(\sqrt{2}+1)|\overline{01}\rangle + |\overline{11}\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{|\overline{01}\rangle - (\sqrt{2}+1)|\overline{11}\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{|\overline{00}\rangle - (\sqrt{2}+1)|\overline{10}\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right\}$$

$$\mathbf{H}_{\text{H1}}^{\text{diag}} = \frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2j'' + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2j''' + 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

com $j, j', j'', j''' \in \mathbb{Z}$.

- Porta **Hadamard 2**

$$\underline{\text{Base:}} \left\{ \frac{(\sqrt{2}+1)|\overline{00}\rangle + |\overline{01}\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{|\overline{10}\rangle + (\sqrt{2}-1)|\overline{11}\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{|\overline{00}\rangle - (\sqrt{2}+1)|\overline{01}\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{|\overline{10}\rangle - (\sqrt{2}+1)|\overline{11}\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right\}$$

$$\mathbf{H}_{\text{H2}}^{\text{diag}} = \frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l'' + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l''' + 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

com $l, l', l'', l''' \in \mathbb{Z}$.

- Porta **T1**

Base: $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$

$$\mathbf{H}_{T1}^{diag} = \frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2m'' - \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2m''' - \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

com $m, m', m'', m''' \in \mathbb{Z}$.

- Porta **T2**

Base: $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$

$$\mathbf{H}_{T2}^{diag} = \frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2n' - \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n''' - \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

com $n, n', n'', n''' \in \mathbb{Z}$.

A seguir, calculamos as matrizes de mudança de base que levam das bases indicadas em cada matriz acima para a base original $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$. Abaixo, apresentamos as matrizes de mudança de base.

- Matriz de mudança de base para porta **C-NOT**

$$\mathbf{S}_{C\text{-NOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

- Matriz de mudança de base para porta **Hadamard 1**

$$\mathbf{S}_{H1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

- Matriz de mudança de base para porta **Hadamard 2**

$$S_{H2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{bmatrix}. \quad (B.8)$$

É claro que não é necessário mudar de base as matrizes H_{T1} e H_{T2} , pois essas já são diagonais na base original. Operando as mudanças de base para as demais portas, conforme estabelece o item 3 do procedimento da página 31, obtem-se:

- Porta **C-NOT**

Base: $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$

$$S_{C-NOT}^\dagger H_{C-NOT}^{diag} S_{C-NOT} = \frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'' + k''' + \frac{1}{2} & -k'' + k''' - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -k'' + k''' - \frac{1}{2} & k'' + k''' + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (B.9)$$

- Porta **Hadamard 1**

Base: $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$

$$S_{H1}^\dagger H_{H1}^{diag} S_{H1} =$$

$$\frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} \eta^- (j''' + \frac{1}{2}) + \eta^+ j & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} (j - j''' - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \eta^- (j'' + \frac{1}{2}) + \eta^+ j' & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} (j' - j'' - \frac{1}{2}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (j - j''' - \frac{1}{2}) & 0 & \eta^+ (j''' + \frac{1}{2}) + \eta^- j & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} (j' - j'' - \frac{1}{2}) & 0 & \eta^+ (j'' + \frac{1}{2}) + \eta^- j' \end{bmatrix} \quad (B.10)$$

com

$$\eta^\pm = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

- Porta **Hadamard 2**

Base: $\{|\overline{00}\rangle, |\overline{01}\rangle, |\overline{10}\rangle, |\overline{11}\rangle\}$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_{\text{H2}}^\dagger \mathbf{H}_{\text{H2}}^{diag} \mathbf{S}_{\text{H2}} = \\
& \frac{\pi}{\tau} \begin{bmatrix} \eta^- \left(l'' + \frac{1}{2} \right) + \eta^+ l & \frac{\sqrt{2}}{2} \left(l - l'' - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(l - l'' - \frac{1}{2} \right) & \eta^+ \left(l'' + \frac{1}{2} \right) + \eta^- l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^- \left(l''' + \frac{1}{2} \right) + \eta^+ l' & \frac{\sqrt{2}}{2} \left(l' - l''' - \frac{1}{2} \right) \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \left(l' - l''' - \frac{1}{2} \right) & \eta^+ \left(l''' + \frac{1}{2} \right) + \eta^- l' \end{bmatrix}, \\
& \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

concluindo assim o procedimento estabelecido no penúltimo parágrafo.

Apêndice C: Paradoxos de Zenão

Estima-se que Zenão tenha nascido cerca de 490-485 a. C. na Eléia (atualmente região meridional da Itália), e desafiou os conceitos de movimento e de tempo através de quatro paradoxos que criaram uma certa agitação, ainda hoje visível.

As teorias do movimento estão intimamente relacionadas com as teorias sobre a natureza do espaço e do tempo. Na Antiguidade, foram defendidas duas perspectivas opostas: a *hipótese do Uno* (estagnação das coisas), defendida por Parmênides (515-510 a.C.), e a dos seus adversários como Heráclito (544-484 a.C.), que defendia o *pluralismo* (universo dinâmico, transformativo).

Zenão era discípulo de Parmênides e tentou fazer com que os seus adversários caíssem em contradição. De fato, Zenão mostrou que examinando a questão a fundo se obtêm conseqüências mais absurdas partindo da hipótese da pluralidade do que da hipótese do Uno.

As hipóteses contra as quais Zenão dirigiu o seu talento destrutivo foram principalmente a da pluralidade e a do movimento, que eram indiscutivelmente aceitas por todos, salvo pelos próprios Eleatas. Vamos rever os quatro paradoxos propostos por Zenão e como um deles se relaciona com o EZQ. A maioria das informações aqui contidas foram extraídas da internet, especialmente dos *websites* [37].

O Paradoxo do Estádio

O primeiro argumento que Zenão apresenta contra o movimento é o seguinte:

“É impossível atravessar o estádio; porque, antes de se atingir a meta, deve primeiro alcançar-se o ponto intermédio da distância a percorrer; antes de atingir esse ponto, deve atingir-se o ponto que está a meio caminho desse ponto; e assim ad infinitum.”

Em outras palavras, se admitirmos que o espaço é infinitamente divisível e que, portanto, qualquer distância finita contém um número infinito de pontos, chegamos à conclusão de que é impossível alcançar o fim de uma série infinita num tempo finito.

Entretanto, todos sabemos que é possível atravessar um estádio, ou percorrer qualquer distância finita num determinado período de tempo, o que traz o caráter paradoxal à questão.

