UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Tiago Martinelli

Evolução sem evolução: assimetria e a emergência do tempo na teoria quântica

São Carlos

2017

Tiago Martinelli

Evolução sem evolução: assimetria e a emergência do tempo na teoria quântica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto

Versão original

São Carlos

2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Martinelli, Tiago
Evolução sem evolução: assimetria e a emergência do tempo na teoria quântica / Tiago Martinelli; orientador Diogo de Oliveira Soares Pinto -- São Carlos, 2017.
92 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Fundamentos da mecânica quântica. 2. Relógios quânticos. 3. Mecanismo de Page e Wootters. I. Pinto, Diogo de Oliveira Soares, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Tiago Martinelli

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 16/02/2017

Comissão Julgadora

Dr(a). Diogo de Oliveira Soares Pinto

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Lucas Chibebe Celeri

Instituição: (UFG/Goiânia)

Dr(a). Marcelo de Oliveira Terra Cunha

Instituição: (UNICAMP/Campinas)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Gabi, por me fazer um homem feliz e por descobrir o amor comigo: sua existência e situações da escuridão à claridade promoveram a maior transformação do meu ser.

Agradeço muito aos meus pais, Paulo e Sandra, e ao meu irmão, Igor, por serem quem são e terem dado o básico para eu seguir esse caminho. O ambiente criado por vocês é meu maior exemplo de família.

Agradeço ao meu orientador Diogo Soares Pinto, por ter me dado a chance de experimentar o conceito da liberdade na pesquisa e pelo seu interesse em assuntos elementares. Valorizei ambos.

Aos meu amigos acadêmicos, agradeço pelas discussões iluminadoras e conselhos burocráticos que, direta e indiretamente, contribuíram para essa dissertação ficar melhor.

Aos meus amigos não-acadêmicos, agradeço pelo aprendizado indispensável da vida que não se encontra nos livros.

Por fim, obrigado à USP pela oportunidade de pesquisa e à CAPES pelo suporte financeiro.

"Pois quando eu era bebê e chorava e dormia,
O tempo se arrastava;
Quando era menino, ria e conversava,
O tempo andava;
Quando os anos fizeram de mim um homem,
O tempo correu,
Mas quando envelheci, o tempo voou."
Guy Pentreath

RESUMO

MARTINELLI, T. **Evolução sem evolução:** assimetria e a emergência do tempo na teoria quântica. 2017. 92p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

Na teoria quântica é usual se referir a probabilidade de encontrar uma partícula entre as posições x e $x + dx$ no instante t, embora a teoria não forneça quando ocorre a detecção. Nos primórdios da teoria, Pauli apresentou um argumento refutando a ideia de introduzir um operador que descreva a probabilidade do instante em que ocorre a detecção. Mais tarde, Page e Wootters, motivados pelo fato de não se observar autoestados de superposição de energia, apresentaram um formalismo quântico não-relativista num espaço estendido em que espaço e tempo desempenham papéis equivalentes, sendo consistente com as indagações feitas por Pauli. Isso leva a uma descrição dada pela probabilidade condicional de encontrar uma partícula entre x e $x + dx$ em relação ao tempo $[t, t + dt]$ dado por outra partícula, chamada de partícula relógio. Essa dissertação consiste de uma revisão da proposta de Page e Wootters para abordar o problema do tempo na mecânica quântica bem como de uma análise detalhada desta utilizando de ferramentas recentes introduzidas na área de informação quântica para o tratamento de simetrias em física.

Palavras-chave: Fundamentos da mecânica quântica. Relógios quânticos. Mecanismo de Page e Wootters.

ABSTRACT

MARTINELLI, T. **Evolution without evolution:** asymmetry and the emergence of time in quantum theory. 2017. 92p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

In quantum theory it is usual one refers to the probability of finding a particle between the positions x and $x + dx$ at time t, although the theory does not provide when detection occurs. In the primordies of the theory, Pauli presented an argument refuting the idea of introducing an operator describing the probability of the instant in which the detection occurs. Later, Page and Wootters, motivated by the fact that one is not able to observe energy eigenstates superposition, presented a non-relativistic quantum formalism in an extended space in which space and time play equivalent roles, being consistent with Pauli's inquiries. This leads to a description given by the conditional probability of finding a particle between x and $x + dx$ in respect to the time $[t, t + dt]$ given by another particle, called the clock particle. This dissertation consists in a review of the Page and Wootters proposal to address the time problem in quantum mechanics as well as a detailed analysis of this using recent tools introduced in the area of quantum information for the treatment of symmetries in physics.

Keywords: Fundations of quantum mechanics. Quantum clocks. Page and Wootters mechanism.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A função $\Psi(x)$ é transformada na nova função $\Psi'(x) = U(\tau)\Psi(x)$, com τ sendo uma transformação qualquer no espaço-tempo, translação espacial nesse caso. A função original é localizada próxima à $x = x_0$ e a função nova próxima à $x = x'_0$, com $x'_0 = \tau x_0$. A relação precisa das duas funções fica $\Psi'(\tau x) = \Psi(x)$, ao escrever $\tau x = x'$, segue que $\Psi'(x') = \Psi(x) = \Psi'(\tau^{-1}x')$. Porém, por definição, $\Psi'(x') = U(\tau)\Psi(x')$, logo $U(\tau)\Psi(x) = \Psi(\tau^{-1}x)$. 46

Figura 2 – Aqui o sistema de referência padrão p é o eixo temporal t (que na prática é o relógio de parede do laboratório) para os sistemas quânticos $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_R$ (relógio quântico) que exibem os valores t_S e t_R, respectivamente. Ao eliminar a dependência em relação ao tempo paramétrico t, a dependência temporal do sistema $\mathcal{H}_S$ é descrita em relação ao sistema $\mathcal{H}_R$, o que pictoricamente está exibido pela reta em vermelho. O sistema total fica, assim, invariante por translações temporais. 47

