**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Diego Alejandro Carvajal Jara

**A extensão do modelo estocástico ‘Raise and Peel’ com
absorção controlada**

São Carlos

2017

Diego Alejandro Carvajal Jara

**A extensão do modelo estocástico ‘Raise and Peel’ com
absorção controlada**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Francisco Castilho Alcaraz

Versão original

**São Carlos
2017**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Carvajal Jara, Diego Alejandro

A extensão do modelo estocástico 'Raise and Peel' com absorção controlada / Diego Alejandro Carvajal Jara; orientador Francisco Castilho Alcaraz -- São Carlos, 2017.
158 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Estados Multi-absorventes. 2. Estados quase-estacionários. 3. KPZ. 4. Celulas de Jordan. 5. Transição de rugosidade. I. Alcaraz, Francisco Castilho, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Diego Alejandro Carvajal Jara

Tese apresentada ao Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de Doutor
em Ciências. Área de Concentração:
Física Básica.

Aprovado(a) em: 19/05/2017

Comissão Julgadora

Dr(a). Francisco Castilho Alcaraz

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Mario Jose de Oliveira

Instituição: (IF/USP)

Dr(a). Eric de Castro e Andrade

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Leonardo Paulo Maia

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Salomon Sylvain Mizrahi

Instituição: (UFSCar/São Carlos)

Este trabalho é dedicado à minha família e à minha namorada por seu apoio incondicional, pois a eles devo minha formação pessoal e profissional.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Francisco Castilho Alcaraz, pela orientação, discussões e sugestões, e pela grande paciência que teve ao me orientar. Ao professor Dr. Vladimir Rittenberg pelas discussões e sugestões de bibliografia que foram bastante úteis para o entendimento de alguns resultados aqui apresentados.

À minha namorada Aida Milena Alvarez, por seu carinho imenso, sua compreensão e apoio incondicional, e sobre tudo por suas palavras de conforto em momentos cruciais durante desenvolvimento deste projeto. Aos meus colegas Andres, Oscar e Michal pela inestimável ajuda com a minha estadia nos últimos meses em São Carlos. Aos meus colegas da USP por tornarem muito amena minha estadia em São Carlos, especialmente ao Andre, Romain, Florent, Michal, Wilson, Oscar, João e Julian. À Yvone Aparecida por sua amabilidade, colaboração e conselhos no decorrer deste doutorado. À Gilmar Bertolote por sua rápida e indiscutível ajuda a nível computacional.

À minha mãe Maria Elena, meu irmão Santiago, minhas tias Herminda e Blanca, e toda minha família por seu apoio econômico, moral, sentimental em cada etapa da minha vida pois em grande parte sou quem sou pela ajuda deles. Gostaria de agradecer, finalmente, às agências de fomento CNPq e Capes pela sustentação financeira durante quatro anos deste projeto, e à nuvem da USP pois a metade dos cálculos aqui apresentados foram realizados neste entorno virtual.

Muito Obrigado.

*“Compreender as coisas que nos rodeiam é a melhor preparação
para compreender o que há mais além.”*
Hypatia de Alexandria

RESUMO

CARVAJAL JARA, D.A. **A extensão do modelo estocástico ‘Raise and Peel’ com absorção controlada.** 2017. 158p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

O modelo estocástico Raise and Peel é estudado nesta tese. Para isto é utilizado o método de simulação por Monte Carlo junto com os métodos de diagonalização exata e numérica do operador de Liouville. Este modelo estocástico é um modelo de crescimento unidimensional com dois parâmetros livres. Um parâmetro de absorção local e um parâmetro de dessorção não local. Em função destes dois parâmetros se observa um rico diagrama de fase, apresentando regiões massivas, regiões criticamente auto-organizadas, estados quase-estacionários e transições a múltiplos estados absorventes. O principal resultado deste trabalho é ressaltar a existência de células de Jordan no operador de Liouville. Células de Jordan que crescem com o tamanho do sistema e portanto no limite termodinâmico a dinâmica assintótica pode ser mascarada. A nível numérico estas células de Jordan podem levar a errôneas interpretações de fases críticas quando são na realidade fases massivas ou vice-versa. Portanto dependendo da condição inicial observa-se que a presença de células de Jordan pode levar à determinação errônea de expoentes críticos e a observações de tempos de decaimentos excessivamente grandes. Tudo isto ressalta a necessidade de se determinar os expoentes críticos e os tempos de decaimento por diversos métodos, sempre que for possível, além de se controlar o comportamento destas quantidades considerando a evolução do modelo com diferentes condições iniciais. Entre outros resultados que obtivemos observamos a existência de estados quase-estacionários com tempos de vida que crescem muito mais rápido que uma lei de potencia do tamanho do sistema. Encontramos o expoente crítico dinâmico $z=1$, no caso da transição a estados multi-absorventes. Este resultado ocorreu tanto nos casos sem absorção como nos casos sem dessorção. O modelo exibe também uma fase rugosa com um expoente de rugosidade próximo de zero quando a taxa de absorção é maior que a taxa dessorção. E finalmente observamos que o modelo estudado em condições periódicas de contorno pode ser enxergado como um modelo KPZ em 1+1 dimensões, sujeito a dois tipos de perturbações. Uma das perturbações sendo relevante e a outra irrelevante.

Palavras-chave: Estados Multi-absorventes. Estados quase-estacionários. KPZ. Células de Jordan. Transição de rugosidade.

ABSTRACT

CARVAJAL JARA, D.A. **The extension of the stochastic Raise and Peel model with controlled absorption.** 2017. 158p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

The stochastic model Raise and Peel is studied in this thesis. we use the Monte Carlo simulation method together with the exact and numerical diagonalization methods of the Liouville operator. This stochastic model is a one-dimensional growth model with two free parameters. A local absorption parameter and a non-local desorption one. As a function of these two parameters, a rich phase diagram is observed, presenting massive regions, critically self-organized regions, quasi-stationary states and transitions to multiple absorbing states. The main result of this work is to emphasize the existence of Jordan cells in the Liouville operator. Jordan cells that grow with the size of the system and therefore in the thermodynamic limit the asymptotic dynamics can be masked. At the numerical level, these Jordan cells can lead to erroneous interpretations of massive phases as being massless critical ones or vice versa. Therefore depending on the initial condition, it is observed that the presence of Jordan cells can lead to the erroneous determination of critical exponents and produce excessively large lifetimes. Due to these effects, it is necessary to determine the critical exponents and the lifetimes by several distinct methods whenever possible, besides controlling the behavior of these quantities, by considering the evolution with different initial conditions. Among other results, we found the existence of quasi-stationary states with lifetimes that grow much faster than a power law of the system's size. We obtained a dynamic critical exponent $z = 1$ in the transition to multi-absorbent states in both cases without absorption or desorption. The model also shows a rough phase with a roughness exponent close to zero when the absorption rate is higher than the desorption rate. Finally, we observed that the model studied under periodic boundary conditions, can be seen as a KPZ model in $1 + 1$ dimensions, under the effect of two perturbations. One of them being relevant and the other one irrelevant.

Keywords: Multiple absorbing states. Quasi-stationary states. KPZ. Jordan Cells. Roughness transition.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RPM	Raise and Peel Model
PARPM	Peak Adjusted Raise and Peel Model
SOC	Self-Organised Criticality
ARW	Activated Random Walkers
CTTP	Conserved Threshold Transfer Process
CLG	Conserved Lattice Gas
QSD	Quasistationary Probability Distribution
TASEP	Totally Asymmetric Exclusion Process
ASEP	Asymmetric Exclusion Process
KPZ	Kardar–Parisi–Zhang

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{L}$	Operador de Liouville.
h	Altura.
w	Largura ou Rugosidade da superfície.
L	Tamanho da rede.
t	Tempo.
E_i	i-ésimo autovalor de energia.
H_Q	Hamiltoniana Quântica.
$\xi_{\vec{r}} = \xi_r = \xi_{\parallel}$	Comprimento de correlação espacial.
$\xi_{\perp}$	Comprimento de correlação vertical. Rugosidade. Flutuação máxima da altura.
ξ_t	Comprimento de correlação temporal.
α	Expoente de rugosidade.
β	Expoente de crescimento.
$z = \nu_t/\nu_r$	Expoente Dinâmico.
λ	Parâmetro de controle.
λ_c	Valor critico do parâmetro de controle. Neste valor a criticalidade acontece.
ρ	Parâmetro de ordem da transição absorvente.
τ_s	Expoente do tamanho da avalanche.
τ_t	Expoente da duração da avalanche.
D	Dimensão da avalanche.
$\propto$	Proporcional.
$\sim$	Assintoticamente proporcional.
$\simeq$	Assintoticamente igual.

$\equiv$ Definido como.

$\mathcal{O}(x^n)$ Da ordem de x^n .

$o(x^n)$ Termos de ordem superior à x^n .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Fase massiva e não massiva	23
1.2	Auto-similaridade e auto-afinidade	25
1.3	Rugosidade	27
1.4	Estados absorventes	28
1.5	Criticalidade auto-organizada	33
1.6	Escalonamento dinâmico	36
1.6.1	Fase rugosa $\alpha > 0$	36
1.6.2	Transição rugosa $\alpha = 0$	38
1.6.3	Fase suave	39
1.7	Estados Quase-estacionários	40
1.8	Blocos de Jordan	40
2	EXTENSÃO DO MODELO RAISE AND PEEL	43
2.1	Invariância Conforme	43
2.2	Origens	47
2.3	Modelo	51
2.4	Interpretações alternativas	55
3	REGIÃO MASSIVA ($U < 1$)	57
3.1	O problema	57
3.2	Modelo raise and peel sem absorção	61
3.3	Como determinar o expoente crítico dinâmico z ?	66
3.4	Barreira de Schwoebel	68
3.5	Região massiva com $u \neq 0$	70
3.6	Discussão	74
4	REGIÃO CRITICAMENTE AUTO-ORGANIZADA ($u \geq 1$)	77
4.1	Espectro do PARPM	77
4.2	<i>Critical initial slip</i>	79
4.3	Determinando z com confiança	84
4.4	Rugosidade no PARPM	90
4.5	Criticalidade Auto-Organizada	97
4.6	Fractalidade e parâmetro de ordem	102
4.6.1	Fractalidade	103
4.6.2	Parâmetro de ordem	107

4.6.3	Altura do planalto	110
4.7	Discussão	113
5	ESTADOS QUASE-ESTACIONÁRIOS E MÚLTIPLOS ESTADOS	
	ABSORVENTES	115
5.1	Dilatação Temporal	115
5.1.1	Evidência	115
5.1.2	Explicação	121
5.2	Campo médio para n_{∞}	124
5.3	Estados quase-estacionários	126
5.3.1	Raise and peel invariante conforme	128
5.3.2	Raise and peel sem dessorção e sua relação com o modelo KPZ	135
5.3.3	Resultados Gerais	142
5.4	Discussão	144
6	CONCLUSÃO	147
	REFERÊNCIAS	149
	APÊNDICES	155
	APÊNDICE A – DISTRIBUIÇÃO DA RUGOSIDADE	157

1 INTRODUÇÃO

Gostaríamos de início mencionar que parte substancial dos resultados originais nesta tese aparecem nos trabalhos:

- a) Jara, D. A. C. and Alcaraz, F. C. *Quasi-stationary states in nonlocal stochastic growth models with infinitely many absorbing states*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2017, P0117, (em impressão), arXiv:1701.04637.
- b) Jara, D. A. C, Alcaraz, F. C. and Rittenberg, V. *Roughness transition and phase diagram of the raise and peel model* (em preparação) 2017.

Nesta tese estudaremos um modelo estocástico descrito por uma equação mestra do tipo

$$\partial_t |P_t\rangle = -\mathcal{L} |P_t\rangle, \quad (1.1)$$

onde o operador de Liouville $\mathcal{L}$ é independente do tempo e cujo espaço de configurações onde o mesmo é definido cresce com o tamanho do sistema L . Idealmente a solução deste tipo de equação é dada por

$$|P_t\rangle = \exp(-\mathcal{L} t) |P_0\rangle, \quad (1.2)$$

porém como em nosso sistema o operador de Liouville cresce fatorialmente com L , o tratamento matricial do operador de Liouville ($\mathcal{L}$) fica restrito à redes pequenas ($L < 30$). Por tal motivo um estudo termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) de nosso sistema foi realizado com o método de simulação de Monte Carlo, o que nos permitiu trabalharmos com redes de tamanho de até 10^6 sítios. Utilizamos métodos de diagonalização numérica (métodos exatos) apenas para redes pequenas. Consequentemente muitos dos resultados apresentados neste trabalho ainda precisam de uma verificação analítica.

O modelo estocástico aqui estudado tem sua origem na cadeia quântica de spins-1/2 chamada de XXZ, cuja Hamiltoniana pode ser escrita em termos dos geradores da álgebra de Temperley-Lieb. (1-3) Esta álgebra tem uma representação pictórica em termos de loops que pode ser reinterpretada como um modelo de crescimento de superfície sobre uma rede unidimensional de tamanho L . Desta forma foi possível obter o primeiro modelo estocástico invariante conforme cuja carga central $c = 0$. No presente trabalho o modelo original invariante conforme foi estendido de forma a termos dois parâmetros e procurando-se manter a mesma interpretação pictórica herdada da álgebra de Temperley-Lieb. Em função destes dois parâmetros nosso principal objetivo nesta tese será a caracterização do diagrama de fase deste modelo, esperando que o mesmo seja rico, dadas as diferentes facetas da álgebra de Temperley-Lieb. (4)

O modelo estocástico aqui estudado também admite outra interpretação. O mesmo pode ser visto como um modelo estocástico para fenômenos de transporte com uma

Figura 1 – Diagrama de fases esquemático da extensão do modelo *Raise and Peel* com parâmetros $u \geq 0$ e $p \geq 0$ obtido na presente tese. O ponto $(u = \infty, p = 4)$ incluído é para o caso do modelo estar com condições periódicas de contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor

dinâmica não local. (5) Porém, a principal interpretação utilizada nesta tese será a de um modelo estocástico de crescimento. Com esta interpretação e para as várias regiões de valores dois parâmetros (u, p) do modelo observamos (ver figura 1):

- a) Uma linha em que o modelo estocástico é invariante conforme $(u = 1)$.
- b) Uma fase rugosa (região *II*).
- c) Fases em que o modelo é auto-organizado (regiões *II* e *III*).
- d) Estados quase-estacionários (região *b*).
- e) Múltiplos estados absorventes (regiões *b* e *c*).
- f) Uma fase massiva não trivial (região *I*).
- g) Blocos de Jordan no operador de evolução que crescem com o tamanho do sistema $(u = 0$ e $u = \infty)$.

Finalmente observamos que ao utilizar-se condições periódicas de contorno o modelo estudado pode ser enxergado como uma modificação do “*single step model*”, (6,7) modelo que pertence à classe de universalidade *KPZ* em 1+1 dimensões. (7,8) Esta classe é emblemática para o problema de crescimento de superfícies, tendo importância similar ao do modelo de Ising em sistemas termodinâmicos de equilíbrio. Observamos que um dos parâmetros de nosso modelo é relevante o que se traduz como uma modificação da classe de universalidade quando este parâmetro é modificado. O outro parâmetro mantém

a classe de universalidade, mas acima de certo valor introduz um estado quase-estacionário e múltiplos estados absorventes.

Em continuação faremos uma breve introdução aos conceitos mais importantes utilizados ao longo desta tese.

1.1 Fase massiva e não massiva

Arranjando os autovalores (E_i) do operador de Liouville ($\mathcal{L}$) em forma crescente de valores $E_0 < E_1 < E_2 \dots$, diremos que o sistema não tem massa sempre que no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) se cumpra

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (E_1 - E_0) \rightarrow 0.$$

Caso contrário diremos que o sistema é massivo. Esta terminologia é emprestada da teoria quântica de campos (veja por exemplo Di Francesco. (9)). Por exemplo, em teoria de campos o modelo de bósons livres em duas dimensões e no espaço Euclidiano* tem como ação

$$S = \frac{1}{2}g \int d^2x \left[\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi^2 \right].$$

No limite $r \gg \frac{1}{m}$, o propagador $K(x, y) = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle$ se comporta como

$$K(r) \sim e^{-mr}, \quad (1.3)$$

com $r = |x - y|$. Comparemos esta expressão com seu equivalente em mecânica estatística: a função de correlação. Por exemplo, tomemos o caso do modelo de Ising em que calculamos a função correlação entre dois spins numa rede bidimensional, spins estes nos pontos (i, l) e $(i + k, l)$, tendo portanto uma separação $\tau = k \cdot a$, sendo a o espaçamento da rede. A função de correlação será dada por

$$\langle \sigma_{i+k, l} \sigma_{i, l} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum \sigma_{i+k, l} \sigma_{i, l} e^{-\beta H_{Ising}}.$$

Ao utilizarmos condições de contorno periódicas $\sigma_{i, l} = \sigma_{i+K, l}$ e $\sigma_{i, l} = \sigma_{i, l+L}$, e o método da matriz transferência obtemos

$$\langle \sigma_{i+k, l} \sigma_{i, l} \rangle = \frac{Tr \left(T^{K-k} \hat{\sigma}_l T^k \hat{\sigma}_l \right)}{Tr \left(T^K \right)},$$

onde a matriz de transferência T é definida de forma a nos dar a função de partição $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_{i, j}\}} e^{-\beta H_{Ising}} = \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K} \langle \mu_1 | T | \mu_2 \rangle \langle \mu_2 | T | \mu_3 \rangle \dots \langle \mu_K | T | \mu_1 \rangle = Tr \left(T^K \right).$$

*Para trabalhar com o formalismo Euclidiano é suficiente mudar-se $t \rightarrow -i\tau$ passando assim de uma métrica Minkowskiana para uma Euclidiana.

Os kets $\{\mu_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, K$), nos dão as configurações nas linhas, i.e. $|\mu_i\rangle = |\sigma_{i,1}\rangle \otimes |\sigma_{i,2}\rangle \otimes \dots \otimes |\sigma_{i,L}\rangle$ e $\hat{\sigma}_l |\mu_i\rangle = \sigma_{i,l} |\mu_i\rangle$. Finalmente para fazer uma analogia com o operador de evolução da mecânica quântica definimos uma Hamiltoniana quântica (H_Q) por meio de

$$T = e^{-aH_Q}. \quad (1.4)$$

Com esta definição e trabalhando na base de autovetores $H_Q |n\rangle = E_n |n\rangle$, onde $E_0 < E_1 < \dots$, podemos escrever a função de correlação $\langle \sigma_{i+k,l} \sigma_{i,l} \rangle$ no limite termodinâmico como

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \sigma_{i+k,l} \sigma_{i,l} \rangle &\simeq e^{kaE_0} \langle 0 | \hat{\sigma}_l e^{-akH_Q} \hat{\sigma}_l | 0 \rangle \\ &= e^{kaE_0} \sum_n \langle 0 | \hat{\sigma}_l e^{-akH_Q} | n \rangle \langle n | \hat{\sigma}_l | 0 \rangle \\ &= |\langle 0 | \hat{\sigma}_l | 0 \rangle|^2 + e^{-\tau(E_1 - E_0)} |\langle 0 | \hat{\sigma}_l | 1 \rangle|^2 + \dots \end{aligned}$$

Dado que sempre é possível definir-se $\sigma_{i,l} \rightarrow \sigma_{i,l} - \langle \sigma_{i,l} \rangle$ podemos tomar $\langle \sigma_{i,l} \rangle = \langle 0 | \hat{\sigma}_l | 0 \rangle = 0$, implicando que para $\tau \gg 1$:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \langle \sigma_{i+m,l} \sigma_{i,l} \rangle \simeq e^{-\tau(E_1 - E_0)} |\langle 0 | \hat{\sigma}_l | 1 \rangle|^2.$$

Comparando-se esta expressão com a equação 1.3 e tomando r ao longo do eixo do tempo encontramos a correspondência

$$(E_1 - E_0) \longleftrightarrow m.$$

Além disto podemos definir o tempo de correlação $\xi_t \sim (E_1 - E_0)^{-1}$, que próximo a um ponto crítico diverge como $\xi_t \sim |\Delta|^{-\nu}$ com $\Delta = (T - T_c)$. Isto implica que na criticalidade o sistema não possui masa (massless) ou equivalentemente que não possua gap de energia ($E_1 - E_0$) (gapless). Adicionalmente para o modelo de Ising estudado, poderíamos definir um novo expoente z que relaciona o comprimento de correlação espacial $\xi_{\vec{r}}$ com o temporal ξ_t como:

$$\xi_t \sim (\xi_{\vec{r}})^z.$$

Se levamos em conta a simetria de rotação do modelo de Ising e o fato de que o eixo escolhido para o tempo foi arbitrário então para este caso teremos $z = 1$. Tudo isto claramente relaciona-se com a equação mestra se, caso na equação de Schrödinger fizermos a mudança $t \rightarrow -i\tau$, identificando portanto $\mathcal{L} \longleftrightarrow H_Q$.

Informações adicionais às correspondências entre sistemas estatísticos e sistemas quânticos podem ser encontrados por exemplo, nas referências (9–11), e em especial nas tabelas 1.8 e 1.9 da referência. (10)

1.2 Auto-similaridade e auto-afinidade

O conceito de auto-similaridade utilizado nos modelos de crescimento é o mesmo que aparece em modelos de Ising, de percolação, entre outros. “Um objeto é auto-similar quando o mesmo se parece em todas as escalas de comprimento”. (12) Baseados nesta definição podemos classificar um objeto auto-similar como trivial ou não trivial. Para isto fazemos uso do comprimento de correlação ξ definindo:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \xi(L) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{trivial} \\ \infty & \text{não-trivial} \end{cases}.$$

Por exemplo, no modelo de Ising às temperaturas $T = 0, \infty$ e o campo magnético $B = 0$, falaríamos de uma estrutura trivialmente auto-similar pois ou todos os spins apontam na mesma direção ($T = 0$) ou apontam aleatoriamente para acima ou para abaixo ($T = \infty$) levando a uma correlação nula entre vizinhos. Porém, o caso da estrutura auto-similar que acontece no ponto crítico $(T, B) = (T_c, B_c)$ é não trivial, apresentando flutuações em todas as escalas, tal como se ilustra na figura 2 onde a representação de Kadanoff de

Figura 2 – Representação de gota aninhada de Kadanoff para o modelo de Ising. Os clusters brancos e pretos representam aglomerações que apontam para acima (up) e para baixo (down).

Fonte: HENKEL. (10)

gotas aninhadas mostra que numa escala grande da figura não permite reconhecer uma escala característica. Este comportamento não-trivial de auto-similaridade é característico de uma transição de fase de segunda ordem, onde o comprimento de correlação diverge e surgem as estruturas fractais.

Um fractal é uma estrutura geométrica auto-similar que se parece em todas as escalas de comprimento. Não existe uma maneira a priori de identificar uma escala característica, nem é possível determinar em qual escala um fractal está sendo visualizado. (12, tradução nossa)

Figura 3 – Re-escalamento de uma função auto-afim em uma variável.

Fonte: BARABÁSI; STANLEY. (6)

Levando estes mesmos conceitos às superfícies diremos que: uma superfície $h(\vec{x})$ é auto-similar, no limite termodinâmico, se ao re-escalar a base da superfície como $\vec{x} \rightarrow b \cdot \vec{x}$ e a altura como $h \rightarrow b \cdot h$ a superfície resultante é similar à original. Se o fator de escalonamento entre a base e a altura são diferentes falaremos de superfícies auto-afins. Neste caso teríamos que $\vec{x} \rightarrow b \cdot \vec{x}$ e $h \rightarrow b^H \cdot h$ levam à uma superfície similar à original.* (13) Um exemplo de superfície auto-afim é apresentada na figura 3, sendo este o análogo da representação de gotas aninhadas de Kadanoff para uma superfície que cresce sobre uma rede unidimensional.

Para finalizar esta secção é importante esclarecer que quando se trabalha com modelos na rede com tamanho finito L , estritamente falando, não existe uma superfície que seja invariante frente à qualquer transformação $\vec{x} \rightarrow b \cdot \vec{x}$ e $h \rightarrow b^H \cdot h$, pois o espaçamento da rede a e o tamanho da rede L restringem o comprimento de correlação $a \leq \xi_r \leq L$ assim impondo limites para o parâmetro de escala b no qual a invariância se mantém. Assim, sempre que se trabalhe com estes sistemas finitos o tamanho lateral das janelas (l), nas quais poderá ser observada a invariância de escala, fica restrito a $a \ll l \ll \min(L, \xi_r)$. Outro ponto a realçar-se encontra-se exemplificado nas figuras 2 e 3, onde um re-escalamento das figuras não leva a uma estrutura exatamente igual à original. Contudo mesmo assim é impossível determinar-se uma escala característica. Nestes casos falaremos de fractais estatísticos ou fractais randômicos, (6) e entenderemos a auto-similaridade ou auto-afinidade como a igualdade das diferentes médias estatísticas antes e depois do re-escalamento (e.g. $\langle h \rangle \rightarrow b^H \cdot \langle h \rangle$, indicando $\langle \dots \rangle$ uma média sobre

*O expoente H é chamado de expoente de Hurst

um conjunto de realizações independentes).

Uma discussão mais extensa de auto-similaridade e de superfícies auto-afins pode ser encontrada no livro de Barabasi e Stanley. (6) Uma aplicação dos conceitos de auto-similaridade e auto-afinidade pode ser encontrada no artigo (14), e uma concisa introdução aos fractais pode ser encontrada no livros (6, 12, 15).

1.3 Rugosidade

O conceito de rugosidade, no limite termodinâmico, é uma extensão da ideia intuitiva de uma superfície rugosa. Um espelho, uma lixa e um planeta podem parecer rugosos ou não dependendo da escala na qual se observa. A superfície do planeta terra com suas montanhas, suas cidades, árvores, etc, claramente parece rugosa se observado por alguém que se encontre sobre a sua superfície. Porém vista desde um satélite ou por uma astronauta na lua, parece uma perfeita esfera. Assim o conceito de rugosidade é um conceito que depende da escala na qual se observa. Dizemos assim que uma superfície $h(l)$ é rugosa no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$, se não existe uma escala $h(l)$ de valor típico, ao longo do eixo vertical.

Se trabalhamos com sistemas finitos definiremos a rugosidade como uma medida das flutuações da altura média sobre a superfície. Em geral é usual utilizar-se o desvio padrão das alturas como definição da rugosidade (w). Assim em sistemas discretos (redes) unidimensionais de tamanho L , teríamos que

$$w_L = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [h(i) - \bar{h}]^2},$$

onde $h(i)$ representa a altura na posição i e $\bar{h}$ é a altura média sobre a rede $\bar{h} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i)$. Esta definição pode ser generalizada a sistemas dependentes do tempo como

$$w_L(t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [h(i, t) - \bar{h}(t)]^2}, \quad (1.5)$$

onde $\bar{h}(t)$ representa a altura média sobre a rede no tempo t . Nesta última definição supomos que existe um modelo teórico ou um método experimental que introduz uma dinâmica na superfície (e.g. deposição, evaporação, difusão etc). Portanto diremos que uma fase é rugosa no estado estacionário ($t \rightarrow \infty$), se ao fixar os parâmetros experimentais ou teóricos do modelo, a rugosidade w_L cresce com o tamanho da rede de forma a não permitir a identificação de uma escala ao longo do eixo vertical. Para tamanhos de rede muito grandes ($a \ll L$) esperamos que

$$w_L \sim L^\alpha,$$

onde α é chamado de expoente de rugosidade. Se uma fase não é rugosa diremos que a mesma é suave. Isto quer dizer que no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) a rugosidade w_L satura em algum valor finito. Para alguns modelos é possível variar os parâmetros experimentais, ou do modelo, passando de uma fase suave a uma rugosa obtendo assim uma transição rugosa. (16–20) Para estes valores de parâmetros, a rugosidade ao quadrado comporta-se como:

$$(w_L)^2 \sim \ln(L).$$

Outro efeito a levarmos em conta no comportamento da rugosidade, quando as redes são pequenas ou quando o expoente de rugosidade(α) é próximo de zero, é uma correção de tamanho finito às vezes chamada de largura intrínseca. (6,21) Esta correção resulta na adição de um termo constante (independente de L) na rugosidade ao quadrado, portanto, na fase rugosa teríamos que

$$(w_L)^2 - C \sim L^{2\alpha},$$

onde a constante C é a correção devida ao tamanho finito. Dado que duas ou mais superfícies do mesmo tamanho, obtidas por um processo estocástico experimental ou teórico só são similares, estatisticamente falando, resulta conveniente trabalharmos com as médias sobre um conjunto de amostras obtidas usando-se as mesmas condições teóricas ou experimentais. Denotaremos estas médias como $\langle \dots \rangle$. No caso numérico da rugosidade é mais vantajoso trabalharmos com a média de $\langle w_L^2 \rangle$ ao invés de $\langle w_L \rangle$ nas situações em que α é próximo de zero, ou quando se tem uma correção ao tamanho finito (C) grande*.

1.4 Estados absorventes

Nesta seção faremos uma pequena introdução às transições para estados absorventes. Uma discussão mais extensa pode ser encontrada nos artigos (23, 24), ou nos livros (15, 19, 25). Para começar definimos um estado absorvente (ou inativo) como o estado que ao ser alcançado pela dinâmica teórica ou experimental de um sistema físico, permanecerá neste estado para sempre. Em outras palavras, uma vez atingido o estado absorvente é impossível mudar-se para outra configuração. No estudo de transições em estados absorventes dividimos os estados acessíveis como inativos (absorventes) ou ativos. A diferença entre os dois tipos é que ao atingirmos um estado absorvente a dinâmica do sistema fica congelada, enquanto nos estados ativos isto não acontece. Um modelo simples para entender a diferença entre um estado ativo e um inativo é um modelo de transmissão de uma doença através de um processo de contato com alguma pessoa doente. O modelo mais simples contempla só uma taxa de transmissão da doença e uma de recuperação sem levar em conta outros fatores (e.g imunidade). Neste modelo simples reconhecemos como

*Embora $\langle w_L^2 \rangle$ e $\langle w_L \rangle^2$ tem diferentes valores seus comportamentos termodinâmicos são semelhantes. (22)

único estado absorvente (ou inativo) o estado onde ninguém está doente, erradicando completamente a doença. Por outro lado um estado com uma ou mais pessoas doentes é um estado ativo onde a doença ainda pode se propagar.

Intuitivamente podemos inferir da dinâmica deste sistema, que quando a taxa de propagação da doença é muito menor que a taxa de recuperação das pessoas então esperamos, que qualquer estado inicial ativo evoluirá de forma que em algum momento a doença desaparecerá completamente. Contudo caso a taxa de propagação da doença seja muito maior que a taxa de recuperação das pessoas então a doença nunca desaparecerá. Portanto deve existir uma taxa crítica de propagação intermediária onde a doença precisaria de um tempo infinito para desaparecer, e abaixo desta taxa de propagação a doença desapareceria completamente em um tempo finito. Esta taxa crítica de propagação também se caracterizaria pelo sistema ter uma probabilidade nula de encontrar-se em um estado ativo em um tempo infinito. Contudo qualquer taxa de propagação acima deste valor levaria a uma probabilidade não nula de se encontrar o sistema em um estado ativo quando o tempo $t \rightarrow \infty$. Alternativamente para este modelo, podemos utilizar a densidade de pessoas doentes observando que para $t \rightarrow \infty$ a densidade é nula para valores da taxa de propagação da doença menores ou iguais ao valor crítico, mas seria não nula para valores acima do mesmo. Para uma visualização gráfica veja a figura 4 onde ilustramos como seria

Figura 4 – Interpretação dos comprimentos de correlação espacial e temporal na propagação de uma doença (preto) sobre uma rede unidimensional. A condição inicial é de uma pessoa doente. Para uma taxa de propagação λ menor que a taxa crítica λ_c , a doença desaparece depois de um tempo característico ξ_t . Para uma taxa $\lambda = \lambda_c$ o tempo característico ξ_t diverge, mas no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$ a densidade de pessoas doentes tende a zero. Finalmente no caso $\lambda > \lambda_c$ existe uma densidade não nula de pessoas doentes no limite $t \rightarrow \infty$, e os comprimentos de correlação dão informação de quão rápido pode se propagar uma perturbação (a doença na rede).

Fonte: HINRICHSSEN. (23)

a propagação de uma doença em uma rede unidimensional. Neste caso uma pessoa doente só pode transmitir a doença a seus primeiros vizinhos. Na figura iniciamos a simulação com uma pessoa doente (preto) e observamos a propagação da doença na rede (eixo horizontal) ao longo do tempo (eixo vertical). Como se observa, caso a taxa de propagação λ é menor

que uma certa taxa crítica λ_c , a doença desaparece depois de um tempo característico ξ_t , tempo este que diverge conforme $\lambda \rightarrow \lambda_c^-$. Para $\lambda > \lambda_c$ vemos que efetivamente a densidade de pessoas doentes é não nula, mas esperamos que conforme $\lambda \rightarrow \lambda_c^+$, e no limite termodinâmico, a mesma tenda a zero. Portanto, similarmente ao que acontece com o comprimento de correlação e a magnetização ao aproximarmos da temperatura crítica ($T \rightarrow T_c$) no modelo de Ising, podemos pensar que para uma rede infinita e valores de λ muito próximos de λ_c , a densidade de pessoas doentes (ρ) e os comprimentos de correlação espacial ξ_r e temporal ξ_t se comportam como

$$\begin{aligned}\rho &\sim |\lambda - \lambda_c|^\beta \\ \xi_t &\sim |\lambda - \lambda_c|^{-\nu_t} \\ \xi_r &\sim |\lambda - \lambda_c|^{-\nu_r},\end{aligned}\tag{1.6}$$

onde o comprimento de correlação espacial daria informações das flutuações da doença ao longo da rede. Os expoentes ν_t e ν_r em geral são diferentes pois sua natureza é diferente. Porém, em modelos onde a natureza do espaço e do tempo é a mesma, esperamos que estes dois expoentes sejam iguais. Caso exista um modelo deste tipo para a propagação de uma doença, a representação pictórica equivalente da figura 4, estatisticamente não distinguiria o tempo do espaço, ao utilizar-se uma condição inicial de doentes randomicamente distribuídos ($\rho \neq 0$). Se esse modelo existisse então no ponto crítico (λ_c) teríamos um modelo invariante frente às rotações espaço-temporais e também frente às transformações de escala, sendo assim um modelo invariante conforme.

A aproximação de campo médio é aquela em que desprezamos as flutuações espaciais de pessoas doentes, tomando-as como estatisticamente independentes isto é $\rho(x, t) = \rho(t)$. Esta é a aproximação mais simples onde se pode observar as leis de potência 1.6, com exceção do comprimento de correlação espacial. A dinâmica deste modelo é reproduzida pela equação diferencial

$$\frac{d\rho}{dt} = \lambda\rho(1 - \rho) - \rho,$$

que nos diz que a densidade de doentes ρ pode aumentar pelo contato de pessoas doentes ρ com pessoas sadias ($1 - \rho$) a uma taxa de transmissão λ , e pode diminuir a uma taxa de recuperação 1. Esta equação diferencial, tipo Bernoulli, pode ser resolvida facilmente com a substituição $u = \rho^{-1}$ levando-nos à solução

$$\rho(t) = \left[A e^{-(\lambda-1)t} + \lambda/(\lambda-1) \right]^{-1},$$

onde se observa que

$$\rho_\infty \equiv \rho(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} (\lambda - 1)/\lambda & \lambda \geq 1 \\ 0 & \lambda < 1 \end{cases}$$

e

$$\rho(t) - \rho_\infty \propto e^{-|\lambda-1|t},$$

implicando que $\lambda_c = 1$, $\xi_t \sim |\lambda - \lambda_c|^{-1}$ e $\rho \sim |\lambda - \lambda_c|$. É importante entender que este é um modelo de campo médio que despreza as flutuações espaciais da densidade de pessoas doentes, e por tal motivo o parâmetro crítico bem como os expoentes críticos aqui obtidos não representam os valores reais de um modelo em baixas dimensões definido em uma rede finita cuja densidade possa depender da posição.

Como comportar-se-iam os diferentes observáveis do modelo se estivermos próximos da criticalidade, em uma rede finita e próximos à atingir o estado estacionário? A resposta mais simples à esta pergunta não utiliza os conceitos de multi-escalonamento, multi-fractalidade, multi-affinidade nem nada parecido. (6, 26, 27) Pelo contrário, utiliza apenas o escalonamento simples. O que quer dizer que próximo à criticalidade os expoentes não mudam com a escala de observação, nem com o lugar e momento de observação. Desta forma, suficientemente próximo da criticalidade os comprimentos de correlação são suficientemente grandes para que os detalhes microscópicos do modelo sejam irrelevantes para a dinâmica do mesmo. Assim esperamos que os diferentes observáveis comportem-se como funções homogêneas do tipo

$$f(g_1, g_2, g_3, \dots) \sim b^{y_0} f(b^{y_1} g_1, b^{y_1} g_2, b^{y_1} g_3, \dots),$$

tal como acontece com a parte singular da energia livre, da magnetização e do calor específico no modelo de Ising (28) próximo da criticalidade, sendo $g_1, g_2, g_3, \dots$ os diferentes campos (parâmetros) do modelo. Por exemplo, para o caso da densidade de pessoas doentes esperamos um comportamento para tempos longos dado por (29)

$$\rho(\Delta, t, L) = b^{\beta/\nu_r} \rho(\Delta b^{-1/\nu_r}, t b^z, L b), \quad (1.7)$$

com $\Delta = |\lambda - \lambda_c|$ e $\xi_t \sim \xi_r^z$, nos dando $z = \nu_t/\nu_r$. Aqui o tamanho do sistema L entra como um campo relevante pois o tamanho finito do sistema limita o máximo comprimento de correlação, tirando portanto o sistema da criticalidade. Da equação 1.7 vários casos podem ser estudados. Por exemplo $\Delta = 0$ ou $t \rightarrow \infty$ ou $L \rightarrow \infty$ entre outros. Em qualquer dos diferentes casos podemos passar de uma função homogênea com n parâmetros livres para uma de $n - 1$, dada à liberdade do fator de escala b . Podemos, por exemplo, fixar algum dos argumentos do lado direito da equação 1.7 igual a 1. Por exemplo no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$ teríamos que:

$$\begin{aligned} \rho(\Delta, t) &= b^{\beta/\nu_r} \rho(\Delta b^{-1/\nu_r}, t b^z) \\ &= \Delta^\beta \rho(1, t \Delta^{\nu_t}) \\ &= \Delta^\beta \mathcal{F}\left(\frac{t}{\Delta^{-\nu_t}}\right), \end{aligned}$$

implicando que no limite termodinâmico seria possível colapsar diferentes curvas ao graficar $\Delta^{-\beta} \rho$ como função de $t \Delta^{\nu_t}$, para valores de Δ próximos da criticalidade.

Dada uma perturbação inicial veremos que todos os eventos se encontram correlacionados até um tempo t , sempre que $t < \xi_t$. Para tempos superiores veremos que os eventos

se encontram correlacionados apenas até intervalos de tempo da ordem do comprimento de correlação ξ_t , no limite termodinâmico. Portanto, se queremos estudar a relação equivalente à equação 1.7 para o maior comprimento de correlação temporal ξ_t , teríamos que estudar o limite $t \rightarrow \infty$ obtendo

$$\xi_t(\Delta, L) = b^{-\nu_t/\nu_r} \xi_t(\Delta b^{-1/\nu_r}, Lb).$$

Lembrando que $z = \nu_t/\nu_r$ e escolhendo $Lb = 1$ obteríamos

$$\xi_t(\Delta, L) = L^z \mathcal{F}(\Delta L^{1/\nu_r}).$$

Finalmente, se o processo estudado pode ser modelado estocasticamente por uma equação de Liouville, então poderemos fazer uma correspondência entre o comprimento de correlação temporal e o autovalor do operador de Liouville que governa a dinâmica assintótica. Este

Figura 5 – Colapso, de acordo com a equação 1.8, do primeiro autovalor (E_1) não nulo do operador de Liouville em um processo de contato sobre uma rede unidimensional.

Fonte: HINRICHSSEN. (23, Fig. 22)

autovalor usualmente é o primeiro autovalor diferente de zero. Com este autovalor (E_1) o comportamento assintótico de alguma propriedade seria proporcional à $e^{-E_1 t}$, levando à correspondência $E_1 = 1/\xi_t$ e por conseguinte

$$E_1(\Delta, L) = \frac{1}{L^z} \mathcal{G}(\Delta L^{1/\nu_r}), \quad (1.8)$$

com

$$\mathcal{G}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & x \ll 1 \\ x^{\nu_t} & x \gg 1 \end{cases},$$

o que claramente mostraria que para $\Delta \neq 0$ teríamos uma fase massiva. A relação 1.8 foi utilizada para o gap de energia do modelo de transmissão de uma doença por um processo de contato. Como se observa na figura 5, existe um excelente acordo com a equação 1.8.

1.5 Criticalidade auto-organizada

A criticalidade auto-organizada é um caso específico de transições de fase com estados absorventes. (30) Nestas transições fora do equilíbrio* não é necessário realizar um ajuste ultra-fino de algum parâmetro de controle λ a um valor específico λ_c . As características necessárias da criticalidade auto-organizada são (35):

- a) Escalonamento não trivial (escalonamento de tamanho finito, sem dependência de um parâmetro de controle).
- b) Correlações espaço-temporais com dependências do tipo lei de potência .
- c) Aparente auto-ajuste ao ponto crítico (de uma transição de fase continua subjacente).

Destas três características nem sempre resulta fácil determinar a transição de fase continua subjacente. As funções de correlação são difíceis de se medir em condições não periódicas de contorno, pois pela quebra da invariância translacional, as médias espaciais, dependeriam da origem do intervalo tomado na medida. Assim, destas três características a mais simples de se verificar é o escalonamento não trivial, que corresponderia em escolher $\Delta = 0$ na equação 1.7, obtendo assim para algum parâmetro de ordem subjacente (ρ)

$$\rho(t, L) = b^{\beta/\nu_r} \rho(tb^z, Lb). \quad (1.9)$$

Em outras palavras, isto quer dizer que o sistema se encontra na criticalidade e não é necessário um ajuste ultra-fino de algum parâmetro de controle. Uma forma alternativa de expressar este escalonamento é obtido utilizando-se $Lb = 1$, obtendo:

$$\rho(t, L) = L^{-\beta/\nu_r} \mathcal{F}\left(\frac{t}{L^z}\right). \quad (1.10)$$

Se fosse possível-se determinar a transição de fase continua subjacente, observaríamos que o parâmetro de controle λ desta transição flutuaria no entorno do valor crítico λ_c , gerando uma distribuição que, no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$), tenderia à uma distribuição delta de Dirac $\delta(\lambda - \lambda_c)$.