A dificuldade consiste no desconhecimento de Zenão da convergência dos infinitos termos de uma série geométrica decrescente. Hoje sabemos que a soma das infinitas divisões ao meio que se faz ao longo do comprimento L do estádio não é infinita, mas sim igual ao

próprio comprimento do estádio. Portanto, tem que ser possível atravessá-lo num tempo finito.

$$\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \frac{L}{16} + \frac{L}{32} + \dots = L.$$

Ao contrário, Zenão acreditava que uma quantidade infinita de segmentos de qualquer comprimento enfileirados resultaria sempre num trajeto infinitamente longo.

O mesmo tipo de raciocínio resolve o segundo paradoxo de Zenão.

O Paradoxo de Aquiles

Neste paradoxo, Zenão considera a questão do movimento relativo de dois corpos. Desta vez, a ilustração que se faz do problema é a de uma competição em que Aquiles (o mais veloz corredor da Antiguidade) é desafiado por uma tartaruga para uma corrida em que a mesma largaria com certa vantagem S_0 e ambos os corredores desenvolveriam velocidades constantes (denotamos v_T para a tartaruga e v_A para Aquiles). Ainda que $v_A \gg v_T$, segundo Zenão

“Aquiles nunca pode alcançar a tartaruga; porque na altura em que atinge o ponto donde a tartaruga partiu, ela ter-se-á deslocado para outro ponto; na altura em que alcança esse segundo ponto, ela ter-se-á deslocado de novo; e assim sucessivamente, ad infinitum.”

A **Figura 7.1** ilustra como a separação entre os competidores evolui em função da separação inicial e das velocidades de cada um deles.

Figura 7.1: A tartaruga larga S_0 metros a frente de Aquiles. Instantes depois, Aquiles alcança a posição inicial da tartaruga, mas ela já se deslocou $\frac{v_T}{v_A} S_0$. Assim, a separação entre os competidores vai diminuindo segundo potências da razão $\frac{v_T}{v_A}$ cada vez que Aquiles alcança a posição prévia da tartaruga.

Colocado em termos dessas grandezas, o problema consiste tão somente em somar as separações para saber que distância (d) Aquiles teria que percorrer para alcançar a tartaruga e então ultrapassá-la, ou seja, basta calcular o objeto

$$d = \sum_{n=0}^{\infty} \left[S_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^n \right].$$

Para Zenão, as infinitas parcelas só poderiam resultar na soma $d \rightarrow \infty$. Deste modo, numa corrida, o perseguidor nunca poderia atingir o perseguido, mesmo que fosse mais rápido que este. Entretanto, o conhecimento da convergência da série geométrica nos permite calcular

$$d = \frac{S_0}{1 - \frac{v_T}{v_A}},$$

o que resolve o paradoxo uma vez que oferece uma distância finita a ser percorrida pelo corredor mais veloz para que alcance o mais lento.

O Paradoxo do Arqueiro

Este terceiro paradoxo foi que inspirou B. Misra e E. C. G. Sudarshan a nomear de Paradoxo de Zenão Quântico o efeito que discutimos no **Capítulo 5**. Sua forma original clássica se apresenta na seguinte sentença:

“Um objeto está em repouso quando ocupa um lugar igual às suas próprias dimensões. Uma seta em voo ocupa, em qualquer momento dado, um espaço igual às suas próprias dimensões. Por conseguinte, uma seta em voo está em repouso.”

Hoje é simples perceber que o erro está na definição de repouso assumida pelo filósofo: não era conhecido o conceito de velocidade instantânea. Reduzindo a propagação da flecha a vários cenários infinitesimalmente próximos no tempo (nos quais a flecha apresentasse variação na posição), Zenão argumentava que não havia agente responsável por mudar a posição da flecha de um cenário para outro. Consequentemente, a observação dessa propagação era ilusória!

O paralelo que se faz com a versão quântica do paradoxo fica claro se pensarmos na flecha como o vetor de estado quântico do espaço de Hilbert. Cada medida que se faz sobre o vetor é responsável pela criação de um cenário, dessa forma “cenários gerados infinitesimalmente próximos no tempo” são resultados de medidas infinitesimalmente próximas. Devido a natureza das medições quânticas, um estado submetido a sucessivas medidas está sempre sendo projetado de volta a sua forma inicial, impossibilitando qualquer evolução.

O Paradoxo das Fileiras em Movimento

O quarto argumento é o que diz respeito a duas filas de corpos, sendo cada fileira constituída por igual número de corpos do mesmo tamanho, passando uma pela outra numa pista de corridas. Representamos a situação com a ilustração abaixo

	A	A	A
B	B	B	
		C	C C

A fila dos 'A' corresponde a uma fila estacionária, enquanto que a fila dos 'B' corre da esquerda para a direita com a mesma velocidade que a fila dos 'C' corre da direita para esquerda. Considerando que as filas partam dessa situação inicial para iniciar seu movimento, em um instante posterior observaremos a seguinte configuração

A	A	A
B	B	B
	C	C C

Dessa forma num mesmo intervalo de tempo o primeiro 'B' passou por dois 'C' e por apenas um 'A'. Argumentando que o tempo de ultrapassagem de um elemento da fila em relação a outro elemento de qualquer outra fila seria o mesmo, Zenão conclui que

"(...) metade de um dado tempo é igual ao dobro desse tempo."

Nesse caso fica claro que o único erro do raciocínio está, uma vez mais, em considerar um pressuposto de base errado: a hipótese de que um corpo leva o mesmo tempo a passar, com igual velocidade, por um corpo que está em movimento e por um corpo do mesmo tamanho que está em repouso.

Com isso concluímos a discussão sobre os paradoxos clássicos de Zenão, reconhecendo que em todos eles a questão central reside na impossibilidade de considerar segmentos de espaço e de tempo como sendo formados por uma infinidade de elementos individuais e, não obstante, separados uns dos outros, isto é, descontínuos.

Zenão sabia, evidentemente, que Aquiles podia apanhar a tartaruga, que um corredor pode percorrer o estádio, e que uma seta em voo se move. Pretendia simplesmente demonstrar as consequências paradoxais de encarar o tempo e o espaço como constituídos por uma sucessão infinita de pontos e instantes individuais consecutivos como as contas de um colar.

