UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

**Relógio Atômico a Feixe Efusivo de
Césio:
Estudo Da Estabilidade e da Acuracia
Como Função do Deslocamento Da
Frequência Atômica Devido ao Efeito
Zeeman de Segunda Ordem,
ao Cavity Pulling e ao Rabi Pulling.**

Aida Bebeachibuli

Tese apresentada ao Instituto de Física de
São Carlos, da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de **Mestre** em
Ciências: **Física Básica**.

Orientadora: Dra. Mônica Santos Dahmouche
Co-Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
SÃO CARLOS - 2003

Aos meus pais e a minha irmã,
pelo amor, incentivo e dedicação.

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer ...

A Dra. Mônica Santos Dahmouche que me adotou como sua aluna na iniciação científica e me mostrou o caminho e as alegrias de se fazer ciência. Durante o meu mestrado ela não foi apenas minha orientadora, mas uma irmã mais velha, me incentivando sempre para que eu pudesse ir mais longe.

Prof. Dr. Vanderlei Bagnato pela confiança demonstrada desde a Iniciação Científica. Já que é difícil enumerar ou dizer o quanto a confiança dele em mim foi importante para a minha informação deixo registrado o meu Muito Obrigado.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Claudio Lens e Prof. Dr. Tito José Bonagamba pelas sugestões feitas ao meu trabalho.

Ao Daniel Varela Magalhães pela ajuda prestada e pelos conhecimentos transmitidos na estabilização dos lasers e na prática de sintetizadores de microondas. A sua amizade sempre foi um importante incentivo para o meu aprendizado.

Ao meus colegas Juliana, Cristina, Stella, Kilvia, Marília, Lia e tantos outros que sempre tornaram o ambiente do laboratório um agradável convívio dentro do trabalho.

Às secretárias do grupo, a Isabel e a Glaucia, e ao pessoal da oficina mecânica, liderados pelo Carlinhos e ao Evaldo e André, técnicos do grupo, pelos auxílios prestados.

As bibliotecárias, Neusa, Betânia e Mara, e todas as funcionárias que sempre se dedicaram em me dispor de toda a bibliografia de que precisei para compor a minha dissertação.

Aos meus pais, a minha irmã Tanja e ao meu cunhado André Luis, pela estrutura familiar, proporcionando a serenidade e a calma mesmo nos momentos mais difíceis.

A minha madrinha querida, Tia Aida, pelo apoio emocional e carinho. Depois de nossas conversas eu sempre me senti mais forte.

Ao Luis pelo amor, carinho, companherismo e por ter estado ao meu lado em todos os momentos...

A Soila pela amizade de longos anos e pela correção ortográfica da minha dissertação.

Ao Deonísio pelos e-mails trocados, que sempre me proporcionaram uma alegria imensa.

A Helena e ao Demar pela grande amizade e confiança depositados em mim.

À Capes pelo apoio financeiro.

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Generalidades sobre Relógios Atômicos	10
2.1	Características dos Relógios Atômicos	10
2.1.1	Introdução	10
2.1.2	Estabilidade da Frequência de um Relógio Atômico	13
2.1.3	Estudo da Exatidão de um Relógio Atômico	16
2.2	Princípio de Funcionamento do Relógio Atômico a Feixe Térmico de ^{133}Cs	17
2.2.1	Seleção Óptica dos Átomos	18
2.2.2	Princípio de Interrogação de Ramsey	19
2.2.3	Detecção	21
2.2.4	Princípio da Escravização	22
2.3	Descrição do Relógio Atômico a Feixe Efusivo de ^{133}Cs	24
2.3.1	A Câmara de Vácuo	26
2.3.2	Forno	26
2.3.3	Cavidade de microondas	28
2.3.4	Gerador de Microondas	30
2.3.5	Sistema de controle	31
2.3.6	Sistema Óptico	33
3	Uma Análise das Franjas de Ramsey	38
3.1	Efeito Zeeman Quadrático	39
3.2	Representação Matricial da Variação dos Estados Quânticos	41
3.3	Probabilidade de Ramsey : Forma Geral e Interpretação	44
3.3.1	A Franja de Ramsey	47
3.3.2	Pedestal de Rabi	48
3.4	Interpretação Geométrica das Franjas de Ramsey	49
3.4.1	Tratamento Semi-Clássico de um Relógio Atômico	51
3.4.2	Imagem do Spin Fictício	54
3.4.3	Oscilação de Rabi dentro da cavidade	57
3.4.4	Interpretação Física das Franjas de Ramsey através do Spin Fictício	59
3.5	A Transição Relógio	59
3.5.1	Parte Central da Franja de Ramsey	63

3.5.2	Determinação da frequência de Rabi	64
4	Deslocamentos de Frequência na Transição Relógio.	67
4.1	Perturbação sobre a Transição Relógio	67
4.2	A Interpretação Geométrica da Perturbação sobre a Transição Relógio . .	70
4.2.1	Cálculo da função sensibilidade $g(t)$	70
4.3	Deslocamentos de Frequência Relativísticos	77
4.3.1	Efeito Gravitacional	77
4.3.2	Efeito Doppler de Segunda Ordem	78
4.4	Deslocamentos da Frequência de Transição	79
4.4.1	Efeito Zeeman Quadrático	79
4.5	Cavity Pulling	88
4.6	Efeitos das Transições Vizinhas	92
4.6.1	Rabi Pulling	93
4.7	Estimativa das incerteza em um Relógio Atômico	99
4.7.1	Avaliação Final	99
4.7.2	Acuracia do Relógio Atômico	100
4.7.3	Estabilidade de um Relógio Atômico	102
5	Conclusão	105

Lista de Figuras

2.1	Princípio de funcionamento de um relógio atômico passivo. A frequência ν de um oscilador local é estabilizada na frequência de Bohr ν_0 de um átomo de referência.	11
2.2	Diagrama dos níveis de energia do átomo de ^{133}Cs . A frequência relógio corresponde à transição hiperfina $6S_{1/2}, F = 3 \longleftrightarrow 6S_{1/2}, F = 4$ do estado fundamental.	12
2.3	Sinal aleatório na medida da Variância de Allan.	14
2.4	Esquema gráfico da Variância de Allan típica ressaltando o tipo de ruído característico de cada região.	15
2.5	Diagrama com as partes do Relógio Atômico a Feixe Efusivo de Césio. O feixe atômico é preparado em um forno efusivo. Na região de preparação, os átomos são bombeados opticamente no estado $6S_{1/2}, F = 3$ (bolas vermelhas no diagrama). A seguir, eles passam pela cavidade de Ramsey. Após as duas interações com o campo de microondas, os átomos fazem a transição para o estado $6S_{1/2}, F = 4$ (bolas azuis no diagrama). Os átomos que sofreram a transição são detectados opticamente e a fluorescência emitida por eles é coletada e focalizada em um fotodiodo. Esta luz é enviada para um controle digital, que processa o sinal de erro e envia um sinal de correção ao sintetizador.	18
2.6	Diagrama esquemático da transições envolvidas no bombeamento ótico.	19
2.7	Princípio de interrogação de Ramsey	20
2.8	Franja de Ramsey	22
2.9	Diagrama esquemático das transições envolvidas na detecção dos átomos.	23
2.10	Franja de Ramsey com as sete transições hiperfinas $\Delta m_F = 0$	24
2.11	Franja de Ramsey medida quando uma fonte comercial Minnipa alimentava o campo magnético estático.	25
2.12	Franja de Ramsey medida com uma fonte de corrente estável.	25
2.13	Vista frontal do relógio atômico a feixe térmico de ^{133}Cs do CePOF.	27
2.14	Esquema do forno.	27
2.15	Cavidade de microonda usada no relógio atômico tipo feixe do CePOF.	29
2.16	Blindagem magnética.	30
2.17	Diagrama de blocos do sintetizador de microonda. Um controle computacional do DDS permite sintonizar e modular a frequência de saída do oscilador.	31
2.18	Sinal característico do padrão de frequência devido à modulação da frequência de interrogação.	32
2.19	Laser de diodo na configuração de cavidade estendida.	34
2.20	Montagem do Laser de Diodo	34

2.21	Sistema de controle do Laser.	36
2.22	Fotografia da mesa óptica do relógio atômico do Grupo de Óptica - CePOF.	36
3.1	Espectro Zeeman experimental registrado, à potência ótima, em nosso relógio, com as sete transições possíveis com $\Delta m_F = 0$. A intensidade do campo magnético estático é $20\mu T$	39
3.2	Espectro Zeeman experimental registrado com o nosso padrão primário de tempo e frequência quando a intensidade do campo magnético estático aplicado é de $30\mu T$	40
3.3	Franja de Ramsey sobreposta ao pedestal de Rabi registrado com o nosso relógio atômico a feixe efusivo de ^{133}Cs	46
3.4	Princípio de um relógio atômico a guisa de interferometria atômica.	50
3.5	A figura define os ângulos θ e φ do vetor rotação instantâneo.	55
3.6	Nesta figura temos o vetor precessão $\vec{S}(t)$ a uma frequência $-\Omega(t)$ em torno de $\vec{w}$	56
3.7	Evolução do spin fictício durante as oscilações de Rabi, dentro das cavidade de interação.	58
3.8	A representação geométrica de um spin fictício dentro de uma cavidade de Ramsey. Neste caso a frequência de interrogação é a mesma da frequência de transição atômica e a probabilidade de transição do entre os estados $ f\rangle$ e $ e\rangle$ é máxima e vale 1.	60
3.9	Franja de Ramsey para a transição relógio com a potência injetada na cavidade à 2.5dBm abaixo da potência ótima.	61
3.10	Taxa de transição experimental em função da potência injetada P e $B_0 \simeq 20\mu T$	62
3.11	Franja de Ramsey da transição relógio para $b = b_{opt}$	62
3.12	Derivada Segunda do padrão de Ramsey quando a potência injetada na cavidade for 7.17 dBm, ou seja, 2.5 dBm abaixo da potência ótima. A distância entre os dois picos é proporcional à frequência de Rabi.	65
4.1	Evolução do spin fictício $\vec{S}(t)$ após interagir com a primeira cavidade de interação dado por uma dessintonia de Dirac $d\Omega_0(t) = \alpha\delta(t - t')$	76
4.2	Evolução do spin fictício $\vec{S}(t)$ ao passar pela região livre de radiação oscilatório e pela segunda cavidade de interrogação.	76
4.3	Dependência do deslocamento Doppler de segunda ordem como uma função da amplitude de modulação.	78
4.4	As franjas de Ramsey para as transições hiperfinas $m_F = -1$ e $m_F = 1$	80
4.5	Variação do deslocamento Zeeman de segunda ordem em função do tempo.	81
4.6	$\nu^{Ram}(m_F)$ e $\nu^{Rabi}(m_F)$ como função do subnível Zeeman, quando o campo magnético estático aplicado na região de interrogação for $B_0 = 20\mu T$. A não homogeneidade do campo pode ser determinado por meio da inclinação desta curva.	86
4.7	Representação esquemática da franja de Ramsey e do Pedestal de Rabi.	90
4.8	Deslocamento do pedestal de Rabi para as sete transições Zeeman como função de m_F . Observa-se o efeito correspondente ao "Cavity Pulling" para a transição $m_F = 0$	92
4.9	Representação esquemática do "Rabi Pulling".	93

4.10	Medidas do deslocamento entre a franja de Ramsey e o pedestal de Rabi para $B_0 = 20\mu T$	95
4.11	Medida do deslocamento entre o pedestal de Rabi e a franja de Ramsey para $B_0 = 30\mu T$	97
4.12	Visão geral no vale entre os pedestais das transições $m_F = -1$ e $m_F = 1$ e a transição de referência $m_F = 0$ para $B_0 = 20\mu T$	98
4.13	Visão geral no vale entre os pedestais das transições $m_F = -1$ e $m_F = 1$ e a transição de referência $m_F = 0$ para $B_0 = 30\mu T$	98
4.14	Visão geral no vale entre os pedestais das transições $m_F = -1$ e $m_F = 1$ e a transição de referência $m_F = 0$ para $B_0 = 40\mu T$	99
4.15	Curva típica da estabilidade obtida através da última avaliação feita após algumas mudanças como a determinação da potência ótima injetada na cavidade e a troca da fonte de alimentação do “ <i>C-field</i> ” por outro bem estável temporalmente.	104

Lista de Tabelas

3.1	Frequência de Rabi	66
4.1	Análise do Deslocamento do Pedestal de Rabi	95
4.2	Análise do Deslocamento do Pedestal de Rabi para $B=30\text{tT}$	96
4.3	Tabela de Incertezas I	101
4.4	Tabela de Incertezas II	101

Resumo

Em 1967, a definição do segundo passou a ser baseada nas propriedades atômicas dos átomos de ^{133}Cs . O instrumento utilizado para reproduzir esta definição é um relógio atômico. Neste trabalho iremos apresentar os progressos feitos no programa brasileiro de metrologia científica de tempo e frequência. A proposta deste trabalho de dissertação é a caracterização do nosso padrão. Nós estudaremos os deslocamentos presentes em um relógio atômico, como o efeito Zeeman Quadrático, $\Delta\nu/\nu_0 = 5,4 \times 10^{-13}$, o “Cavity Pulling”, $\Delta\nu/\nu_0 = 1,27 \times 10^{-13}$, e o “Rabi Pulling”, $\Delta\nu/\nu_0 = 1,3 \times 10^{-13}$, entre outros, que são induzidas na frequência hiperfina do césio. Os resultados obtidos neste trabalho podem ser resumidos da seguinte forma: uma incerteza global de $1,44 \times 10^{-12}$ e uma estabilidade a curto prazo dada pela raiz quadrada da variância de Allan $1,8 \times 10^{-10} \tau^{-0,5}$. Estes resultados foram medidos após as seguintes mudanças efetuadas em nosso padrão: determinamos a potência ótima injetada na cavidade afim de aumentar o sinal e assegurar que os átomos sofram uma transição $\pi/2$; melhoramos o controle do campo magnético estático aplicado ao longo da cavidade de interrogação resultando em um campo magnético mais homogêneo; e, diminuimos a temperatura de operação do forno do relógio tal que a velocidade média dos átomos presente no feixe atômico diminui significativamente. Todas estas mudanças resultaram no ganho de uma ordem de grandeza na acurácia e na estabilidade de nosso relógio.

Abstract

Since 1967, the definition of the second is based on the atomic properties of the ^{133}Cs atom. The device that realises this definition is an atomic clock. In this work, we present the progress made in the last year on Brazilian scientific time and frequency program. The aim of this dissertation work is the characterization of our standard. We report the major shifts present in our atomic clock due to Quadratic Zeeman effect, $\Delta\nu/\nu_0 = 5,4 \times 10^{-13}$, Cavity Pulling, $\Delta\nu/\nu_0 = 1,27 \times 10^{-13}$, Rabi Pulling, $\Delta\nu/\nu_0 = 1,3 \times 10^{-13}$ and other ones, which induced a shift in the hyperfine levels frequency of the performances: a global uncertainty of $1,44 \times 10^{-12}$ and a short term stability of $1,8 \times 10^{-10} \tau^{-0,5}$. The results were obtained after these changes: we have determined the optimum microwave power injected into the cavity in order to increase the signal and assure that the atoms suffer a $\pi/2$ pulse; we have also minimized the field inhomogeneity by improving the control of the static magnetic field along the interaction region; we have decreased the temperature of the clock oven in order to obtain a slower atomic beam. All these changes have increased our accuracy and our stability of about one order.

Capítulo 1

Introdução

Os primeiros relógios construídos pelo homem foram os relógios de Sol, onde um pequeno bastão era fincado no solo para observar o movimento de sua sombra desde o nascer até o pôr do Sol. Este relógio dividia o dia em duas partes apenas: manhã e tarde. A divisão era marcada ao meio dia, quando não se observava sombra alguma. Conforme as sociedades foram se organizando, o homem sentiu a necessidade de dividir o seu dia em partes menores que tornaram-se as horas, minutos e segundos. Desta forma, outros mecanismos para se medir o tempo foram surgindo para que fosse possível marcar a passagem do tempo quando não houvesse Sol. Estes relógios mecânicos secundários precisavam ser calibrados baseados em um padrão primário de tempo. Assim, o Sol foi adotado como um "Relógio Mestre" servindo de referência primária para qualquer outro contador mecânico. Durante anos foram desenvolvidos diversos tipos de relógios baseados nas diferentes medidas de passagem do tempo. Entre eles, podemos citar os relógios de água e a ampulheta. No entanto, estes relógios não usavam nenhuma técnica mais apurada para marcar a passagem do tempo de maneira precisa. Os avanços mais significativos ocorreram na época renascentista (séc. XV), onde exploradores navegavam para o alto mar em busca de tesouros, especialmente de especiarias. Tal feito dos navegantes exigia um conhecimento acurado de suas posições, como a latitude e a longitude. A latitude era medida com grande precisão usando-se um sextante, mas a longitude era mais difícil determinar de forma precisa. Com efeito, diversas teorias surgiram, mas o primeiro autor conhecido que propôs o uso de relógios para determinar a longitude no mar foi Gemma Frisius em seu trabalho “De Principiis Astronomiae Cosmographicae”, publicado em Louvain em 1530 [1]. Assim, soluções teóricas foram encontradas, mas o problema prático de encontrar a longitude no mar e em terra tornou-se mais urgente na medida em que as viagens marítimas tornaram-se mais freqüentes e as nações começaram a depender das especiarias vindas da Índia.

Para estimular a busca de relógios mais precisos, o governo britânico anunciou em 1713 o Desafio da Longitude. Assim, aquele que conseguisse construir um cronômetro que pudesse servir para determinar a longitude com meio grau precisão, ganharia um prêmio de £20.000. Após quarenta anos de tal anúncio, um artesão, John Harrison, conseguiu desenvolver um crômetro marinho com todas as especificações para ser levado ao mar.

Com bons instrumentos de medida, os navegadores necessitavam sincronizar os seus cronômetros a um relógio central. Assim, em outubro de 1884, quarenta e um delegados

de vinte e quatro países se reuniram em Washington para a Conferência Internacional do Meridiano. Nessa conferência o meridiano que passa pelo centro do Observatório de Greenwich foi adotado como o meridiano zero para a longitude. Exatamente às 13 h, observava-se uma bola cair de uma torre do Observatório e este novo padrão mundial do tempo ficou conhecido como Greenwich Mean Time. Por séculos o dia solar médio serviu como nossa unidade de tempo.

Já era conhecido que a manufatura de produtos tecnológicos, avanços nas redes de comunicação e a navegação dependiam da existência de instrumentos de medida precisos. Assim, junto com a revolução industrial, a demanda pela uniformidade nos padrões de medida cresceu e, em consêquência disto, no final do século XIX e início do século XX, os países industrializados criaram laboratórios nacionais que fornecessem este tipo de serviço. Entre os principais institutos podemos citar o Physikalisch-Technische Reichsansalt (PTB - Berlim), fundado em 1887, o National Physical Laboratory (NPL - Teddington), em 1899, e o National Bureau of Standards (NBS - Washington), em 1901. Precedendo o estabelecimento destes institutos, fundou-se um centro internacional de metrologia, o Bureau International de Poids e Mesures (BIPM), em 1875 na Convenção do Metro em Paris. A função do BIPM era assumir a uniformidade e a fidedignidade dos sistemas internacionais de medida. Em 1912, no French Bureau des Longitudes, uma conferência internacional considerou a unificação mundial do padrão de medida do tempo e desse modo criou-se uma organização internacional. A partir daí ficou conhecido como o Bureau International de l'Heure (BIH) e foi estabelecido em bases internacionais somente em 1 Janeiro de 1920. Desde então, a principal atividade do BIH foi estabelecer e distribuir a escala internacional do tempo, baseada em observações astronômicas da rotação da Terra. Mas, infelizmente, o período de rotação da Terra é irregular e cresce ligeiramente de ano a ano. Em 1956, a União Astronômica Internacional e o Comitê Internacional de Pesos e Medidas recomendaram adotar o Tempo Ephemeris, baseado no movimento orbital terrestre em torno do Sol, como referência mais acurada e estável para definir o tempo. Quatro anos após a recomendação das duas organizações, a Conferência Geral de Pesos e Medidas adotou o Tempo Ephemeris como padrão mundial do tempo.

O “segundo” é uma grandeza física primária, que assim como as outras grandezas fundamentais está sob a égide da Convenção Geral de Pesos e Medidas. Dentre as grandezas básicas, como o metro, a massa e a temperatura, o segundo é aquela medida com melhor precisão. Para medirmos o tempo, é necessário haver um instrumento de medida que seja capaz de contar intervalos de tempo periódicos como é o caso do relógio. Como eles possuem uma frequência estável, é possível usá-los em diversas aplicações tecnológicas, metrológicas e científicas.

A unidade de comprimento, está diretamente ligada à unidade de tempo e conseqüentemente a uma medida de frequência. Atualmente o metro é definido como *o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo de $1/299\,792\,458$ segundos [2]*. Além disso os padrões de frequência atômicos são largamente utilizados por empresas de telefonia, transmissão de sinais de televisão, satélites e em estudos de física básica como o estabelecimento das leis da relatividade geral.

Com o avanço nas pesquisa em física atômica, observou-se que as frequências derivadas de transições ressonantes de átomos e moléculas oferecem importante vantagem sobre os osciladores macroscópicos. Qualquer transição não perturbada é idêntica de átomo a átomo, tal que dois relógios baseados na mesma transição podem gerar a mesma frequência e não alteram suas propriedades com o tempo. Estas características eram bastante

apreciadas por Kelvin, que sugeriu usar as transições do hidrogênio como um oscilador de um relógio atômico. O primeiro relógio atômico foi desenvolvido em 1949 por Harold Lyons da NBS, e foi baseado nas moléculas de amônia [3]. Em meados da década de 50, Louis Essen e John Parry [4] do Laboratório Nacional Britânico de Física fizeram mudanças significativas nos relógios atômicos de césio tornando-o mais estável. Assim, em 1967, na 13ª Conferência Geral de Pesos e Medidas o segundo foi baseado na transição hiperfina do átomo de césio.

“ O segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos correspondentes a transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de ^{133}Cs . ” [5]

Quando esta definição foi adotada, a escolha pelos átomos de césio apresentava diversas vantagens e que continuam sendo levadas em consideração até hoje:

- 1) Os átomos de césio são encontrados em abundância na sua forma natural, além de sua pureza isotópica a tornar um átomo fácil de ser utilizado e manuseado;
- 2) A sua frequência de ressonância da transição hiperfina é bastante elevada tal que seu fator de qualidade atômico seja alta ($\sim 10^7$), o que favorece a acurácia e a estabilidade do relógio;
- 3) Como os átomos de césio possuem a pressão de vapor elevada a temperatura ambiente, é possível conseguir feixes atômicos deste elemento com velocidade relativamente baixa em um jato térmico ($\sim 200\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Após a redefinição da unidade do tempo do sistema internacional, SI, em termos da frequência de transição hiperfina do estado fundamental do átomo de ^{133}Cs , a escala temporal do BIH era fornecida por diversos relógios atômicos de sete laboratórios cadastrados. Esta escala temporal foi denominada, em 1970, de Temps Atomic International (TAI) ou Tempo Atômico Internacional. Atualmente é o BIPM quem estabelece o TAI e cuida de sua dissiminação juntamente com o UTC (Coordinated Universal Time).

Os primeiros relógios atômicos de césio utilizavam seleção magnética para escolher os átomos nos estados hiperfinos $F = 4, m_F = 0$ e $F = 3, m_F = 0$ [3]. Embora simples e robustos, estes relógios atômicos possuíam baixa acurácia e estabilidade em razão da ineficiente seleção de estados. Novas técnicas foram criadas para aumentar a estabilidade dos relógios atômicos. Uma das grandes inovações na construção de um padrão de frequência, foi a substituição de uma cavidade de interrogação, como a proposta por *Rabi et al* [6], para uma cavidade com duas zonas de interação, também conhecida como cavidade de Ramsey [7]. Outro desenvolvimento essencial aos relógios atômicos surgiu com o advento do laser e a boa compreensão da manipulação populacional dos níveis atômicos pelo processo de bombeamento óptico resultado dos estudos de Kastler, em 1950 [8]. A partir daí foram criados os relógios operados a luz, tanto para seleção dos átomos quanto para a detecção. Nos relógios atômicos de césio esta técnica só foi introduzida em 1970, com o advento dos lasers de estado sólido [4]. Os relógios ópticamente operados mostraram-se superiores aqueles que funcionam a seleção magnética. Isso deve-se à possibilidade de bombearmos os átomos que saem do forno no nível indesejado para o nível apropriado, aumentando-se o número de átomos que interagem com a cavidade de interrogação. Por outro lado, a distribuição de velocidade dos átomos que participam do processo é bem mais alargada que no caso da seleção magnética, em que os átomos mais rápidos são desviados e não interagem com a radiação. Com o surgimento das técnicas de manipulação e aprisionamento atômico [3], passou-se a ter amostras de átomos à baixa temperatura ($\sim \mu\text{K}$). Esse fato tornou viável a proposta

de Jerrold Zacharias em 1950 [4], para criar um chafariz de átomos “atomic fountain”, em que o tempo entre duas interações é bem mais longo do que em um relógio atômico a feixe convencional. Isto implica em um ganho na acurácia do relógio. Esses relógios hoje constituem os padrões de frequência mais estáveis e acurados que se pode ter.

O surgimento de fibras ópticas com cavidade interna e o desenvolvimento de lasers de femtosegundos, permitiram o desenvolvimento de uma nova geração de padrões de frequência atômicos funcionando em regime ótico. Estes são os padrões de frequência ópticos e sua principal vantagem sobre os padrões de microonda é a sua alta frequência de operação. Desta forma, a estabilidade de frequência ganha algumas ordens de magnitude maiores. Dentre estes podemos citar as mais comuns como a referência 657 nm (457 THz) [9], usando uma armadilha magneto-ótica de átomos de Cálcio e uma outra referência é a linha 282 nm (1064 THz) baseada num único íon Hg^+ confinado em uma armadilha de Paul [10]. O panorama atual dos padrões de frequência torna realidade testes de física fundamental, como a validade da teoria da relatividade geral de Einstein ou ainda a validade da constante α . Esses testes podem vir a revolucionar os pilares da ciência do século XX.

Atualmente diversos países dominam a tecnologia envolvida na construção dos padrões de frequência atômica. Nos últimos anos vimos concentrando esforços para desenvolver metrologia científica de tempo e frequência, com vistas à inclusão do nosso país no conjunto daqueles que são detentores desta tecnologia. O passo inicial foi dado em 1998, quando o então Grupo de Óptica do Instituto de Física de São Carlos, e o atual CePOF (Centro de Pesquisa em Óptica e Fotônica), deram início a construção do primeiro relógio atômico a feixe térmico de ^{133}Cs da América Latina. Este é operado a laser, baseado no bombeamento e detecção de fluorescência. O passo seguinte foi a construção de um relógio tipo chafariz, que está em vias de entrar em operação. Além dos padrões primários de frequência, também há um padrão secundário de tempo e frequência, projeto este desenvolvido pelo CePOF da Universidade de Campinas. O padrão de frequência óptico é baseado no aprisionamento magnético óptico dos átomos de Cálcio e está em fase final de construção [11].

Nosso propósito para este trabalho de mestrado é caracterizar o nosso relógio atômico a feixe térmico. Discutiremos o seu princípio de funcionamento bem como os efeitos que mascaram a frequência atômica. Uma avaliação da estabilidade e da acurácia será apresentada para alguns dos deslocamentos de frequência característicos do nosso relógio atômico estudados durante este último ano. A seguir apresentaremos como foi feita a divisão desta dissertação:

No Capítulo 2 abodaremos as características gerais dos padrões de frequência e definiremos as grandezas que caracterizam a sua performance (como a estabilidade e a extatidão). A seguir, explicaremos o princípio de funcionamento de um padrão de frequência atômico tipo feixe térmico. Por fim, descreveremos o sistema experimental que constitui o nosso relógio atômico.

O capítulo 3 abordará a física que envolve um relógio atômico. Para isso analisaremos a franja de Ramsey e o pedestal de Rabi que é o sinal característico de um relógio atômico tipo feixe. Utilizaremos três métodos diferentes para determinar a probabilidade de Ramsey. Primeiramente utilizaremos a teoria de matrizes densidades descrito por Audoin em [12]. Em seguida, faremos uma comparação entre a transição de Ramsey com um interferômetro quântico e por fim daremos uma interpretação geométrica simples das franjas de Ramsey por meio da teoria do spin fictício.

No Capítulo 4 nos propomos a estudar os efeitos que deslocam a frequência de transição relógio. Começaremos fazendo um estudo teórico destes efeitos sistemáticos para então descrevermos os métodos de medidas usados na medição de cada um destes que mascaram a frequência de transição. Começaremos descrevendo os deslocamentos de frequência relativísticos, como o efeito Doppler de segunda ordem e o efeito gravitacional. Uma fonte de erro estudada deve-se ao fato de os átomos não estarem isolados, mas sofrerem um deslocamento devido a um campo magnético constante aplicado aos átomos ao longo de toda região de interação. Outro efeito bastante comum são os efeitos relacionados com a radiação, como os deslocamentos de frequência em razão da variação na amplitude do campo eletromagnético dentro da cavidade. Este efeito é conhecido como “Cavity Pulling”. E por último, estudaremos o efeito do “Rabi Pulling”, que é originado devido a superposição dos contornos das linhas correspondentes às transições adjacentes à transição relógio. Por fim, será apresentada a tabela de incertezas e as medidas da estabilidade a longo prazo que caracterizam o nosso padrão.

Capítulo 2

Generalidades sobre Relógios Atômicos

2.1 Características dos Relógios Atômicos

2.1.1 Introdução

Os níveis de energia de um átomo são quantizados e a diferença de energia que separa os seus níveis é muito bem definida. A transição entre dois níveis E_1 e E_2 ($E_2 > E_1$) ocorre quando os átomos absorvem ou emitem um fóton de radiação eletromagnética de frequência ν_0 dada pela relação de Bohr [13]

$$h\nu_0 = E_2 - E_1 \quad (2.1)$$

onde h é a constante de Planck. Assim, é possível observar uma ressonância de largura $\delta\nu_0$. Esta largura é determinada pela incerteza de Heisenberg

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2\pi} \quad (2.2)$$

onde Δt é a duração prática da observação de uma transição.

O princípio de funcionamento dos padrões de frequência atômicos passivos está baseado na estabilização da frequência ν de um oscilador local na frequência de Bohr ν_0 de um átomo de referência. O sinal de saída de um relógio atômico, aquele que participa da realização da escala de tempo do Tempo Atômico Internacional, TAI, é o sinal liberado pelo oscilador local escravizado pela transição atômica. Este princípio está ilustrado na figura 2.1.