Figura 3 – Relógio quântico como oscilador local. Alice observa um sistema em uma fase bem definida ϕ_0, desta forma Alice pode observar superposições coerentes de níveis de energia em S, ρ_S, utilizando R. Devido a ausência de uma referência, que impõe uma simetria global, Bob explica a situação por um estado correlacionado entre o relógio de Alice e o sistema S, dado por ρ_{RS}. 49

Figura 4 – Diagrama comutativo para operações G-invariantes em sistemas fechados ou reversíveis. O fato de comutar significa que a ordem das operações $\mathcal{U}_g(\cdot) \equiv U_g(\cdot)U_g^\dagger, U_g : g \in G$ e $\mathcal{V}(\cdot) = V(\cdot)V^\dagger$ aplicadas em $\rho^{sim} \in \mathcal{S}_G(\rho)$ é indiferente e produz o mesmo resultado final. 51

Figura 5 – Diagrama comutativo para operações G-invariantes em sistemas abertos. Com $\mathcal{U}_g(\cdot) \equiv U_g(\cdot)U_g^\dagger$, sendo $U_g : g \in G$ a representação de G nos espaços de Hilbert de entrada e saída da operação $\mathcal{E}$ e $\rho_{sym} \in \mathcal{S}_G(\rho)$. . . 52

Figura 6 – Tabela de teorias de recursos de assimetria e emaranhamento. A palavra livres, pode ser vista aqui como um sinônimo de permitidas (os). 61

Figura 7 – Estados e operações permitidas, com $\mathcal{G}(\cdot) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathcal{U}_g^S(\cdot)$ e $\mathcal{U}_g^S(\cdot) = U_g^S(\cdot)U_g^{S\dagger}$ sendo a média uniforme para grupos finitos e $|G|$ a ordem do grupo. Note que o canal aqui é um automorfismo, $S \to S$. Caso contrário, seria preciso saber a representação da simetria nos espaços de saída e chegada para especificar todos conjunto de canais G-invariantes 61

Figura 8 – Operações permitidas em relação ao grupo de translações temporais, com $\mathcal{U}_t^{SR}(\cdot) = U_t^S \otimes U_t^R(\cdot)U_t^{S\dagger} \otimes U_t^{R\dagger}$ atuando no sistema $S + R$ e $U_t^\alpha = \{e^{-iHt};\ t \in \mathbb{R}\}$ sendo a representação do grupo de translações temporais para cada sistema $\alpha = S, R$. O canal $\mathcal{E}^{SR}$ G-invariante atuando no sistema $S + R$. 67

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
1.1 Descrição dos Capítulos 17

2 UM PRELÚDIO PARA TEMPO 21
2.1 Relógios Quânticos e o "teorema" de Pauli 21
2.1.1 Um pouco de refinamento: a relação de comutação canônica 24
2.2 Há lugar para tempo afinal? 28
2.3 O caminho intocado por Pauli: O espaço de Hilbert Extendido . . . 30
2.3.1 Um exemplo simples, mas rico: dois qubits 34

3 SISTEMAS DE REFERÊNCIAS E TEORIA DE ASSIMETRIA . . . 39
3.1 Introdução 39
3.2 Um pouco de simetrias em Física 40
3.3 Sistemas de Referências 44
3.3.1 Sistemas de referência na mecânica quântica 45
3.3.2 Sistemas de referência quânticos 46
3.4 Teoria de Assimetria 49
3.4.1 Estados G-invariantes 50
3.4.2 Operações G-invariantes 50
3.4.3 O ponto de vista de uma teoria dos recursos 53
3.4.4 A assimetria monótona de Holevo 54

4 REVISITANDO PAGE E WOOTTERS: UM CARÁTER TEÓRICO-INFORMACIONAL 59
4.1 Quantificando um sistema de referência 61
4.2 Simetrias em sistemas compostos 64
4.3 Relógios como sistemas de referências 66
4.4 Quantificando um bom relógio 68
4.5 Funcionando um relógio: Enfim, o emaranhamento 70

5 CONCLUSÃO 75

REFERÊNCIAS 79

APÊNDICES 85

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS 2.3 E 2.4 . 87

APÊNDICE B – REPRESENTAÇÃO DE GRUPOS E MÉDIAS INVARIANTES 89

1 INTRODUÇÃO

Conta-se que uma vez, antes da primeira guerra mundial, um poeta russo estava de visita a Londres. Seu inglês não era muito bom, e, desejando saber a hora, ele perguntou a um caminhante: "Por favor, o que é tempo?" O homem interpelado apressou-se a responder: "Mas esta é uma questão filosófica! Porque o senhor pergunta a mim?"[1]

O presente trabalho diz respeito à interseção de duas questões inquietantes para filósofos e cientistas, a interpretação dos fundamentos da mecânica quântica e diretamente correlacionado, que é uma história tão antiga quanto a história da filosofia ocidental, a existência objetiva do tempo.

Ao contrário do natural, não será de preocupação, como da maioria, na revolução conceitual na questão do tempo obtida pela física moderna devido às conquistas da teoria da relatividade de Einstein. Mas sim, na questão do tempo dentro da mecânica quântica de que ele também fazia parte.

A preocupação assim é mais prosaica: a usual mecânica quântica no espaço-tempo não-relativístico, muitas vezes chamada de teoria quântica invariante de Galilei. O objetivo foi argumentar contra o fato de que tempo é apenas um parâmetro dentro da mecânica quântica. Ao invês, foi sustentado que o tempo, em seus vários papéis, pode ser representado por operadores sobre um pilar dado por Page e Wootters. Isso não é ir contra a representação usual de tempo na teoria quântica e sim fortaleceter indícios de que há um papel mais fundamental para este.