Apêndice D: Manipulações Matemáticas I

Neste apêndice nos concentraremos no cálculo da evolução temporal do operador J_x ,

$$\Xi(t') \equiv U(t')^\dagger J_x U(t') = e^{\gamma(t')J_z} e^{-i\alpha(t')J_z^2} J_x e^{i\alpha(t')J_z^2} e^{-\gamma(t')J_z}, \quad (D.1)$$

de maneira a obter uma forma mais conveniente para os nossos propósitos. Dividiremos a manipulação de $\Xi(t')$ em duas etapas:

- Inicialmente manipulamos o produto central, dado pelo operador

$$\mathcal{U}[\alpha(t')] \equiv e^{-i\alpha(t')J_z^2} J_x e^{i\alpha(t')J_z^2}. \quad (D.2)$$

- Posteriormente aplicamos os operadores restantes para derivar o objeto original

$$\Xi(t') \equiv e^{\gamma(t')J_z} \mathcal{U}[\alpha(t')] e^{-\gamma(t')J_z}. \quad (D.3)$$

Como primeira medida para realização do item inicial, vamos definir os operadores auxiliares

$$\mathcal{V}[\alpha(t')] \equiv e^{-i\alpha(t')J_z^2} J_y e^{i\alpha(t')J_z^2}, \quad (D.4)$$

$$\mathcal{W}[\alpha(t')] \equiv \mathcal{U}[\alpha(t')] + i\mathcal{V}[\alpha(t')] = e^{-i\alpha(t')J_z^2} J_+ e^{i\alpha(t')J_z^2}. \quad (D.5)$$

A partir daí é imediato mostrar que

$$\frac{d\mathcal{W}[\alpha(t')]}{d[\alpha(t')]} = -i\{\mathcal{W}[\alpha(t')], J_z\} \text{ com } \mathcal{W}(0) = J_+, \quad (D.6)$$

em que as chaves expressam o anti-comutador dos operadores $\{A, B\} = AB + BA$.

Ao definirmos o operador

$$\mathcal{K}[\alpha(t')] = e^{-i\alpha(t')J_z} J_+ e^{-i\alpha(t')J_z}, \quad (D.7)$$

notamos que este satisfaz a mesma equação diferencial de $\mathcal{W}[\alpha(t')]$, além de satisfazer a mesma condição inicial, isto é,

$$\frac{d\mathcal{K}[\alpha(t')]}{d[\alpha(t')]} = -i\{\mathcal{K}[\alpha(t')], J_z\} \text{ com } \mathcal{K}(0) = J_+. \quad (D.8)$$

Essas duas coincidências são suficientes (Teorema da Unicidade) para mostrar que $\mathcal{W}[\alpha(t')] = \mathcal{K}[\alpha(t')]$, o que nos leva ao nosso primeiro resultado relevante deste apêndice: a linearização

do operador $\mathbf{J}_z$ da exponencial, conforme mostra a igualdade

$$\mathcal{U} [\alpha(t')] + i\mathcal{V} [\alpha(t')] = e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z^2} \mathbf{J}_+ e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z^2} = e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \mathbf{J}_+ e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} . \quad (\text{D.9})$$

Repetindo o mesmo procedimento, chega-se a

$$\mathcal{U} [\alpha(t')] - i\mathcal{V} [\alpha(t')] = e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z^2} \mathbf{J}_- e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z^2} = e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \mathbf{J}_- e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} . \quad (\text{D.10})$$

Somando e subtraindo as equações acima, obtemos

$$\mathcal{U} [\alpha(t')] = \frac{1}{2} \left[e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \mathbf{J}_+ e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} + e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \mathbf{J}_- e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \right] , \quad (\text{D.11})$$

$$\mathcal{V} [\alpha(t')] = \frac{1}{2i} \left[e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \mathbf{J}_+ e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} - e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \mathbf{J}_- e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \right] . \quad (\text{D.12})$$

A seguir, apresentamos um procedimento matemático que traz o coroamento dos esforços dessa primeira manipulação e que permite obter um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas entre $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.

Iniciamos calculando a segunda derivada para $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{U} [\alpha(t')]}{d[\alpha(t')]^2} &= -\frac{1}{2} \left[e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \{\mathbf{J}_z, \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_+\}\} e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} + e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \{\mathbf{J}_z, \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_-\}\} e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \right] , \\ \frac{d^2\mathcal{V} [\alpha(t')]}{d[\alpha(t')]^2} &= -\frac{1}{2i} \left[e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \{\mathbf{J}_z, \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_+\}\} e^{-i\alpha(t')\mathbf{J}_z} - e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \{\mathbf{J}_z, \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_-\}\} e^{i\alpha(t')\mathbf{J}_z} \right] . \end{aligned}$$

Em seguida, calculamos os anti-comutadores

$$\begin{aligned} \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_+\} &= (2\mathbf{J}_z - \mathbf{1})\mathbf{J}_+ , \\ \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_-\} &= (2\mathbf{J}_z + \mathbf{1})\mathbf{J}_- , \\ \{\mathbf{J}_z, \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_+\}\} &= (2\mathbf{J}_z - \mathbf{1})^2 \mathbf{J}_+ , \\ \{\mathbf{J}_z, \{\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_-\}\} &= (2\mathbf{J}_z + \mathbf{1})^2 \mathbf{J}_- . \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados nas segundas derivadas, ficamos com

$$\frac{d^2\mathcal{U} [\alpha(t')]}{d[\alpha(t')]^2} = -\frac{1}{2} \left[(2\mathbf{J}_z - \mathbf{1})^2 (\mathcal{U} [\alpha(t')] + i\mathcal{V} [\alpha(t')]) + (2\mathbf{J}_z + \mathbf{1})^2 (\mathcal{U} [\alpha(t')] - i\mathcal{V} [\alpha(t')]) \right] , \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{d^2\mathcal{V} [\alpha(t')]}{d[\alpha(t')]^2} = -\frac{1}{2i} \left[(2\mathbf{J}_z - \mathbf{1})^2 (\mathcal{U} [\alpha(t')] + i\mathcal{V} [\alpha(t')]) - (2\mathbf{J}_z + \mathbf{1})^2 (\mathcal{U} [\alpha(t')] - i\mathcal{V} [\alpha(t')]) \right] . \quad (\text{D.14})$$

Finalmente, uma manipulação trivial nos leva ao sistema de equações escrito na forma ma-

tricial:

$$\frac{d^2}{d[\alpha(t')]^2} \begin{bmatrix} \mathcal{U}[\alpha(t')] \\ \mathcal{V}[\alpha(t')] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\mathbf{J}_z^2 - \mathbf{1} & 4i\mathbf{J}_z \\ -4i\mathbf{J}_z & -4\mathbf{J}_z^2 - \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}[\alpha(t')] \\ \mathcal{V}[\alpha(t')] \end{bmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