Em 1967, na Conferência Geral de Pesos e Medidas optou-se pelos átomos de césio para definir o segundo. A partir de então, o segundo passou a ser definido como “a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente a transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133” [5]. Esta transição envolve os seguintes estados:

Figura 2.1: Princípio de funcionamento de um relógio atômico passivo. A frequência ν de um oscilador local é estabilizada na frequência de Bohr ν_0 de um átomo de referência.

$$6S_{1/2} |F = 3, m_F = 0\rangle \longleftrightarrow 6S_{1/2} |F = 4, m_F = 0\rangle$$

e a frequência correspondente a esta diferença de energia, para o átomo não perturbado, é $\nu_0 = 9192631770 \text{ Hz}$. Os níveis de energia mais relevantes do átomo de ^{133}Cs estão ilustrados na figura 2.2.

Na prática, tal medida é realizada da seguinte maneira:

1. os átomos de césio passam por uma região de preparação, onde são preparados no estado E_1 , isto é, $6S_{1/2}, F = 3$ igualmente distribuídos em todos os subníveis Zeeman m_F ;
2. eles interagem com uma radiação eletromagnética constante de frequência ν durante o tempo t . Nesse intervalo o átomo transiciona para o estado E_2 , $6S_{1/2}, F = 4$ (esta região é conhecida como região de interação);
3. após a interação, medimos a taxa de transição atômica em função de ν . Observamos um pico de ressonância em torno de $\nu_0(1 + \varepsilon)$, onde ε é o deslocamento relativo da frequência devido às perturbações sofridas pelos átomos. A largura a meia-altura $\Delta\nu$ deste pico é inversamente proporcional ao tempo que os átomos passam dentro da cavidade $\Delta\nu = \frac{1}{2t}$. Assim, quanto maior for o tempo de observação t dos átomos na região de interrogação, melhor será a resolução espectral do sinal de saída do relógio atômico, ou seja, melhor será o fator de qualidade da linha $Q_l = \nu_0/\delta\nu$.

O sinal de ressonância produzido por um relógio atômico pode ser visto como um discriminador que é capaz de estabilizar a frequência ν do oscilador local escrito da seguinte forma

$$\nu(t) = \nu_0(t) (1 + \varepsilon + y(t)) \quad (2.3)$$

Nesta equação, ν_0 designa a frequência de ressonância de Bohr entre dois níveis da transição relógio do átomo não perturbado. A incerteza em ε representa a acurácia do

Figura 2.2: Diagrama dos níveis de energia do átomo de ^{133}Cs . A frequência relógio corresponde à transição hiperfina $6S_{1/2}, F = 3 \longleftrightarrow 6S_{1/2}, F = 4$ do estado fundamental.

relógio atômico, isto é, ela indica o quão bem conhecemos a frequência atômica frente aos efeitos que a perturbam e $y(t)$ representa as flutuações de frequência desse sinal, ambos em valores relativos. Estas flutuações determinam a estabilidade da frequência do relógio, ou seja, ela é interpretada como a capacidade do relógio em reproduzir a frequência média ao curso do tempo.

2.1.2 Estabilidade da Frequência de um Relógio Atômico

A estabilidade de um relógio é caracterizada pela sua capacidade em reproduzir a mesma frequência média ao longo do tempo. Em um relógio atômico esta frequência provém de um oscilador local que é discriminado pela referência atômica. As flutuações de frequência de um oscilador nas vizinhanças de sua frequência nominal resultam em perturbações devidas aos ruídos térmicos dos componentes, aos ruídos internos do ressonador que fornece a frequência de oscilação, à idade do instrumento e às variações das condições ambientais. Tais flutuações são denominadas de *instabilidades de frequência* [14].

As instabilidades de frequência podem ser distinguidas entre randômicas e sistemáticas. As flutuações randômicas só podem ser determinadas estatisticamente. As flutuações sistemáticas aparecem em função de parâmetros exteriores, como idade e variações de temperatura. A forma destas últimas flutuações não é bem conhecida *a priori*. Observa-se que estamos mais interessados nas flutuações randômicas face às sistemáticas, pois estas últimas, quando observáveis, são medidas e suprimidas.

Uma vez medidos, os efeitos sistemáticos podem ser subtraídos dos resultados e os dados residuais correspondem às flutuações randômicas. Estas podem ser melhor determinadas estatisticamente. No caso dos osciladores de precisão, as flutuações randômicas são melhor modeladas pela *lei da densidade espectral da potência* (“power law spectral density”).

O problema prático resume-se em como caracterizar as propriedades do sinal de saída de um oscilador real. Enquanto para um oscilador ideal, livre de qualquer ruído, o sinal de saída é uma função senoidal pura, um oscilador real, mesmo para os mais estáveis, é perturbado por processos indesejáveis, como os ruídos randômicos, deslocamentos devidos à idade do oscilador e/ou efeitos térmicos. Desta forma, a estabilidade de um relógio é muitas vezes caracterizada por deslocamentos dados pelas flutuações de frequência. No estudo da estabilidade de um relógio atômico, os ruídos de interesse são os de baixa frequência. Isto ocorre nos casos por exemplo, quando a densidade espectral de potência é do tipo $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$ com $\alpha \leq 1$. A vantagem da lei de densidade espectral de potência é que todos os tipos de ruídos de frequência usualmente encontrados em um padrão de frequência obedecem a uma combinação linear do tipo [15]

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_\alpha f^\alpha$$

Desta forma, D. Allan [16] introduziu um tipo de variância calculada como descreveremos a seguir. Vamos definir um conjunto de K instantes sucessivos t_k separados

Figura 2.3: Sinal aleatório na medida da Variância de Allan.

de τ . Definiremos também, y_k como os valores médios sucessivos das flutuações relativas de frequência e $y(t)$ como os intervalos sucessivos $t \in [t_k, t_{k+1}]$ de duração τ , conforme mostra a figura 2.3

$$y_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} y(t) dt \quad (2.4)$$

e a variância de Allan $\sigma_y^2(\tau)$ é definida como:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{2} \langle (y_{k+1} - y_k)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{k+1} - y_k)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde o fator dois aparece pois estamos calculando a variância a partir da diferença entre duas medidas consecutivas y_k e y_{k+1} . Finalmente, $\sigma_y(t)$ é denominado *estabilidade de frequência do relógio*. A variância de Allan é de grande utilidade prática, pois ela existe para todas as leis de densidade espectral de potência dadas acima. Além disso, a curva de $\sigma_y(t)$, em escala log-log, é linear, e para cada potência α , a inclinação da curva é diferente, como mostra a figura 2.4. O ruído comum encontrado nos relógios atômicos de Cs é o ruído branco e, conseqüentemente, a inclinação da curva de $\sigma_y(\tau)$ cai com $\tau^{-1/2}$. Para um relógio atômico tipo feixe térmico operando em condições normais, a estabilidade $\sigma_y(\tau)$ depende fortemente da razão sinal-ruído, S/R, para um tempo de integração t_c . Esta dependência tem a seguinte forma [17]:

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{Q_{at}} \frac{1}{S/R} \sqrt{\frac{t_c}{\tau}} \quad (2.6)$$

onde τ é o tempo de amostragem, Q_{at} é o fator de qualidade da ressonância atômica e π é característico da interrogação de Ramsey. Da equação (2.6) observamos que quanto maior a razão sinal-ruído melhor será a estabilidade $\sigma_y(\tau)$.

Figura 2.4: Esquema gráfico da Variância de Allan típica ressaltando o tipo de ruído característico de cada região.

Os ruídos na detecção óptica e os ruídos provenientes do laser podem deteriorar a relação sinal-ruído do relógio. Entre eles podemos citar o “atomic shot-noise”, o ruído do próprio detetor, a eficiência do bombeamento óptico e as flutuações de frequência do laser.

O “atomic shot-noise” está associado às variações do fluxo do feixe atômico que realmente contribuem com o sinal relógio. Essa flutuação é proporcional à raiz quadrada do número de átomos detectados. Este tipo de ruído depende muito da eficiência do nosso bombeamento óptico na região de preparação. Se todos os átomos foram bombeados para o estado $F = 3$, o efeito das flutuações se anula, caso contrário haverá um ruído devido a um sinal de fundo na região de detecção originário daqueles átomos que não foram bombeados na primeira zona de interação óptica do relógio.

Outro fator que pode degradar a relação S/R é o próprio sistema de detecção. Em nossa detecção usamos um fotodiodo, e o seu sinal $s_\tau(t)$ no instante t vale[18]

$$s_\tau = \int_0^{+\infty} si_\tau(t) dt, \text{ onde}$$

$$si_\tau(t) = \frac{n_\tau(t)}{2} \cdot \gamma \cdot ef \cdot g \quad (2.7)$$

Pela equação (2.7), observamos que o sinal do fotodiodo depende de $n_\tau(t)$, o número de átomos que interagem com o laser em um instante t , e ela depende da forma do feixe e da velocidade média dos átomos. Além disso, a equação (2.7) também depende de γ , que é o número de fóton da emissão espontânea detectado por segundo e por átomo. Este fator depende das flutuações de potência e frequência do laser. ef é a eficiência da coleção de fótons sobre o fotodiodo, ou seja, depende da colimação ótica dos fótons emitidos pelos átomos sobre o detector. Finalmente g é o ganho do sistema de detecção e depende do ruído gerado pelo conjunto fotodiodo mais amplificador.

A degradação do sinal de detecção também depende dos ruídos na frequência do laser. O número de fótons emitidos por átomo e por segundo dependem da frequência do laser. As flutuações de frequência do laser mudam a estatística dos fótons emitidos por átomo. Desta forma, o termo γ na equação (2.7) está relacionado com a dessintonia entre a frequência do laser, ν_{laser} , e a frequência de ressonância atômica, ν_0 , ($\lambda = 852nm$). Se a frequência do laser flutua em torno do valor ν_0 , observaremos flutuações no valor de γ , e, conseqüentemente, na intensidade do sinal detectado no fotodiodo.

Uma outra categoria que pode gerar as flutuações de frequência do sinal relógio são os ruídos brancos da frequência do oscilador de interrogação. No entanto, o ciclo de escravização do oscilador na frequência de transição atômica compensa as flutuações deste oscilador. Assim, a curto prazo, a estabilidade do nosso relógio atômico a feixe térmico de ^{133}Cs é limitado pela estabilidade de nosso oscilador, $\sigma_y(t) \simeq 10^{-10}\tau^{-1/2}$, mas, devido a escravização deste oscilador, as suas flutuações de frequência são corrigidas a cada segundo, e após um dia de medida ($\tau = 86400s$), o deslocamento das variações relativas de frequência do sinal do relógio caem para $\sim 3.4 \times 10^{-13}$.

2.1.3 Estudo da Exatidão de um Relógio Atômico

Na equação (2.3), ε representa o deslocamento, em valor relativo, da frequência do sinal produzido por um relógio, com relação à frequência de Bohr da transição atômica do átomo não perturbado, ν_0 . A origem deste tipo de deslocamento advém de medirmos a frequência de transição do átomo que é perturbado de maneira determinística quando ele é interrogado e que usualmente chamamos de efeitos sistemáticos. Na entanto é importante conhecermos bem estes erros e minimizarmos seu efeito. Desta forma, chamamos de exatidão a incerteza em relação à medida de ε [15].

Este tipo de incerteza, em que efeitos sistemáticos deslocam a frequência de ressonância do átomo, é denominada de incerteza do tipo B, sendo que a incerteza estatística de uma medida, descrita na seção anterior, é denominada de incerteza do tipo A.

As maiores fontes de incerteza na medida da frequência de um relógio a feixe são: diferença de fase do campo de microondas entre as duas cavidades de interrogação de Ramsey, efeito Zeeman quadrático, efeito Doppler de segunda ordem, radiação de corpo negro, “Rabi Pulling” e o “Cavity Pulling”.

Além das fontes de incerteza mencionadas anteriormente, há ainda grande número de outros efeitos que podem deslocar a frequência de transição de um relógio. No entanto, eles não constituem um limitante para o relógio atômico. As principais fontes de incerteza são citadas logo abaixo:

- o vazamento de microonda é prejudicial para a medida onde ela é vista pelos átomos deslocados por efeito Doppler. Seu efeito é proporcional à v ;
- a dessintonia da cavidade com relação à assimetria da potência de microondas “vista” pelos átomos (“cavity pulling”, proporcional a $(Q_{cav}/Q_{at})^2$ para um número pequeno de átomos);
- uma diferença da frequência de transição entre a zona livre de radiação oscilatória e as zonas de interação. Tais efeitos podem ser devidos às inomogeneidades do campo magnético estático;

- o potencial gravitacional desloca a frequência do relógio devido a curvatura do espaço-tempo prevista na relatividade geral. O segundo é definido na posição do geóide e o deslocamento relativo de frequência é $1,1 \times 10^{-16}$ por metro de distância do geóide.

No Cap. 4, descreveremos estes efeitos sistemáticos e o método experimental utilizado para medir tais efeitos.

2.2 Princípio de Funcionamento do Relógio Atômico a Feixe Térmico de ^{133}Cs

O relógio atômico do CePOF consiste em um padrão de frequência a feixe de ^{133}Cs e é operado opticamente. O feixe atômico é gerado por um forno efusivo. Nele, os átomos emergem em dois estados quânticos, $6S_{1/2}, F = 3$ e $6S_{1/2}, F = 4$. Ao saírem do forno, os átomos de ^{133}Cs são preparados opticamente no estado $6S_{1/2}, F = 3$. O bombeio óptico é feito usando-se um feixe laser ressonante com a transição $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$, perpendicular ao feixe atômico. Na verdade temos uma onda estacionária ortogonal ao feixe atômico. O feixe laser é retrorefletido formando uma onda estacionária a fim de evitar que os átomos sejam empurrados. A seguir, os átomos passam por uma cavidade de interrogação que chamamos de cavidade de Ramsey. Este tipo de cavidade tem o formato de um U invertido, tal que os átomos interagem duas vezes com a radiação oscilatória nas regiões separadas espacialmente. Esta é alimentada por um gerador de 9,192631770 GHz. A frequência injetada é modulada a 360 Hz em torno do valor central. Ao longo da cavidade há uma bobina que gera um campo magnético estático de modo a definir o eixo de quantização atômico. O campo eletromagnético no interior da cavidade é perpendicular à direção de propagação atômica e paralelo ao campo magnético estático. Os átomos entram na cavidade no estado $F = 3$ e podem sair dela, após as duas interações no estado $F = 4$. Cada uma das zonas de interação tem 1 cm de comprimento e elas são separadas por uma região livre de microondas de 10 cm de comprimento. Após a passagem dos átomos pela cavidade de microondas, eles são detectados opticamente usando-se um segundo feixe de laser ressonante com a transição $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$. Um conjunto de coleção óptica focaliza a fluorescência emitida pelos átomos sobre um fotodiodo de Si e é enviado para o computador. O sinal obtido é uma função da frequência do sinal do gerador de microonda conhecido como franja de Ramsey. As franjas de Ramsey representam a probabilidade de transição entre os estados $F = 3$ e $F = 4$ com seus respectivos subníveis. A probabilidade de transição é medida à esquerda e à direita na meia largura e meia altura da franja central. A diferença entre as duas medidas constitui um sinal de erro que é reinjetado no gerador de modo a manter a frequência no máximo da ressonância atômica. A cada nova interação o gerador é corrigido e o erro é minimizado. A radiação de 9,192 GHz que alimenta a cavidade de microondas é gerada por um sintetizador construído pela equipe Dr. F. Walls (NIST, Boulder, USA). O sistema de controle é feito num ambiente de LabView implementado pelo nosso grupo. Além disso, um sistema auxiliar, composto de um

Figura 2.5: Diagrama com as partes do Relógio Atômico a Feixe Efusivo de Césio. O feixe atômico é preparado em um forno efusivo. Na região de preparação, os átomos são bombeados óticamente no estado $6S_{1/2}, F = 3$ (bolas vermelhas no diagrama). A seguir, eles passam pela cavidade de Ramsey. Após as duas interações com o campo de microondas, os átomos fazem a transição para o estado $6S_{1/2}, F = 4$ (bolas azuis no diagrama). Os átomos que sofreram a transição são detectados óticamente e a fluorescência emitida por eles é coletada e focalizada em um fotodiodo. Esta luz é enviada para um controle digital, que processa o sinal de erro e envia um sinal de correção ao sintetizador.

GPS (Model 9390-6000 Datum) e um relógio atômico comercial (Agilent 5071B) e um contador (SR620-Stanford) nos permitem avaliar constantemente a performance de nosso padrão. A figura 2.5 representa esquematicamente o corpo físico de um relógio a feixe térmico de ^{133}Cs . As suas dimensões são de 90 cm de comprimento e 20 cm de diâmetro pois trata-se de um cilindro.

2.2.1 Seleção Óptica dos Átomos

Na seção (2.1.2), vimos que a estabilidade $\sigma_y(\tau)$ depende fortemente da relação sinal-ruído, S/R. Um dos fatores que melhoram esta condição é uma eficiente preparação óptica dos átomos do feixe em um dos dois estados fundamentais do átomo de ^{133}Cs , $6S_{1/2}, F = 3$ e $6S_{1/2}, F = 4$. Em nosso padrão de frequência primário, um feixe efusivo de Cs é criado por um forno. A composição inicial dele está em equilíbrio térmico e conseqüentemente obedece à lei de Boltzmann [13]

$$\frac{N_{4,0} - N_{3,0}}{N_{3,0}} = \exp \left[-\frac{hf_0}{kT} \right] \quad (2.8)$$

Figura 2.6: Diagrama esquemático das transições envolvidas no bombeamento óptico.

onde k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta do forno. Para $T = 363\text{K}$, $\frac{(N_{4,0}-N_{3,0})}{N_{3,0}} = -1,21 \times 10^{-3}$, de modo que as populações entre os níveis estão em igualdade. Assim, se aumentarmos a população dos átomos para um dos dois estados, podemos aumentar o sinal da ressonância para um fator da ordem de 10^3 em relação à situação de equilíbrio térmico.

Desta forma, implementamos uma região de preparação atômica entre o forno e a região de interação da microonda. Em nosso caso, esta repopulação é feita por um laser ressonante com a transição $6S_{1/2} F = 4 \rightarrow 6P_{3/2} F' = 4$, conforme indicado na figura 2.6. Os átomos que estiverem em $6S_{1/2} F = 4$ interagem com os fótons desse laser e transitam para o estado excitado $6P_{3/2} F' = 4$. Uma vez no estado excitado, os átomos decaem espontaneamente para um dos dois níveis do estado fundamental, $F = 3$ ou $F = 4$. Após vários ciclos de absorção-emissão, depopulamos o nível energético $6S_{1/2} F = 4$ dos átomos em favor do $6S_{1/2} F = 3$, igualmente distribuídos entre os sete subníveis Zeeman. A figura 2.6 mostra o diagrama de energia com as transições envolvidas no bombeamento óptico.

2.2.2 Princípio de Interrogação de Ramsey

A figura 2.7 ilustra o método para interrogar os átomos. O método utilizado foi proposto primeiramente por N. Ramsey em 1950 [19] com dois campos oscilatórios separados espacialmente por uma região livre de uma perturbação oscilatória.

Inicialmente preparamos os átomos em um dos dois estados hiperfinos da transição relógio (digamos $|3\rangle$). Em seguida eles são interrogados por um campo de microonda de frequência ν , durante um tempo τ , pelo método de interrogação de Ramsey. Desta

Figura 2.7: Princípio de interrogação de Ramsey

forma, os átomos entram na primeira região de interação em $t = 0$ e interagem com a radiação do campo de microonda de frequência ν , durante um tempo τ . Em $t = \tau$, eles passam por uma região livre de microonda e o seu estado quântico interno evolui livremente durante o intervalo de tempo T . Finalmente, no instante de tempo $\tau + T$, os átomos interagem novamente com a radiação de microondas. O processo de interrogação de Ramsey está ilustrado na figura 2.7. Durante estas duas etapas os átomos são acoplados efetivamente a um campo de microondas por um instante de tempo τ , sentindo um pulso $\pi/2$ em cada uma das regiões de interação, enquanto que no intervalo de tempo T , com $\tau \ll T$, os átomos não estão acoplados a um campo oscilatório. Na saída desta região de interrogação, e nas condições ótimas de frequência e potência do campo de interrogação que maximizam a probabilidade de transição, os átomos transicionam para o estado $|4\rangle$. Ao longo da região de interação, paralelo ao campo magnético oscilante da microonda, há um campo magnético estático. Este campo magnético estático é, no jargão da área, denominado de “*C-field*” e tem por função levantar a degenerescência dos níveis hiperfinos do estado fundamental. Um sistema de detecção mede a população do estado atômico na saída da segunda região de interrogação e permite medir a probabilidade de transição [19].

A assinatura característica de um relógio atômico é a probabilidade de transição em função da dessintonia da frequência do oscilador de interrogação em relação à transição atômica, $\Delta\nu = \nu - \nu_{at}$, centrado em $\Delta\nu = 0$. A largura a meia altura da franja central vale $\Delta\nu = 1/2T$, chamado de franja de Ramsey, como indica a figura 2.8. Desta forma, observamos que, quanto maior a duração do tempo dispendido entre as regiões de interação, menor será a largura a meia altura da franja central, além da inclinação da franja central ser mais elevada. Tal inclinação representa a sensibilidade com que os átomos discriminam a frequência que os interroga. Para uma inclinação fixa, o relógio possui uma performance melhor para resolver uma fração cada vez mais ínfima que é inversamente proporcional ao fator de qualidade da ressonância, $Q_{at} = \frac{\nu_{at}}{\Delta\nu}$.

É interessante escolhermos átomos cuja frequência de transição atômica, ν_{at} , seja a maior possível, tal que possamos obter a melhor performance possível. Contudo a definição do segundo é baseada nos átomos de Cs. Desta forma, para aumentarmos a resolução dos relógios atômicos, é necessário aumentarmos o tempo T , isto é, o tempo dispendido pelo átomo entre as cavidades. Em 1953, Zacharias propôs que colocássemos o feixe atômico na direção vertical [20]. Com o advento das técnicas de resfriamento e aprisionamento de átomos, foi possível realizar com sucesso a proposição de Zacharias, originando o que se conhece atualmente como “atomic fountain” relógio atômico tipo chafariz [21][22]. Neste método, os átomos são inicialmente resfriados para em seguida serem lançados para cima, onde interagem com um campo oscilatório. Os átomos seguem por uma região livre de radiação oscilatória e, influenciados pela gravidade terrestre, são desacelerados e caem interagindo uma segunda vez com a radiação. Como os átomos inicialmente foram aprisionados, a velocidade média dos átomos no feixe é da ordem de alguns m/s, tal que os átomos possam passar muito mais tempo na região de vôo livre. Atualmente nosso grupo já possui um relógio atômico tipo chafariz e estamos na eminência de efetuar o primeiro lançamento atômico.

Nos relógios atômicos a jato térmico de Cs do CePOF, a velocidade atômica média é de 200 ms^{-1} , o comprimento da região de vôo livre é de 0,108m e a duração do tempo de vôo livre é limitada por $5,46 \times 10^{-4} \text{ s}$. Para estes valores, a largura da franja central é dada por 915 Hz e o fator de qualidade para o nosso relógio atômico a feixe térmico de Cs é da ordem de $1,1 \times 10^7$. Em um chafariz atômico de 30 cm de altura, com uma velocidade de $2,5 \text{ ms}^{-1}$, a duração do vôo livre é de 0,5 s, tal que a largura da franja central de Ramsey a meia altura é de 1 Hz e o fator de qualidade é da ordem $\sim 10^9$, ou seja, ela será duas ordens de grandeza maior que no relógio a feixe térmico. Conseqüentemente, os deslocamentos de frequência que dependem do Q_{at} são fortemente reduzidos, como é o caso da dessintonia de frequência na cavidade ressonante que varia com Q_{at}^{-2} . Além disso, a estabilidade $\sigma_y(\tau)$ também reduzirá de duas ordens de grandezas, pois além de depender do inverso da raiz quadrada do tempo de amostragem e da relação sinal ruído como mostra a equação (2.6), a estabilidade tem a seguinte dependência

$$\sigma_y(\tau) \sim \frac{1}{Q_{at}}$$

Isto corresponderá a uma instabilidade após um dia de medida da ordem 10^{-16} . Outro fator importante, favorável nos relógio atômico a átomos frios de ^{133}Cs , é a baixa velocidade do feixe atômico. Assim, os deslocamentos de frequência que dependem da velocidade dos átomos, como é o caso do efeito Doppler de segunda ordem que depende de v^2 , diminuem de um fator de $(100)^2$ num chafariz atômico.

2.2.3 Detecção

A detecção dos átomos também é feita opticamente, medindo-se as populações $N_{|3\rangle}$ e $N_{|4\rangle}$ dos dois níveis da transição relógio, $|F=3, m_F=0\rangle$ e $|F=4, m_F=0\rangle$. Assim, a probabilidade de transição que medimos é dada por [15]

Figura 2.8: Franja de Ramsey

$$P = \frac{N_{|4\rangle}}{N_{|3\rangle} + N_{|4\rangle}} \quad (2.9)$$

Um feixe laser ressonante com a transição $6S_{1/2} \text{ } F = 4 \longleftrightarrow 6S_{1/2} \text{ } F' = 5$ é usado para medir a diferença populacional gerada após os átomos serem interrogados pelo método de Ramsey. Assim, somente os átomos que saírem da região de interrogação no estado $6S_{1/2} \text{ } F = 4$ absorverão os fótons desta radiação e decairão, emitindo radiação espontaneamente. Estes fótons são coletados por um sistema de coleção que focaliza a luz sobre um fotodiodo de Si. O sinal obtido é uma franja de Ramsey. A figura 2.8 mostra um exemplo típico de uma franja de Ramsey do relógio atômico a feixe térmico de Cs. As transições envolvidas no processo de detecção estão ilustradas na figura 2.9.

Na seção 2.3 descreveremos o método óptico utilizado para gerar tanto o feixe de bombeio como o de detecção.

2.2.4 Princípio da Escravização

O sinal de ressonância produzido por um relógio atômico pode ser visto como um discriminador que é capaz de estabilizar a frequência ν do oscilador local. Desta forma dizemos que a frequência ν do oscilador de interrogação é escravizada pela frequência de ressonância ν_0 do átomo interrogado.

Assim, o sinal da detecção é usado para controlar a cadeia de microonda que alimenta a cavidade de interrogação, figura 2.1. A frequência da cadeia de microonda é modulada em torno do pico da curva de ressonância. Para manter a frequência do gerador no

Figura 2.9: Diagrama esquemático das transições envolvidas na detecção dos átomos.

máximo de ressonância, medimos o sinal de erro que corrige a sua frequência através da probabilidade de transição a meia altura da franja central à esquerda e à direita. A diferença entre as duas medidas é o sinal de erro que é tratado e produz um sinal de correção para o gerador. O objetivo desta técnica é estabilizar a frequência do oscilador de quartzo na frequência de transição do ^{133}Cs . Após vários ciclos é possível aumentar a estabilidade do relógio. Para avaliarmos a performance do relógio a longo prazo, travamos a frequência do oscilador sobre a transição relógio e o comparamos com um relógio padrão (a descrição detalhada do método utilizado para fazermos a avaliação será feita no Cap. 4).

Na figura 2.10, ilustramos o espectro de ressonância do átomo de ^{133}Cs , com todos os seus sete subníveis Zeeman, obtidos com o nosso padrão primário de frequência. Nela estão indicadas as franjas de Ramsey sobrepostas aos pedestais de Rabi (o que será explicado detalhadamente no Cap. 3) das sete transições π possíveis. O pico central corresponde à transição $6S_{1/2}, F = 3, m_F = 0 \longleftrightarrow 6S_{1/2}, F = 4, m_F = 0$. O objetivo final é manter a cavidade de microndas travada no máximo desse pico, de modo que a frequência injetada na cavidade é tal que a probabilidade de transição atômica seja máxima.

Figura 2.10: Franja de Ramsey com as sete transições hiperfinas $\Delta m_F = 0$.

2.3 Descrição do Relógio Atômico a Feixe Efusivo de ^{133}Cs

O relógio atômico à feixe térmico foi construído há sete anos dando início ao programa Brasileiro de Metrologia de Tempo e Frequência. A descrição detalhada de sua construção pode ser encontrada nas duas dissertações [23] [24]. Nos últimos anos diversas mudanças foram operadas no sistema experimental com o intuito de aumentar a sua acurácia e estabilidade. Entre as mudanças efetuadas podemos citar a troca da fonte de alimentação do campo magnético estático. As bobinas que geram este campo eram alimentadas por uma fonte de corrente comercial Minnipa. Esta última não possui a estabilidade em corrente necessária para ser utilizada nos padrões de frequência cujas flutuações de campo deverão ser da ordem de 10^{-9} de modo que as flutuações de frequência sejam da ordem de 10^{-13} . Assim, construiu-se uma fonte de corrente estável cujas flutuações de corrente são bem baixas aumentando assim a estabilidade e a acurácia do nosso relógio. Nas figuras 2.11 e 2.12 o sinal do relógio medido antes e após a troca das fontes de alimentação do campo magnético estático. Observamos que antes da troca da fonte de corrente o sinal apresentava-se deformada e assimétrico.

Outra mudança efetuada foi na fonte de corrente que alimenta o laser de diodo. Para construí-la utilizamos componentes elétricos de precisão e estáveis em temperatura. Também mudamos o controle de corrente e temperatura do laser, bem como o controle de tensão do PZT. Estas mudanças foram essenciais para obtermos a estabilidade da frequência do laser em alguns dias.

Além das modificações acima mencionadas introduzimos um amplificador de potência de microondas na saída do sinal de 9 GHz do nosso sintetizador de frequência. Com isso foi possível determinar a potência ótima a ser injetada na cavidade, aumentando a

Figura 2.11: Franja de Ramsey medida quando uma fonte comercial Minnipa alimentava o campo magnético estático.

Figura 2.12: Franja de Ramsey medida com uma fonte de corrente estável.

intensidade do sinal em 10 vezes à situação anterior. Assim, asseguramos que os átomos sofram um pulso $\pi/2$ em cada um dos braços da cavidade e a inversão populacional dos átomos ao passarem pela cavidade de interrogação seja máxima e conseqüentemente melhoramos a relação sinal-ruído na região de detecção e por conseguinte na estabilidade do nosso relógio.

Também mudamos o controle de temperatura do forno. Para aquecê-lo utilizamos duas cintas térmicas, uma na região de colimação do forno e a outro no reservatório de Césio, ambas alimentadas por um variador de tensão. Com dois termopares posicionadas no colimador e uma no reservatório foi possível diminuir a temperatura de operação do forno, e conseqüentemente diminuir a distribuição de velocidade do feixe. Além disso, operando a temperaturas mais baixas, o número de átomos no feixe também diminui o que nos permite operar o relógio por um tempo mais longo sem que seja necessário efetuar a troca do reservatório de ^{133}Cs . Para não prejudicar a relação sinal-ruído do relógio devido a diminuição do número de átomos no feixe, a temperatura do forno foi determinada empiricamente para obtermos um sinal suficientemente grande sem que este esteja saturado.