“Self-Organized Criticality would then refer to the self-organization of the presumed control parameter to its critical value, rather than the self-organization of the system to display criticality.” (35, p. 18)

Uma representação pictórica de como a auto-organização acontece é ilustrada na figura 6, onde o parâmetro de ordem (ρ) da transição de fase subjacente é zero na fase absorvente e não-zero na fase ativa. Esta transição é regida por um parâmetro de controle λ e a

*Os estados estacionários fora do equilíbrio não satisfazem à condição de balanço detalhado (31–34) entre as taxas de transição.

dinâmica do modelo criticamente auto-organizado ajusta este parâmetro à valores próximos do valor crítico λ_c . Assim caso se inicie desde uma fase ativa, por exemplo com um valor de $\lambda = 1.2\lambda_c$, então veremos que o valor de λ diminui gradualmente como $\lambda \rightarrow \lambda - \epsilon_{ac}$ até atingir um valor próximo de λ_c^- . Neste ponto estaremos numa fase absorvente e a dinâmica do modelo criticamente auto-organizado começaria a aumentar gradualmente λ como $\lambda \rightarrow \lambda + \epsilon_{ab}$. Com este processo vemos que o parâmetro λ flutua no entorno de λ_c , obtendo uma distribuição que no limite termodinâmico tem que tender a $\delta(\lambda - \lambda_c)$, e portanto neste limite $\epsilon_{ac}, \epsilon_{ab} \rightarrow 0$.

Figura 6 – A criticalidade auto-organizada se encontra associada ao ponto crítico de uma transição de fase absorvente. Isto acontece de forma que no estado estacionário o sistema se auto ajusta para manter o valor do parâmetro de controle λ distribuído no entorno de λ_c . Como se observa a distribuição de probabilidade $P(\lambda)$ do parâmetro de controle vira uma delta de Dirac $\delta(\lambda - \lambda_c)$ no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$.

Fonte: BONACHELA; MUÑOZ. (36)

Alguns exemplos que ilustram estas ideias de criticalidade auto-organizada foram apresentados no artigo “*Paths to Self-Organized Criticality*” (30) com seus respectivos esclarecimentos. Um desses exemplos contempla um conjunto de caminhantes* aleatórios movimentando-se numa rede d -dimensional de tamanho lateral L . Os caminhantes se movimentam independente e aleatoriamente nas posições da rede vizinhas às posições atuais. As únicas restrições ao movimento dos caminhantes é que na posição atual eles precisam estar acompanhados para poderem se movimentar. Mais ainda só dois dos caminhantes por sítio poderão se movimentar. Assim, podemos falar de sítios ativos como aqueles que possuem dois ou mais caminhantes e inativos como aqueles vazios ou apenas com um caminhante. O modelo com condições periódicas de contorno que não contempla criação nem destruição de caminhantes é conhecido como “*Activated Random Walkers*” (ARW) e apresenta uma transição de fase absorvente, em função do parâmetro de controle $\lambda = N/L^d$ (densidade média de caminhantes na rede). Para o modelo unidimensional $\lambda_c \simeq 0.9486$ e para o bidimensional $\lambda_c \simeq 0.7169$. (30) Portanto observamos que, em função de λ , se $\lambda < \lambda_c$, e no limite $t \rightarrow \infty$ todos os sítios serão inativos e consequentemente o sistema se encontrará em um dos múltiplos estados absorventes para esta densidade λ . No entanto se $\lambda > \lambda_c$, no limite $t \rightarrow \infty$, observaremos um estado estacionário com uma fração

*Dependendo dos modelos os caminhantes são chamados de partículas, grãos ou de forma geral energia.

de sítios da rede ativos(ρ) no nula. Uma representação pictórica de $\rho(\lambda)$ se encontra no lado esquerdo da figura 6, e para poder obter um modelo criticamente auto-organizado que leve ao lado direito de figura 6, é preciso poder modificar $\lambda \rightarrow \lambda + \epsilon_{ab}$ (*driving*) se $\lambda < \lambda_c$ e $\lambda \rightarrow \lambda - \epsilon_{ac}$ (*dissipation*) se $\lambda > \lambda_c$, com os limites $\lim_{L \rightarrow \infty} \epsilon_{ab}, \epsilon_{ac} \rightarrow 0$. Este modelo criticamente auto-organizado pode ser obtido se permitimos a entrada e saída (criação e destruição) de caminhantes na rede do modelo ARW. Uma das maneiras de fazer isso é eliminando-se as condições periódicas de contorno e permitindo a saída de caminhantes pela borda, observando portanto que $\epsilon_{ac} \propto (L^{d-1}\rho_b)/L^d$, onde ρ_b é a fração de sítios ativos na borda. Claramente neste modelo os efeitos de borda não podem ser desprezados no limite termodinâmico, pois por causa da dissipação na borda o sistema numa fase ativa pode ser dirigido a uma fase absorvente com $\lambda_c - \epsilon_{ac} < \lambda \leq \lambda_c$.

“The boundary cannot be scaled out in the limit of large system sizes as is usually done in statistical physics” (35,37)

É claro que se não introduzirmos caminhantes adicionais no modelo o sistema atingirá sempre um estado absorvente para um tamanho de rede finito. Finalizando portanto em um estado trivial de auto-similaridade. Para que isto não aconteça necessitamos introduzir caminhantes no modelo. Uma maneira de se fazer isso poderia ser pela introdução de caminhantes à medida que a atividade cesse. Por exemplo, introduzindo um caminhante aleatoriamente em alguma posição da rede, e assim $\epsilon_{ab} = 1/L^d$. Como vemos, este modelo se auto-ajusta ao ponto crítico do ARW no limite termodinâmico, e podemos observar que antes da atividade cessar um caminhante pode deslocar-se desde um sítio na rede até a rede inteira. Também podemos observar que o número de caminhantes deixando a rede vai desde um até um número proporcional à L^D com $D \leq d$, não existindo um período característico de inatividade. Este modelo além de satisfazer as características *a-c* listadas acima também satisfaz às seguintes três características (35):

- d) Interação não linear (requerida por 1), normalmente em forma de valores limites.
- e) Avalanches (intermitência, esperada na presença de limites e condução lenta).
- f) Separação de escalas de tempo (requisito óbvio para sustentar avalanches distintas)

Neste caso o valor limite é de dois ou mais caminhantes em um dado sítio para se ter atividade. As avalanches acontecem nos períodos de atividade culminando com a perda de caminhantes, e a separação de escalas de tempo acontece ao separarmos os processos que acontecem na atividade daqueles que acontecem na inatividade, o que nos permite diferenciar as avalanches. Em outras palavras, não existe ingresso de caminhantes enquanto os mesmos estão desaparecendo. Assim a taxa de ingresso de caminhantes é muito lenta se comparada com a taxa de dissipação. Embora estas três características sejam suficientes para ter-se um modelo criticamente auto-organizado, fica ainda por saber se esta lista é completa. Como Dickman (30) menciona: é realmente necessário ter-se

um supervisor global (a babá) que garanta a separação de escalas de tempo para falar de criticalidade auto-organizada? Não poderíamos simplesmente ter entrada e saída de caminhantes continuamente, independente do estado do sistema? Neste caso ficaria mais difícil determinar-se o que é uma avalanche. Deixando estas considerações esclarecidas, definimos um conceito de criticalidade auto-organizada que incorpore as seis características antes listas, da seguinte forma:

“Slowly driven, avalanching (intermittent) systems with non-linear interactions, that display non-trivial power law correlations (cutoff by the system size) as known from ordinary critical phenomena, but with internal, self-organized, rather than external tuning of a control parameter (to a non-trivial value).” (35)

Para o modelo acima descrito a parte “*Slowly driven*” se observa nos limites em que ϵ_{ab} , ϵ_{ac} , $\epsilon_{ab}/\epsilon_{ac} \rightarrow 0$, quando $L \rightarrow \infty$, e a parte do ajuste de um parâmetro externo não é inteiramente um problema, se a “criticalidade aparece sobre uma região do espaço de parâmetros com medida não-zero” (30,38).

Uma discussão mais profunda sobre criticalidade auto-organizada pode ser encontrada nas referências (12,30,35) ou nos artigos de revisão (27,39). As relações entre expoentes da transição absorvente subjacente e a criticalidade auto-organizada podem ser encontrados nos livros (15,19).

1.6 Escalonamento dinâmico

Na seção 1.3 se definiu a rugosidade de uma superfície que pode mudar no tempo (eq.1.5). Porém, só foi estudado o limite termodinâmico da superfície obtida no regime $t \rightarrow \infty$, que no caso geral de um processo estocástico fora de equilíbrio corresponde ao estado estacionário. Mas o que acontece com a rugosidade antes de atingir o estado estacionário? Como esta evolui? A resposta a esta pergunta em geral é complexa, dependendo da condição inicial do modelo e da rugosidade da fase (Ver (40,41)). Por exemplo, poderíamos encontrar comportamentos de crossover onde a dinâmica inicial tem um comportamento diferente da dinâmica intermediária e diferente da dinâmica assintótica.

1.6.1 Fase rugosa $\alpha > 0$

O caso mais simples contempla a evolução de uma superfície em crescimento, começando com a deposição sobre uma superfície horizontal (chamada de substrato). Com esta configuração inicial não existe um comprimento de correlação horizontal ($\xi_r = \xi_{\parallel}$) nem vertical ($\xi_{\perp}$). Se os parâmetros experimentais ou teóricos são ajustados para atingir-se uma fase crítica rugosa ($\alpha > 0$), então é de se esperar que no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) os comprimentos de correlação horizontal e vertical aumentem com o tempo sem saturarem em algum valor finito. Normalmente em dinâmicas críticas a dependência entre

o comprimento de correlação $(\xi_{\parallel})$ e o tempo se encontra dada por uma lei de potência

$$\xi_{\parallel} \sim t^{1/z}.$$

Uma exceção à este comportamento se encontra nos pontos críticos de aleatoriedade infinita onde “se tem uma relação exponencial entre o comprimento de correlação espacial e temporal” (29, p.-3). Deixando de lado esta exceção veremos que se os parâmetros experimentais ou teóricos são tais que a fase estacionária é rugosa, então a rugosidade terá que começar a aumentar desde zero até seu valor de saturação $\sim L^{\alpha}$. Saturação que acontecerá quando o comprimento de correlação $(\xi_{\parallel})$ exceda o tamanho da rede $(\xi_{\parallel} \gg L)$. Se utilizamos o comprimento de correlação vertical como outra medida das flutuações na altura então teríamos que

$$\xi_{\perp} \sim t^{\beta} \mathcal{G} \left(\frac{L}{\xi_{\parallel}(t)} \right), \quad (1.11)$$

onde para satisfazer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_{\perp} \rightarrow L^{\alpha}$, teríamos que escolher $\mathcal{G}(x) = x^{\alpha}$, $x \ll 1$, satisfazendo $z = \alpha/\beta$. Para satisfazer o $\lim_{t \rightarrow 0} \xi_{\perp} \rightarrow 0$ podemos supor que a função $\xi_{\perp}(t, L)$ é analítica. Assim para a função $\mathcal{G}(x)$ a escolha mais simples é uma constante, implicando que $\xi_{\perp}/t^{\beta}$ não depende de L^* . A expressão 1.11 pode então ser re-escrita como

$$\xi_{\perp} \sim L^{\alpha} \mathcal{F} \left(\frac{t}{L^z} \right)$$

com

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} x^{\beta} & x \ll 1 \\ \mathcal{O}(1) & x \gg 1 \end{cases}.$$

Traduzindo este resultado em termos da rugosidade $w_L(t)$ teríamos que

$$w_L(t) \sim L^{\alpha} \mathcal{F} \left(\frac{t}{L^z} \right), \quad (1.12)$$

onde α , β , z são conhecidos respetivamente como expoentes de rugosidade, de crescimento e dinâmico. Esta relação historicamente é conhecida como escalonamento dinâmico de Family-Vicsek, (42, e.q 3) relação inicialmente obtida ao estudar-se o comportamento da largura da superfície (rugosidade) obtida por deposição balística de partículas sobre um substrato. Neste modelo observou-se que a rugosidade inicialmente aumenta como $\sim t^{\beta}$ e satura em um valor $\sim L^{\alpha}$, sendo possível colapsar evoluções da rugosidade obtidas para diferentes tamanhos de rede ao graficar-se $w_L(t)/L^{\alpha}$ vs $\frac{t}{L^z}$ (42, Figura 3). As expressões 1.11 e 1.12 obtidas para uma fase crítica rugosa podem ser re-escritas como

$$b^{\alpha} w(t, L) = w(tb^z, Lb),$$

*Também podemos escolher uma lei de potência do tipo $\mathcal{G}(x) = x^{z\theta}$, $x \gg 1$ tal que $(\beta - \theta) > 0$, tal como foi observando ao medir-se a rugosidade em janelas de tamanho $l < L$ no artigo (41).

o que de algum modo indicaria um tipo de invariância de escala do tipo

$$L \rightarrow bL; \quad t \rightarrow b^z t; \quad w \rightarrow b^\alpha w.$$

Porém nesta transformação estamos comparando a rugosidade medida sobre superfícies com distintos tamanhos (L). Isto é, não estamos comparando a mesma superfície em diferentes escalas e não fizemos nenhuma hipótese de auto-afinidade. Contudo, se assumimos ou observamos a presença de auto-afinidade para comprimentos de escala menores que $\xi_{\parallel}$, então poderemos identificar o expoente de rugosidade com o expoente de Hurst ($\alpha = H$) e explorando a auto-afinidade poderemos observar, para um mesmo tamanho de rede, que a rugosidade medida sobre diferentes janelas de tamanho $l < L$ escalaria como (41)

$$w(l, t) \sim \begin{cases} t^\beta & \xi_{\parallel} \ll l \\ l^\alpha & \xi_{\parallel} \gg l \end{cases}.$$

Porém, caso a hipótese de auto-afinidade não se cumpra observaremos desvios deste comportamento conhecidos na literatura como rugosidade anômala. (41, 43) Em geral pode chegar a ser difícil determinar se uma dada superfície é auto-afim ou não. Mas numa superfície auto-afim o q -ésimo (C_q) momento da rugosidade (w_l), ou da diferença de alturas $|h(x+l) - h(x)|$, teria que se comportar como

$$C_q(l) \sim l^{q \cdot \alpha_q},$$

sendo $\alpha_q = \alpha$ independente da posição x da janela* e do momento q (6, p.263).

1.6.2 Transição rugosa $\alpha = 0$

Como já foi mencionado na seção 1.3 a rugosidade ao quadrado satura logaritmicamente com o tamanho da rede ($w_L^2 \sim \ln(L)$). Mas o que acontece com a evolução temporal? Até agora vários estudos tem mostrado que a evolução temporal também apresenta uma dependência logarítmica (16–19, 44)

$$[w_L(t)]^2 \sim \ln(t).$$

Com este dois resultados podemos generalizar as expressões 1.11 e 1.12 para o caso da transição rugosa como

$$[w_L(t)]^2 \sim \ln \left(t^{\tilde{\beta}} \tilde{\mathcal{G}} \left(\frac{L}{\xi_{\parallel}(t)} \right) \right); \quad [w_L(t)]^2 \sim \ln \left(L^{\tilde{\alpha}} \tilde{\mathcal{F}} \left(\frac{t}{L^z} \right) \right).$$

Porém manter-se os expoentes $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ não faria muito sentido, dada a propriedade $\ln x^a = a \ln x$. Assim dos três expoentes bastaria com darmos $z = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$, expoente este que caracterizaria o comportamento do tempo de saturação $t_x \sim L^z$. Tempo necessário para passarmos

*Para condições não periódicas pode existir uma dependência adicional próxima das bordas do sistema.

de um comportamento $A \ln(t)$ para um comportamento $B \ln(L)$. Com estas anotações podemos então escrever o equivalente do escalonamento de Family-Vicsek para transições rugosas como:

$$[w_L(t)]^2 \sim \ln\left(t\mathcal{G}\left(\frac{L}{t^{1/z}}\right)\right); \quad [w_L(t)]^2 \sim \ln\left(L\mathcal{F}\left(\frac{t}{L^z}\right)\right), \quad (1.13)$$

escolhendo

$$\mathcal{G}(x) = \begin{cases} x^z & x \ll 1 \\ \mathcal{O}(1) & x \gg 1 \end{cases}; \quad \mathcal{F}(x) = \begin{cases} x^{1/z} & x \ll 1 \\ \mathcal{O}(1) & x \gg 1 \end{cases}.$$

Finalmente é interessante comparar este escalonamento com o obtido para a fase rugosa

$$[w_L(t)]^2 \sim t^{2\beta} \tilde{\mathcal{G}}\left(\frac{L}{\xi_{\parallel}(t)}\right); \quad [w_L(t)]^2 \sim L^{2\alpha} \tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{t}{L^z}\right).$$

Matematicamente falando, podemos enxergar a transição rugosa como o limite em que $\alpha, \beta \rightarrow 0$ mantendo-se constante $z = \alpha/\beta$.

1.6.3 Fase suave

Neste regime em geral é difícil fazer uma proposta de escalonamento, pois se desconhece o comportamento dos diferentes comprimentos de correlação espaciais $(\xi_{\parallel}, \xi_{\perp})$ e temporal ξ_t como função dos parâmetros do modelo, bem como de sua dependência temporal. Porém, podemos supor que escolhendo-se os parâmetros do modelo suficientemente próximos da transição rugosa, o comportamento da rugosidade ao quadrado ou de $(\xi_{\perp})^2$ poderia se aproximar a um comportamento logarítmico similar ao proposto na equação 1.13. Mais ainda, se viéssemos de uma fase massiva os comprimentos de correlação espacial $\xi_{\parallel}$ e temporal ξ_t saturariam em um valor finito no limite termodinâmico.

Consideremos um parâmetro λ que controla a proximidade da transição rugosa em λ_c . Então analogamente ao que acontece com as transições absorventes, poderemos esperar que para uma rede infinita, os comprimentos de correlação espacial $\xi_{\parallel}$ e temporal ξ_t se saturem como

$$\xi_{\parallel} \sim |\lambda - \lambda_c|^{-\nu_r}; \quad \xi_t \sim |\lambda - \lambda_c|^{-\nu_t}.$$

Isto implica que $\xi_t \sim \xi_{\parallel}^z$ com $z = \nu_t/\nu_r$. Utilizando estes comprimentos para uma rede finita poderíamos inferir que para valores de λ tal que $\xi_{\parallel} \gg L$, a única escala relevante seria o tamanho do sistema L . Portanto, fixando o valor de L podemos esperar que a rugosidade ao quadrado se comporte como

$$[w_L(t)]^2 \simeq a \cdot \ln\left(t\mathcal{G}\left(\frac{t}{\xi_t}\right)\right).$$

Este comportamento tem sido observado por Hinrichsen e Ódor (44, eq.5) próximo da transição rugosa em um modelo de crescimento de superfícies onde a deposição de partículas é realizada por pares.

1.7 Estados Quase-estacionários

Quando estudamos um modelo estocástico descrito pela equação mestra 1.1, definimos o estado estacionário (P_e) como aquele estado que satisfaz

$$\mathcal{L} |P_e\rangle = 0,$$

e pode ser atingido pela dinâmica do modelo quando $t \rightarrow \infty$, partindo-se de qualquer estado ativo $\mathcal{L} |P_a\rangle \neq 0$. Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |P_a(t)\rangle = |P_e\rangle.$$

Com esta descrição definiremos os estados quase-estacionários como estados que não são os estados estacionários da equação mestra, mas seu tempo de vida diverge com o tamanho do sistema L , tornando-se portanto um estado estacionário no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$). Os estados quase-estacionários tem sido estudados, principalmente em sistemas com interações de longo alcance, (45, 46) observando que os tempos de vida (τ_{qs}) escalam com o tamanho do sistema de maneira logarítmica ($\tau_{qs} \sim \ln L$) ou como uma lei de potencia ($\tau_{qs} \sim L^\gamma$).

O conceito de estado quase-estacionário tem sido usado em outro contexto logrando a determinação de expoentes críticos em transições de fases absorventes com uma precisão de 0.06% ou melhor. (47) Tal precisão é obtida ao se estudar os efeitos de tamanho finito na distribuição de probabilidades quase-estacionária (QSD). Distribuição esta definida como

$$\bar{p}_c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_c(t)}{\sum_{c' \neq A} p_{c'}(t)},$$

sendo $p_c(t)$ a probabilidade de se encontrar no estado $|c\rangle$, partindo de uma condição inicial $|\chi_0\rangle$ que não corresponda à algum dos estados absorventes $|A\rangle$ do modelo. Com esta definição, e se trabalhamos numa região do espaço de parâmetros do modelo com estados absorventes, veremos que a probabilidade do sistema estar no estado quase-estacionário $\bar{p}_{qs}$ teria que se aproximar à 1 conforme $L \rightarrow \infty$, para coincidir com a definição de estado quase-estacionário acima apresentada.

1.8 Blocos de Jordan

O conceito de Blocos de Jordan é principalmente útil na solução de um sistema de equações diferenciais do tipo da equação mestra 1.1. Os blocos de Jordan aparecem quando o número de autovalores do operador $\mathcal{L}$ é maior que o número de autovetores que podem ser encontrados. Portanto o operador $\mathcal{L}$ não pode ser diagonalizado e o mais próximo de uma diagonalização é transformar o operador $\mathcal{L}$ em uma matriz com a super-diagonal ou a subdiagonal preenchida de uns, conhecida como forma canônica de Jordan. Esta matriz em geral é diagonal por blocos onde os blocos podem ser de diferentes tamanhos. Estes

blocos são conhecidos como blocos de Jordan (48) (ou células de Jordan) e sua estrutura é dada por

$$(J_j)_{d_j \times d_j} = -E_i I_{d_j \times d_j} + N_{d_j \times d_j},$$

onde $(-E_i)$ é um autovalor do operador de $(-\mathcal{L})$, $I_{d_j \times d_j}$ a matriz identidade e $N_{d_j \times d_j}$ uma matriz com a super-diagonal ou a subdiagonal preenchida de uns. A matriz $N_{d_j \times d_j}$ satisfaz portanto $(N_{d_j \times d_j})^{d_j} = 0$. Isto implica que na solução (1.2) apareçam polinômios em t de ordem $(d_j - 1)$ acompanhados pelo fator exponencial $e^{-E_i t}$. Para completar a base vetorial se definem os autovetores generalizados $(\mathcal{L} - E_i I)^m |\phi_i\rangle = 0$; $(m \geq 2)$ e se encontram tantos quanto sejam necessários para que a soma de autovetores e autovetores generalizados coincida com a degenerescência do autovalor E_i .

Um exemplo simples para entender estes conceitos se encontra em um sistema massa mola com amortecimento. Por exemplo para um sistema de massa $m = 1$, amortecimento $\gamma = 4$ e constante de mola $k = 4$ temos o amortecimento crítico. Podemos escrever neste caso o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{H} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}; \quad \overleftrightarrow{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix},$$

Ao calcularmos os autovalores e autovetores da matriz $\overleftrightarrow{H}$, observamos que o autovalor $E = -2$ se encontra duas vezes degenerado, mas só é possível encontrarmos um autovetor. Transformando a matriz $\overleftrightarrow{H}$ a sua forma canônica de Jordan encontramos

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com $(\overleftrightarrow{H} - EI) \vec{v}_1 = 0$ e $(\overleftrightarrow{H} - EI)^2 \vec{v}_2 = 0$. Para este exemplo só temos um bloco de Jordan de tamanho 2×2 e a matriz nilpotente associada satisfaz $N^2 = 0$. A matriz $\overleftrightarrow{P} = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2)$ permite transformar bases vetoriais de forma que $\overleftrightarrow{H} \overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P} \overleftrightarrow{J}$ e a solução para a evolução temporal de x , p inclui os termos e^{-2t} e te^{-2t} com constantes que dependem da condição inicial.

2 EXTENSÃO DO MODELO RAISE AND PEEL

2.1 Invariância Conforme

A teoria de Invariância Conforme em Mecânica Estatística é uma enorme área de conhecimento em que se tem escrito diversos livros (9, 10, 49) que podem ser utilizados para aprofundar este tema. Um resumo dos principais e mais importantes resultados da invariância conforme podem ser encontrados em (15, p. 44). Nesta secção só introduziremos os resultados mais relevantes para nosso trabalho.

Graças ao desenvolvimento das teorias de campos conformes as transições de fases contínuas em sistemas em equilíbrio termodinâmico obteve um grande avanço. Notadamente a duas dimensões tal invariância permitiu a previsão das principais classes de universalidade de comportamento crítico. A idéia de classes de universalidade aparece em transições contínuas quando os parâmetros de controle da transição são ajustados próximos do valor crítico. Neste caso os comprimentos de correlação são maiores que qualquer escala de comprimento do sistema, tornando irrelevantes os detalhes microscópicos do modelo. Assim as singularidades do sistema bem como as suas funções de escala ficariam determinadas pelas simetrias do modelo, a natureza do parâmetro de ordem (e.g escalar, vetorial, ...) e o alcance da interação.

A idéia da invariância conforme pode ser vista como uma generalização do conceito de auto-similaridade. Em lugar de uma invariância estatística mediante uma transformação de escala global $r' = r/b$, na teoria da invariância conforme a transformação acontece a uma escala local $r' = r/b(r)$. Nesta teoria o papel central se encontra nos operadores de escala $\{\phi_i\}$ (e.g densidade de energia ε ou densidade do parâmetro de ordem σ) associados aos parâmetros de controle relevantes* do ponto crítico (e.g campo magnético ou temperatura reduzida). O objetivo central é identificar-se os diferentes operadores de escala assim como as dimensões de escala Δ_i associadas a uma dada classe de universalidade. Estas dimensões de escala estão definidas através de uma transformação global:

$$\phi_i(\mathbf{r}) = b^{-\Delta_i} \phi_i(\mathbf{r}/b),$$

ou de uma maneira mais geral, pela transformação local d -dimensional

$$\phi'_i(\mathbf{r}) = J(\mathbf{r})^{\Delta_i/d} \phi_i(\mathbf{r}/b(\mathbf{r})) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}} \right|^{\Delta_i/d} \phi_i(\mathbf{r}/b(\mathbf{r})),$$

sendo $J(\mathbf{r}) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}} \right|$ o Jacobiano da transformação. Transformações de escala locais preservam a métrica, a menos de um fator $\Lambda(\mathbf{r})$, isto é:

$$g'_{\mu\nu}(\mathbf{r}') = \Lambda(\mathbf{r}) g_{\mu\nu}(\mathbf{r}),$$

*Relevantes do ponto de vista do grupo de renormalização.

sendo que o conjunto de todas estas transformações formam o grupo conforme. Para $d > 2$ os diferentes tipos de transformações conformes ficam restritos às translações, rotações, dilatações e a transformação especial conforme definida por:

$$\frac{\mathbf{r}'}{r'^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \mathbf{a}.$$

Esta última é uma combinação de uma inversão seguida de uma translação e finalmente outra inversão. Estes quatro tipos de transformações fixam a forma das funções de correlação de dois e três pontos, obtendo-se por exemplo (9, p. 105) a função de correlação de dois pontos

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}} & \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0 & \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}. \quad (2.1)$$

A constante C_{12} é indefinida. Para duas dimensões existem infinitos tipos de transformações conformes que podem ser geradas por

$$w = f(z); \quad \bar{w} = \bar{f}(\bar{z}),$$

sendo f uma função analítica (holomórfica), $\bar{f}$ uma função anti-analítica (anti-holomórfica) e definindo $z \equiv r_1 + ir_2$, $\bar{z} \equiv r_1 - ir_2$, onde $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$. Utilizando-se desta notação a generalização da expressão 2.1 é dada por:

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|z_1 - z_2|^{2h} |\bar{z}_1 - \bar{z}_2|^{2\bar{h}}} & , h = h_1 = h_2; \quad \bar{h} = \bar{h}_1 = \bar{h}_2; \\ 0 & , \text{em outro caso} \end{cases},$$

onde $\Delta_i = h_i + \bar{h}_i$ e

$$\phi'_i(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-h_i} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)^{-\bar{h}_i} \phi_i(z, \bar{z}).$$

Ao nível infinitesimal os mapeamentos conformes podem ser escritos como $w = z + \epsilon(z)$, onde de maneira geral podemos expandir

$$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1}.$$

O efeito de cada uma das transformações infinitesimais $\epsilon_n = c_n z^{n+1}$ aplicado aos operadores de escala $\phi(z, \bar{z})$ de dimensões conformes $(h, \bar{h})$, nos dá a variação $\delta\phi \equiv \phi'(z, \bar{z}) - \phi(z, \bar{z})$ que pode ser escrita como:

$$\delta\phi = c_n l_n \phi; \quad l_n = -z^{n+1} \partial_z - h(n+1) z^n.$$

De maneira similar para transformações infinitesimais anti-holomórficas $\bar{\epsilon}_n = \bar{c}_n \bar{z}^{n+1}$ teríamos

$$\bar{\delta}\phi = \bar{c}_n \bar{l}_n \phi; \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} - \bar{h}(n+1) \bar{z}^n.$$

Os operadores $(l_n, \bar{l}_m)$ são geradores da álgebra de Lie definida pelas relações de comutação:

$$\begin{aligned} [l_n, l_m] &= (n - m) l_{n+m} \\ [\bar{l}_n, \bar{l}_m] &= (n - m) \bar{l}_{n+m} \\ [l_n, \bar{l}_m] &= 0. \end{aligned}$$

Esta é a chamada álgebra conforme. Porém esta álgebra tem que ser modificada para incluir os efeitos do tamanho finito sobre a energia do vácuo (como no efeito Casimir), ou alternativamente para incluir as flutuações térmicas em um sistema quântico com temperatura não nula (9, p. 412). Ao introduzir estas flutuações térmicas obtemos a chamada álgebra de Virasoro

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} n (n^2 - 1) \delta_{n+m,0} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n - m) \bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12} n (n^2 - 1) \delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0, \end{aligned}$$

que é caracterizada pelo parâmetro c , chamado de carga central ou anomalia conforme. Finalmente é interessante mencionar que a representação matemática da álgebra de Virasoro com funções de correlação de dois pontos não divergentes a longas distâncias e com um número finito de operadores de escala fundamentais ϕ_i , levam aos chamados “modelos mínimos”. Tais modelos invariantes conformes possuem carga central $c < 1$, dada por

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$$

$$h_{r,s} = \frac{[(m+1)r - m \cdot s]^2 - 1}{4m(m+1)}; \quad (1 \leq r < m, 1 \leq s < r),$$

onde $h_{r,s}$ são os diferentes valores da dimensão conforme que podem ser observados nos diferentes operadores de escala do modelo. Aqui para cada valor de $m = 3, 4, \dots$ temos uma distinta classe de universalidade (9, Seção 7.4). Por exemplo o modelo de Ising 2d corresponde a $m = 3$, levando aos valores $c = 1/2$ e $h, \bar{h} \in \{0, \frac{1}{16}, \frac{1}{2}\}$. A escolha $h = \bar{h}$ é feita, pois, a magnetização e a densidade de energia correspondem à campos escalares. Desta forma vemos que as dimensões de escala não nulas seriam $\Delta_\sigma = h_\sigma + \bar{h}_\sigma = \frac{1}{8}$ e $\Delta_\varepsilon = h_\varepsilon + \bar{h}_\varepsilon = 1$, onde as funções de correlação de dois pontos na criticalidade ($B = 0$; $T = T_c$; $L \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} G_\sigma(x_1 - x_2) &= \langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle - \langle \sigma(x_1) \rangle \langle \sigma(x_2) \rangle \\ G_\varepsilon(x_1 - x_2) &= \langle \varepsilon(x_1) \varepsilon(x_2) \rangle - \langle \varepsilon(x_1) \rangle \langle \varepsilon(x_2) \rangle \end{aligned}$$

estariam dadas pela relação 2.1. Definindo-se $r \equiv (x_1 - x_2)$ e $\tau = (T_c - T)/T$, próximo da criticalidade, teríamos que

$$G_i(r, \tau, B) = b^{-2\Delta_i} G_i(r/b, \tau b^{y_\tau}, B b^{y_B}).$$

Por outro lado usando-se o teorema de flutuação-dissipação podemos determinar o comportamento das funções resposta χ , C (susceptibilidade e calor específico) para um sistema d -dimensional, obtendo que

$$\chi(\tau, B) = b^{d-2\Delta_\sigma} \chi(\tau b^{y_\tau}, B b^{y_B})$$

$$C(\tau, B) = b^{d-2\Delta_\varepsilon} C(\tau b^{y_\tau}, B b^{y_B}).$$

Como $\chi = -\frac{\partial^2 g}{\partial B^2}$ e $C = -\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}$ integrando-se duas vezes chegamos a

$$\Delta_\sigma + y_B = \Delta_\varepsilon + y_\tau = d,$$

onde a última igualdade surge do escalonamento da parte singular da densidade de energia livre de Gibbs

$$g(\tau, B) = b^{-d} g(\tau b^{y_\tau}, B b^{y_B}).$$

Claramente conhecendo-se d e os diferentes Δ_i , podemos determinar os diferentes expoentes críticos associados à transição de fase continua em estudo.

Se o tamanho do sistema é finito, ao longo de alguma (ou todas) direção, então as funções de correlação sentiriam o efeito desta escala macroscópica finita L , que tira o sistema da criticalidade introduzindo um gap (massa, ver seção 1.1). Portanto em função desta escala macroscópica, esperamos que para $r \equiv (x_1 - x_2) \ll L$ onde a escala macroscópica parece infinita, as funções de correlação de dois pontos ficam bem representadas pela expressão 2.1. Porém se este não é o caso a massa do sistema será percebida e observaremos um decaimento exponencial $\exp(-r/\xi)$. Este tipo de comportamento foi predito analiticamente por Cardy (50) ao realizar o mapeamento conforme

$$w = \frac{L}{2\pi} \ln(z),$$

mapeando todo o plano complexo em uma faixa infinita de tamanho transversal L e com condições periódicas de contorno (cilindro). Esta transformação implica na existência de gaps

$$\xi_i = \frac{L}{2\pi v_s \Delta_i},$$

sendo v_s a velocidade característica do sistema (e.g velocidade do som, da luz,..). Como foi mostrando na seção 1.1 um sistema termodinâmico em equilíbrio em d -dimensões (e.g modelo de Ising) pode ser mapeado em uma cadeia quântica $(d-1)$ -dimensional com uma evolução temporal regida pela Hamiltoniana H_Q (ver E.q 1.4). Portanto a teoria de invariância conforme em duas dimensões também nos dará informações de cadeias quânticas unidimensionais que satisfazem tal invariância. Para estas cadeias, se selecionamos o eixo temporal infinito e o espacial finito de tamanho L , e com condições periódicas, então o

gap de energia da Hamiltoniana H_Q estaria relacionado ao comprimento de correlação temporal como (Ver seção 1.1)

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{\xi_t} = \frac{2\pi v_s \Delta}{L}, \quad (2.2)$$

sendo $\Delta = \min \{\Delta_i\}$. Isto implica que a menor dimensão de escala governa os efeitos de tamanho finito. Autovalores superiores de energia também são preditos pela teoria da invariância conforme, levando às chamadas torres conformes. Associado a cada operador de escala ϕ_i com dimensão Δ_i da teoria de campos conforme adjacente, teríamos uma torre de autovalores $E_{j,j'}^{(\Delta_i)}$ que satisfazem:

$$E_{j,j'}^{(\Delta_i)} - E_0 = \frac{2\pi v_s}{L} (\Delta_i + j + j') + o(1/L), \quad (2.3)$$

onde $j, j' = 0, 1, 2, \dots$. Mais ainda, conhecendo-se c e Δ_i a degenerescência de $E_{j,j'}^{(\Delta_i)}$ é determinada de maneira única em termos dos caracteres da álgebra de Virasoro. (9, p.203) A energia do estado fundamental E_0 , por outro lado, se comporta como

$$\frac{E_0}{L} = e_\infty - \frac{\pi v_s c}{6L^2} + o(1/L^2), \quad (2.4)$$

onde c é a carga central e e_∞ é a energia por sítio do estado fundamental no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$. Para condições não periódicas de contorno expressões similares à 2.2, 2.3, 2.4 são obtidas substituindo-se no lado direito $L \rightarrow 2L$.

2.2 Origens

Como foi mencionado na seção 1.1 a equação mestra que descreve a evolução de sistemas estocásticos pode ser enxergada como uma equação de Schrödinger em tempo imaginário. (51,52) Nesta descrição o operador de Liouville seria diretamente identificando com a Hamiltoniana quântica ($\mathcal{L} \longleftrightarrow H_Q$). Se esta Hamiltoniana quântica descrevesse um sistema invariante conforme então como resultado teríamos um sistema estocástico invariante conforme com expoente crítico dinâmico $z = 1$, independente da dimensão do sistema, tal como já foi mencionado na seção 1.1 e como pode ser inferido da equação 2.2 para o caso particular $d = 1$. Em outras palavras, para um modelo estocástico invariante conforme os comprimentos de correlação espacial $\xi_{\vec{r}}$ e temporal ξ_t seriam proporcionais ao tamanho do sistema L , ficando assim L como a única escala do sistema. (53)

No caso de sistemas estocásticos, a energia do estado fundamental do Hamiltoniano associado deve ter o valor $E_0 = 0$ para um tamanho arbitrário. Condição necessária para garantir que a Hamiltoniana H_Q corresponda à um operador de evolução de um sistema estocástico. Este requerimento junto com a equação 2.4 implicariam que $e_\infty = 0$ no limite $\lim_{L \rightarrow \infty} E_0$ e portanto para um tamanho finito do sistema se teria que satisfazer que $v_s c = 0$. Assim se estudamos um sistema com velocidade do som $v_s \neq 0$ necessariamente

$c = 0$ deve ser o valor da carga central para modelo estocástico invariante conforme. Em tal modelo os autovalores de energia estariam regidos pela equação 2.3 sendo $Re(E_{j,j'}^{(\Delta_i)}) \geq 0$ e Δ_i as diferentes dimensões de escala associadas aos diversos operadores de escala ϕ_i do modelo. Em condições não periódicas estes autovalores estariam dados por

$$Re(E_{j,j'}^{(\Delta_i)}) = \frac{\pi v_s}{L} (\Delta_i + j + j'). \quad (2.5)$$

O modelo estocástico estudado nesta tese é uma extensão do primeiro modelo invariante conforme conhecido na literatura (2, 53). Este modelo surgiu ao observar-se uma conexão entre a cadeia quântica unidimensional XXZ (54) e a representação de semi-círculos não intersectantes da álgebra de Temperley–Lieb. (1, 2, 4, 53, 55) Nesta conexão a cadeia de L spins $1/2$, com condições abertas, é descrita pela Hamiltoniana

$$H_{xxz} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{L-1} \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{q + q^{-1}}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right) + \frac{q - q^{-1}}{2} (\sigma_1^z - \sigma_L^z) \right],$$

sendo $\vec{\sigma}_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ matrizes de Pauli associadas aos sítios $i = 1, 2, \dots, L$. Esta Hamiltoniana pode ser re-escrita em termos de representações matriciais dos geradores $(e_i)_{4 \times 4}$ da álgebra de Temperley–Lieb como (55):

$$H_{xxz} = \sum_{i=1}^{L-1} \left(\frac{q + q^{-1}}{4} - e_i \right),$$

em que os geradores $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, L$) satisfazem à álgebra de Temperley–Lieb

$$e_i^2 = (q + q^{-1}) e_i; \quad e_i e_{i \pm 1} e_i = e_i; \quad [e_i, e_j] = 0 \text{ para } |i - j| > 1.$$

Esta Hamiltoniana (H_{XXZ}) é exatamente integrável (54), e sabe-se que para $-1 \leq \frac{q+q^{-1}}{2} \leq 1$ a mesma é crítica e invariante conforme. (52) Porém, para termos um modelo estocástico é necessário poder escrever a Hamiltoniana na forma geral (1, 3) :

$$H = \sum_a c_a (1 - w_a); \quad c_a \geq 0, \quad (2.6)$$

onde w_a é um produto arbitrário de geradores $\{e_i\}$ (palavras da álgebra). Ao representarmos a Hamiltoniana em uma base de palavras independentes então teríamos que $H_{jk} \leq 0$ para $j \neq k$ e $\sum_k H_{jk} = 0$. Se entre estas palavras independentes escolhemos a Hamiltoniana com apenas as palavras w_a correspondentes aos geradores e_a da álgebra de Temperley–Lieb, então teríamos a condição $(q + q^{-1}) = 1$. (3, 56) Com esta restrição a Hamiltoniana H_{xxz} ficaria como

$$H_{xxz} = \sum_{i=1}^{L-1} \left(\frac{1}{4} - e_i \right),$$

onde para ficar no formato da Hamiltoniana estocástica 2.6 um termo adicional $\sum_{i=1}^{L-1} \frac{3}{4}$ levaria ao modelo estocástico invariante conforme. Neste caso $E_0 = 0$ para todo L e $c = 0$.

Para este modelo a representação dos geradores $\{e_i\}$ em termos das matrizes de Pauli σ^x , σ^y , σ^z é dada por (53)

$$e_i = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{1}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_i^z - \sigma_{i+1}^z) \right],$$

e o operador de Liouville estaria dado por

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{L-1} (1 - e_i), \quad (2.7)$$

onde a velocidade do som do modelo (decorre da solução exata do modelo) seria $v_s = 3\sqrt{3}/2$. (1, 53, 54) As diferentes dimensões de escala do modelo são dadas por $\Delta_s = \frac{s(2s-1)}{3}$ com o spin $s = 0, 1, 2, \dots$, para um tamanho de rede par $L = 2n$. (1, 3)

O modelo original (2, 53) contempla como base vetorial o conjunto das diferentes configurações de n semi-círculos não intersectantes sobre uma rede de tamanho $L = 2n$. Esta base é ilustrada na figura 7 para o caso $L = 6$ e sobre esta base os autovalores

Figura 7 – Base vetorial de $n = 3$ semi-círculos que não se interceptam sobre uma rede de tamanho $L = 2n$. Também conhecido como ideal à esquerda da álgebra de Temperley-Lieb. (3, 57)

Fonte: Elaborada pelo autor.

do operador de Liouville se reduzem àqueles obtidos no setor de spin zero ($s = 0$) da Hamiltoniana quântica, implicando que $\Delta_s = 0$ e portanto de 2.5:

$$E = \frac{\pi v_s}{L} (k), \quad (2.8)$$

com $k = 2, 3, 4, \dots$. Para se determinar a ação do operador de Liouville sobre os diferentes elementos da base, representamos pictoricamente na figura 8 os geradores e_i :

Figura 8 – Representação pictórica do gerador e_i na álgebra de Temperley-Lieb. Para condições de contorno livres $i = 1, 2, \dots, (L-1)$, e para periódicas $i = 1, 2, \dots, L$. (ver (5))

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim o produto $e_i |j\rangle$ é obtido graficamente localizando a representação de e_i diretamente baixo do diagrama de semi-círculos $|j\rangle$, eliminando posteriormente a linha tracejada intermediária e o laços fechados. No final temos uma transformação homeomórfica que leva da configuração $|j\rangle$ para outra representação de semi-círculos $|j'\rangle$. Dois exemplos deste tipo de produtos são apresentados na figura 9 ilustrando os produtos $e_2 |1\rangle$ e $e_2 |2\rangle$

Figura 9 – Representação pictórica dos produtos $e_2 |1\rangle = |2\rangle$ e $e_2 |2\rangle = |2\rangle$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

para uma rede de tamanho $L = 6$ no espaço de Hilbert formado pelas configurações representadas na figura 7.