Fazendo a consideração

$$-\mathbf{M}^2 \equiv \begin{bmatrix} -4\mathbf{J}_z^2 - \mathbf{1} & 4i\mathbf{J}_z \\ -4i\mathbf{J}_z & -4\mathbf{J}_z^2 - \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.16})$$

um pouco de algebra nos permite determinar

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{J}_z & -i\mathbf{1} \\ i\mathbf{1} & 2\mathbf{J}_z \end{bmatrix}. \quad (\text{D.17})$$

De posse dessa matriz, podemos então escrever a solução

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}[\alpha(t')] \\ \mathcal{V}[\alpha(t')] \end{bmatrix} = \cos[\mathbf{M}\alpha(t')] \hat{\mathcal{O}}_1(0) + \sin[\mathbf{M}\alpha(t')] \hat{\mathcal{O}}_2(0), \quad (\text{D.18})$$

em que os vetores de operadores $\hat{\mathcal{O}}_1$ e $\hat{\mathcal{O}}_2$ são determinados pelas condições iniciais:

$$\hat{\mathcal{O}}_1(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{U}(0) \\ \mathcal{V}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x \\ \mathbf{J}_y \end{bmatrix}, \quad (\text{D.19})$$

$$\hat{\mathcal{O}}_2(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{U}'(0) \\ \mathcal{V}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_y \\ -\mathbf{J}_x \end{bmatrix}. \quad (\text{D.20})$$

Assim a solução para a Eq. (D.15) fica dada por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}[\alpha(t')] \\ \mathcal{V}[\alpha(t')] \end{bmatrix} = \cos[\mathbf{M}\alpha(t')] \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x \\ \mathbf{J}_y \end{bmatrix} + \sin[\mathbf{M}\alpha(t')] \begin{bmatrix} \mathbf{J}_y \\ -\mathbf{J}_x \end{bmatrix}. \quad (\text{D.21})$$

Como passo seguinte, procuraremos uma forma matricial simples para os operadores $\cos[\mathbf{M}\alpha(t')]$ e $\sin[\mathbf{M}\alpha(t')]$. Para tanto, passamos as funções trigonométricas para suas formas exponenciais, e calculamos as exponenciais complexas da matriz $\mathbf{M}$. Omitiremos aqui a apresentação do processo de exponenciação, apresentando diretamente seu resultado:

$$\cos[\mathbf{M}\alpha(t')] = \begin{bmatrix} \cos[2\mathbf{J}_z\alpha(t')] \cos[\mathbf{1}\alpha(t')] & i \sin[2\mathbf{J}_z\alpha(t')] \sin[\mathbf{1}\alpha(t')] \\ -i \sin[2\mathbf{J}_z\alpha(t')] \sin[\mathbf{1}\alpha(t')] & \cos[2\mathbf{J}_z\alpha(t')] \cos[\mathbf{1}\alpha(t')] \end{bmatrix}, \quad (\text{D.22})$$

$$\sin [M\alpha(t')] = \begin{bmatrix} \sin [2J_z\alpha(t')] \cos [\mathbf{1}\alpha(t')] & -i \cos [2J_z\alpha(t')] \sin [\mathbf{1}\alpha(t')] \\ i \cos [2J_z\alpha(t')] \sin [\mathbf{1}\alpha(t')] & \sin [2J_z\alpha(t')] \cos [\mathbf{1}\alpha(t')] \end{bmatrix}. \quad (\text{D.23})$$

Usando esses resultados na Eq. (D.21), efetuando os produtos de matrizes e manipulando adequadamente os termos, podemos escrever a igualdade

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}[\alpha(t')] \\ \mathcal{V}[\alpha(t')] \end{bmatrix} = e^{i\mathbf{1}\alpha(t')} \begin{bmatrix} \cos [2J_z\alpha(t')] \mathbf{J}_x + \sin [2J_z\alpha(t')] \mathbf{J}_y \\ -\sin [2J_z\alpha(t')] \mathbf{J}_x + \cos [2J_z\alpha(t')] \mathbf{J}_y \end{bmatrix} \quad (\text{D.24})$$

Isto encerra o primeiro passo de nossa divisão de tarefas que pode ser resumido na igualdade:

$$\mathcal{U}[\alpha(t')] = e^{i\mathbf{1}\alpha(t')} \{ \cos [2J_z\alpha(t')] \mathbf{J}_x + \sin [2J_z\alpha(t')] \mathbf{J}_y \}. \quad (\text{D.25})$$

Agora passamos a trabalhar com a aplicação dos operadores da Eq. (D.3), resultando em

$$\Xi(t') = e^{i\mathbf{1}\alpha(t')} \left\{ \cos [2J_z\alpha(t')] e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_x e^{-J_z\gamma(t')} + \sin [2J_z\alpha(t')] e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_y e^{-J_z\gamma(t')} \right\} \quad (\text{D.26})$$

Uma vez que $[\gamma(t'), J_z] = 0$, podemos fazer a seguinte expansão para os objetos da equação acima [36]:

$$e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_x e^{-J_z\gamma(t')} = \mathbf{J}_x + \gamma(t') [J_z, \mathbf{J}_x] + \frac{\gamma(t')^2}{2!} [J_z, [J_z, \mathbf{J}_x]] + \dots, \quad (\text{D.27})$$

$$e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_y e^{-J_z\gamma(t')} = \mathbf{J}_y + \gamma(t') [J_z, \mathbf{J}_y] + \frac{\gamma(t')^2}{2!} [J_z, [J_z, \mathbf{J}_y]] + \dots. \quad (\text{D.28})$$

O cálculo dos comutadores nos permite reconhecer as séries das funções trigonométricas hiperbólicas

$$e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_x e^{-J_z\gamma(t')} = \cosh [\gamma(t')] \mathbf{J}_x + i \sinh [\gamma(t')] \mathbf{J}_y, \quad (\text{D.29})$$

$$e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_y e^{-J_z\gamma(t')} = \cosh [\gamma(t')] \mathbf{J}_y - i \sinh [\gamma(t')] \mathbf{J}_x. \quad (\text{D.30})$$

É conveniente substituir as funções hiperbólicas por suas expressões exponenciais, resultando em

$$e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_x e^{-J_z\gamma(t')} = \frac{1}{2} \left[e^{\gamma(t')} \mathbf{J}_+ + e^{-\gamma(t')} \mathbf{J}_- \right], \quad (\text{D.31})$$

$$e^{J_z\gamma(t')} \mathbf{J}_y e^{-J_z\gamma(t')} = \frac{1}{2i} \left[e^{\gamma(t')} \mathbf{J}_+ - e^{-\gamma(t')} \mathbf{J}_- \right]. \quad (\text{D.32})$$

A substituição desses resultados na Eq. (D.26), após manipulações triviais, leva $\Xi(t')$ à seguinte forma:

$$\Xi(t') = \frac{e^{i\mathbf{1}\alpha(t')}}{2} \left[e^{\gamma(t')} e^{-2iJ_z\alpha(t')} \mathbf{J}_+ + e^{-\gamma(t')} e^{2iJ_z\alpha(t')} \mathbf{J}_- \right]. \quad (\text{D.33})$$

Concluindo assim a manipulação do operador $\Xi(t')$. É a representação dessa última equação que usamos para $\Xi(t')$ durante nossos cálculos no corpo da dissertação.