As medidas dos diversos efeitos sistemáticos que deslocam a frequência de transição que define o segundo foram feitas nesta nova configuração. A seguir descreveremos o sistema experimental do relógio atômico como ele se apresenta atualmente.

2.3.1 A Câmara de Vácuo

A câmara de vácuo é formada por um tubo cilíndrico feito de aço inoxidável com 90 cm de comprimento e 20 cm de largura. Nela encontram-se o feixe de Cs, a cavidade de microondas, as bobinas para a produção do campo magnético estático, duas janelas por onde introduzimos a luz laser para o bombeio e o sistema de detecção [25]. Uma foto da nossa câmara de vácuo é mostrada na figura 2.13.

O aparato foi alinhado usando-se um laser de HeNe. O feixe laser passa por todo o sistema entrando numa extremidade do relógio e saindo na outra [23]. Utilizou-se preferencialmente este método a fim de obtermos um bom alinhamento entre o feixe atômico e a cavidade de microondas. Uma bomba turbo (170 l/s) e uma bomba iônico (20 l/s) mantêm a pressão abaixo de 10^{-5} Pa. A câmara foi revestida internamente com uma solução coloidal de grafite em água (DAG 600). Esta solução absorve o césio que não esteja no feixe efusivo e diminui a pressão do vapor de fundo da câmara. Esta foi uma importante melhoria feita na câmara de vácuo, pois o vácuo melhorou em uma ordem de grandeza, aumentando o livre caminho médio dos átomos do feixe e, conseqüentemente, melhorando a razão sinal-ruído (S/R) do sistema.

2.3.2 Forno

O forno é acoplado externamente à câmara de vácuo, a aproximadamente 21 cm da primeira cavidade de interrogação. Isto minimiza o calor gerado pelo forno e evita que

Figura 2.13: Vista frontal do relógio atômico a feixe térmico de ^{133}Cs do CePOF.

Figura 2.14: Esquema do forno.

um gradiente de temperatura seja produzido na cavidade. Um esquema do forno pode ser visto na figura 2.14.

Ele é constituído de duas partes: o reservatório de ^{133}Cs e o pescoço, que tem a função de colimar o feixe. O césio utilizado é o seu isótopo estável 133 e ele se apresenta na sua forma pura e metálica. Ela é manuseada em uma ampola fechada. Esta ampola é colocada no reservatório e após limparmos a câmara e fazermos vácuo nela quebramos a cápsula de Cs dentro do reservatório. Ao aquecemos o forno uma diferença de pressão é gerada entre o forno e a câmara de vácuo que impulsiona os átomos para fora do forno, gerando um feixe efusivo e uniforme. O forno é operado a 343 K no reservatório e a 372 K no pescoço. Estas temperaturas são controladas externamente. Para a colimação do feixe, utilizamos um tubo com 8.0 mm de diâmetro com um furo passante de 1 mm

diâmetro no centro. Quando aquecido, ele permite uma certa mobilidade, para que possamos melhorar o alinhamento do feixe com a cavidade e aumentarmos o número de átomos na região detecção.

A intensidade do feixe atômico na saída do forno, ou seja, o número de átomos emitidos por segundo pelo forno, I_0 , para uma temperatura T é dada por[19]:

$$I_0 = \frac{1}{4K} n_0 v_m A_s \quad (2.10)$$

onde n_0 é o número de átomos por unidade de volume no forno; v_m é a velocidade média dos átomos no forno; A_s é a superfície eficaz de emissão do forno e $(1/K)$ a redução efetiva do número de átomos emergentes do forno. A temperatura de operação do forno é 343 K, $n_0 = 1,45 \times 10^{19}$ átomos/m³ e a velocidade média é 200 m/s . A superfície de emissão, A_s , consiste em: para $r = 0.5$ mm e $l = 40$ mm é da ordem $7,85 \times 10^{-7} m^2$ e $K = \frac{8r}{3l} = 0.3$. Assim, o número de átomos que emergem do forno é de aproximadamente $1,7 \times 10^{14}$ at/s.

Para estimarmos o fluxo atômico que atinge o zona de detecção, I_D , precisamos conhecer o fluxo emergente do forno, calculado anteriormente, a seção transversal do feixe na região de detecção, ($A_{feixe} = 32 \times 10^{-6} m^2$), valor este determinado pelo orifício da cavidade de microonda e a distância entre o forno e a zona de detecção, ($D = 0,65m$). Assim, o fluxo atômico na região de detecção é:

$$I_D = 0,4 \frac{I_0 A_{feixe}}{D^2} = 5,15 \times 10^9 \text{ at/s} \quad (2.11)$$

É importante salientar, que a temperatura de operação do forno foi determinada empiricamente, para que obtivéssemos o melhor sinal sem que este estivesse saturado.

2.3.3 Cavidade de microondas

Para interrogar os átomos usamos o método de Ramsey de Campos Oscilantes Separados. Neste método usamos duas regiões antinós do campo magnético estacionário da cavidade de microonda do modo dominante TE₁₀₅ (*é em torno do ponto de antinó do campo magnético estacionário onde as linhas de força do campo magnético são quase paralelas e, por esta razão, este ponto é uma região de interação. O campo magnético transversal $H_{x_g}(t)$ é aquele que induz às transições hiperfinas $\Delta F = \pm 1, \Delta m_F = 0$ - [26]*). Desta forma a cavidade de microondas, também denominada de cavidade de Ramsey, tem o formato convencional de um U invertido, tal que dois braços perpendiculares à seção principal da cavidade permitam que o feixe atômico passe através destas duas regiões de campo magnético oscilante. Ela é feita de cobre e possui uma região livre de radiação oscilante de $L = 10,8$ cm de comprimento. O fator de qualidade da cavidade é 500. Uma foto da cavidade de microonda usada no relógio atômico é ilustrada pela figura 2.15

Devido ao modo da cavidade, a amplitude do campo magnético é constante ao longo do caminho atômico nas regiões de interação. A cavidade é ressonante com a transição $6^2S_{1/2} F=3 \longleftrightarrow 6^2S_{1/2} F=4$, o que corresponde à frequência de 9192631770 Hz. As zonas

Figura 2.15: Cavityde de microonda usada no relógio atômico tipo feixe do CePOF.

de interação da cavityde têm $l = 1$ cm de comprimento, e o perfil do campo magnético da microonda injetado nela é quadrado. O feixe atômico é definido por uma abertura quadrada de dimensões 25,0 mm por 12,7 mm. Estas são dimensões típicas usadas em cavitydes deste tipo a fim de não perturbarem a distribuição do campo de microondas em seu interior.

As duas regiões de interação estão situadas a uma distância igual com relação ao circuito de acoplamento da cavityde. Desta forma, minimizamos a diferença de fase entre elas. É importante acrescentar que a probabilidade de transição dos átomos mudarem o seu estado quântico após a passagem nas duas regiões de interação depende do deslocamento de fase ϕ entre os dois campos oscilatórios. Se ϕ difere, mesmo que ligeiramente de 0 ou π , um termo dispersivo aparece na probabilidade de transição e causa um erro na medida da frequência de ressonância.

Os guias de corte são colocados sobre as aberturas a fim de evitar vazamentos de microondas ao longo da direção do feixe. O guia de corte tem uma seção transversal retangular com 27.2 mm de comprimento em cada lado da zona de interação. Para um guia de onda de banda-X com $a = 25$ mm e $b = 12.7$ mm a constante de atenuação é da ordem 115 dB. Desta forma, a potência de microondas irradiada ao final da guia do corte é muito pequena e o pequeno comprimento do guia de corte é eficiente para prevenir um fluxo de potência de microondas ao longo do feixe, o que poderia produzir um alargamento Doppler prejudicial na medição da frequência requerida. A cavityde de microondas foi colocada dentro de uma blindagem magnética feita de μ -metal. Esta blindagem evita que campos magnéticos espúrios perturbem a região de interrogação dos átomos (os efeitos nocivos causados pela falta de homogeneidade do campo magnético estático serão descrito detalhadamente no Cap. 4). Uma foto da blindagem magnética é ilustrada na figura 2.16

A cavityde utilizada é a mesma de a um padrão de frequência atômico a feixe térmico de Cs comercial, um HP5061A - Cesium Beam Frequency Standard. A construção deste tipo de cavityde é muito delicada e deve ser feita com grande apuro, pois a incerteza no comprimento de cada parte da cavityde e do alinhamento entre as zonas de interação deve ser de $\sim 10^{-6}m$. Não querendo entrar no campo da construção de cavitydes

Figura 2.16: Blindagem magnética.

de microondas devido à nossa inexperiência na área, optamos por usar uma cavidade comercial.

2.3.4 Gerador de Microondas

Os padrões de frequência atômicos a césio são padrões atômicos passivos e, para podermos tirar proveito da estabilidade da ressonância atômica, ele precisa de um oscilador local que forneça a frequência de sondagem da transição atômica. O sintetizador de microondas disponível em nosso laboratório foi construído pela equipe do Dr. F. Walls (NIST - Boulder - USA)[25]. Para gerar o sinal de 9,192631770 GHz, ele conta com três osciladores de quartzo controlados por tensão, 5 MHz, 10.7 MHz e 100 MHz, travados em fase entre si. Este sintetizador de microondas deve ter alta pureza espectral na portadora, linhas parasitas fracas e simétricas com relação à portadora, além de boa estabilidade em fase.

O sinal do oscilador de 5 MHz é multiplicado por 2, o que gera um sinal de 10 MHz. Ao mesmo tempo, um outro sinal de 10 MHz é gerado pela divisão do sinal do oscilador de 100 MHz por 10. Estes dois sinais são enviados a um misturador e um sinal de erro, $f_1 - f_2$ é gerado. O sinal de erro é enviado ao oscilador de quartzo de 100MHz para sintonizar o seu sinal. Após a correção do oscilador de 100 MHz, o seu sinal é multiplicado por cinco, produzindo um sinal de 500 MHz.

O sinal de 10,7 MHz é travado em fase com um sintetizador modelo SR345. Este DDS teve a sua referência interna substituída por um sinal de 40MHz vindo do nosso gerador de microondas. O sinal de 40 MHz foi gerado a partir do oscilador de quartzo de 5 MHz, multiplicado por 8. A frequência de saída da DDS é 10 701 765 Hz e corresponde à do oscilador de quartzo de 10,7 MHz. O sinal de 10 701 765 Hz é somado ao de 500 MHz e produz um sinal de 510 701 765 Hz. Ele é filtrado, amplificado

Figura 2.17: Diagrama de blocos do sintetizador de microonda. Um controle computacional do DDS permite sintonizar e modular a frequência de saída do oscilador.

e conduzido a um Diodo recursor de passo (“*Step-Recovery-Diode*” - SRD). O SRD multiplica a frequência de entrada, criando um mecanismo de formas de onda, muito rico em harmônicos, produzindo assim um pente de frequências. O 18º harmônico a 9 192 631 770 Hz é selecionado com um filtro e modulado através do SR 345 por meio do oscilador de 10.7 MHz. Um diagrama de blocos do nosso sintetizador é ilustrado na figura 2.17.

Utilizamos o sinal de 5 MHz como a base de tempo do Stanford SR345 e também para a sincronização de fase do oscilador de 100MHz, pois ele está sendo constantemente aferido pela referência atômica. Esta sincronização é feita através de um sinal de erro proveniente da transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do ^{133}Cs da transição relógio.

2.3.5 Sistema de controle

Vimos que a cadeia de RF tem um oscilador de quartzo de 5 MHz que serve de referência para os outros dois osciladores de quartzo, de 10 MHz e de 100 MHz. A cadeia de RF fornece uma frequência ν , próxima da frequência hiperfina do estado fundamental dos átomos de ^{133}Cs ($6S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 6S_{1/2}, F = 4$), que são injetados na cavidade de microondas e detectamos a franja de Ramsey na saída da interrogação dos átomos na cavidade. Para operar através do travamento do oscilador de 5 MHz ao máximo da franja de Ramsey central, um sistema de controle gera um sinal de erro e , que é introduzido no oscilador de 5 MHz. A cada novo ciclo, uma nova correção é efetuada e o sinal de 9,192 GHz torna-se cada vez mais ressonante com a transição atômica. A figura 2.17 mostra o esquema do sistema de controle adotado em nosso relógio atômico.

Figura 2.18: Sinal característico do padrão de frequência devido à modulação da frequência de interrogação.

Um programa feito no ambiente LabView é usado para controlar o nosso padrão a feixe de ^{133}Cs . Este programa introduz uma modulação quadrada na DDS por meio de um GPIB. Como o oscilador de 10,7 MHz é travado no DDS, o sinal modulado também será introduzido ao oscilador de quartzo e, conseqüentemente, na frequência de transição atômica, 9 192 631 770 Hz. Logo, a resposta do relógio é uma franja de Ramsey modulada pela frequência do oscilador local ν e de amplitude de modulação ν_m , como ilustra a figura 2.18.

A franja de Ramsey é coletada por meio de uma placa de aquisição (AT-MIO 15L da National Instruments) e, o mesmo programa, que introduz a modulação quadrada na DDS, processa o sinal obtido. Ele calcula o sinal de correção e o envia a cadeia de RF por meio da mesma placa. Primeiramente, o programa estabelece um nível de referência e calcula um valor mínimo para manter o relógio em funcionamento. Sempre verificando o nível do sinal estabelecido pela referência, o programa calcula um sinal de erro e , que é a diferença de tensão captada entre dois pontos pré-definidos na franja de Ramsey, denominado de frequência baixa (frequência central - modulação) e de frequência alta (frequência central + modulação). A frequência central é de 9 192 631 770 Hz e a modulação é de $\nu_m = 360\text{Hz}$. O sinal e nos fornece informações sobre a posição da frequência de interrogação com relação à frequência de transição atômica. Quando um ciclo é formado, o sinal de erro e é utilizado para corrigir o oscilador local. Em regime permanente, o ciclo de escravização permite diminuir este sinal de erro e até que este toma um valor pequeno, próximo de zero, de modo que a frequência do gerador tende a convergir para a frequência de transição atômica.

2.3.6 Sistema Óptico

Usando um laser de diodo, ressoante com a linha D₂ do ¹³³Cs, bombeamos os átomos de modo a criar uma diferença populacional entre os níveis hiperfinos do estado fundamental $6S_{1/2}F = 3 \rightarrow 6S_{1/2}F = 4$. Os átomos absorvem a luz laser polarizada e sofrem uma transição $\Delta F = 0, \pm 1$ com $\Delta m_F = 0, \pm 1$, dependendo da luz ser π ou σ polarizada. Uma vez excitados, os átomos decaem por emissão espontânea para um nível do estado fundamental. Após vários ciclos de absorção e emissão, os átomos são levados a inverter a sua população [27]. Nós usamos a transição π – *polarizada*, ($F = 4 \leftrightarrow F' = 4$) da linha D₂ do Cs para o bombeamento óptico, e a transição ($F = 4 \leftrightarrow F' = 5$) para a detecção, como mostra a figura 2.2. O laser de diodo usado para o bombeamento óptico e para a detecção óptica foi montado na configuração de cavidade estendida tipo Littrow. Para estabilizarmos a frequência do laser na transição $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$ usamos a técnica da espectroscopia de absorção saturada.

Laser de Diodo

O laser de diodo usado na operação do relógio é fabricado por SDL (modelo 5422), com potência de saída máxima de 50 mW. Ele opera na configuração de cavidade estendida com uma grade de difração. Ela foi montada na configuração de Littrow, isto é, o feixe difratado de primeira ordem pela grade é retrorefletido no diodo e o feixe de saída do laser de diodo nesta configuração é o de ordem zero. Ele contém 50% da potência óptica do feixe incidente a grade de difração. Um vista geral da montagem do laser de diodo é mostrada na figura 2.19.

A grade de difração foi colocada sobre uma cerâmica piezoelétrica, PZT, e montada sobre um suporte de espelho comercial, permitindo que o feixe difratado fosse retrorefletido sobre o feixe incidente. O comprimento total da cavidade estendida é de 10 cm. O laser foi montado sobre um suporte mecânico como mostrado na fig. 2.20.

Um Peltier permite a troca de calor do laser com a base, e vice-versa, e é por meio deste que fazemos o controle de temperatura do laser. Um termistor permite fazer o controle de temperatura do laser e para alimentar o laser, uma fonte de corrente com nível de ruído de μA e com entrada de modulação. Como o feixe do laser de diodo é bastante divergente, colocamos uma lente em frente ao mesmo. Desta forma obtemos um feixe colimado [23].

O laser de diodo foi montado em uma caixa de alumínio com 23 cm de comprimento, 12,5 cm de largura e 11,5 cm de altura. Esta caixa possui um controle de temperatura a fim de diminuir a sua sensibilidade a variações de temperatura externa. O controle de temperatura da caixa é feito através de um sensor de temperatura, LM35, onde medimos a temperatura da caixa e a comparamos com uma temperatura de referência ajustada por meio de um potenciômetro. O processo de estabilização da temperatura da caixa é bastante lenta, ela pode levar várias horas para estabilizar. Desta forma,

Figura 2.19: Laser de diodo na configuração de cavidade estendida.

Figura 2.20: Montagem do Laser de Diodo

faz-se necessário um controle rigoroso da temperatura ambiente, para que esteja sempre abaixo da temperatura da caixa. Por isso, a temperatura dentro da sala do relógio é mantida sempre a 21°C com variações menores do que 1°C .

Sistema de estabilização

Para estabilizar a frequência do laser na transição hiperfina $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$ do átomo de Cs, usamos uma técnica de modulação de baixa frequência [24]. O sinal da absorção saturada é injetado em um *lock-in*. Este sinal é amplificado por um amplificador de baixo ruído, filtrado seletivamente para remover as linhas de frequência, ou sinais indesejados, e demodulado. O sinal é então multiplicado por uma onda senoidal de referência que está travada em fase com o sinal de referência do *lock-in*. Este sinal modulado está conectado à fonte de corrente do laser dando origem a uma modulação da baixa frequência. O sinal de saída do *lock-in* é utilizado como um sinal de erro do nosso sistema de realimentação, alimenta os circuitos de controle com duas saídas. Ele pode ser entendido como sendo uma derivada do sinal absorção, pois devido à modulação introduzida na fonte de corrente do laser, ele pode interpretar a frequência de transição hiperfina $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$ como um ponto zero e se a frequência do laser deslocar alguns hertz para a esquerda ou para a direita ele enviará um sinal de correção para o drive de controle de corrente e PZT do laser. As correções em altas frequências são feitas pelo circuito de controle de corrente e as variações em baixa frequência são feitas pelo circuito de controle do PZT. Isto ocorre pois o controle de corrente possui um filtro rejeita faixa, que tem um baixo ganho para frequências menores do que 200 Hz e o ganho é máximo para frequências da ordem de 6kHz. O controle via PZT é utilizado para compensar ressonâncias mecânicas e alterações lentas de temperatura (100-300Hz) e o controle via corrente compensa ruídos sonoros (7kHz), já que estes ruídos devam ser compensados rapidamente para que o laser não altere a sua frequência. Na figura 2.21 temos um esquema feito da estabilização do laser. Com este esquema o laser permaneceu travado na linha de absorção $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$ por vários dias, sem interrupções.

Mesa Óptica

Primeiramente direcionamos o feixe na direção de um telescópio com o intuito de reduzir a cintura do feixe para que não haja perdas muito grandes de potência. Logo após colocamos um isolador a fim de evitarmos retorno de luz ao laser. Após passar pelo isolador óptico, o feixe passa por um divisor de feixe que reflete 95% da luz e deixa transmitir 5% da luz incidente. Esta última segue para a absorção saturada e é usada para o travamento do laser na linha D_2 ($6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$) do átomo de ^{133}Cs .

A luz refletida pelo divisor de feixe incide sobre um modulador acusto-óptico. A saída do modulador acusto-óptico, dá origem a um feixe difratado de uma quantidade igual a

Figura 2.21: Sistema de controle do Laser.

Figura 2.22: Fotografia da mesa óptica do relógio atômico do Grupo de Óptica - CePOF.

freqüência acústica nele injetado, que é de 251 MHz. Esta freqüência é produzida por um gerador de sinais de RF (Fluke 6060B). O feixe difratado não tem suas propriedades alteradas, apenas a sua freqüência é deslocada. O feixe de bombeio é produzido pelo feixe difratado de ordem -1 e é ressonante com a transição $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 4$, e o outro feixe passa sem qualquer prejuízo em suas propriedades (com exceção de sua intensidade). Assim obtemos o segundo feixe que é necessário no bombeamento óptico. Estes feixes são introduzidos na câmara de vácuo por meio de duas janelas, uma situada na zona de preparação e a outra na zona de detecção. Após passarem pela câmara de vácuo os feixes são retrorefletidos por meio de dois espelhos, para evitarmos a deflexão do feixe atômico ou uma possível seleção de velocidade por meio de um efeito Doppler residual[28].

O esquema da mesa óptica é mostrado na figura 2.22. Ela foi montada sobre uma mesa de granito sintético, Granisin, projetada e construída no Laboratório de Máquinas Ferramentas (Lamafe) da USP em São Carlos.

Capítulo 3

Uma Análise das Franjas de Ramsey

Os relógios atômicos atuais utilizam o método de interrogação de Ramsey: o estado interno dos átomos evolui livremente entre dois campos oscilatórios separados aplicado durante um intervalo de tempo muito curto quando comparados com o tempo de duração da evolução livre. O método de Ramsey [7] é uma extensão do método desenvolvido por Rabi [6]. Rabi havia desenvolvido um método de ressonância magnética em que os átomos passavam por uma única região de interrogação. Após inúmeras tentativas de melhorar o método de Rabi, de modo a ter mais precisão na medida, Ramsey chegou à configuração ideal que consiste em duas regiões de interação separadas por uma região livre de radiação. O método de Ramsey passou a chamar-se de método de interrogação de campo oscilatórios separados.

O método de Ramsey apresenta diversas vantagens frente ao de Rabi. Esse último apresenta um padrão de ressonância bastante largo. Para resolver melhor o sinal obtido, seria necessário aumentar o comprimento l na região onde as transições ocorrem. Na prática este aumento ilimitado não é viável. Primeiro, porque perderíamos na intensidade do feixe ao fim de uma cavidade muito longa e, segundo, é impossível conseguir um campo magnético estático e uniforme ao longo de caminhos muito compridos de forma a mantermos a frequência de ressonância constante [29].

Neste capítulo descreveremos os fundamentos teóricos que envolvem a física de um relógio atômico. A principal característica dos relógios atômicos são as franjas de Ramsey. Elas são sensíveis a todos os parâmetros consideráveis na construção de um relógio. Desta forma, é importante compreendermos bem o modelo físico que as descreve, permitindo assim, extrairmos o máximo de informações sobre tais parâmetros e consequentemente melhorar a exatidão final do mesmo.

Primeiramente, explicaremos a importância de se utilizar um campo magnético homogêneo na região de interrogação atômica e apresentar o espectro Zeeman dos níveis hiperfinos dos átomos de Césio. A seguir, calcularemos a probabilidade de transição dos átomos quando estes são interrogados pelo método de Ramsey. Três métodos diferentes serão usados para se determiná-la. Primeiro, utilizaremos a método matricial, descrito por Audoin em [26]. Em seguida, descreveremos o método de Ramsey sob a óptica da interferometria quântica. Em seguida, desenvolveremos um tratamento semi-clássico e daremos uma interpretação geométrica à transição de Ramsey. Por fim, calcularemos a frequência de Rabi através das franjas de Ramsey obtidas com o nosso relógio, reproduzindo os cálculos feitos na referência [30].

Figura 3.1: Espectro Zeeman experimental registrado, à potência ótima, em nosso relógio, com as sete transições possíveis com $\Delta m_F = 0$. A intensidade do campo magnético estático é $20\mu T$.

3.1 Efeito Zeeman Quadrático

Os átomos de Cs são átomos alcalinos e o ^{133}Cs corresponde ao isótopo estável deste elemento. A interação hiperfina no césio é originado pela interação de dipolo do elétron de valência do átomo de Cs com o seu núcleo [13]. Como os átomos de Cs tem um spin nuclear $7/2$, os dois níveis hiperfinos têm momento angular $F = 3$ e $F = 4$, com 7 e 9 subníveis magnéticos, respectivamente. O espectro Zeeman tem 7 transições σ ($\Delta m_F = 0$) e 14 transições π ($\Delta m_F = \pm 1$). A frequência que usualmente medimos é a transição $6^2S_{1/2}F = 3, m_F = 0 \rightarrow 6^2S_{1/2}F = 4, m_F = 0$, conhecida como transição relógio. As transições σ são excitadas quando a componente do campo magnético da microonda for paralela ao campo magnético estático produzido pelo C-field. Na figura 3.1 mostramos o espectro Zeeman experimental registrado a potência ótima, isto é, a potência da microonda que maximiza a taxa de transição, em nosso relógio atômico. Neste aspecto, observamos claramente as 7 transições σ separadas de 92kHz, correspondendo a uma amplitude do campo magnético estático de $20\mu T$. A amplitude de cada uma das franjas depende do número quântico m_F .

O espectro mostra uma ressonância alargada, pedestal de Rabi, e um pico mais estreito, denominado de franja de Ramsey, sobreposta a ele. Não é possível observar as transições π nesta figura, pois as taxas de transição correspondentes são muito fracas. Na figura 3.1 observamos que há uma superposição entre um pedestal e o de seu vizinho mais próximo. Essa superposição pode causar alguns deslocamentos de frequência na linha Zeeman, denominado de Rabi pulling (que será explicado no capítulo 4). Este efeito pode ser evitado quando aumentamos deliberadamente o campo magnético estático aplicado

Figura 3.2: Espectro Zeeman experimental registrado com o nosso padrão primário de tempo e frequência quando a intensidade do campo magnético estático aplicado é de $30\mu T$.

ao longo da região de interrogação, como observamos na figura 3.2. Este espectro foi obtido quando a amplitude campo magnético estático aplicado for de $30\mu T$.

A dependência das frequências de transição hiperfinas σ com o campo mgnético estático pode ser calculado através da fórmula de Breit-Rabi [31]:

$$W(F, m_F) = -\frac{\Delta W}{2(2I+1)} + g_I \cdot \mu_B \cdot H_0 \cdot m_F \pm \frac{\Delta W}{2} \left(1 + \frac{4m_F}{2I+1}x + x^2 \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

$$x = \frac{(g_J - g_I)}{\Delta W} \mu_B \cdot H_0 \quad (3.2)$$

onde F é o momento angular total, m_F é o momento magnético de F , ΔW separação hiperfina entre os estados $F = I \pm 1/2$, $I = 7/2$ para o átomo de ^{133}Cs , g_I é o fator g nuclear e g_J é o fator g eletrônico, μ_B magneton de Bohr, h é a constante de Planck e H_0 é o campo magnético estático aplicado. Para as transições σ , a equação acima pode ser reescrita em termos da frequência da seguinte forma

$$\nu_{m_F} = \nu_{hfs} \left(1 + \frac{m_F x}{2} + x^2 \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

onde m_F é o momento magnético dos estados inicial e final e x é dado pela equação

$$x = \frac{(g_J - g_I)}{2\pi\hbar\nu_{hfs}} \mu_B \cdot H_0 \quad (3.4)$$

Como o valor de x é muito pequeno para os deslocamento Zeeman de primeira ordem, ela é da ordem de 10^{-5} para os valores usuais do “C-field”, podemos expandir em séries de potências a equação (3.3) e obtermos

$$\nu_{m_F} = \nu_{hfs} \left[1 + \frac{m_F x}{4} + x^2 \frac{(1 - m_F^2/16)}{2} \right] \quad (3.5)$$

Definimos a frequência Zeeman como

$$\nu_Z = \left(\frac{x}{4} \right) \nu_{hfs} = \frac{(g_J - g_I) \mu_B H}{8\pi\hbar} \quad (3.6)$$

tal que ν_{m_F} pode ser reescrito como

$$\nu_{m_F} = \nu_{hfs} + m_F \nu_Z + 8\nu_Z^2 \frac{(1 - m_F^2/16)}{\nu_{hfs}} \quad (3.7)$$

O valor da frequência de transição relógio que será utilizado como modelo nesta dissertação, é dada pela equação (3.7).

3.2 Representação Matricial da Variação dos Estados Quânticos

Embora a indução magnética aplicada aos átomos na região de interrogação seja fraca, ela é suficiente para separar cada uma das sete transições $\Delta F = \pm 1$, $\Delta m_F = 0$ de suas vizinhas. Conseqüentemente, a aproximação de um sistema quântico de dois níveis pode ser aplicada ao cálculo da probabilidade de transição. Como as colisões entre os átomos no feixe são quase inexistentes para as suas intensidades usuais, os efeitos de relaxação podem ser desprezados e podemos considerar um sistema quântico onde os dois níveis atômicos estão acoplados somente ao campo de microonda.

Em nosso caso, os dois níveis de interesse, correspondem aos níveis de energia da estrutura hiperfina do átomo de ^{133}Cs no estado fundamental, $F = 3$, $m_F=0$ e $F = 4$, $m_F=0$. Estes estados serão denotados por $|3\rangle$ e $|4\rangle$, respectivamente.