A dissertação, discute assim o papel do tempo dentro da teoria quântica. Mais precisamente, foi abordada uma maneira de tratar tempo como qualquer outro objeto quântico dentro do formalismo de operadores e espaços de Hilbert com suas propriedades sem fazer menção à parâmetros clássicos. Devido ao primeiro contato com todo o formalismo aqui discutido, questões mais aprofundadas nas ferramentas utilizadas não foram abordadas, sendo deixadas assim para um possível trabalho futuro.

1.1 Descrição dos Capítulos

O capítulo 2 começa com uma história do tempo na teoria quântica, quando surgiram e quais foram os primeiros questionamentos desse tema. Por exemplo, este capítulo contém a introdução ao teorema de Pauli, que se tornou a força da sabedoria comum de que o tempo deve desempenhar um papel limitado na mecânica quântica. Posteriormente, segue-se uma análise detalhada das afirmações de Pauli, que pretendem excluir observáveis de tempo na mecânica quântica. Primeiro, estritamente falando, Pauli não apresentou um teorema, dado algumas classes significativas de contra-exemplos. No entanto, a argu-

mentação de Pauli foi sólida no sentido de que há resultados estreitamente relacionados que parecem apoiar a sua conclusão. São exibidas duas versões de um resultado que se baseia na mesma premissa física: restringe as energias permitidas do sistema, basicamente estas limitam os valores permitidos de energia de um sistema quântico, impondo um limite inferior, formalizando assim o teorema. Em posse desses resultados, argumenta-se como o mecanismo proposto por Page e Wootters é intocado pelo teorema formalizado de Pauli, propondo assim um curioso caminho para observáveis de tempo na teoria quântica.

Capítulo 3: Neste capítulo, mostra-se como o fato de introduzir relógios em sistemas quânticos e eliminar o tempo paramétrico dado por Page e Wootters está associado com uma teoria com invariância pelo grupo de translação temporal. O espaço relógio está estreitamente relacionado com a teoria de sistemas de referência quânticos ou assimetria. Para isso, faz-se uma pequena discussão de simetrias em mecânica quântica e como as ferramentas de teoria de grupos serão importantes no decorrer da dissertação para explorar melhor o mecanismo aqui tratado. É feita uma definição matemática da noção de assimetria de estados. A idéia principal nesta definição é que a assimetria não pode ser gerada por uma dinâmica invariante por um dado grupo G e assim chega-se na definição de operações G-invariantes, dois estados possuem a mesma simetria com relação a um grupo G se cada um deles pode ser transformado no outro por um canal G-invariante. São discutidas analogias entre o estudo da assimetria e o estudo do emaranhamento como dois exemplos de teorias de recursos. Finalmente, introduz-se a noção de monótonos de assimetria ou medidas de assimetria, estas quantificam a quantidade de assimetria dos estados em relação a um grupo de simetria.

Capítulo 4: Em posse dos capítulos anteriores e das ferramentas trabalhadas, é feita uma análise quantitativa do mecanismo de Page e Wootters. Em especial, deixa-se claro como a estrutura de produto tensorial permite a existência, dos chamados, sistemas de referências quânticos internos e o fato de emaranhamento ser um recurso para estes, com a condição do sistema inicial não possuir correlações. Assim, o resultado do trabalho foi mostrar como as ferramentas da teoria de assimetria recuperam os resultados da proposta original de Page e Wootters. Isso trás a luz novos caminhos para se explorar tanto essa nova perspectiva de tratar tempo num caráter totalmente quântico através de relógios imersos nos sistemas, bem como uma ligação entre as teorias de recursos de assimetria e emaranhamento.

O capítulo 5 conclui a dissertação. É argumentado o quão vasta as ferramentas utilizadas podem abranger os interesses da Física. Aponta-se também um caminho interessante, aonde teorias que utilizam do formalismo similar ao discutido aqui no contexto de

sistemas de referência quânticos, vem surgindo numa busca mais aplicada. Assim, pode-se ver como os limites teóricos que foram explorados estão diretamente relacionados a algumas realizações físicas. Por fim, algumas reflexões são feitas de como pode ser interpretado o conceito de tempo na teoria quântica, através da proposta dado por Page e Wootters, uma pequena discussão é feita no que entendesse por caráter relacional do tempo na filosofia analítica.

2 UM PRELÚDIO PARA TEMPO

O capítulo inicia fornecendo alguns antecedentes históricos do papel do tempo em mecânica quântica para as questões a serem tratada no que segue. O objetivo da dissertação como um todo será exibir e analisar com mais detalhe o mecanismo de Page[i] e Wootters[ii][2] no qual sugere um caminho interessante para a representação do tempo e dos processos temporais dentro da teoria quântica. Para isso, serão utilizados recursos matemáticos e conceituais modernos da teoria da informação quântica que serão mostrados no capítulo seguinte. No entanto, algumas das afirmações e argumentos mais interessantes sobre o papel do tempo na teoria quântica foram feitas durante o início da história da própria teoria, em torno da década de vinte do século XX, quando essas ferramentas ainda não eram disponíveis.

No presente capítulo, será feita uma análise do primeiro argumento que desenrolou uma discussão rica no tema e as consequências desta, devido a Wolfgang Pauli,[iii] que em 1933, através de notas de rodapé de seu artigo[3] sobre mecânica quântica descreveu sobre a inexistência de um operador para tempo. Esse argumento passou a ser conhecido como "Teorema de Pauli".

Por fim, na seção 2.3, encontra-se o mecanismo de Page e Wootters propondo o tratamento do tempo numa extenção do espaço de Hilbert, que será chamado de espaço relógio. Esta proposta, foi primeiramente trabalhada por Paul Dirac[iv].[4] Com a peculiaridade e talvez motivações que são inteiramentes intocadas pelo argumento de Pauli.

2.1 Relógios Quânticos e o "teorema" de Pauli

Parte das reflexões filosóficas ao longo deste tópico e da construção do próximo são baseadas principalmente ao trabalho de Pashby[5] e nas outras citações que seguem. Um dos primeiros, se não o primeiro, trabalho em direção à uma interpretação de tempo e introdução de relógios em mecânica quântica é devido a Erwin Schrödinger[v], o qual procurou avaliar o significado da relação de incerteza para tempo-energia considerando as possíveis complicações da incerteza quântica ao estabelecer um sistema de referência inercial para tempo.