Apêndice E: Manipulações Matemáticas II

Nos cálculos que se seguem, apresentamos o procedimento que usamos para obter os operadores $e^{i\mathbf{H}_0 t_1} \mathbf{J}_\pm e^{-i\mathbf{H}_0 t_1}$ no caso em que $\mathbf{H}_0$ reproduz o hamiltoniano encontrado para a porta **C-NOT** da Eq. (3.32). Para as portas **T1**, **T2**, **Hadmark 1** e **Hadamard 2**, apenas listamos os resultados obtidos.

Veremos que é sempre possível obter a decomposição

$$\mathcal{J}_\pm = e^{i\mathbf{H}_0 t_1} \mathbf{J}_\pm e^{-i\mathbf{H}_0 t_1} = f_\pm(t_1) \mathbf{J}_\pm + g_\pm(t_1) \mathbf{J}'_\pm, \quad (\text{E.1})$$

em que $f_\pm(t_1)$ e $g_\pm(t_1)$ são *c-numbers*, normalmente funções oscilantes no tempo, e $\mathbf{J}'_\pm$ um operador constituído de somas das matrizes de Pauli de levantamento ou abaixamento de cada spin (em geral operadores *parecidos* com $\mathbf{J}_\pm$). A vantagem deste procedimento consiste em resultar na separação entre os operadores $\mathbf{J}_\pm$ e os detalhes particulares de cada porta, expressos no operador $\mathbf{J}'_\pm$. Vamos então determinar $f_\pm(t_1)$, $g_\pm(t_1)$ e $\mathbf{J}'_\pm$ para cada caso.

Porta C-NOT

Se nos valemos da escolha da Eq. (3.32) para o hamiltoniano da porta **C-NOT**, o operador procurado assume a forma

$$\mathcal{J}_\pm^{\text{C-NOT}} = e^{i\frac{\pi t_1}{4\tau}(\sigma_z^3 + \sigma_z^4 - \sigma_x^1 \sigma_x^2 - \sigma_y^1 \sigma_y^2)} \mathbf{J}_\pm e^{-i\frac{\pi t_1}{4\tau}(\sigma_z^3 + \sigma_z^4 - \sigma_x^1 \sigma_x^2 - \sigma_y^1 \sigma_y^2)}.$$

Por conveniência de notação, vamos utilizar as matrizes de Pauli de levantamento e abaixamento já definidas na Eq. (5.72), de tal forma que o operador $\mathbf{J}_\pm$ seja escrito como

$$\mathbf{J}_\pm = \sigma_\pm^1 + \sigma_\pm^2 + \sigma_\pm^3 + \sigma_\pm^4.$$

Ao utilizarmos tais definições, além das relações de comutação entre os operadores de spins diferentes, é possível escrever o operador procurado como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\pm^{\text{C-NOT}} = & e^{-i\frac{\pi t_1}{4\tau}(\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2)} \sigma_\pm^1 e^{i\frac{\pi t_1}{4\tau}(\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2)} + e^{-i\frac{\pi t_1}{4\tau}(\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2)} \sigma_\pm^2 e^{i\frac{\pi t_1}{4\tau}(\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2)} \\ & + e^{i\frac{\pi t_1}{4\tau} \sigma_z^3} \sigma_\pm^3 e^{-i\frac{\pi t_1}{4\tau} \sigma_z^3} + e^{i\frac{\pi t_1}{4\tau} \sigma_z^4} \sigma_\pm^4 e^{-i\frac{\pi t_1}{4\tau} \sigma_z^4}, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

e assim cada parcela pode ser calculada separadamente. É fácil mostrar que as duas últimas parcelas, correspondentes aos spins 3 e 4 (denotadas abaixo por $P_\pm^n(\alpha)$, com $n = 3, 4$ e $\alpha = \frac{\pi t_1}{4\tau}$), obedecem ao seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dP_\pm^n(\alpha)}{d\alpha} = \pm 2i P_\pm^n(\alpha) \quad \text{com } P_\pm^n(0) = \sigma_\pm^n,$$

cujas soluções são bem conhecidas e dadas por

$$\mathbf{P}_{\pm}^n(t_1) = e^{\pm i \frac{\pi t_1}{2\tau}} \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^n,$$

na qual já substituímos o valor definido de α . Por outro lado, as duas primeiras parcelas da Eq. (E.2) podem ser escritas genericamente como

$$\mathbf{Q}_{\pm}^{nm}(\alpha) = e^{-i\alpha(\boldsymbol{\sigma}_x^n \boldsymbol{\sigma}_x^m + \boldsymbol{\sigma}_y^n \boldsymbol{\sigma}_y^m)} \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^n e^{i\alpha(\boldsymbol{\sigma}_x^n \boldsymbol{\sigma}_x^m + \boldsymbol{\sigma}_y^n \boldsymbol{\sigma}_y^m)} \quad \text{com} \quad n \neq m.$$

Consequentemente, é simples verificar também que $\mathbf{Q}_{\pm}^{nm}(\alpha)$ obedece ao problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{Q}_{\pm}^{nm}(\alpha)}{d\alpha^2} &= -4 \mathbf{Q}_{\pm}^{nm}(\alpha) \quad \text{com} \quad \mathbf{Q}_{\pm}^{nm}(0) = \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^n \\ \text{e} \quad \frac{d \mathbf{Q}_{\pm}^{nm}(0)}{d\alpha} &= \pm 2i \boldsymbol{\sigma}_z^n \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^m, \end{aligned}$$

de solução também conhecida:

$$\mathbf{Q}_{\pm}^{nm}(t_1) = \pm i \boldsymbol{\sigma}_z^n \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^m \sin\left(\frac{\pi t_1}{2\tau}\right) + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^n \cos\left(\frac{\pi t_1}{2\tau}\right).$$