Esta representação de semi-círculos pode ser mapeada em uma superfície de $L + 1$ sítios com inclinação média zero, satisfazendo à restrição

$$|h_{i+1} - h_i| = 1, \quad h_i \in \mathbb{Z},$$

sendo h_i a altura do contorno na i -ésima posição da rede. A transformação é obtida associando-se à altura h_i o número de semi-círculos que cruzam a linha vertical posicionada em $x = (x_i + x_{i+1})/2$. No caso de condições livres de contorno associamos o valor $h_0 = h_L = 0$. Um exemplo disto é desenhado na figura 12 ilustrando as superfícies obtidas a partir da base vetorial de semi-círculos (figura 7).

A transformação inversa que leva o contorno da superfície em representações de semi-círculos é obtida ao desenhar as diferentes linhas de contorno de iguais alturas entre as bordas da superfície tal como se ilustra na figura 10, onde as linhas de contorno são

Figura 10 – Equivalência entre as linhas de contorno tracejadas nas alturas $h_{i+1/2}$ da superfície e a representação de semi-círculos da álgebra de Temperley-Lieb.

Fonte: GIER et al. (2, fig. 3)

desenhadas nas alturas $h_{i+1/2} = (h_i + h_{i+1})/2$. Uma vez desenhadas todas as linhas, a

representação de semi-círculos é obtida endireitando a superfície e refletindo o diagrama de semi-círculos horizontalmente tal como se ilustra na figura 10. Claramente mediante este tipo de transformação a representação de semi-círculos, ou a de uma superfície flutuante, são equivalentes. Assim a evolução do operado de Liouville 2.7 nos dá o primeiro modelo de crescimento de superfícies estocástico que apresenta invariância conforme. Na próxima seção este modelo será perturbado por dois parâmetros (u, p) correspondendo ao caso $(u = 1, p = 1)$ do modelo original descrito pelo operador de Liouville 2.7. A introdução dos parâmetros (u, p) foi escolhida para manter as mesmas transições $|j\rangle \rightarrow |j'\rangle$ do operador de Liouville 2.7, no entanto modificando suas taxas de transferência $W_{j' \leftarrow j}$. Como veremos, nesta interpretação de superfície flutuante a superfície separaria duas fases: uma sólida e uma gasosa. A evolução da superfície de separação das fases estaria governada por absorções locais e dessorções não locais de tijolos (*adatoms*) na fase sólida.

2.3 Modelo

O modelo *Raise and Peel* pode ser enxergado como um modelo de crescimento sobre uma rede unidimensional de tamanho L , onde a dinâmica é governada por uma equação mestra do tipo

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\overleftrightarrow{H}\vec{P}, \quad (2.9)$$

sendo o tempo uma variável real. Neste modelo o contorno da superfície em crescimento é uma função da posição da rede, satisfazendo à restrição

$$|h_{i+1} - h_i| = 1, \quad h_i \in \mathbb{Z},$$

sendo h_i alturas inteiras positivas do contorno na i -ésima posição da rede. Para condições periódicas a única condição extra que tem que ser satisfeita é que $h_i = h_{i+L}$, porém para condições livres de contorno $h_i \geq 0$ e $h_0 = h_L \equiv 0$. A dinâmica do modelo pode ser interpretada em termos de um gás rarefeito de tijolos que eventualmente atingem a superfície em crescimento, desencadeando uma absorção local ou uma dessorção não local. A absorção acontece nos mínimos da superfície à uma taxa u_a e a dessorção acontece nos declives da superfície à uma taxa u_d . Uma ilustração destas regras é apresentada na figura 11. Em uma unidade de tempo, os seguintes processos podem ocorrer:

- a) O tijolo “b” no estado gasoso atinge um pico da superfície. Neste caso o mesmo é refletido sem modificar-lha.
- b) O tijolo “d” atinge um mínimo local da superfície e é adsorvido com taxa u_a .
- c) O tijolo “a” que atinge a superfície pela esquerda na posição “k”, desencadeia uma dessorção pela direita de todos os tijolos adjacentes no contorno da superfície com altura $h \geq h_k$ (consideramos dois tijolos como adjacentes se os mesmos compartilham dois vértices). Este processo de dessorção é realizado com uma taxa u_d .

Figura 11 – Variações da superfície em crescimento de acordo com o modelo Raise and Peel. Os tijolos “a” e “c” que atingem a superfície em declives podem desencadear uma dessorção não local dos tijolos sombreados. O tijolo “b” que atinge a superfície em um máximo local é refletido sem modificar-lha, e o tijolo “d” que atinge a superfície em um mínimo local pode ser absorvido.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- d) O tijolo “c” atinge a superfície pela direita, o processo de dessorção acima descrito é realizado em direção oposta, da direita para a esquerda.

Adicionalmente aos processos de absorção e dessorção, também é introduzido um parâmetro “ p ” que controla a probabilidade de um tijolo no gás rarefeito atingir algum pico da superfície. Normalizando a probabilidade de atingir a superfície, teremos que para uma dada configuração a probabilidade de algum pico ser atingido P_{peak} mais a probabilidade de algum não pico ser atingido $P_{Non-Peak}$ tem que se manter fixa, ou seja

$$P_{peak} + P_{Non-Peak} = 1. \quad (2.10)$$

Para uma configuração com um número de picos N_{peak} , e um tamanho de rede L , definimos

$$P_{peak} = \frac{N_{peak}}{L-1}p, \quad (2.11)$$

$$P_{Non-peak} = \frac{(L-1-N_{peak})}{L-1}q, \quad (2.12)$$

para condições livres de contorno. E definimos

$$P_{peak} = \frac{N_{peak}}{L}p,$$

$$P_{Non-peak} = \frac{(L-N_{peak})}{L}q,$$

para o caso de condições periódicas de contorno. As diferenças nestas duas definições provêm do número de pontos da rede que ao serem atingidos por um tijolo podem produzir mudanças na superfície. No caso das condições livres de contorno só os tijolos chegando nos sítios $i = 1 \cdots (L - 1)$ podem modificar a superfície, porém no caso periódico o sítio $i = L$ também consegue modificar a superfície. Além disto os parâmetros p e q não são independentes, pois eles têm que satisfazer a equação 2.10. Por isso ao fixar o valor de p é determinado um único valor q_j para a configuração j . Estes valores de q_j , junto com os parâmetros u_a e u_d determinam de maneira única os elementos da matriz intensidade $\overleftrightarrow{H}$. O elemento de matriz conectando a configuração $|j\rangle$ à configuração $|i\rangle$ com $i \neq j$, será não nulo nos seguintes casos:

- a) $H_{ij} = -u_a q_j$, sempre que a configuração $|i\rangle$ seja alcançada a partir da configuração $|j\rangle$ por uma absorção de um tijolo em algum mínimo local da superfície.
- b) $H_{ij} = -u_d q_j$, sempre que exista um único jeito de se atingir a configuração $|i\rangle$ partindo da configuração $|j\rangle$ por meio de um processo de dessorção.
- c) $H_{ij} = -2u_d q_j$, quando existam duas formas de atingir a configuração $|i\rangle$ partindo da configuração $|j\rangle$ por processos de dessorção.

Finalmente como $\overleftrightarrow{H}$ é uma matriz intensidade os elementos diagonais H_{ii} tem que obedecer $H_{ii} = -\sum_{j \neq i} H_{ij}$, já que $\sum_j H_{ji} = 0$ para $\forall i$.

Como ilustração do processo de construção da matriz $\overleftrightarrow{H}$, consideremos o caso de condições livres de contorno ($h_0 = h_L = 0$) e um tamanho de rede $L = 6$. Para este caso a dimensão da matriz será 5×5 , e a base vetorial será dada pelas 5 configurações apresentadas na figura(12). Para estas configurações vemos que $q_1 = \frac{(5-p)}{4}$, $q_2 = q_3 = q_4 = \frac{(5-2p)}{3}$ e $q_5 = \frac{(5-3p)}{2}$. Assim vemos que o elemento $H_{35} = -u_a q_5$, pois para ir da configuração $|5\rangle \rightarrow |3\rangle$ o único jeito é por uma absorção de um tijolo na posição 2 da rede. O elemento $H_{42} = -u_d q_2$, pois um processo de dessorção pode ser desencadeado por um tijolo chegando na posição 1 da rede. Finalmente o elemento $H_{15} = 0$, pois não existe nenhum processo no modelo que leve diretamente da configuração $|5\rangle$ para a configuração $|1\rangle$, porém o elemento $H_{51} = -2u_d q_1$ pois um tijolo atingindo a posição 1 ou 5 da rede pode acionar uma dessorção não local que leva da configuração $|1\rangle \rightarrow |5\rangle$.

A matriz de intensidade completa, que determina a evolução temporal dos estados na figura 12 através da equação 2.9 é apresentada na equação 2.13.

Claramente a soma dos elementos de cada coluna de H é igual a zero. Fora disto é possível observar que nos casos $u_a = 0$ ou $p = 5/3$ é possível chegar no estado $|5\rangle$ mas não é possível sair, ou seja, estamos falando de um estado absorvente. O caso $u_a = 0$ para condições livres é interessante pois $\overleftrightarrow{H}$ vira uma matriz triangular. Assim os autovalores estarão dados pelos elementos da diagonal. Existe um conjunto de condições iniciais cuja evolução pode ser obtida analiticamente. Este ponto sera aprofundado no Capítulo 3.

Figura 12 – Representação do espaço de configurações para o modelo *Raise and Peel* com $L = 6$ sítios e condições livres de contorno. Os estados $|1\rangle$ e $|5\rangle$ com um pico e $L/2$ picos serão chamados por conveniência **pirâmide** e **substrato**.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\overleftrightarrow{H} = \begin{pmatrix} 4u_d \frac{(5-p)}{4} & -u_a \frac{(5-2p)}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -2u_d \frac{(5-p)}{4} & (u_a + 2u_d) \frac{(5-2p)}{3} & -u_a \frac{(5-2p)}{3} & -u_a \frac{(5-2p)}{3} & 0 \\ 0 & -u_d \frac{(5-2p)}{3} & (u_a + 2u_d) \frac{(5-2p)}{3} & 0 & -u_a \frac{(5-3p)}{2} \\ 0 & -u_d \frac{(5-2p)}{3} & 0 & (u_a + 2u_d) \frac{(5-2p)}{3} & -u_a \frac{(5-3p)}{2} \\ -2u_d \frac{(5-p)}{4} & 0 & -2u_d \frac{(5-2p)}{3} & -2u_d \frac{(5-2p)}{3} & 2u_a \frac{(5-3p)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Por outro lado o caso $p = 5/3$ representa o limite superior que o parâmetro “ p ” poderia ter para que P_{Peak} e $P_{Non-Peak}$ nas equações (2.10, 2.11, 2.12) sejam positivos e menores que 1. Não obstante, este problema pode ser contornado redefinindo-se

$$P_{peak} \equiv \min \left\{ 1, \frac{N_{peak}}{L-1} p \right\}. \quad (2.14)$$

Neste caso p pode tomar qualquer valor positivo e para $p > 5/3$ haverá um incremento do número de estados absorventes. O menor valor de p para o qual se tem estados absorventes é $p_0 = \frac{L-1}{L/2}$, onde o estado absorvente teria $N_{peak} = L/2$ picos. O valor seguinte de p com mais estados absorventes seria $p_1 = \frac{L-1}{L/2-1}$. Neste caso todos os estados absorventes teriam $N_{peak} \geq \left(\frac{L}{2} - 1\right)$. Continuando com este procedimento o j -ésimo valor de p no qual o número de estados absorventes é incrementado será $p_j = \frac{L-1}{L/2-j}$, sendo que todos os estados com $N_{peak} \geq \left(\frac{L}{2} - j\right)$ serão estados absorventes. Contudo nem todos eles podem ser alcançados partindo-se de um estado ativo (não absorvente), pois a dinâmica do modelo só permite variações no número de picos dadas por $\Delta N_{peak} = 0, \pm 1, 2$.

O caso com condições periódicas de contorno (PBC) é similar e o valor de p_j se

obtem mudando $(L - 1) \rightarrow L$ obtendo $p_j = \frac{L}{L/2-j}$ com $j = 0, 1, \dots, (L/2 - 1)$ e

$$P_{peak}|_{PBC} \equiv \min \left\{ 1, \frac{N_{peak}}{L} p \right\}. \quad (2.15)$$

Como será apresentado na presente tese, as definições (2.14) e (2.15) permitem estender o modelo *raise and peel*. Nesta extensão teremos o surgimento de estados quase-estacionários assim como múltiplos estados absorventes para $p \geq p_0$. Tais estados quase-estacionários desaparecem para valores de p maiores que certo valor crítico p_c .

Em resumo, dependendo das condições de contorno serem periódicas ($b = 0$) ou livres ($b = 1$) temos que

$$P_{peak}|_b \equiv \min \left\{ 1, \frac{N_{peak}}{L-b} p \right\}, \quad (2.16)$$

$$q|_b \equiv \max \left\{ 0, \frac{L-b-N_{peak} \cdot p}{L-b-N_{peak}} \right\}, \quad (2.17)$$

$$p_j|_b = \frac{L-b}{L/2-j}; \quad j = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.18)$$

Destacamos uma vez mais que q e p não são parâmetros independentes. Além disto com estas definições veremos que $H_{i \neq j} \leq 0$ e para cada estado absorvente que surge para $p \geq p_0$ observaremos uma coluna de zeros na Hamiltoniana.

Finalizamos esta seção ressaltando que a matriz intensidade $\overleftrightarrow{H}$ pode ser escrita como uma combinação linear de um operador local e um operador não local, i.e:

$$\overleftrightarrow{H} = u_a \overleftrightarrow{H}_{Local} + u_d \overleftrightarrow{H}_{Non-Local}.$$

Esta equação, junto com a equação mestra 2.9, mostra que um dos parâmetros u_a ou u_d é prescindível, pois só contribui como um fator de escala temporal. Assim sendo só é necessário a razão deles, por exemplo $u = u_a/u_d$ ou $w = u_d/u_a$. (58)

2.4 Interpretações alternativas

Embora nesta tese o modelo *raise and peel* (RPM) seja apresentado como um modelo que descreve a dinâmica de uma superfície em crescimento, existem outras interpretações. Por exemplo o modelo pode ser mapeado em um sistema partículas-buracos sobre uma rede unidimensional onde duas partículas não podem ocupar o mesmo sítio (exclusão). Neste modelo as partículas se deslocam para a esquerda localmente e para a direita não localmente, com deslocamentos até da ordem do tamanho do sistema L . A introdução do parâmetro $p \neq 1$ do *peak adjusted raise and peel model* (PARPM) influencia o movimento das partículas dependendo do número de aglomerados (clusters) na rede. Este modelo pode ser visto como uma generalização do problema de exclusão assimétrico simples ASEP

(*asymmetric simple exclusion process*) (59,60) para uma dinâmica não local. Alguns estudos sobre este modelo foram realizados por Alcaraz e Rittenberg. (5)

Alternativamente é possível construir uma versão bosônica do PARPM utilizando o mesmo mapeamento que existe entre o *zero-range process* (ZRP) e *ASEP*. (19,61) Nesta versão não local do ZRP o sistema teria tamanho $L/2$ e a introdução do parâmetro p influenciaria o movimento das partículas em função da fração de sítios ocupados da rede. Sem entrar em maiores detalhes, na figura 13 são apresentadas as diversas interpretações

Figura 13 – Diversas interpretações do PARPM. A) Modelo para a evolução de uma superfície. B, C, D) Em função da inclinação da superfície atribuímos um spin, uma carga, uma partícula ou buraco. E) Versão bosônica do modelo em D. Como se observa as interpretações B – E tem uma dinâmica local em uma direção e não local na outra e as taxas de movimentação dependem do parâmetro p através do número de clusters D ou da fração de sítios ocupados E .

Fonte: Elaborada pelo autor.

do *PARPM*. Observemos que nestas interpretações é possível ampliar o modelo ao considerarmos sistemas onde o número de partículas e buracos não sejam iguais.

3 REGIÃO MASSIVA ($U < 1$)

Começamos a exposição dos resultados na região do diagrama de fase onde $u \rightarrow 0$ (região I_a da figura 1). Nesta região do espaço de parâmetros a taxa de absorção u_a é menor do que a taxa de dessorção u_d , assim se $u \neq 0$ esperamos que a dessorção domine resultando em um estado estacionário onde a primeira camada acima do substrato* ($h_i \leq 2$) esteja formada por pequenos clusters de tijolos contíguos que desaparecem rapidamente, o que nos diz que a superfície flutuante será suave e a velocidade assintótica $v_{t \rightarrow \infty}$ da superfície será nula em condições periódicas.

Como veremos esta região é interessante devido à presença de blocos de Jordan no operador de evolução que dependendo da condição inicial podem mascarar a dinâmica assintótica. Assim poderia parecer que o sistema é crítico quando na realidade é massivo. Este comportamento se assemelha com outro comportamento encontrado em sistemas de não equilíbrio conhecido como “*critical initial slip*”. (15, 19, 62, 63) Neste comportamento a dinâmica do sistema mantém a memória da condição inicial até um tempo característico t_c , que depende da condição inicial. Neste caso a expressão 1.7 teria que ser modificada adicionando-se um campo de escala (parâmetro) que leve em conta este tempo característico t_c . (15)

3.1 O problema

Para valores de $u \rightarrow 0$ o modelo *raise and peel* (*RPM*) em seu estado estacionário, ou assintoticamente próximo, teria tijolos principalmente na primeira camada sobre o substrato ($h_i \leq 2$). Nestas condições as dessorções seriam locais. Veremos que neste limite o RPM seria um modelo de crescimento com uma dinâmica assintótica onde o crescimento aconteceria aleatoriamente nos mínimos da superfície mas a evaporação aconteceria nas bordas dos clusters de tijolos contíguos nesta primeira camada. Por conseguinte no limite $u \rightarrow 0$ o *RPM* pode ser mapeado em um modelo de crescimento com evaporação nas bordas, (23, 64, 65) tal como se ilustra na figura 14. Neste modelo a absorção acontece aleatoriamente em algum sítio da rede a uma taxa q e a dessorção acontece nas bordas dos planaltos a uma taxa $(1 - q)/2$, obtendo uma transição rugosa em $q_c \simeq 0.189$ com uma superfície em movimento para $q > q_c$. (23) Na correspondência com o RPM teríamos que $u_c = u_a/u_d = 2q_c/(1 - q_c) \simeq 0.466$ e portanto esperaríamos que para $u < 0.466$ a superfície flutuante descrita pelo RPM seja suave e sem velocidade vertical. Para $u > 0.466$ só podemos dizer que começarão a aparecer dessorções não locais no RPM que suavizarão a superfície fazendo-se necessário incrementar o valor de u_c acima de 0.466 para alcançar a transição rugosa.

*O estado com $L/2$ picos será chamado de substrato (ver figura 12).

Figura 14 – Equivalência entre o RPM para valores de $u \ll 1$ e um modelo de crescimento com evaporação nas bordas dos planaltos (23, 64, 65).

Fonte: Adaptada de HINRICHSSEN. (23)

Nesta região onde os aglomerados de tijolos contíguos desaparecem rapidamente, a superfície é suave e esperamos aglomerados de tamanho pequeno, independente de L . Podemos dizer então que estamos em uma fase massiva. Portanto nesta região não-crítica um escalonamento dinâmico, como o proposto pelas equações 1.10 e 1.12, não seria possível. No entanto, como se ilustra na figura 15, a evolução temporal da altura média

Figura 15 – Simulações de Monte Carlo com 3200 amostras, utilizando a configuração pirâmide como condição inicial. À esquerda é mostrado, para diversos valores de L , o comportamento da altura média em função do tempo utilizando os parâmetros $u = 0.16$ e $p = 0$. À direita é apresentado o colapso das distintas curvas escalando-se o tempo pelo fator $1/L^z$. A constante $L_{ref} = 122000$ foi utilizada por conveniência para poder comparar na mesma escala temporal as duas figuras. Os valores $z = 0.995$ e $\chi = 0.481$ foram utilizados para colapsar as diversas dinâmicas obtidas com condições livres de contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$h(L, t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h_i(t)$ tomando-se $u = 0.16$ e $p = 0^*$ para a condição inicial pirâmide[†], nos mostra uma aparente contradição ao lograr escalar as diferentes dinâmicas para os

*Como será mostrado no capítulo 5 o efeito do parâmetro p é introduzir uma dilatação temporal na dinâmica do RPM.

[†]O estado com 1 pico é o que denominamos por pirâmide (ver figura 12).

tamanhos de rede $8000 \leq L \leq 122000$, nos dando um expoente dinâmico $z \simeq 1$. O mesmo comportamento é observado para valores de u menores até se atingir o valor $u = 0$.

Procurando entender este comportamento, aparentemente contraditório, determinamos para condições livres de contorno os autovalores de energia para o caso especial $u = 0$. Estes autovalores podem ser facilmente obtidos dos elementos diagonais do operador Hamiltoniano. Isto se deve ao fato de neste caso especial, o operador Hamiltoniano (ver equação 2.13) ser uma matriz triangular. Para perceber isto basta ordenarmos o espaço de Hilbert de acordo com o número de tijolos acima do estado substrato. A matriz intensidade neste ordenamento é triangular pois com $u = 0$ a transição do estado $|j\rangle \rightarrow |i\rangle$ ($i \neq j$) é proibida se o número de tijolos da configuração $|i\rangle$ é maior ao da configuração $|j\rangle$, implicando $H_{ij} = 0$.

O elemento diagonal H_{jj} do modelo é dado por

$$(N_{decl} \cdot u_d + N_{val} \cdot u_a)_j q_j,$$

onde N_{decl} representa o número de declives*, N_{val} o número de vales† e $u_a(u_d)$ a taxa absorção (dessorção). No caso $u = 0$ teríamos

$$E(N_{peak}, p, L, u_d) = \max \left\{ 0, u_d (L - 2 \cdot N_{peak}) \left(\frac{L - 1 - N_{peak} \cdot p}{L - 1 - N_{peak}} \right) \right\},$$

onde foi usada a equação (2.17) para condições livres e a relação $N_{decl} = L - 2 \cdot N_{peak}$ para uma dada configuração j de tamanho L . Esta expressão para os autovalores depende do número de picos N_{peak} , portanto, para $p < p_1$ só os autovalores com $N_{peak} = 1$ e $N_{peak} = L/2$ são não degenerados. Para qualquer outro valor do N_{peak} a degenerescência incrementa com L . Estes autovalores podem ser arranjados crescentemente mudando-se a variável $N_{peak} = \frac{L}{2} - i$, obtendo-se

$$E_i = \max \left\{ 0, 2i \cdot u_d \left[(2 - p) + 2(p - 1) \frac{(2i - 1)}{L + 2(i - 1)} \right] \right\}, \quad (3.1)$$

onde $i = 0, 1, \dots, L/2 - 1$. Assim o primeiro autovalor não nulo, e portanto o gap de energia, estaria dado por

$$\Delta E = E_1 = \max \left\{ 0, 2 \cdot u_d \left[(2 - p) + \frac{2(p - 1)}{L} \right] \right\}, \quad (3.2)$$

implicando claramente que para $u = 0$ e $p < 2$ o sistema será massivo. Portanto a evolução temporal do valor esperado de um observável X estaria dado por

$$\langle X \rangle(t) = \langle 0 | X e^{-Ht} | \psi(t=0) \rangle.$$

*Os declives são pontos na rede que podem desencadear uma dessorção.

†Os vales, ou mínimos, são pontos na rede onde pode acontecer uma absorção.

Figura 16 – Gráfico semilogarítmico da evolução da altura média calculada sobre 3200 amostras utilizando o método de simulação de Monte Carlo (curva preta). A simulação foi iniciada da configuração pirâmide com um tamanho de rede $L = 122000$ e com os parâmetros $(u_a, u_d, p) = (0, 1, 0)$. A curva vermelha é obtida pelo ajuste da função $A(t_c - t)^\gamma e^{-E't}$ nas proximidades do estado estacionário ($h(t \rightarrow \infty) = 0.5$), encontrando $(A, t_c, \gamma, E') = (1.4965 \times 10^{-7}, 15360, 2, 5.243 \times 10^{-5})$. Como se observa $t_c \simeq 6 \times 10^4 \tau$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se a base de autovetores $\{\phi_n\}$ do operador H é completa, então a condição inicial poderá ser expandida nesta base como

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle,$$

implicando que

$$\langle X \rangle(t) = \sum_n c_n e^{-E_n t} \langle 0 | X | \phi_n \rangle, \quad (3.3)$$

onde $\langle 0 | = (1, 1, 1, 1, \dots, 1)$, e claramente a dinâmica assintótica será governada pelo autovalor de energia com a menor parte real não nula. Em outras palavras o maior tempo de decaimento característico será dado por $\tau = \text{Real}(1/E_1)$. Para o modelo estudado nesta tese vemos que para $u = 0$ e $p < 2$ este tempo será $\tau = 1/(2 \cdot u_d(2 - p))$ no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$. Porém, como se observa na figura 16 este tempo característico é superado por cinco ordens de magnitude ao medir-se a altura média de superfície partindo da configuração inicial pirâmide. Os resultados apresentados na figura 16 foram obtidos tomando-se a média de 3200 amostras de uma simulação de Monte Carlo com um tamanho de rede $L = 122000$ e os parâmetros $(u_a, u_d, p) = (0, 1, 0)$. Como se observa na escala semilogarítmica a evolução assintótica da altura média não parece estar dominada por uma exponencial pura, aliás é possível ajustar-se a tal comportamento assintótico da altura média uma função do tipo $A(t_c - t)^\gamma e^{-E't}$. Este ajuste foi adicionado na figura 16 com os valores $t_c = 15360$, $\gamma = 2$ e $E' = 5.243 \times 10^{-5}$. Destes valores o mais intrigante é o

valor de E' pois este não corresponde à nenhum dos autovalores de energia E_i do operador Hamiltoniano (ver equação 3.1). Procurando a solução deste enigma chegamos à conclusão que a expressão 3.3 teria que ser modificada para incluir um termo que possa competir com o decaimento exponencial, ou seja no limite assintótico teríamos que ter

$$\langle X \rangle(t) \simeq \langle X_\infty \rangle + \langle X_m \rangle \left[(t_c - t)^\gamma \sum_{k=0}^{d_m-1-\gamma} \frac{(a \cdot t)^k}{k!} + \mathcal{P}_{d_m-1}(t) \right] \exp(-E_m \cdot t) + \dots, \quad (3.4)$$

onde ao m -ésimo autovalor de energia E_m teria associado um bloco de Jordan de tamanho d_m ou maior, indicando que o espaço de autovetores da Hamiltoniana não é completo. Nesta expressão o termo $\mathcal{P}_{d_m-1}(t)$ representa um polinômio em t de grau $(d_m - 1)$, que em geral pode ser rapidamente amortecido pelo fator exponencial $\exp(-E_m \cdot t)$. Contudo a somatória restante pode ser aproximada por uma exponencial para tempos inferiores a $\frac{(d_m-\gamma)}{a}$, onde a condição $\frac{(a \cdot t)^{(d_m-1-\gamma)}}{(d_m-1-\gamma)!} > \frac{(a \cdot t)^{(d_m-\gamma)}}{(d_m-\gamma)!}$ é satisfeita. Com esta aproximação a expressão 3.4 se comportaria como

$$\langle X \rangle(t) \simeq \langle X_\infty \rangle + \langle X_m \rangle (t_c - t)^\gamma \exp[-(E_m - a) \cdot t] + \dots,$$

para tempos $t < \frac{(d_m-\gamma)}{a}$, e o decaimento exponencial $\exp(-E_m \cdot t)$ só seria percebido para tempos maiores. Com esta explicação os enigmas do tempo característico τ e do comportamento assintótico $(t_c - t)^\gamma e^{-E't}$ percebido na figura 16, estariam resolvidos escolhendo-se $E' = (E_m - a)$ e observando que o tempo característico de decaimento poderia aumentar até $\min \left\{ t_c, \frac{(d_m-\gamma)}{a}, \frac{1}{(E_m-a)} \right\}$. De fato, como será apresentado na próxima seção para $u = 0$, a aparição de blocos de Jordan acontece na Hamiltoniana, $t_c \sim \frac{(d_m-\gamma)}{a}$ e incrivelmente $a = E_1$. Além disso veremos que a dimensão do bloco de Jordan (d_m) associado à dinâmica da superfície depende da condição inicial e pode chegar a crescer com o tamanho do sistema L , logrando explicar o colapso da figura 15 com o aparente expoente dinâmico $z \simeq 1$.

3.2 Modelo raise and peel sem absorção

Em continuação desenvolveremos a solução analítica do *peak adjusted raise and peel model* (PARPM) para o caso $u = 0$. Embora os resultados que apresentaremos são obtidos para condições livres de contorno, claramente eles continuam válidos para condições periódicas. Para ver isto, podemos ver que a dinâmica obtida a partir de uma condição inicial arbitrária em condições periódicas, pode ser mapeada na dinâmica de uma condição inicial equivalente para condições livres de contorno. A condição inicial equivalente é definida como segue:

- a) Para a condição inicial com condições periódicas é determinado a menor posição (k) do mínimo global da superfície.
- b) Depois é definido o contorno da superfície em condições livres como $h_{non-periodic}(i) = h_{periodic}(i + k) - h_{periodic}(k)$.

Este mapeamento é útil quando $u = 0$, pois ao não ter absorção a posição (k) do mínimo global fica invariante até atingir o estado substrato. Além disto só teremos uma modificação no número de sítios da rede que ao serem atingidos por um tijolo podem modificar a superfície, sendo $(L - 1)$ para condições livres e L para condições periódicas. Porém como se observa nas equações 2.16-2.18, este sítio adicional não altera o limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$.

Ficando este mapeamento claro, nos enfocaremos em estudar o PARPM próximo do estado estacionário* e para valores de $p \leq 2$. Para tal objetivo escolheremos estados próximos do estado substrato como condição inicial, pois independente da condição inicial a dinâmica assintótica sempre terá que passar por alguma destas configurações. Como pode ser observado da equação 3.1, os estados mais próximos do estado estacionário (E_0) são todos os estados com $N_{peak} = L/2 - 1$ picos sendo portanto os estados com o maior tempo característico de decaimento $\tau_i = 1/E_i$. Em resumo ao partir de alguma destas condições iniciais só os dois autovalores mais baixos (E_0 e E_1)† aparecerão na solução da equação mestra (2.9)

$$\vec{P}(t) = \exp(-\hat{H}t) \vec{P}(t=0),$$

evitando desta forma termos incômodos com tempos característicos menores. O número de estados com $(L/2 - 1)$ picos é $[(L/2 - 1)(L/2)]/2$, correspondendo aos estados que preenchem somente a primeira camada acima do substrato com um tijolo, ou dois tijolos adjacentes, ou três tijolos adjacentes, e assim por diante até $(L/2 - 1)$ tijolos. Certamente, a degenerescência do autovalor E_1 vai para infinito no limite termodinâmico.

Se de todos estes estados selecionamos como condição inicial uma configuração com N_0 tijolos contíguos, então o processo de dessorção levará o sistema à configurações com menos tijolos. Ao resolvermos a equação mestra 2.9, para esta condição inicial, pode-se observar que a probabilidade do sistema se encontrar com $(N_0 - k)$ tijolos em um tempo t será dada por:

$$\mathcal{P}_{(N_0-k)}(t) = \begin{cases} \frac{(E_1 \cdot t)^k}{k!} e^{-E_1 \cdot t} & 0 \leq k < N_0 \\ 1 - \sum_{k=0}^{N_0-1} P_k & k = N_0 (SUBS) \end{cases} \quad (3.5)$$

Por exemplo, considerando-se $N_0 = 3$ e $L = 14$, o sistema pode evoluir entre sete diferentes configurações;

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(t)\rangle = & \left(1 - \sum_{k=0}^2 \frac{(E_1 \cdot t)^k}{k!} e^{-E_1 \cdot t}\right) |SUBS\rangle + \frac{(E_1 \cdot t)^2}{2!} e^{-E_1 \cdot t} (|2, 0\rangle + 2|2, 1\rangle + |2, 2\rangle) / 2^2 \\ & + (E_1 \cdot t) e^{-E_1 \cdot t} (|1, 0\rangle + |1, 1\rangle) / 2 + e^{-E_1 \cdot t} |0, 0\rangle, \end{aligned}$$

*Para $u = 0$ e $p \leq 2$ o estado estacionário é o substrato e também resulta ser um estado absorvente.

†Isto pode ser entendido utilizando-se a equação 3.1 e levando-se em conta que para $u = 0$ os processos de dessorção não podem diminuir o número de picos N_{peak} .

onde os estados $|k, i\rangle$ são mostrados na figura 17. O coeficiente extra $\binom{k}{i} \frac{1}{2^k}$, acompanhando os estados $|k, i\rangle$, é o número das diferentes formas de chegar-se a esta configuração começando-se com N_0 tijolos e desdossando-se um tijolo com igual probabilidade em uma das bordas. A partir da informação geral apresentada na equação 3.5, é possível obter o

Figura 17 – Estados acessíveis pela dinâmica do modelo *raise and peel* partindo do estado $|0, 0\rangle$ com $u = 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

comportamento da altura média $h(L, t)$. Assim como os pontos de contato com o substrato $K(L, t)$ e a densidade de picos e vales $n(L, t)$ (densidade de sítios onde não pode acontecer desdossões). Tais quantidades são definidas respectivamente por:

$$n(L, t) = \frac{1}{L-1} \left\langle \sum_{i=1}^{L-1} \left(1 - \left| \frac{h_{i+1}(t) - h_{i-1}(t)}{2} \right| \right) \right\rangle,$$

$$h(L, t) = \frac{1}{L} \left\langle \sum_{i=1}^L h_i(t) \right\rangle,$$

$$K(L, t) = \left\langle \sum_{i=1}^L \delta_{h_i(t), 0} \right\rangle, \quad (3.6)$$

e se comportam em função do tempo como:

$$\langle n_\infty - n \rangle = \frac{2}{L-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} \frac{(E_1 \cdot t)^k}{k!} e^{-E_1 \cdot t}, \quad (3.7)$$

$$\langle N_{tiles} \rangle = \langle h - h_\infty \rangle \cdot \frac{L}{2} = \langle K_\infty - K \rangle = e^{-E_1 \cdot t} \left\{ \sum_{k=0}^{N_0-1} (N_0 - k) \frac{(E_1 \cdot t)^k}{k!} \right\}, \quad (3.8)$$

onde τ_∞ , h_∞ , K_∞ representam as propriedades do estado (substrato) atingido quando $t \rightarrow \infty$, e N_{tiles} é o número de tijolos acima do substrato. Em ambas expressões (equações 3.7-3.8) para tempos $E_1 \cdot t < N_0$, onde a desigualdade $\frac{(E_1 \cdot t)^{N_0-1}}{(N_0-1)!} > \frac{(E_1 \cdot t)^{N_0}}{N_0!}$ é satisfeita,

Figura 18 – Comparação entre a teoria e a simulação da altura média em função do tempo. Uma dinâmica transitente é observada até um tempo $t_c \sim 62$, valor em total acordo com o tempo $t_c = N_0/E_1$ obtido quando $(u_a, u_d, p, L) = (0, 1, 0, 500)$ e $N_0 = 249$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

a soma $\sum_{k=0}^{N_0-1} \frac{(E_1 \cdot t)^k}{k!}$ pode ser aproximada por $\exp(E_1 \cdot t) + \mathcal{O}\left(\frac{(E_1 \cdot t)^{N_0}}{N_0!}\right)$, suprimindo o decaimento exponencial $\exp(-E_1 \cdot t)$ até $t < t_c$ com $t_c = N_0/E_1$. Depois disto, a dinâmica assintótica é dominada por um termo proporcional a $\frac{(E_1 \cdot t)^{N_0-1}}{(N_0-1)!} e^{-E_1 \cdot t}$. Este comportamento é ilustrado na figura 18 onde é comparada a simulação de Monte Carlo e a predição teórica para a altura média com excelente concordância. Na figura é observado um comportamento linear transitente estendido até $t \approx N_0/E_1$, e suavizado por uma exponencial decrescente ao final. Este comportamento pode ser observado arranjando-se a expressão 3.8 como

$$\langle h - h_\infty \rangle \cdot \frac{L}{2} = e^{-E_1 \cdot t} \left\{ (N_0) \frac{(E_1 \cdot t)^{N_0-1}}{(N_0-1)!} + [N_0 - E_1 \cdot t] \sum_{n=0}^{N_0-2} \frac{(E_1 \cdot t)^n}{n!} \right\}. \quad (3.9)$$

Nesta expressão claramente se observa que o comportamento linear governa até tempos da ordem $t \sim N_0/E_1$, resultado válido para $p \leq 2$. Portanto, utilizando a equação 3.2, observaríamos tempos transientes(t_c) finitos para $p < 2$, sempre que na condição inicial a maior separação entre dois mínimos globais consecutivos permaneça finito e não dependa do tamanho da rede L . Em outras palavras, se começamos com uma configuração contendo dois aglomerados de tijolos de tamanho N_0 e N'_0 sobre a primeira camada ($h_i \leq 2$), então observaremos que estes dois aglomerados não interagem quando $u = 0$. Assim no limite termodinâmico a dinâmica do sistema terá um tempo transitente $t'_c \simeq \max\{N_0, N'_0\}/E_1$. Este resultado pode ser estendido para o caso de mais de dois aglomerados concluindo que estatisticamente o último cluster em desaparecer é aquele que tinha mais tijolos inicialmente.

Outra questão interessante que surge da expressão 3.9 é a de como comparar-se condições iniciais de tamanhos de redes diferentes, para assim poder calcular-se o limite

termodinâmico. Por exemplo, poderíamos comparar diferentes tamanhos de rede partindo de condições iniciais com N_0 fixo ou com N_0/L fixo. No primeiro caso o sistema mostraria um comportamento transiente até o tempo finito $t_c \simeq N_0/E_1$, e depois exibiria sua massa com um decaimento exponencial. Porém, no segundo caso a massa do sistema não será percebida pois $t_c \simeq N_0/E_1 \rightarrow \infty$, parecendo portanto um sistema crítico. De fato este último caso explicaria os comportamentos anômalos encontrados nas figuras 15-16, pois as pirâmides com $N_0(N_0 + 1)/2$ tijolos estariam compostas de N_0 tijolos na sua primeira camada ($h_i \leq 2$), por conseguinte esperaríamos um tempo transiente $t_c \simeq N_0/E_1$ onde a massa não seria percebida. Desta maneira comparando pirâmides que ocupem toda a rede observaríamos que $t_c \sim L$ e assim obteríamos um falso expoente dinâmico $z = 1$, tal como pode ser observado da expressão 3.9 se $N_0 \sim L$ e $t \lesssim N_0/E_1$.

Este comportamento, onde o sistema mantém a memória do estado inicial até um tempo t_c que é função de N_0 , é semelhante ao comportamento conhecido como *critical initial slip* em sistemas críticos de não-equilíbrio. (15) Por exemplo, para a transmissão de uma doença por um processo de contacto a memória do estado inicial com densidade ρ_0 se mantém até um tempo $t_c \sim \rho_0^{1/(\delta-d/z)}$ (ver (15, Eq. 4.125)), sendo d a dimensão, z o expoente crítico e δ um expoente associado à probabilidade de se encontrar pelo menos um sítio ativo, decorrido um tempo t de se ter iniciado a evolução com uma pessoa doente. Com esta memória, que depende da condição inicial, o sistema só exibirá sua natureza massiva ou não-massiva para tempos $t > t_c$. No caso do processo de contato a relação 1.7 será válida só para $t > t_c$. Por exemplo, no caso crítico de um sistema infinito teríamos

$$\rho(\Delta = 0, t > t_c, L = \infty) = t^{-\beta/(z \cdot \nu_r)} \rho(0, 1, \infty).$$

Contudo uma expressão mais geral, que leve em conta a condição inicial em tempos $t < t_c$, precisaria incluir ρ_0 como um campo de escala relevante e assim a relação acima ficaria como

$$\rho(\Delta = 0, t > t_c, L = \infty, \rho_0) = t^{-\beta/(z \cdot \nu_r)} \rho(0, 1, \infty, \rho_0 t^{d/z-\delta}),$$

portanto a relação 1.7 seria substituída por

$$\rho(\Delta, t, L, \rho_0) = b^{\beta/\nu_r} \rho(\Delta b^{-1/\nu_r}, t b^z, L b, \rho_0 b^{z\delta-d}). \quad (3.10)$$

Para o caso do PARPM em $u = 0$ poderíamos definir $\rho_0 = N_0/L = (h(t=0) - h(t \rightarrow \infty))/2$ e se começamos com condições iniciais contendo apenas tijolos na primeira camada ($h_i \leq 2$) então observando-se as expressões 1.8, 3.2, 3.9 poderíamos pensar que

$$\begin{aligned} \rho(\Delta, t, L, \rho_0) &= b^{\beta/\nu_r} \rho(\Delta b^{-1/\nu_r}, \rho_0 b^{-1} - t b^z, L b) \\ &= b^{\beta/\nu_r} \rho(\Delta b^{-1/\nu_r}, t b^z, L b, \rho_0 b^{-1}), \end{aligned}$$

com $\Delta = (2 - p)$, $z = 1$, $\beta = 1$, $\nu_r = 1$ e $\delta = 0$. De fato, para a propriedade $(h(t) - h_\infty)$, escolhendo-se $\Delta = 0$, $L b = 1$ e $\rho_0 L = N_0 = cte$, este escalonamento é satisfeito tal como

Figura 19 – Escalonamento da altura média em função do tempo para duas condições iniciais diferentes, indicando que $h(L, t) - h(L, \infty) = \frac{1}{L} f\left(\frac{t}{L}\right)$ quando $(u, p) = (0, 2)$. Duas condições iniciais foram utilizadas. A primeira um aglomerado de $N_0 = 31$ tijolos na primeira camada (curvas com maior t_c), a segunda são pirâmides com $N_0(N_0 + 1)/2$ tijolos sendo que N_0 deles estão na primeira camada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

pode ser observado na figura 19 ao se escolher duas condições iniciais distintas para realizar o escalonamento. Porém se $\rho_0 L \neq cte$ este escalonamento parece depender de alguma forma não identificada, dos tijolos que não pertencem à primeira camada. Tal fato indica que pode existir algum outro campo de escala relevante a ser incluído na propriedade $(h(t) - h_\infty)$.