---

i Donald Nelson Page (1948 -), físico norte-americano.
ii William Kent Wootters (-), físico teórico norte-americano.
iii Wolfgang Ernst Pauli (1900 - 1958), físico austríaco.
iv Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984), físico teórico inglês.
v Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887 - 1961), físico teórico austríaco.

De acordo com o protocolo para sincronização de relógios de Einstein, para estabelecer uma noção comum de tempo entre referênciais inerciais é necessário uma coleção de relógios ideais distantes trocando sinais de luz uns com os outros. No entanto, o sistema de funcionamento de tais relógios ideais é desprezível no regime de validade da teoria de relativade, basta tomá-los de um tamanho suficientemente microscópico para não ter influência no sistema. Já na mecânica quântica, a discussão do sistema de um relógio físico por mais que seja microscópico é relevante, por ser o regime da teoria. Foi isso que levou Schrödinger[6] a argumentar que as relações de incerteza da mecânica quântica levariam, em princípio, à limitações referente à exatidão de que o procedimento de sincronização de relógios poderia ser realizado, sendo provavelmente a primeira menção a relógios imersos em sistemas quânticos.[vi]

Schrödinger[8] foi levado a explorar as características de um relógio quântico ideal: um sistema que evolui através de uma sucessão de estados que variam linearmente, ou seja, covariam, com os valores do tempo paramétrico ao qual o estado instantâneo do sistema ou estado do relógio é referido. Ele concluiu então que tal sistema seria não-físico no seguinte sentido: Uma vez que o relógio é ideal o seu estado em cada momento teria de ser perfeitamente distinguível de qualquer outro estado, ou seja, os estados sucessivos do sistema devem ser mutuamente ortogonais. No entanto, devido à relação entre energia e tempo, isso implicaria que a energia do sistema é completamente incerta: todos os valores de energia de $-\infty$ à $+\infty$ são igualmente prováveis.

Uma visão clara do raciocínio de Pauli aos argumentos de Schrödinger pode ser dada como se segue.[9] Suponha que haja um operador de tempo T, satisfazendo a seguinte relação $[H,\, T] = -iI$ com o hamiltoniano H de um dado sistema e I sendo o operador identidade. Seja o seguinte operador unitário como uma expansão exponencial em T,

$$e^{i\lambda T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} T^n, \tag{2.1}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Agora, utilizando a relação $[H, f(T)] = f'(T)[H, T]$ para funções f analíticas, tem-se que

$$[H, e^{i\lambda T}] = \lambda e^{i\lambda T} \tag{2.2}$$

[vi] Posteriormente, Salecker e Wigner vieram a explorar tais limitações em seu artigo de 1958.[7]

e finalmente, atuando $e^{-i\lambda T}$ na esquerda,

$$e^{-i\lambda T} H e^{i\lambda T} = H + \lambda I, \tag{2.3}$$

mostrando assim que $e^{i\lambda T}$ é o gerador de translações no espectro do hamiltoniano $\sigma(H)$ dado por λ. No entanto, a equação acima afirma que H e $H + \lambda I$ são operadores unitariamente equivalentes, implicando que eles possuem o mesmo espectro $\sigma(H) = \sigma(T)$. Uma vez que $\lambda \in \mathbb{R}$, segue-se que $\sigma(H) \in \mathbb{R}$. Portanto, a introdução de um operador T é aparentemente proibida, já que obriga o hamiltoniano H de qualquer sistema a possuir espectro isomorfo a reta real, contradizendo exemplos físicos, como o oscilador harmônico.

Há um fato importante a ser destacado na linha de raciocínio de Schrödinger e Pauli para clarear a introdução desses sistemas relógios: ter uma grande incerteza na energia e possuir uma energia infinita não são a mesma coisa na mecânica quântica. Possuir uma energia infinita para um sistema em mecânica quântica significa, essencialmente, que o valor esperado seria infinito para o observável de energia. Conquanto, possuir uma grande incerteza na energia não corresponde a uma grande energia e sim a uma completa indeterminação desta: haveria um estado em que nenhum valor de energia é mais provável do que outro, ou seja, o valor esperado de energia para o relógio ideal de Schrödinger possuindo valores de energia que vão de $-\infty$ à $+\infty$ seria zero, caso definido. Assim, o problema de Schrödinger com o relógio quântico ideal é que seu espectro de energia é ilimitado, não que possui uma energia infinita. Sistemas físicos quânticos possuem um estado fundamental, um estado de menor energia abaixo do qual a energia do sistema não pode decair, como exemplo o estado fundamental do oscilador harmônico quântico correspondente à uma energia maior do que zero. O relógio ideal, entretanto, não seria assim, sua energia poderia tomar qualquer valor positivo ou negativo.

Tem-se um argumento simples do por que essa hipótese é algo razoável de se pedir. Tome um sistema que não possua limite inferior de energia e utilize-o como fonte, extraindo dele energia suficiente para abastecer as luzes de sua cidade local por um dia. Nesse processo, é abaixado o estado de energia do sistema. Repita o procedimento amanhã, abaixando ainda mais o estado de energia e abastecendo a cidade. Pode-se repetir o protocolo quanto se queira, uma vez que não há limite inferior de energia no sistema, este pode ser utilizado indefinidamente como fonte de energia, violando o princípio de conservação de energia, não existindo assim, quantidade de energia que possa ser atribuída a esse sistema.[10]

Isso certamente é um motivo para desconfiar do relógio quântico ideal. Além disso, de acordo com Schrödinger, algo ainda mais alarmante é válido para este sistema: não só o valor de energia do sistema não possuirá um limite inferior, mas ainda o relógio ideal

tem um valor completamente incerto para a energia. Isso significa que na interação com outro sistema, ele pode trocar uma enorme quantidade de energia arbitrária positiva ou negativa. Isso tornaria o relógio ideal algo como uma "bomba-relógio" já que não seria possível controlar um sistema com quantidade ilimitada de energia.