A matriz densidade completa do átomo de Cs é uma matriz 16x16. No entanto, estamos considerando apenas as transições que não dependem do campo magnético. Logo, reduzimos esta matriz para uma outra de dimensão 2 x 2 e na representação $|F, m_F\rangle$ ela é escrita como

$$\rho = \begin{vmatrix} \rho_{4,4} & \rho_{4,3} \\ \rho_{3,4} & \rho_{3,3} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

que será a matriz densidade do nosso sistema de dois níveis. O Hamiltoniano não perturbativo, $\mathcal{H}_0$, do sistema que descreve a interação hiperfina entre os estados $|3\rangle$ e $|4\rangle$, cujos autovalores são E_4 e E_3 são dados por [26]:

$$E_4 - E_3 = \hbar\omega_0 \quad (3.9)$$

e ω_0 é a frequência angular da transição hiperfina entre os estados $|3\rangle$ e $|4\rangle$ do átomo de Cs na presença de uma fraca indução magnética e o Hamiltoniano não perturbado é dado por

$$\mathcal{H}_0 = \begin{vmatrix} (1/2) \hbar \omega_0 & 0 \\ 0 & -(1/2) \hbar \omega_0 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

O Hamiltoniano de perturbação criado pela indução magnética da microonda, $B_z(t)$ é aplicado paralelamente ao campo magnético estático e é dado por

$$\mathcal{H}_1 = e \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) + \frac{e\hbar}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}(\vec{r}_0, t) + g_J \mu_S \vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r}_0, t) - g_I \mu_N \vec{I} \cdot \vec{B}(\vec{r}_0, t) \quad (3.11)$$

Como estamos lidando com transições do estado fundamental $\vec{L} = 0$, o Hamiltoniano de interação é reescrito como

$$\mathcal{H}_1 = \mu_B (g_J S_Z - g_I I_Z) B_z(t) \quad (3.12)$$

Os elementos de matrizes, na representação especificada são nulos para as transições de mesmo estado

$$\langle 4 | \mathcal{H}_1 | 4 \rangle = \langle 3 | \mathcal{H}_1 | 3 \rangle = 0 \quad (3.13)$$

e para a transição entre os estados

$$\langle 4 | \mathcal{H}_1 | 3 \rangle = \langle 3 | \mathcal{H}_1 | 4 \rangle^* = \frac{1}{2} \mu_B (g_J + g_I) B_z(t) \quad (3.14)$$

ela dependerá da amplitude do campo magnético oscilatório aplicado. Como $g_I \ll g_J$ podemos fazer a aproximação $(g_J + g_I) \simeq 2$, e assim teremos,

$$\langle 4 | \mathcal{H}_1 | 3 \rangle = \mu_B B_z(t) \quad (3.15)$$

que é a perturbação criada pelo campo magnético da microonda. Vamos denominar esta perturbação por $\hbar V_{4,3} = \langle 4 | \mathcal{H}_1 | 3 \rangle$. Desta forma, o Hamiltoniano total dos átomos é dado por

$$\mathcal{H} = \hbar \begin{vmatrix} (1/2) \omega_0 & V_{4,3} \\ V_{3,4} & -(1/2) \omega_0 \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

Aplicaremos a lei de Liouville à matriz densidade para analisarmos a evolução temporal da matriz densidade, isto é, a evolução temporal da população dos estados. Desta forma, obtemos um conjunto de equações diferenciais acopladas, uma correspondendo à coerência do sistema e outra contendo informações sobre diferença populacional fracional $\rho_{4,4} - \rho_{3,3}$. Escrevemos então

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \rho_{4,4} & \rho_{4,3} \\ \rho_{3,4} & \rho_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \rho] \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho_{4,4} - \rho_{3,3}) = 2i (V_{3,4} \rho_{4,3} - V_{4,3} \rho_{3,4}) \quad (3.18)$$

Como a indução magnética da microonda é uma função senoidal no tempo da frequência angular ω e amplitude constante B , a quantidade $B_z(t)$ é dada por

$$B_z(t) = B \cos(\omega t + \phi) \quad (3.19)$$

onde ϕ é o ângulo de fase, o que permite introduzir uma diferença de fase entre as duas regiões de interação. Com o campo de microonda dado pela equação (3.19), a perturbação será dada por:

$$V_{4,3} = \frac{1}{\hbar} \langle 4 | \mathcal{H}_1 | 3 \rangle = \frac{1}{\hbar} \mu_B B_z(t) = \frac{1}{\hbar} \mu_B B \cos(\omega t + \phi) \quad (3.20)$$

com

$$b = \frac{1}{\hbar} \mu_B B \quad (3.21)$$

onde b representa a amplitude da perturbação aplicada aos átomos e ela é expressa em unidades de frequência. Fazendo uma pequena manipulação algébrica na equação e usando a aproximação da onda girante, $V_{4,3}$ pode ser reescrita como

$$V_{4,3} = \frac{1}{2} (b_1 + ib_2) \exp(-i\omega t) + cc \quad (3.22)$$

onde cc é o complexo conjugado e b_1 e b_2 são quantidades reais dadas por

$$b_1 = b \cos \phi \quad (3.23)$$

$$b_2 = b \sin \phi \quad (3.24)$$

A evolução dos estados quânticos dependem do tempo t bem como do tempo gasto θ na região de interrogação. Desta forma podemos escrever

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.25)$$

Estamos procurando por soluções da seguinte forma:

$$\rho_{4,3} = \frac{1}{2} [a_1(\theta) + ia_2(\theta)] \exp(-i\omega t) \quad (3.26)$$

$$\rho_{4,4} - \rho_{3,3} = a_3(\theta) \quad (3.27)$$

onde $a_1(\theta)$, $a_2(\theta)$, $a_3(\theta)$ são quantidades reais. O conjunto de equações diferenciais abaixo é obtido usando-se as equações (3.17), (3.18)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} a_1(\theta) + \Omega_0 a_2(\theta) + b_2 a_3(\theta) = 0 \quad (3.28)$$

$$-\Omega_0 a_1(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} a_2(\theta) - b_1 a_3(\theta) = 0 \quad (3.29)$$

$$-b_2 a_1(\theta) + b_1 a_2(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} a_3(\theta) = 0 \quad (3.30)$$

onde Ω_0 representa a dessintonia entre a frequência de interrogação e a frequência angular da ressonância, definida como

$$\Omega_0 = \omega - \omega_0 \quad (3.31)$$

O sistema acima será resolvido usando o método da transformada de Laplace para equações diferenciais, assumindo Ω_0 , b_1 e b_2 como sendo constantes durante o tempo de interação. Tomando a transformada de Laplace destas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} sa_1^L + \Omega_0 a_2^L + b_2 a_3^L &= a_1(0) \\ -\Omega_0 a_1^L + sa_2^L - b_1 a_3^L &= a_2(0) \\ -b_2 a_1^L + b_1 a_2^L + sa_3^L &= a_3(0) \end{aligned}$$

onde os a_i^L denotam a transformada de Laplace de $a_i(\theta)$. $a_i(0)$ é o valor de $a_i(\theta)$ no início da interação e s é uma variável complexa. Finalmente, as equações diferenciais obtêm a forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_1(\theta) \\ a_2(\theta) \\ a_3(\theta) \end{pmatrix} = R(b_1, b_2, \Omega_0, \theta) \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \\ a_3(0) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

e a matriz $R(b_1, b_2, \Omega_0, \theta)$ é escrita da seguinte forma

$$R(b_1, b_2, \Omega_0, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \Omega\theta + \frac{b_1^2}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) & -\left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right) \sin \Omega\theta + \frac{b_1 b_2}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) & -\frac{b_1 \Omega_0}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) - \left(\frac{b_2}{\Omega}\right) \sin \Omega\theta \\ \left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right) \sin \Omega\theta + \frac{b_1 b_2}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) & \cos \Omega\theta + \frac{b_2^2}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) & \left(\frac{b_1}{\Omega}\right) \sin \Omega\theta - \frac{b_2 \Omega_0}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) \\ -\frac{b_1 \Omega_0}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) + \left(\frac{b_2}{\Omega}\right) \sin \Omega\theta & -\left(\frac{b_1}{\Omega}\right) \sin \Omega\theta - \frac{b_2 \Omega_0}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) & 1 - \frac{b^2}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega\theta) \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

com

$$\Omega^2 = b^2 + \Omega_0^2 \quad (3.34)$$

3.3 Probabilidade de Ramsey : Forma Geral e Interpretação

No método de Ramsey de campos separados, os átomos interagem com uma primeira região durante o tempo τ_1 , em seguida, durante o intervalo de tempo T eles passam por uma região livre de campo oscilante e então passam pela segunda região de interação

durante τ_2 . Assumiremos que os átomos experimentam uma indução magnética uniforme e idêntica em ambas as regiões. Desta forma, consideraremos a frequência de transição ω_0 como uma constante sobre todo o caminho. Denominaremos l como sendo o comprimento de ambas as regiões de interação e L é o comprimento da região de vôo livre. Além disso, consideraremos a amplitude do campo magnético oscilatório constante ao longo das duas regiões de interação.

A evolução temporal do estado quântico dos átomos é descrita pela matriz $R_i(b_1, b_2, \Omega_0, \tau)$, demonstrada na seção anterior, com $i = 1$ na primeira região de interação e $i = 2$ na segunda região de interação. Na região livre de radiação eletromagnética, a matriz de evolução é dada por $R(0, 0, \Omega_0, T)$, onde defino T como:

$$T = \frac{L}{v} \quad (3.35)$$

Os átomos na primeira região de interação entram sem qualquer coerência devido à diferença populacional criada pela primeira região de bombeamento óptico. Assumindo um bombeamento ótico eficiente, teremos $a_3(0) = 1$, que designa a população atômica dos átomos no estado $|3, 0\rangle$. A saída da segunda região de interação, o estado quântico do átomo de Cs é dado por

$$\begin{pmatrix} a_1(\tau, T, \tau) \\ a_2(\tau, T, \tau) \\ a_3(\tau, T, \tau) \end{pmatrix} = R_2(b_1, b_2, \Omega_0, \tau) R(0, 0, \Omega_0, T) R_1(b_1, b_2, \Omega_0, \tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3(0) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

O sinal de um relógio é interpretado como a probabilidade, $\mathcal{P}_2(t)$, de que os átomos tenham sofrido a transição entre os estados $|3, 0\rangle$ e $|4, 0\rangle$, no método de ressonância magnética de Ramsey. Esta probabilidade de transição que ocorre após um tempo de interação $2\tau + T$ está relacionada com a diferença populacional fracional $a_3(\tau, T, \tau)$.

Se $\rho_{4,4}(0)$ e $\rho_{3,3}(0)$ são, respectivamente as populações dos níveis $|4\rangle$ e $|3\rangle$ no início da interação, eles se tornam

$$\rho_{4,4}(\tau) = \rho_{4,4}(0) [1 - \mathcal{P}(\tau)] + \rho_{3,3}(0) \mathcal{P}(\tau) \quad (3.37)$$

$$\rho_{3,3}(\tau) = \rho_{3,3}(0) [1 - \mathcal{P}(\tau)] + \rho_{4,4}(0) \mathcal{P}(\tau) \quad (3.38)$$

após passarem um tempo τ na região de interação. Se tomarmos a diferença entre a população dos estados $\rho_{4,4}(\tau)$ e $\rho_{3,3}(\tau)$, obtemos imediatamente

$$\rho_{4,4}(\tau) - \rho_{3,3}(\tau) = a_3(\tau) = a_3(0) - 2\mathcal{P}(\tau) a_3(0) \quad (3.39)$$

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_3(\tau)}{a_3(0)} \right) \quad (3.40)$$

A probabilidade de Ramsey, calculada quando a fase ϕ do campo de microonda dentro da cavidade na primeira região de interação é nula e ϕ a fase do campo de microonda na segunda região interação, temos para os átomos monocinéticos, usando as equações (3.23) e as equações (3.36)

Figura 3.3: Franja de Ramsey sobreposta ao pedestal de Rabi registrado com o nosso relógio atômico a feixe efusivo de ^{133}Cs .

$$\mathcal{P}_2(\tau) = \frac{4b^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{1}{2} \Omega \tau \left[\cos \frac{1}{2} \Omega \tau \cos \frac{1}{2} (\Omega_0 T + \phi) - \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \frac{1}{2} \Omega \tau \sin \frac{1}{2} (\Omega_0 T + \phi) \right]^2 \quad (3.41)$$

O termo ϕ que aparece na equação da probabilidade de transição introduz uma pequena diferença de fase entre os dois campos oscilatórios de Ramsey. Considerando o caso ideal, em que a diferença de fase é nula entre os campos, e sendo a radiação eletromagnética em ressonância com a transição atômica, isto é, $\Omega_0 = 0 \implies \omega = \omega_0$, a probabilidade de transição $\mathcal{P}_2(\tau)$ será máxima. Este valor depende do valor da frequência de Rabi, b , que deverá assumir os seguintes valores, quando $\phi = 0$ e $\Omega_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\tau) &= 4 \sin^2 \frac{1}{2} b \tau \cos^2 \frac{1}{2} b \tau \\ &= 2 \sin^2 b \tau \\ \therefore b \tau &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \end{aligned} \quad (3.42)$$

Normalmente usamos o menor valor ótimo de b , o que corresponde para valores de $n = 0 \implies b \tau = \pi/2$. No caso de termos $\phi = \pi$, $\mathcal{P}_2(\tau)$ assume o seu mínimo valor quando $\Omega_0 = 0 \implies \omega = \omega_0$, e o padrão de ressonância apresentará um vale neste ponto.

Na figura 3.3 mostramos uma franja de Ramsey obtida com o nosso relógio atômico a feixe térmico de Cs.

No gráfico, a franja de Ramsey é bastante estreita e está sobreposta a um pedestal alargado, pedestal de Rabi. O pedestal de Rabi pode ser interpretado como a probabilidade da transição ocorrer na primeira região de interação vezes a probabilidade dela não

ocorrer na segunda região de interação, mais a probabilidade dela ocorrer na segunda região de interação e de não ocorrer na primeira. Já a franja de Ramsey é um resultado da interferência das amplitudes de transição nas duas regiões de interação. Ela é o resultado da passagem dos átomos através do espaço livre entre os dois campos oscilatórios. Ela é de particular interesse, pois é através dela que se determina o uso de um relógio atômico a feixe de Cs como referência atômica de tempo e frequência. A largura a meia altura da franja de Ramsey é dada por

$$W \simeq \frac{\pi}{T} = \frac{\pi v}{L} \quad (3.43)$$

e a sua unidade é expressa em Hz. Da figura 3.3, a largura a meia altura da nossa franja é 846 Hz.

3.3.1 A Franja de Ramsey

A franja de Ramsey é de grande importância em um padrão de tempo e frequência, pois é por meio dela que travamos a frequência do sintetizador de microonda na frequência de ressonância da transição hiperfina dos átomos de césio. A franja de Ramsey tem um pico na frequência de ressonância, isto é, em $\Omega_0 = 0$, e dois vales simétricos correspondendo aos primeiros mínimos da probabilidade de Ramsey.

A probabilidade de transição relógio pode ser simplificada para uma descrição exata da franja de Ramsey, supondo uma pequena dessintonia na vizinhança imediata da frequência de transição, ou seja, $|\Omega_0| \ll b$. Usando a equação (3.41) nestas condições, obtemos

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{1}{2} \sin^2 b\tau [1 + \cos(\Omega_0 T)] \quad (3.44)$$

Observamos que a probabilidade de Ramsey, $\mathcal{P}(\tau)$, depende do parâmetro b do campo oscilante. Esta amplitude já foi definida na equação (3.21), e ela corresponde à amplitude da indução magnética da microondas B por:

$$b = \mu_B \frac{B}{\hbar} \quad (3.45)$$

onde μ_B é o magneton de Bohr. A grandeza b é medida em unidade de frequência angular e caracteriza a frequência com que o campo oscilante evolui o estado quântico dos átomos. O significado físico desta condição é obtido quando multiplicamos ambos os lados de $|\Omega_0| \ll b$ por $T = \tau L/l$. A partir da definição da largura a meia altura da franja, $W \simeq \pi/T = \pi v/L$, obtemos

$$\begin{aligned} |\Omega_0| &\ll b \rightarrow \frac{\tau L}{l} |\Omega_0| \ll b \frac{\tau L}{l} \\ \frac{|\Omega_0|}{\frac{1}{2}W} &\ll b\tau \frac{L}{l} \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde $b\tau = \frac{\pi}{2}$. Assim, na prática, a aproximação considerada é satisfeita para descrever a franja central da curva de ressonância desde que tenhamos $L/l \gg 1$. Para os relógios atômicos convencionais esta razão é de aproximadamente 10. Além disso, ela é útil para uma análise simplificada das propriedades de um oscilador de césio e a equação (3.44) continua otimizada quando $b\tau = \pi/2$, isto é, $\mathcal{P}(\tau) = 1$.

3.3.2 Pedestal de Rabi

A distribuição de velocidade dos átomos no feixe é bastante larga e existe uma probabilidade não desprezível dos átomos serem interrogados uma única vez pelo campo oscilatório. Essa distribuição de probabilidade gera uma ressonância alargada conhecida como *pedestal de Rabi*. As franjas de Ramsey modulam este pedestal largo, como indica a figura 3.3. O pedestal de Rabi é característico de um relógio atômico a feixe térmico devido à distribuição de velocidades enquanto no relógio tipo chafariz ela é inexistente, pois neste último, criamos um feixe atômico praticamente monocinético. A relação entre o pedestal de Rabi e a franja de Ramsey é uma fonte de informação a respeito dos deslocamentos e não homogeneidade existentes no relógio. Esses aspectos serão discutidos no Capítulo 4.

A probabilidade de transição do pedestal de Rabi pode ser facilmente obtida, se substituirmos os termos da modulação da equação (3.41) por seus valores médios, ou seja

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right) &= \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right)\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 T\right) &= 0\end{aligned}$$

Considerando $\phi = 0$, teremos, para qualquer deslocamento de fase médio entre as duas regiões de interação

$$\mathcal{P}_3(\tau) = \frac{b^2}{2\Omega^2} \left[\sin^2 \Omega\tau + \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega\tau)^2 \right] \quad (3.47)$$

Esta equação mostra que o pedestal de Rabi não é sensível ao deslocamento de fase médio entre as duas regiões de interação. No pedestal de Rabi qualquer componente oscilatório se anula e o que observamos é o valor médio da oscilação.

De acordo com a equação (3.47), o pedestal atinge o seu valor máximo, $1/2$, em $\Omega_0 = 0$, quando

$$b\tau = \frac{\pi}{2} \quad (3.48)$$

O pedestal de Rabi depende fortemente do valor de $b\tau$. Quando $\Omega_0 = 0$, podemos expandir $\mathcal{P}_3(\tau)$, para termos em segunda ordem

$$\mathcal{P}_3(\tau) = \frac{1}{2} \sin^2 b\tau - \left(\frac{\Omega_0^2}{b^2} \right) \cos b\tau (1 - \cos b\tau - 1/2 b\tau \sin b\tau)$$

O segundo termo do lado direito desta equação é igual a zero para $b\tau = \frac{\pi}{2}$, e para átomos monocinéticos, a largura a meia altura é dada por

$$W = \frac{7.03}{\tau}$$

A amplitude das bandas laterais ao pedestal é uma função crescente de $b\tau$. Assim, as observações da transição relógio, $(4, 0) \longleftrightarrow (3, 0)$, serão muito mais perturbadas devido as duas transições adjacentes $(4, -1) \longleftrightarrow (3, -1)$ e $(4, 1) \longleftrightarrow (3, 1)$ se o nível de excitação for muito grande. Em razão disto, ajustamos o nível de excitação para valores ligeiramente menores do que o seu óptimo.

3.4 Interpretação Geométrica das Franjas de Ramsey

Os átomos utilizados em um padrão de frequência atômico são descritos quanticamente como ondas de matéria. A interpretação do sinal obtido em um relógio atômico, assim como a compreensão dos diversos efeitos sistemáticos que o afetam, podem ser interpretados em termos da interferometria quântica, quando os átomos são tratados como objetos quânticos e relativísticos. Portanto, os átomos devem ser tratados como ondas de matérias com coerência própria. A interação simultânea do átomo com o campo gravitacional e eletromagnético e a conseqüente evolução de seus estados, são regidos pela equação de Dirac para as ondas de matéria no âmbito da relatividade geral [15].

As franjas de Ramsey são o resultado da interferência entre os pacotes de onda do estado fundamental e o excitado, como pode ser observado na figura 3.4. A diferença entre os vetores de onda atômicos dos estados excitados e fundamental, $\vec{\Delta k}_{at} = \vec{k}_e - \vec{k}_f = \vec{K}$ respectivamente, resulta na defasagem progressiva entre as amplitudes das suas funções de onda atômicas no curso de sua propagação no interferômetro. Para um interferômetro de comprimento L , esta defasagem é dada por

$$\Delta\phi_{at} = \Delta k_{at} \times L$$

A conservação de energia durante a interação ressonante de Ramsey é dado por

$$\left(\frac{1}{2}mv_f^2 + E_f\right) + \hbar\omega = \left(\frac{1}{2}mv_e^2 + E_e\right) + 0 \quad (3.49)$$

onde v_f e v_e representam a velocidade de grupo dos pacotes de onda atômicos antes e após da interação com a cavidade de interrogação, E_f e E_e representam as energias dos estados fundamental e excitado, respectivamente. Da conservação de momentum, escrevemos

Figura 3.4: Princípio de um relógio atômico a guisa de interferometria atômica.

$$m\vec{v}_e - m\vec{v}_f = \vec{K} \quad (3.50)$$

e as equações (3.49) e (3.50) conduzem à expressão

$$\frac{1}{2}mv_f \cdot v_f - \frac{1}{2}mv_e \cdot v_e + E_f - E_e + \hbar\omega = 0 \quad (3.51)$$

onde

$$E_f - E_e = -\hbar\omega_0$$

O quadrado do momentum é dada pela seguinte relação

$$\frac{K^2}{2m} = \frac{mv_e^2}{2} + \frac{mv_f^2}{2} - m\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f \quad (3.52)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.50) por $\vec{v}_f$

$$\vec{K} \cdot \vec{v}_f = m\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f - mv_f^2 \quad (3.53)$$

e rearranjado os termos das equações (3.52) e (3.53), obtemos

$$\vec{K} \cdot \vec{v}_f = \frac{mv_e^2}{2} - \frac{mv_f^2}{2} - \frac{K^2}{2m}$$

Finalmente escrevemos

$$\vec{K} \cdot \vec{v}_f = \hbar(\omega - \omega_0) - \frac{K^2}{2m} \quad (3.54)$$

Se $\vec{K} = K\hat{z}$, então a defasagem entre os dois caminhos interferométricos é dada por

$$\Delta\phi_{at} = \left[\hbar(\omega - \omega_0) - \frac{K^2}{2m} \right] \times \frac{L}{v_{f,z}} \quad (3.55)$$

Esta última equação nos diz que a defasagem é proporcional à dessintonia entre a frequência de interrogação da microonda e a frequência de transição atômica, além de um termo, $-\frac{K^2}{2m}$, que corresponde ao recuo do átomo devido ao efeito da absorção do fóton da microonda. Se varreremos a frequência de interrogação em torno da ressonância, obtemos um padrão de interferência, na forma das franjas de Ramsey.

Por outro lado, o tratamento semi-clássico de um relógio atômico, onde a natureza ondulatória dos átomos não é dominante, descreve perfeitamente bem a maior parte dos fenômenos observados num padrão de frequência.

Na aproximação semi-clássica, consideraremos os átomos como partículas bem localizadas, em que associamos trajetórias e velocidades clássicas, com um tempo de trânsito dado por:

$$T = \frac{L}{v_{f,z}}$$

Assim, com o auxílio do tratamento semi-clássico, transpomos para o domínio temporal, um fenômeno de interferência entre pacotes de onda espacialmente deslocadas. Em particular, na interpretação semi-clássica, a defasagem é reescrita como

$$\Delta\phi_{at} = (\omega - \omega_0) \times T \quad (3.56)$$

Desta forma, o recuo dos átomos devido à absorção da radiação desloca globalmente as franjas de Ramsey.

3.4.1 Tratamento Semi-Clássico de um Relógio Atômico

Denominaremos $|f\rangle$ e $|e\rangle$ como os estados fundamental e excitado, respectivamente, da transição relógio. O Hamiltoniano de acoplamento entre o átomo e a cavidade, dado em (3.12) pode ser escrito na forma [15]

$$\mathcal{H}(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) - \vec{M} \cdot \vec{B}(\vec{r}(t), t) \quad (3.57)$$

Aqui $\vec{M}$ é o operador dipolo magnético dos átomos

$$\vec{M} = \mu_B (|e\rangle\langle f| - |f\rangle\langle e|) \vec{z} \quad (3.58)$$

Como as transições envolvidas são $|f, m_f = 0\rangle \longrightarrow |e, m_f = 0\rangle$, o dipolo magnético é colinear ao eixo de quantização imposto pela direção do campo magnético estático. $\vec{B}(\vec{r}(t), t)$ é o campo magnético oscilante de frequência ω . Na presente demonstração, consideraremos o caso em que o campo eletromagnético dentro da cavidade é uma onda perfeitamente estacionária e, em particular, desconsideraremos as não homogeneidades de fase dentro da cavidade. A componente z do campo magnético oscilante é escrita como

$$B_z(\vec{r}, t) = B_0(\omega) H_{a,z}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(t)) \quad (3.59)$$

onde $B_0(\omega)$ é a amplitude do campo na cavidade e $H_{a,z}(\vec{r})$ é a componente z do modo da cavidade e descreve o perfil espacial do campo ao longo da trajetória dos átomos. Ela é adimensional e por definição ela é máxima apenas para uma direção. Vamos definir o perfil do campo por $f(t) = H_{a,z}(\vec{r}(t))$.

Definimos anteriormente a frequência de Rabi, como

$$b = \frac{\mu_B B_0(\omega)}{\hbar}$$

Utilizando as equações (3.58) e (3.59), podemos reescrever o Hamiltoniano de interação como:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) - \hbar b f(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) (|e\rangle\langle f| - |f\rangle\langle e|) \quad (3.60)$$

este hamiltoniano pode ser escrito de maneira simplificada em termos das matrizes de Pauli,

$$\mathcal{H}(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z - \hbar b f(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \sigma_x \quad (3.61)$$

No referencial girante da pulsação de Rabi, escrevemos

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = R(t) |\Psi(t)\rangle \quad (3.62)$$

onde $R(t)$ é o operador evolução temporal que atua sobre os estados atômicos. Este operador tem a seguinte forma:

$$R(t) = \exp\left(i\frac{\omega t}{2}\sigma_z\right) = \cos\frac{\omega t}{2}I - i\sin\frac{\omega t}{2}\sigma_z = \begin{bmatrix} \exp\left(i\frac{\omega t}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\omega t}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

A evolução temporal dos estados, neste referencial girante é obtida usando-se a equação de Liouville

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = R H R^\dagger |\tilde{\Psi}(t)\rangle - i\hbar R \frac{d}{dt} R^\dagger |\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad (3.64)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (3.64) é escrito na forma

$$R H R^\dagger = \frac{\hbar\omega_0}{2} R \sigma_z R^\dagger - \hbar b f(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) R \sigma_x R^\dagger \quad (3.65)$$

onde

$$\begin{aligned} R \sigma_z R^\dagger &= \sigma_z \\ R \sigma_x R^\dagger &= \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\omega t) \\ \exp(-i\omega t) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.66)$$

e finalmente obtemos

$$RHR^\dagger = \frac{\hbar\omega_0}{2}R\sigma_zR^\dagger - \hbar bf(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\omega t) \\ \exp(i\omega t) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

O segundo termo do segundo membro da equação (3.64) escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R^\dagger &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \exp(-i\frac{\omega t}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\omega t}{2}) \end{bmatrix} = i\frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} -\exp(-i\frac{\omega t}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\omega t}{2}) \end{bmatrix} \quad (3.68) \\ -i\hbar R \frac{d}{dt}R^\dagger &= \hbar\frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} \exp(i\frac{\omega t}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\omega t}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\exp(-i\frac{\omega t}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\omega t}{2}) \end{bmatrix} \\ \therefore -i\hbar R \frac{d}{dt}R^\dagger &= -\hbar\frac{\omega}{2}\sigma_z \quad (3.69) \end{aligned}$$

e a evolução temporal dos estados atômicos é dado por

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = H |\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad (3.70)$$

o que resultou na equação de Schrödinger no referencial girante do campo magnético oscilatório, com H dado pela equação (3.61)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= RHR^\dagger - i\hbar R \frac{d}{dt}R^\dagger \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - \hbar bf(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\omega t) \\ \exp(-i\omega t) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71) \end{aligned}$$

Nesta expressão, o termo de acoplamento

$$\begin{aligned} &\cos(\omega t + \varphi(t)) \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\omega t) \\ \exp(-i\omega t) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \exp i(2\omega t + \varphi(t)) + \exp(-i\varphi(t)) \\ \exp -i(2\omega t + \varphi(t)) + \exp(i\varphi(t)) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

possui uma componente que é ressonante com a transição relógio e outro não-ressonante. Os tempos de interação do átomo com a cavidade são da ordem de 50 ms, enquanto que o período de oscilação da frequência de transição relógio são da ordem de 100ps, o que é muito curto quando comparado com o tempo de interação. Desta forma os termos anti-ressonante não possuem um efeito muito importante para a dinâmica dos átomos.

Assim, para fins de cálculos, faremos a aproximação da onda girante, onde os termos anti-ressonantes são desprezados. Se a dessintonia da cavidade for denominada por, $\Omega_0 = \omega - \omega_0$, reescrevemos o nosso hamiltoniano como

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = -\frac{\hbar}{2}\Omega_0\sigma_z - \frac{\hbar}{2}bf(t) \begin{bmatrix} 0 & \exp(-i\varphi(t)) \\ \exp(i\varphi(t)) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Se escrevermos

$$\begin{aligned}\exp(-i\varphi(t)) &= \cos\varphi(t) - i\sin\varphi(t) \\ \exp(i\varphi(t)) &= \cos\varphi(t) + i\sin\varphi(t)\end{aligned}$$

o hamiltoniano de interação pode ser reescrito na forma

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = -\frac{\hbar}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} \quad (3.73)$$

onde $\vec{\sigma}$ representa o operador vetorial das matrizes de Pauli e

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} bf(t)\cos\varphi(t) \\ bf(t)\sin\varphi(t) \\ \Omega_0 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Da equação (3.74), tiramos que $\Omega(t) = \|\vec{\Omega}(t)\| = \Omega_0^2 + bf(t)$, onde $\vec{\Omega}(t)$ representa o vetor rotação do campo oscilante dentro da cavidade.

3.4.2 Imagem do Spin Fictício

No espaço tridimensional, os eixos coordenados (Ox) , (Oy) e (Oz) estão dirigidos na direção de σ_x , σ_y e σ_z , respectivamente, e definem um sistema ortonormal. O vetor de rotação $\vec{\Omega}(t)$, dado pela equação (3.74), é escrito em termos do ângulo θ , como mostra a figura 3.5, e obtemos:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\Omega_0}{\Omega} \\ \sin\theta &= \frac{bf(t)}{\Omega}\end{aligned} \quad (3.75)$$

com $0 \ll \theta \ll \pi$, tal que

$$\vec{\Omega}(t) = \Omega \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi(t) \\ \sin\theta\sin\varphi(t) \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

De acordo com a figura 3.5, podemos definir o vetor unitário como

$$\vec{w} = \frac{\vec{\Omega}}{\Omega}$$

Usando a definição (3.76), o Hamiltoniano de interação dado por (3.73) é escrito como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}(t) &= -\frac{\hbar}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} = -\frac{\hbar}{2}\Omega(t) (\vec{\sigma} \cdot \vec{w}) \\ &= -\frac{\hbar}{2}\Omega(t) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\exp(i\varphi(t)) \\ \sin\theta\exp(-i\varphi(t)) & -\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (3.77)$$

Figura 3.5: A figura define os ângulos θ e φ do vetor rotação instantâneo.