Finalmente o último ponto a ressaltar nesta seção pode ser observado da equação 3.1, das expressões $t_c \simeq N_0/E_1$ e de $\tau_i = \text{Real}(1/E_i)$, que o efeito líquido do parâmetro $p < 2$ no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) é a introdução de uma dilatação temporal do tipo $(p_c - p)$ com $p_c = 2$. Como será mostrado no capítulo 5 este comportamento se mantém para $u \neq 0$ e $p_c = p_c(u)$. Também será mostrado que em geral, para $p < p_c$, se tem um expoente dinâmico z diferente do valor obtido em p_c , similarmente ao que acontece para $u = 0$ onde $z = 0$ para $p < 2$ e $z = 1$ para $p = 2$. Assim $p = p_c$ marca uma transição para uma região com múltiplos estados absorventes ($p > p_c$). Esta transição possui um expoente dinâmico $z = 1$ mas é importante ressaltar que o sistema não é invariante conforme pois os autovalores obtidos 3.1 não mantém a estrutura de uma torre conforme 2.3, como pode ser observado ao perceber a presença do termo i^2 no numerador da equação 3.1.

3.3 Como determinar o expoente crítico dinâmico z ?

Como já foi mencionado, dependendo da condição inicial um sistema pode apresentar uma dinâmica transiente até um tempo t_c , que em geral pode depender de uma ou mais propriedades do estado inicial. Portanto surge a seguinte questão: se para um dado sistema físico fora do equilíbrio desconhecemos algum dos campos de escala relevantes do

sistema, então como poderemos determinar o valor do expoente dinâmico z através de transformações de escala entre diversas dinâmicas e tamanhos de rede?

Esta questão faz sentido quando trabalhamos com um sistema físico cujo espectro não poder ser determinado analiticamente para qualquer L . Neste caso nos resta utilizar os métodos numéricos de diagonalização, métodos de simulação da dinâmica ou algumas outras aproximações que desprezem algumas características irrelevantes do modelo original. Entre os métodos de diagonalização e os métodos de simulação um tamanho de rede maior será sempre alcançado por este último método. Em princípio, na criticalidade, quanto maior for o tamanho da rede maior precisão será obtida para o expoente z^* . Nestes casos especiais um dos métodos diretos para se determinar o expoente crítico dinâmico é por comparação das dinâmicas obtidas em diferentes tamanhos de rede (ver (6, Apêndice A)). Porém como foi notado para $u = 0$, comparar dinâmicas sobre diferentes tamanhos de rede mantendo fixo $\rho_0 = N_0/L$, leva à uma dinâmica transiente que se estende à regiões próximas do estado estacionário, com um aparente expoente dinâmico $z = 1$. Se este mesmo comportamento acontece para valores de $u \neq 0$, e o decaimento exponencial que acontece para $t > t_c$ fosse indistinguível entre as flutuações numéricas do estado estacionário, então como poderemos saber que o expoente z encontrado não é um expoente fictício? Uma resposta simples seria utilizar diversos métodos para se determinar z e escolher o valor que mais se repete. No entanto, se queremos utilizar o procedimento de escalar diferentes dinâmicas para determinar o verdadeiro valor de z , outro procedimento poderia ser utilizar a propriedade da condição inicial que sabemos ser relevante para determinar o tempo t_c e modificar-lha em função de L entre os diversos valores extremos que pode tomar. Por exemplo, para o caso $u = 0$ a propriedade $\rho_0 = N_0/L$ pode variar entre $0 \leq \rho_0 \leq 1/2$ onde os casos extremos, no limite termodinâmico, acontecem quando N_0 é fixo ou quando $N_0 = (L/2 - 1)$. Casos intermediários entre estes dois casos poderiam ser encontrados variando-se N_0 como $N_0 \propto L^{\beta'}$. Com esta proposta se não soubéssemos o comportamento de t_c em função de N_0 em algum valor de $\beta' = \beta^*$, estaríamos trabalhando com uma dinâmica que teria um tempo $t_c \simeq cte$ para qualquer condição inicial com N_0 tijolos na primeira camada. Consequentemente esperaríamos que os valores dos expoentes críticos sejam independentes da condição inicial. Assim para um sistema crítico, acima de certo valor de L , teríamos que $t_c < (\tau = 1/\Delta E)$ e portanto para este valor β^* encontraríamos o verdadeiro valor de z . Um exemplo deste tipo é apresentado na figura 20 onde foram utilizados dois tipos de condições iniciais. Na primeira uma pirâmide de $N_0(N_0 + 1)/2$ tijolos e na segunda um aglomerado de N_0 tijolos na primeira camada acima do substrato ($h_i \leq 2$). Para estas condições determinamos os expoentes (z_1, z_2) definidos pela relação

$$\frac{h(t)}{h_\infty} - 1 = L^{z_2} f\left(\frac{t}{L^{z_1}}\right), \quad (3.11)$$

*Isto não é uma regra, de fato existem métodos numéricos que logram uma grande precisão nos expoentes críticos mesmo com redes pequenas (ver (47)).

Figura 20 – Determinação do verdadeiro valor do expoente dinâmico z , ao comparar a dinâmica da altura média para diferentes tamanhos de rede. A comparação foi realizada escolhendo-se o número de tijolos na primeira camada (N_0) como $N_0 \sim L^{\beta'}$, variando β' entre $0 \leq \beta' \leq 1$. (+) valores dos expoentes (z_1, z_2) definidos pela equação 3.11 e obtidos partindo-se da condição inicial pirâmide com $N_0(N_0 + 1)/2$ tijolos (a linha azul é uma guia visual). A curva em verde representa os valores de (z_1, z_2) que seriam obtidos da expressão 3.8 para a dinâmica transiente. Nesta curva a condição inicial seria um aglomerado de N_0 tijolos, todos na primeira camada. O valor $z = 0$, pois este valor é independente da geometria da condição inicial.

Fonte: Elaborada pelo autor.

e observamos seu comportamento como função de β' onde $N_0 \propto L^{\beta'}$. Embora a condição $t_c < (\tau = 1/\Delta E)$ não é satisfeita, se observa que os expoentes $(z_1, z_2) = (0, -1)$ são os mesmos para ambas condições, concluindo que o expoente dinâmico teria que ser $z = 0$. Para fases críticas esperamos que um comportamento semelhante seja observado caso exista um tempo t_c que dependa das condições iniciais. Em tal caso observaríamos que os expoentes (z_1, z_2) dependeriam da condição inicial se $z_1 \neq z$. Voltaremos a este ponto no próximo capítulo.

3.4 Barreira de Schwoebel

Na seção 3.2 observamos a presença de um tempo (t_c) limite em que para $t \lesssim t_c$ a massa do sistema não seria percebida. Ainda mais, percebemos que ao iniciarmos o sistema com configurações em que N_0/L seja fixo, o sistema pareceria crítico no limite termodinâmico. Este comportamento pode ser explicado pela presença de células de Jordan no operador de evolução (Hamiltoniano) que crescem com o tamanho da rede, dificultando assim enxergar-se a dinâmica assintótica. Além disto é necessário que no modelo exista uma taxa não nula $W_{j \leftarrow i}$ para as configurações físicas $|i\rangle, |j\rangle$ que pertençam ao mesmo subespaço de energia, e portanto possam estar vinculados ao mesmo bloco de Jordan. Desta maneira a transição do estado $|i\rangle$ ao estado $|j\rangle$ não teria nenhum custo energético, parecendo que o sistema é crítico. Contudo este comportamento terminaria ao chegar-se na configuração $|i'\rangle$, que ao sofrer uma transição caísse em uma configuração física, que mudará o estado de energia. Assim o tempo t_c estará vinculado ao número máximo de transições

que serão necessárias para chegar-se de uma configuração inicial $|i_0\rangle$ à configuração $|i'\rangle$. Para nosso modelo com $u = 0$ o conjunto de estados $\{|i'\rangle\}$ é construído por todas as configurações com um tijolo acima do substrato. Desta forma ao iniciar-se com um cluster com qualquer geometria e N_0 tijolos na primeira camada, o tempo t_c pode ser entendido se observamos a dinâmica da superfície como um processo de erosão à taxa constante. Este processo de erosão também poder ser visto como um comportamento super-difusivo onde a fase gasosa de tijolos avança a uma taxa constante através da fase sólida. Terminando a evaporação da superfície ao atingir-se o substrato.

Um jeito alternativo de se observar o comportamento super-difusivo é utilizando a interpretação de partículas bosônicas exposto na seção 2.4. Neste modelo o tamanho da rede é $L/2$ com o mesmo número de partículas. Nesta interpretação a solução exposta na seção 3.2, partindo de uma configuração com $(L/2 - 1)$ picos e N_0 tijolos contíguos, é mapeada em uma rede onde cada sítio da rede está preenchido por uma partícula com duas exceções. O sítio i se encontra vazio e o sítio j possui duas partículas, onde $\text{mod}(j - i, L/2) = N_0$ tal como se observa na figura 21. Partindo deste conjunto de

Figura 21 – Representação pictórica dos estados com $(L/2 - 1)$ picos e $N_0 = \text{mod}(j - i, L/2)$ tijolos na representação bosônica de partículas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

configurações observaremos que a partícula na segunda camada se movimenta localmente* para a esquerda com a mesma velocidade que o buraco na primeira camada se movimenta para a direita. Assim, em um sistema de referência onde o buraco se encontra em repouso, a partícula na segunda camada se movimenta com um deslocamento $x \propto t$, e neste sentido falaríamos de uma dinâmica super-difusiva. Neste modelo o custo energético da partícula se movimentar na segunda camada é menor que o custo da partícula pular para a primeira camada. Assim a partícula permanecerá na segunda camada até encontrar-se com um buraco. Em tal posição existirá uma barreira energética que a partícula na segunda camada terá que superar para finalmente preencher o buraco. Assim a probabilidade desta partícula pular e se combinar com o buraco será proporcional à $\exp(-E_1 t)$, e só será observada quando a partícula e o buraco se encontrem a um sítio de separação.

Esta barreira de energia que aparece em modelos de crescimento com difusão é conhecida como barreira de Schwoebel. É basicamente observada pela dificuldade de difusão nas bordas da camada pela quebra de uma banda que ajudaria na difusão caso existisse uma partícula na posição do buraco (ver (6, p.135)).

*O movimento é local e completamente assimétrico.

Nesta interpretação é claro que o estado final é um estado absorvente, pois o número de partículas N_{part} é igual ao tamanho da rede $L/2$. Desta forma no estado estacionário ($t \rightarrow \infty$) não teremos nenhuma corrente de partículas, coisa que não aconteceria se $N_{part} \neq L/2$. Ademais, a introdução de pequenas absorções no modelo ($u \ll 1$) permitiria a difusão local das partículas para a direita. Porém, como $u_d > u_a$, com maior probabilidade as partículas se movimentarão para a esquerda que para a direita, assim pares buraco-partícula criados no estado estacionário se combinarão sempre em um tempo finito.

3.5 Região massiva com $u \neq 0$

Até agora temos focado toda a nossa atenção em $u = 0$. Porém a seguinte pergunta a responder é qual seria o valor máximo de u que ainda manteria as mesmas características de $u = 0$? Ou seja, qual é o valor máximo de u com $z = 0$, possuindo uma dinâmica transiente com um tempo máximo t_c , tamanhos de aglomerados na primeira camada finitos independentes de L e tempos de criação e destruição de novos aglomerados finitos? Sempre que isto aconteça para valores de (u, p) próximos à $(u, p) \simeq (0, 1)$, podemos imaginar que existe uma transformação de renormalização (transformação de dizimação) que torna o tamanho típico de aglomerados no tamanho de um tijolo, mapeando assim o tempo de vida de criação e destruição dos aglomerados no tempo típico em que um tijolo é criado e destruído para valores de $u \simeq 0$. Portanto estaremos falando de uma fase suave e massiva.

Embora nesta tese não propomos nenhuma transformação de renormalização, nesta seção mostraremos resultados que são coerentes com uma transformação que mapeia substratos em substratos e pirâmides em pirâmides*, indicando que a fase massiva se mantém sempre que $u < 1$.

O primeiro resultado consistiu na medida do expoente z_1 (ver Eq.3.11) como função de u . Para isto utilizamos diferentes tamanhos de rede $1024 \leq L \leq 122000$ e monitoramos a dinâmica da altura média partindo da pirâmide que ocupa toda a rede. Como observamos da figura 22, este expoente dinâmico fictício se mantém constante $z_1 \simeq 1$ para valores de $u \lesssim 1$, sugerindo assim que para todos estes valores $z = 0$, pois poderíamos imaginar que existe uma transformação de renormalização que mapeia uma pirâmide de tamanho L em outra pirâmide de menor tamanho e com $u \simeq 0$, portanto observaríamos $z_1 = 1$. Como acontece em $u = 0$ a fase seria então massiva.

O segundo resultado consistiu em monitorar o tempo necessário para se atingir o estado estacionário ao iniciar-se desde o estado substrato. A idéia por trás desta medida é que o estado estacionário está constituído por aglomerados de tijolos que podem ser criados espontaneamente. Estes aglomerados podem crescer até um tamanho máximo finito independente de L , e posteriormente podem ser evaporados. Portanto, partindo do estado substrato que não tem nenhuma correlação espacial ξ_r (não existem aglomerados) o estado

*Pirâmides que ocupam toda a rede.

Figura 22 – Valor do aparente expoente dinâmico z_1 como função de u . O valor de z_1 foi determinado utilizando-se a relação 3.11 com a pirâmide que ocupa toda a rede como condição inicial. Como se observa para $u \lesssim 1$ e $p = 0$ o valor de z_1 permanece constante, indicando que em toda esta região de parâmetros o modelo é massivo ($z = 0$).

Fonte: Elaborada pelo autor.

estacionário só será atingido quando pela primeira vez o aglomerado de maior tamanho seja criado. Deste modo, sempre que nos encontremos na fase massiva observaremos que acima de certo valor de L este tempo será finito e só dependerá dos parâmetros do modelo (u, p). Porém ao variar u , conforme nos aproximamos a uma transição continua, observaremos que o tamanho do maior aglomerado começará a aumentar e consequentemente também aumentará o tempo para atingir-se o estado estacionário. O comportamento deste tempo assintótico t_{assin} é ilustrado na figura 23 para um tamanho de rede $L = 2^{14}$. Este tempo foi medido monitorando-se a evolução da rugosidade ao quadrado w^2 (ver Eq.1.5), e procurando o maior tempo t_{assin} (número inteiro) menor do que $0.99 \cdot (\langle w^2 \rangle_\infty - 3\sigma_{\langle w^2 \rangle_\infty})$, sendo $\langle w^2 \rangle_\infty$ a média da propriedade sobre todas as amostras de Monte Carlo no limite $t \rightarrow \infty$, e $\sigma_{\langle w^2 \rangle_\infty}$ a largura da distribuição correspondente. Como se observa da figura 23 este tempo aumenta com u até atingir um máximo em $u \simeq 0.96$. Contudo ao utilizar-se tamanhos de rede de até $L = 2^{19}$ se observa que a posição do máximo se movimenta em direção à $u \simeq 1$. Este fato é uma forte indicação que o modelo é massivo para $u \lesssim 1$.

O terceiro resultado que indicaria que a região com $u < 1$ é massiva utiliza uma medida do tamanho horizontal de um aglomerado acima do substrato. Aqui o tamanho médio dos clusters CS foi definido de uma maneira sutil como

$$CS = \sum_{k=1}^{N_{clu}} s_k \cdot \left(\frac{s_k}{N_{occ}} \right), \quad (3.12)$$

sendo s_k o número de tijolos na primeira camada ($h_i \leq 2$) do k -ésimo aglomerado, N_{clu} é o número de clusters em toda a rede e $N_{occ} = \sum_{k=1}^{N_{clu}} s_k$ é o número de sítios ocupados na primeira camada. Esta definição nos daria a informação de quão grande é o cluster ao qual pertenceria um sítio escolhido aleatoriamente, caso a escolha fosse feita sobre os sítios

Figura 23 – O tempo característico necessário para atingir-se o estado estacionário partindo-se partir da condição substrato como função de u . (●) Valor encontrado para o tempo assintótico para um tamanho de rede $L = 2^{14}$. A curva vermelha é um ajuste com uma função do tipo $t_{assin} \sim (u_c - u)^{-\nu_t}$, obtendo-se $u_c \simeq 0.9626$ e $\nu_t \simeq 2.4266$. Ao utilizar-se tamanhos de rede maiores ($L \leq 2^{19}$) se observa que o lugar do máximo é deslocado para $u \simeq 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

da primeira camada que estivessem ocupados (Ver (12, Eq. 1.7)). Como já mencionamos, esperamos que o tamanho típico dos aglomerados permaneça finito enquanto a fase seja massiva. Este comportamento é observado na figura 24 onde o tamanho dos clusters CS , como função de L , satura em 2.045 ao utilizarmos $(u, p) = (0.3, 1)$. Ao repetir este procedimento para $0.1 \leq u \leq 0.75$ e $2^6 \leq L \leq 2^{14}$ observamos que o valor de saturação CS_∞ incrementa com u como $CS_\infty \sim (u_c - u)^{-\nu_r}$ com $u_c = 0.955$ (5), tal como se evidencia na figura 25. Assim esperaríamos um tamanho infinito para o maior cluster sempre que $u \geq u_c$. Para verificar isto realizamos simulações de Monte Carlo para $u \in \{0.955, 0.96, 0.98, 1\}$ e tamanhos maiores de rede ($2^6 \leq L \leq 2^{19}$), esperando um comportamento de lei de potência $CS \sim L^D$ como consequência da perda de escala. Porém, como se observa na figura 26 este comportamento só acontece para $u = 1$, observando um desvio de uma lei de potência para $u < 1$. Isto indicaria um valor finito de saturação CS_∞ . Deste modo $u_c \simeq 1$, e o modelo seria massivo para valores de $u < 1$. Utilizando $u_c = 1$ para ajustar CS_∞ se encontra que $CS_\infty = (u_c - u)^{-\nu_r}$ com $\nu_r = 2.086$ (3). Embora para os parâmetros L e u utilizados nas figuras 23 e 25 numericamente $\nu_r \neq \nu_t$, esperamos que para $L \rightarrow \infty$ e $u \rightarrow 1^-$ obter $\nu_r = \nu_t$ pois $z = \nu_t/\nu_r$.

O último resultado apresentado nesta seção que indicaria que a região com $u < 1$ é massiva faz uso da equação 3.9 obtida analiticamente para a evolução da altura média quando $u = 0$. Para $u = 0$ o estado estacionário será o substrato e sempre poderemos

Figura 24 – Tamanho médio dos aglomerados (Equação 3.12) obtidos no estado estacionário como função do tamanho do sistema L . (ϕ) Valores obtidos por simulação de Monte Carlo com $(u, p) = (0.3, 1)$ com 10048 amostras em condições livres de contorno. A curva em verde é um ajuste do tipo $CS = a - \frac{b}{L^\gamma}$ mostrando a saturação do tamanho médio dos aglomerados em 2.045.

Fonte: Elaborada pelo autor.

encontrar o autovalor de energia E_1 com o seguinte procedimento:

- Começar com qualquer condição inicial e evoluir o sistema até atingir o estado estacionário.
- Uma vez no estado estacionário, perturbamos este estado preenchendo com tijolos todos os mínimos entre as posições $i = 1$ e $i = (L - 1)$
- Reiniciamos o tempo ($t = 0$) e observamos a evolução da altura média, determinando t_c como o corte entre a linha que ajusta a dinâmica transiente e o valor $h(t \rightarrow \infty)$.
- Obter E_1 como $(L/2 - 1 - N_{occ})/t_c$, sendo N_{occ} o número total de tijolos que ocupam a primeira camada no estado estacionário*.

Este procedimento pode ser utilizado para valores de $u \neq 0$ enquanto a fase seja massiva, pois esperamos que o tamanho médio dos clusters sature em um valor CS_∞ , independente do valor de L , implicando um tempo finito para a criação de cada um destes clusters. Assim em princípio seria possível realizar uma transformação de renormalização (transformação de dizimação), com um fator de escala $b = CS_\infty$ que transformaria os parâmetros do modelo para $u \simeq 0$. Claro está que neste grupo de renormalização $u = 0$ seria um ponto fixo trivial ($\xi_r = 0$ e $\xi_t = 0$). Com esta idéia, observamos que aplicações sucessivas da transformação de renormalização no estado estacionário da fase massiva levariam ao estado substrato obtido em $u = 0$. Assim os passos descritos acima poderiam ser utilizados para obter-se o valor do gap $\Delta E^* = E_1^* - E_0 = E_1^*$ que seria observado no ponto fixo $u^* = 0$.

*Com a definição dos pontos de contato dada por 3.6 temos que $(L/2 - N_{occ}) = K(L, t \rightarrow \infty)$.

Figura 25 – (●) Valor de saturação ($L \rightarrow \infty$) do tamanho médio dos aglomerados (CS_∞) obtidos no estado estacionário. Este valor foi calculado utilizando-se simulações de Monte Carlo com $2^6 \leq L \leq 2^{14}$ sítios. A curva vermelha é um ajuste do tipo $CS_\infty \sim (u_c - u)^{-\nu}$, indicando uma transição em $u_c = 0.955(5)$. Contudo simulações com redes maiores indicam que $u_c \simeq 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato este procedimento foi realizado para diferentes valores de u mantendo-se $p = 1$, observando-se a existência de um regime transiente linear para a altura média tal como é ilustrado na figura 27.a para $u = 0.7$. Porém nesta figura, ao invés de colocarmos um tijolo em cada mínimo entre $i = 1$ e $i = (L - 1)$ preencheu-se com uma capa de tijolos as regiões da superfície compreendidas entre um mínimo e o seguinte máximo à direita*. O motivo desta escolha foi a observação do regime linear transiente desde o início da simulação. Fora disto o resto da dinâmica observada para ambos tipos de perturbações foi a mesma. Ao repetir-se este procedimento para diferentes valores de u observou-se que $E_1^* = (L/2 - 1 - N_{occ})/t_c$ varia linearmente com u , aproximando-se a zero para $u \simeq 1$. Isto pode ser observado na figura 27.b, onde foi utilizado um tamanho de rede $L = 2^{14}$ e 6400 amostras de Monte Carlo para o cálculo das médias da altura $h(t)$ e do número de ocupação N_{occ} . Este resultado indicaria que a fase $u < 1$ é massiva e que a fase obtida em $u = 1$ é não-trivial ($\xi_r = \infty$ e $\xi_t = \infty$).

3.6 Discussão

Neste capítulo observamos a importância da presença de blocos de Jordan na dinâmica de um modelo estocástico de não-equilíbrio. No *RPM* sem absorção observamos que o tamanho do maior bloco de Jordan pode crescer com o tamanho da rede L . Neste modelo observamos a presença de taxas de transição $W_{j \leftarrow i} \neq 0$ para configurações físicas

*Por exemplo das configurações em 12, obteríamos que $|5\rangle \rightarrow |2\rangle$, $|4\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$, $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$.

Figura 26 – Tamanho médio dos aglomerados (Equação 3.12) obtidos no estado estacionário, como função do tamanho do sistema L . (a) Valores obtidos por simulação de Monte Carlo em condições livres de contorno com $(u, p) = (0.98, 1)$. Se observa claramente o afastamento de uma lei de potência para grandes tamanhos de rede. (b) Comportamento de lei de potência $CS \sim L^D$ observado para $(u, p) = (1, 1)$ com $D \simeq 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

pertencentes ao mesmo subespaço de energia (mesmo bloco de Jordan). Esta propriedade do modelo termina ocultando a massa do sistema até um tempo t_c , que depende das características da condição inicial. Resta, portanto, como pergunta saber-se se este comportamento se estende à região crítica $u \geq 1$ o que nos levaria a valores errôneos dos expoentes críticos estimados por escalonamento de diversas dinâmicas.

Na seção 3.1 observamos que o RPM com $u \ll 1$ pode ser mapeado em um modelo de crescimento com dessorção nas bordas das camadas. Este modelo com uma dinâmica local sofreria uma transição rugosa em $u \simeq 0.46$. Porém para o RPM a presença de dessorções não locais suavizaria a superfície trasladando o valor crítico da transição rugosa para $u = 1$. Em outras palavras, para $u < 1$ teríamos uma fase suave, consequência da restrição $|h_{i+1} - h_i| = 1$ e do tamanho finito dos clusters independente de L (ver figura 24).

Para $u = 0$ observamos que o efeito do parâmetro p é introduzir uma dilatação temporal do tipo $(p_c - p)$. Se admitirmos como hipótese a existência de um grupo de renormalização onde $u = 0$ é um ponto fixo trivial ($\xi_r = 0$ e $\xi_t = 0$), ao qual fluirá o RPM com $u < 1$, então podemos esperar que para $u < 1$ o efeito de p seria a introdução de uma dilatação temporal.

Com argumentos de grupo de renormalização, $u = 1$ representaria um ponto fixo não-trivial da teoria ($\xi_r = \infty$ e $\xi_t = \infty$) implicando que $\lim_{L \rightarrow \infty} E_1^* = 0$. Contudo, mas

Figura 27 – (a) Evolução da altura média obtida para uma rede de tamanho $L = 2^{14}$ com os parâmetros $(u, p) = (0.7, 1)$, utilizando-se como condição inicial uma perturbação no estado estacionário (ver texto). (b) Autovalor de energia E_1^* como função de u , obtido para um tamanho de rede $L = 2^{14}$. A linha vermelha é um ajuste linear que mostra que $E_1^* \simeq 0$ para $u \simeq 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

para um tamanho finito, estes comprimentos de correlação se encontrariam limitados pelo tamanho do sistema, resultando em um comportamento assintótico $E_1^* \sim 1/L^z$. Assim usando a expressão 3.2 para $u = 0$ poderíamos esperar um comportamento para E_1^* dado por

$$E_1^* = 2 \cdot u_d^* \left[\frac{(p_c - p)}{L^z} + o(L^{-z}) \right].$$

Se isto for verdade o parâmetro p seria um parâmetro irrelevante sempre que $p < p_c$ sofrendo uma transição de fase em $p = p_c$. De fato esta transição de fase foi observada em $(u, p) = (0, 2)$ sendo uma transição entre múltiplos estados absorventes. Para esta transição o expoente dinâmico é $z = 1$, mas o sistema não é invariante conforme, pois os autovalores de energia produzem gaps que não seguem o comportamento esperado de uma torre conforme.

Finalmente, como uma curiosidade, o que aconteceria para a região $u < 1$ se a Hamiltoniana do *PARPM* (H) fosse substituída por $H' = \frac{1}{L}H$? De acordo com a equação 3.1 poderíamos esperar que os autovalores desta nova Hamiltoniana seriam dados por

$$E'_i = 2i \cdot u_d \left[\frac{(2 - p)}{L} + \mathcal{O}(L^{-2}) \right],$$

para $p < 2$ e $u = 0$. Poderíamos falar de uma superfície suave? Seria esta região crítica? Seria o novo modelo invariante conforme para $u < 1$?

4 REGIÃO CRITICAMENTE AUTO-ORGANIZADA ($u \geq 1$)

No capítulo anterior nos ocupamos da região I_a indicada no digrama de fase da figura 1. Como vimos toda esta região é massiva terminando com uma transição de fase rugosa em $u = 1$. Neste capítulo nos ocuparemos das regiões II_a e III_a . Para $u \geq 1$ onde $u_a \geq u_d$ esperamos que o maior tamanho horizontal dos aglomerados (CS) divirja no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$). Ao aumentar u veremos que a separação média entre clusters começaria a diminuir assim como o número de pontos de contato, observando-se pouca variação com L acima de certo valor de $u = u_c$. Para valores de $u > u_c$ observaremos que praticamente todos os aglomerados estarão juntos formando um único aglomerado que ocupará toda a rede. Para estes valores de u as dessorções não locais da ordem de L terminarão suavizando a superfície.

4.1 Espectro do PARPM

Para a região do diagrama de fase $u \geq 1$ esperamos uma fase crítica, por este motivo o gap de energia teria que se comportar como $E_1 \sim 1/L^z$ no limite termodinâmico, tal como pode ser inferido da equação 1.8 com $\Delta = 0$. Nesta seção assumiremos que esta relação é válida pelo menos para os primeiros dois autovalores de energia não nulos, e determinaremos numericamente o valor do expoente crítico dinâmico z .

O método utilizado para a determinação dos autovalores da Hamiltoniana 2.9 foi o método da potência, armazenando-se os elementos de matriz da Hamiltoniana de forma esparsa (56, p. 62). A Hamiltoniana utilizada foi a obtida com condições livres de contorno, que apresenta uma simetria de reflexão sobre um eixo vertical localizado no centro da rede. Para esta Hamiltoniana foram obtidos os menores autovalores não nulos E_1 e E_2 pertencentes aos os setores de simetria par e ímpar por reflexão, respetivamente. Um exemplo dos autovalores E_1 e E_2 obtidos para $(u, p) = (1.135, 0.4)$ é apresentado na tabela 1 juntamente com a dimensão da matriz Hamiltoniana $Dim = \frac{L!}{(L/2)!(L/2+1)!}$ e o tamanho de memória que teria a matriz em um computador se todas as entradas fossem armazenadas*. Na atualidade a memória *RAM* de um computador ordinário varia entre 4 e 32GB, portanto a maior rede que seria possível diagonalizar caso toda a matriz fosse armazenada seria de $L = 22$. Porém armazenando só os elementos não nulos é possível atingir-se redes maiores.

Conhecendo-se os autovalores E_1 e E_2 , a princípio é possível determinar o expoente crítico dinâmico z . Para tal propósito utilizamos como ponto de partida que

$$E_n \simeq \frac{A_n}{L^z} + o(L^{-z}); \quad n = 1, 2, \quad (4.1)$$

*Para esta conta supomos que cada entrada é armazenada em uma variável de 4 bytes.

Tabela 1 – Valores das Energias E_1 e E_2 achados pelo método da potência para $u = 1.135$ e $p = 0.4$ no modelo *PARPM*. Os expoentes $z_L(E_1)$ e $z_L(E_2)$ foram determinados pela equação 4.2. Mostra-se a dimensão do espaço de Hilbert (*Dim*) junto com a estimativa do tamanho de uma matriz quadrada da mesma dimensão, e que não seja esparsa.

L	E_1	E_2	$z_L(E_1)$	$z_L(E_2)$	Dim	$Size(GB)$
8	2.74673712	3.63348685	0.822	0.725	14	7.30E-07
10	2.28625469	3.09068989	0.839	0.776	42	6.57E-06
12	1.96190420	2.68272474	0.851	0.811	132	6.49E-05
14	1.72075169	2.36740258	0.858	0.835	429	6.86E-04
16	1.53439990	2.11767516	0.863	0.851	1430	7.62E-03
18	1.38602566	1.91562733	0.867	0.863	4862	8.81E-02
20	1.26509223	1.74910479	0.868	0.872	16796	1.05E+00
22	1.16460439	1.60965533	0.869	0.878	58786	1.29E+01
24	1.07976066	1.49125759	0.869	0.883	208012	1.61E+02
26	1.00716857	1.38952429	0.870	0.886	742900	2.06E+03
28	0.94429596	1.30119240	0.869	0.889	2674440	2.66E+04
30	0.88935894	1.22378963			9694845	3.50E+05

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde sabemos, por construção do modelo, que para o caso $(u, p) = (1, 1)$ se teria $z = 1$ (ver equações 2.5 e 2.8). Porém para valores diferentes dos parâmetros (u, p) em geral não é possível solucionar analiticamente o modelo para se obter z . Se a correção $o(L^{-z})$, ao tamanho finito da expressão 4.1, é pequena então

$$\frac{E_n(L)}{E_n(L+2)} \simeq \left[\frac{L+2}{L} \right]^z.$$

Assim a princípio é possível determinar-se z como $\lim_{z \rightarrow \infty} z_L$ com

$$z_L \simeq \frac{\ln \left[\frac{E_n(L)}{E_n(L+2)} \right]}{\ln \left[\frac{L+2}{L} \right]}. \quad (4.2)$$

Utilizando esta expressão para $u = 1.135$ e $p = 0.4$ foram calculados os valores de z_L que se encontram na tabela 1. Finalmente uma estimativa do expoente z é obtida na figura 28 extrapolando os valores de $z_L(E_2)$ ao limite $(1/L) \rightarrow 0^+$. Este mesmo procedimento foi repetido para valores de u e p entre $1 \leq u \leq 10$ e $0.1 \leq p \leq 1.9$, usando $z_L(E_1)$ e $z_L(E_2)$ com suas respectivas extrapolações. Os valores obtidos para z como função de u e p se encontram na tabela 2, onde se observa que o valor de z diminui conforme u aumenta. Também se observa uma aparente dependência de z com o parâmetro p . Porém, como será mostrado no capítulo 5, o efeito de p é introduzir uma dilatação temporal proporcional à $(p_c - p)$ sem variar z sempre que $p < p_c$. Em vista deste resultado a expressão 4.1 ficaria

$$E_1 \simeq \frac{A_1^*(p_c - p)}{L^z} + o(L^{-z}), \quad (4.3)$$

com $p_c \geq 2$. Esta expressão com $z = 0$ é semelhante às equações 3.2 e 3.1. Assim, em geral podemos esperar que conforme p se aproxime de p_c a razão $o(L^{-z}) / \left[\frac{A_1^*(p_c - p)}{L^z} \right]$ aumente.

Figura 28 – (●) Exponente $z_L(E_2)$ determinado pela equação 4.2 para os parâmetros $(u, p) = (1.135, 0.4)$. A curva em azul é uma extrapolação de uma ajuste quadrático entre z_L e $1/L$. Com esta extrapolação obtém-se $z = 0.908$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta forma a expressão 4.2 seria menos confiável para o cálculo de z . Na determinação de z também se observou que o efeito do tamanho finito $o(L^{-z})$ é maior conforme u aumenta, sendo portanto necessário utilizar-se de tamanhos de redes maiores para obter-se uma boa estimativa do expoente crítico z . Porém, computacionalmente falando, o maior tamanho de rede que foi possível utilizar para determinar os autovalores E_1 e E_2 foi $L = 30$. Isto explicaria porque para o caso $u = 10$ o expoente z varia tanto com p , e porque para $u = 1.135$ este expoente varia pouco para $0 \leq p \leq 1.3$. Em outras palavras, podemos acreditar nos valores obtidos numericamente para z se observarmos que para um valor fixo de $u \geq 1$ o expoente obtido varia pouco com $p \ll p_c$. Outro critério que poderíamos usar para saber em que valores de z acreditar é observarmos o comportamento de $E_1/(p_c - p)$ em função de p e L . De acordo com a equação 4.3 podemos esperar um comportamento independente de p se a correção ao tamanho finito $o(L^{-z})$ é pequena. Este comportamento foi verificado para o caso $u = 1.135$ graficando $E_1 \cdot (p_c - 1)/(p_c - p)$, em função de $1/L$. Como se observa na figura 29, de fato a correção ao tamanho finito é pequena para valores de $p \leq 1$, contudo para valores maiores de p é necessário incrementar o tamanho da rede.

4.2 Critical initial slip

Na seção anterior determinamos o valor do expoente crítico dinâmico z por diagonalização da matriz Hamiltoniana H em condições livres de contorno. Porém este método se encontra limitado a um tamanho de rede máximo de $L = 30$ e para pequenos valores de $u \leq 10$. Portanto se queremos calcular o valor do expoente dinâmico para tamanhos maiores de rede e do parâmetro u , precisamos utilizar outros métodos (ver (6, p. 301)). Um desses métodos é por escalonamento dinâmico (ver equações 1.12 e 1.10). A idéia básica

Tabela 2 – Valores de z obtidos como o limite $\lim_{(1/L) \rightarrow 0^+} z_L$. A coluna $z(E_n)$ contém o valor extrapolado de z usando-se o autovalor E_n para seu cálculo. Na última coluna $\Delta z = |z(E_2) - z(E_1)|$.

u	p	$z(E_2)$	$z(E_1)$	Δz
1	0.1	1.018	1.011	0.007
1	0.4	1.016	1.011	0.004
1	0.7	1.012	1.011	0.001
1	1	1.009	1.009	0.000
1	1.3	1.011	1.002	0.008
1	1.6	1.055	0.940	0.114
1	1.9	1.503		
1.135	0	0.912	0.847	0.065
1.135	0.1	0.911	0.847	0.064
1.135	0.4	0.908	0.847	0.061
1.135	0.7	0.904	0.845	0.059
1.135	1	0.900	0.842	0.058
1.135	1.3	0.900	0.831	0.069
1.135	1.6	0.939	0.752	0.187
1.135	1.9	1.510		
1.5	0.1	0.779	0.743	0.036
1.5	0.4	0.773	0.741	0.032
1.5	0.7	0.766	0.738	0.028
1.5	1	0.756	0.731	0.025
1.5	1.3	0.742	0.708	0.033
1.5	1.6	0.729	0.547	0.182
1.5	1.9	1.275		

u	p	$z(E_2)$	$z(E_1)$	Δz
2	0.1	0.673	0.691	0.019
2	0.4	0.665	0.685	0.020
2	0.7	0.655	0.677	0.022
2	1	0.642	0.666	0.023
2	1.3	0.623	0.652	0.029
2	1.6	0.583	0.667	0.083
2	1.9	0.614		
6	0.1	0.205		
6	0.4	0.198		
6	0.7	0.192		
6	1	0.184		
6	1.3	0.190		
6	1.6	0.188		
6	1.9	0.158		
10	0.1	0.042		
10	0.4	0.036		
10	0.7	0.030		
10	1	0.075		
10	1.3	0.147		
10	1.6	0.154		
10	1.9	0.118		

Fonte: Elaborada pelo autor.

é que se temos um sistema crítico os comprimentos de correlação divergirão no limite termodinâmico, e dado que $\xi_t \sim \xi_r^z$ então para um sistema finito estes comprimentos estarão limitados pelo tamanho do sistema. Desta forma é de se esperar que o comportamento assintótico de algum observável X esteja relacionado com alguma função $f\left(\frac{t}{L^z}\right)$. Se este observável é a rugosidade $w(t, L)$ teremos que

$$w(t, L) \sim L^\alpha \mathcal{F}\left(\frac{t}{L^z}\right).$$

Se este observável é o parâmetro de ordem ρ de uma transição continua teremos

$$\rho(t, L) = L^{-\beta/\nu_r} \mathcal{F}\left(\frac{t}{L^z}\right). \quad (4.4)$$

Para o *PARPM* esperamos um comportamento crítico se $u \geq 1$. Neste modelo temos uma entrada de tijolos local e uma saída de tijolos não local. Assim é coerente pensar que o parâmetro de controle (λ) da transição de fase subjacente (ver seção 1.5) esteja relacionando com a densidade de tijolos

$$\frac{\langle N_{\text{tiles}} \rangle}{L} = \frac{\langle h - 1/2 \rangle}{2},$$

Figura 29 – Comportamento de $E_1 \cdot (p_c - 1) / (p_c - p)$ em função de $1/L$. Neste caso $p_c \simeq 2.705$ para $u = 1.135$. Como se observa para $8 \leq L \leq 30$ e $p \leq 1$ a correção ao tamanho finito $o(L^{-z})$ da expressão 4.3 é pequena.

Fonte: Elaborada pelo autor.

ou com alguma de suas derivadas. Embora não conheçamos a transição de fase subjacente* à esta região ($u \geq 1$), podemos pensar que o parâmetro de ordem (ρ) da transição talvez esteja relacionado também com a densidade de tijolos ou alguma de suas derivadas. Nesta seção e na próxima nos enfocaremos no cálculo do expoente dinâmico utilizando a evolução da altura média, deixando o cálculo da rugosidade para a seção 4.4.

Nossa propriedade de estudo é $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right)$ e definiremos os expoentes (z_1, z_2) da mesma forma que na equação 3.11, ou seja

$$\frac{h(t)}{h_\infty} - 1 = L^{z_2} f\left(\frac{t}{L^{z_1}}\right). \quad (4.5)$$

Assim podemos evoluir nosso sistema desde uma dada condição inicial e colapsar as evoluções da propriedade estudada para diferentes tamanhos de sistema, obtendo assim os valores de (z_1, z_2). Se o valor de z_1 é independente da condição inicial então teremos encontrado o valor do expoente dinâmico z . Caso contrário podemos pensar que nosso sistema não é crítico, ou se for crítico, o sistema apresenta um comportamento conhecido como “critical initial slip”. (15,19,62,63) Se este comportamento estiver presente no sistema crítico a relação 4.4 seria modificada por

$$\rho(t, L) = L^{-\beta/\nu_r} \mathcal{F}\left(\frac{t}{L^z}, \rho_0 L^{d-z\delta}\right), \quad (4.6)$$

tal como pode ser deduzido da equação 3.10. Este comportamento se mantém até um tempo $t_c \sim \rho_0^{1/(\delta-d/z)}$, e finalmente a verdadeira natureza crítica do sistema é revelada. Porém este tempo t_c em que o sistema mantém uma memória do estado inicial pode chegar a ser muito grande, dificultando a determinação do expoente dinâmico z por

*Como veremos na seção 4.5 a região $u \geq 1$ é criticamente auto-organizada.

colapso de diversas dinâmicas. No entanto se conhecêssemos a propriedade ρ_0 relevante na dinâmica do sistema, então bastaria compararmos evoluções temporais com condições iniciais onde $\rho_0 L^{d-z\delta}$ fosse uma constante, para assim determinar o expoente dinâmico z por escalonamento das distintas dinâmicas.