Parece tudo acabado? Não! Um modo de contornar tal conclusão é considerar sistemas de dimensão finita,[11] e garantir sua convergência para o caso ideal. Porém, lembre que o caso ideal apresenta um problema. Portanto, deve-se garantir a convergência para um sistema físico ideal, que pela argumentação acima deve possuir um hamiltoniano semi-delimitado. No que se segue, essa conclusão será sustentada no desenrolar dos teoremas.

2.1.1 Um pouco de refinamento: a relação de comutação canônica

A partir daqui o objetivo será formalizar o que está sendo chamando de teorema de Pauli. Isso será importante no sentido de trazer segurança ao traçar rotas para abordar o problema do tempo na mecânica quântica. Para fixar a notação que será utilizada, faz sentido listar os axiomas da mecânica quântica[12–14] [vii].

Estados Os estados puros são os vetores ortonormais $|\psi\rangle$ de um espaço de Hilbert [viii] separável $\mathcal{H}$ ou, equivalentemente, os elementos do espaço projetivo de Hilbert $\mathcal{PH}$[ix]. O estado de um sistema pode ser misto, caso em que o estado é dado por um operador de densidade $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ com $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_i p_i = 1$.

Observáveis Os observáveis de um sistema são os operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$, ou equivalentemente o conjunto de medidas projetivas. Pelo teorema espectral a cada operador auto-adjunto A corresponde unicamente uma medida projetiva $P^A : \Delta \mapsto P^A(\Delta)$, com $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sendo subconjuntos de Borel da reta real $\mathbb{R}$.

Medida O valor esperado de um observável A no estado ρ é dado pelo traço $\langle A\rangle_\rho = \mathrm{tr}[\rho A]$ e no caso do estado ser puro, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ segue que $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$. A probabilidade $p^A_\rho = \mathrm{tr}[P^A(\Delta)\rho]$ descreve os resultados de um experimento no qual o observável A é

[vii] Ao decorrer da dissertação, será assumido que $\hbar \equiv 1$.

[viii] David Hilbert (1862 - 1943), matemático alemão.

[ix] o espaço projetivo de Hilbert $\mathcal{PH}$ é o conjunto de classes de equivalência de vetores não-nulos $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ para a relação dada por: $|\psi\rangle \sim c\,|\psi\rangle$ com $c \in \mathbb{C}$ não-nulo. O significado físico do espaço projetivo de Hilbert é que, na teoria quântica, as funções de onda $|\psi\rangle$ e $c\,|\psi\rangle$ representam o mesmo estado físico.

medido.

Dinâmica A dinâmica de um sistema é dada por um operador auto-adjunto H, sendo este o único gerador do um grupo unitário $U_t = e^{-iHt}$ parametrizado pelo tempo t.3 Caso o estado do sistema for ρ no tempo $t = 0$, então o estado evoluído em t é dado por $\rho_t = U_t \rho U_t^\dagger$ (representação de Schrödinger) ou, equivalentemente, seja A um observável no tempo $t = 0$, então o observável evoluído em t é dado por $A_t = U_t A U_t^\dagger$ (representação de Heisenberg[x]).

Já que o objetivo é descrever tempo através de operadores que produzem observáveis que covariam com o tempo paramétrico é interessante definir as condições de covariância global e local, sendo que em mecânica quântica, covariância local pode ser mantida mesmo se não houver nenhuma condição de covariância global.

Definição 2.1. *Será dito que T é localmente covariante no tempo se $\frac{dT(t)}{dt} = cte$, para $\forall t \in \mathbb{R}$ em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$, e o valor esperado de T varia linearmente com o tempo, $\frac{d(\langle\psi|T(t)|\psi\rangle)}{dt} = k$, $\forall \psi \subset \mathcal{D}(T)$, com $\mathcal{D}(T)$ sendo o domínio de T.*

Pode-se expressar a condição de covariância global utilizando o valor esperado de T,

$$\langle\psi|T(t)|\psi\rangle = \langle\psi|T(0)|\psi\rangle + t, \tag{2.4}$$

$\forall \psi \subset \mathcal{D}(T)$ and $\forall t \in \mathbb{R}$.

Como procura-se um observável para tempo, assuma que o operador T seja auto-adjunto e ilimitado. Pelo teorema de Stone[xi], a seguir, há uma correspondência um-para-um entre os operadores auto-adjuntos e os grupos unitários (fortemente contínuos)[xii] de um parâmetro.

Teorema 2.1. *(Stone). Sejam $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ e um grupo unitário de um parâmetro fortemente contínuo U_t com $t \in \mathbb{R}$, então este possui um único gerador auto-adjunto H tal que $U_t = e^{-iHt}$. Isto é,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{it}(U_t - I)\,|\psi\rangle = H\,|\psi\rangle\,, \tag{2.5}$$

x Werner Karl Heisenberg (1901 - 1976), físico teórico alemão.

xi Marshall Harvey Stone (1903-1989), matemático norte-americano.

xii Um grupo fortemente contíinuo de operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma família $T(t)_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que (i) $T(0) = I$, o operador identidade em $\mathcal{H}$; (ii) $T(s)T(t) = T(s+t)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$; (iii) Para cada $x \in \mathcal{H}$ fixado, $T(t)x \to x$, quando $t \to 0$.

com $|\psi\rangle \in \mathcal{D}(H)$ *se o limite existir.*

Nesse caso, sendo $T(0) = T$ o observável na representaação de Schrödinger e $T(t)$ o observável na representação de Heisenberg estes relacionam-se pela expressão,

$$T(t) = U_t T U_t^\dagger = T + tI, \tag{2.6}$$

para $\forall\, |\psi\rangle \in \mathcal{D}(T)$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, com $U_t = e^{-itH}$ sendo a família de um parâmetro de operadores unitários gerados por H. Isto fornece uma expressão mais precisa de covariância global.