Na base $(|e\rangle, |f\rangle)$, $\tilde{\mathcal{H}}(t)$ representa o hamiltoniano do spin fictício, $1/2$, colocado em um campo $\vec{\Omega}(t)$. $\vec{w}$, está segundo a direção da componente de spin $+\hbar/2$, cujas autoenergias E_+ e E_- , associadas a $\tilde{\mathcal{H}}(t)$ valem

$$E_{\pm} = \mp \frac{\hbar}{2} \Omega(t) = \mp \frac{\hbar}{2} \frac{\Omega_0}{\cos \theta} \quad (3.78)$$

e os autovetores associados a $\tilde{\mathcal{H}}(t)$ são

$$\begin{aligned} |+\rangle_{\vec{w}} &= \cos \frac{\theta}{2} \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right) |e\rangle + \sin \frac{\theta}{2} \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right) |f\rangle \\ |-\rangle_{\vec{w}} &= -\sin \frac{\theta}{2} \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right) |e\rangle + \cos \frac{\theta}{2} \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right) |f\rangle \end{aligned} \quad (3.79)$$

O spin fictício $\vec{S}$ é definido como o valor médio do operador vetorial $\vec{\sigma}$

$$\vec{S} = \langle \tilde{\Psi}(t) | \vec{\sigma} | \tilde{\Psi}(t) \rangle = \langle \vec{\sigma} \rangle(t) \quad (3.80)$$

Se aplicarmos a lei de Liouville

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\sigma} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{\sigma}, \tilde{\mathcal{H}}(t)] \rangle = \frac{i}{2} \langle [\vec{\sigma}, \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma}] \rangle \quad (3.81)$$

e utilizando as relações das matrizes de Pauli,

$$[\vec{\sigma}, \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma}] = 2i \vec{\Omega}(t) \times \vec{\sigma}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\sigma} \rangle = \frac{i}{2} \langle [\vec{\sigma}, \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma}] \rangle = -\vec{\Omega}(t) \times \langle \vec{\sigma} \rangle$$

e a definição (3.80), constatamos que

Figura 3.6: Nesta figura temos o vetor precessão $\vec{S}(t)$ a uma frequência $-\Omega(t)$ em torno de $\vec{w}$.

$$\frac{d}{dt} \vec{S}(t) = -\vec{\Omega}(t) \times \vec{S}(t) \quad (3.82)$$

Desta forma, concluímos que o spin fictício efetua um movimento de precessão em torno do vetor rotação $-\vec{\Omega}(t)$, como está ilustrado na figura 3.6.

O momento dipolar magnético é dado por

$$\vec{M} = M_z \hat{z}, \text{ com } M_z = \mu_B (|e\rangle \langle f| + |f\rangle \langle e|) \quad (3.83)$$

No referencial girante ele é escrito na forma

$$\widetilde{M}_z(t) = R(t) M_z(t) R^\dagger(t)$$

com $R(t)$ e $R^\dagger(t)$ definidos anteriormente e M_z escrito na forma matricial

$$M_z = \mu_B \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\omega t}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\omega t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Desta forma, obtemos

$$\widetilde{M}_z(t) = \mu_B (\exp(-i\omega t) |f\rangle \langle e| + \exp(i\omega t) |e\rangle \langle f|) \quad (3.84)$$

O valor médio do operador $\vec{M}$ é

$$M(t) = \langle \widetilde{\Psi}(t) | \widetilde{M}_z(t) | \widetilde{\Psi}(t) \rangle \quad (3.85)$$

onde

$$\widetilde{\Psi}(t) = c_1(t) |e\rangle + c_2(t) |f\rangle$$

tal que obtemos

$$M(t) = \mu_B \left(c_1^\dagger c_2 \exp i\omega t + c_1 c_2^\dagger \exp -i\omega t \right) \quad (3.86)$$

$M(t)$ é, portanto, a parte real do número complexo

$$\begin{aligned} c_1^\dagger &= \langle f | \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle, c_2^\dagger = \langle e | \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle, \text{obtenho} \\ 2c_1 c_2^\dagger \exp -i\omega t &= 2 \left\langle \tilde{\Psi}(t) \left| |f\rangle \langle e| \right| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle \exp -i\omega t \end{aligned}$$

e a amplitude complexa de $M(\omega, t)$

$$M(\omega, t) = 2\mu_B \left\langle \tilde{\Psi}(t) \left| |f\rangle \langle e| \right| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle \quad (3.87)$$

Lembrando que $|f\rangle \langle e| = \frac{(\sigma_x - i\sigma_y)}{2}$, temos

$$M(\omega, t) = \mu_B \left\langle \tilde{\Psi}(t) \left| \sigma_x \right| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle - i\mu_B \left\langle \tilde{\Psi}(t) \left| \sigma_y \right| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle \quad (3.88)$$

Além disso, sabemos que $\sigma_z = |e\rangle \langle e| - |f\rangle \langle f|$. Finalmente, podemos escrever as componentes do spin fictício, $\vec{S}(t)$. Estas componentes estão relacionadas com o momento dipolar magnético por

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \left\langle \tilde{\Psi}(t) \left| \sigma_x \right| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = \text{Re} \left\{ \frac{M(\omega, t)}{\mu_B} \right\} \\ S_y(t) &= \left\langle \tilde{\Psi}(t) \left| \sigma_y \right| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = -\text{Im} \left\{ \frac{M(\omega, t)}{\mu_B} \right\} \\ S_z(t) &= \left\langle \tilde{\Psi}(t) \left| \sigma_z \right| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = \rho_{ee} - \rho_{ff} \end{aligned} \quad (3.89)$$

A partir deste conjunto de equações podemos concluir:

- 1) A componente x do spin fictício é proporcional à componente do momento magnético oscilante em fase com o campo de oscilação;
- 2) A componente y é proporcional à componente do momento magnético oscilando em quadratura com o campo oscilante;
- 3) A componente z é igual à diferença populacional entre os respectivos estados, $|e\rangle$ e $|f\rangle$.

As componentes do spin fictício são portanto grandezas mensuráveis, diretamente relacionadas ao dipolo magnético do átomo. Além disso, a evolução temporal entre os estados $|e\rangle$ e $|f\rangle$ exprime-se geometricamente por um movimento de precessão do spin fictício, cujo vetor de rotação deste movimento de precessão é $\pm \vec{\Omega}(t)$, como foi definido na relação (3.74).

3.4.3 Oscilação de Rabi dentro da cavidade

Extenderemos o raciocínio anterior para estudar a evolução dos átomos através de sua passagem por uma cavidade de Ramsey. Consideraremos o sistema representado na figura 3.7, cujo spin fictício interage com uma radiação oscilante ressonante com a frequência natural dos átomos: $\Omega_0 = 0$ [15].

Figura 3.7: Evolução do spin fictício durante as oscilações de Rabi, dentro das cavidade de interação.

Os átomos encontram-se inicialmente no estado $|f\rangle$, o que corresponde ao spin fictício apontando na direção $-\hat{z}$. Ao entrar na cavidade, o spin fictício sofre uma rotação em torno do eixo fixo $\hat{x}$, com uma pulsação angular $-bf(t)$. Assim, ao saírem da primeira região de interrogação, após um intervalo de tempo τ , o spin gira de um ângulo

$$\vec{\mathcal{P}}(\tau) = - \int_0^\tau bf(t) dt = -b\tau_{eff} \quad (3.90)$$

por definição

$$\tau_{eff} = \int_0^t f(t) dt \quad (3.91)$$

Fisicamente, esta rotação de $\vec{S}$ corresponde a uma oscilação entre a população dos dois estados da transição relógio e que são denominadas de oscilações de Rabi. τ_{eff} é a duração efetiva da interação e ela depende da velocidade atômica na cavidade e da geometria do modo da oscilação. O ângulo $\vec{\mathcal{P}}(\tau)$ caracteriza o campo de microonda no interior da cavidade.

No espaço de estados, esta rotação do spin fictício corresponde à evolução do ket $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ sob o efeito do operador evolução $U(t)$, definido por

$$U(t) = \exp\left(-i\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}}(t)}{2}\right) \text{ com } \vec{\mathcal{P}}(t) = - \int_0^t \vec{\Omega}(t') dt' \quad (3.92)$$

Assim, podemos escrever a equação de Shrödinger como:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = -\frac{\hbar}{2} \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma} |\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad (3.93)$$

e integrando-a diretamente, obtemos:

$$\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = U(t) \left| \tilde{\Psi}(0) \right\rangle \quad (3.94)$$

Assim, quando $\vec{\mathcal{P}}(t) = -\pi/2$ na cavidade, isto é, $b\tau_{eff} = +\pi/2$, e após a passagem dos átomos pela cavidade de Ramsey, a transição relógio será dada pela função de onda atômica:

$$\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|f\rangle + i|e\rangle)$$

onde os átomos se encontram em uma superposição coerente de dois estados.

3.4.4 Interpretação Física das Franjas de Ramsey através do Spin Fictício

Como já foi dito anteriormente, nos relógios atômicos, a transição atômica é sondada segundo o método de Ramsey, composto de dois impulsos de duração τ , separados por um período de evolução livre dos átomos de duração $T \gg \tau$. Este método de interrogação tem a duração total de $T + 2\tau \approx 50ms$, no caso do nosso relógio, e as franjas de interferência observadas terão uma largura de linha equivalente a $1/2(T + 2\tau) \sim 757Hz$. Na condição $|\Omega_0| \ll |b|$, o vetor $\vec{\Omega}$ é quase colinear ao eixo Ox ($\cos \theta \simeq 0$).

Podemos descrever a evolução do spin fictício devido à passagem pelas cavidades da seguinte forma: Inicialmente os átomos entram na primeira cavidade de interrogação no estado $|f\rangle$ e sofrem um pulso $\frac{\pi}{2}$, isto é, eles realizam uma rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo x. Após a passagem pela primeira cavidade, os átomos evoluem segundo $f(t) = 0$, de modo que $\vec{\Omega}(t) = \vec{cte} = \Omega_0 \hat{z}$. Assim, o spin gira livremente do eixo z à pulsação $-\Omega_0$. Durante um intervalo de tempo T, ele efetuará um ângulo $-\Omega_0 T$. A passagem pela segunda cavidade de interrogação é idêntica à primeira. O spin fictício rotaciona de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo x. Na saída da segunda região de interação, a diferença populacional dos átomos no feixe é representada pela projeção do spin fictício sobre o eixo z. Para o caso estudado até agora, $\Omega_0 = 0$, $\phi = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$, a probabilidade de Ramsey é máxima e a população dos dois estados é completamente trocada, isto é, os spin fictício está inicialmente apontado na direção $-\hat{z}$ evolui durante a interrogação de Ramsey e sai apontado na direção $+\hat{z}$. A evolução do spin fictício durante a interrogação de Ramsey é representada pela figura 3.8.

3.5 A Transição Relógio

A equação (3.41) representa a probabilidade de transição entre os estados hiperfinos $|F = 3, m_F = 0\rangle$ e $|F = 4, m_F = 0\rangle$ para os átomos monocinéticos de velocidade v . Na realidade, os átomos que constituem o feixe obedecem a lei de distribuição de Maxwell.

Figura 3.8: A representação geométrica de um spin fictício dentro de uma cavidade de Ramsey. Neste caso a frequência de interrogação é a mesma da frequência de transição atômica e a probabilidade de transição do entre os estados $|f\rangle$ e $|e\rangle$ é máxima e vale 1.

Por isso, é plausível tratarmos a velocidade atômica v e o tempo de voo τ como variáveis aleatórias, isto é, elas serão descritas em termos de uma função densidade de probabilidade [26][19]. Neste caso, o sinal detectado no detector, é o valor médio da probabilidade $\mathcal{P}_2(\tau)$,

$$\overline{\mathcal{P}}(\Omega_0, b) = \int_0^\infty f(\tau) \mathcal{P}_2(\tau) d\tau \quad (3.95)$$

Lembramos que $\mathcal{P}_2(\tau)$ é uma função da dessintonia da cavidade, Ω_0 , da frequência de Rabi b , e do tempo de voo τ . Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\tau) &= \mathcal{P}_2(\Omega_0, b, \tau) \\ \overline{\mathcal{S}}(\Omega_0, b) &= \int_0^\infty f(\tau) \mathcal{P}_2(\Omega_0, b, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.96)$$

$f(\tau)$ é a função densidade de probabilidade de τ , onde $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$.

Na prática o sinal medido pelo detetor, $y(\Omega_0, b)$, é dado por

$$y(\Omega_0, b) = c_1 \overline{\mathcal{S}}(\Omega_0, b) + c_2 \quad (3.97)$$

onde $\overline{\mathcal{S}}(\Omega_0, b)$ é a taxa de transição média, c_1 e c_2 representam um ganho e um deslocamento do sinal, respectivamente. Ele apresenta uma variedade de sinais que variam no tempo e que dependem de diversos parâmetros. Os parâmetros que controlamos são a frequência de Rabi, b , e a distribuição de velocidade, $f(\tau)$, que ajustamos graças ao controle de temperatura do forno.

O espectro de ressonância ilustrado na figura 3.1, mostra que a amplitude da probabilidade de transição varia com m . Por conseguinte, esta depende da pulsação de Rabi [32] de acordo com a expressão:

$$b_{(m_F)} = b_{(0)} \sqrt{1 - \left(\frac{m_F}{4}\right)^2}$$

onde $b_{(0)}$ é a frequência de Rabi para a transição relógio. Além disso, a distribuição do tempo de voo $f(\tau)$ também depende do número quântico m_F e escrevemos $f(\tau) = f_{m_F}(\tau)$. Desta forma, o sinal registrado pelo detetor é escrito utilizando-se a equação (3.97)

Figura 3.9: Franja de Ramsey para a transição relógio com a potência injetada na cavidade à 2.5dBm abaixo da potência ótima.

$$y(\Omega_0, b) = c_{1(m_F)} \overline{\mathcal{S}_{(m_F)}}(\Omega_0, b_{(m_F)}) + c_2$$

onde da equação (3.96), reescrevemos

$$\overline{\mathcal{S}}(\Omega_0, b) = \int_0^\infty f_{(m_F)}(\tau) \mathcal{P}_2(\Omega_0 - \omega_{(m_F)}, b_{(m_F)}, \tau) d\tau$$

com $\omega_{(m_F)} = 2\pi\nu_{m_F}$ e $c_{1(m_F)}$ é um fator de ganho que depende do número de átomos que populam o nível m_F . A Franja de Ramsey mostrada na figura 3.9 foi registrada para a potência de microondas maximizada e a sua largura de linha característica é 972 Hz.

A forma da franja, bem como sua largura de linha dependem da pulsação de Rabi e da distribuição do tempo de voo. A figura 3.10 mostra a dependência da amplitude da probabilidade de transição como função da potência injetada na cavidade.

Para registrarmos esta variação da probabilidade de transição como função da potência injetada na cavidade, usamos um amplificador de hiperfrequência com ganho de 23 dBm.

Como foi explicado anteriormente, a potência de operação é 2,5 dBm inferior ao valor ótimo determinado, em virtude de reduzirmos os efeitos das transições vizinhas sobre a transição relógio. A figura 3.11 mostra o registro de uma franja de Ramsey a 2,5 dBm abaixo da potência ótima determinada. É possível observar que a amplitude da taxa de transição não é afetada quando diminuimos o valor de potência, além de ganharmos na estabilidade.

À priori, nós não conhecemos o valor nominal de b , apenas os valores de potência foram registrados. Nas seções posteriores mostraremos um método para calcular a frequência de Rabi por meio de um tratamento matemático da franja de Ramsey.

Figura 3.10: Taxa de transição experimental em função da potência injetada P e $B_0 \simeq 20\mu T$.

Figura 3.11: Franja de Ramsey da transição relógio para $b = b_{opt}$.

3.5.1 Parte Central da Franja de Ramsey

Aproximação de ordem zero

A parte central da franja de Ramsey é caracterizada pela relação $\Omega_0 \ll b$, tal que se possa considerar a aproximação $\frac{\Omega_0}{b} = 0$. Usando esta igualdade e considerando $\phi = 0$, a probabilidade de transição resultará em

$$\mathcal{P}(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) [1 + \cos(a\Omega_0\tau)] \quad (3.98)$$

onde $a = \frac{L}{1}$. Usando as identidades trigonométricas listadas abaixo

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2b\tau)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)] \end{aligned} \quad (3.99)$$

a equação (3.98) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega_0, b, \tau) &= \frac{1}{4} [1 - \cos(2b\tau)] + \\ &\frac{1}{4} \left[\cos(a\Omega_0\tau) - \frac{1}{2} \cos[(2b + a\Omega_0)\tau] - \frac{1}{2} \cos[(2b - a\Omega_0)\tau] \right] \end{aligned} \quad (3.100)$$

e a taxa de transição média pode ser escrita, utilizando-se a equação (3.96), em termos da frequência de Rabi. Após algumas manipulações matemáticas, onde levamos em conta a distribuição de velocidade, obtemos:

$$s(\Omega_0, b) = \frac{1}{4} \left[F(a\Omega_0) - \frac{1}{2} F(2b + a\Omega_0) - \frac{1}{2} F(2b - a\Omega_0) + \underbrace{1 - F(2b)}_{c_1(b)} \right] \quad (3.101)$$

onde $F(\xi)$ é a transformada cosseno de Laplace dada por

$$F(\xi) = \int_0^\infty f(\tau) \cos(\xi\tau) d\tau \quad (3.102)$$

a equação (3.101) mostra que a franja de Ramsey é composta por três termos translacionais além de $F(a\Omega_0)$ mais um deslocamento $c_1(b)$ que independe da frequência de Rabi. Esta equação também pode ser escrita utilizando-se os impulsos de Dirac e o operador convolução da forma

$$\begin{aligned} s(\Omega_0, b) &= \frac{1}{4} F(a\Omega_0) * \left[\delta(a\Omega_0) - \frac{1}{2} \delta(2b - a\Omega_0) - \frac{1}{2} \delta(2b + a\Omega_0) \right] + \frac{1}{4} c_1(b) \\ &= \frac{1}{4} F(a\Omega_0) * p(\Omega_0) + \frac{1}{4} c_1(b) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Aproximação de primeira ordem

As aproximações de primeira ordem são indispensáveis, pois estas conservam os termos $\frac{\Omega_0}{b}$ na probabilidade de transição e despreza termos de ordens superiores. Ela atende à certos pontos da franja de Ramsey que não podem ser negligenciados para o cálculo de determinados efeitos com amplitude apreciável, como é o caso do efeito Doppler de segunda ordem e do deslocamento de fase.

A probabilidade de que os átomos façam uma transição quando passam pelos dois braços da cavidade pode ser escrita como [30]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega_0, b, \tau) = & \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) [1 + \cos(a\Omega_0\tau)] - \\ & 2\frac{\Omega_0}{b} \sin^2\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(b\tau) \sin(a\Omega_0\tau) \end{aligned} \quad (3.104)$$

A probabilidade de transição pode ser reescrita, após algumas manipulações trigonométricas, como

$$\mathcal{P}(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) \left[1 + \cos(a\Omega_0\tau) - 2\frac{\Omega_0}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a\Omega_0\tau) \right] \quad (3.105)$$

e, conseqüentemente, a taxa de transição média escrita em função da transformada cosseno (3.102) sobre a distribuição do tempo de voo pode ser reescrita:

$$s(\Omega_0, b) = \frac{1}{4} \left[1 - F(2b) + F(a\Omega_0) + 2\frac{\Omega_0}{b} F(b + a\Omega_0) - 2\frac{\Omega_0}{b} F(b - a\Omega_0) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\Omega_0}{b}\right) F(2b + a\Omega_0) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\Omega_0}{b}\right) F(2b - a\Omega_0) \right] \quad (3.106)$$

Esta equação é importante quando aplicada à análise das franjas do padrão para determinar a frequência de Rabi.

3.5.2 Determinação da frequência de Rabi

Como demonstramos anteriormente, a taxa de transição para uma interrogação de Ramsey depende da amplitude da perturbação representada por meio da quantidade b . A frequência de Rabi dos átomos foi definida em (3.21). Em geral ela pode ser determinada medindo-se a potência do sinal injetado dentro da cavidade de interrogação. O método utilizado aqui é mais fácil, pois determinamos a frequência de Rabi por meio de um tratamento matemático da franja de Ramsey [24][30][33].

A partir da equação (3.98), podemos determinar a frequência de Rabi com precisão, se tomarmos a derivada segunda da franja de Ramsey. Assim, derivando duas vezes a função $s(\Omega_0, b)$ com relação a Ω_0 , podemos definir

Figura 3.12: Derivada Segunda do padrão de Ramsey quando a potência injetada na cavidade for 7.17 dBm, ou seja, 2.5 dBm abaixo da potência ótima. A distância entre os dois picos é proporcional à frequência de Rabi.

$$\begin{aligned}
 s_2(\Omega_0) &= \frac{\partial^2}{\partial \Omega_0^2} = \int_0^\infty \tau^2 f(\tau) \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) [1 + \cos(a\Omega_0\tau)] d\tau \\
 &= -\frac{a^2}{2} \int_0^\infty \tau^2 f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos(a\Omega_0\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Utilizando as identidade trigonométricas dadas em (3.99), e procedendo de maneira similar à feita anteriormente, obtemos

$$s_2(\Omega_0) = -\frac{1}{4} \left[F_2(a\Omega_0) - \frac{1}{2} F_2(2b + a\Omega_0) - \frac{1}{2} F_2(2b - a\Omega_0) \right] \tag{3.108}$$

onde $F_2(\xi)$ é a transformada de Laplace de $a^2\tau^2 f(\tau)$. A multiplicação de τ^2 por $f(\tau)$ causa o efeito de alargamento no domínio temporal. Isto se traduz como uma função $F_2(\xi)$ bem mais estreita do que $F(\xi)$, permitido determinar acuradamente as posições dos picos no domínio de frequência. Na figura ilustrada em 3.12, temos a derivada segunda da franja experimental medida quando a potência injetada na cavidade é 2.5 dBm abaixo da potência ótima, 7.17 dBm. Este valor corresponde ao nosso parâmetro operacional.

O intervalo entre os dois picos é $2b$. A partir de $s_2(\Omega_0)$ nós obtemos (49197 ± 16.21) rad/s. As incertezas provêm da determinação das posições dos picos. Calculamos também outras três frequências de Rabi para três potências diferentes: quando ela for igual a potência ótima, 9.75dBm, quando for acima da potência ótima, 11.3 dBm e quando esta estiver muito abaixo da potência ótima, 2.2 dBm. Os valores obtidos para b usando o método da derivada segunda da franja de Ramsey estão tabelados a seguir:

P (dBm)	b (± 16.21)
11.3	62.201,7
9.75	58.431
7.17	49.197
2.2	33.299,9

Tabela 3.1: Freqüência de Rabi

Após analisarmos o padrão de interferência do relógio atômico, utilizamos o método descrito por Ala'a Makdissi e Emric le Clerq [33] para determinar a freqüência de Rabi com precisão. Para isso analisamos a derivada segunda da franja de Ramsey, onde o valor de b é proporcional aos dois picos da figura 3.12. Lembrando que a freqüência de Rabi é definida como $b = \mu_B B / \hbar$, onde B é o campo magnético da interrogação dos átomos, podemos determiná-la através da medida da potência do sinal de hiperfreqüência injetado na cavidade e da distribuição do tempo de voo. No entanto, a determinação de b desta forma pode levar a erros de medidas indesejáveis. A vantagem do método descrito por *Makdisse et al* [33] é a estimativa da freqüência de Rabi diretamente da franja experimental sem que para isso seja necessário conhecermos a distribuição de velocidade dos átomos no feixe, permitindo melhor precisão na sua determinação. Aplicando o método determinamos b para quatro potências diferentes listadas na Tabela 3.1. Observamos que os valores determinados estão em concordância com os valores usuais encontrados na literatura.

Capítulo 4

Deslocamentos de Frequência na Transição Relógio.

O segundo foi definido baseado na transição hiperfina entre os dois níveis do estado fundamental dos átomos de Cs quando estes se encontram em repouso, isolados e no espaço livre [34]. Tais condições não são satisfeitas em um relógio atômico real, onde ocorre a reprodução do segundo. Esta frequência apresenta deslocamentos de sua definição, que apesar de pequenos, são mensuráveis. É necessário, portanto, conhecer muito bem as incertezas em torno destes deslocamentos e, sempre quando for possível, suprimir estes erros.

Neste capítulo calcularemos alguns efeitos conhecidos e que levam a degradação da frequência relógio com relação à definida anteriormente. Além disso, descreveremos os métodos de medida usados para determiná-los.

Após o estudo teórico destes efeitos sistemáticos, descreveremos o método experimental e os deslocamentos na frequência relógio medida causados por diversos erros sistemáticos. Neste capítulo consideraremos cada um deles separadamente e depois faremos uma avaliação da acurácia de cada uma das medidas. Destingüiremos os erros de acordo com a sua origem. Estudamos três categorias diferentes de efeitos: os deslocamentos devido aos efeitos relativísticos, como o efeito Doppler de segunda ordem e ao potencial gravitacional; outra fonte de erro bastante comum deve-se ao fato dos átomos não estarem isolados mas submetidos a campos magnéticos e elétricos espúrios que afetam a frequência natural dos átomos de Césio; e analisaremos os efeitos do campo da microondas em si, como os deslocamentos de frequência induzidos devido ao "Cavity Pulling" e ao "Rabi Pulling".

4.1 Perturbação sobre a Transição Relógio

Para calcular o efeito de uma perturbação sobre a frequência de ressonância utilizaremos o método desenvolvido por Makdisse e Le Clerq [30][32][28], que propõe uma expressão geral para todos os efeitos perturbadores. De forma geral, a frequência de

transição atômica medida com um relógio atômico não é exatamente ω_0 , que é a frequência de ressonância do átomo em repouso livre de qualquer perturbação. A frequência será deslocada por uma quantidade $\Delta(\tau)$ devido a diversos agentes perturbadores. Na presença da perturbação, a frequência de transição medida é deslocada de $\omega_0 + \Delta(\tau)$, e a dessintonia entre a frequência angular do oscilador local e a frequência de transição atômica, é dada por

$$\Omega_0 - \Delta(\tau) = \omega - \omega_0 - \Delta(\tau) \quad (4.1)$$

A probabilidade de transição de Ramsey, utilizando a aproximação de 1ª ordem, equação (3-13), é reescrita em função desta dessintonia por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Delta(\Omega_0, b, \tau) = & \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) [1 + \cos(a\tau(\Omega_0 - \Delta(\tau)))] - \\ & - 2 \frac{\Omega_0 - \Delta}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a\tau(\Omega_0 - \Delta(\tau))) \end{aligned} \quad (4.2)$$

e a taxa de transição medida é

$$s_\Delta(\Omega_0, b) = \int_0^\infty f(\tau) \mathcal{P}_\Delta(\Omega_0, b, \tau) d\tau \quad (4.3)$$

onde $f(\tau)$ é a distribuição do tempo de voo dado pela distribuição de Maxwell

$$f(\tau) = \frac{4\tau_0^3}{\sqrt{\pi}\tau^4} \exp\left(-\frac{\tau_0^2}{\tau^2}\right) \quad (4.4)$$

Na ausência de perturbação, $\Delta = 0$, a taxa de transição de Ramsey, $s_\Delta(\Omega_0, b)$, é uma função par e simétrica com relação à origem $\Omega_0 = 0$. Quando a perturbação $\Delta(\tau)$ for independente do tempo de voo τ , ela provocará apenas um deslocamento na franja, podendo ser escrita na forma $\Delta(\tau) = \lambda$, tal que o sinal detectado é uma função simétrica com relação à origem $\Omega_0 = \lambda$. Quando $\Delta(\tau)$ for uma função de τ , a probabilidade de transição (4.2) deverá ser reescrita como

$$\mathcal{P}_\Delta(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{2} \sin^2 b\tau \left\{ \frac{1 + \cos a\tau\Delta(\tau) [\cos a\tau\Omega_0 - 2\frac{\Omega_0 - \Delta}{b} \tan(\frac{b\tau}{2}) \sin a\tau\Omega_0]}{\sin a\tau\Delta(\tau) [\sin a\tau\Omega_0 + 2\frac{\Omega_0 - \Delta}{b} \tan(\frac{b\tau}{2}) \cos a\tau\Omega_0]} + \right\} \quad (4.5)$$

Esta função pode ser decomposta numa soma de uma função par, dependente de Ω_0 , e de uma função ímpar. Portanto, a taxa de transição, (4.3), se decompõe na presença de um efeito perturbativo

$$s_\Delta(\Omega_0) = h(\omega - \omega_0) + g(\omega - \omega_0) \quad (4.6)$$

onde $h(\omega - \omega_0)$ defini uma função par simétrica com relação a origem ω_0 . Quando o efeito perturbativo for muito pequeno, isto é, quando $a\tau\Delta(\tau) \ll 1$, a função $h(\omega - \omega_0)$ é escrita como:

$$h(\Omega_0) = \frac{1}{2} \int f(\tau) \sin^2(b\tau) \left[1 + \cos(a\tau\Omega_0) - 2\frac{\Omega_0}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a\Omega_0\tau) \right] d\tau + O(\Delta^2) \quad (4.7)$$

A função $g(\omega - \omega_0)$, é ímpar e antisimétrica com relação a ω_0 . Se considerarmos novamente o caso de uma perturbação bem pequena, nós temos:

$$g(\Omega_0) = \frac{1}{2} \int f(\tau) \sin^2(b\tau) \Delta(\tau) \left[\frac{a\tau \sin(a\tau\Omega_0) - \frac{2}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) a\tau \cos(a\Omega_0\tau)}{+ \sin(a\Omega_0\tau)} \right] d\tau + O(\Delta^2) \quad (4.8)$$

Desta forma, a dependência de $\Delta(\tau)$ com τ , pode levar a efeitos de translação ou de deformação. Nós utilizamos uma modulação lenta de frequência, com uma amplitude de modulação ω_m , para determinar precisamente o centro da franja de Ramsey. O sinal medido durante um ciclo corresponde à frequência ω_m , escrita da seguinte forma

$$s_1 = s_\Delta(\Omega_0 + \omega_m) = s(\omega_m) + \Omega_0 \left. \frac{\partial s_\Delta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} \quad (4.9)$$

Para o próximo ciclo obtemos o sinal s_2 , substituindo-se ω_m por ω_{-m} e o sinal medido correspondente será

$$s_2 = s_\Delta(\Omega_0 - \omega_m) = s(-\omega_m) + \Omega_0 \left. \frac{\partial s_\Delta}{\partial \omega} \right|_{\omega=-\omega_m} \quad (4.10)$$

calculando a (4.9) e (4.10) para a função par h e a função ímpar g , obtemos

$$\begin{aligned} h(\omega_m) &= h(-\omega_m) \\ \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} &= - \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=-\omega_m} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$\begin{aligned} g(\omega_m) &= -g(-\omega_m) \\ \left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} &= \left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=-\omega_m} \end{aligned} \quad (4.12)$$

O sinal de erro que é utilizado para a correção da frequência de interrogação é travado no máximo de ressonância e dada por :

$$e = s_1 - s_2 = 2\Omega_0 \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} + 2g(\omega_m) \quad (4.13)$$

Após vários ciclos de correção, o sinal de erro tende a se anular, e a frequência angular de interrogação convergirá para o valor

$$e = 0 \implies \Omega_0 = \omega - \omega_0 = \frac{g(\omega_m)}{\left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}} \quad (4.14)$$

conseqüentemente, o deslocamento de frequência medido para um ciclo de correção, devido ao efeito da perturbação será:

$$\nu_D = -\frac{g(\omega_m)}{2\pi \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}} = -\frac{g(\nu_m)}{h'(\nu_m)} \quad (4.15)$$

onde h' representa a derivada da franja de Ramsey não perturbada com relação à frequência ν . A partir da equação (4.7), deduzimos

$$h'(\nu_m) = -\pi \int f(\tau) \sin^2 b\tau \left[\frac{2}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) (\sin(a\omega_m\tau) + \omega_m a\tau \cos(a\Omega_0\tau)) + a\tau \sin(a\omega_m\tau) \right] d\tau \quad (4.16)$$

O resultado demonstrado na equação (4.15) nos permite calcular uma expressão geral válida para os diversos deslocamentos de frequência que afetam a transição relógio. Das equações (4.8) e (4.16), temos

$$\nu_\Delta = \frac{\int \Delta(\tau) A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau}{2\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (4.17)$$

onde

$$A(\omega_m, b, \tau) = \sin^2 b\tau \left[\frac{a\tau \sin(a\omega_m\tau) + \frac{2}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right)}{[\sin(a\omega_m\tau) + a\tau \cos(a\omega_m\tau)]} \right] \quad (4.18)$$

É importante acrescentar que a equação (4.17) é uma expressão válida para qualquer efeito que leva a um deslocamento de frequência na transição relógio. Quando a quantidade $\Delta(\tau) = \lambda$ é uma constante, isto é, quando ela não depende do tempo de vôo, ν_Δ se simplifica para $\lambda/2\pi$.