Para verificar se existe uma dependência com a condição inicial, realizamos simulações com duas condições iniciais. A pirâmide $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right) \geq 0$ e o substrato $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right) \leq 0$. Como se observa da figura 30 os valores de z_1 obtidos ao colapsar as distintas dinâmicas

Figura 30 – Colapso da dinâmica do observável $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right)$ de acordo com a equação 4.5 usando $(u, p) = (2, 0)$. (a) Utilizando $(z_1, z_2) = (0.361, 0.021)$ é obtido o colapso para a condição inicial substrato $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right) \leq 0$, mas não para a condição inicial pirâmide $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right) \geq 0$. (b) Para este caso o colapso é obtido para a condição inicial pirâmide, mas não para o substrato, usando $(z_1, z_2) = (0.415, 0.282)$. Em ambas figuras $L_{ref} = 32000$ e o número de amostras de Monte Carlo foi 160000.

Fonte: Elaborada pelo autor.

parecem diferentes*. Nesta figura $(u, p) = (2, 0)$, os tamanhos de rede utilizados variam entre $1024 \leq L \leq 32000$ e se obtém $z_1 = 0.415$ e $z_1 = 0.361$ para as condições iniciais pirâmide e substrato, respetivamente. Como se observa graficamente na figura 30, estes expoentes são diferentes, não sendo possível o colapso simultâneo das dinâmicas obtidas com ambas condições iniciais usando o mesmo expoente z_1 . Ainda mais, verificando a tabela 2 observamos que $z \simeq 0.65$ para $u = 2$. Esta diferença com os valores de z_1 obtidos para as condições iniciais pirâmide e substrato nos faz pensar que podemos estar lidando com um comportamento tipo “critical initial slip”, embora não conheçamos a propriedade da condição inicial relevante para nosso sistema.

*Os colapsos realizados na figura 30 são semelhantes aos realizados na figura 15.

O passo seguinte foi medir os expoentes (z_1, z_2) utilizando outras condições iniciais. Se por acaso encontrarmos um conjunto de condições iniciais onde $\rho_0 L^{d-z\delta}$ é constante, então observaríamos que, independente do comportamento das outras propriedades, o valor de z_1 seria sempre o mesmo. Para fazer este estudo utilizamos um valor de u próximo de $u = 1$ aumentando a confiabilidade do expoente z obtido a partir dos autovalores de energia E_1 e E_2 . Os parâmetros (u, p) selecionados foram $(1.135, 0)$, e as diversas condições iniciais tinham em comum o comportamento escolhido para o número de tijolos na primeira camada acima do substrato $N_0 \sim L^{\beta'}$, esperando assim obter-se um comportamento similar ao obtido na seção 3.2. Estes conjuntos de condições iniciais contudo não levaram à uma clara determinação do expoente dinâmico z . Assim utilizamos outro conjunto de condições iniciais, motivados pelos resultados da seção 3.5. A idéia era atingir o estado estacionário e tomar como condição inicial uma perturbação do mesmo. De todas as perturbações realizadas aquela que deu melhores resultados foi a seguinte:

Figura 31 – Definição adotada para a soma de duas configurações em condições livres de contorno. Para este exemplo a pirâmide utilizada contém $N_0 = 3$ tijolos na primeira camada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- a) Começar com qualquer condição inicial e evoluir o sistema até atingir o estado estacionário.
- b) Uma vez no estado estacionário, perturbamos este estado adicionando uma pirâmide centrada na rede com N_0 tijolos na primeira camada tal como se ilustra na figura 31.
- c) As diversas condições iniciais são comparadas escolhendo-se $N_0 \propto L^{\beta'}$. A constante de proporcionalidade é escolhida de forma que 90% da rede $L = 1024$ esteja preenchida.
- d) Reiniciar o tempo ($t = 0$) e observar a evolução da propriedade $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right)$ obtendo-se os expoentes (z_1, z_2) para valores de $0 \leq \beta' \leq 1$.

Os valores dos expoentes (z_1, z_2) encontrados por este protocolo são ilustrados em cor preta na figura 32. Os outros pontos em cor vermelha correspondem às outras condições iniciais que foram utilizadas. Como se observa desta figura, aparentemente todos os pontos (z_1, z_2) se encontram restritos a uma região delimitada por duas retas, as quais se cruzam no ponto $(z_1, z_2) = (0.863, -0.408)$. Em analogia com a figura 20 podemos pensar que o valor de $z \simeq 0.863$, sendo este um valor em acordo com os resultados apresentados na tabela 2.

Figura 32 – Em preto o valor dos expoentes (z_1, z_2) obtidos a partir da evolução temporal da propriedade $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right)$, partindo de uma condição inicial que consiste em adicionar uma pirâmide ao estado estacionário. Esta pirâmide apresenta uma base que varia com L^β . Os pontos vermelhos representam outras condições iniciais utilizadas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para finalizar esta seção, a título de curiosidade, apresentamos na figura 33 os colapsos obtidos para a dinâmica da propriedade $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right)$ com as condições iniciais pirâmide* e aquela condição inicial que adiciona uma pirâmide de tamanho fixo ao estado estacionário ($\beta' = 0$). Como se observa na figura 33 os dois colapsos são muito bons pois visualmente não permite diferenciar as dinâmicas de cada rede. Em outras palavras, todas as curvas se vêm como uma única curva.

4.3 Determinando z com confiança

Na seção anterior vimos que em condições livres de contorno a determinação do expoente crítico z pode virar uma tarefa complicada. O motivo deste efeito é um comportamento tipo “critical initial slip” que mantém uma memória do estado inicial até um tempo t_c , que depende de alguma propriedade desta configuração. Em princípio se conhecêssemos a propriedade ρ_0 relevante à dinâmica do sistema, bastaria escolher condições onde $\rho_0 L^{d-z\delta}$ fosse uma constante para assim determinar com precisão o expoente dinâmico z . Porém até o momento desconhecemos qual é essa propriedade. Portanto qualquer método para se determinar o expoente z que evoque dinâmicas com tempos $t < t_c$ dará resultados errados, tal como aconteceu para o caso $u = 0$ (Ver figura 15). Por exemplo, determinar $z = \alpha/\beta$ medindo o expoente de rugosidade α no estado estacionário e o expoente de crescimento β na dinâmica inicial partindo do estado substrato, levará indiscutivelmente a um valor errado do expoente z pois em geral o expoente β se encontrará afetado pela

*A pirâmide que ocupa toda a rede.

Figura 33 – Colapso das dinâmicas da propriedade $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right)$ de acordo com a equação 4.5 usando $(u, p) = (1.135, 0)$. (a) Utilizando como condição inicial uma pirâmide que ocupa toda a rede é possível colapsar todas as dinâmicas em uma única curva com $(z_1, z_2) = (0.652, 0.168)$. (b) Para este caso o colapso é obtido para a condição inicial que adiciona uma pirâmide de tamanho fixo ao estado estacionário ($\beta' = 0$). Em ambas figuras $L_{ref} = 32000$ e o número de amostras de Monte Carlo foi de 160000 e 3200, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

memória do estado inicial*.

Se existisse um método numérico para medir o expoente dinâmico z , em tempos $t \gg t_c$, este método teria que ser independente da condição inicial e daria uma boa estimativa deste expoente. Nossa conjectura é que de fato é possível medir-se o expoente z no estado estacionário ($t \rightarrow \infty$). Porém, é preciso utilizar condições periódicas de contorno. Com estas condições é fácil ver que para $u \geq 1$ existe uma probabilidade não nula de preencher com tijolos uma camada inteira. Por exemplo, partindo do estado substrato em algum momento toda a primeira camada acima do substrato se encontrará preenchida, e dado que não é possível escavar na superfície[†] este processo continuará indefinidamente levando a uma velocidade vertical da superfície não nula.

Definindo a velocidade vertical como

$$v(t, L) \equiv \frac{\partial h}{\partial t},$$

nossa hipótese para $t \gg t_c$ é que:

$$v(t, L) = \frac{1}{L^{z-\alpha}} g\left(\frac{t}{L^z}\right) + v_\infty, \quad (4.7)$$

*Neste sentido poderíamos falar de rugosidade anômala (41, 43, 66, 67) pois $z \neq \alpha/\beta$.

[†]Pois não existem dessorções nos picos da superfície.

Figura 34 – Comportamento da altura média $h(t, L)$ no modelo *PARPM* com condições periódicas de contorno. O sistema foi evoluído partindo-se das condições iniciais substrato (preto) e pirâmide (vermelho) utilizando $(u, p) = (100, 1)$ e um tamanho de rede $L = 2^{14}$. Em ambas simulações o número de amostras de Monte Carlo foi 10048.

Fonte: Elaborada pelo autor.

com $v_\infty \equiv v(t \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty)$ sendo a velocidade estacionária no limite termodinâmico, z o expoente crítico dinâmico e α o expoente crítico de rugosidade. Em outras palavras

$$h(t, L) = L^\alpha f\left(\frac{t}{L^z}\right) + v_\infty \cdot t + cte, \quad (4.8)$$

nesta conjectura podemos identificar a transição em $u = 1$ como uma “wetting” ou “depinning transition” (15,19,68) ao observar a propriedade $h(t, L)$ ou $v_\infty \cdot t + cte - h(t, L)$.

A origem de nossa conjectura se encontra nos artigos (16) e (60). No primeiro (16) foi determinado que $(v_{max} - v) \sim L^{-z}$ em uma transição rugosa ($\alpha = 0$) onde v_{max} é a velocidade máxima vertical do modelo. No segundo (60) se determinou que a corrente (J) no estado estacionário de um modelo unidimensional de exclusão assimétrico é dada por

$$J = (1 - x) \frac{PH}{(P + H)(P + H - 1)},$$

sendo P o número de partículas, $H = L - P$ o número de buracos, L o tamanho do sistema e $(1 - x)$ a taxa com que as partículas se movimentam da esquerda para a direita menos a taxa de movimentação da direita para a esquerda. Este modelo de exclusão assimétrico pode ser mapeado em uma superfície em crescimento (ver figura 13) levando a um modelo conhecido como “single step”. (6,7) Para este modelo a corrente estacionária estaria relacionada com a velocidade assintótica $v(t \rightarrow \infty, L)$ como $J = v(t \rightarrow \infty, L) / 2^*$.

*O fator $1/2$ vem do fato que cada absorção ou dessorção de um tijolo muda a altura média de $\Delta h = \pm 2/L$. Na interpretação partícula-buraco a correspondência é com $\Delta J = \pm 1/L$.

Figura 35 – (●) Velocidade estacionária $v(t \rightarrow \infty, L)$ em função do tamanho da rede. Altura média $h(t, L)$ em condições periódicas de contorno. A linha azul representa o comportamento de uma lei de potência pura. A linha vermelha é um ajuste como o proposto na equação 4.7 com $z - \alpha \simeq 0.242$ e $v_\infty \simeq 0.0255$. As simulações foram realizadas com 5000 amostras de Monte Carlo utilizando $(u, p) = (5, 1)$ e tamanhos de rede $2^6 \leq L \leq 2^{19}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se na média a superfície apresenta uma inclinação m então teríamos $P = (1 + m) L/2$ partículas e $H = (1 - m) L/2$ buracos o que levaria à

$$v(t \rightarrow \infty, L) = (1 - x) \frac{(1 - m^2)}{2} \frac{1}{(1 - 1/L)}. \quad (4.9)$$

Esta expressão pode ser expandida de forma que $v(t \rightarrow \infty, L) - v_\infty \sim 1/L^{z-\alpha}$ com $z = 3/2$ e $\alpha = 1/2$. Claramente para estes dois artigos, onde $v_\infty \neq 0$, a relação 4.7 é satisfeita.

Para entender o porque da expressão 4.7 pode ser satisfeita em modelos críticos não triviais*, podemos imaginar uma superfície lisa alternada que se movimenta com velocidade v_∞ e com altura inicial dada por $h_{\min}$, sendo $h_{\min}$ a altura mínima na configuração inicial ($t = 0$). Ao comparar a superfície em crescimento com a superfície alternada, observamos uma superfície rugosa auto-afim explicando assim a equação 4.8.

Como se ilustra na figura 34 a evolução da altura média em condições periódicas é caracterizada por uma velocidade estacionária $v(t \rightarrow \infty, L)$, independente da condição inicial. Um exemplo desta velocidade estacionária, em função do tamanho da rede, é apresentada na figura 35 com $(u, p) = (5, 1)$ e tamanhos de rede $2^6 \leq L \leq 2^{19}$. Nesta figura se observa um desvio de uma lei de potência pura, o que poderia ser indicativo de uma velocidade no limite termodinâmico $v_\infty \neq 0^\dagger$. Ao ajustar-se por uma função

*Não trivial neste contexto quer dizer que os expoentes críticos não podem ser obtidos por análise dimensional. Assim falamos em auto-similaridade, auto-afinidade, Multi-afinidade, etc. (Ver (35, p. 37))

† Outra opção poderia ser $v_\infty = 0$ e $v(t, L) \simeq AL^{\alpha-z} + o(L^{\alpha-z})$.

Figura 36 – (■) Velocidade v_{∞} como função do parâmetro u mantendo $p = 1$. Esta velocidade foi determinada ajustando uma função do tipo $f(L) = A/L^b + v_{\infty}$ à velocidade estacionária $v(t \rightarrow \infty, L)$. O ajuste foi realizado com $2^6 \leq L \leq 2^{14}$ e o número de amostras de Monte Carlo foi 10048.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$f(L) = A/L^{z-\alpha} + v_{\infty}$ a velocidade estacionária $v(t \rightarrow \infty, L)$ observa-se que $z - \alpha \simeq 0.242$ e $v_{\infty} \simeq 0.0255$ para o caso $(u, p) = (5, 1)$. Repetindo este procedimento para outros valores de u e menores tamanhos de rede $2^6 \leq L \leq 2^{14}$ obtém-se os comportamentos mostrados nas figuras 36 e 37. Da figura 36 se observa que a velocidade v_{∞} se aproxima à zero quando $u \rightarrow 1^+$, e se aproxima a $1/2$ quando $u \rightarrow \infty$. Este último resultado indicaria que a velocidade v_{∞} é uma função contínua em todo o domínio do parâmetro $w = 1/u$, em especial $w = 0$ como pode ser comprovado fixando-se $x = 0$, $m = 0$ e $L \rightarrow \infty$ na equação 4.9*.

Para o caso do expoente $z - \alpha$ o comportamento observado na figura 37 é o de uma função decrescente que inicia em $z - \alpha = 1$ para $u = 1$ e termina em zero para $u \rightarrow \infty$. O resultado em $u = 1$ indicaria que $\alpha = 0$, sendo coerente com uma transição rugosa tal como será reforçado na seção 4.4. Para o caso $u \rightarrow \infty$ observaríamos que o expoente $z - \alpha$ é contínuo em $w = 0$ se utilizamos condições livres de contorno. Porém, se as condições fossem periódicas, $z - \alpha = 1$ pois o *RPM* em $w = 0$ se reduz ao “*single step model*”, modelo que pertence à classe de universalidade *KPZ*.

Neste ponto da seção podemos comparar o valor de $z - \alpha$ com os valores obtidos previamente para $u = 1.135$. O valor obtido por ajuste da função $f(L) = A/L^{z-\alpha} + v_{\infty}$ à velocidade estacionária $v(t \rightarrow \infty, L)$ foi de $z - \alpha \simeq 0.782$ e o valor do expoente de rugosidade medido para este caso foi $\alpha \simeq 0.031$, implicando que $z \simeq 0.813$. Como vemos este expoente dinâmico é próximo dos valores obtidos nas duas seções prévias. Contudo para poder identificar o expoente α com o expoente de rugosidade é preciso observar a

*Em $w = 0$ o *RPM* coincide com o “*single step model*” (ver seção 5.3.2).

Figura 37 – (●) Comportamento do expoente $z-\alpha$ como função de u . O expoente $z-\alpha$ foi medido ajustando-se uma função do tipo $f(L) = A/L^{z-\alpha} + v_\infty$ à velocidade estacionária $v(t \rightarrow \infty, L)$. A linha vermelha é uma aproximação ao valor de $z-\alpha$ dado pela função $g(u) = 0.49/(\ln(u) + 0.42)^{0.82}$. O erro máximo desta aproximação é de um 9%. As simulações foram realizadas com 10048 amostras de Monte Carlo utilizando-se tamanhos de rede $2^6 \leq L \leq 2^{14}$, com exceção de $u = 1000, 7000$ onde $2^6 \leq L \leq 2^{19}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

auto-finidade estatística sobre a superfície. Se a auto-afinidade $b^\alpha h(x) = h(bx)$ é observada em janelas de tamanho l com $a \ll l \ll L$, sendo a a separação entre sítios da rede e L o tamanho do sistema, então é fácil mostrar que a rugosidade

$$w(L) = \left[\frac{1}{L} \int_0^L dx \left(h(x) - \overline{h(x)} \right)^2 \right]^{1/2},$$

se transforma como $b^\alpha w(L) = w(bL)$. De fato, como é observado na figura 38, a superfície estacionária é estatisticamente auto-afim para valores de $u \geq 1$. Nesta figura observamos o perfil dos clusters formados acima do substrato e também observamos o perfil das dessorções em condições livres de contorno, embora o expoente α não foi determinado utilizando estes perfis. Para valores de u próximos a 1 a auto-afinidade é observada praticamente em todas as escalas $1 < l \leq L$ porém, conforme u aumenta a auto-afinidade só é observada em uma escala intermediária $1 \ll l \ll L$. Isto pode ser entendido da seguinte maneira: para pequenos clusters a absorção domina a dessorção, de forma que o perfil dos clusters se aproximara da pirâmide, mantendo flutuações devidas às dessorções. Para escalas intermediárias as dessorções não locais logram competir com as absorções de forma que o perfil dos clusters não se encontrará próximo aos das pirâmides. Finalmente para clusters que ocupem toda a rede, observaremos que o cluster não pode crescer lateralmente. Isto provocará um incremento na altura média, mas o perfil se manterá afastado da configuração pirâmide por causa das dessorções não locais. Clusters com tamanhos próximos ao tamanho

Figura 38 – Perfil dos clusters e das dessorções com tamanho $l = 2^k$ e $k = 3, 4, \dots$ medidas em condições livres de contorno no estado estacionário. (a) Perfil dos clusters acima do substrato para $(u, p) = (1.3, 1)$. Por definição $h_0 = h_l = 0$, $h_1 = h_{l-1} = 1$ e $h_2 = h_{l-2} = 2$. (b) Perfil das avalanches medidas em $(u, p) = (15, 1)$. Por definição $h_0 = h_l = 0$ e $h_1 = h_{l-1} = 1$. Em ambas figuras o número de amostras de Monte Carlo foi de 10048 e os perfis das avalanches e dos clusters foi medido para diversos tamanhos de rede, embora seja difícil perceber nas figuras, pois os resultados das diversas redes se encontram sobrepostos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

da rede serão obtidos eventualmente por dessorções não locais de clusters que ocupem toda a rede, portanto eles também apresentarão uma altura média incrementada.

Como considerações finais desta seção ainda nos resta por fazer um estudo com redes maiores e analisar de algum jeito o comportamento das propriedades v_∞ e $z - \alpha$ em função do tamanho do sistema. Nesta seção os valores de v_∞ e $z - \alpha$ foram determinados por ajustes sobre um domínio de L , dando os mesmos pesos a cada tamanho de rede. Este estudo teria que ser feito com um procedimento de extrapolação onde $1/L \rightarrow 0$ e onde redes com maior tamanho possuam um maior peso estatístico.

4.4 Rugosidade no *PARPM*

Até agora medimos o expoente dinâmico z em função de u e mostramos que para $u \geq 1$ a superfície é auto-afim em janelas de tamanho lateral l com $1 \ll l \ll L$. Vimos também que a superfície estacionária seria suave para $u < 1$. Faltaria medir os expoentes de rugosidade α e de crescimento β . Porém, este último será difícil de medir-se diretamente pelos efeitos da memória que o sistema mantém do estado inicial. Restava portanto medirmos o expoente de rugosidade no estado estacionário. Nesta seção veremos que de fato a superfície estacionária se mantém suave para valores de $u < 1$. Contudo em $u = 1$ acontecerá uma transição rugosa. A superfície será rugosa sempre que $1 \leq u \lesssim 33.8$ e possivelmente a superfície será suave para $u \gtrsim 33.8$.

A medida do expoente de rugosidade será realizada em condições periódicas e

também em condições livres de contorno. Para o caso de condições periódicas a rugosidade será calculada sobre toda a rede $l = L$ e também sobre janelas de tamanhos $1 \ll l \ll L$. Para o caso de condições livres só calcularemos a rugosidade sobre janelas de tamanhos $1 \ll l \ll L$, de forma que a rede pareça infinita.

Os métodos utilizados para medir-se o expoente de rugosidade α foram baseados nas referências (6, 20, 21, 69). Como veremos, estes métodos utilizam os quatro primeiros cumulantes k_1, k_2, k_3, k_4 e a distribuição de probabilidade da rugosidade ao quadrado $w^2(l, L)$, medida sobre uma janela de tamanho l localizada no centro da rede de comprimento L . Os métodos basicamente são quatro:

Figura 39 – Valor do expoente b obtido para o comportamento da rugosidade ao quadrado de forma que $k_1 \simeq a \cdot L^b + c$. Se $b \geq 0$ podemos identificar $b = 2\alpha$, sendo α o expoente de rugosidade. Estas quatro curvas indicariam que a superfície obtida no estado estacionário é rugosa sempre que $1 \leq u \lesssim 33.8$. Para os quatro métodos se mediu utilizando-se toda a rede $l = L$, e para valores de $1 \leq u \leq 100$ se utilizaram redes com tamanhos no intervalo $2^{10} \leq L \leq 2^{14}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Método 1: Neste método se escolheu um domínio de valores para l de forma que $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$. Sobre este domínio se ajustaram as funções $f_{b>0}(l) = a \cdot l^b + c$ com $b > 0$, $f_{b<0}(l) = a \cdot l^b + c$ com $b < 0$ e $f_{\ln}(l) = a \cdot \ln(l) + c$ ao comportamento do primeiro cumulante $k_1(l, L) = \langle w^2(l, L) \rangle^*$. Destas três funções se escolheu aquela que melhor ajustava o cumulante $k_1(l, L)$ usando o estimador $\rho = 1 - \left(\text{correl}(k_1, \hat{k}_1) \right)^2$, onde $\text{correl}(k_1, \hat{k}_1)$ representa a correlação entre os dados originais k_1 e os dados ajustados $\hat{k}_1$ [†]. Um exemplo do comportamento de ρ em função de u é apresentado na figura 40. Nesta figura mediu-se o cumulante $k_1(l, L)$ sobre toda a rede $l = L$ em condições periódicas e o ajuste das distintas funções foi realizado no domínio $2^{10} \leq L \leq 2^{14}$ para valores de $1 \leq u \leq 100$. Como se observa da figura 40, podemos ver que a superfície é rugosa para

* $\langle \dots \rangle$ denota a média sobre as distintas realizações de Monte Carlo.

[†]A correlação é calculada como a razão da covariância das variáveis sobre o produto dos respectivos desvios padrões $\text{cov}(k, \hat{k}) / (\sigma_k \sigma_{\hat{k}})$.

valores de $1 \leq u \lesssim 33.8$ e suave fora deste domínio. O valor reportado para o expoente de rugosidade α foi escolhido igual a valor de $b/2$ da função que melhor ajusta $k_1(l, L)$ nos dando $\alpha = 0$ para o caso de uma função logarítmica. O comportamento de $2 \cdot \alpha$ em função de u se encontra na figura 39.

Figura 40 – Comportamento do estimador $\rho = 1 - \left(\text{correl} \left(k_1, \hat{k}_1 \right) \right)^2$, em função de u , para os diversos tipos de ajustes ao cumulante $k_1(l = L, L)$ medido em condições periódicas. Quanto menor seja ρ melhor é o ajuste. (■) Valor de ρ obtido para um ajuste logarítmico. (♦) Valor de ρ obtido para um ajuste do tipo $f_{b>0}(l) = a \cdot l^b + c$ com $b > 0$. (▼) Valor de ρ obtido para um ajuste do tipo $f_{b<0}(l) = a \cdot l^b + c$ com $b < 0$. As simulações foram realizadas com 10048 amostras de Monte Carlo utilizando $p = 1$ e as medidas foram realizadas durante um intervalo de tempo 10000, no estado estacionário.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Método 2: Para este método se utilizou o comportamento dos cumulante k_n com $n = 2, 3, 4$ medidos sobre um domínio de l dado por $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$. Para cada um destes cumulantes esperamos um comportamento no limite termodinâmico dado por $k_n \sim l^{b_n}$, onde $b_n = 2\alpha(n - \tau)$ é portanto $2\alpha = \frac{db_n}{dn}$. Um exemplo do comportamento de b_n em função de n para $u = 3.9$ é apresentado na figura 41. Embora três pontos não seja muito para um cálculo estatístico a estimativa obtida por este método ($2\alpha \simeq 0.066$) é tao boa quanto o método 1 ($2\alpha \simeq 0.056$). Para entender por que $b_n = 2\alpha(n - \tau)$, basta observarmos o comportamento da distribuição de probabilidade da rugosidade ao quadrado $P(w^2, L)$. Utilizando-se distintos tamanhos de redes L é possível colapsar a distribuição de probabilidade na forma

$$P(w^2, L) = \frac{1}{k_1 - C} \Phi_1 \left(\frac{w^2 - C}{k_1 - C} \right), \quad (4.10)$$

ou

$$P(w^2, L) = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \Phi_2 \left(\frac{w^2 - k_1}{\sqrt{k_2}} \right),$$

com $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(y)$ funções universais, k_1 e k_2 o primeiro e segundo cumulante da rugosidade ao quadrado e C uma constante independente de L . Assim é simples mostrar

Figura 41 – Em azul o comportamento do expoente b_n medido sobre os cumulantes k_2, k_3, k_4 supondo que $k_n \sim l^{b_n}$. Em vermelho o expoente b medido pelo método 1 para o cumulante k_1 . A inclinação da linha preta é uma estimativa do expoente 2α usando-se os cumulantes k_2, k_3, k_4 . As simulações foram realizadas com 10048 amostras de Monte Carlo utilizando-se $(u, p) = (3.9, 1)$. As medidas foram feitas no estado estacionário sobre um tempo de 10000. Para esta figura $l = L$ e b_n foi medido sobre o intervalo $2^{10} \leq L \leq 2^{14}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

que $\langle (w^2 - k_1)^n \rangle \sim (k_1 - C)^n$ ou que $\langle (w^2 - k_1)^n \rangle \sim (\sqrt{k_2})^n$ com $n \geq 2$. Portanto, se $(k_1 - C) \sim l^b$, de imediato vemos $k_n \sim l^{b_n}$ e o termo adicional τ poder ser encontrado se supormos que $\Phi_1(x) = x^{-\tau} \mathcal{G}(x)$ para $x \gg 1$, por exemplo, $\Phi_1(x) = x^{-\tau} \exp(-mx)$. Com um comportamento deste tipo observaríamos que $\Phi_1\left(\frac{w^2 - C}{k_1 - C}\right)$ se aproxima a uma lei de potência no limite termodinâmico sempre que $b > 0$. Além disto observaríamos que $k_n \sim l^{b \cdot (n-\tau)}$ e portanto independente do tipo de funções $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(y)$ encontradas, obtemos $\frac{db_n}{dn} = b$ e $2\alpha = b$ se $b \geq 0$. Este resultado pode ser visto como uma generalização do resultado $\sqrt[n]{k_n} \sim l^{2\alpha}$ com $(1 + 2\alpha) > 1/n$ encontrado no artigo (20) ao se estudar a rugosidade ao quadrado sobre uma janela de tamanho l de um ruído com espectro Gaussiano com lei de potência $1/f^{(1+2\alpha)}$.

Método 3: Nos métodos anteriores as funções $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(y)$ não eram importantes e assumíamos um comportamento de lei de potência $(k_1 - C) \sim l^b$ para o primeiro cumulante da rugosidade ao quadrado. Neste método e no próximo assumimos que a função $\Phi_1(x)$ é próxima da função obtida no artigo (20), salvo talvez uma pequena perturbação que leve em conta o efeito das dessorções não locais do PARPM. Para este método utilizamos a razão $R = \frac{a_1}{\sqrt{a_2}}$ onde as constantes a_1 e a_2 são obtidas dos ajustes $k_1 = a_1 l^b + c$ e $k_2 = a_2 l^{b_2}$ de forma que se $b_2 = 2b$ esta razão pode ser vista como o limite $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{k_1(l) - c}{\sqrt{k_2(l)}}$. Nossa idéia é que se o efeito das dessorções não locais é pequeno então $R(\alpha) \simeq \frac{\zeta(1+2\alpha)}{\sqrt{\zeta(2+4\alpha)}}$ *, tal como é predito para um ruído com espectro Gaussiano envolto por uma lei de potência $1/f^{(1+2\alpha)}$ (ver artigo (20)). Desta expressão podemos obter o valor de α como $\alpha = R^{-1}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}\right)$. Os resultados obtidos por este método são ilustrados pela linha verde da figura 39. Um fato

* $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann.

interessante é que a equação $R(\alpha) \simeq \frac{\zeta(1+2\alpha)}{\sqrt{\zeta(2+4\alpha)}}$ obtida originalmente para $\alpha > 0$ dá valores semelhantes aos outros métodos para $-1/2 \leq 2\alpha < 0$.

Método 4: Este último método se aplica exclusivamente para condições periódicas de contorno e mede a distribuição de probabilidade da rugosidade ao quadrado $P(w^2, L)$ sobre toda a rede $l = L$. A idéia é encontrar a função $\Phi_1(\alpha^*, x)$ com $\alpha^* = 1 + 2\alpha$ que melhor ajusta $|k_1 - C| P(w^2, L)$ em função de $x = \frac{w^2 - C}{k_1 - C}$. Usamos no método $\Phi_1(\alpha^*, x)$ como a predição teórica obtida no artigo (20) para um ruído com espectro Gaussiano envolto por uma lei de potência $1/f^{\alpha^*}$ (ver Apêndice A). O valor da constante C foi determinado do máximo da distribuição $P(w^2, L)$ em função de k_1 de forma que: $1/\max\{P(w^2, L)\} \propto (k_1 - C)$. Uma vez determinada a constante C , se utilizaram dois critérios para se determinar α . O primeiro foi encontrar um valor tal que a posição vertical dos máximos $\max\{\Phi_1(\alpha^*, x)\} = \max\{|k_1 - C| P(w^2, L)\}$ fossem as mesmas e o segundo critério consistiu em fazer coincidir-se a posição horizontal. Em geral estes dois critérios deram valores de α similares observando-

Figura 42 – Colapso das distribuições de probabilidade da rugosidade ao quadrado de acordo com a expressão 4.10. A distribuição foi medida usando-se toda a rede e utilizando-se condições periódicas de contorno e $(u, p) = (3, 1)$. O valor de $C = -3.968$ e os valores de $\alpha^* = 1.071$ (+), e de $\alpha^* = 1.079$ (x) foram utilizados para graficar a previsão teórica $\Phi_1(\alpha^*, x)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

se a maior diferença quando $u = 3$, onde o primeiro critério deu $2\alpha \simeq 0.071$ e o segundo deu $2\alpha \simeq 0.079$. Como se observa da figura 42 em geral $|k_1 - C| P(w^2, L)$ é um pouco diferente de $\Phi_1(\alpha^*, \frac{w^2 - C}{k_1 - C})$. Isto possivelmente seja um efeito das dessorções não locais, tal como aconteceu no capítulo 3 onde as dessorções não locais deslocaram a transição rugosa de $u \simeq 0.46$ de um modelo local até $u = 1$ para o *PARPM*. Isto sugere um incremento na distribuição de probabilidade $|k_1 - C| P(w^2, L)$ para pequenos valores de w^2 que terá que ser compensada em outros valores de w^2 pois $\int P(w^2, L) dw^2 = 1$. Os resultados obtidos por este método são apresentados em azul na figura 39 e resulta serem interessantes pois ao

introduzir o valor absoluto $|k_1 - C|$ no fator da expressão 4.10 permite calcular-se valores negativos de α .

Figura 43 – Os valores de $l_{\min}$ e $l_{\max}$ são escolhidos de forma que o comportamento dos cumulantes k_n com $n > 1$ seja independente de uma escala microscópica a ou macroscópica L . (a) Quarto cumulante da rugosidade ao quadrado k_4 medido para duas redes $L = 2^{13}$ ($\blacklozenge$), 2^{14} ($\blacksquare$). Para cada rede o quarto cumulante é medido sobre janelas de tamanho $l = 2^m$, iniciando em $l = 8$. (b) As mesmas medidas re-escaladas pelo tamanho do sistema. Estas medidas foram obtidas com $(u, p) = (76.3, 1)$ e mostram que o intervalo $128 \leq l \leq 2048$ para $L = 2^{14}$ é invariante de escala.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Estes quatro métodos dão resultados semelhantes, indicando uma vez mais que em $u = 1$ temos uma transição rugosa. Para $u < 0$ temos uma fase suave ($\alpha = 0$) e podemos mostrar que na figura 39 $b = -1$ no limite termodinâmico para $u < 1$. Para isto basta seguir a linha de pensamento encontrada no artigo (70). A idéia se fundamenta no fato que para $u < 1$ o tamanho dos clusters CS é finito (ver figura 24). Assim escolhendo-se um tamanho de rede tal que $CS \ll L$. Em uma primeira aproximação teríamos $N \sim L/CS$ clusters na rede distribuídos aleatoriamente. O i -ésimo cluster teria uma altura média $\langle h_{cs} \rangle_i$ e uma altura quadrática média $\langle h_{cs}^2 \rangle_i$, sendo estas variáveis não correlacionadas entre cada cluster. De acordo com o teorema do limite central as variâncias destas duas variáveis são da ordem de $\mathcal{O}(N^{-1})$ quando $N \rightarrow \infty$, portanto poderia se esperar que a variância da variável w_{cs}^2 seja da ordem de $(k_2)_{cs} \sim \mathcal{O}(N^{-1})$. No limite termodinâmico teríamos que $(k_2)_{cs} \propto k_2$ implicando que

$$k_2 \sim L^{-1},$$

e com uma linha de pensamento similar sobre os outros cumulantes teríamos

$$k_n \sim L^{(1-n)},$$

sempre que $n \geq 2$. Este resultado junto como o método 2 exposto acima leva a que $\frac{db_n}{dn} = -1$. Para $u \gtrsim 33.8$, tal como será mostrado na seção 4.5, o número de tijolos

evaporados em cada dessorção se encontra limitado só pelo tamanho do sistema e de igual forma o maior tamanho dos clusters. Por tal motivo não é possível argumentar que $b = -1$ para $u \gtrsim 33.8$. Desta maneira a região $u \gtrsim 33.8$ se diferencia da região $u < 1$ em seu comprimento de correlação horizontal ξ_r . Não obstante, ainda é necessário localizar o valor exato u_c da transição e estudar seu comportamento com o tamanho da rede. Com os resultados apresentados nesta seção é difícil assegurar que a região do diagrama de fase com $u \gtrsim 33.8$ é suave pois resta a possibilidade de ter-se um comportamento $k_1 = c \ln(L) + a/L^{|b|}$, pois o logaritmo varia pouco nos tamanhos de redes estudados. No entanto os resultados indicariam uma transição rugosa em $u \simeq 33.8$.

Figura 44 – Valor do expoente b obtido para o comportamento da rugosidade ao quadrado assumindo-se que $k_1 \simeq a \cdot l^b + c$. Em preto se encontram os valores de b obtidos usando-se condições periódicas de contorno e medindo a rugosidade sobre toda a rede $l = L$. Em vermelho e verde a rugosidade ao quadrado foi medida sobre janelas onde $1 \ll l \ll L$ e utilizando-se condições periódicas e livres de contorno, respetivamente. Nestes últimos dois casos o método 4 não foi utilizado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez explicados os métodos utilizados para a determinação do expoente de rugosidade α , determinamos agora o mesmo expoente usando janelas de tamanho lateral l menor que o tamanho da rede $1 \ll l \ll L$. Para determinar um domínio para o tamanho das janelas sobre o qual será medida a rugosidade, se utilizou o fato que uma lei de potência é invariante sobre uma transformação de escala. Assim, o critério para selecionar um $l_{\min}$ e um $l_{\max}$ para observar o comportamento dos diversos cumulantes foi resolvido encontrando-se o intervalo $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$, onde o comportamento dos cumulantes $k_n(l, L)$ com $n \geq 2$ fosse invariante frente a uma transformação de escala local $l \rightarrow l/a$ e uma global $l \rightarrow l/L$. Como se observa da figura 43, para condições periódicas de contorno e $(u, p) = (76.3, 1)$, o quarto cumulante k_4 medido sobre janelas de tamanho $8 \leq (l = 2^m) \leq L$ é invariante frente a uma transformação de escala local e global no intervalo $128 \leq l \leq 2048$ para uma rede de tamanho $L = 2^{14}$. Em geral $l_{\min}$ permanecerá invariante ante mudanças no tamanho da rede L , pois esta escala seria uma medida dos efeitos microscópicos do modelo os quais só

mudarão com (u, p) . Porém a escala $l_{\max}$ dependerá do tamanho do sistema L pois esta escala determinará a partir de que distância o tamanho do sistema é relevante. Conhecendo-se o intervalo $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$ também resultará simples a determinação do valor mínimo $L_{\min}$ do tamanho de rede a ser utilizado para medir-se a rugosidade. Para isto é suficiente observarmos o comportamento dos cumulantes $k_n(l_{\min} \leq l \leq l_{\max}, L)$ e verificarmos a partir de que tamanho de rede L o comportamento dos cumulantes $k_n(l = L, L)$, medidos sobre toda a rede, é paralelo ao comportamento de $k_n(l_{\min} \leq l \leq l_{\max}, L)$ em escala logarítmica.

Para finalizar esta seção na figura 44 é apresentado o comportamento do parâmetro b definido através de $k_1 \simeq a \cdot l^b + c$ em função de u . Nesta figura se apresentam os resultados obtidos ao realizarem-se medidas sobre toda a rede $l = L$ (linha preta) e sobre uma parte da rede $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$ (linha vermelha), com condições periódicas. Para o caso de condições livres de contorno a medida só foi realizada sobre uma janela centrada na rede ($1 \ll l \ll L$) (linha verde), de forma que os efeitos da borda fossem irrelevantes. Como se observa da figura 44, nos três casos se observa uma transição rugosa em $u = 1$ e uma mudança de comportamento na rugosidade da superfície em $u \simeq 33.8$. Porém, como foi mencionado previamente, ainda é necessário um estudo da posição deste ponto crítico u_c em função do tamanho finito do sistema.

4.5 Criticalidade Auto-Organizada

Até agora temos mostrado que o comprimento de correlação temporal ξ_t diverge como $\xi_t \sim L^z$ para $u \geq 1$ e que as flutuações verticais da superfície crescem como $\xi_{\perp} \sim L^{\alpha}$ para $1 \leq u \lesssim 33.8$. Mostramos também que o tamanho médio dos clusters diverge com o tamanho do sistema para $u \rightarrow 1^-$. A divergência do comprimento de correlação temporal indica que para $u \geq 1$ o sistema é crítico (não-massivo ou gapless) porém isto não quer dizer que a criticalidade seja auto-organizada.

Para falar de criticalidade auto-organizada os seis critérios expostos na seção 1.5 teriam que ser observados. Por comodidade repetimos estes critérios a seguir:

- a) Escalonamento não trivial (escalonamento de tamanho finito, sem dependência de um parâmetro de controle).
- b) Correlações espaço-temporais com comportamento de lei de potência .
- c) Aparente auto-ajuste ao ponto crítico (de uma transição de fase continua subjacente possivelmente identificada).
- d) Interação não linear (requerida por 1), normalmente em forma de valores limites.
- e) Avalanches (intermitência, esperada na presença de limites e condução lenta).
- f) Separação de escalas de tempo (requisito óbvio para sustentar avalanches distintas).

Destes seis critérios o escalonamento não trivial é obtido para a propriedade $\left(\frac{h(t)}{h_\infty} - 1\right)$ por meio da equação 4.6, ou também é obtido para a propriedade $(v(t, L) - v_\infty)$ através da equação 4.7 para $t \gg t_c$. Esta última propriedade tem a característica que $(v(t, L) - v_\infty) \rightarrow 0$ no limite termodinâmico, que poderia estar associada a uma “depinning transition”, embora não conheçamos a transição de fase subjacente nem o parâmetro de controle desta transição. Esta última característica poderia ser um indicativo de uma fase absorvente subjacente. Referente ao ajuste dos parâmetros (u, p) do *PARPM* este ajuste não é ultrafino pois qualquer valor de $u \geq 1$ e de $p < p_c^*$ será suficiente para estar na região criticamente auto-organizada.

As correlações espaço-temporais não foram estudadas nesta tese mas a seção 2 do artigo (71) mostra que para $(u, p) = (1, 1)$ em princípio estas correlações apresentam um comportamento em lei de potência. Mais ainda na representação partícula-buraco com exclusão, neste mesmo artigo (seção 5) mostra-se numericamente as correlações espaciais decaem como uma lei de potência para as propriedades corrente e densidade de partículas. Se este comportamento se mantém para $u > 1$ então o critério (b) será satisfeito. Como será mostrado no capítulo 5 o efeito do parâmetro p é introduzir uma dilatação temporal proporcional à $(p_c - p)$. Isto implica que as correlações espaço-temporais teriam que se manter sempre que $p < p_c$.

A interação não linear do modelo está presente na máxima inclinação em valor absoluto que pode ter a superfície, de forma que esta não pode exceder o valor 1. Desta forma qualquer perturbação sobre a superfície que tente incrementar esta inclinação será descartada ou gerará uma avalanche no sistema.

A separação de escalas de tempo se encontra na definição do modelo, ao separar as absorções de tijolos das dessorções. Desta forma enquanto aconteçam absorções não serão permitidas as dessorções e vice-versa.