Perceba ainda que, para $U_t\,|\psi\rangle \in \mathcal{D}(H)$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}U_t\,|\psi\rangle &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(U_{t+\Delta t} - U_t)\,|\psi\rangle \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(U_{\Delta t} - I)U_t\,|\psi\rangle\,, \qquad (2.7) \\ &= HU_t\,|\psi\rangle \end{aligned}$$

$$(2.8)$$

ou seja, a equação de Schrödinger pode ser derivada como resultado do teorema de Stone.

A covariância local pode ser obtida de T fazendo uma aplicação do Teorema de Stone na relação $[H,\, T]$,

$$\begin{aligned} [H,\, T] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{it}(U_t - I)T - T\lim_{t\to 0}\frac{1}{it}(U_t - I) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{it}(U_t T - TU_t) \\ &= -\lim_{t\to 0} iU_t = -iI \\ &= -iI \qquad (2.9) \end{aligned}$$

$$(2.10)$$

em que na última linha foi utilizada a relação $[U_t,\, T] = U_t$.

Aqui fica bem claro o que o uso do teorema de Stone fornece, em contrapartida com a linha de raciocínio anteriormente utilizada para obter o resultado de Pauli. Não há necessidade de impor a relação de comutação canônica, ela surge naturalmente!

Agora, fazendo uso da equação de Heisenberg para $T(t)$,

$$\frac{d}{dt}T(t) = [H,\, T(t)] = iI, \tag{2.11}$$

assim, covariância global implica em covariância local de T. O uso do teorema de Stone mostra também o sentido exato de que a condição de covariância local é apenas a forma instantânea da condição de covariância global.

O fato de T ser auto-adjunto também mostra que ele é o único gerador do grupo unitário $U_\epsilon = e^{-iT\epsilon}$, assim pode-se utilizar a covariância de T com o grupo unitário U_t para derivar uma relação entre H e U_ϵ. Isso recupera a última linha do argumento de Pauli dado por Galapon (2.3),[9] e os últimos passos da prova são análogos. Assim, segue-se a forma do teorema de Pauli dada por Butterfield.[15]

Teorema 2.2. *(Teorema de Pauli) Sejam H e T operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Se T obedece a relação de covariância global com o grupo uniparamétrico unitário $U_t = e^{-iHt}$ gerado unicamente por H, ou seja, se*

$$T(t) = U_t T U_t^\dagger = T + tI, \tag{2.12}$$

para $\forall t \in \mathbb{R}$, então $\sigma(H) = \sigma(T) \equiv \mathbb{R}$.

O importante da discussão até aqui, dada pelo teorema de Stone foi obter a relação de comutação canônica $[H, T] = -iI$ e sua interpretação, o fato de H e T respeitarem-na mostra que um é o gerador do outro. Justificando sua exigência para a condição de se ter um relógio ideal.

Porém, note que é relativamente fácil ver que os dois operadores acima não podem ser ambos limitados. Observe que para quaisquer A, B tais que $[A, B] = iI \rightarrow [A^n, B] = inA^{n-1}$ e portanto, as normas dos operadores satisfazem

$$2||A||^n.||B|| \geq n||A||^{n-1} \rightarrow 2||A||^n.||B|| \geq n \tag{2.13}$$

para $\forall n$. No entanto, n pode ser arbitrariamente grande, então pelo menos um operador deve ser não-limitado e a dimensão do espaço Hilbert correspondente não pode ser finita. Em seu livro, Weyl[xiii] foi o primeiro a notar que ambos os operadores satisfazendo a relação acima são ilimitados. Assim qualquer sistema finito a se considerar, deve ser tratado como uma aproximação para um relógio ideal[xiv].

O fato de não definir um domínio para os operadores envolvidos no enunciado gera muitas classes de contra-exemplos ao "teorema de Pauli". Um contra-exemplo simples[17] no qual, à parte de significado físico, segue as premissas de Pauli e contradiz sua conclusão

[xiii] Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 - 1955), matemático alemão.
[xiv] Veja uma discussão mais detalhada em HALL.[16]

pode-se ver a seguir.

Um contra-exemplo

Sejam os operadores X e P que satisfazem a relação de comutação canônica, isto é, $[X,\, P] = iI$ e considere o Hamiltoniano $H = \frac{1}{2m}P^2 + X$. Definindo $T = -P$, temos pelo seguinte cálculo simples que,

$$\begin{aligned} HT - TH &= \frac{1}{2m}(P^2 + X)(-P) + P(\frac{1}{2m}P^2 + X) \\ &= -P\frac{1}{2m}P^2 - PX - iI + P\frac{1}{2m}P^2 + PX \\ &= -iI \end{aligned} \tag{2.14}$$

tal operador T é um observável de tempo pela própria definição de Pauli. Há outros contra-exemplos na literatura, como pode ser visto em GALAPON.[9]

O aparecimento de tais contra-exemplos é devido a falta de um certo formalismo no enunciado do teorema, ou seja, a ausência de um domínio de definição dos operadores envolvidos nas premissas de Pauli. No que se segue, será discutida brevemente a exigência de um formalismo e suas implicações. Elas serão positivas no sentido de que, satisfazendo tais condições, possibilitará explorar uma maneira que permita a existência do operador T.

2.2 Há lugar para tempo afinal?

Algo natural de se deparar na história da matemática é o fato de um mesmo resultado ser demonstrado mais que uma vez utilizando conceitos diferentes. Tome por exemplo o pequeno teorema de Fermat[xv] que foi um dos resultados fundamentais da teoria elementar de números envolvendo números primos. A prova, que foi descoberta pela primeira vez por Leibniz[xvi] (porém não a publicou) e mais tarde redescoberta por Euler[xvii] é uma aplicação muito simples do teorema multinomial. Porém, há várias outras demonstrações, por exemplo, o próprio Euler exibiu uma outra posteriormente utlizando ferramentas de teoria de grupos. Assim, uma demonstração com conceitos diferentes para um mesmo fato já conhecido pode propiciar um entendimento mais profundo deste e até gerar caminhos novos para se seguir.