4.2 A Interpretação Geométrica da Perturbação sobre a Transição Relógio

Quando uma perturbação infinitesimal $d\vec{\Omega}(t)$ do vetor de rotação instantâneo $\vec{\Omega}$ perturbar um estado atômico $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ será induzida uma variação δP na probabilidade de transição e conseqüentemente um deslocamento $\delta\nu_{rel}$ na frequência relógio. Vamos desenvolver um cálculo perturbativo na frequência de transição do relógio interpretando geometricamente o seu efeito segundo a evolução do spin fictício $\vec{S}(t)$.

4.2.1 Cálculo da função sensibilidade $g(t)$

Na ausência de uma perturbação, os átomos que interagem com um campo oscilante durante um intervalo de tempo τ e efetuam um pulso $\frac{(2p+1)\pi}{2}$ com $p \in \mathbb{Z}$ tem o operador evolução dado por [15]

$$\begin{aligned} U_{12inter.}(\tau) &= \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_x \int_0^\tau (-bf(t) dt)\right) \\ &= \cos\left(\frac{b\tau_{eff}}{2}\right) + i\sigma_x \sin\left(\frac{b\tau_{eff}}{2}\right) \end{aligned}$$

e a sua solução para $b\tau_{eff} = (2p+1)\pi/2$ é

$$U_{1\text{inter.}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} [C(p)I + i\sigma_x S(p)] \quad (4.19)$$

onde

$$C(p) = \sqrt{2} \cos\left((2p+1)\frac{\pi}{4}\right) \text{ e } S(p) = \sqrt{2} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

Durante a evolução livre dos átomos, nós temos $bT = \varepsilon\frac{\pi}{2}$ com $\varepsilon = \pm 1$, dependendo do lado da franja de Ramsey que está sendo interrogada. Desta forma, o operador evolução será dado por

$$\begin{aligned} U_{livre}(\tau) &= \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_Z \int_0^\tau bdt\right) \\ &= \cos\left(\frac{bT}{2}\right) + i\sigma_Z \sin\left(\frac{bT}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(I + i\varepsilon\sigma_z) \end{aligned} \quad (4.20)$$

e ao fim da interrogação de Ramsey, o estado atômico será representado por

$$\left|\tilde{\Psi}(T+2\tau)\right\rangle_{\text{não perturb.}} = U_{2\text{inter.}}(\tau) U_{livre}(\tau) U_{1\text{inter.}}(\tau) |f\rangle \quad (4.21)$$

onde $|f\rangle$ representa o estado fundamental do átomo. Vamos supor que no instante inicial todos os átomos se encontram neste estado. Após calcularmos a equação (4.21), obtemos

$$\left|\tilde{\Psi}(T+2\tau)\right\rangle_{\text{não perturb.}} = -\frac{i\varepsilon}{\sqrt{2}}(|f\rangle - \varepsilon(-1)^p|e\rangle) \quad (4.22)$$

No caso de haver uma perturbação $d\vec{\Omega}(t)$ durante a segunda zona de interação do átomo com a cavidade e considerarmos $t=0$ no início desta segunda interação, o estado atômico inicial será descrito pela seguinte função de estado

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\Psi}(0)\right\rangle &= \frac{1}{2}(1 + i\varepsilon\sigma_Z)(C(p) + i\sigma_x S(p))|f\rangle \\ &= \frac{1+i\varepsilon}{2}(C(p)|f\rangle + \varepsilon S(p)|e\rangle) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Na presença de uma perturbação $d\vec{\Omega}$ durante a segunda interação, a equação evolução dos estados no referencial girante é escrita como

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle = -\frac{\hbar}{2} \left(\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}\right) \cdot \vec{\sigma} \left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle \quad (4.24)$$

onde $\vec{\Omega}$ é dado pela equação (3.74) e $d\vec{\Omega}$ é dado por

$$d\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} -bf(t) \sin \varphi(t) d\varphi(t) \\ bf(t) \cos \varphi(t) d\varphi(t) \\ d\Omega_0(t) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Quando a fase $\varphi(t)$ for igual a zero, $\vec{\Omega}$ e $d\vec{\Omega}$ podem ser reescritos como

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} bf(t) \\ 0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix} \text{ e } d\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ bf(t) d\varphi(t) \\ d\Omega_0(t) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Lembrando que o operador evolução $U(t)$ é um operador de rotação de ângulo de rotação $P(t)$:

$$U(t) = \exp\left(-i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}(t)}{2}\right) \text{ com } \vec{P}(t) = - \int_0^t \vec{\Omega}(t') dt' \quad (4.27)$$

O estado $|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle$ referente ao estado $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ quando este sofre uma rotação $-\vec{P}(t)$ é dado por

$$|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle = U^\dagger(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad (4.28)$$

Na ausência de uma perturbação, este estado é igual a $|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle = |\tilde{\tilde{\Psi}}(0)\rangle$. Na presença de uma perturbação, a transformação do hamiltoniano perturbado $-(\hbar/2) d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}$ por $U(t)$ é

$$-\left(\frac{\hbar}{2}\right) U^\dagger(t) d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} U(t)$$

e a equação evolução do estado $|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle$ é dada por

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle}{dt} = -\left(\frac{\hbar}{2}\right) U^\dagger(t) d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} U(t) |\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle \quad (4.29)$$

e por integração da equação (4.29), obtemos

$$|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle = \exp\left[i \int_0^t dt' U^\dagger(t') \frac{d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}}{2} U(t')\right] |\tilde{\tilde{\Psi}}(0)\rangle \quad (4.30)$$

com $|\tilde{\tilde{\Psi}}(0)\rangle = |\tilde{\Psi}(0)\rangle$. Considerando esta uma perturbação muito pequena, podemos expandir a equação (4.30) em série de Taylor e obtemos

$$|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle = \left[1 + i \int_0^t dt' U^\dagger(t') \frac{d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}}{2} U(t')\right] |\tilde{\Psi}(0)\rangle \quad (4.31)$$

Aplicando a equação (4.28) na equação (4.31) podemos escrever o estado quântico do átomo após sofrer uma perturbação durante a segunda região de interação como

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = |\tilde{\Psi}(t)\rangle_{\text{não perturb.}} + |\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle \quad (4.32)$$

onde $\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle_{\text{não perturb.}}$ é o estado quântico final do átomo quando este não sofreu uma perturbação e é dado por

$$\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle_{\text{não perturb.}} = U(t) \left| \tilde{\Psi}(0) \right\rangle \quad (4.33)$$

e $\left| d\tilde{\Psi}(t) \right\rangle$ é o estado atômico perturbado dado por

$$\left| d\tilde{\Psi}(t) \right\rangle = iA(t) \left| \tilde{\Psi}(0) \right\rangle \quad (4.34)$$

e o operador $A(t)$, que representa o operador de perturbação do estado inicial, é escrito como

$$A(t) = U(t) \int_0^t dt' U^\dagger(t') \frac{d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}}{2} U(t') \quad (4.35)$$

A probabilidade de transição do átomo após sofrer a perturbação é escrito como

$$P = \left| \langle e | \tilde{\Psi}(\tau) \rangle \right|^2 = \left| \langle e | \tilde{\Psi}(t)_{\text{não perturb.}} + d\tilde{\Psi}(t) \rangle \right|^2 \quad (4.36)$$

onde constatamos que

$$P = P_{\text{não perturb.}} + dP_2 \quad (4.37)$$

com

$$dP_2 = \langle e | d\tilde{\Psi}(\tau) \rangle \langle \tilde{\Psi}(t)_{\text{não perturb.}} | e \rangle + hc$$

onde o índice 2 indica a variação de probabilidade da transição induzida por uma perturbação durante a segunda interação. A $\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle_{\text{não perturb.}}$ é dada pela equação (4.33) e esta já foi calculada. $\left| d\tilde{\Psi}(t) \right\rangle$ é calculado como indica a equação (4.34), onde devemos primeiramente calcular $A(t)$. O seu cálculo conduz à:

$$A(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\tau (\mathcal{A}\sigma_y + \mathcal{B}\sigma_z) dt \quad (4.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & bf(t) d\varphi(t) [C(p) \cos P(t) - S(p) \sin P(t)] \\ & + d\Omega_0(t) [C(p) \sin P(t) - S(p) \cos P(t)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & bf(t) d\varphi(t) [-C(p) \sin P(t) - S(p) \cos P(t)] \\ & + d\Omega_0(t) [C(p) \cos P(t) - S(p) \sin P(t)] \end{aligned}$$

onde $\mathcal{P}(t) = -\int_0^t bf(t') dt'$. Após alguns cálculos podemos escrever:

$$dP_2 = -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau [-bf(t) d\varphi(t) \sin \mathcal{P}(t) + d\Omega_0 \cos \mathcal{P}(t)] dt \quad (4.39)$$

e, integrando por partes o primeiro termo da (4.39), obtemos finalmente

$$dP_2 = -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ d\varphi(T + \tau) + \int_{T+\tau}^{T+2\tau} \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] \cos(-\mathcal{P}(t)) dt \right\} \quad (4.40)$$

onde trasladamos o eixo temporal para $t \rightarrow t + T + \tau$.

Consideraremos o caso em que ocorre uma perturbação $d\vec{\Omega}(t)$ na primeira região de interação. Neste caso, o estado inicial do átomo não é mais dado pela equação (4.23), mas por $|f\rangle$. Também é possível aplicar o operador perturbação $iA(t)$ durante a primeira interação, com $A(t)$ dada pela equação (4.38). Desta forma, o estado final do átomo ao final da interrogação de Ramsey é escrito como

$$\left| d\tilde{\Psi}(T + 2\tau) \right\rangle = U_{2\text{aint}}(\tau) U_{\text{livre}}(T) iA(\tau) |f\rangle \quad (4.41)$$

e utilizando as equações (4.19) e (4.20), obtemos

$$\left| d\tilde{\Psi}(T + 2\tau) \right\rangle = \frac{1}{2} (IC(p) + i\sigma_x S(p)) (I + i\varepsilon\sigma_z) iA(\tau) |f\rangle \quad (4.42)$$

e repetindo os mesmos cálculos feitos para o caso de interação na segunda região de interação, obtemos que a probabilidade de transição na primeira é expressa por

$$dP_1 = \frac{\varepsilon}{2} (-1)^p \int_0^\tau [bf(t) d\varphi(t) \cos \mathcal{P}(t) + d\Omega_0 \sin \mathcal{P}(t)] dt \quad (4.43)$$

e integrando o primeiro termo em partes, obtemos

$$dP_1 = -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ (-1)^p \int_0^\tau \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] \sin(-\mathcal{P}(t)) dt - d\varphi(\tau) \right\} \quad (4.44)$$

Por fim, vamos considerar uma perturbação na região livre entre as duas cavidades de microonda. Nesta região, a frequência de Rabi b é nula e a perturbação é escrita da seguinte forma

$$d\vec{\Omega} = d\Omega_0 \hat{z}$$

O estado inicial $\left| \tilde{\Psi}(0) \right\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Psi}(0) \right\rangle &= U_{1\text{aint}}(\tau) |f\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (IC(p) + i\sigma_x S(p)) |f\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (C(p) |f\rangle + iS(p) |e\rangle) \end{aligned}$$

o estado final é dada pela equação (4.32) e o operador perturbação é obtido através das relações (4.20) e (4.35) e que conduzem a

$$A(T) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_\tau^{T+\tau} (i\varepsilon I + \sigma_z) d\Omega_0 dt \quad (4.45)$$

Ao calcularmos o estado quântico final do átomo, após efetuar a interrogação de Ramsey aplicando o operador dado na equação (4.19), obtemos

$$\langle e \left| d\vec{\Psi}(T+2\tau) \right\rangle = -\frac{i\varepsilon(-1)^p}{2\sqrt{2}} \int_{\tau}^{T+\tau} d\Omega_0 dt \quad (4.46)$$

Utilizando a equação (4.37), a expressão da probabilidade de transição devido a uma perturbação durante a região livre é

$$dP_{livre} = -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\tau}^{T+\tau} d\Omega_0 dt \quad (4.47)$$

Finalmente, as flutuações totais da probabilidade de transição são calculados somando-se linearmente as probabilidades individuais dadas pelas equações (4.40), (4.44) e (4.47). Obtemos

$$\begin{aligned} dP &= dP_1 + dP_{livre} + dP_2 \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ (-1)^p \int_0^{\tau} \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] \sin(-\mathcal{P}(t)) dt - d\varphi(\tau) \right\} \\ &\quad -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\tau}^{T+\tau} d\Omega_0 dt \\ &\quad -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ d\varphi(T+\tau) + \int_{T+\tau}^{T+2\tau} \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] \cos(-\mathcal{P}(t)) dt \right\} \end{aligned}$$

se fizermos

$$d\varphi(T+\tau) - d\varphi(\tau) = \int_{\tau}^{T+\tau} \frac{d(d\varphi(t))}{dt} dt$$

obtemos para dP

$$\begin{aligned} dP &= -\frac{\varepsilon}{2} (-1)^p \int_0^{\tau} \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] \sin(-P(t)) dt \\ &\quad -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\tau}^{T+\tau} \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] dt \\ &\quad -\frac{\varepsilon}{2} \int_{T+\tau}^{T+2\tau} \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] \cos(-P(t)) dt \end{aligned} \quad (4.48)$$

que pode ser reescrita como

$$dP = -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{T+2\tau} \left[\frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\Omega_0 \right] g(t) dt \quad (4.49)$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} (-1)^p \sin(-\mathcal{P}(t)) & \text{se } t \in [0, \tau], \\ +1 & \text{se } t \in [\tau, T+\tau] \\ \cos(-\mathcal{P}(t)) & \text{se } t \in [T+\tau, T+2\tau] \end{cases} \quad (4.50)$$

Figura 4.1: Evolução do spin fictício $\vec{S}(t)$ após interagir com a primeira cavidade de interação dado por uma dessintonia de Dirac $d\Omega_0(t) = \alpha\delta(t - t')$.

Figura 4.2: Evolução do spin fictício $\vec{S}(t)$ ao passar pela região livre de radiação oscilatório e pela segunda cavidade de interrogação.

e com

$$\mathcal{P}(t) = - \int_0^t b f(t') dt' = -(2p+1) \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\tau_{ef}} \int_0^t f(t') dt' \quad (4.51)$$

O cálculo precedente concerne a um único átomo. Na prática, a probabilidade de transição deve ser calculada sobre a distribuição de velocidade dos átomos. A expressão (4.50) define a função sensibilidade $g(t)$ como a resposta da probabilidade de transição $P(t)$ à dessintonia Ω_0 .

Para entendermos melhor como a função $g(t)$ auxilia no entendimento da degradação da frequência relógio devido a uma perturbação, vamos analisá-lo segundo a evolução de um spin fictício $\vec{S}(t)$. Consideraremos uma perturbação dada por uma dessintonia de Dirac da cavidade $d\Omega_0(t) = \alpha\delta(t - t')$, que ocorre durante a primeira zona de interação ($0 \leq t' \leq \tau$). Supomos que durante a primeira e a segunda interação do átomo com o campo oscilatório, o spin fictício $\vec{S}(t)$ efetua um pulso $\pi/2$. Portanto, durante a primeira interação, como ilustrado na figura 4.1, $\vec{S}(t)$ efetuará uma rotação de um ângulo $\mathcal{P}(\tau) = -\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo x . Devido a dessintonia de Dirac, $\vec{S}(t)$ efetuará uma rotação suplementar de um ângulo $-\alpha$ no instante t' ao redor do eixo z (no caso da figura 4.1 $\alpha > 0$). Desta forma, $\vec{S}(t)$ adquire uma componente $+\alpha \sin \mathcal{P}(t')$ sobre o

eixo x , como mostra a figura 4.1. Esta componente se propaga livremente entre as duas regiões de interação (girando de um ângulo $-\varepsilon\pi/2$ em torno do eixo z). E, por fim, na segunda região de interação $\vec{S}(t)$ efetua um giro de $\pi/2$ em torno do eixo x . Estes dois últimos processos estão ilustrados na figura 4.2. Assim, a saída da segunda região de interação $\vec{S}(t)$ adquire uma componente $dS_z(T+2\tau) = +\varepsilon\alpha \sin \mathcal{P}(t')$, que de acordo com a equação (4.49) esta componente se traduz por uma variação da probabilidade de transição:

$$dP = \frac{1}{2}dS_z(T+2\tau) = +\frac{1}{2}\varepsilon\alpha \sin \mathcal{P}(t') \quad (4.52)$$

lembrando que para um pulso $\pi/2$ a função sensibilidade é $g(t') = \sin(-\mathcal{P}(t'))$ quando $0 \leq t' \leq \tau$.

Nas seções seguintes calcularemos a incerteza em torno da frequência relógio devido aos deslocamentos induzidos pelos efeitos relativísticos, como o campo gravitacional e o efeito Doppler de segunda ordem, a campos magnéticos espúrios e aos efeitos da microondas como o “Cavity Pulling” e ao “Rabi Pulling”.

4.3 Deslocamentos de Frequência Relativísticos

4.3.1 Efeito Gravitacional

O efeito gravitacional é uma correção relativística devido as variações do potencial gravitacional dependendo da altitude em que se encontra um relógio. Este efeito provoca um deslocamento na frequência de qualquer oscilador com relação a uma frequência fixada em um potencial de referência[32]. Ela independe da velocidade atômica. Este efeito apenas translada as franjas de Ramsey sem no entanto deformá-la. Independentemente de sua natureza, a frequência de um oscilador depende do potencial gravitacional U da posição ocupada por ele[26]. De acordo com a definição do TAI, a origem do deslocamento do potencial gravitacional para um relógio sobre a superfície da Terra, ou bastante próxima a sua superfície, é definida com relação a superfície do geóide. A frequência de um relógio é deslocada por uma quantidade $\Delta\nu_G$, quando colocado a uma altura h acima da geóide

$$\frac{\Delta\nu_G}{\nu_0} = -\frac{g}{c^2}h \quad (4.53)$$

onde g é a aceleração da gravidade e de acordo com a definição do 3º CGPM, na Conferência de Pesos e Medidas de 1901, o valor adotado para a aceleração da gravidade é 980.665 cm/s^2 e c é a velocidade da luz, $c = 299.792,458 \text{ Km/s}$, definido no 15º CGPM, em 1975. A altitude de São Carlos, cidade onde se encontra o Relógio Atômico do CePOF, é $h = 850\text{m}$ com uma incerteza de 50m . Esta altitude foi medida com um GPS (9390-6000 Datum). Desta forma, o deslocamento de frequência devido ao efeito gravitacional é de $\frac{\Delta\nu_G}{\nu_0} = -1.0 \times 10^{-17}$.

Figura 4.3: Dependência do deslocamento Doppler de segunda ordem como uma função da amplitude de modulação.

4.3.2 Efeito Doppler de Segunda Ordem

O efeito Doppler de segunda ordem está relacionado com a dilatação temporal prevista pela teoria da relatividade. Cada uma das componentes da velocidade no feixe contribui com um deslocamento dado por

$$\Delta\omega_D = -\omega_0 \frac{v^2}{2c^2}. \quad (4.54)$$

onde c é a velocidade da luz e v é a velocidade do átomo calculado para um tempo de voo τ pela relação $v = l/\tau$. Utilizaremos o método descrito em [30] para calcular o efeito Doppler de segunda ordem. Este método consiste em operarmos o sinal da franja de Ramsey, onde a variação do deslocamento é uma função da amplitude de modulação e é obtida através da derivada segunda da franja de Ramsey.

Para uma perturbação muito curta, $a\tau\Delta \ll 1$, substituímos a equação (4.54) na (4.17)

$$\nu_D = -\frac{\nu_0 l^2}{2c^2} \frac{\int \frac{1}{\tau^2} A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau}{\int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (4.55)$$

A figura 4.3 mostra a dependência do deslocamento Doppler de segunda ordem sobre a amplitude da modulação obtida a partir da equação (4.55). Tomando o valor da temperatura do forno, estimamos a velocidade média dos átomos no feixe, $(200 \pm 7) \text{ m/s}$. Uma modulação típica de 45 Hz na franja de Ramsey leva a um deslocamento relativo de $\nu_D/\nu_0 = -(1.65 \times 10^{-13})$.

4.4 Deslocamentos da Frequência de Transição

No sistema experimental do relógio atômico, os átomos não se encontram no espaço livre, mas experimentam um campo magnético estático que desloca a frequência de ressonância. Este campo magnético é aplicado aos átomos com o intuito de tirarmos vantagem sobre as regras de seleção e separar as sete transições hiperfinas $\Delta m_F = 0$. No entanto, é necessário conhecermos o valor deste deslocamento e sabermos como a sua variação afeta o nosso padrão. Para isso nós medimos a variação temporal do campo magnético estático, além da sua variação espacial com base no método descrito por Makdissi et al [28]

4.4.1 Efeito Zeeman Quadrático

A transição atômica realizada na presença de um campo magnético estático depende da amplitude deste campo. Vimos que a frequência de transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental, $\Delta m_F = 0$, é dada por

$$\nu_{m_F} = \nu_0 \sqrt{1 + \frac{m_F}{2}x + x^2} \quad (4.56)$$

onde $x \approx 3.0496B_0$, onde B_0 é a indução magnética em Tesla e ν_0 é a frequência de ressonância natural dos átomos. Nas condições normais de operação, o campo magnético é de intensidade $20\mu T$. A transição relógio, $m = 0$, corrigida para o efeito Zeeman quadrático é dada por

$$\nu_Z = \nu_0 \sqrt{1 + x^2}$$

como $x \sim 6 \times 10^{-5} \ll 1$, podemos expandir ν_Z em série de potência e obtemos para a transição relógio

$$\begin{aligned} \nu_Z &= \frac{\nu_0}{2} \langle x^2 \rangle = 4.2745 \times 10^{10} \langle B_0^2 \rangle \\ \text{onde, } \nu &= \nu_0 + \nu_Z \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde $\langle \rangle$ dá o valor médio do campo sobre a região de interação. Tomamos o valor médio sobre x e não sobre B_0 , pois ela nos dá um valor mais acurado e evita qualquer incerteza no que concerne à constante que relaciona x e B_0 . Na prática medimos o valor de $\langle x \rangle$ obtido por meio da frequência de ressonância das transições $m_F \neq 0$:

$$\nu_{m_F} = \nu_0 \left[1 + \frac{m_F \langle x \rangle}{4} + \langle x^2 \rangle \frac{(1 - m_F^2/16)}{2} \right] \quad (4.58)$$

Medimos, portanto, as frequências das transições $m_F = -1$ e $m_F = +1$, como mostra a figura 4.4.

Figura 4.4: As franjas de Ramsey para as transições hiperfinas $m_F = -1$ e $m_F = 1$.

Utilizando a equação (4.58) calculamos a diferença entre as frequências $\nu_{+1} - \nu_{-1}$ e dividimos por dois. Vejamos:

$$\frac{(\nu_{+1} - \nu_{-1})}{2} = \nu_0 \frac{\langle x \rangle}{4}$$

Escrevendo a equação acima em função de $\langle x \rangle$, obtemos

$$\langle x \rangle = \frac{(\nu_{+1} - \nu_{-1})}{2} \frac{4}{\nu_0} = 4 \frac{f_z}{\nu_0} \quad (4.59)$$

caracterizando a amplitude do campo magnético estático e f_z é a frequência Zeeman. Usando a aproximação $\langle x^2 \rangle \approx \langle x \rangle^2$, o deslocamento Zeeman para a transição relógio será dada por

$$\nu_z = 8 \frac{f_z^2}{\nu_0} \quad (4.60)$$

Em nosso relógio, a frequência Zeeman é 92 kHz e o deslocamento Zeeman de segunda ordem é $\nu_z = 7.3 Hz$.

Determinação da frequência Zeeman

As medidas de ν_{-1} e ν_{+1} foram feitas com uma precisão imposta pela estabilidade do relógio. Utilizando a equação (4.60), nós escrevemos

Figura 4.5: Variação do deslocamento Zeeman de segunda ordem em função do tempo.

$$\begin{aligned}\delta\nu_z &= \frac{16}{\nu_0} f_z \delta f_z \\ \frac{\delta\nu_z}{\nu_0} &= 2 \frac{\nu_z}{\nu_0} \frac{\delta f_z}{f_z}\end{aligned}\quad (4.61)$$

e a nossa incerteza relativa é de

$$\frac{\delta\nu_z}{\nu_0} = 1.5 \times 10^{-14} \text{ para } \delta f_z = 0.8 Hz \quad (4.62)$$

O campo magnético estático é alimentado por uma fonte de corrente que tem pequenas variações ao longo do tempo. Para determinar a incerteza no valor de f_z , medimos diariamente a frequência Zeeman, de modo que seja possível observar a variação temporal deste campo. Durante vinte dias, cinco vezes ao dia, medimos as transições ν_{+1} e ν_{-1} , e estudamos a forma de sua variação, nas condições normais de operação do nosso laboratório. A figura 4.5 mostra a variação da frequência Zeeman durante um período de vinte dias.

Observamos que entre o 10^o e o 19^o dia a frequência Zeeman cresceu consideravelmente. Isto ocorreu, porque durante estes dias a bobina de aprisionamento do relógio atômico tipo chafariz estava em funcionamento. No último dia, observamos que a frequência Zeeman retornou ao valor normal da intensidade do campo magnético estático aplicado. A figura 4.5 mostra que a medida diária da frequência Zeeman de segunda ordem garante uma variação de ν_z da ordem de $5 \times 10^{-3} Hz$. Portanto, a incerteza relativa no valor da medida temporal da frequência Zeeman é

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_0} = 5.45 \times 10^{-13} \quad (4.63)$$

O efeito Zeeman é extremamente importante nos padrões de frequência atômico, pois estamos interessados em ter acesso a transição relógio independente do campo. Sob a ação do campo magnético, o estado fundamental dos átomos de césio é desdobrado nas sete transições $\Delta F = \pm 1$, $\Delta m_F = 0$ tornando possível as sete transições observadas no conjunto de franjas de Ramsey. Esta perturbação depende da amplitude do campo magnético estático aplicado. Este campo deve ser muito bem controlado para podermos determinar com precisão a frequência de transição atômica. No entanto, o campo varia de forma não homogênea devido a diversos fatores como variações temporais na corrente que alimenta este campo magnético, aos inúmeros aparelhos e ferramentas magnéticas que se encontram nas vizinhanças do nosso relógio. Outra perturbação significativa advém do funcionamento das bobinas do aprisionamento magnético-óptico (MOT) do relógio tipo chafariz que se encontra a menos de 1m da região de interrogação do relógio atômico tipo feixe. Para aprisionar os átomos no chafariz atômico, as bobinas produzem um gradiente de campo, da ordem de 10 G/cm, resultando em uma incerteza na medida da frequência de transição atômico efetuada no relógio de feixe. Isto pode ser visto claramente no gráfico ilustrado na figura 4.5. Medimos as frequências de transição durante nove dias consecutivos com as bobinas funcionando e observamos um aumento médio de 100mHz no seu valor normal. Este resultado é muito importante para termos uma idéia tanto quantitativa como qualitativa deste efeito sobre a frequência de transição do relógio. Conseqüentemente vemos a dificuldade em operar com os dois padrões atômicos simultaneamente. Também fizemos testes quando as bobinas de desaceleração do experimento de condensação de Bose Einstein, que são realizadas no laboratório ao lado, estão ligadas e desligadas. Eles utilizam um solenóide de desaceleração alimentada com uma fonte de corrente a 45 A e também possuem uma bobina de aprisionamento que é alimentada com 10 A. Observamos que não houve nenhum efeito sistemático na frequência de transição medida pelo relógio.

Diferença entre o Campo Médio na Região Livre e a Região de Interação

O sinal de um relógio atômico é a superposição da franja de Ramsey sobre o pedestal de Rabi. O pedestal de Rabi é a probabilidade da transição ocorrer na primeira região de excitação e não na segunda, mais a probabilidade da transição ocorrer na segunda região de interação e não na primeira. Nas condições ideais, a franja de Ramsey está centrada no pedestal de Rabi. Se houver qualquer não homogeneidade no campo magnético estático ao longo da trajetória atômica através da cavidade de microonda, um deslocamento de frequência na linha de ressonância é observado e a franja de Ramsey não estará mais centrada no pedestal de Rabi.