Finalmente as avalanches podem ser estudadas de duas formas. A primeira temporalmente, estudando o tempo transcorrido entre duas dessorções sucessivas e a segunda espacialmente observando a escala espacial das dessorções. Por questão de facilidade nesta tese só foram estudadas as avalanches espacialmente, medindo-se o tamanho das avalanches pelo número de tijolos T evaporados por cada dessorção. Pela construção do modelo este número de tijolos sempre será um número ímpar. Por tal motivo utilizaremos a variável v definida como $T = 2v - 1$ para medir o tamanho de uma avalanche no estado estacionário. Na criticalidade e no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) não esperamos uma escala característica para o tamanho das avalanches, portanto ao observar a distribuição de probabilidade $S(v, L)$ das avalanches de tamanho v esperaríamos uma lei de potência

* p_c será introduzido no capítulo 5. $p_c \geq 2$ e depende de u . Este parâmetro crítico marca uma transição para uma região com múltiplos estados absorventes.

do tipo

$$S(v, L \rightarrow \infty) \sim v^{-\tau}.$$

Porém para um tamanho finito esta expressão tem que ser corrigida por uma função $\mathcal{G}(v/v_c)$, onde v_c introduz uma escala macroscópica nas avalanches, correção esta ligada ao tamanho finito do sistema como $v_c \sim L^D$. Assim esperamos que o comportamento da distribuição de avalanches $S(v, L)$ em uma região criticamente auto-organizada seja dado por

$$S(v, L) = v^{-\tau} \mathcal{G}\left(\frac{v}{L^D}\right). \quad (4.11)$$

Os expoentes D e τ são conhecidos na literatura como a dimensão da avalanche e o expoente do tamanho da avalanche, respetivamente. (12, 27) Estes expoentes já foram medidos por Alcaraz, Levine e Rittenberg (58) para o modelo com $p = 1$ observando que $D \simeq 1$ e τ decresce com $u \geq 1$ desde $\tau = 3$ até $\tau = 2$ quando $u \rightarrow \infty$. O expoente $D \simeq 1$ é entendido se temos em conta que o maior tamanho da avalanche esta limitado ao tamanho do sistema. Como $v_{\max} = (L - 2)/2$, e o expoente $\tau > 2$ pode ser facilmente entendido em condições livres de contorno. Para isto é suficiente entender-se que no estado estacionário o número médio de tijolos absorvidos e dessorvidos devem ser iguais. Desta forma, se n_∞ é a densidade média de picos e vales sobre a superfície * no estado estacionário e no limite termodinâmico $n_\infty = n(L \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty)$, com

$$n(L, t) = \frac{1}{L-1} \left\langle \sum_{i=1}^{L-1} \left(1 - \left| \frac{h_{i+1}(t) - h_{i-1}(t)}{2} \right| \right) \right\rangle. \quad (4.12)$$

Então em média para cada tijolo que atinge a superfície, com uma probabilidade $n_\infty/2$ atingem um vale e são absorvidos a uma taxa u_a . Com uma probabilidade $(1 - n_\infty)$ atingem um declive e causam uma dessorção média de $\langle T \rangle$ tijolos com taxa u_d . Isto nos leva à igualdade (2, 56, 58)

$$\langle T \rangle (1 - n_\infty) u_d = \frac{n_\infty}{2} u_a.$$

O caso $n_\infty = 1$ acontece para $p = 1$ só quanto não se tem absorção $u = u_a/u_d = 0$. Para valores diferentes de u teremos que $n_\infty < 1$, assim a expressão acima implica que

$$\langle T \rangle = \frac{n_\infty}{(1 - n_\infty)} \cdot \frac{1}{2w},$$

indicando que para $w = 1/u \neq 0$ necessariamente $\langle T \rangle = 2 \langle v \rangle - 1$ é finito. Por isto devido à equação

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_1^{(L-2)/2} v S(v, L) dv, \\ &= \int_1^{(L-2)/2} v^{1-\tau} \mathcal{G}\left(\frac{v}{L^D}\right) dv, \end{aligned}$$

*Também é a densidade média de pontos onde não pode acontecer uma dessorção sobre a superfície.

se observa que no limite termodinâmico a integral acima é convergente se $\tau - 1 > 1$, sempre que $\mathcal{G}(0) \simeq O(1)^*$. Isto explicaria por que $\tau > 2$ e por que se aproxima a $\tau \rightarrow 2$ quando $w \rightarrow 0^+$. Neste contexto vemos que o tamanho médio das avalanches sempre permanece finito pois em $w = u_d/u_a = 0$ não se tem dessorções. A diferença entre $u < 1$ e $u \geq 1$ se encontra no tamanho máximo possível para uma avalanche, pois o tamanho finito dos clusters para $u < 1$ limita o tamanho máximo das avalanches. Nesta ordem de idéias para diferenciar-se o comportamento das avalanches entre $u < 1$ e $u \geq 1$ com a média de algum observável, é suficiente observar-se as flutuações das avalanches, pois $\langle v^2 \rangle$ divergirá para $u \geq 1$. Em outras palavras, o ponto crítico u_c também pode ser visto como o ponto onde o segundo cumulante do tamanho das avalanches diverge.

A contribuição feita neste trabalho ao estudo das avalanches se encontra em ter-se medido novamente os expoentes D e τ para valores de $p \neq 1$ incluindo o caso $p \geq 2$, onde aparecem os estados quase-estacionários 5. O método utilizado mede a divergência dos momentos $\langle v^m \rangle$ para $m > (\tau - 1)$ em função do tamanho finito da rede, pois como pode ser verificado $\langle v^m \rangle \sim L^{D \cdot (m - \tau + 1)}$ e assim, ao medir-se este expoente em função de m , é fácil obter-se D e τ . (12, 27, 58) O resultado final de todas as medidas para $u > 1$ é que o efeito do parâmetro p para $p < p_c$ é irrelevante no comportamento das avalanches, observando-se os mesmos expoentes D e τ sempre que $p < p_c$ tanto para o regime de um estado estacionário $p < 2$ como para o regime de estados quase-estacionários $p \geq 2$. Uma mostra destes resultados é apresentado na tabela 3, onde os expoentes D e τ foram medidos no estado estacionário ou quase estacionário com redes de tamanho $1024 \leq L \leq 8192$. As medidas foram realizadas partindo-se de três condições iniciais diferentes sendo estas a pirâmide, o substrato e um estado intermediário onde a metade do substrato é preenchido por uma pirâmide. Para $p > 2$ o estado substrato é um estado absorvente por isso não é possível medir-se D e τ partindo desta configuração inicial. Como observamos, da tabela 3, os resultados para $u = 10$ são essencialmente os mesmos, independente de p , obtendo-se $D = 1.0007(6)$ e $\tau = 2.090(7)$.

Para testar se os expoentes D e τ obtidos pelas análises dos momentos $\langle v^m \rangle$ são confiáveis observamos se o gráfico de $v^\tau S(v, L)$ em função (v/L^D) colapsava para diversos tamanhos de rede. Para nossa surpresa o colapso foi razoável mas podia ser melhorado ajustando-se uma lei de potência ao comportamento de $S(v, L)$ em função de v com $v \ll L$. Como vemos da figura 45, para $(u, p) = (10, 1.6)$ os expoentes $D = 1$ e $\tau = 2.215$ produzem um excelente colapso. Além disso se observa uma clara lei de potência $S(v, L) \sim v^{-\tau}$ para avalanches $v \ll v_{\max}$, onde o tamanho do sistema parece infinito. Em outras palavras, tudo parece indicar que o *PARPM* com $u \geq 1$ apresenta criticalidade auto-organizada.

A origem da discrepância entre os valores de τ medidos pela análise dos momentos

*O limite superior da integral pode ser substituído por ∞ , pois por definição $S(v, L) = 0$ se $v > (L - 2)/2$.

Tabela 3 – Valores dos expoentes D e τ definidos pela equação 4.11 e medidos em função de p para $u = 10$. Estes valores foram medidos observando-se o comportamento dos momentos $\langle v^m \rangle$ com $m \geq 2$, em função de L com $1024 \leq L \leq 8192$. Energia E_1 e E_2 achados pelo método da potência para $u = 1.135$ e $p = 0.4$. Como vemos estes são independentes do parâmetro p e da condição inicial (CI) pirâmide (PYR), substrato (SUBS) e aquela com metade do substrato preenchido por uma pirâmide (PYRSUBS).

CI	PYR		SUBS		PYRSUBS	
p	D	τ	D	τ	D	τ
0.1	1.0004	2.094	1.0008	2.089		
0.4	1.0004	2.095	1.0008	2.089		
0.7	1.0008	2.087	1.0009	2.086		
1	1.0005	2.094	1.0010	2.082	1.0008	2.087
1.3	1.0007	2.091	1.0008	2.093		
1.6	1.0005	2.087	1.0004	2.088		
1.9	1	2.095	1.0007	2.096		
2	1	2.101			1.0011	2.090
2.2	1.0002	2.093			1.0001	2.097
2.4	1.0011	2.094			1.0013	2.090
2.6	0.9995	2.097			1.0007	2.081
2.8	1.0022	2.094			1.0020	2.067

Fonte: Elaborada pelo autor.

$\langle v^m \rangle$, possivelmente se encontre no comportamento da distribuição de probabilidade $S(v, L)$, especificamente na função $\mathcal{G}\left(\frac{v}{L^D}\right)$. Desta função comumente esperaríamos um comportamento constante para $v \ll (v_c = aL^D)$ e um decaimento a zero para valores maiores. Porém ao reparar na figura 45 não se observa um decaimento a zero para $v > (v_c = aL^D)$. De fato este comportamento é observado sempre para valores de $u > 1$, com exceção do caso $u = 1$, para o qual $\mathcal{G}(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, como pode ser inferido da figura 46. Da figura 46 observamos que para $u > 1$ teríamos que $S(v \simeq v_{\max}, L \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Em outras palavras, no limite termodinâmico existe uma probabilidade não nula de se ter uma avalanche sobre todo o sistema e portanto

$$S(v \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty) + \int_1^\infty S(v, L \rightarrow \infty) dv = 1.$$

Este comportamento pode ser entendido como a soma de dois efeitos. O primeiro quando um cluster cresce até atingir o tamanho da rede. Seu crescimento lateral é compensado com um incremento na altura média do cluster, incrementando também o número de declives tal como se observa na figura 47. O segundo fator, e possivelmente o mais relevante, se relaciona ao fato de termos uma probabilidade não nula de termos um cluster ocupando toda a rede. Com esta explicação entenderíamos o ponto crítico $u_c = 1$ estatisticamente como uma transição do tipo de percolação, de forma que para $u > 1$ existe uma probabilidade não nula de encontrarmos um cluster que ocupe toda a rede. Porém por causa das dessorções esta probabilidade não será igual a 1, com exceção se $u \rightarrow \infty$ onde a percolação será inteira.

Figura 45 – Colapso da distribuição de avalanches em acordo com a expressão 4.11 ao fixar $(u, p) = (10, 1.6)$. Os valores de $\tau = 2.090$ (7) dão um colapso razoável, que é melhorado medindo-se diretamente τ da distribuição $S(v, L)$ usando-se $L = 8192$ e $v \leq 200$. Os valores dos expoentes D e τ utilizados nestas figuras são $D = 1$ e $\tau = 2.215$ com $L_{ref} = 8192$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para verificar este comportamento é suficiente observar a frequência $N(CS, L)$ com que um cluster de tamanho lateral CS é encontrado acima do estado substrato. Como vemos da figura 48 existem clusters de todos os tamanhos para $u \geq 1$, contudo a probabilidade de encontrarmos um cluster que ocupe toda a rede vai a zero para $u = 1$ mas é diferente de zero para $u > 1$, no limite termodinâmico. Esta probabilidade não nula de percolar toda a rede explicaria por que, em condições periódicas de contorno, a velocidade vertical da superfície v_∞ no limite termodinâmico teria que ser não nula, pois uma vez preenchida uma camada então por construção do modelo não é possível escavar na superfície.

Antes de terminarmos esta seção um fato interessante a ressaltar entre o *PARPM* e o modelo conhecido como “*Activated Random Walkers*” (*ARW*) introduzido na seção 1.5, se encontra no fato de que para fazer-se do *ARW* um modelo criticamente auto-organizado, na seção 1.5, se tiraram as condições periódicas do modelo permitindo-se a saída de caminhantes pela borda. Como vemos no *PARPM* este não era o único jeito de tornar o modelo criticamente auto-organizado. De fato como foi mencionado por Dickman na seção III.3 do artigo (30) não há motivo para que a perda de caminhantes aconteça nas bordas do sistema. Em outras palavras, em princípio podemos fazer do *ARW* um modelo criticamente auto-organizado mantendo as condições periódicas e introduzindo a perda de caminhantes em qualquer lugar do modelo tal como acontece no *PARPM*.

4.6 Fractalidade e parâmetro de ordem

Até agora temos mostrado que a região no diagrama de fase com $u \geq 1$ e $p < p_c$ é criticamente auto-organizada, apresentando auto-afinidade em escalas $1 \ll l \ll L$, porém

Figura 46 – Diferença entre o comportamento da distribuição de avalanches $S(v, L)$ para $u = 1$ e $u > 1$. A diferença principal se encontra nas avalanches de tamanhos da ordem do tamanho do sistema $v \simeq v_{\max} = (L - 2)/2$. (a) Para $(u, p) = (1, 1)$ temos $\tau = 3$ e vemos que $S(v_{\max}, L) \rightarrow 0$ no limite termodinâmico. ($L_{\text{ref}} = 16000$). (b) Para $u > 1$ vemos que $S(v_{\max}, L) \neq 0$ no limite termodinâmico, neste caso $(u, p) = (100, 0)$ com $\tau = 2.020$ e ($L_{\text{ref}} = 32000$). Em ambas figuras $D = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

parece-nos estranho a presença de uma fase possivelmente suave para $u \gtrsim 33.8$ (ver seção 4.4) pois continuaríamos com avalanches em todas as escalas e um comprimento de correlação temporal infinito ($\xi_t \sim L^z$). Embora pareça estranho que todos os comprimentos de correlação $\xi_{\parallel}$, $\xi_{\perp}$ e ξ_t não divirjam simultaneamente, em geral isto não tem por que ser assim. Um exemplo disto pode ser encontrado na evolução temporal do modelo usando os parâmetros $(u, p) = (0, 2)$. Tal como se observa na figura 19 o comprimento de correlação temporal diverge com o tamanho do sistema, porém não podemos dizer o mesmo dos comprimentos de correlação espaciais. Outros exemplos que indicam que os comprimentos de correlação temporais divergentes não implicam comprimentos espaciais divergentes e nem estruturas fractais podem ser encontrados nas seções 8.1 e 8.2 do artigo (35). Para clarificarmos a situação ainda nesta seção tentaremos entender a diferença entre a região $1 \leq u \lesssim 33.8$ e a região $u \gtrsim 33.8$. Observaremos que para $u \simeq 1$ existe uma estrutura fractal. Utilizaremos um parâmetro de ordem para medir a rugosidade, observando que para $u \lesssim 33.8$ o comportamento deste parâmetro é não trivial. Finalmente observaremos que para $u \rightarrow \infty$ o comportamento da altura média da superfície é descrita de forma razoável por uma teoria de campo médio, que prediz uma saturação na altura média conforme $L \rightarrow \infty$.

4.6.1 Fractalidade

Para verificar a fractalidade do modelo utilizamos como referência o fractal determinístico conhecido como conjunto de Cantor. (15, Apêndice H) Este fractal, como se

Figura 47 – Para $(u, p) = (19.7, 1)$ é apresentada a altura média dos clusters que ocupam uma janela de tamanho lateral $l = 2 \cdot (CS + 1)$. (◇) Altura média dos clusters que ocupam toda a rede $l = L$. (○) Altura média dos clusters que não ocupam toda a rede $l < L$. Os tamanhos das janelas foram escolhidos como $l = 2^m$, com m um inteiro de forma que $8 \leq l \leq L$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 48 – Frequência $N(CS, L)$ com que um cluster de tamanho CS ocorre em uma rede de tamanho L usando $(u, p) = (1, 1)$ (figura a) e $(u, p) = (10, 1)$ (figura b). Em ambos os casos $D = 1$, $\tau = 1$, $L_{ref} = 16000$ e a distribuição foi medida no estado estacionário do *PARPM* com condições livres de contorno.

Fonte: Elaborada pelo autor.

ilustra na figura 49, é construído eliminando-se indefinidamente o terço central de cada segmento de linha existente. Como se observa, podemos dizer que os intervalos vazios neste fractal ocupam toda a rede e portanto a medida dos segmentos de linha é zero. Para este fractal determinístico a probabilidade $\mathcal{P}(l)$ de encontrarmos intervalos vazios de tamanho l escala como

$$\mathcal{P}(l) \sim l^{-1-d_f},$$

Figura 49 – Primeiras 3 iterações na construção do fractal determinístico conhecido como conjunto de Cantor. Em cada iteração é eliminado o terço central dos segmentos de linhas existentes.

Fonte: HENKEL et al. (15, p. 298)

sendo d_f denominado por dimensão fractal e que para o caso do conjunto de Cantor possui valor $d_f = \ln(2) / \ln(3) \approx 0.63$. Para verificar se este comportamento estatisticamente é observado no *PARPM* mediu-se em condições livres de contorno a frequência $N_v(s_v, L)$ com que um intervalo vazio s_v acima do substrato é observado. O tamanho s_v de cada

Figura 50 – Frequência absoluta $N_v(s_v, L)$ com que dois clusters consecutivos se encontram separados por s_v mínimos. Estas medidas foram tomadas no estado estacionário usando-se condições livres de contorno e fixando $(u, p) = (2, 1)$. A rede de referência foi $L_{ref} = 16000$ e o expoente $d_f = 0.303$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

intervalo foi definido como o número de mínimos consecutivos entre dois clusters. Como vemos da figura 50 para $(u, p) = (2, 1)$ existe um decaimento exponencial $\exp(-s_v/\xi_v)$ em lugar de uma lei de potência, indicando que a separação média entre clusters tem uma escala típica ξ_v que diminui conforme u aumenta (dados não apresentados). Portanto no limite termodinâmico a razão ξ_v/L vai a zero. Assim a separação entre clusters seria o análogo dos segmentos de linha no conjunto de Cantor (figura 49). Em outras palavras os clusters de tamanho lateral CS seriam o análogo aos intervalos vazios do conjunto de Cantor. De fato, como se observa da figura 48, existe um decaimento em lei de potência para a frequência $N(CS, L)$ com que um cluster de tamanho lateral CS é encontrado acima do estado substrato. Na figura 48 os expoentes $D = 1$ e $\tau = 1$ poderiam dar a impressão que a dimensão fractal fosse $d_f = 0$, porém como diria Christensen (12, p. 274)

o expoente τ não necessariamente está relacionado com o decaimento da distribuição mas com o decaimento de uma característica distintiva, o valor do mínimo ou máximo observado na figura 48 antes de se perceber o tamanho do sistema. Ao medir-se o expoente com que a frequência $N(CS, L)$ decai com CS , se observa que de fato este é, em valor absoluto, maior do que 1 para valores de $u \simeq 1$. Como vemos da figura 51 a dimensão

Figura 51 – Dimensão fractal obtida ajustando-se uma lei de potência à frequência $N(CS, L)$ com que um cluster de tamanho CS ocorre em uma rede de tamanho L . O ajuste foi realizado no domínio $100 \leq CS \leq 1000$ em uma rede de tamanho $L = 16000$. Este resultado ainda precisa de um estudo em função do tamanho da rede.

Fonte: Elaborada pelo autor.

fractal obtida por este método inicia em $\simeq 2/3$ para $u = 1$ e diminui gradualmente com u . Esta dimensão foi obtida ajustando-se uma lei de potência ao decaimento de $N(CS, L)$ no domínio $100 \leq CS \leq 1000$ para a rede com $L = 16000$ sítios. Em outras palavras, este resultado ainda precisa de uma análise mais acurada em função do tamanho finito do sistema. Deixando isto claro, observa-se que à medida que u aumenta é mais difícil de se determinar a dimensão. Problema que possivelmente seja solucionado aumentando-se o tamanho da rede e o número de amostras nas simulações de Monte Carlo. Para $L = 16000$ foi possível medir a dimensão fractal até $u = 17$ observando um comportamento decrescente que sugere o fim da fractalidade para $u > 17$. Ainda mais, a dimensão fractal d_f coincide com o crescimento de $N_v(s_v, L)$ em função de L de forma que

$$N_v(s_v, L) \sim L^{d_f} \exp\left(-\frac{s_v}{\xi_v}\right),$$

implicando que o comportamento do número de pontos de contato, definido como

$$K(L, t) = \left\langle \sum_{i=1}^L \delta_{h_i(t), 0} \right\rangle,$$

esteja descrito no estado estacionário ($t \rightarrow \infty$) por

$$K(L, t \rightarrow \infty) - 1 = \int s_v N_v(s_v, L) ds_v \\ \sim L^{d_f}.$$

Deste modo a fractalidade desaparece para $u > 17$. Assim, acima de certo valor de u a propriedade $K(L, t \rightarrow \infty) - 1$ seria independente de L e só dependeria de u através de ξ_v . Como se observa na figura 52 para tamanhos de rede entre $1026 \leq L \leq 16386$ a propriedade

Figura 52 – Número médio dos pontos de contato $K(L, t \rightarrow \infty)$ encontrados no estado estacionário. Para tamanhos de rede entre $1026 \leq L \leq 16386$ não se observa uma dependência com L para $u \gtrsim 44.4$. O valor 1 é subtraído para não contarmos o ponto de contato na posição $j = L$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$K(L, t \rightarrow \infty) - 1$ depende de L para valores de $u \lesssim 44.4$. Acima deste valor não se observa uma dependência com L , o que sugere a perda da fractalidade possivelmente por que os clusters ocupam praticamente toda a rede, aparecendo eventualmente alguns pontos de contato por dessorções não locais com avalanches da ordem do tamanho do sistema. A diferença entre o expoente d_f medido para $u < 1$ e $u \geq 1$ se encontra propriamente na fractalidade, pois para $u \geq 1$ se observa que $d_f \leq 2/3$ mas para $u < 1$ se obtém $d_f = 1$, em outras palavras só a região no digrama de fase compreendido por $1 \leq u \lesssim 44.4$ é fractalmente não trivial.

4.6.2 Parâmetro de ordem

Uma vez entendida a diferença de fractalidade nas regiões do diagrama de fase com $u \rightarrow 1^+$ e $u \rightarrow \infty$ agora tentamos entender a diferença em termos de rugosidade por meio de um parâmetro de ordem estudado no artigo de Alon, Evans, Hinrichsen et al (65). O parâmetro de ordem estudado aqui é análogo à magnetização por spin no modelo de Ising, no sentido que este será diferente de zero na fase magnética ($T < T_c$), se aproximará a zero de uma forma não trivial na transição ($T = T_c$) e finalmente virará trivialmente zero para $T > T_c$.

O parâmetro de ordem que utilizamos é definido por

$$M_3 = \left| \frac{1}{L-3} \sum_{j=2}^{L-2} \exp\left(i \frac{\pi}{2} h_j\right) \right|, \quad (4.13)$$

Figura 53 – No limite termodinâmico o parâmetro de ordem M_3 pode ser enxergado como a composição dos parâmetros $M_{1,even}$ e $M_{1,odd}$ de duas sub-redes fortemente correlacionadas. Estas redes se encontram nas posições pares e ímpares respectivamente, e suas novas alturas h' satisfazem à restrição $|h'_{j+1} - h'_j| \leq 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

que pertence à família de parâmetros de ordem

$$M_n = \left| \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \exp \left(\frac{2\pi i h_j}{n+1} \right) \right|,$$

definido no artigo (65). O mesmo é diferente de zero se a superfície tem uma altura característica no entorno do qual pode existir uma pequena flutuação. Porém se este não é o caso e a superfície é rugosa, de forma que existam flutuações na altura em todas as escalas, o parâmetro assumirá o valor zero. A eleição do parâmetro de ordem M_3 sobre M_2 e M_1 se deve a dois motivos: o primeiro motivo é que o parâmetro M_1 é conservado pela restrição $|h_{j+1} - h_j| = 1$ e o segundo motivo é que o parâmetro M_3 poder ser visualizado como a composição de dois parâmetros de ordem M_1 calculados sobre as posições pares $M_{1,even}$ e ímpares $M_{1,odd}$ da rede, tal como se ilustra no mapeamento da figura 53 (Isto não é possível para o parâmetro M_2). Desta forma

$$M_3 \simeq \sqrt{(M_{1,even})^2 + (M_{1,odd})^2}.$$

Contudo $M_{1,even}$ e $M_{1,odd}$ não podem ser estudados independentemente pois a sub-redes das posições pares e ímpares se encontram altamente correlacionadas pela restrição $|h_{j+1} - h_j| = 1$.

A definição 4.13 utilizada nesta tese não tem em conta as alturas $h_0 = h_L = 0$ e $h_1 = h_{L-1} = 1$ pois estas alturas são fixas em condições livres de contorno. Os resultados obtidos para o comportamento de $(L-3) M_3$ em função de u são apresentados na figura 54. Nesta figura mediu-se o comportamento de M_3 no estado estacionário usando-se condições livres de contorno e $1026 \leq L \leq 16386$. Como vemos o comportamento do parâmetro de ordem é não trivial só no intervalo $1 \leq u \lesssim 33.8$. Fora deste domínio o parâmetro vai a zero trivialmente para $u \gtrsim 33.8$ ou se mantém diferente de zero para $u < 1$. Em analogia com o parâmetro de ordem do modelo de Ising $u < 1$ corresponderia à $T < T_c$, $1 \leq u \lesssim 33.8$ corresponderia à $T = T_c$ e $u \gtrsim 33.8$ corresponderia à $T > T_c$.

Sabemos que para o modelo de Ising quando $T \rightarrow \infty$ os spins se distribuem aleatoriamente para acima e para abaixo. Porém, para um valor finito de temperatura $T \gg T_c$, podemos observar alguns aglomerados de mesma magnetização com um tamanho

Figura 54 – Comportamento do parâmetro de ordem definido pela equação 4.13 para diferentes tamanhos de rede e medido no estado estacionário do *PARPM* com $p = 1$. Para $u \gtrsim 33.8$ o valor $(L - 3) M_3 = \sqrt{2}$ independente do tamanho do sistema L . Para $u < 1$ o parâmetro de ordem M_3 não depende de L saturando em um valor não nulo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 55 – Possíveis perfis de uma superfície que satisfaz à restrição $|h'_{j+1} - h'_j| \leq 1$ e tem um parâmetro de ordem M_1 trivialmente zero. Por simplicidade os exemplos apresentados possuem alguma periodicidade mas isto não tem que ser assim necessariamente. Nestes quatro exemplos e suas possíveis combinações a rugosidade não diverge com o tamanho do sistema, o que quer dizer que a superfície é suave.

Fonte: Elaborada pelo autor.

máximo sempre finito. Nesta região a representação de Kadanoff de gotas aninhadas (ver figura 2) é limitada em tamanho, de forma que ao medir a magnetização média sobre janelas de maior tamanho observaremos um decaimento trivial do tipo l^{-d} , sendo l o tamanho lateral da janela e d a dimensão do modelo de Ising. Para entender se um comportamento deste tipo é possível no *PARPM* basta observarmos a definição do parâmetro M_1 . Como se observa da definição de M_1 , os termos da soma são sempre 1 ou -1 do mesmo jeito que acontece com a magnetização do modelo de Ising. Deste modo, tal como se ilustra na figura 55, é imediato a construção de superfícies não rugosas com um parâmetro de ordem M_1 que vai trivialmente a zero. Para que este mesmo comportamento aconteça para o parâmetro de ordem M_3 é suficiente que $M_{1,even}$ e $M_{1,odd}$ virem zero trivialmente. Um exemplo disto é ilustrado na figura 56. Esta figura também explicaria como é possível ter-se avalanches não locais em todas as escalas do sistema. Basta termos uma diferença de alturas de três, entre um pico e um vale, para começar a observar avalanches não locais. Na figura 57 ilustramos tal fato. Foram preenchidas duas camadas acima do substrato

Figura 56 – Basados nas configurações da figura 55, construímos dois perfis que poderiam aparecer no planalto da superfície estacionária do *PARPM* para valores de $u \gtrsim 33.8$. A combinação arbitrária destas duas propostas levariam à uma superfície suave com um parâmetro de ordem M_3 trivialmente zero.

Fonte: Elaborada pelo autor.

para observar-se avalanches em todas as escalas.

Figura 57 – Caso a diferença de altura entre um vale e um pico consecutivo for maior ou igual a três, então poderão existir avalanches não locais. Como se observa, o tijolo indexado com o número k pode gerar uma dessorção de $T = 2 \cdot k + 1$ tijolos ao atingir a superfície.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se o comportamento descrito acima é repetido no planalto da superfície isto explicaria como poderia existir uma fase criticamente auto-organizada e suave para $u \gtrsim 33.8$. Talvez um estudo do fator de estrutura poderia levar a uma melhor compressão da rugosidade quando $u \gtrsim 33.8$. De acordo com o livro de Barabasi (6, p. 305) o fator de estrutura $S(k, t)$ medido no estado estacionário teria que escalar como

$$S(k, t \rightarrow \infty) \sim k^{-d-2\alpha},$$

sendo d a dimensão da rede e α a rugosidade da superfície. Se o *PARPM* efetivamente é suave para $u \gtrsim 33.8$ então poderíamos esperar que $k \cdot S(k, t \rightarrow \infty)$ seja uma constante independente de k para $u \gtrsim 33.8$. Se houver algum tipo de periodicidade em princípio também poderia ser observado com o fator de estrutura.

4.6.3 Altura do planalto

Para finalizar esta seção estudamos o comportamento da altura média em função de u . Esperamos que para $u \gg 33.8$ o comportamento da altura média seja uma aproximação da altura do planalto. Como foi observado por Alcaraz e Rittenberg no artigo (3), usando condições livres de contorno, a altura na metade da rede ($h_{1/2}$) parece saturar para valores de $u \rightarrow \infty$. Este comportamento pode ser percebido na figura 58 onde se observa que de fato a altura do planalto satura com o tamanho da rede. Este comportamento possivelmente se mantém para $u \gtrsim 33.8$, pois acima deste valor essencialmente existe um único cluster que ocupa praticamente toda a rede. Sobre este enorme cluster as avalanches geradas nas bordas conseguem competir com o as absorções locais de forma que a altura do planalto satura em algum valor finito.

Figura 58 – Perfil típico da superfície obtido no estado estacionário para o *PARPM* usando-se $(u, p) = (4000, 1)$.

Fonte: ALCARAZ; RITTENBERG. (3, p. 20)

Um modelo de campo médio qualitativo pode ser construído se reduzimos o perfil da superfície a um trapézio com altura $h_{1/2}$. No caso mais simples teremos aproximadamente $2 \cdot h_{1/2}$ declives nas bordas do trapézio e os restantes $(L - 2 \cdot h_{1/2})$ sítios serão picos ou vales acontecendo no planalto do trapézio. Um caso mais complicado permitiria a existência de mais declives no planalto do trapézio ou a existência de picos e vales nas bordas do mesmo. Esses casos mais complicados poderiam ser levados em conta em uma constante $a \geq 1$ que incrementaria o número de declives de $2 \cdot h_{1/2}$ à $2a \cdot h_{1/2}$. Analisando o caso mais simples ($a = 1$) observamos que para cada tijolo que atinge a superfície, com uma probabilidade proporcional a $(L - 2 \cdot h_{1/2})/2$ alcançaria um mínimo da superfície e seria absorvido a uma taxa u_a , e com uma probabilidade proporcional a $2 \cdot h_{1/2}$ atingiria um declive causando uma avalanche de tamanho médio $\langle T \rangle = (L - h_{1/2})$ com uma taxa u_d . Consequentemente no estado estacionário deste modelo de campo médio esperaríamos que

$$u_a \frac{(L - 2 \cdot h_{1/2})}{2} = 2 \cdot h_{1/2} \cdot u_d \cdot (L - h_{1/2}).$$

Resolvendo para $h_{1/2}$ encontraríamos

$$h_{1/2} = \frac{u \cdot L}{(u + 2L) + \sqrt{u^2 + (2L)^2}}. \quad (4.14)$$

Como vemos deste modelo, se a superfície é suave e temos um único cluster que ocupa toda a rede então no limite termodinâmico a altura do planalto teria que saturar em um valor finito

$$h_{1/2}(L \rightarrow \infty) = \frac{u}{4}.$$

Se incorporarmos a constante a então

$$h_{1/2}(L \rightarrow \infty) = \frac{u}{4a}.$$

Esta constante a estaria relacionada indiretamente com a espessura do planalto e portanto poderíamos esperar uma dependência com o parâmetro u , de forma que $a = a(u)$. Mas o ponto importante é que, para um valor fixo de u , caso exista um único cluster que ocupe toda a rede e a superfície é suave, então a altura média da superfície tem que saturar no limite termodinâmico.

Figura 59 – As linhas tracejadas representam os valores medidos da altura média da superfície para os diversos tamanhos de rede. As linhas contínuas foram desenhadas usando-se a equação 4.14 incluindo o fator $a \approx 1.61$. O valor 0.5 é subtraído para medir-se a altura acima do substrato.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para verificar se esta teoria de campo médio descreve razoavelmente a altura da superfície, se calculou a altura média $h(L, t \rightarrow \infty)$ da superfície no estado estacionário e se comparou com a expressão 4.14. Em princípio, para redes grandes, a altura média se aproximará da altura na metade da rede $h(L) \simeq h_{1/2}(L)$. Como se observa da figura 59 para $1026 \leq L \leq 16386$ realmente a expressão 4.14 descreve qualitativamente o comportamento da altura média aliás, para $250 \leq u \leq 4000$, a constante $a \approx 1.61$ ajusta aceitavelmente à altura média para os diferentes tamanhos de rede usados com um desvio inferior à 10%.

Em resumo, supondo que a teoria de campo médio descreva o comportamento do *PARPM*, então teremos a saturação da altura na metade da rede acima de um certo valor do tamanho (L) da mesma. Tal fato pode ser visto como um indicativo de uma fase suave para valores de $u \gtrsim 33.8$. Possivelmente esta saturação exija um tamanho de rede maior para ser observada em pequenos valores de u .

4.7 Discussão

Neste capítulo estudamos as regiões *II* e *III* do digrama de fase 1. Como vimos, nestas regiões o comprimento de correlação temporal $\xi_t \sim L^z$ diverge com o tamanho do sistema. Assim que o expoente dinâmico z diminui continuamente conforme u aumenta, sofrendo uma descontinuidade no caso $w = 1/u = 0$ para condições periódicas de contorno, onde o modelo com $p = 1$ se reduz ao *TASEP*.

A transição crítica em $u_c = 1$ pode ser enxergada de várias maneiras. Por exemplo como uma transição de rugosidade, uma *depinning transition*, uma transição de percolação e como uma transição em uma fase criticamente auto-organizada. Cada uma destas transições pode ser observada utilizando como parâmetros de ordem M_3 definido pela equação 4.13, a velocidade assintótica da superfície em condições periódicas v_∞ , a probabilidade de se ter um cluster que percole toda a rede P_∞ , a densidade de pontos de contato no estado estacionário $K(L, t \rightarrow \infty)/L$ e o segundo cumulante das avalanches no estado estacionário. Possivelmente exista uma proporcionalidade entre P_∞ e v_∞ .

A transição em $u_c \approx 33.8$ ainda precisa de um estudo detalhado, onde se calcule a posição do ponto crítico em função do tamanho da rede. Se a posição deste segundo ponto crítico não diverge com o tamanho do sistema, ainda fica por responder que tipo de rugosidade se teríamos para valores de u acima deste valor crítico. Ou seja, é a superfície suave ou a rugosidade da mesma cresceria de forma logarítmica? Talvez a fase obtida para $u \gtrsim 33.8$ seja algum tipo de fase facetada (*“faceted phase”* em inglês, ver referências (16) e (19, p. 236)).

Os dados apresentados neste capítulo sugerem que a região compreendida por $1 \leq u \lesssim 33.8$ é não trivial no sentido da auto-similaridade. De forma que esta região do diagrama de fase apresenta uma estrutura fractal, estatisticamente falando, implicando que observáveis como $K(L, t \rightarrow \infty) - 1$ e $(L - 3) M_3$ cresçam com uma potência de L menor do que um. Esta não trivialidade é perdida fora deste domínio.

Em termos de criticalidade auto-organizada ainda falta reconhecer a transição de fase subjacente, assim como o parâmetro de ordem associado à esta transição. Fora disto ainda é necessário medir-se as funções de correlação espaço-temporais para $u \geq 1$ e observar se estas decaem como uma lei de potência.

Finalmente nossos resultados sugerem um comportamento tipo *“critical initial slip”*, porém ainda não foi reconhecida a propriedade ou propriedades da condição inicial que são relevantes na evolução do sistema. Portanto fica ainda por reconhecer estas propriedades e medir-se o expoente associado à este comportamento.

5 ESTADOS QUASE-ESTACIONÁRIOS E MÚLTIPLOS ESTADOS ABSORVENTES

Neste capítulo estudaremos o efeito do parâmetro p introduzido na seção 2.3. Como veremos, o efeito deste parâmetro no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$, caso u esteja fixo, é a introdução de uma dilatação temporal na dinâmica da superfície. Para todos os valores de u esta dilatação é proporcional à $\left(\frac{2}{n_\infty} - p\right)$, sendo n_∞ a densidade de picos mais vales no estado estacionário (ver equação 4.12). Este fator de dilatação sugere que a dinâmica assintótica do modelo é governada por configurações com uma quantidade de picos mais vales bastante próxima daquela do estado estacionário. Por este motivo a região do diagrama de fases delimitada por $2 \leq p \leq p_c = 2/n_\infty$ não percebe a presença dos múltiplos estados absorventes introduzidos na definição 2.16. Para valores de $p > p_c$ o sistema atinge em um tempo finito algum dos múltiplos estados absorventes acessíveis pela dinâmica, e portanto em $p = p_c$ teremos uma transição crítica com múltiplos estados absorventes. Esta transição absorvente é caracterizada por um novo expoente dinâmico z' diferente do expoente dinâmico z medido para $p < p_c$. Em poucas palavras, estudaremos a região “b” do diagrama de fase apresentado na figura 1, região esta que se encontra limitada por $p = 2$ e $p = 2/n_\infty$ no limite termodinâmico.

5.1 Dilatação Temporal

Para verificar que o efeito do parâmetro p é a introdução de uma dilatação temporal proporcional a $\left(\frac{2}{n_\infty} - p\right)$, mediremos por três métodos este termo de dilatação em referência à $p = 1$ e daremos uma explicação à esta dilatação. Os procedimentos descritos nesta seção foram repetidos para diversos valores de u entre $0 \leq u \leq 10$, em condições livres de contorno, obtendo em geral resultados semelhantes. Supomos que este comportamento se mantém para todo o domínio de u .

5.1.1 Evidência

Mantendo-se fixos u e L os três métodos utilizados medem o fator de re-escala necessário para colapsar a dinâmica de distintos observáveis em função de p . Ao utilizar a dinâmica em $p = 1$ como referência então o fator F_a de re-escala estaria dado por

$$F_a(p) = \frac{\frac{2}{n_\infty} - p}{\frac{2}{n_\infty} - 1}, \quad (5.1)$$

se de fato a dilatação temporal é proporcional a $\left(\frac{2}{n_\infty} - p\right)$. Dos três métodos que exporemos a seguir dois deles medem o fator F_a no estado estacionário, e um deles utiliza a evolução temporal de distintos observáveis antes de atingir-se o estado estacionário. Os métodos usados na presente tese são os seguintes:

Método 1: Este método mede diretamente o fator F_a necessário para colapsar as distintas dinâmicas encontradas para um mesmo observável em função de p . Para medir-se este fator calculamos o fator F_a como sendo aquele valor que melhor colapsava as dinâmicas para $p \neq 1$, e a de $p = 1$. O procedimento utilizado para cada valor de u

Figura 60 – Fator de contração F_a necessário para colapsar as diferentes dinâmicas da propriedade $K(L, t)$ na dinâmica de referência em $p = 1$. A linha vermelha é um ajuste linear de mínimos quadrados forçada a passar pelo ponto $F_a(p = 1) = 1$. A equação desta linha é $F_a = 1.553 - 0.553 \cdot p$. Em azul (●) condição inicial substrato, as outras duas condições estão representadas em cor diferente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

consistiu em fixar uma condição inicial e um tamanho de rede L e medir o fator F_a para diferentes valores de p . Um exemplo do comportamento de F_a em função de p é ilustrado na figura 60. Estes valores foram obtidos estudando-se a dinâmica dos pontos de contato $K(L, t)$. Como condições iniciais foram utilizadas a pirâmide (*PYR*), o substrato (*SUBS*) e uma configuração intermediária que consistia de uma pirâmide preenchendo a metade do substrato (*PYRSUBS*). Para cada uma destas três condições iniciais se utilizaram os tamanhos de rede $L = 1024, 2048, 4096$, e 8192 . Em resumo, para cada valor de $p < 2$ na figura 60 existem 12 valores do fator F_a , e para cada valor de $p \geq 2$ tem-se 8 valores de F_a , pois neste domínio o estado substrato é um estado absorvente.

Utilizando-se o valor $n_\infty \approx 0.717$ obtido para $u = 1.5$, pudemos comparar o ajuste linear obtido na figura 60 com a equação 5.1. Como vemos o ajuste linear $F_a = 1.553 - 0.553 \cdot p$ é praticamente igual à linha reta

$$F_a = 1.559 - 0.559 \cdot p, \quad (5.2)$$

obtida da equação 5.1. Este resultado se repete ao estudarmos outras propriedades como a altura média, a altura na metade da rede, os blocos descascados, os blocos absorvidos bem como os segundos cumulantes de cada uma destas propriedades.

Método 2: Este método, similar ao próximo, determina no estado estacionário o fator de contração F_a necessário para colapsar as diversas dinâmicas. A idéia central consiste em medir-se sobre um intervalo de tempo Δt alguma propriedade que possa sentir os efeitos da dilatação temporal. A propriedade utilizada neste método é a quantidade média de blocos descascados (B_d) em um intervalo de tempo $\Delta t = 1^*$. Em princípio, se o tempo se dilata conforme p aumenta teríamos que observar que B_d diminuir com p chegando ao valor $B_d = 0$, quando a dilatação temporal vai ao infinito. Um exemplo do

Figura 61 – Blocos descascados no estado estacionário por unidade de tempo. O valor $u = 1.5$ foi usado e a linha vermelha é um ajuste linear de mínimos quadrados. A equação desta linha é $B_d = 0.559 - 0.2 \cdot p$. Em azul (●) condição inicial substrato, as outras duas condições estão representadas em cor diferente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

comportamento de B_d em função de p para $u = 1.5$ é apresentado na figura 61. Nesta figura foram utilizadas as mesmas condições iniciais e os mesmos tamanhos de rede que o método anterior. Para $p \geq 2$ o estado substrato, por ser um estado absorvente, não apresenta desorções.

Como se constata de figura 61, o comportamento de B_d é linear com p sendo descrito pela equação $B_d = 0.559 - 0.2 \cdot p$. Para determinar-se o comportamento do fator F_a a partir desta medida é suficiente escalar B_d de forma que $F_a(p = 1) = 1$, isto é,

$$F_a = \frac{B_d(p)}{B_d(p = 1)} = 1.557 - 0.557 \cdot p.$$

Como vemos este resultado está em excelente acordo com a expressão 5.2, reforçando uma vez mais a hipótese da dilatação temporal com a variação do parâmetro p .