[xv] Pierre de Fermat (1607 - 1665), matemático francês.
[xvi] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), muitas coisas, alemão.
[xvii] Leonard Euler (1707 - 1783), matemático, físico, ... , suíço.

Seguindo a essa premissa, serão exibidos os dois resultados devido à Srinivas e Vijayalakshmi[18] e Halvorson,[19] os quais formalizam o teorema de Pauli. Estes utilizaram da hipótese física de restringir o espectro do hamiltoniano para ser semi-delimitado que, como discutido anteriormente, é algo bastante razoável uma vez que é de interesse respeitar a conservação de energia. Assim, conclui-se o fato de tempo não ser um operador, pelo menos não como os observáveis usuais em mecânica quântica representados por medidas projetivas. O curioso dos resultados é que suas demonstrações tendem a ser triviais baseadas em lemas distintos, porém nada triviais[xviii].

Teorema 2.3. *(Srinivas & Vijayalakshmi). Seja um operador auto-adjunto H limitado (por baixo), então não existe um operador auto-adjunto T de modo que a seguinte relação seja satisfeita,*

$$U_t P^T(\triangle) U_t^\dagger = P^T(\triangle + t), \tag{2.15}$$

com $P^T(\triangle)$ sendo elementos de uma medida projetiva e $U_t = e^{-iHt}$ o grupo unitário de translações temporais geradas por $\mathcal{H}$.

Assim, uma vez que T é auto-adjunto, pelo Teorema Espectral[12] existe uma única família de projetores P^T tal que $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP_\lambda$ com $P_{-\infty} = 0$ e $P_\infty = I$. Portanto, pelo teorema acima não existe T auto-adjunto.

O segundo resultado na mesma linha do acima, porém mais recente foi obtido por Halvorson. No artigo em questão,[19] o autor fornece o argumento de que qualquer teoria quântica dispensa a existência de um subespaço para armazenar os autoestados de um operador auto-adjunto de tempo T.

Pelos postulados da teoria quântica, o espaço de estados é descrito como sendo um espaço vetorial $\mathcal{H}$ munido de produto interno, cuja evolução temporal é representada por um grupo de translação temporal $\{U_t = e^{-iHt};\, t \in \mathbb{R}\}$, sendo H seu gerador com espectro limitado por baixo - limite inferior de energia. Suponha agora por *reductio ad absurdum* que para qualquer intervalo $\triangle \subset \mathbb{R}$, existe um subespaço $\mathcal{S}_\triangle \subset \mathcal{H}$ de estados que ocorrem durante esse intervalo, denote por $P_\triangle$ a projeção em tal subespaço $\mathcal{S}_\triangle$. Para qualquer estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, o operador de evolução temporal U_t evolui o estado $|\psi\rangle$ por t. Assim, se $|\psi\rangle \in \mathcal{S}_\triangle$ então $U_t\,|\psi\rangle \in \mathcal{S}_{\triangle+t}$. Porém, o fato de operador U_t ser unitário $U_t\,(\mathcal{S}_\triangle) = (\mathcal{S}_{\triangle+t}) \leftrightarrow U_t^\dagger\,(\mathcal{S}_{\triangle+t}) = (\mathcal{S}_\triangle)$, implica que $U_t P_\triangle U_t^\dagger = P_{\triangle+t}$, $\forall \triangle$, $t \in \mathbb{R}$. Como segundo resultado, segue o seguinte

[xviii] veja o apêndice A para detalhes.

Teorema 2.4. *(Halvorson) Suponha que haja uma atribuição* $\triangle \mapsto \mathcal{S}_\triangle$ *de intervalos temporais para subespaços do espaço de estados* $\mathcal{H}$ *tais que:*

1. $U_t\,(\mathcal{S}_\triangle)\,U_t^\dagger = \mathcal{S}_{\triangle+t}$ *Para* $\forall t \in \mathbb{R}$,

2. $\mathcal{S}_\triangle$ *é ortogonal a* $\mathcal{S}_{\triangle'}$ *para* $\triangle$ *e* $\triangle'$ *disjuntos.*

Então $\mathcal{S}_\triangle = 0$ *para qualquer que seja o intervalo* $\triangle$.

Isso mostra novamente que dentro do formalismo convencional de mecânica quântica não há lugar para projetores que evoluem através do gerador hamiltoniano, e portanto, não há lugar para um operador auto-adjunto de tempo T, necessitando assim de outros mecanismos a serem explorados caso queira-se persistir num lugar para tempo na teoria.

O leitor curioso irá notar que no artigo, o autor diz comprovar que a teoria quântica exclui qualquer possibilidade de uma quantidade que se possa chamar de intervalo de tempo entre dois eventos. Além disso, ele alega que o tempo não é nem mesmo uma quantidade não observável na mecânica quântica. Aqui, não serão feitas interpretações um tanto que ousadas nesse sentido e sim apenas utilizar do resultado matemático como uma espécie de guia para considerar outros mecanismos ou hipóteses consistentes para tratar a questão do tempo na mecânica quântica.

2.3 O caminho intocado por Pauli: O espaço de Hilbert Extendido

Uma saída elegante para o impasse da última seção foi oferecida por Page e Wootters.[2] O ponto de partida foi utilizar o que se conhece como a definição operacional de tempo dada por Peres[xix]: "tempo é aquilo que é medido por um relógio".[20] Essa afirmação poderia resolver o problema de definir tempo, mas na verdade ela só reformula a pergunta para dizer: o que são relógios afinal? Sendo assim, a principal tarefa será analisar um sistema físico que atue como um relógio e um observável do relógio para que tempo possa enfim ser descrito pela teoria quântica qualquer que venha a ser seu aspecto, respeitando os argumentos discutidos anteriormente.