Denominaremos B_0 como o valor médio do campo magnético estático na zona de vôo livre e B_1 e B_2 são os valores médios do campo magnético na primeira e na segunda região de interação respectivamente. Vamos supor que B_1 e B_2 estão muito próximos de B_0 , para que nos seja possível escrever x ($x = 3.0486B$) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + \varepsilon_1 \\x_2 &= x_0 + \varepsilon_2\end{aligned}\tag{4.64}$$

onde ε_1 e ε_2 são quantidades muito pequenas frente à x_0 . Assim, assumido a amplitude do campo magnético constante nas duas regiões de interação, a frequência de transição será ω'_0 na primeira zona de interação e ω''_0 na segunda, a probabilidade de transição pode ser calculada de maneira similar a efetuada anteriormente. Considerando uma expansão de primeira ordem da quantidade Ω , válido para $|\Omega_0| \ll b$, tal que a franja central do padrão de Ramsey, possa ser escrito, para átomos monocinéticos como [26]

$$\begin{aligned}2\mathcal{P}_2(\tau) &= \sin^2 b\tau (1 - \cos a\Omega_0\tau) - \\&\quad - \frac{\Omega'_0 - \Omega''_0}{b} (1 - \cos b\tau) \sin b\tau \sin a\Omega_0\tau\end{aligned}\tag{4.65}$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \omega - \omega_0 \\ \Omega'_0 &= \omega - \omega'_0 \\ \Omega''_0 &= \omega - \omega''_0\end{aligned}$$

ω é a frequência de interrogação do campo de microonda e ω_0 é a frequência angular de transição atômica entre as duas regiões de interação. A equação (4.65) possui termos ímpares que distorcem o padrão de Ramsey bem como o pedestal de Rabi e, por conseguinte, deslocam as frequências de transição. Assim, o segundo termo do lado direito da equação pode ser escrito como

$$-\frac{2\Omega_0 + (\omega - \omega'_0) + (\omega - \omega''_0)}{b} (1 - \cos b\tau) \sin b\tau \sin a\Omega_0\tau$$

Este termo é igual ao caso da aproximação de primeira ordem a equação (4.7) mais um termo ímpar dado por

$$g_{HZ}(\Omega_0) = -\frac{(\omega - \omega'_0) + (\omega - \omega''_0)}{2b} \int f(\tau) (1 - \cos b\tau) \sin b\tau \sin a\Omega_0\tau d\tau\tag{4.66}$$

onde consideramos a probabilidade de Ramsey mediada sobre a distribuição do tempo de interação.

O deslocamento de frequência induzido pela deformação assimétrica $g_{HZ}(\Omega_0)$, é deduzido a partir da equação (4.15):

$$\nu_{HZ} = -\frac{g_{HZ}(\omega_m, b)}{\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau}\tag{4.67}$$

Se definirmos $\Delta_1 = (\omega'_0 - \omega_1)/2\pi$ e $\Delta_2 = (\omega'_0 - \omega_2)/2\pi$, podemos escrever o deslocamento de frequência como:

$$\nu_{HZ} = -(\Delta_1 + \Delta_2) \gamma(\omega_m, b) \quad (4.68)$$

com

$$\gamma(\omega_m, b) = \frac{\int f(\tau) (1 - \cos b\tau) \sin b\tau \sin a\omega_m \tau d\tau}{b \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (4.69)$$

Para a transição relógio, que tem uma dependência quadrática com o campo magnético estático, nós temos:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\nu_0}{2} (x_0^2 - x_1^2) \text{ e } \Delta_2 = \frac{\nu_0}{2} (x_0^2 - x_2^2) \\ \Delta_1 + \Delta_2 &= \frac{\nu_0}{2} (2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Calculando a equação (4.64) em primeira ordem de ε_1/x_0 e ε_2/x_0 , o deslocamento escreve-se da seguinte forma:

$$\nu_{HZ} = \nu_0 x_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma(w_m, b) \quad (4.71)$$

e a definição da frequência Zeeman dada pela equação (4.59), é reescrita da forma:

$$\nu_{HZ} = f_Z (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma(w_m, b) \quad (4.72)$$

Portanto, para calcular este deslocamento, é necessário medir o valor de f_Z , e calcular os valores numéricos de $\gamma(w_m, b)$ e $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Medida de $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

O pedestal de Rabi foi definido como a probabilidade de que uma transição ocorra na primeira região de interação e não na segunda mais a probabilidade da transição ocorrer na segunda região de interação e não na primeira. Assim, para medir $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ vamos tirar proveito desta definição e efetuar a medida como segue.

O centro do pedestal de Rabi para as transições $m_F \neq 0$ é dado pela equação (4.56)

$$\nu^{Rabi}(m_F) = \nu_0 \left\{ 1 + \frac{m_F}{4} \left[\frac{(x_1 + x_2)}{2} \right] + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_F^2}{16} \right) \left[\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \right] \right\} \quad (4.73)$$

como o centro da franja de Ramsey para as transições $m_F \neq 0$ é proporcional ao campo B_0 na região de vôo livre, então podemos reescrever:

$$\nu^{Ram}(m_F) = \nu_0 \left[1 + \left(\frac{m_F}{4} \right) x_0 + \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{m_F^2}{16} \right) x_0^2 \right] \quad (4.74)$$

Desta forma, quando medimos o centro de pedestal de Rabi e o centro da franja de Ramsey para as transições $m_F \neq 0$, nós podemos calcular a diferença, $D(m_F)$, como segue na expressão:

$$D(m_F) = \nu^{Ram}(m_F) - \nu^{Rabi}(m_F) = -\nu_0 \frac{m_F}{8} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (4.75)$$

Da equação (4.75) observamos que a relação entre $D(m_F)$ e m_F é linear. Se traçarmos uma curva de $D(m_F)$ em função de m_F , podemos estimar $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ por meio da inclinação de sua curva. Se p for a inclinação da curva $D(m_F) \times m_F$, podemos reescrever a frequência Zeeman, definida em equação (4.72), na seguinte forma

$$\nu_{HZ} = 32 \frac{p}{\nu_0} f_z \gamma(w_{m_F}, b) \quad (4.76)$$

Para medirmos o centro do pedestal de Rabi utilizamos o sistema de controle descrito em seção 2.3.5. O sintetizador de frequência SR345 modula, por meio do oscilador de quartzo de 10.7 MHz, a frequência da microonda em torno do seu centro. A amplitude de modulação é 450 Hz. O sinal de erro é gerado e reinjetado no oscilador de quartzo de 5 MHz. O sinal de interrogação de 5 MHz do gerador de microonda é comparado ao sinal de 5 MHz do nosso oscilador de referência, utilizando-se um contador. Nosso oscilador de referência é de um relógio atômico comercial (Agilent 5071A). Desta forma, um sinal de erro é gerado quando compararmos ambos os sinais nos quais são aquisicionados por meio de uma placa de aquisição (AT-MIO 15L da National Instruments). Um programa, que utiliza o software LabView (National Instruments), processa o sinal obtido. A aquisição é de um ponto por segundo e a medida total tem duração de 3000 s para cada uma das sete transições σ . Utilizamos o mesmo procedimento para determinar o centro da franja de Ramsey.

A figura 4.6 mostra a curva experimental de $D(m_F)$ em função de m_F obtida com o nosso padrão de frequência atômico para $B_0 = 20\mu T$, que é o campo magnético aplicado nas condições normais de operação.

A inclinação da curva é $p = (11.35 \pm 0.05) Hz$, o que resulta em $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(9.9 \pm 0.01) \times 10^{-8}$. Isto corresponde a uma diferença entre o campo magnético estático da região de interação e da região de vôo de livre da ordem de $(-1.6 \pm 0.06) \times 10^{-9}$ Tesla. Na figura 4.6, as transições vizinhas levam aos deslocamentos das transições $m_F = \pm 3, \pm 2$, como será explicado mais adiante.

Retornando à equação (4.71), nós podemos calcular os deslocamentos de frequência devido a não homogeneidade do campo magnético estático ao longo da cavidade de microonda. Assim, para $\gamma(w_{m_F}, b) = 2.78 \times 10^{-3}$ e o valor experimental $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(9.9 \pm 0.01) \times 10^{-8}$, nós calculamos $\nu_{HZ} = (1.08 \pm 0.04) \times 10^{-5}$. Este corresponde ao erro feito sobre a transição relógio.

Deslocamento nas Transições $\Delta m_F = \pm 1$

As transições $\Delta m_F = \pm 1$ também são sensíveis a perturbação devido a não homogeneidade do campo magnético estático ao longo do caminho atômico. Logo, o valor de f_Z usado para calcular ν_Z também é perturbado e este deslocamento também deve ser levado em conta. Assim, levando em conta um procedimento similar ao desenvolvido para transição relógio, o efeito da não homogeneidade do campo magnético para as transições $m_F \neq 0$ é dado por

Figura 4.6: $\nu^{Ram}(m_F)$ e $\nu^{Rabi}(m_F)$ como função do subnível Zeeman, quando o campo magnético estático aplicado na região de interrogação for $B_0 = 20\mu T$. A não homogeneidade do campo pode ser determinada por meio da inclinação desta curva.

$$\begin{aligned}
 \Delta_1(m_F) &= \nu_0 \frac{m_F}{4} (x_0 - x_1) \\
 \Delta_2(m_F) &= \nu_0 \frac{m_F}{4} (x_0 - x_2) \\
 \Delta_1(m_F) + \Delta_2(m_F) &= \nu_0 \frac{m_F}{4} (2x_0 - x_1 - x_2)
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

e comparando esta equação com a (4.68) o valor de $\nu_{HZ}(m_F)$, será

$$\nu_{HZ}(m_F) = \nu_0 \frac{m_F}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma(m_F) \tag{4.78}$$

Assumiremos que a distribuição do tempo de voo é a mesma para todas as transições. A função $\gamma(m_F, \omega_{m_F}, b)$ não depende da transição m_F , e se compararmos a equação (4.78) com a (4.71), vemos que a razão entre $\nu_{HZ}(m_F)$ e $\nu_{HZ}(0)$ é dada por

$$r = \frac{\nu_{HZ}(m_F \neq 0)}{\nu_{HZ}(m_F = 0)} = \frac{m_F \nu_0}{16 f_Z} \tag{4.79}$$

Nas condições normais de operação do nosso relógio, esta taxa é da ordem de $6244 m_F$, o que significa que a frequência Zeeman f_Z é deslocada de $\Delta f_Z = 0.5 Hz$.

O efeito Zeeman de segunda ordem é calculado a partir da frequência Zeeman f_Z dada por:

$$f_{HZ} = \frac{\nu_{(1)} - \nu_{(-1)}}{2} = \nu_0 \frac{x_0}{4} \tag{4.80}$$

A presença de um deslocamento $\nu_{HZ}(m_F)$ devido a não homogeneidade do campo magnético, induzirá um erro Δf_{HZ} em f_{HZ}

$$\Delta f_{HZ} = \frac{\nu_{HZ}(1) - \nu_{HZ}(-1)}{2} \quad (4.81)$$

Substituindo a equação (4.78) na (4.81), obtemos :

$$\Delta f_{HZ} = \frac{\nu_0}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma_1 \quad (4.82)$$

O efeito Zeeman quadrático ν_{HZ} é calculado a partir de f_{HZ} , utilizando-se a equação (4.58). O erro Δf_{HZ} em f_{HZ} , induz um erro $\Delta \nu_{HZ}$ em ν_{HZ} . O valor de $\Delta \nu_{HZ}$ obtêm-se, substituindo a expressão (4.82) na equação (4.59)

$$\Delta \nu_{HZ} = \left(\frac{16}{\nu_0} \right) f_{HZ} \Delta f_{HZ} = 4 f_{HZ} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma \quad (4.83)$$

e usando a equação (4.82), a equação (4.83) é reescrita como

$$\Delta \nu_{HZ} = x_0 \nu_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma \quad (4.84)$$

Na prática, calculamos um efeito Zeeman perturbado $\nu_{HZ} + \Delta \nu_{HZ}$ onde ν_{HZ} representa o valor real do efeito Zeeman quadrático regido pela equação (4.57). Assim, o efeito Zeeman será escrito como

$$\begin{aligned} \nu_{Zt} &= \nu_Z + \nu_{HZ} - \Delta \nu_{HZ} \\ &= \nu_Z + 4 f_{HZ} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \times [\gamma(m_F = 0, \omega_m, b) - \gamma(m_F, \omega_{m_F}, b)] \\ &\simeq \nu_Z \end{aligned} \quad (4.85)$$

Isto significa que a diferença entre a intensidade do campo médio nas regiões de interação e a região de vôo livre induzem, um deslocamento adicional na frequência relógio e um erro na determinação da frequência Zeeman, e conseqüentemente no cálculo do deslocamento. Não é necessário adicionar este shift, pois ela se cancela para o efeito em primeira ordem. *Shirley e al.* [35] mencionou este resultado, sem no entanto prová-lo. Segundo Shirley o fato da franja de Ramsey estar sobreposta ao pedestal de Rabi e os seus centros estarem deslocados um com relação ao outro, induz a um deslocamento. Este deslocamento é menor do que o apresentado pelo pedestal de Rabi da ordem de $l/2L$, onde l é o comprimento da região de excitação da cavidade e L é a distância entre as regiões de excitação. Portanto para um deslocamento de 1.15×10^{-15} no pedestal, o centro da franja de Ramsey será transladado da ordem de 6.15×10^{-17} .

No entanto, se utilizarmos a linha $m_F = 1$ para medir o campo magnético e nenhuma correção for feita para esta não homogeneidade, nós utilizaremos um valor errôneo para calcular o deslocamento Zeeman para a transição relógio. Este erro translada a frequência relógio em torno de -4.50×10^{-16} , mas de sinal oposto ao erro encontrado anteriormente. Estes dois erros quase se cancelam, deixando um erro residual da ordem de 10^{-16} .

Entretanto, a equação (4.64) não é completamente verdadeira se a medida de f_Z não for efetuada para os mesmos parâmetros (b, ω_{m_F}) que regem o funcionameno de nosso relógio. O erro residual é estimado em $\Delta \nu_{HZ} = 0.77 \mu Hz$.

Por fim, não calcularemos a correção do efeito da não homogeneidade do campo já que ele é compensado parcialmente quando aplicamos a correção do efeito Zeeman de segunda ordem. A incerteza desta compensação é da ordem de $7.7 \times 10^{-5} Hz$, o que equivale a um erro relativo:

$$\frac{\Delta\nu_{HZ}}{\nu_0} < 8.3 \times 10^{-15} \quad (4.86)$$

Incerteza Total

As correções aplicadas para compensar o efeito Zeeman de segunda ordem são feitas a partir da equação (4.60). A incerteza na determinação de f_Z é da ordem de $\frac{\Delta\nu_Z}{\nu_0} = 5.45 \times 10^{-13}$ e a correção devido a não homogeneidade de campo é $\frac{\Delta\nu_{HZ}}{\nu_0} = 0.08 \times 10^{-13}$. A soma quadrática desses termos resulta em uma incerteza de $5mHz$. Em valor relativo, obtemos:

$$\frac{\Delta\nu_Z}{\nu_0} = 5.45 \times 10^{-13} \quad (4.87)$$

4.5 Cavity Pulling

Se a cavidade de microonda não estiver sintonizada exatamente na frequência de transição atômica, a amplitude do campo de microonda variará assimetricamente quando a frequência for modulada em torno da frequência de transição atômica, ν_0 . Esta amplitude contém componentes ímpares que produzem deslocamentos de frequência na transição relógio. Esse deslocamento pode ser associado à interferência entre o campo irradiado pela antena da cavidade e o campo emitido pelo dipolo magnético quando o átomo passa dentro da cavidade. Essa interferência induz a uma diferença de fase dependente do tempo entre o campo dentro da cavidade, advindo dos átomos, e o sinal gerado pelo oscilador [36]. O deslocamento provocado por esse efeito possui uma dependência dispersiva como função da dessintonia entre a frequência da cavidade, ν_{cav} , e a frequência de ressonância atômica, ν_0 . A largura da curva de dispersão é proporcional a $1/Q_c$, onde Q_c é o fator de qualidade e sua amplitude é proporcional tanto a Q_c quanto ao número de átomos que passam dentro da cavidade. A resposta da cavidade é escrita como [26]:

$$b(\omega) = \frac{b_C}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \omega_C}{\Gamma}\right)^2}} \quad (4.88)$$

onde $\Gamma = \frac{1}{T_C}$ é a constante de tempo que rege as variações da amplitude do campo, $T_C = 2\frac{Q_c}{\omega_c}$ é o tempo de resposta da cavidade e b_C a frequência de Rabi para a frequência angular da cavidade ω_C ($\omega = \omega_C$). Designando $\varepsilon = \omega_0 - \omega_C$ a dessintonia da cavidade

e utilizando a definição $\Omega_0 = \omega - \omega_0$, podemos reescrever a equação (4.88) da seguinte forma

$$b(\omega) = \frac{b_C}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_0 + \varepsilon}{\Gamma}\right)^2}} \quad (4.89)$$

Supomos que $\Omega_0 \ll \varepsilon$, para que possamos tomar o limite em primeira ordem em Ω_0/ε da equação (4.89), de forma a obtermos

$$\begin{aligned} b &= \frac{b_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2}} - \Omega_0 \frac{b_c \varepsilon}{\Gamma^2 \sqrt[3]{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2}} \\ b &= b_0 + p_C \Omega_0 \\ b_0 &= \frac{b_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2}} \text{ e } p_C = -\frac{b_c \varepsilon}{\Gamma^2 \sqrt[3]{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2}} \end{aligned} \quad (4.90)$$

onde b_0 é a frequência de Rabi e p_C é a inclinação da frequência de Rabi, b , em função da dessintonia Ω_0 . A amplitude do campo oscilatório varia linearmente com relação à frequência de ressonância atômica ω_0 , como mostra a equação (4.90).

A probabilidade de transição (de Rabi ou de Ramsey) será escrita como [32]:

$$P(\Omega_0, b) = P(\Omega_0, b_0 + p_C \Omega_0) = P(\Omega_0, b_0) + p_C \Omega_0 \left. \frac{\partial P}{\partial b} \right|_{b=b_0} \quad (4.91)$$

Desta forma, na presença de uma dessintonia da cavidade, a probabilidade de transição decompõe-se em uma função par dada pela probabilidade de transição não perturbada e uma função impar dada por

$$g(\Omega_0) = p_C \Omega_0 \left. \frac{\partial P}{\partial b} \right|_{b=b_0} \quad (4.92)$$

Quando a frequência do oscilador local é escravizada utilizando-se uma frequência modulada de amplitude ω_m , o deslocamento de frequência devido à dessintonia de frequência será dado pela equação 4.15 e que se escreve como

$$\nu_{cav} = -\frac{p_C \omega_m}{2\pi} \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial b} \right|_{(b=b_0, \Omega_0=\omega_m)}}{\left. \frac{\partial P}{\partial \Omega_0} \right|_{(b=b_0, \Omega_0=\omega_m)}} \quad (4.93)$$

A equação (4.93) mostra que o deslocamento induzido pela dessintonia da cavidade pode ser estimado experimentalmente se conhecermos a inclinação da curva do pedestal em função da frequência angular. As derivadas da equação (4.93) podem ser calculadas medindo-se o sinal da transição Rabi ou Ramsey em torno do ponto $(b = b_0, \Omega_0 = \omega_m)$. As pequenas variações de potência e da frequência de interrogação em torno destes pontos permitem calcular as derivadas de acordo com os pontos experimentais a direita.

No caso de travarmos a frequência do oscilador na franja de Ramsey, a probabilidade de transição será dada pela equação (4.7). Derivando essa equação em função de b e fazendo a aproximação de primeira ordem, obtemos

Figura 4.7: Representação esquemática da franja de Ramsey e do Pedestal de Rabi.

$$\nu_{cav}^{Ram} = -\frac{p_C \omega_m}{2\pi} \frac{\int f(\tau) D_{Ram}(\omega_m, b_0, \tau) d\tau}{\int f(\tau) A(\omega_m, b_0, \tau) d\tau} \quad (4.94)$$

com

$$D_{Ram}(\omega_m, b_0, \tau) = \tau \sin(2b\tau) [1 + \cos(a\omega_m\tau)] - 2\frac{\omega_m}{b} \tau \sin(a\omega_m\tau) \left[\sin^2(b\tau) + 2\cos(b\tau) \sin^2\left(\frac{b\tau}{2}\right) \right] \quad (4.95)$$

Para estimarmos o efeito do "cavity pulling" utilizando a equação (4.94), devemos estimar o valor p_C da cavidade.

O efeito da dessintonia da cavidade, ou o "Cavity Pulling" para a franja de Ramsey é dado pela equação 4.93 que será reescrita da seguinte forma:

$$\nu_{cav}^{Ram} = -\frac{p_C \omega_m^{Ram}}{2\pi} \frac{M^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)}{N^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)} \quad (4.96)$$

onde $M^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)$ é a derivada da franja de Ramsey como função da frequência angular, $N^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)$ é a derivada da franja de Ramsey como função de b e ω_m^{Ram} é a amplitude de modulação quando modulamos a franja de Ramsey. Estas quantidades são medidas experimentalmente. O "Cavity Pulling" para o pedestal de Rabi escreve-se da mesma forma

$$\nu_{cav}^{Rabi} = -\frac{p_C \omega_m^{Rabi}}{2\pi} \frac{M^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)}{N^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)} \quad (4.97)$$

Como mostra a figura 4.7, observamos que $\nu_{cav}^{Ram} \ll \nu_{cav}^{Rabi}$.

A razão entre as amplitudes de modulação é

$$\frac{\omega_m^{Rabi}}{\omega_m^{Ra}} \approx 2 \frac{L}{l} = 2a \quad (4.98)$$

e as taxas entre as derivadas com função de b dão

$$\frac{M^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)}{M^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)} \approx \frac{1}{2} \quad (4.99)$$

e as derivadas como função de Ω_0 , estão definidos na figura 4.7

$$\begin{aligned} N^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b) &= \frac{S/2}{\omega_m^{Rabi}} = \frac{S}{4a\omega_m^{Rabi}} \\ N^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b) &= \frac{S}{\omega_m^{Ram}} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Finalmente obtemos

$$\frac{\nu_{cav}^{Rabi}}{\nu_{cav}^{Ra}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a = 4a^2 \quad (4.101)$$

No relógio atômico do CePOF, $a = 10$, logo $\frac{\nu_{cav}^{Rabi}}{\nu_{cav}^{Ra}} = 400$, onde a amplitude de modulação é proporcional à largura de transição.

Seja ν_{Ex}^{Rabi} e ν_{Ex}^{Ram} a frequência medida quando o sintetizador de microonda está travado sobre o pedestal de Rabi ou sobre a franja de Ramsey respectivamente, para as transições com $m_F = 0$. Experimentalmente medimos $\nu_{Ex}^{Rabi} - \nu_{Ex}^{Ram}$ da maneira descrita para medir o deslocamento Zeeman. Da medida experimental obtemos

$$\nu_{Ex}^{Rabi} - \nu_{Ex}^{Ram} \approx \nu_{Ex}^{Rabi} = -\frac{p_C \omega_m^{Rabi}}{2\pi} \frac{M^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)}{N^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)} \quad (4.102)$$

O valor de $\nu_{Ex}^{Rabi} - \nu_{Ex}^{Ram}$ é determinado pelo gráfico ilustrado na figura 4.8.

Assim, com o nosso padrão medimos que o deslocamento do pedestal é em torno de $\nu_{Ex}^{Rabi} - \nu_{Ex}^{Ram} \approx \nu_{Ex}^{Rabi} = -3.79 Hz$ com uma incerteza de 2.5% para uma medida de 3000s aquisicionando um ponto por segundo. Isto equivale a $\nu_{Ex}^{Ram} = \nu_{Ex}^{Rabi}/4a^2 = -1.49 \times 10^{-3} Hz$ para a franja de Ramsey.

Conhecendo os valores de $M^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)$, $N^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)$ e ω_m^{Rabi} , nós deduzimos p_C calculado a partir da equação (4.102):

$$p_C = \frac{2\pi (\nu_{Ex}^{Rabi} - \nu_{Ex}^{Ram}) N^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)}{\omega_m^{Rabi} M^{Rabi}(\omega_m^{Rabi}, b)} \quad (4.103)$$

O valor de p_C depende da potência e por consequência da frequência de Rabi b_C definido pela equação (4.88). Neste caso, a inclinação p_C normalizada, é definida como

$$\frac{p_C}{b_C} = -\frac{\varepsilon}{\Gamma^2 \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (4.104)$$

Esta medida foi repetida três vezes para os mesmos valores de b , ω_m^{Rabi} e ω_m^{Ram} , tal que esta nos permitiu estimar o valor médio de (4.104) -1.25×10^{-9} . O desvio padrão destas três diferentes medidas é 0.07×10^{-9} .

Figura 4.8: Deslocamento do pedestal de Rabi para as sete transições Zeeman como função de m_F . Observa-se o efeito correspondente ao “Cavity Pulling” para a transição $m_F = 0$.

Substituindo estes valores na equação (4.96), podemos calcular o efeito induzido para a dessintonia da cavidade será dado por

$$\frac{\nu_{cav}^{Ram}}{\nu_0} \simeq 1.27 \times 10^{-13}$$

4.6 Efeitos das Transições Vizinhas

Vimos que além da transição relógio, $(4, 0) \longleftrightarrow (3, 0)$, outras seis transições linearmente dependentes do campo magnético estático, $\Delta F = \pm 1, \Delta m_F = 0$, também são excitadas como mostrado na figura 3.1. Estas correspondem às componentes do espectro Zeeman, quando o campo magnético oscilatório é paralelo ao campo magnético estático. As suas amplitudes são comparáveis à transição relógio e devem ser levadas em consideração quando estamos calculando os efeitos que provocam deslocamentos na frequência de transição.

Os átomos que passam ao longo da cavidade de interrogação, experimentam uma componente do campo oscilatório que é perpendicular ao campo estático. Conseqüentemente, as transições $\Delta F = 1, \Delta m_F = \pm 1$ poderão ser induzidas, dependendo da seção transversal do feixe e de sua dimensão. Estas transições são bem menos intensas do que as outras e elas são mascaradas pelos ruídos comuns ao varrermos o espectro da microondas do estado fundamental dos átomos de césio.

Figura 4.9: Representação esquemática do "Rabi Pulling".

Os pedestais das transições $(3, 1) \longleftrightarrow (4, 1)$ e $(3, -1) \longleftrightarrow (4, -1)$ sobrepõem-se ao pedestal da transição relógio $(3, 0) \longleftrightarrow (4, 0)$, como ilustra a figura 4.9. Segue-se que a resolução entre as linhas de ressonância do átomo não é boa e um deslocamento de frequência é adicionado aos átomos detectados que estão diretamente relacionados à transição relógio.

Para determinarmos o deslocamento de frequência devido ao "Rabi Pulling" tomamos o método descrito por *Shirley et al* [35].

4.6.1 Rabi Pulling

O Rabi Pulling é um efeito causado devido à superposição dos pedestais entre as transições adjacentes no espectro Zeeman, como mostra a figura 4.9.

Podemos escrever, que o sinal de um relógio atômico à vizinhança de ν_0 da seguinte forma:

$$s(\Omega_0) = I_{(0)}P(\Omega_0) + I_{(1)}P_3(\Omega_0 - \omega_Z) + I_{(-1)}P_3(\Omega_0 + \omega_Z) \quad (4.105)$$

onde $P(\Omega_0)$ é a probabilidade de Ramsey e $P_3(\Omega_0)$ é a do pedestal de Rabi, $I_{(m)}$ é a amplitude da transição m e $\omega_Z = 2\pi f_Z$. A probabilidade $P_3(\Omega_0)$ é dada pela equação

$$P_3(\Omega_0) = \frac{b^2}{\Omega_0^2} [1 - \cos \Omega_0 \tau] \simeq \frac{b^2}{\Omega_0^2}$$

Expandindo esta equação em primeira ordem em Ω_0/ω_Z , nós obtemos

$$\begin{aligned}
P_3(\Omega_0 - \omega_Z) &= \frac{b^2}{\omega_Z^2} \left(1 + 2\frac{\Omega_0}{\omega_Z}\right) \\
P_3(\Omega_0 + \omega_Z) &= \frac{b^2}{\omega_Z^2} \left(1 - 2\frac{\Omega_0}{\omega_Z}\right)
\end{aligned} \tag{4.106}$$

substituindo esta equação em (4.105), $s(\Omega_0)$ é reescrito como:

$$\begin{aligned}
s(\Omega_0) &= I_{(0)}P(\Omega_0) + I_{(1)}\frac{b^2}{\omega_Z^2} \left(1 + 2\frac{\Omega_0}{\omega_Z}\right) + I_{(-1)}\frac{b^2}{\omega_Z^2} \left(1 - 2\frac{\Omega_0}{\omega_Z}\right) \\
&= I_{(0)}P(\Omega_0) + I_{(0)}\frac{b^2}{\omega_Z^2} \left[I_{(1)} + I_{(-1)} + 2\frac{\Omega_0}{\omega_Z} (I_{(1)} - I_{(-1)}) \right]
\end{aligned}$$

normalizando este resultado com relação a $I_{(0)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
s(\Omega_0) &= P(\Omega_0) + \frac{b^2}{I_{(0)}\omega_Z^2} \left[I_{(1)} + I_{(-1)} + 2\frac{\Omega_0}{\omega_Z} (I_{(1)} - I_{(-1)}) \right] \\
s(\Omega_0) &= P(\Omega_0) + \beta_0 + \Omega_0\beta_1
\end{aligned} \tag{4.107}$$

com

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{b^2 (I_{(1)} + I_{(-1)})}{I_{(0)}\omega_Z^2} \\
\beta_1 &= \frac{2b^2 (I_{(1)} - I_{(-1)})}{I_{(0)}\omega_Z^3}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Onde constatamos que o efeito das transições vizinhas a transição relógio traduz por uma pequena quantidade (a quantidade β_0) e uma função ímpar que é dada por β_1 . Esta função ímpar cria uma deformação no sinal relógio. Quando as duas transições vizinhas têm a mesma amplitude, a inclinação e, por conseguinte, a deformação é nula.

O deslocamento de frequência induzido pode ser calculado pela equação (4.15):

$$\nu_{Rabi} = -\frac{\beta_1\omega_m}{\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \tag{4.109}$$

Como acontece no “Cavity Pulling”, este deslocamento pode acontecer tanto no pedestal de Rabi como na franja de Ramsey. No entanto, este efeito é maior no pedestal de Rabi, pois a inclinação do pedestal é muito menor e a amplitude de modulação é muito maior do que na franja de Ramsey. Assim, utilizando o mesmo método de medido descrito para o efeito Zeeman de segunda ordem, medimos o deslocamento entre o pedestal e sua franja para cada uma das sete transições, como mostra a figura 4.10.

A tabela 4.1 mostra uma análise dos deslocamentos do pedestal de Rabi para $B_0 = 20\mu T$.

Figura 4.10: Medidas do deslocamento entre a franja de Ramsey e o pedestal de Rabi para $B_0 = 20\mu T$.