Assim, temos para $\mathcal{J}_{\pm}^{\text{C-NOT}}$, a igualdade

$$\mathcal{J}_{\pm}^{\text{C-NOT}} = \mathbf{Q}_{\pm}^{12}(t_1) + \mathbf{Q}_{\pm}^{21}(t_1) + \mathbf{P}_{\pm}^3(t_1) + \mathbf{P}_{\pm}^4(t_1).$$

Agora, com o auxílio das soluções encontradas para $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}$, chega-se a expressão final

$$\mathcal{J}_{\pm}^{\text{C-NOT}} = \cos\left(\frac{\pi t_1}{2\tau}\right) \mathbf{J}_{\pm} \pm i \sin\left(\frac{\pi t_1}{2\tau}\right) (\boldsymbol{\sigma}_z^1 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^2 + \boldsymbol{\sigma}_z^2 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^1 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^3 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4), \quad (\text{E.3})$$

a qual verifica a decomposição proposta na Eq. (E.1) com

$$f_{\pm}(t_1) = \cos\left(\frac{\pi t_1}{2\tau}\right), \quad (\text{E.4})$$

$$g_{\pm}(t_1) = \pm i \sin\left(\frac{\pi t_1}{2\tau}\right), \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{J}'_{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_z^1 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^2 + \boldsymbol{\sigma}_z^2 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^1 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^3 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4. \quad (\text{E.6})$$

Porta T1

A escolha do hamiltoniano (3.34) para o hamiltoniano $\mathbf{H}_0$, e a execução do procedimento ilustrado acima, faz com que o operador $\mathcal{J}_{\pm}^{\text{T1}}$ seja dado por

$$\mathcal{J}_{\pm}^{\text{T1}} = \mathbf{J}_{\pm} \mp 2ie^{\mp i \frac{\pi t_1}{8\tau}} \sin\left(\frac{\pi t_1}{8\tau}\right) (\boldsymbol{\sigma}_{\pm}^3 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4), \quad (\text{E.7})$$

verificando a decomposição da Eq. (E.1) com

$$f_{\pm}(t_1) = 1, \quad (\text{E.8})$$

$$g_{\pm}(t_1) = \mp 2ie^{\mp i \frac{\pi t_1}{8\tau}} \sin\left(\frac{\pi t_1}{8\tau}\right), \quad (\text{E.9})$$

$$\mathbf{J}'_{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^3 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4. \quad (\text{E.10})$$

Porta T2

A comparação entre os hamiltonianos das portas T_1 e T_2 , das Eq. (3.34) e (3.36), sugerem que o segundo pode ser obtido a partir do primeiro através da troca de índice $3 \rightarrow 2$. De fato, esta propriedade se verifica também entre os operadores $\mathcal{J}_{\pm}^{T_1}$ e $\mathcal{J}_{\pm}^{T_2}$. Portanto podemos rapidamente obter este último operador a partir da Eq. (E.7).

$$\mathcal{J}_{\pm}^{T_2} = \mathbf{J}_{\pm} \mp 2ie^{\mp i \frac{\pi t_1}{8\tau}} \sin\left(\frac{\pi t_1}{8\tau}\right) (\boldsymbol{\sigma}_{\pm}^3 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4). \quad (\text{E.11})$$

Conseqüentemente, a decomposição da Eq. (E.1) fica dada através dos objetos abaixo:

$$f_{\pm}(t_1) = 1, \quad (\text{E.12})$$

$$g_{\pm}(t_1) = \mp 2ie^{\mp i \frac{\pi t_1}{8\tau}} \sin\left(\frac{\pi t_1}{8\tau}\right), \quad (\text{E.13})$$

$$\mathbf{J}'_{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^2 + \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4. \quad (\text{E.14})$$

Porta Hadamard 1

Para a primeira porta de Hadamard, utilizamos o hamiltoniano (3.38) de modo a obter

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\pm}^{\text{H1}} &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] \mathbf{J}_{\pm} \\ &\quad \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \left(e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} - 1 \right) (\boldsymbol{\sigma}_z^1 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^3 + \boldsymbol{\sigma}_z^2 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4 + \boldsymbol{\sigma}_z^3 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^1 + \boldsymbol{\sigma}_z^4 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^2), \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

levando aos coeficientes da decomposição da Eq. (E.1) dados por

$$f_{\pm}(t_1) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right], \quad (\text{E.16})$$

$$g_{\pm}(t_1) = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \left(e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} - 1 \right), \quad (\text{E.17})$$

$$\mathbf{J}'_{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_z^1 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^3 + \boldsymbol{\sigma}_z^2 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^4 + \boldsymbol{\sigma}_z^3 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^1 + \boldsymbol{\sigma}_z^4 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^2. \quad (\text{E.18})$$

Porta Hadamard 2

Finalmente, para a segunda porta de Hadamard podemos também averiguar que a troca de índices $3 \leftrightarrow 2$ na equação do hamiltoniano (3.38), leva ao hamiltoniano da porta (3.40). Mais uma vez podemos usar essa mesma propriedade para obter $\mathcal{J}_{\pm}^{\text{H2}}$ a partir de $\mathcal{J}_{\pm}^{\text{H1}}$. O resultado final é:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\pm}^{\text{H2}} = & \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \mathbf{J}_{\pm} \\ & \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \left(e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} - 1 \right) (\sigma_z^1 \sigma_{\pm}^2 + \sigma_z^3 \sigma_{\pm}^4 + \sigma_z^2 \sigma_{\pm}^1 + \sigma_z^4 \sigma_{\pm}^3), \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

levando assim aos coeficientes da decomposição da Eq. (E.1) em

$$f_{\pm}(t_1) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right], \quad (\text{E.20})$$

$$g_{\pm}(t_1) = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \left(e^{\mp i \frac{\pi t_1}{\tau}} - 1 \right), \quad (\text{E.21})$$

$$\mathbf{J}'_{\pm} = \sigma_z^1 \sigma_{\pm}^2 + \sigma_z^3 \sigma_{\pm}^4 + \sigma_z^2 \sigma_{\pm}^1 + \sigma_z^4 \sigma_{\pm}^3. \quad (\text{E.22})$$