Método 3: Este último método é similar ao anterior. Porém utiliza a probabilidade de desorção P_d no estado estacionário para medir o fator de contração F_a necessário para

*Em condições livres de contorno o intervalo de tempo necessário para que $L - 1$ tijolos atingiam a superfície é igual $\Delta t = 1$.

colapsar as diversas dinâmicas. Por construção do modelo, ao aumentar-se p aumenta-se a probabilidade de se atingir um pico, e portanto diminui a probabilidade de se atingir um declive. Por este motivo a probabilidade P_d para que um tijolo que atinja a superfície gere uma dessorção tem que diminuir com p . Ainda mais, esta probabilidade tem que ser proporcional ao fator F_a . O motivo desta proporcionalidade se encontra na equação

$$B_d = \langle T \rangle P_d,$$

onde $\langle T \rangle$ representa a dessorção média de tijolos por avalanche. Desta expressão, como o tamanho médio das avalanches $\langle T \rangle$ é independente da escala temporal, necessariamente temos $F_a \propto B_d \propto P_d$. Usando $u = 1.5$ apresentamos na figura 62 o comportamento de

Figura 62 – Probabilidade $P_d(p)$ para que um tijolo que atinge a superfície gere uma dessorção. O valor de $u = 1.5$ foi usado e a linha em vermelho é um ajuste linear de mínimos quadrados. A equação desta linha é $P_d = 0.294 - 0.1056 \cdot p$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

P_d em função do parâmetro p . Nesta figura foram usadas as mesmas condições iniciais que nos métodos anteriores, e se observa um comportamento linear descrito pela equação $P_d = 0.294 - 0.1056 \cdot p$. Desta expressão é imediato obter o fator F_a como

$$F_a = \frac{P_d(p)}{P_d(p=1)} = 1.561 - 0.561 \cdot p,$$

ratificando a validade da equação 5.1 ao obter-se uma inclinação tão próxima da observada na expressão 5.2.

Como vemos, destes três métodos a equação 5.1 parece descrever bastante bem o fator temporal F_a necessário para colapsar as diversas dinâmicas medidas para diferentes valores de p . A qualidade do colapso, ao re-escalarmos o tempo com este fator, é verificada na figura 63 para a evolução assintótica da altura média da superfície. Este tipo de colapso foi repetido e verificado com os tamanhos de rede $L = 1024, 2048, 4096$, e 8192 , com

Figura 63 – À esquerda é mostrado para diversos valores de p e $u = 1.5$, o comportamento típico da altura média em função do tempo. À direita é apresentado o colapso das distintas curvas após re-escalarmos o tempo pelo fator F_a dado pela equação 5.1. Os dados foram obtidos partindo-se da condição inicial pirâmide, usando-se condições livres de contorno e um tamanho de rede $L = 8192$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

as condições iniciais pirâmide, substrato e a condição intermediária. O mesmo fato foi verificado nas propriedades $h_{1/2}(L, t)$, $K(L, t)$, blocos descascados, blocos absorvidos e seus segundos cumulantes. Em todos os casos o colapso encontrado é tao bom quanto o colapso ilustrado na figura 63. Todos estes resultados sugerem que o comportamento do gap de energia é do tipo

$$\Delta E = E_1 \sim \frac{(p_c - p)}{L^z},$$

com $z \neq 0$ para $u \geq 1$ e $z = 0$ para $u < 1$ (ver equação 3.2 para o caso $u = 0$). A identificação de $p_c = \frac{2}{n_\infty}$ é imediata ao compararmos com a expressão 5.1. Para entender o porquê deste resultado, é suficiente observarmos a probabilidade de que um pico seja atingido por um tijolo do gás rarefeito. Esta probabilidade P_{peak} é dada pela equação 2.16, que por comodidade repetimos aqui

$$P_{peak}|_b \equiv \min \left\{ 1, \frac{N_{peak}}{L - b} p \right\}. \quad (5.3)$$

O caso $b = 0$ corresponde a condições periódicas, e as condições livres de contorno correspondem à $b = 1$. O ponto importante desta expressão é que todos os estados com

$$1 \leq \frac{N_{peak}}{L - b} p, \quad (5.4)$$

são estados absorventes. Portanto em um gráfico de $2/n_\infty$, em função p , todos os estados absorventes se encontraram abaixo da reta $y = p$. Este comportamento é evidenciado ao

observarmos que no limite termodinâmico

$$\frac{N_{peak}}{L-b} \simeq \frac{n_c}{2},$$

com n_c sendo a densidade de picos mais vales da configuração c . Com esta aproximação assintótica é claro que todos os estados absorventes “ a ” satisfazem à condição:

$$\frac{2}{n_a} \leq p,$$

ou em outras palavras, os estados ativos se encontram acima da linha $y = p$. Como se

Figura 64 – Os estados ativos do modelo são aquelas configurações “ c ” com $2/n_c > p$. Para os estados estacionários ($p < 2$) e quase-estacionários ($2 \leq p < p_c$) o valor de $n(L, t \rightarrow \infty)$ não depende de p . Para $p > p_c$ a dinâmica de estados iniciais ativos atinge algum dos estados absorventes “ a ” com $2/n_a = p$. Em $p = p_c$ obtemos uma transição a um estado absorvente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

observa da figura 64 o parâmetro p não modifica o valor estacionário n_∞ da densidade de picos mais vales. O efeito do parâmetro p é a introdução de mais estados absorventes de tal forma que necessariamente um estado absorvente será atingido sempre que $p > p_c$ com $p_c = 2/n_\infty$. Assim na região $p > p_c$, se começarmos em um estado ativo veremos que no limite termodinâmico atingiremos, em um tempo finito, uma configuração absorvente “ a ” com $\frac{2}{n_a} = p$. O motivo está no fato que a variação do número de picos N_{peak} por absorções está limitada à $\Delta N_{peak} = 0, \pm 1$ e por dessorções à $\Delta N_{peak} = 0, 1, 2$.

A figura 64 também permite introduzir um parâmetro de ordem que seja zero em uma fase e não nulo na outra. Duas possíveis definições do parâmetro de ordem poderiam ser:

$$\rho_1(p) = \left(\frac{2}{n_\infty(p)} - p \right),$$

$$\rho_2(p) = \left(\frac{2}{n_\infty(p)} - \frac{2}{n_\infty(p=1)} \right).$$

Figura 65 – Inverso do segundo cumulante de n_∞ em função de L . Os tamanhos de redes utilizados são $L = 1024, 2048, 4096$ e 8192 . O valor de $u = 1.5$ e as medidas foram repetidas para distintos valores de $p < p_c$. A linha vermelha é um ajuste linear de mínimos quadrados com a equação $y = 5.49 \cdot L - 23.48$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em qualquer dos casos observaríamos que $\rho_i \sim |p_c - p|^{\beta'}$ com $\beta' = 1$. Contudo para poder falarmos de um ponto crítico p_c , e não de um intervalo, precisaríamos mostrar que o segundo cumulante de n_∞ vai a zero conforme L aumenta. Este resultado é verificado na figura 65, onde mostramos o comportamento do inverso do segundo cumulante de n_∞ em função do tamanho da rede. Se este comportamento se mantém para redes maiores então o desvio padrão de n_∞ se aproximará à zero no limite termodinâmico, indicando que a transição absorvente acontece no ponto $p = p_c$. O comportamento de n_∞ é semelhante ao comportamento do parâmetro de controle λ na figura 6, no sentido que no limite termodinâmico sua largura vai a zero. Isto pode sugerir que a transição de fase subjacente, associada à criticalidade auto-organizada, pode ter como parâmetro de controle a densidade de picos mais vales. Mas um ponto importante à realçar é que a transição absorvente, acontecendo em $p = p_c$, não pode ser a transição subjacente que explique a criticalidade auto-organizada para $p < p_c$. O primeiro motivo é que a criticalidade auto-organizada só é observada para $u > 1$, e o segundo motivo é que o valor do expoente dinâmico em $p = p_c$ é diferente do valor para $p < p_c$ (tal como aconteceu em $u = 0$)*.

5.1.2 Explicação

Até agora temos mostrado evidência empírica que indica que o efeito do parâmetro p é a introdução de uma dilatação temporal proporcional a $(p_c - p)$. Porém não temos dado uma explicação de como acontece a dilatação, e por que a dilatação é desse tipo.

Para entender o por que os dois métodos no estado estacionário funcionaram é suficiente entendermos que ao aumentarmos o parâmetro p , aumenta-se a probabilidade de

*Este resultado será mostrado nas próximas seções para $u \neq 0$.

se atingir um pico e diminui-se a probabilidade de cair-se em um não pico. O argumento anterior implica que as probabilidades de absorção P_a e de desorção P_d também diminuem com p . Especificamente esperamos que para cada tijolo que atinge a superfície estacionária as probabilidades P_a e P_d sejam proporcionais à

$$P_a \propto u_a \frac{n_\infty}{2} q;$$

$$P_d \propto u_d (1 - n_\infty) q.$$

Dos fatores que aparecem nestas duas probabilidades, q é o único termo que depende de p como (ver equação 2.17)

$$q|_b \equiv \max \left\{ 0, \frac{L - b - N_{peak} \cdot p}{L - b - N_{peak}} \right\}, \quad (5.5)$$

onde $b = 0$ ou 1 representam os casos com ou sem condições periódicas. Este termo poder ser re-escrito como

$$q|_b \equiv \max \left\{ 0, \frac{1 - \frac{N_{peak}}{L-b} \cdot p}{1 - \frac{N_{peak}}{L-b}} \right\}.$$

Dado que, no limite termodinâmico a largura de $\frac{n_\infty}{2} \simeq \frac{N_{peak}}{L-b}$ vai a zero, obtemos finalmente o fator de F_a , dado pela equação 5.1. Das expressões para P_a e P_d também é claro por que o tamanho médio das avalanches $\langle T \rangle$ é independente de p , em condições livres de contorno. Pois, no estado estacionário, o número médio de blocos absorvidos e descascados, por unidade de tempo, tem que ser iguais ou seja

$$\langle T \rangle (1 - n_\infty) u_d q = \frac{n_\infty}{2} u_a q,$$

o que nos leva à

$$\langle T \rangle = \frac{n_\infty}{(1 - n_\infty)} \cdot \frac{1}{2w},$$

pois a probabilidade de que um tijolo atinja um declive é a mesma à que atinja um vale. Por este motivo os métodos 2 e 3 podem ser repetidos com os blocos absorvidos por unidade de tempo ou com a probabilidade de absorção.

Finalmente para entender por que o método 1 funciona e dá os mesmos resultados obtidos no estado estacionário, basta lembrarmos os resultados obtidos em $u = 0$. Para $u = 0$ o estado estacionário tinha $N_{peak} = L/2$ picos e os estados que governavam a dinâmica assintótica tinham $N_{peak} = L/2 - 1$ picos, de forma que $n_\infty = 1$ e para os estados assintóticos $n_{assint} = n_\infty - 2/L$. Se este mesmo comportamento é repetido para $u \neq 0$ então observaríamos que a probabilidade de atingir-se um declive estaria dada por

$$\begin{aligned} q|_{assint} &= \max \left\{ 0, \frac{1 - \frac{N_{peak} \pm \Delta N_{assint}}{L-b} \cdot p}{1 - \frac{N_{peak} \pm \Delta N_{assint}}{L-b}} \right\}, \\ &\simeq \max \left\{ 0, \frac{1 - \frac{n_\infty}{2} \cdot p}{1 - \frac{n_\infty}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

para algum dos estados assintóticos. Sendo ΔN_{assint} um valor finito que daria a diferença do número de picos entre os estados assintóticos e o estado estacionário. Para verificar a coerência desta explicação é suficiente comparar a evolução do observável $n(L, t)$ com qualquer outro observável (e.g. $h(L, t)$, $h_{1/2}(L, t)$ e $K(L, t)$), observando que os estados que governam a dinâmica assintótica são alcançados antes que os estados estacionários. Este resultado de fato é observado na figura 66, onde vemos que para $L = 8192$ a altura

Figura 66 – Para um tamanho de rede $L = 8192$ e $u = 1.5$ apresentamos a evolução de dois observáveis partindo das condições iniciais pirâmide (*PYR*) e substrato (*SUBS*). (a) Esta figura é semelhante à figura 63b com a propriedade número de picos $N_{peak}(L, t)$. Nesta figura ao compararmos o cruzamento das dinâmicas obtidas com as condições iniciais substrato e pirâmide, observamos que os estados que governam a dinâmica assintótica são alcançados em um tempo ~ 30 quando $p = 1$. (b) Para a altura média se observa que o tempo para atingir o estado estacionário é ~ 300 usando $p = 1$. Em ambas figuras o número de amostras de Monte Carlo foi 50040.

Fonte: Elaborada pelo autor.

média da superfície $h(L, t)$ alcança o estado estacionário em um tempo aproximado de ~ 300 . Porém desde um tempo inferior (~ 30) já se observavam os mesmos valores médios de número de picos que no estado estacionário. Em outras palavras o número médio de picos que governam a dinâmica assintótica é aproximadamente igual ao número médio de picos no estado estacionário ($\langle \Delta N_{assint} \rangle \approx 0$).

Antes de terminarmos esta seção gostaríamos de realçar que, entre todas as propriedades que estudamos, a única propriedade que não apresentava uma dependência com o tamanho do sistema L do tipo $f(t/L^z)$ foi a densidade de picos mais vales $n(L, t)$. Isto pode ser entendido se levarmos em conta que os estados que governam a dinâmica assintótica possuem praticamente a mesma densidade de picos mais vales que o estado estacionário. Em outras palavras, a dinâmica observada para $n(L, t)$ é uma dinâmica para tempos curtos e não a dinâmica assintótica. Este comportamento é observado na figura 67 ao não perceber-se uma dependência com L para tempos $t \lesssim 30$ na dinâmica de $n(L, t)$ obtida para $u = 0$ e $u = 1.5$. Porém, como foi estudado na seção 3.2 para

tempos inferiores a $t < (N_0/E_1)$, a dinâmica do *PARPM* em $u = 0$ parece crítica com um expoente dinâmico aparente $z_1 = 1$, se partimos de condições iniciais que ocupem toda a rede, isto é, $N_0 = (L/2 - 1)$. De fato a propriedade $|n(L, t \rightarrow \infty) - n(L, t)|$ pode ser colapsada como

$$|n(L, t \rightarrow \infty) - n(L, t)| = \frac{1}{L^{1/2}} f\left(\frac{t}{L}\right)$$

para tempos $1 \ll t \lesssim (N_0/E_1 \simeq L/4)$.

Figura 67 – Comparação entre as dinâmicas do número médio de picos mais vales para $(u, p) = (1.5, 1)$ e $(u, p) = (0, 1)$, usando como condição inicial a pirâmide. (a) Para $(u, p) = (1.5, 1)$ não observamos nenhuma dependência com L . (b) Para $(u, p) = (0, 1)$ não observamos nenhuma dependência com L para $t \lesssim 30$. Em ambas as figuras o número de amostras de Monte Carlo foi 50040.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Campo médio para n_∞

Na seção anterior mostramos que em $p_c = 2/n_\infty$ acontece uma transição de fase absorvente. Também mostramos que para $p < p_c$ o tempo é dilatado conforme p aumenta, porém esta dilatação não muda a altura média $h(L, t \rightarrow \infty)$ nem a altura na metade da rede $h_{1/2}(L, t \rightarrow \infty)$, nem o número de pontos de contato $K(L, t \rightarrow \infty)$ e nem a densidade média de picos mais vales $n(L, t \rightarrow \infty)$ no estado estacionário. Portanto, é suficiente medir-se a densidade de picos mais vales no limite termodinâmico em $p = 1$ para conhecer o valor de p_c . Esta medida foi feita previamente por Alcaraz, Levine e Rittenberg e pode ser encontrada no artigo (58, p. 19). O resultado é que para condições livres de contorno $n_\infty(w = 1/u)$ varia continuamente de $(w, n_\infty) = (1, 3/4)$ a $(w, n_\infty) \rightarrow (0, 1/2)$ com uma descontinuidade em $w = 0$ por causa das condições livres de contorno.

Nesta seção além de obtermos o comportamento de n_∞ em função de u , vamos descrever qualitativamente o comportamento de n_∞ . Para isto utilizaremos uma teoria

de campo médio para calcularmos a variação no número de picos ΔN_{peak} em função do número de tijolos que podem atingir os $(L - 1)$ sítios da rede. A idéia é procurar-se n_∞ como o ponto onde a variação média do número de picos é zero. Nossa idéia é dividirmos a variação no número de picos ΔN_{peak} como

$$\Delta N_{peak} \propto u_a \Delta N_a + u_d \Delta N_d,$$

onde u_a e u_d são as taxas de absorção e dessorção do *PARPM* e ΔN_a e ΔN_d são as variações do número de picos por processos de absorção e de dessorção, respetivamente. Dado que não conhecemos a distribuição estacionária de número de picos, calcularemos as variações médias dos números de picos ΔN_a e ΔN_d sobre todas as configurações que tem o mesmo número de picos N_{peak} , dando o mesmo peso estatístico a todas as configurações. Lembrando que a variação do número de picos N_{peak} por absorções está limitada a $\Delta N_{peak} = 0, \pm 1$ e aquela por dessorções esta limitada a $\Delta N_{peak} = 0, 1, 2$, definimos para uma dada configuração

$$\Delta N_a = 0 + \frac{1}{L-1} \sum_{i=\{vales\}} \Delta N_i,$$

$$\Delta N_d = 0 + \frac{1}{L-1} \sum_{i=\{declives\}} \Delta N_i,$$

onde ΔN_i seria a variação no número de picos que sofrida pela configuração selecionada se um tijolo atinge a superfície na posição i . O comportamento médio de ΔN_a e ΔN_d sobre

Figura 68 – Variação média do número de picos por absorção ΔN_a e por dessorção ΔN_d . As médias são realizadas sobre todas as configurações com o mesmo número de picos N_{peak} . Para estas figuras $L = 32$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

todas as configurações com o mesmo número de picos N_{peak} é observado na figura 68, para

uma rede de tamanho $L = 32$. Como podemos ver existem quatro pontos fixados pela definição de ΔN_a e ΔN_d , estes são

$$\left(\frac{2N_{peak}}{L}, \Delta N_d\right) = (1, 0); \quad \left(\frac{2N_{peak}}{L}, \Delta N_d\right) = \left(\frac{2}{L}, 2\frac{L-3}{L-1}\right);$$

$$\left(\frac{2N_{peak}}{L}, -\Delta N_a\right) = \left(1, \frac{1}{2}\frac{L-2}{L-1}\right); \quad \left(\frac{2N_{peak}}{L}, -\Delta N_a\right) = \left(\frac{2}{L}, 0\right).$$

Além destes pontos ao aumentar-se L de $L = 6$ até $L = 32$ se observa uma tendência ao ponto

$$\left(\frac{2N_{peak}}{L}, -\Delta N_a\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Em todos os casos estudados o comportamento de ΔN_a e ΔN_d foi descrito perfeitamente por uma parábola. Se este comportamento se mantém no limite termodinâmico teremos

$$-\Delta N_a = n_x \cdot \left(n_x - \frac{1}{2}\right),$$

com $n_x = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot N_{peaks}}{L}$. Para o caso de ΔN_d precisamos de outro ponto para poder obter a equação da parábola no limite termodinâmico. Este ponto foi escolhido de forma que para $u = 1$ tivéssemos $\Delta N_{peak} = 0$ se $n_x = 3/4$, que é um resultado previamente conhecido. Com esta informação obtemos finalmente

$$\Delta N_d = \frac{1}{3} (n_x - 1) \cdot (5n_x - 6),$$

que nos permite calcular o valor de n_∞ em função de u como a solução da equação:

$$u_a \Delta N_a + u_d \Delta N_d = 0. \quad (5.6)$$

Esta solução é apresentada na figura 69 e comparada com valores medidos de $n(L, t \rightarrow \infty)$, observando um diferença máxima de 5%. Como vemos esta aproximação de campo médio descreve qualitativamente o comportamento da densidade estacionária de n_∞ , e mostra que neste estado o *PARPM*, com um valor arbitrário de u , nem todas as configurações “ c ” com $n_c = n_\infty$ são alcançadas na evolução temporal com a mesma probabilidade. A exceção acontece em $w = 1/u = 0$, em condições periódicas e livres de contorno (ver artigo (60, Eq. 2)).

5.3 Estados quase-estacionários

Nas seções anteriores mostramos que o efeito do parâmetro p é introduzir uma dilatação temporal do tipo $(p_c - p)$, com p_c variando de 2 a 4 e dependendo exclusivamente do valor de u como $p_c = 2/n_\infty(u)$. Outro efeito do parâmetro p é a introdução de estados absorventes de forma que todas as configurações “ a ” com

$$\frac{2}{n_a} \leq p,$$

Figura 69 – Comparação entre os valores medidos de $n(L = 8192, t \rightarrow \infty)$ e os estimados pela teoria de campo médio. A linha tracejada é a solução da equação 5.6 para cada valor de u . Esta solução é simétrica em referência ao ponto $(u, n_\infty) = (1, 3/4)$. Os quadrados vermelhos são os valores medidos no estado estacionário usando $L = 8192$. O erro máximo encontrado nesta aproximação foi de 5%.

Fonte: Elaborada pelo autor.

são estados absorventes. Pela definição da densidade de picos mais vales sabemos que $0 \leq n_a \leq 1$, portanto no limite termodinâmico começaremos a observar estados absorventes para $p \geq 2$. Para um tamanho finito começaremos a observar os estados absorventes para (ver equação 5.4)

$$p \geq \frac{L - b}{L/2},$$

com $b = 0, 1$ se as condições de contorno são periódicas ao livres. Conforme aumentamos p veremos que eventualmente aumentar-se-á o número de estados absorventes, observando-se que entre

$$\frac{L - b}{L/2} \leq p < \frac{L - b}{L/2 - 1},$$

todos os estados com $N_{peak} = L/2$ são absorventes. Para valores de p entre

$$\frac{L - b}{L/2 - 1} \leq p < \frac{L - b}{L/2 - 2},$$

aumenta-se o número de estados absorventes ao incluir também todos os estados com $N_{peak} = L/2 - 1$. Continuando com este processo veremos que entre

$$\frac{L - b}{L/2 - j} \leq p < \frac{L - b}{L/2 - (j + 1)},$$

aparecem novos estados absorventes, que correspondem à todos os estados com $N_{peak} = (L/2 - j)$, e portanto todos os estados com $N_{peak} \geq (L/2 - j)$ são também absorventes. Em outras palavras sempre que o valor de p é igual a p_j (ver equação 2.18), com

$$p_j = \frac{L - b}{L/2 - j}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

o número de estados absorventes é incrementado. A quantidade de estados novos com $N_{peak} = (L/2 - j)$ é facilmente determinada em condições periódicas ao utilizar-se a interpretação bosônica mostrada na figura 13. Este número de estados $g(N_{peak})$ é dado por

$$g(N_{peak}) = 2 \left[\frac{(L/2)!}{(N_{peak})! (L/2 - N_{peak})!} \right]^2 \frac{(N_{peak})}{(L/2)}. \quad (5.8)$$

O fator 2 inicial vem do fato que o mapeamento entre a rede de tamanho L e a rede de tamanho $L/2$ não é unívoca. Como vemos desta expressão o número de estados absorventes incrementa rapidamente obtendo seu máximo em $2N_{peak}/L = 1/2$. Em outras palavras, para $p > 2$ e no limite termodinâmico temos infinitos estados absorventes. Porém nem todos eles são acessíveis ao partirmos de uma fase ativa, pois a variação do número de picos está limitada à $\Delta N_{peak} = 0, \pm 1$ por absorções e a $\Delta N_{peak} = 0, 1, 2$ por desorções, implicando que no limite termodinâmico os estados absorventes que podem ser atingidos desde um estado ativo estejam limitados àqueles com $\frac{2}{n_a} = p$.

Todos estes estados absorventes serão auto-estados de energia com autovalor $E_i = 0$. Desta maneira para $p \geq 2$ esperamos que algum dos estados absorventes com $\frac{2}{n_a} = p$ seja atingido em um tempo finito para tamanhos de rede finitos. Nas próximas subseções estudaremos o tempo mínimo necessário para cair em um destes estados absorventes em função do tamanho da rede, observando que este tempo característico cresce com o tamanho do sistema como e^{aL^ϕ} para $2 \leq p < p_c$. Desta forma os estados absorventes não serão atingidos no limite termodinâmico e o estado quase-estacionário observado entre $2 \leq p < p_c$ virará no limite termodinâmico o estado estacionário. O estudo dos estados quase-estacionários será dividido em três partes, sendo que nas duas primeiras partes consideraremos casos específicos com $w = 1$ e $w = 0$ e na outra parte consideraremos os resultados gerais obtidos para $w > 0$.

5.3.1 Raise and peel invariante conforme

Começamos com o estudo dos estados absorventes para o caso $u = 1$, onde o modelo *raise and peel* é invariante conforme. Este caso foi estudado previamente com condições livres de contorno por Alcaraz e Rittenberg (72) para valores de $p \leq (p_0 = 2(L-1)/L)$, observando que fora de um fator de escala temporal, quando $p < p_0$, o sistema conserva as mesmas características do modelo invariante conforme exatamente solúvel em $p = 1$. Porém no caso $p = p_0$ o estado estacionário só é atingido em um tempo que cresce exponencialmente com o tamanho da rede de tal forma que durante este tempo permanece em um estado quase-estacionário com as mesmas características do caso $p = 1$.

Com a modificação do modelo *raise and peel* introduzida pelas equações 2.14 e 2.15, apresentamos a seguir os resultados obtidos para $p > p_0$. Começamos com a evolução da altura média como função do tempo, tal como foi feito na figura 63. A evolução para $u = 1$

é apresentada na figura 70a para uma tamanho de rede de $L = 8192$. Como esperamos o efeito do parâmetro p é introduzir uma dilatação temporal que tende a infinito quando $p \rightarrow 8/3 = 2/n_\infty$. Todas as curvas apresentadas na figura 70a colapsam em uma única curva ao escalarmos o tempo pelo fator $(8/3 - p)$, tal como é mostrado na figura 70b. Claramente se observa que a dinâmica para $p \geq p_0$ se assemelha com a dinâmica em $p = 1$,

Figura 70 – À esquerda é mostrado para diversos valores de p o comportamento típico da altura média em função do tempo fixando $u = 1$. À direita é apresentado o colapso das distintas curvas após re-escalarmos o tempo pelo fator $(p_c - p)$. Dados obtidos com condições livres de contorno e um tamanho de rede $L = 8192$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

porém sabemos que para tempos $t \rightarrow \infty$ as dinâmicas terão que diferir pela aparição dos múltiplos estados absorventes quando $p \geq p_0$, estados estes que não existem para caso em que $p < p_0$. Enquanto isso acontece o sistema se mantém em um estado quase-estacionário com as mesmas propriedades do estado estacionário em $p = 1$, tal como evidenciado na figura 71, onde se comparam a altura média da superfície como função da posição em dois estados estacionários ($p < p_0$) e um estado quase-estacionário ($p > p_0$). Observamos o mesmo perfil médio da superfície independente do valor de p . Além disto o perfil médio de alturas é descrito pela equação

$$h(x, L) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \ln [L \sin(x\pi/L) / \pi] + 0.77, \quad (5.9)$$

predita para o *raise and peel* com $u = 1$ (73). Este comportamento logarítmico do perfil das alturas está em completo acordo com uma transição rugosa acontecendo em $u = 1$.

Com a finalidade de caracterizar os tempos de vida destes estados quase-estacionários e entender o que acontece em $p = 8/3$, determinamos os autovalores da Hamiltoniana como função de p por dois métodos diferentes.

Método 1: Neste caso se utilizou a diagonalização exata da Hamiltoniana para um tamanho de rede $L = 18$. Estes resultados são mostrados na figura 72a, onde se

Figura 71 – Comparação para três valores diferentes de p da altura média $h(x, L)$ em função da posição x sobre uma rede de tamanho $L = 8192$. Dados obtidos com condições livres de contorno mantendo $u = 1$. Os valores previstos foram calculados com a expressão 5.9.

Fonte: Elaborada pelo autor.

aprecia o incremento de estados absorventes para $p > p_0$. Assim, por exemplo, em p_1 o número de estados absorventes incrementa em 36 o que corresponde ao número de estados com $(L/2 - 1) = 8$ picos. Também podemos observar que o gap de energia do estado quase-estacionário é muito menor que o gap do modelo invariante conforme em $p = 1$. Mais ainda, como será mostrado depois, o gap do estado quase-estacionário decresce com L muito mais rápido que uma lei de potência. Por diagonalização exata também se determinou a dependência do gap de energia como função de L para $p < p_0$. Esta dependência é apresentada na figura 72b, mostrando que no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) $E_1 = 2\pi [9 \cdot (8/3 - p) \sqrt{3}/10] / L$, tal como foi mostrado em (72) e como esperamos da equação 2.8. Esta dependência do gap de energia no limite termodinâmico é indicada com uma linha tracejada na figura 72a. Embora não seja percebida a continuação desta linha para $p > p_0$, o escalonamento apresentado na figura 70b, pode indicar a existência de algum i -ésimo autovalor de energia com $E_i = 2\pi [9 \cdot (8/3 - p) \sqrt{3}/10] / L$. Em outras palavras, os autovalores de energia para $p > p_0$ poderiam estar divididos em autovalores que seguem a torre conforme e aqueles que decaem exponencialmente com L . Estes últimos possivelmente estariam associados aos tempos de vida de estados próximos aos estados absorventes com $2/n_a = p$.

Método 2: O segundo método para se determinar o gap de energia no caso $p \geq p_0$ utiliza a evolução temporal da propriedade $(1 - n/n_\infty)$ com $n_\infty \equiv n(L, t \rightarrow \infty)$. Neste caso esperamos que o comportamento assintótico de $n(t)$ seja do tipo

$$n(t) = n_\infty [1 - a \cdot \exp(-E_1 \cdot t)], \quad (5.10)$$

sendo E_1 o menor autovalor diferente de zero e a uma constante que depende da condição

Figura 72 – Diagonalização exata da Hamiltoniana do *PARPM* obtida com condições livres de contorno fixando o parâmetro $u = 1$. (a) Comportamento dos primeiros autovalores como função do parâmetro p mantendo fixo $L = 18$. ($v_s = 9 \cdot (8/3 - p) \sqrt{3}/10$) (b) Comportamento assintótico ($L \rightarrow \infty$) do primeiro autovalor de energia não nulo E_1 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 73 – Dinâmica da propriedade $(1 - n/n_\infty)$ simulada com condições livres de contorno partindo de duas condições iniciais diferentes cada uma com 5000 amostras. As condições iniciais são a pirâmide (um pico) e o estado com $(L/2 - 1)$ picos que contém o maior número de tijolos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

inicial. Este tipo de comportamento assintótico já foi previamente encontrado no artigo (72) para o caso específico $u = 1$ e $p = p_0$. Naquele artigo foi utilizado o teorema de Perron–Frobenius para arguir que o menor autovalor diferente de zero teria que ter a maior contribuição na dinâmica final do estado quase-estacionário. Uma verificação do decaimento exponencial sugerido pela equação 5.10 é encontrado na figura 73 ao observar em escala semilogarítmica a evolução da propriedade $(1 - n/n_\infty)$ usando $(u, p) = (1, 2)$. Contudo para poder afirmar que o efeito do decaimento exponencial é regido pelo autovalor E_1 precisamos comparar a inclinação da dinâmica $\ln(1 - n/n_\infty)$ com valores de E_1 obtidos

Tabela 4 – Comparação do primeiro autovalor obtido por diagonalização exata com a inclinação no tempo assintótico da propriedade $\ln(1 - n/n_\infty)$ mantendo $(u, p) = (1, 2)$. A média da propriedade $(1 - n/n_\infty)$ foi calculada sobre 5×10^5 amostras de Monte Carlo, e foram utilizadas condições livres de contorno.

$E_1 \setminus L$	8	10	12	14	16	18
Diagonalização	0.227	0.139	0.0922	0.0636	0.04481	0.0318
$\ln(1 - n/n_\infty)$	0.231	0.140	0.0920	0.0638	0.04476	0.0320

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 74 – (○) Gap de energia E_1 obtido da equação 5.10 ao observar-se as dinâmicas da propriedade $(1 - n/n_\infty)$ com tamanhos de rede entre $8 \leq L \leq 72$. A linha vermelha é descrita pela equação $E_1 = \exp(-0.065029 \cdot L^{1.261522} - 0.924434)$. Para $L \geq 12$ se observa uma diferença inferior a 4.25% entre os pontos e a linha contínua.

Fonte: Elaborada pelo autor.

pela diagonalização da Hamiltoniana. Os resultados desta comparação para $(u, p) = (1, 2)$ podem ser encontrados na tabela 4, onde observamos uma pequena diferença entre a diagonalização numérica e a inclinação da dinâmica de $\ln(1 - n/n_\infty)$. Como vemos a diferença é menor a 1% para tamanhos de rede $L > 8$.

Como se observa este método permite determinar o autovalor E_1 com bastante exatidão. Aliás permite calcular o autovalor E_1 para tamanhos de rede superiores aos alcançados por diagonalização numérica*. Uma amostra disto é apresentada na figura 74 onde foram utilizados tamanhos de rede entre $8 \leq L \leq 72$ para se determinar o autovalor E_1 . Como vemos, em escala semilogarítmica, o gap de energia decai com $L^{1.26}$ de forma exponencial. Se este comportamento se mantém para tamanhos de rede maiores então teríamos que o tempo característico de decaimento $\xi_t = 1/E_1$ cresceria com o tamanho da

*Como se mostrou na tabela 1 o maior tamanho de rede que poderíamos diagonalizar seria da ordem de $L = 22$. Porém se utilizamos o método da potência sobre a matriz esparsa H o máximo seria $L = 30$.

rede como

$$\ln(\xi_t) \sim L^\psi,$$

sendo $\psi \approx 1.26$. Embora não tenhamos uma explicação para este comportamento, resulta interessante a semelhança do mesmo com o caso de pontos críticos de aleatoriedade infinita, onde “se tem uma relação exponencial entre o comprimento de correlação espacial e temporal” (29, Eq. 14).

Uma vez estudado o caso $p = 2$, passamos a estudar o caso com $2 < p \leq (p_c = 8/3)$, em especial valores de p próximos de p_c . Nosso principal objetivo é determinar o menor tempo em que o estado quase-estacionário decai em um dos estados absorventes “ a ” com $2/n_a \simeq p$. Para determinar esse menor tempo de decaimento tivemos que escolher valores específicos de p e L . Nossa escolha pode ser entendida ao observarmos na figura 72a o comportamento do gap de energia E_1 para valores de $p > 2$. Como vemos o comportamento do gap E_1 com p se assemelha à uma função dente de serra obtendo seus máximos sempre em $p = p_j$. Por tal motivo, se queremos estudar o menor tempo em que o estado quase-estacionário pode decair teremos que escolher valores de p e L onde p coincida com algum dos valores p_j (ver equação 5.7) associados com a rede de tamanho L . Por exemplo para $p = 2.2$ basta escolhermos tamanhos de rede $L(i) = 22i - 10b$ com $i = 0, 1, 2 \dots$ e $b = 0, 1$ para condições periódicas e livres de contorno. Com esta escolha vemos que p coincide com algum dos valores p_j associados à rede de tamanho L , especificamente com $j = i$. Uma vez entendido o método a ser utilizado, e a escolha dos valores p e L , passamos à apresentação dos resultados nas proximidades do ponto crítico $(u_c, p_c) = (1, 8/3)$.

O primeiro resultado é apresentado na figura 75 para condições periódicas e livres. Nestas figuras se observa que o autovalor E_1 pode ser re-escalado como

$$E_1 \sim \frac{1}{L^{z'}} f(\Delta \cdot L^{1/\nu}), \quad (5.11)$$

sendo $\Delta = (p_c - p)$ e $p_c = 8/3$. O comportamento da função f da figura 75 nos indica que possivelmente $f(0) \neq 0$ e também que esta função decresce mais rápido que uma lei de potência, pois em escala logarítmica é uma função côncava, como se observa na figura 75. Em outras palavras, o tempo de vida do estado quase-estacionário cresce com o tamanho do sistema mais rápido do que qualquer lei de potência. Por este motivo é tão difícil observar estados absorventes no domínio $2 < p < p_c$, e claramente o estado quase-estacionário virará o estado estacionário no limite termodinâmico.

Dos resultados obtidos na figura 75, vemos que na criticalidade ($p = p_c$) o valor do expoente crítico dinâmico mudará de seu valor $z = 1$ para $p < p_c$ ao valor $z' \approx 0.54$ (3) em $p = p_c$. Procurando confirmar este resultado nos aproximamos ao ponto crítico $(u_c, p_c) = (1, 8/3)$ variando o outro parâmetro (u) do *PARPM*. Este procedimento foi realizado com condições periódicas e os resultados são ilustrados na figura 76a. O gap de energia E_1 novamente pode ser re-escalado pela equação 5.11 utilizando $\Delta = (u - u_c)$ e

Figura 75 – Escalonamento do gap de energia de acordo com a equação 5.11 para o caso $u = 1$. Do lado esquerdo condições livres e do lado direito condições periódicas de contorno. As linhas tracejadas foram desenhadas com a função $f(x) = \exp(a \cdot x^b + c)$ com os parâmetros $a = -0.137(5)$, $b = 2.42(2)$ e $c = 1.26(2)$ para condições livres e com $a = -0.21(2)$, $b = 2.76(7)$ e $c = 0.7(1)$ para condições periódicas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$u_c = 1$. Como vemos este resultado também sugere um novo expoente crítico dinâmico $z \neq z'$ na transição rugosa. Portanto, se o comportamento de $f(x)$ não muda e se mantém diferente de zero em $x = 0$, então na criticalidade teríamos que observar

$$E_1 \sim \frac{1}{L^{z'}}.$$

Para verificar esta hipótese e melhorar a estimativa de z' determinamos E_1 no ponto crítico $(u_c, p_c) = (1, 8/3)$ usando condições periódicas e tamanhos de rede desde 712 até 370944. Como vemos na figura 76b a hipótese é verificada ao observarmos um decaimento em lei de potência do tipo $E_1 \sim L^{-0.561(8)}$.

Em resumo, em $u = 1$ observamos um modelo estocástico invariante conforme com um expoente crítico dinâmico $z = 1$ para $p < p_0$. Acima de p_0 começam a aparecer estados absorventes que são atingidos em tempos que crescem com o tamanho da rede muito mais rápido que uma lei de potência. Enquanto o decaimento acontece o sistema permanece em um estado quase-estacionário semelhante ao estado invariante conforme que acontece em $p = 1$. Neste regime, a dinâmica até atingir-se o estado quase-estacionário, é regida por um expoente $z = 1$. Este comportamento se mantém sempre que $p < p_c$. Quando $p = p_c$ a parte dos autovalores associados com a torre conforme tornam-se trivialmente nulos pois estes são proporcionais à $(8/3 - p)$. Desta maneira a dinâmica é dominada por um novo expoente dinâmico $z' \simeq 0.561(8)$. Para valores de $p > p_c$ os estados quase-estacionários desaparecem e o sistema cai em algum dos múltiplos estados absorventes acessíveis. De alguma maneira p_0 e p_c são similares aos limites binodal e spinodal dos sistemas metaestáveis (74).

Figura 76 – Comportamento do gap de energia ao utilizar condições periódicas de contorno. (a) Colapso do gap de energia utilizando $\Delta = (u - u_c)$ na equação 5.11 para $u_c = 1$. A linha tracejada é descrita pela função $f(x) = \exp(a \cdot x^b + c)$ com $a = -0.020$ (2), $b = 1.73$ (4) e $c = 1.28$ (2). (b) Lei de potência obtida para o gap de energia quando $p = 8/3$, $u = 1$ e $L = 8 \cdot i$ de maneira que $p = \frac{L}{L/2 - i}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3.2 Raise and peel sem dessorção e sua relação com o modelo KPZ

O seguinte caso especial que estudaremos do *PARPM* é o caso quando não se tem dessorção $w = 1/u = 0$. Para este caso o sistema só pode mudar por absorções que acontecem nos mínimos da superfície. Consequentemente este modelo se reduz ao “*Single-step model*” (6, 7) sem dessorção. O *PARPM* em $(w, p) = (0, 1)$ também pode ser mapeado em uma representação partícula-buraco* em que as partículas só podem se movimentar em uma direção obedecendo a um efeito de volume excluído que não permite que duas partículas ocupem o mesmo sítio. Este modelo é conhecido na literatura como processo de exclusão totalmente assimétrico (*Totally Asymmetric Exclusion Process*) também conhecido pelo acrônimo *TASEP*. Sua versão não local $w \neq 0$ foi estudada recentemente por Alcaraz e Rittenberg. (5) Destas duas interpretações é conhecido que tanto o *Single-step* como o *TASEP* pertencem à classe de universalidade *KPZ*. (59, 60) Em outras palavras o *PARPM* pode ser enxergado como o modelo *KPZ* com duas perturbações. Como veremos uma delas mantém a classe de universalidade (p) e a outra não (w) .

O modelo *TASEP* aqui estudado se encontra na taxa de ocupação meio cheia (*half filling*) e a taxa com que as partículas pulam é modificada pelo parâmetro p dependendo do número de pares partícula-buraco da configuração de partida, número que é também o número de clusters (N_{clust}) de partículas na rede. Esta taxa de saltos é portanto dada por

*Ver caso D da figura 13

$u_a \cdot q_j$, onde por exemplo para condições periódicas

$$q_j \equiv \max \left\{ 0, \frac{1 - \frac{N_{clust}}{L} \cdot p}{1 - \frac{N_{clust}}{L}} \right\},$$

sendo L é o número de sítios do sistema, e N_{clust} o número de clusters da configuração atual*. Desta definição claramente se observa a introdução de estados congelados “a”, estados estes que tem uma densidade de clusters $\rho = \frac{N_{clust}}{L}$ maior ou igual a $\frac{1}{p}$ ou de forma equivalente $\frac{1}{\rho_a} \leq p$. Em outras palavras, todas as configurações com uma separação média entre clusters menor do que p serão estados congelados (ou absorventes). Como esta separação média entre clusters L/N_{clust} é maior que dois, só observaremos a presença de estados absorvente para $p \geq 2$. O valor de dois nesta desigualdade seria modificado se a densidade de partículas na rede mudasse.