$ m_F $	Desvio Médio	Diferença	$ m_F = 1$ Diferença $\times m_F $
0	-3.76		
1	-11.47	-44.15	-44.15
2	-24.81	-58.32	-88.30
3	7.22	-69.75	-132.45

Tabela 4.1: Análise do Deslocamento do Pedestal de Rabi

$ m_F $	Desvio Médio	Diferença	$ m_F = 1$ Diferença $\times m_F $
0	-0.67		
1	-0.7	-1.59	-1.59
2	-0.8	-16.29	-3.18

Tabela 4.2: Análise do Deslocamento do Pedestal de Rabi para $B=30\mu T$

O deslocamento do pedestal, indicado pela coluna diferença na Tabela 4.1, é a soma dos deslocamentos devido às três causas medidas: o “Cavity Pulling”, a não homogeneidade de campo e o Rabi pulling. Para separarmos as três origens, lembramos que os deslocamentos devido a não homogeneidade do campo têm uma dependência linear com m_F enquanto que o “Cavity Pulling” não é sensível às m_F . Os respectivos valores médios e a diferença para as transições $+m_F$ e $-m_F$ também estão mostradas na Tabela 4.1.

O deslocamento médio deve ser interpretado como os desvios devido ao “Cavity Pulling”, pois ele tem uma dependência com a potência da microonda injetada na cavidade e com a modulação. Estas diferenças nos deslocamentos deve-se à não homogeneidade do campo magnético, pois o deslocamento da frequência Zeeman varia linearmente com m_F .

A última coluna da Tabela 4.1 mostra a diferença entre o deslocamento do pedestal e a franja para as transições $m_F = 1$ e $m_F = -1$ multiplicado por m_F . Observamos que há um desvio bastante grande entre a última coluna com a coluna diferença, o que verifica novamente a dependência com m_F dos deslocamentos devido a não homogeneidade. A discrepância de 62.70 Hz para $|m_F| = 3$ é interpretado como um deslocamento devido ao “Rabi Pulling”. Ele é de 31.35 Hz para cada uma das linhas mais externas ao espectro Zeeman.

Para que a transição relógio seja deslocada pelo “Rabi Pulling” vimos que é necessário haver uma assimetria entre as transições $m_F = 1$ e $m_F = -1$. Observamos que a assimetria na altura dos picos é de 1.3%. Assumindo que 1.3% é a pior assimetria que se possa atingir com este valor do C-field, estimamos o “Rabi Pulling” fracional como sendo 4.4×10^{-11} . E o correspondente pulling para a franja de Ramsey é da ordem de 1.3×10^{-13} .

Se aumentarmos o valor do campo magnético estático para $B_0 = 30\mu T$, obtemos os seguintes listados na tabela 4.2.

A figura 4.11 mostra o gráfico do deslocamento entre o pedestal de Rabi e a franja de Ramsey para $B_0 = 30\mu T$.

Quando aumentamos a intensidade do campo cc, não medimos os deslocamentos correspondentes as transições $m_F = \pm 3$ pois não é possível travar o nosso oscilador de microondas para amplitudes maiores de $\pm 12\text{kHz}$ com relação à transição de referência. Assim, para fins de comparação, medimos os deslocamentos das transições $m_F = \pm 2$ correspondentes aos campos $B_0 = 20\mu T$ e $B_0 = 30\mu T$. Os deslocamento do pedestal de Rabi obtidos são 1.63×10^{-11} e 7.13×10^{-12} , enquanto que para as franjas de Ramsey são 4.75×10^{-14} e 2.07×10^{-14} .

Observamos que a diferença do deslocamento para os pedestais de Rabi varia muito pouco quando aumentamos o valor do campo. Mas devido à dificuldade em travar a

Figura 4.11: Medida do deslocamento entre o pedestal de Rabi e a franja de Ramsey para $B_0 = 30\mu T$.

cadeia de microonda para amplitudes de modulação muito grandes, é inviável aumentarmos o campo estático para valores acima de $B_0 = 20\mu T$. Além disso, em condições normais de operação, isso não é vantajoso pois aumenta o efeito Zeeman de segunda ordem. Nas figuras 4.12, 4.13 e 4.14 mostramos o vale entre os pedestais das transições $m_F = 0$, $m_F = 1$ e $m_F = -1$ quando aumentamos o C-field para $B_0 = 20\mu T$, $B_0 = 30\mu T$ e para $B_0 = 40\mu T$. Para $B_0 = 20\mu T$ os pedestais das transições vizinhas estão sobrepostos ao da transição relógio. Quando aumentamos o C-field para $B_0 = 30\mu T$ observa-se que os pedestais principiam a se separar e finalmente para $B_0 = 40\mu T$ há um vale profundo entre os pedestais que separam visivelmente uma transição da outra.

Figura 4.12: Visão geral no vale entre os pedestais das transições $m_F = -1$ e $m_F = 1$ e a transição de referência $m_F = 0$ para $B_0 = 20\mu T$.

Figura 4.13: Visão geral no vale entre os pedestais das transições $m_F = -1$ e $m_F = 1$ e a transição de referência $m_F = 0$ para $B_0 = 30\mu T$.

Figura 4.14: Visão geral no vale entre os pedestais das transições $m_F = -1$ e $m_F = 1$ e a transição de referência $m_F = 0$ para $B_0 = 40\mu T$.

4.7 Estimativa das incerteza em um Relógio Atômico

4.7.1 Avaliação Final

O nosso sinal de erro é a diferença entre a frequência de referência, ν_R , gerado por um relógio atômico comercial e a frequência de interrogação, ν_I , a frequência escravizada pelo átomo [32]. Logo, a cada ciclo registramos as correções aplicadas a ν_I . Doravante, o sinal da frequência experimental corrigida, ν_{Ex} , é dado por

$$\nu_{Ex} = \nu_I - \nu_R \quad (4.110)$$

e a dessintonia Ω_0 , expressa por (4.14) reproduz

$$\Omega_0 = 2\pi (\nu_I - \nu_0) = 2\pi (\nu_{Ex} + \nu_R - \nu_0) \quad (4.111)$$

Na presença de efeitos perturbativos, o sinal de erro da equação (4.13) escreve-se como:

$$e = s_1 - s_2 = 2\Omega_0 \left| \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} + 2 \sum_i g_i(\omega_m) \quad (4.112)$$

e quando o sinal de erro for nulo, teremos

$$\Omega_0 = 2\pi (\nu_{Ex} + \nu_R - \nu_0) = - \frac{\sum_i g_i(\nu_m)}{h'(\nu_m)} \quad (4.113)$$

e a frequência experimental registrada escreve-se

$$\nu_{Ex} = \nu_R - \nu_0 - \frac{\sum_i g_i(\nu_m)}{2\pi h'(\nu_m)} \quad (4.114)$$

Utilizando as expressões de deslocamento de frequência ν_D definidas em (4.15), obtemos

$$\nu_{Ex} = \nu_0 - \nu_R + \sum_i \nu_{\Delta i} = \alpha + \sum_i \nu_{\Delta i} \quad (4.115)$$

onde α é uma quantidade desconhecida e representa a diferença entre frequência atômica ν_0 não perturbado e a frequência de referência. O cálculo da frequência do nosso padrão, de onde estimamos a quantidade α , escrevemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \nu_{Ex} - \sum \text{deslocamentos} \\ \alpha &= \nu_{Ex} - \sum \text{deslocamentos} \end{aligned} \quad (4.116)$$

A incerteza em torno do valor de α , exprime-se em termos de varianças

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_{Ex}^2 + \sigma_C^2 \quad (4.117)$$

A incerteza σ_{Ex} dá a ordem de grandeza da instabilidade do padrão e está relacionada as incertezas tipo A. σ_C representa a incerteza combinada de todas as correções conhecidas e aplicadas. Ela é uma incerteza tipo B e a chamamos de exatidão do relógio atômico.

4.7.2 Acuracia do Relógio Atômico

A acuracia de um padrão de frequência a átomos de césio é definido como o grau de precisão do relógio em produzir uma frequência que esteja de acordo com a definição do segundo [26]. Ela é expressa como uma incerteza relativa ($\Delta\nu/\nu_0$) com relação a definição do segundo. Aplicando as diversas correções ao nosso padrão de frequência e às suas incertezas associadas, montamos a tabela 4.3. A tabela 4.3 foi obtida com as medidas de deslocamentos efetuadas durante o mestrado. Na tabela 4.4, estão listadas as incertezas obtidas anteriormente com o nosso padrão de frequência ^{133}Cs . Ao compararmos as duas tabelas, observamos que houve um ganho na acuracia do nosso padrão de frequência. Este ganho deve-se a algumas mudanças efetuadas ao longo do ano, tais como, a determinação da potência ótima injetada na cavidade de interrogação, a diminuição da temperatura de operação do relógio atômico e a troca da fonte de alimentação da bobina C-field. A fonte utilizada anteriormente era uma comercial Minnipa enquanto que hoje ela é alimentada por uma fonte de corrente com saída de 200mA bastante estável. Os componentes utilizados para a fonte de corrente são de precisão e estáveis em temperatura, tal que a corrente final varia muito pouco. Desta forma, uniformizamos o campo magnético estático na região de interrogação de Ramsey e, por conseguinte, diminuimos a variação da frequência de Bohr dentro da cavidade. A

Deslocamento	Correção ($\times 10^{-13} \Delta\nu/\nu_0$)	Inc. rel. ($\times 10^{-13}$)
Efeito Gravitacional	-1×10^{-3}	5×10^{-5}
Efeito Doppler de 2ª ordem	-1,65	0.12
Efeito Zeeman Quadrático	5,4	0.15
“Cavidade Pulling”	1,27	0.09
“Rabi Pulling”	1.3	0.05

Tabela 4.3: Tabela de Incertezas I

Deslocamento	Correção ($\times 10^{-12} \Delta\nu/\nu_0$)	Inc. rel. ($\times 10^{-12}$)
Radiação de Corpo Negro	$1,5 \times 10^{-2}$	$0,04 \times 10^{-2}$
Efeito Doppler de 2ª ordem	$-2,30 \times 10^{-1}$	0,12
Efeito Zeeman Quadrático	$7,978 \times 10^2$	$0,119 \times 10^2$
Dif. de fase entre as cavidades	-3,753	1,44

Tabela 4.4: Tabela de Incertezas II

diminuição da temperatura do forno tornou o perfil de velocidades dos átomos no feixe mais estreito e conseqüentemente gerou menor deslocamento. É importante determinar a potência ótima a ser injetada na cavidade, pois a probabilidade de transição está fortemente ligada à frequência angular de Rabi e ela é máxima quando o átomo sofre dois pulsos $\pi/2$. Como a potência está diretamente relacionada à frequência angular de Rabi, seu valor deverá corresponder a esta máxima. Normalmente operamos o nosso relógio com 2.5 dBm abaixo da potência ótima, já que desta forma não perdemos na intensidade do sinal e ganhamos na estabilidade a longo prazo.

Ao diminuirmos a temperatura normal de operação do forno, diminuimos também a largura da distribuição de velocidade do nosso feixe. Assim, a incerteza em torno do deslocamento de frequência devida ao efeito Doppler de segunda ordem diminui, como pode ser visto nas tabelas 4.3 e 4.4. No entanto, as diferenças entre as duas medidas não são muito grandes. Para que grandes diferenças sejam operadas neste sentido é preciso reduzir a velocidade do feixe atômico para algumas dezenas de metro por segundo, como é possível fazer em um relógio atômico tipo chafariz atômico, “Fountain”.

A fonte que induz ao maior erro em nosso padrão é o efeito Zeeman de segunda ordem. Ao trocarmos a fonte Minnipa por uma mais estável, melhoramos a determinação da sua incerteza de 797.8×10^{-13} para 5×10^{-13} . Apesar disso, e da blindagem magnética, que protege a nossa cavidade de microonda, é possível que campos magnéticos espúrios, criem configurações de campo que variam de ponto a ponto sobre as blindagens. Desta forma, efetuamos sistematicamente sua desmagnetização. Este processo pode ser facilmente observado por meio do espectro Zeeman dos átomos de césio, onde a franja de Ramsey aparece totalmente deslocada do pedestal de Rabi e após a desmagnetização esse deslocamento é quase imperceptível.

O “*Cavity Pulling*” e o “*Rabi Pulling*” são dois efeitos presentes em nosso relógio. Não é possível corrigi-los e para diminuirmos a incerteza em torno do deslocamento de frequência provocados por eles seria necessário mudarmos as dimensões de nossa cavidade. Vimos que é possível diminuir a incerteza devido ao Rabi Pulling aumentando-se

a intensidade do campo magnético estático, mas isto não seria vantajoso pois estaremos aumentando o deslocamento devido ao efeito Zeeman e nas condições normais de operação ele já induz a maior incerteza na determinação da frequência de transição relógio. Além disso, o nosso sintetizador de microonda é um limitante pois não é possível ampliar em demasia a sua amplitude de modulação sem comprometer a modulação da frequência injetada na cavidade.

A diferença de fase entre os dois extremos da cavidade é devida a uma condutividade elétrica finita nas paredes do guia de onda. Assim, haverá perda de energia nas paredes da cavidade e o resultado é uma onda propagante dentro dela sobreposta a onda estacionária responsável pela interrogação do átomo. Esta perturbação depende da amplitude do campo de microondas, da modulação e da distribuição de velocidade dos átomos no feixe [30]. Pela tabela 4.4, observa-se que este efeito é responsável por um dos maiores deslocamentos na frequência de transição do relógio. Ela foi calculada pelo método proposto por Makdisse e Clerq [33] de onde utilizamos a aproximação de primeira ordem na probabilidade de transição de Ramsey e obtivemos uma relação geral para todos os deslocamentos, dada pelas relações (4.17) e (4.110).

Por fim, contabilizaremos a exatidão global de nosso relógio, que vale:

$$\sigma_C = 1,44 \times 10^{-12}$$

Este valor nos dá a precisão com que medimos a frequência de transição do relógio, em torno da frequência de 9.192.631.770Hz.

4.7.3 Estabilidade de um Relógio Atômico

A estabilidade de um padrão de frequência atômico foi descrita na seção 2.1.2. Vimos que a variância de duas medidas sucessivas do deslocamento médio de frequência é denominada de variância de Allan $\sigma_y^2(\tau)$ onde τ é o tempo de amostragem. A raiz quadrada da variância de Allan tem a seguinte forma [37]:

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{Q_{at}(S/N)} \sqrt{\frac{t}{\tau}}$$

onde Q é a largura de ressonância atômica e S/N é a razão sinal-ruído para um tempo de medida τ .

Nos últimos anos, montamos um sistema completo de comparação de frequência afim de medirmos a estabilidade do nosso relógio atômico constantemente. Este sistema é composto de um receptor GPS (Modelo 9390-6000 - Datum), um relógio atômico comercial Agilent (5071A), um contador (SR620 - Stanford), e um computador conectado a um sistema de aquisição para coletar os dados.

O contador SR620 possui duas entradas. A entrada 1 é alimentada pelo sinal de 10,7 MHz do nosso relógio atômico e a entrada 2 por um sinal de referência de 10,7 MHz que pode ser do GPS ou do relógio atômico comercial. A frequência de nosso relógio, ν_H , é comparada com a frequência de referência, ν_{REF} , que supomos invariável e o sinal de saída do contador corresponde a variação de ν_B escreve-se ν_H/ν_{REF} . Esta variação

é armazenada no computador conectado ao contador por meio de um GPIB. Usando um programa feito no ambiente LabView, calculamos o valor médio de ν_B , no intervalo de tempo τ , $\overline{\nu_B^\tau}$. As medidas sucessivas fornecem uma série temporal dos valores do deslocamento da frequência estudada, a instantes discretos t_k , onde $t_{k+1} - t_k = \tau$.

A estabilidade de frequência medida sobre um instante de tempo τ é feita por meio de uma série temporal que resulta em $\overline{y_k^\tau}$ medidas, com $k = 1-N$. Devido às flutuações randômicas de frequência, $\overline{y_k^\tau}$ será uma variável randômica e a estabilidade de frequência sobre τ é definida como uma medida de dispersão. Uma ferramenta estatística largamente utilizada para esta variância σ^2 é denominada de desvio padrão [38]. Cada amostra tem a duração de τ , onde a k -ésima amostra começa a t_k . A variância de Allan de duas medidas consecutivas para um número infinito de $\overline{y_k}$, é definida como :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\overline{y_2} - \overline{y_1})^2 \rangle$$

onde $\sigma_y^2(\tau)$ é uma medida teórica da duração infinita e implica na utilização da média. Experimentalmente, a variância de Allan $\sigma_y^2(\tau)$ é calculada para um número finito de amostras $\overline{y_k}$ ($k = 1 - N$) e cada amostra tem a duração de τ , onde a k -ésima amostra começa a t_k . Portanto, uma incerteza estatística existe quando m valores de $\overline{y_k}$ são usados para estimar $\sigma_y^2(\tau)$. Desta forma utilizamos:

$$\sigma_y^2(\tau, m) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{k=1}^{m-1} (\overline{y_{k+1}} - \overline{y_k})^2$$

Como $\sigma_y^2(\tau, m)$ não discrimina claramente os ruídos brancos, desenvolveu-se a variância de Allan modificada, $\text{mod}\sigma_y^2(\tau)$ [38], como mostramos abaixo

$$\text{mod}\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{y_{i+k+n}^{\tau_0}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{y_{i+k}^{\tau_0}} \right) \right]^2$$

com $\tau = n\tau_0$. Quando $n = 1$ então $\sigma_y^2(\tau, m) = \text{mod}\sigma_y^2(\tau)$. Ao construirmos o gráfico de $\text{mod}\sigma_y^2(\tau)$ em função de τ das instabilidades de frequência de um relógio atômico observamos que estas variações de frequência caem com $\tau^{-1/2}$, como mostramos na figura 4.15.

Em nossa primeira avaliação, a estabilidade a curto prazo dada pela variância de Allan foi $\sigma_y(\tau) = (1,2 \pm 0,1) \times 10^{-9} \tau^{-0,56}$ [25]. Esta estabilidade é relativamente baixa e foi atribuída a diversos fatores, como a deficiência do isolamento térmico da cadeia de rf, ruídos mecânicos e térmicos na sala do relógio e um sinal-ruído limitado na detecção dos átomos. Desde então diversas melhorias foram feitas com a intenção de melhorar a estabilidade do relógio atômico. Foi construída uma sala especial para abrigá-lo livre de ruídos mecânicos e com bom isolamento térmico. Com isso aumentamos a estabilidade dos lasers e também melhoramos a razão sinal-ruído. Recentemente, após estas melhorias, fez-se outra avaliação e a variância de Allan a curto prazo obtida foi $\sigma_y(\tau) = (1,8 \pm 0,2) \times 10^{-10} \tau^{-0,5}$, onde ganhamos uma ordem de grandeza com relação a primeira. A curva típica da avaliação feita com o nosso relógio é ilustrado na figura 4.15. Após um dia da avaliação a estabilidade de frequência cai para valores da ordem de 10^{-12} , ou seja as flutuações de frequência em torno da transição relógio serão desta ordem.

Figura 4.15: Curva típica da estabilidade obtida através da última avaliação feita após algumas mudanças como a determinação da potência ótima injetada na cavidade e a troca da fonte de alimentação do “*C-field*” por outro bem estável temporalmente.

Capítulo 5

Conclusão

O trabalho apresentado reflete parte do esforço de seis anos consecutivos para estabelecermos uma linha de pesquisa na área de metrologia de tempo e frequência. Iniciou-se naquela época a construção do primeiro relógio da América Latina e hoje nos propomos a caracterizar o nosso padrão primário de tempo e frequência a jato térmico de ^{133}Cs . Procuramos estudar os seus fundamentos teórico e experimental e com isso obter o domínio nesta área. Este trabalho envolveu vários membros de nossa equipe que não possuíam experiência prévia nesta área e foi necessário aprender todos os passos que envolvem o funcionamento de um relógio atômico, o que inclui a sintetização de microondas e estabilização de laser por uma semana ininterruptamente, e outros temas foi sem dúvida um grande desafio.

Do ponto de vista experimental, pudemos nos familiarizar com a terminologia e a instrumentação envolvida nos padrões de frequência atômicos, e esta será prontamente utilizada para outros experimentos não só no relógio atômico tipo feixe térmico como no relógio tipo chafariz.

A técnica de interrogação de Ramsey é a base de um relógio atômico e a sua assinatura característica é um padrão de interferência, onde uma franja de Ramsey aparece sobreposta ao pedestal de Rabi, no caso de relógios a feixe térmico. Esta interferência é uma poderosa fonte de informação, pois por meio dela é possível obter parâmetros como: a frequência de Rabi; e alguns deslocamentos como o efeito Doppler de segunda ordem; o “Cavity Pulling”; o “Rabi Pulling” entre outros. Por isso, demos atenção especial ao entendimento teórico da franja de Ramsey e ao pedestal de Rabi antes de iniciarmos o estudos dos efeitos sistemáticos do relógio que resultam em deslocamentos de frequência.

Quando trabalhamos com um relógio atômico, há duas características cruciais que devemos saber: a acurácia e a estabilidade. Com o intuito de caracterizar o nosso padrão seguindo o protocolo da área, medimos os efeitos sistemáticos que determinam a acurácia e nos permitem construir uma tabela de incerteza que caracteriza o nosso padrão. A estabilidade e a acurácia é um indicador do quão bem a franja de Ramsey é medida por nosso relógio. Com efeito, após algumas melhorias feitas nestes dois últimos anos, medimos novamente a estabilidade de frequência a curto termo, $\sigma_y(\tau) = 1.8 \times 10^{-10} \tau^{-1/2}$. Através de uma integração de 10^4 s obtivemos a estabilidade padrão de $\sigma_y(\tau) = 2,0 \times 10^{-11} \tau^{-1/2}$.

A caracterização feita com o nosso relógio indica que precisão com que a frequência de transição é medida em nosso relógio é de $1,44 \times 10^{-12}$. Ganhamos uma ordem de grandeza

na estabilidade e na acurácia como mostram as tabelas da seção 4.7.2. Esse ganho advém especialmente da determinação da potência ótima injetada dentro da cavidade de interrogação, assegurando que os átomos sofram dois pulsos $\pi/2$ e da uniformização do campo magnético estático ao longo da caminho atômico de modo que a incerteza em torno da frequência de transição do relógio seja minimizada. De fato, após a troca das fontes de correntes, diminuimos de duas ordens de grandeza a incerteza da medida.

Aplicamos ao nosso padrão de frequência um método que nos permitiu extrair informações preciosas a respeito dos deslocamentos de frequência que ocorrem no relógio diretamente da franja de Ramsey experimental, como por exemplo o deslocamento devido ao efeito Doppler de segunda ordem. Com o mesmo método avaliamos a frequência de Rabi da radiação. Este método mostrou-se mais vantajoso, pois a frequência de Rabi é obtida diretamente da derivada segunda da franja de Ramsey experimental sem que seja necessário conhecer a distribuição de velocidade dos átomos no feixe ou o valor da potência de microonda injetada na cavidade de interrogação. Deste forma, a incerteza na medida de b é imposta pela resolução com que a franja é medida. Para os quatro valores de b medidos, observamos que eles estão em concordância com os valores usuais encontrados na literatura.

Demos atenção especial à determinação do efeito Zeeman de segunda ordem. A frequência de transição relógio entre dois subníveis Zeeman hiperfinos $m_F = 0$ do estado fundamental varia quadraticamente com o campo magnético e as frequências de transição vizinhas $m_F \neq 0$ varia linearmente com o campo magnético. Esse efeito Zeeman induzido é necessário para levantar a degenerescência de cada um dos sete subníveis do estado fundamental dos átomos de césio, além de definir o seu eixo de quantização tal que possamos tirar proveito das regras de seleção das transições atômicas. A incerteza que temos no valor do deslocamento da frequência devida ao campo magnético estático depende da precisão com que controlamos o campo magnético estático. Para determinar a variação deste campo, medimos a variação da frequência média entre as transições dependentes do campo, $m_F = \pm 1$. Observamos que houve um aumento médio na frequência Zeeman quando ligamos as bobinas de aprisionamento, MOT, do relógio atômico tipo chafariz. Essas bobinas geram um alto gradiente de campo nas proximidades da cavidade de interrogação do relógio atômico a feixe térmico. Esta medida foi crucial, pois através dela observamos, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, que não será possível manter os dois relógios atômicos funcionando simultaneamente. Os testes feitos com a bobina de desaceleração do experimento de condensação de Bose-Einstein, que encontra-se no laboratório ao lado quando estas estavam ligadas e desligadas não revelou nenhum efeito sistemático na frequência de transição do relógio.

Por fim utilizamos de um método encontrado na literatura para determinar o “Cavity Pulling” e o “Rabi Pulling”. Esta técnica baseou-se no fato de que a não homogeneidade do campo magnético estático ao longo da trajetória atômico através da cavidade de interrogação resulta em um deslocamento de frequência na linha de ressonância de modo que a franja de Ramsey não está mais centrada no pedestal de Rabi. Quando medimos este deslocamento relativo entre os centros do pedestal de Rabi e da franja de Ramsey, e lembrando que o “Cavity Pulling” não é sensível ao m_F e que o “Rabi Pulling” cresce com m_F , podemos determiná-los facilmente através da transição relógio e as transições $m_F = \pm 3$, respectivamente. Através deste mesmo método também foi possível estimar o efeito Zeeman quadrático e observamos a boa concordância entre os dois valores obtidos, o que mostra a consistência das medidas e dos métodos aplicados.

Neste trabalho de pesquisa procuramos aumentar a nossa tabela de incertezas de modo a melhor caracterizar o nosso padrão de frequência atômico. Medimos todos os deslocamentos possíveis dada a acurácia de nosso relógio. Os outros deslocamentos, cujo efeito está bem abaixo da acurácia atual, como o efeito gravitacional, radiação de corpo negro foram apenas estimados. Neste trabalho tivemos a oportunidade de rever o nosso método de avaliação, de modo que foi possível introduzir métodos mais atuais. Do ponto de vista prático, foi uma oportunidade de nos familiarizarmos com estas técnicas. Sem dúvida a colaboração com outros grupos com mais experiência no ramo aliado à participação em conferências foram de capital importância para o desenvolvimento de nossa equipe. O conhecimento adquirido ao longo desses anos tem sido fundamental para o andamento da construção do relógio atômico tipo chafariz, o qual estima-se que estará em funcionamento no futuro próximo.

Bibliografia

- [1] Howse, D. *Greenwich Time and the Longitude*. Philip Wilson, (1997).
- [2] Laboratório Nacional de Metrologia (LNM) - INMETRO e Bureau National de Métrolie (BNM). *Padrões e Unidades de Medida: Referências Metrológicas Da França e Do Brasil*, (1998).
- [3] Itano, W. M. and Ramsey, N. F. *Scientific American* , 23 July (1993).
- [4] Bergquist, J., Jefferts, S., and Wineland, D. *Physics Today* , 37–42 March (2002).
- [5] "Résolution 1; CR, . *Metrologia* **4**, 43 (1968).
- [6] Rabi, I. I., Zacharias, J. R., Millman, S., and Kusch, P. *Physical Review* **53**, 318 (1938).
- [7] Ramsey, N. F. *Physical Review* , 996 (1949).
- [8] Kastler, A. *Journal de physique et le radium*. **11**, 255 (1959).
- [9] Drullinger, R. E. and et al. *IEEE International Frequency Control Symposium and PDA Exhibition* , 69–75 (2001).
- [10] Drullinger, R. E., Wineland, D. J., and Berquist, J. C. *Appl. Phys.* **22**, 365 (1980).
- [11] Cavasso-Filho, R. L., Manoel, D., Ortega, D., Scalabrin, A., Pereira, D., and Cruz, F. In *Proceedings of the 6th Symposium on Frequency Standards and Metrology*, 546–548, (2001).
- [12] Vanier, J. and Audoin, C. *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards I and II* (1989).
- [13] Audoin, C. *Metrologia* **29**, 113 (1992).
- [14] Audoin, C. and Guinot, B. *Les Fondements Da la Mesure Du Temps*. Masson, (1998).
- [15] Sortais, Y. *Constuction D'une Fountain Double a Atoms Froids de 87Rb e 133Cs : Étude Des Effets Dépendant Du Nombre D'atoms Dans Une Fountain*. PhD thesis, Université de Paris VI, decembre (2002).
- [16] Allan, D. *Proc. IEEE* **54**, 221 (1966).
- [17] Dimarcq, N., Giordano, V., Cerez, P., and Theobald, G. *IEEE Trans. on Inst. and Meas.* **42**, 115 (1993).

- [18] Simon, E. *Vers Une Stabilité et Une Exactitude Pour Le Horloges Atomiques: Le Rayonnement Du Corps Noir et la Détection Optique*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, octobre (1997).
- [19] Ramsey, N. F. *Molecular Beams*, Clarendon Press, Oxford (1985).
- [20] Mashaal, M. *La Recherche* **21**(218), 238 fevrier (1990).
- [21] Audoin, C., Lacey, L., and Cutler, L. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM27**, 325 (1978).
- [22] Kasevic, M., Riis, E., Chu, S., and de Voe, R. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 612 (1989).
- [23] Telles, F. Master's thesis, Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, (1998).
- [24] Silva, F. T. C. *Metrologia de Tempo e Frequência: Relógio de Feixe de Césio e Chafariz Com Átomos Frios*. PhD thesis, Instituto de Física de São Carlos - USP, (2002).
- [25] Teles, F., Magalhães, D. V., Santos, M. S., Rovera, G. D., and Bagnato, V. S. *IEEE* **47**, 1111–1114 (2000).
- [26] Vanier, J. and Audoin, C. *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standard*. publisher, (1989).
- [27] Avila, G., Giordano, V., Candelier, V., de Clercq, E., Theobald, G., and Cerez, P. *Phys. Rev. A* **36**(8), 3719 October (1987).
- [28] Makdissi, A. and de Clercq, E. *Metrologia* **38**, 409–425 (2001).
- [29] Ramsey, N. F. *Phys. Rev.* **78**, 695 (1950).
- [30] Teles, F., Magalhães, D. V., Santos, M. S., Bebeachibuli, A., and Bagnato, V. S. *Metrologia* **39**, 135–141 (2002).
- [31] Koga, Y. *Japanese Journal of Applied Physics* **23**, 97–100 (1984).
- [32] Makdissi, A. *Traitement Du Signal Appliqué Aux Etalons Primaires de Fréquences: Amélioration de Leur Exactitude et de Leur Stabilité*. PhD thesis, L'Université Paris XI Orsay, september (1999).
- [33] Makdissi, A. and de Clercq, E. *IEEE Trans. Inst. Meas.* **46**, 112–116 april (1997).
- [34] Bureau International Des Poids et Mesures. *Le Système International D'unités*, 7 edition, (1998).
- [35] Shirley, J. H., Lee, W. D., Rovera, G. D., and Drullinger, R. E. *IEEE Trans. on Inst. and Meas.* **44**, 136–139 April (1995).
- [36] Bize, S., Sortais, Y., Mandache, C., Clairon, A., and Salomon, C. *IEEE Tans. on Inst. and Meas.* **IM27**, 325 (2001).
- [37] Itano, W. M. In *Proceeding of the IEEE*, (July 1991).

- [38] Rutman, J. and Walls, F. L. In *Preceedings of the IEEE*, July (1991).