Apêndice F: Manipulações Matemáticas III

Neste apêndice, vamos mostrar o procedimento para se chegar na identidade matemática

$$e^{\pm i\alpha(t) \sum_{k=1}^m \sigma_z^k} = \sum_{n=0}^m (\pm i)^n \cos^{m-n} [\alpha(t)] \sin^n [\alpha(t)] \mathbf{Z}_{mn}, \quad (\text{F.1})$$

a qual utilizamos para eliminar o operador $\mathbf{J}_z$ do expoente de $e^{\pm 2i\alpha(t)\mathbf{J}_z}$. Nesta, $\mathbf{Z}_{mn}$ representa o operador composto pela soma dos produtos n a n das m matrizes de Pauli σ_z^k , com $n \leq m$. Abaixo apresentamos alguns exemplos para m variando de 1 a 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11} &= \sigma_z^1 & \mathbf{Z}_{21} &= \sigma_z^1 + \sigma_z^2 & \mathbf{Z}_{31} &= \sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \sigma_z^3 \\ \mathbf{Z}_{22} &= \sigma_z^1 \sigma_z^2 & \mathbf{Z}_{32} &= \sigma_z^1 \sigma_z^2 + \sigma_z^1 \sigma_z^3 + \sigma_z^2 \sigma_z^3 \\ \mathbf{Z}_{33} &= \sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3 \end{aligned}$$

Além disso, definimos $\mathbf{Z}_{m0} = \mathbb{1}$ para todo m . Outros exemplos, referentes a $m = 4$, encontram-se nas Eqs. de (5.73) a (5.77).

Começamos deduzindo o caso particular mais simples ($m = 1$), já bem estabelecido na literatura

$$\begin{aligned} e^{\pm i\alpha(t)\sigma_z^1} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^j [\alpha(t)]^j [\sigma_z^1]^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^{2j} [\alpha(t)]^{2j} [\sigma_z^1]^{2j}}{(2j)!} + (\pm i)\sigma_z^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^{2j} [\alpha(t)]^{2j+1} [\sigma_z^1]^{2j}}{(2j+1)!}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Tendo em vista que $(\sigma_z^k)^{2j} = \mathbb{1}$ e $(\pm i)^{2j} = (-1)^j$, reconhecemos imediatamente as expansões em série de Taylor das funções cosseno e seno, respectivamente,

$$e^{\pm i\alpha(t)\sigma_z^1} = \mathbb{1} \cos \alpha(t) \pm i\sigma_z^1 \sin \alpha(t). \quad (\text{F.3})$$

A partir daí, resultados para mais spins podem ser facilmente obtidos:

$$\begin{aligned} e^{\pm i\alpha(t)(\sigma_z^1 + \sigma_z^2)} &= (\mathbb{1} \cos \alpha(t) \pm i\sigma_z^1 \sin \alpha(t)) (\mathbb{1} \cos \alpha(t) \pm i\sigma_z^2 \sin \alpha(t)) \\ &= \cos^2 \alpha(t) \mathbb{1} + (\pm i) \cos \alpha(t) \sin \alpha(t) (\sigma_z^1 + \sigma_z^2) + (\pm i)^2 \sin^2 \alpha(t) \sigma_z^1 \sigma_z^2, \end{aligned}$$

ou, na notação definida anteriormente

$$e^{\pm i\alpha(t)(\sigma_z^1 + \sigma_z^2)} = \cos^2 \alpha(t) \mathbf{Z}_{20} + (\pm i) \cos \alpha(t) \sin \alpha(t) \mathbf{Z}_{21} + (\pm i)^2 \sin^2 \alpha(t) \mathbf{Z}_{22}. \quad (\text{F.4})$$

Analogamente, podemos também obter

$$e^{\pm i\alpha(t)(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \sigma_z^3)} = \cos^3 \alpha(t) \mathbf{Z}_{30} + (\pm i) \cos^2 \alpha(t) \sin \alpha(t) \mathbf{Z}_{31} \\ + (\pm i)^2 \cos \alpha(t) \sin^2 \alpha(t) \mathbf{Z}_{32} + (\pm i)^3 \sin^3 \alpha(t) \mathbf{Z}_{33}, \quad (\text{F.5})$$

e assim sucessivamente para m 's superiores. Dessa forma, é simples generalizar os resultados encontrados acima para a identidade (F.1).

Apêndice G: *Brakets* com operadores de deslocamento

A operação de traço parcial sobre o ambiente nos comutadores das Eq. (5.92) e (5.93) dá origem aos valores médios abaixo, conforme apresentado nas Eqs. (5.97) e (5.98),

$$\langle \{0\} | e^{\pm\gamma(t_1)} | \{0\} \rangle \quad \text{primeira ordem ,} \quad (\text{G.1})$$

$$\langle \{0\} | e^{\pm\gamma(t_1)} e^{\mp\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle \quad \text{segunda ordem ,} \quad (\text{G.2})$$

$$\langle \{0\} | e^{\pm\gamma(t_1)} e^{\pm\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle \quad \text{segunda ordem .} \quad (\text{G.3})$$

Neste apêndice vamos realizar o cálculo dessas expressões, explicitando sua dependência com o parâmetro de acoplamento λ . Felizmente é simples calcular estes objetos, já que é possível escrever os operadores associados ao banho como operadores descolamento [38]. A seguir, ilustramos o procedimento que usamos para calcular todos os valores médios de primeira e segunda ordens.

- Primeira ordem

$$\begin{aligned} \langle \{0\} | e^{\pm\gamma(t_1)} | \{0\} \rangle &= \prod_n \langle 0 | e^{\pm [f_n(t_1) \mathbf{a}_n^\dagger - f_n^*(t_1) \mathbf{a}_n]} | 0 \rangle_n = \prod_n \langle 0 | \hat{D}(\pm f_n(t_1)) | 0 \rangle_n \\ &= \prod_n \langle 0 | \pm f_n(t_1) \rangle_n = \prod_n e^{-\frac{1}{2} |\pm f_n(t_1)|^2}, \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

na qual utilizamos, na última igualdade, a relação de ortogonalidade para os estados coerentes

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*}. \quad (\text{G.5})$$

Substituindo a fórmula conhecida para $f_n(t)$ da Eq. (5.70) em (G.4), é simples concluir que

$$\langle \{0\} | e^{\pm\gamma(t_1)} | \{0\} \rangle = \prod_n e^{-\frac{\lambda^2 g_n^2}{\omega_n^2} [1 - \cos(\omega_n t_1)]}. \quad (\text{G.6})$$