O *PARPM* também pode ser mapeado em um modelo bosônico de partículas†. Para isto basta utilizarmos o mapeamento que existe entre o “Zero Range Process” (*ZRP*) e o “Asymmetric Exclusion Process” (*ASEP*). (19,61) Neste mapeamento o tamanho da rede e o número de bósons seria de $L/2$. Aqui a fração de sítios da rede ocupados por bósons (ρ_{occ}) é o parâmetro crucial que modificará as taxas de saltos, introduzindo os estados congelados como função de p . Por exemplo, para condições periódicas, teríamos uma taxa de saltos dada por

$$u_a \cdot \max \left\{ 0, \frac{1 - \frac{\rho_{occ}}{2} \cdot p}{1 - \frac{\rho_{occ}}{2}} \right\},$$

sendo ρ_{occ} a fração de sítios ocupados da configuração atual. Com esta definição, tal como acontece no *TASEP*, se introduz um conjunto de estados congelados que satisfazem $p/2 \geq 1/\rho_{occ}$.

Como vemos o parâmetro p dá origem a um conjunto infinito de estados absorventes sempre que p seja maior que um certo limiar, que depende exclusivamente da densidade de partículas na rede. Este limiar permanecerá fixo pois o número de partículas é conservado. Portanto, estamos falando de um modelo que conserva o número de partículas e possui um número infinito de estados absorventes no limite termodinâmico, tal como acontece para o modelo de Manna, o “Conserved Threshold Transfer Process” (*CTTP*) e o “Conserved Lattice Gas” (*CLG*). (15,19) Porém como será mostrado o *PARPM* tem um expoente dinâmico de $z' \simeq 1$ diferente dos valores $z = 1.39$ para os modelos Manna e *CTTP* e $z = 2$ para o *CLG*. (15,19)

A seguir apresentaremos os resultados obtidos para o *PARPM* usando $w = 0$ e variando p . Para todos os resultados usamos unicamente condições periódicas de contorno,

*Antes que as partículas saltem. Ou seja, da configuração de partida e não da configuração de chegada.

†Ver o caso E da figura 13

pois como sabemos do *TASEP* para condições livres, todas as partículas são acumuladas nas bordas evitando assim uma corrente de partículas e levando o sistema a uma única configuração final. Por conseguinte para $w = 0$ as condições de contorno são relevantes, sendo o sistema crítico para condições periódicas e não crítico para condições livres.

O primeiro resultado que obtivemos consistiu em verificar que a variação do parâmetro p não muda a classe de universalidade, introduzindo apenas uma dilatação temporal, tal como foi exposto na seção 5.1. Para realizar esta verificação usamos uma das propriedades mas estudadas e conhecidas do *KPZ*: a rugosidade da superfície. Para o *KPZ* o expoente dinâmico e de rugosidade estão dados por $z = 3/2$ e $\alpha = 1/2$, respectivamente. Aliás com este expoente α , a distribuição da rugosidade ao quadrado é bem definida e corresponde à distribuição de um ruído de espectro gaussiano envolto por uma lei de potência $1/f^{\alpha^*}$, sendo $\alpha^* = 1 + 2\alpha$ (20). Usando a definição de rugosidade

$$w_L(t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [h(i, t) - \bar{h}(t)]^2}, \quad (5.12)$$

observamos na figura 77a a evolução temporal do primeiro cumulante da rugosidade ao quadrado $k_1 = \langle w_L^2 \rangle$ para $(w, p) = (0, 0.5)$. Como podemos observar, no limite termodinâmico, temos uma lei de escala do tipo

$$w_L(t) \sim L^\alpha f\left(\frac{t}{L^z}\right), \quad (5.13)$$

com os expoentes $z = 3/2$ e $2 \cdot \alpha = 1$, indicando que para $p = 0.5$ o sistema se mantém na mesma classe de universalidade *KPZ*. Fixando o tamanho de rede $L = 4096$, também foi calculada a distribuição de probabilidades da propriedade w_L^2 nos estados estacionários $p < p_0$ e quase-estacionários $p_0 \leq p < p_c$. Ao compararmos com a predição teórica do modelo *KPZ* (20) observamos uma excelente concordância, independente do parâmetro p . Este resultado se encontra na figura 77b onde se observa que a distribuição de probabilidade se comporta como:

$$P_L(w_L^2) = \frac{1}{\langle w_L^2 \rangle - C} f\left(\frac{w_L^2 - C}{\langle w_L^2 \rangle - C}\right),$$

sendo $C = 0.594$ uma correção de tamanho finito e $\langle \dots \rangle$ a média sobre as diferentes configurações. (21) Estes resultados mostram claramente que a introdução do parâmetro p não modifica a classe de universalidade, mantendo o expoente crítico dinâmico $z = 3/2$ e o expoente crítico de rugosidade $\alpha = 1/2$.

O valor crítico do parâmetro p é $p_c = 4$. Uma forma simples de ver este resultado se encontra no comportamento da velocidade da superfície, dada por:

$$v(t \rightarrow \infty, L) = (1 - x) \frac{(1 - m^2)}{2} \frac{1}{(1 - 1/L)}, \quad (5.14)$$

com $m = 0$, se a inclinação média da superfície é zero, e $x = 0$ para o *TASEP*. Como vemos a velocidade da superfície em $p = 1$ é $v_\infty = 1/2$ no limite termodinâmico. Esta velocidade

Figura 77 – Verificação da classe de universalidade do modelo *raise and peel* sem desorção com condições periódicas. (a) Evolução temporal de $k_1 = \langle w^2 \rangle$ para $p = 0.5$ iniciando de duas condições iniciais pirâmide (1 pico) e substrato ($L/2$ picos). (b) Distribuição de probabilidade da rugosidade ao quadrado para uma rede de tamanho $L = 4096$. Os círculos representam a distribuição teórica do modelo KPZ. (20) $L_{ref} = 8192$ e $C = 0.594$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

está diretamente relacionada com n_∞ , pois em $(w, p) = (0, 1)$ a altura média da superfície só pode mudar por absorções nos vales ($n_L \cdot L/2$) da superfície. Como para cada absorção a altura média da superfície incrementa em $2/L$, então no estado estacionário teremos que $v(t \rightarrow \infty, L) = n(t \rightarrow \infty, L)$ e por conseguinte $v_\infty = n_\infty$, o que leva a $p_c = 2/n_\infty = 4$.

Como vemos da figura 78a, para $p < p_c$ e um tamanho de rede $L = 4096$, a modificação do parâmetro p de fato dilata a escala temporal por um fator $(p_c - p)$. Porém desta figura parece-nos estranho o termo $\ln(4 - p)$ que aparece na abscissa. Para verificar que este termo não é um problema, correspondendo a uma correção ao tamanho finito no escalonamento de Family-Vicsek 5.13 na figura 78b, apresentamos a evolução da rugosidade ao quadrado $k_1 = \langle w_L^2 \rangle$ partindo da condição pirâmide e usando diferentes tamanhos de rede e valores de p . Desta figura notamos que

$$k_1(t) - C \sim L^{2\alpha} f\left(\frac{t \cdot \Delta}{L^z} - \frac{1.71L - 199.14}{L^z} \ln\left(\frac{\Delta}{3}\right)\right),$$

com $\Delta = (p_c - p)$. Contudo este segundo termo no argumento da função f não apresenta uma dependência com t . Portanto, sempre que $\Delta \neq 0$ poderemos tomar uma rede suficientemente grande para que possamos desprezar este termo. É também claro que quanto mais próximo Δ se encontra de zero maior será a rede que teremos que considerar.

Após os esclarecimentos dados, voltemos à figura 78a, onde observamos a presença de um regime transiente que se estende sobre um tempo que aumenta com a proximidade à p_c . Isto poderia ser um indicativo que em $p = p_c$ a classe de universalidade teria que mudar. Esta afirmação pode ser verificada estudando-se o gap de energia para $p_0 \leq p \leq p_c$.

Figura 78 – (a) Evolução temporal de $k_1 = \langle w_L^2 \rangle$ para a rede de $L = 4096$ sítios e partindo da condição inicial pirâmide. (b) Correção de tamanho finito ao escalonamento dinâmico da rugosidade ao quadrado $k_1 = \langle w_L^2 \rangle$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 79 – Colapso do gap de energia obtido a partir de $(1 - n/n_\infty)$ seguindo a equação 5.11 com $\Delta = (p_c - p)$. A linha tracejada é descrita pela função $f(x) = \exp(a \cdot x^b + c)$ com $a = -0.0027(4)$, $b = 3.97(7)$ e $c = 0.72(4)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para calcular este gap se utilizou a evolução temporal da propriedade $(1 - n/n_\infty)$, tal como foi realizado no caso $u = 1$. Os resultados obtidos para $p < p_c$ se encontram na figura 79, onde o gap de energia escala seguindo a equação 5.11, indicando que possivelmente em $p_c = 4$ o expoente crítico muda à $z' \simeq 1$.

Para verificar que efetivamente o expoente crítico dinâmico z muda seu valor de $z = 3/2$ para $z' \simeq 1$, tentamos calcular o gap de energia utilizando a evolução temporal da

Figura 80 – (Linha vermelha) Evolução temporal da propriedade $\ln(1 - n/n_\infty)$ para o *PARPM* fixando $(w, p) = (0, 4)$. (Linha preta) Ajuste do tipo 5.10 para $L = 544$ e do tipo 5.15 para $L = 25552$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

propriedade $(1 - n/n_\infty)$, supondo que o comportamento assintótico é regido pela equação 5.10. Porém, como se observa na figura 80a, este decaimento exponencial só acontece para tempos curtos. Portanto foi necessário assumir uma nova hipótese para o comportamento assintótico de $(1 - n/n_\infty)$. Esta hipótese leva em conta a aparição de blocos de Jordan, tal como aconteceu no caso $u = 0$ (ver 3.7). Se este for o caso, esperaríamos que o comportamento assintótico de $(1 - n/n_\infty)$ fosse dado por:

$$(1 - n/n_\infty) \sim t^n \cdot \exp(-E_1 \cdot t), \quad (5.15)$$

sendo n um inteiro e E_1 o gap de energia. Um ajuste deste tipo foi encontrado para $L = 25552$ obtendo-se $n = 85$ e $E_1 = 1.81 \times 10^{-4}$. Este resultado se encontra na figura 80b junto com a simulação de Monte Carlo de $\ln(1 - n/n_\infty)$. Como podemos perceber existe uma grande concordância entre o ajuste e a simulação para tempos assintóticos. Ao repetirmos este procedimento para tamanhos de rede $L = 3728, 6032, 9760, 15792$ obtivemos $E_1 = (0.22 \cdot L - 87.81)^{-1}$ e $n = \text{round}(0.213 \cdot L^{0.590})$. Por outro lado, para $208 \leq L \leq 2304$ se determinou o decaimento exponencial para tempos curtos seguindo a proposta da equação 5.10, e se observou que $E_1 = (0.66 \cdot L - 11.07)^{-1}$. Estes dois resultados são apresentados na figura 81 em escala logarítmica. Como se observa a potência encontrada é da ordem de 1. Porém, existe uma aparente inconsistência, pois o autovalor de energia que domina o decaimento exponencial assintótico é maior que aquele que domina a dinâmica inicial, comportamento que parece evidente ao compararmos a inclinação inicial e final da figura 80a. Como solução à esta inconsistência propomos que

$$(1 - n/n_\infty) \sim t^n \cdot \exp(-E_i \cdot t),$$

Figura 81 – Autovalores obtidos a partir da propriedade $\ln(1 - \tau/\tau_\infty)$ utilizando a equação 5.10 para tempos curtos e 5.15 para a dinâmica assintótica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

sendo $i > 1$. Portanto podemos dizer que para $p = p_c$, e começando da condição pirâmide, a dinâmica assintótica não é governada pelo primeiro autovalor de energia diferente de zero. Comparando com os resultados obtidos quando $u = 0$, podemos dizer que isto se deve à aparição de blocos de Jordan cujas dimensões crescem com o tamanho da rede, permitindo superar os tempos de decaimento $1/E_i$ em ordens de grandeza que dependem da condição inicial e do tamanho da rede.

Antes de finalizar esta seção gostaríamos de ver se o ponto crítico $p = p_c$ é também percebido para valores de $p < p_c$. Como vemos da figura 82a ao utilizarmos os expoentes $z' = \alpha' = 1$, vemos um “aparente” colapso das distintas dinâmicas de k_1 para tempos curtos. Embora esse colapso é um efeito visual da escala logarítmica, podemos definir um tempo característico t_0 que separe a dinâmica de tempos curtos da dinâmica assintótica. Este tempo t_0 daria o ponto de corte das duas linhas laranjas na figura 82a e cresceria com $L^{z'}$, e como vemos da figura 82b não depende de p . Por conta disto podemos pensar que existe um cruzamento entre o ponto crítico com expoente dinâmico z' e o KPZ sempre que $p < p_c$.

Em resumo para $u = \infty$ o *PARPM* cai na classe de universalidade KPZ e se mantém nesta classe de universalidade sempre que $0 \leq p < p_0$ e $w = 0$. Acima de p_0 o sistema atinge algum dos múltiplos estados absorventes acessíveis depois de algum tempo. Este tempo cresce com o tamanho da rede mais rápido do que uma lei de potência. Antes do estado absorvente ser atingido o sistema permanece em um estado quase-estacionário com as mesmas propriedades do estado estacionário KPZ, mas com uma dilatação temporal proporcional a $(4 - p)$. Acima do valor crítico $p_c = 4$ o estado quase-estacionário desaparece e o sistema cai diretamente em algum estado absorvente acessível. Referente ao parâmetro

Figura 82 – Dinâmica de tempos curtos observada para o cumulante $k_1 = \langle w_L^2 \rangle$. (a) Usando $(w, p) = (0, 0.5)$, $\alpha' = 1$ e $z' = 1$ podemos definir um tempo t_0 como o tempo onde as duas linhas laranjas se cruzam ($L_{ref} = 8192$). (b) O tempo t_0 é independente do parâmetro p .

Fonte: Elaborada pelo autor.

w , basta compararmos o expoente crítico dinâmico z quando $w = 0$ com o caso em que $\lim_{w \rightarrow 0} z(w)$ para percebermos que as dessorções não locais são relevantes, desviando o *PARPM* da classe de universalidade *KPZ*. O resultado mais interessante acontece em $p = p_c$ pois o expoente crítico dinâmico muda para o valor $z' = 1$, e a dinâmica assintótica não é regida pelo primeiro autovalor de energia diferente de zero. Isto acontece provavelmente pela aparição de blocos de Jordan no operador evolução cujas dimensões crescem com o tamanho do sistema para a condição inicial elegida.

5.3.3 Resultados Gerais

Depois de analisar os casos especiais $w = 0, 1$ para os quais conhecíamos o valor de p_c no limite termodinâmico, nesta seção apresentamos os resultados gerais observados para $w > 0$.

Dado que em geral não conhecemos o valor exato de $p_c(w)$ a determinação do expoente z' , escolhendo $p = p_c$, pode resultar em uma tarefa complicada, pois precisaríamos de um ajuste ultrafino. Por tal motivo escolhemos fixar um valor de w e determinar o autovalor E_1 a partir da dinâmica de $(1 - n/n_\infty)$ para valores de $p < p_c$. Usando um escalonamento de tamanho finito do tipo:

$$E_1 \sim \frac{1}{L^{z'}} f((p_c - p) \cdot L^{1/\nu}),$$

encontramos para condições livres de contorno que o valor de z' varia com w da forma ilustrada na figura 83. Nesta figura observamos que z' decai rapidamente de $z' = 1$ em $u = 0$

*Ver figura 37.

Figura 83 – Comportamento do expoente crítico z' para valores de $u \in \{0.3, 0.5, 1, 2, 13, 33.8, 58, 105.4\}$. A linha tracejada é descrita pela função $y = 0.651x^2 - 0.105x + 0.443$ com $x = 2 \cdot \arctan(w) / \pi$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

à $z' \approx 0.44$ para $u \gtrsim 2$. Se este comportamento se mantém para $u \rightarrow \infty$ então veríamos que $z'(w)$ é uma função continua com $w > 0$. Mais ainda, uma descontinuidade em $w = 0$, pois da seção anterior vimos que $z'(w = 0) = 1$. Esta descontinuidade possivelmente acontece devido à presença de dessorções não locais para $w > 0$, e talvez também porque em $w = 0$ temos $n_\infty = 1/2$. Como vemos da equação 5.8, para esta densidade de picos mais vales, se tem o maior número de configurações com o mesmo número de picos N_{peaks} . Se comparamos a figura 83 com a figura 37 veremos que em geral $z \neq z'$, com exceção de um único ponto aproximadamente em $u \approx 2$.

Referente ao parâmetro ν não percebemos um padrão em função de u . O único que podemos dizer é que obtivemos valores entre $\nu \sim 2.0 - 2.5$ ao usar o mesmo conjunto de valores $u \in \{0.3, 0.5, 1, 2, 13, 33.8, 58, 105.4\}$ da figura 83.

Finalmente como vimos na figura 74, o tempo de vida do estado quase-estacionário parece seguir uma dependência

$$\ln(\xi_t) \sim L^\psi, \quad (5.16)$$

com o tamanho da rede L . Para $(u, p) = (1, 2)$ e condições livres de contorno obtivemos $\psi \approx 1.26$. Ao repetirmos as mesmas medidas com condições periódicas se observamos um valor $\psi = 1.135(7)$. Mantendo fixo $u = 1$, nas proximidades de p_c , vemos na figura 75 linhas tracejadas desenhadas com funções do tipo $f(x) = \exp(a \cdot x^b + c)$. Usando o expoente b desta função de escala, com o expoente ν que produz o escalonamento, podemos determinar $\psi = b/\nu$. Obtivemos os valores $\psi = 1.15(1)$ para condições livres e $\psi = 1.17(3)$ para condições periódicas. Estas quatro medidas podem sugerir que ψ não depende de p , variando unicamente com u . Contudo ao determinar-se $\psi = b/\nu$, com os dados da figura

76a, obtemos que $\psi = 0.89$ (2). Assim se supomos que a relação 5.16 é válida, o máximo que podemos dizer é que $\psi = 1.1$ (2). Ao tentarmos determinar os valores de ψ próximo à p_c , com valores de $0.3 \leq u \leq 105.4$, encontramos valores entre $0.87 - 1.40$ com um aparente comportamento decrescente com u .

5.4 Discussão

Neste último capítulo de resultados temos estudado o efeito do parâmetro p no modelo *raise and peel*. De maneira geral o parâmetro p divide o digrama de fase em três regiões. A região $p < 2$ sente o efeito do parâmetro p exclusivamente como uma dilatação temporal do tipo $(p_c - p)$. Na região $2 \leq p < p_c$ aparecem múltiplos estados absorventes. Estados estes que são atingidos em um tempo que cresce exponencialmente com o tamanho do sistema. Isto faz com que o sistema permaneça em um estado quase-estacionário com as mesmas propriedades do estado estacionário observado em $p = 1$, com uma diferença apenas de uma dilatação temporal. Na última região, $p > p_c$, o sistema sempre alcança algum dos múltiplos estados absorventes em um tempo finito. Para $p = p_c$ teríamos uma transição para estados absorventes implicando que no limite termodinâmico precisaríamos de um tempo infinito para alcançar alguma configuração absorvente. Esta transição absorvente teria um expoente dinâmico z' diferente do expoente dinâmico z medido em $p = 1$.

Os dois casos mais interessantes acontecem em $u = 0$ e $w = 0$. Em ambos os casos a presença de blocos de Jordan no operador de evolução pode levar à dinâmicas que excedem seu tempo característico de decaimento $1/E_1$ em varias ordens de magnitude. O caso $(w, p) = (0, 1)$ é importante pois o *PARPM* cai na classe de universalidade *KPZ*, sendo que para $p < 4$ o parâmetro p é irrelevante e w uma perturbação relevante que muda a classe de universalidade. Na representação de partículas, o *PARPM* modifica o modelo *TASEP* produzindo um estado quase-estacionário sempre que $(\rho_{part})^{-1} \leq p < (J_\infty)^{-1}$, sendo ρ_{part} a densidade de partículas e J_∞ a corrente estacionária de partículas no limite termodinâmico.

Ainda ficam algumas perguntas a serem respondidas, por exemplo:

- Existe alguma relação entre a distribuição de probabilidades da densidade de picos mais vales $n(t \rightarrow \infty, L)$, medida em $p = 1$, e a probabilidade de se cair em algum estado absorvente na região $2 \leq p < p_c$?
- Se em um novo modelo com $p = 1$, introduzimos estados absorventes em função do número de picos, que dependência com L teria o tempo necessário para cair-se nestes estados absorventes?
- Existe alguma relação entre o expoente z' , medido em $p = p_c$, e algum dos expoentes medidos para $p < p_c$? Especificamente existe alguma relação com o

expoente associado ao fenômeno conhecido como “*Critical Initial Slip*”?

- d) A menos da dilatação temporal $(p_c - p)$, as funções de correlação espaço-temporais dependem de p para $p < p_c$?
- e) Como mudaria o tempo necessário para atingir-se estados absorventes, caso nos aproximássemos da transição absorvente em p_c vindo de valores $p > p_c$?
- f) Existe alguma relação adicional entre os estados quase-estacionários observados no *PARPM* e os pontos críticos de aleatoriedade infinita, (29) além da semelhança dada pela expressão $\ln(\xi_t) \sim L^\psi$?

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos o modelo estocástico “*Peak Adjusted Raise and Peel Model*” (*PARPM*). Este modelo possui dois parâmetros: u e p . A dinâmica do modelo pode ser interpretada como a de uma superfície em crescimento. O modelo possui processos de absorção de blocos e processos de evaporação não-local controladas pelo parâmetro u . O parâmetro p distingue a evolução das superfícies de acordo com o número de picos da mesma. Ele permite variarmos a probabilidade com que a deposição ou evaporação de blocos aconteça em cada configuração. Nesta tese ampliamos o domínio do parâmetro p na proposta original do modelo (72, 75) que era de $p_0 = 2\frac{(L-1)}{L}$ para uma rede de L sítios. Em nossa generalização permitimos valores acima do valor p_0 para condições livres de contorno e do valor $p_0 = 2$ para condições periódicas.

Este modelo pode ser enxergado como um modelo *TASEP* ou *single-step (KPZ)* com duas perturbações: $1/u$ e p . A perturbação $w = 1/u$ muda a classe de universalidade (relevante) enquanto a perturbação p mantém a classe de universalidade (irrelevante). Como vimos ao longo desta tese o *PARPM* é um modelo com múltiplas facetas que enumeraremos a seguir.

Ao variarmos o parâmetro p , tomando-se valores arbitrários de u , o modelo exibe em $p = p_0$ um ou dois estados absorventes. O número de estados absorventes incrementa drasticamente conforme $p > p_0$. Observa-se também que no limite termodinâmico existe em uma região em que $2 \leq p < p_c(u)$ um comportamento interessante. O sistema atinge algum dos estados absorventes acessíveis após um intervalo de tempo que cresce com o tamanho da rede. Crescimento este mais rápido que uma lei de potência. Para este regime, antes de atingir algum estado absorvente o sistema se mantém em um estado quase-estacionário com as mesmas propriedades que o modelo teria se estivesse com $p = 1$, modificando-se apenas a escala temporal por um fator proporcional à $(p_c - p)$. Acima do valor crítico p_c o sistema é armadilhado em um dos estados absorventes acessíveis sem passar por um estado quase-estacionário.

Ao variarmos o parâmetro u observamos uma fase massiva para $u < 1$ com propriedades semelhantes às obtidas em $u = 0$. Nesta região o tamanho lateral dos clusters é finito limitando o tamanho das avalanches e a rugosidade da superfície. Conforme u aumenta também é aumentado o tamanho típico dos clusters, de forma que em $u = 1$ este tamanho diverge com o comprimento da rede L . Em $u = 1$ retornamos ao modelo invariante conforme que deu origem ao *PARPM*. Como vimos a transição crítica em $u_c = 1$ pode ser enxergada de várias maneiras. Por exemplo, como uma transição de rugosidade, uma *depinning transition*, uma transição de percolação e mesmo como uma transição para uma fase criticamente auto-organizada. Para valores de $u > 1$ observamos uma fase

criticamente auto-organizada com uma probabilidade não nula de se ter um cluster que percole por toda a rede. Nesta região criticamente auto-organizada ($u \geq 1$), o diagrama de fase é dividido em outras duas regiões. Na primeira onde $1 \leq u \lesssim 33.8$ a superfície estacionária é rugosa e na segunda região onde $u \gtrsim 33.8$ a superfície estacionária é lisa. O valor exato onde esta segunda transição acontece ainda precisa de estudos adicionais.

Os resultados mais interessantes acontecem em $(w, p) = (0, 4)$ para condições periódicas de contorno, e em $u = 0$ independente das condições de contorno. Para $w = 1/u = 0$ observamos que a dinâmica assintótica em $p = 4$ não é regida pelo gap de energia E_1 do sistema, mas por um autovalor maior. Isto se deve à aparição de blocos de Jordan na Hamiltoniana com dimensões que crescem com o tamanho do sistema. Tais blocos de Jordan também aparecem no caso $u = 0$, e como foi observado, dependendo da condição inicial podem dificultar a obtenção do expoente crítico dinâmico utilizando-se escalonamentos dinâmicos. Portanto a não obtenção de um escalonamento dinâmico não necessariamente implica que o sistema não seja crítico.

Em termos de criticalidade auto-organizada ainda falta reconhecer a transição de fase subjacente, assim como o parâmetro de ordem associado à esta transição. Fora disto ainda é necessário medir-se as funções de correlação espaço-temporais para $u \geq 1$ e $p < p_c$ verificando que estas decaem como uma lei de potência, conforme esperado.

Finalmente nossos resultados sugerem um comportamento tipo “*critical initial slip*”. Porém ainda não determinamos a propriedade ou propriedades da condição inicial que seriam relevantes na evolução do sistema. Fica para o futuro o reconhecimento destas propriedades bem como a mensuração do expoente associado à este comportamento.

REFERÊNCIAS

- 1 PEARCE, P. A. et al. Temperley–lieb stochastic processes. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 35, n. 45, p. L661, 2002.
- 2 GIER, J. D. et al. The raise and peel model of a fluctuating interface. **Journal of Statistical Physics**, v. 114, n. 1-2, p. 1–35, 2004.
- 3 ALCARAZ, F. C.; RITTENBERG, V. Different facets of the raise and peel model. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2007, n. 07, p. P07009, 2007.
- 4 TEMPERLEY, H. N.; LIEB, E. H. Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the ‘percolation’ problem. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences**. v. 322, n. 1549, p. 251–280, 1971.
- 5 ALCARAZ, F. C.; RITTENBERG, V. Nonlocal asymmetric exclusion process on a ring and conformal invariance. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2013, n. 09, p. P09010, 2013.
- 6 BARABÁSI, A.-L.; STANLEY, H. E. **Fractal concepts in surface growth**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- 7 SASAMOTO, T.; SPOHN, H. One-dimensional kardar-parisi-zhang equation: an exact solution and its universality. **Physical Review Letters**, v. 104, n. 23, p. 230602, 2010.
- 8 HALPIN-HEALY, T.; ZHANG, Y.-C. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. aspects of multidisciplinary statistical mechanics. **Physics Reports**, v. 254, n. 4, p. 215–414, 1995.
- 9 FRANCESCO, P.; MATHIEU, P.; SÉNÉCHAL, D. **Conformal field theory**. New York: Springer, 1997.
- 10 HENKEL, M. **Conformal invariance and critical phenomena**. New York: Springer, 1999.
- 11 CARDY, J. L. **Conformal invariance and statistical mechanics**. Amsterdam: North-Holland, 1988.
- 12 CHRISTENSEN, K.; MOLONEY, N. R. **Complexity and criticality**. London: Imperial College Press, 2005.

- 13 AHR, M. **Surface properties of epitaxially grown crystals**. 2002. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0211581.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2016.
- 14 SETHNA, J. P.; DAHMEN, K. A.; MYERS, C. R. Crackling noise. **Nature**, v. 410, n. 6825, p. 242–250, 2001.
- 15 HENKEL, M. et al. **Non-equilibrium phase transitions**. New York: Springer, 2008.
- 16 KERTÉSZ, J.; WOLF, D. E. Anomalous roughening in growth processes. **Physical Review Letters**, v. 62, n. 22, p. 2571, 1989.
- 17 HINRICHSSEN, H.; ÓDOR, G. Roughening transition in a model for dimer adsorption and desorption. **Physical Review Letters**, v. 82, n. 6, p. 1205, 1999.
- 18 ÓDOR, G. Universality classes in nonequilibrium lattice systems. **Reviews of Modern Physics**, v. 76, n. 3, p. 663, 2004.
- 19 ÓDOR, G. **Universality in nonequilibrium lattice systems: theoretical foundations**. Singapore: World Scientific, 2008.
- 20 ANTAL, T. et al. Roughness distributions for $1/f$ α signals. **Physical Review E**, v. 65, n. 4, p. 046140, 2002.
- 21 OLIVEIRA, T.; REIS, F. A. Finite-size effects in roughness distribution scaling. **Physical Review E**, v. 76, n. 6, p. 061601, 2007.
- 22 REIS, F. A. Universality and corrections to scaling in the ballistic deposition model. **Physical Review E**, v. 63, n. 5, p. 056116, 2001.
- 23 HINRICHSSEN, H. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. **Advances in Physics**, v. 49, n. 7, p. 815–958, 2000.
- 24 LÜBECK, S. Universal scaling behavior of non-equilibrium phase transitions. **International Journal of Modern Physics B**, v. 18, n. 31–32, p. 3977–4118, 2004.
- 25 MARRO, J.; DICKMAN, R. **Nonequilibrium phase transitions in lattice models**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- 26 RODRÍGUEZ-ITURBE, I.; RINALDO, A. **Fractal river basins: chance and self-organization**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- 27 MARKOVIĆ, D.; GROS, C. Power laws and self-organized criticality in theory and nature. **Physics Reports**, v. 536, n. 2, p. 41–74, 2014.
- 28 YEOMANS, J. M. **Statistical mechanics of phase transitions**. Oxford: Clarendon Press, 1992.

- 29 VOJTA, T. Monte Carlo simulations of the clean and disordered contact process in three dimensions. **Physical Review E**, v. 86, n. 5, p. 051137, 2012.
- 30 DICKMAN, R. et al. Paths to self-organized criticality. **Brazilian Journal of Physics**, v. 30, n. 1, p. 27–41, 2000.
- 31 KAMPEN, N. G. van. **Stochastic processes in physics and chemistry**. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- 32 REIF, F. **Fundamentals of statistical mechanics**. Singapore: McGraw-Hill, 1965.
- 33 KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S.; BEN-NAIM, E. **A kinetic view of statistical physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- 34 RÁCZ, Z. **Nonequilibrium phase transitions**. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0210435.pdf>>. Acesso em 23 jan. 2016.
- 35 WATKINS, N. W. et al. 25 years of self-organized criticality: concepts and controversies. **Space Science Reviews**, v. 198, n. 1-4, p. 3–44, 2016.
- 36 BONACHELA, J. A.; MUÑOZ, M. A. Self-organization without conservation: true or just apparent scale-invariance? **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2009, n. 09, p. 09009, 2009.
- 37 PACZUSKI, M.; BASSLER, K. E. Theoretical results for sandpile models of self-organized criticality with multiple topplings. **Physical Review E**, v. 62, n. 4, p. 5347, 2000.
- 38 GRINSTEIN, G. et al. **Scale invariance, interfaces and nonequilibrium dynamics**. New York: Plenum Press, c1995.
- 39 ASCHWANDEN, M. J. **Theoretical models of self-organized criticality (soc) systems**. 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1204.5119.pdf>>. Acesso em 30 out. 2016
- 40 GUEUDRÉ, T. et al. Short-time growth of a kardar-parisi-zhang interface with flat initial conditions. **Physical Review E**, v. 86, n. 4, p. 041151, 2012.
- 41 LÓPEZ, J. M.; RODRIGUEZ, M. A.; CUERNO, R. Superroughening versus intrinsic anomalous scaling of surfaces. **Physical Review E**, v. 56, n. 4, p. 3993, 1997.
- 42 FAMILY, F.; VICSEK, T. Scaling of the active zone in the eden process on percolation networks and the ballistic deposition model. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 18, n. 2, p. L75, 1985.

- 43 LÓPEZ, J. M.; RODRIGUEZ, M. A. Lack of self-affinity and anomalous roughening in growth processes. **Physical Review E**, v. 54, n. 3, p. R2189, 1996.
- 44 HINRICHSSEN, H.; ÓDOR, G. Critical behavior of roughening transitions in parity-conserving growth processes. **Physical Review E**, v. 60, n. 4, p. 3842, 1999.
- 45 CAMPA, A.; DAUXOIS, T.; RUFFO, S. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. **Physics Reports**, v. 480, n. 3, p. 57–159, 2009.
- 46 MUKAMEL, D. **Statistical mechanics of systems with long range interactions**. 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0811.3120.pdf>>. Acesso em 30 out. 2016.
- 47 DICKMAN, R. Absorbing-state phase transitions: exact solutions of small systems. **Physical Review E**, v. 77, n. 3, p. 030102, 2008.
- 48 HIRSCH, M.; DEVANEY, R.; SMALE, S. **Differential equations, dynamical systems, and linear algebra**. New York : Academic Press, 1974. (Pure and applied mathematics, v. 60).
- 49 CHRISTE, P.; HENKEL, M. **Introduction to conformal invariance and its applications to critical phenomena**. Berlin: Springer c1993.
- 50 CARDY, J. L. Conformal invariance and universality in finite-size scaling. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 17, n. 7, p. L385, 1984.
- 51 ALEXANDER, S.; HOLSTEIN, T. Lattice diffusion and the heisenberg ferromagnet. **Physical Review B**, v. 18, n. 1, p. 301, 1978.
- 52 ALCARAZ, F. C. et al. **Reaction-diffusion processes, critical dynamics and quantum chains**. 1993. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-th/9302112.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2016.
- 53 GIER, J. et al. Stochastic processes and conformal invariance. **Physical Review E**, v. 67, n. 1, p. 016101, 2003.
- 54 ALCARAZ, F. C. et al. Surface exponents of the quantum xxz, ashkin-teller and potts models. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 20, n. 18, p. 6397, 1987.
- 55 PASQUIER, V.; SALEUR, H. Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups. **Nuclear Physics B**, v. 330, n. 2-3, p. 523–556, 1990.

- 56 SANTAMARIA, J. A. J. **Extensão do modelo Rouse and Peierls**. 2011. 81 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- 57 MARTIN, P. **Potts models and related problems in statistical mechanics**. Singapore: World Scientific, 1991. (Advances in statistical mechanics, v. 5).
- 58 ALCARAZ, F. C.; LEVINE, E.; RITTENBERG, V. Conformal invariance and its breaking in a stochastic model of a fluctuating interface. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2006, n. 08, p. P08003, 2006.
- 59 DERRIDA, B.; EVANS, M.; MUKAMEL, D. Exact diffusion constant for one-dimensional asymmetric exclusion models. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 26, n. 19, p. 4911, 1993.
- 60 DERRIDA, B.; MALLICK, K. Exact diffusion constant for the one-dimensional partially asymmetric exclusion model. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 30, n. 4, p. 1031, 1997.
- 61 EVANS, M. R.; HANNEY, T. Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models. **Journal of Physics A: mathematical and general**, v. 38, n. 19, p. R195, 2005.
- 62 GRASSBERGER, P.; TORRE, A. D. L. Reggeon field theory (schlögl's first model) on a lattice: Monte Carlo calculations of critical behaviour. **Annals of Physics**, v. 122, n. 2, p. 373–396, 1979.
- 63 JANSSEN, H.; SCHAUB, B.; SCHMITTMANN, B. New universal short-time scaling behaviour of critical relaxation processes. **Zeitschrift für Physik B: condensed matter**, v. 73, n. 4, p. 539–549, 1989.
- 64 ALON, U. et al. Roughening transition in a one-dimensional growth process. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 15, p. 2746, 1996.
- 65 ALON, U. et al. Smooth phases, roughening transitions, and novel exponents in one-dimensional growth models. **Physical Review E**, v. 57, n. 5, p. 4997, 1998.
- 66 SARMA, S. D.; GHAISSAS, S.; KIM, J. Kinetic super-roughening and anomalous dynamic scaling in nonequilibrium growth models. **Physical Review E**, v. 49, n. 1, p. 122, 1994.
- 67 LÓPEZ, J. M. Scaling approach to calculate critical exponents in anomalous surface roughening. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 22, p. 4594, 1999.
- 68 MAJUMDAR, S. N.; KRISHNAMURTHY, S.; BARMA, M. Phase transition in the takayasu model with desorption. **Physical Review E**, v. 61, n. 6, p. 6337, 2000.

- 69 GYÖRGYI, G. et al. Maximal height statistics for $1/f^\alpha$ signals. **Physical Review E**, v. 75, n. 2, p. 021123, 2007.
- 70 CARRASCO, I.; OLIVEIRA, T. Width and extremal height distributions of fluctuating interfaces with window boundary conditions. **Physical Review E**, v. 93, n. 1, p. 012801, 2016.
- 71 ALCARAZ, F. C.; RITTENBERG, V. Correlation functions in conformal invariant stochastic processes. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2015, n. 11, p. P11012, 2015.
- 72 ALCARAZ, F. C.; RITTENBERG, V. From conformal invariance to quasistationary states. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2011, n. 09, p. P09030, 2011.
- 73 ALCARAZ, F. C.; RITTENBERG, V. Shared information in stationary states at criticality. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2010, n. 03, p. P03024, 2010.
- 74 DEBENEDETTI, P. G. **Metastable liquids: concepts and principles**. Princeton: Princeton University Press, 1996.
- 75 ALCARAZ, F. C.; RITTENBERG, V. A conformal invariant growth model. **Journal of Statistical Mechanics: theory and experiment**, v. 2010, n. 12, p. P12032, 2010.

Apêndices

Apêndice A – DISTRIBUIÇÃO DA RUGOSIDADE

Neste apêndice mostraremos o programa utilizado para o cálculo da função $\Phi_1(\alpha^*, x)$ para o caso do leitor interessar-se fazer uso de ele. Como foi mostrado no artigo do Antal (20), estudando a rugosidade de um ruído com espectro Gaussiano envolto por uma lei de potência $1/f^{\alpha^*}$, a distribuição de probabilidade da rugosidade ao quadrado pode ser escalonada como

$$P(w^2, L) = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \Phi_2\left(\frac{w^2 - k_1}{\sqrt{k_2}}\right), \quad (\text{A.1})$$

sempre que $\alpha^* > 1/2$. Sendo que Φ_2 tomaria a expressão analítica

$$\Phi_2(\alpha^*, y) = \sqrt{\zeta(2\alpha^*)} \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha^*} e^{-m^{\alpha^*} \sqrt{\zeta(2\alpha^*)} \cdot y - 1} Y_2(\alpha^*, m), \quad (\text{A.2})$$

onde $y = \frac{w^2 - k_1}{\sqrt{k_2}}$ e

$$Y_2(\alpha^*, m) = \prod_{n=1, n \neq m}^{\infty} \frac{e^{-(m/n)^{\alpha^*}}}{1 - (m/n)^{\alpha^*}}, \quad (\text{A.3})$$

para condições periódicas de contorno. Para o caso $\alpha^* > 1$, $k_1 \sim L^{(\alpha^*-1)} \zeta(\alpha^*)$ e $\sqrt{k_2} \sim L^{(\alpha^*-1)} \sqrt{\zeta(2\alpha^*)}$, então é possível utilizar a mudança de variável

$$x = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k_2}}{k_1 - C} \cdot y + 1 = \frac{\sqrt{\zeta(2\alpha^*)}}{\zeta(\alpha^*)} y + 1,$$

para encontrar a função $\Phi_1(\alpha^*, x)$ definida como

$$P(w^2, L) = \frac{1}{k_1 - C} \Phi_1\left(\frac{w^2 - C}{k_1 - C}\right), \quad (\text{A.4})$$

sendo $\zeta(z)$ a função zeta de Riemann e C uma correção devida ao tamanho finito do sistema (21). Com esta mudança de variável, ao comparar as expressões A.1 e A.4, observamos que no limite termodinâmico $L \rightarrow \infty$

$$\Phi_1(\alpha^*, x) = \frac{\zeta(\alpha^*)}{\sqrt{\zeta(2\alpha^*)}} \Phi_2\left(\alpha^*, \frac{\zeta(\alpha^*)}{\sqrt{\zeta(2\alpha^*)}} (x - 1)\right).$$

Para o cálculo numérico da função $\Phi_1(\alpha^*, x)$ é necessário impor um limite superior para n e m nas expressões A.2 e A.3. Para valores negativos de y o valor $m_{\max}$ estará limitado na equação ao maior número que pode ser calculado numericamente para a exponencial $e^{-m_{\max}^{\alpha^*} \sqrt{\zeta(2\alpha^*)} \cdot y}$. O software que utilizamos para o cálculo das funções $\Phi_1(\alpha^*, x)$ e $\Phi_2(\alpha^*, y)$ foi Octave em suas versões 3.8 e 4.0, junto com o pacote de funções especiais octave-specfun. O seguinte código pode ser salvo em um arquivo de texto como Nome.m

dando permissões de execução no terminal com o comando* “chmod +x Nome.m” e pode ser executado como “./Nome.m α^* ” sendo α^* algum valor numérico e o Nome utilizado para o arquivo depende do leitor. A saída deste programa serão dois arquivos de texto, cada um com duas colunas sendo x e $\Phi_1(\alpha^*, x)$ as colunas do arquivo BorrarX.csv e y e $\Phi_2(\alpha^*, y)$ as colunas do arquivo BorrarY.csv.

```
#!/usr/bin/octave -qi
pkg load specfun

arg_list = argv ();
alpha=str2num(arg_list{1});

y=-2.5:0.1:12;
mmax=1000;
nmax=1000;

n=1:nmax;
m=1:mmax;
nmmin=min(nmax,mmax);
A=(m'./n).^alpha;
for i=1:nmmin
A(i,i)=0;
endfor

z=sqrt(zeta(2*alpha));
malpha=m.^alpha;
Y=((-1).^(m'-1)).*(malpha)'.*exp(sum(-A-log(abs(1-A)),2));

F2=exp(-y'*malpha*z);
kinf=find(isinf(F2));
F2(kinf)=0;

Phi=sum(F2*Y,2)*z/e();

exportar=[y' Phi];
csvwrite("BorrarY.csv",exportar);
exportar=[(y'*z/zeta(alpha)+1) Phi*zeta(alpha)/z];
csvwrite("BorrarX.csv",exportar);
```

*Comando UNIX/Linux