- Segunda ordem

Embora o procedimento seja praticamente o mesmo para o cálculo dos valores médios que aparecem no integrando da primeira ordem, vamos detalhar o procedimento usado para os

de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
\langle \{0\} | e^{-\gamma(t_1)} e^{\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle &= \prod_n \langle 0 | e^{-f_n(t_1) \mathbf{a}_n^\dagger + f_n^*(t_1) \mathbf{a}_n} e^{f_n(t_2) \mathbf{a}_n^\dagger - f_n^*(t_2) \mathbf{a}_n} | 0 \rangle_n \\
&= \prod_n \langle 0 | \hat{D}(-f_n(t_1)) \hat{D}(f_n(t_2)) | 0 \rangle_n \\
&= \prod_n e^{\frac{1}{2}[-f_n(t_1)f_n^*(t_2) + f_n^*(t_1)f_n(t_2)]} \langle 0 | \hat{D}(-f_n(t_1) + f_n(t_2)) | 0 \rangle_n \\
&= \prod_n e^{\frac{1}{2}[-f_n(t_1)f_n^*(t_2) + f_n^*(t_1)f_n(t_2)]} \langle 0 | -f_n(t_1) + f_n(t_2) \rangle_n \\
&= \prod_n e^{\frac{1}{2}[-f_n(t_1)f_n^*(t_2) + f_n^*(t_1)f_n(t_2) - |-f_n(t_1) + f_n(t_2)|^2]} . \tag{G.7}
\end{aligned}$$

Note que além da propriedade (G.5), também recorremos a

$$\hat{D}(\theta) \hat{D}(\theta') = \hat{D}(\theta + \theta') e^{\frac{1}{2}(\theta\theta'^* - \theta^*\theta')} . \tag{G.8}$$

O mesmo procedimento leva também às identidades abaixo:

$$\begin{aligned}
\langle \{0\} | e^{\mp\gamma(t_1)} e^{\pm\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle &= \prod_n e^{-\frac{\lambda^2 g_n^2}{\omega_n^2} \{1 - \cos[\omega_n(t_1 - t_2)]\}} \\
&\quad \times e^{-\frac{i\lambda^2 g_n^2}{\omega_n^2} \{\sin(\omega_n t_2) - \sin(\omega_n t_1) + \sin[\omega_n(t_1 - t_2)]\}} , \tag{G.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \{0\} | e^{\pm\gamma(t_1)} e^{\pm\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle &= \prod_n e^{-\frac{\lambda^2 g_n^2}{\omega_n^2} \{3 - 2\cos(\omega_n t_1) - 2\cos(\omega_n t_2) + \cos[\omega_n(t_1 - t_2)]\}} \\
&\quad \times e^{-\frac{i\lambda^2 g_n^2}{\omega_n^2} \{\sin(\omega_n t_1) - \sin(\omega_n t_2) - \sin[\omega_n(t_1 - t_2)]\}} . \tag{G.10}
\end{aligned}$$

Os resultados obtidos para os valores médios de primeira e segunda ordem revelam a ocorrência de uma parte oscilante em λ (exponenciais complexas nos termos de segunda ordem), e um decaimento exponencial em λ (exponencial real presente tanto na primeira quanto na segunda ordem). Nos certificamos que o argumento das exponenciais reais são sempre negativos, já que se tratam do produto do fator negativo $-\frac{\lambda^2 g_n^2}{\omega_n^2}$ pelas funções positivas

$$1 - \cos(\omega_n t_1) \geq 0 ,$$

$$1 - \cos[\omega_n(t_1 - t_2)] \geq 0 ,$$

$$3 - 2\cos(\omega_n t_1) - 2\cos(\omega_n t_2) + \cos[\omega_n(t_1 - t_2)] \geq 0 .$$

Abaixo, simplifcadamente, apresentamos a estrutura de todos os resultados obtidos:

$$\prod_n e^{-\lambda^2 \mathcal{P}(g_n, \omega_n, t, t_1, t_2)} e^{-i\lambda^2 \mathcal{R}(g_n, \omega_n, t, t_1, t_2)} . \tag{G.11}$$

Aqui a função $\mathcal{P}$ é oscilante no tempo, real e positiva (ou igual a zero em conjuntos de medida nula); já a função $\mathcal{R}$ é oscilante no tempo e real para os valores médios de segunda ordem (e nula para os de primeira ordem). Nestas condições, fica claro que os valores médios apresentam oscilações rapidamente amortecidas no parâmetro λ , e portanto tendem a zero para acoplamentos fortes.

Vamos finalizar este apêndice com um breve comentário relativo a Eq. (5.98). Sem manipulações matemáticas adicionais, a operação do traço parcial sobre o ambiente no comutador duplo é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A ([\mathbf{H}_I(t_1), [\mathbf{H}_I(t_2), \boldsymbol{\varrho}(0)]]) = & \\ \frac{\epsilon^2}{4} e^{i[\alpha(t_1)+\alpha(t_2)]} \sum_{a,b,j,l=1}^2 \sum_{n,q=0}^4 \mu_n^{s(a)}(t_1) \mu_q^{s(j)}(t_2) V_{ab}(t_1) V_{jl}(t_2) & \\ \times \left\{ \langle \{0\} | e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl} \boldsymbol{\varrho}^{sis}(0)] \right. & \\ \left. - \langle \{0\} | e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} | \{0\} \rangle [\mathbf{Z}_{4n} \mathbf{O}_{ab}, \boldsymbol{\varrho}^{sis}(0) \mathbf{Z}_{4q} \mathbf{O}_{jl}] \right\}, & \quad (\text{G.12}) \end{aligned}$$

na qual o segundo termo mostra-se distinto do lançado na Eq. (5.98). Entretanto, é simples mostrar que ambas as expressões são equivalentes. Tendo em mãos os resultados obtidos neste apêndice, vamos partir do valor médio da equação acima para mostrar que este é o mesmo que aparece na Eq. (5.98).

Inicialmente, dada a anti-hermiticidade do operador $\gamma(t)$, é verdade que

$$\langle \{0\} | e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} | \{0\} \rangle = \langle \{0\} | e^{s(a)\gamma(t_1)} e^{s(j)\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle^* .$$

Ao observarmos as Eqs. (G.9) e (G.10), constatamos que o valor médio não se altera com a mudança simultânea dos sinais das exponenciais. Portanto

$$\langle \{0\} | e^{s(a)\gamma(t_1)} e^{s(j)\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle^* = \langle \{0\} | e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle^* ,$$

concluindo assim que

$$\langle \{0\} | e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} | \{0\} \rangle = \langle \{0\} | e^{\bar{s}(a)\gamma(t_1)} e^{\bar{s}(j)\gamma(t_2)} | \{0\} \rangle^* , \quad (\text{G.13})$$

como queríamos mostrar.