Antes, um pouco de história. Como mencionado no início, a extensão do espaço de Hilbert devida à Dirac veio em um de seus primeiros artigos, que posteriormente utilizou-a[21] motivado pelo desejo de quantificar a relatividade geral. Tais técnicas foram utilizadas por John Wheeler[xx] e Bryce DeWitt[xxi] num artigo publicado em 1967,[22] culminando em sua equação "estática" num desejo de obter uma equação para a gravidade quântica. Por fim,

[xix] Asher Peres (1934 - 2005), físico israelense.
[xx] John Archibald Wheeler (1911 - 2008), físico teórico norte-americano.
[xxi] Bryce Seligman DeWitt (1923 - 2004), físico teórico norte-americano.

tal fato foi uma das motivações de Page e Wootters para o mecanismo aqui tratado, como pode-se ver no artigo original.[2]

A ideia principal do mecanismo de Page e Wootters consiste em ampliar o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S$ de um sistema S em consideração para $\mathcal{H} := \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ com $\mathcal{H}_R$ sendo o espaço de um sistema auxiliar R, sistema relógio. Este último está provido dos operadores canônicos T_R e H_R com $[T_R, H_R] = iI$, que representam posição e momento[xxii], respectivamente e, sob restrições que virão a seguir, podem ser interpretados como o indicador de tempo e energia do sistema em evolução. Em seguida, apresenta-se o hamiltoniano do sistema total:

$$H_{tot} := H_S \otimes I_R + I_S \otimes H_R \tag{2.16}$$

com H_S sendo o hamiltoniano do sistema S e I_S, I_R os operadores de identidade em $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_R$, respectivamente. Por construção, H_{tot} possui um espectro contínuo que inclui todos os valores reais possíveis como autovalores. No que segue, é identificado um conjunto especial de vetores $|\psi\rangle\rangle$, chamados de vetores físicos do mecanismo e que são identificados pela equação de autovetor associada ao autovalor nulo de H_{tot}, isto é

$$H_{tot} \, |\psi\rangle\rangle = 0 \tag{2.17}$$

em que a notação de duplo-ket lembrará que $|\psi\rangle\rangle$ é definido em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. Mais precisamente a equação acima define autovetores que não são elementos próprios de $\mathcal{H}$, como é o caso do operador posição de uma partícula.[14] Porém, possui um produto escalar com todos os elementos de tal espaço, induzindo uma representação dele.

Nessa construção, o autovalor zero de H_{tot} parece desempenhar um papel especial na identificação dos vetores físicos $|\psi\rangle\rangle$ mas esse não é o caso.[23] Na verdade, à menos de fases, os vetores físicos $|\psi\rangle\rangle$ podem ser identificados também pela seguinte restrição,

$$H_T \, |\psi\rangle\rangle = \lambda \, |\psi\rangle\rangle \tag{2.18}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, a equação (2.18) pode ser colocada na forma (2.17) realizando uma translação do espectro de H_T por λ. Portanto, pode-se fixar a análise na equação (2.17) sem perda de generalidade.

Pode-se interpretar a equação (2.17) como uma restrição que força vetores físicos a serem autoestados do hamiltoniano total com autovalor nulo. Assim, neste modelo os

[xxii] Já que o relógio deve apenar covariar com o tempo paramêtrico. Assim, os "braços" do relógio podem ser descrito por um oscilador harmônico oscilando numa certa frequência, uma partícula movendo na reta real ou um sistema de d-níveis.

vetores $|\psi\rangle\rangle$ são objetos "estáticos" que não evoluem.

A vantagem é que, ao contrário do cenário clássico, na teoria quântica o movimento não tem de ser assumido como primitivo: assume-se que o todo o sistema esteja em um estado estacionário - um autoestado de seu hamiltoniano. O tempo e a dinâmica emergem então em um subsistema que é emaranhado com outro subsistema relógio, observável relógio. É importante notar que este não é um operador de tempo, mas simplesmente um observável (e.g. uma dada componente do operador momento angular) do sistema escolhido como um possível relógio.[24,25]

Lembre que a existência de um operador tempo levanta alguns problemas, como visto na sessão anterior e resumido pela equação a seguir,

$$[T_R,\, H_S] = iI \rightarrow \sigma(H_S) \subset (-\infty, \infty) \tag{2.19}$$

porém, nesse modelo segue que

$$[T_R,\, H_R] = iI \rightarrow \sigma(H_R) \subset (-\infty, \infty) \tag{2.20}$$

apenas o hamiltoniano do relógio (momento) deve ter espectro infinito, caso seja de interesse ele tomar todos valores da reta, e não o hamiltoniano do sistema H_S!

Assim, por construção, o mecanismo de Page e Wootters está livre das premissas dos teoremas da seção anterior, uma vez que

$$[T_R,\, H_S] = 0 \tag{2.21}$$

já que os operadores T_R e H_S pertencem a espaços de Hilbert diferentes!

Isso remete à uma afirmativa dada por Peres em seu livro texto[26]: "Se energia gera translações temporais e momento gera translações de posição, então o hamiltoniano e operador momento de qualquer sistema deveriam comutar sempre". Na mecânica quântica convencional isso não é um problema, caso não se trate tempo como uma variável dinâmica. No caso construído acima tempo é uma váriavel dinâmica, o que poderia trazer problemas, porém suas translações não são geradas por H_S e sim por H_R.

Para o relógio ser ideal, o observável escolhido como indicador T_R deve ser conjugado com o hamiltoniano do relógio, $[T_R,\, H_R] = iI$ com $T_R\,|\phi_R(t)\rangle = t\,|\phi_R(t)\rangle$ e os valores

t formam um contínuo, que representam os valores a serem lidos pelos braços do relógio.

O fato de os relógios serem fisicamente realizáveis significa que o comportamento de um relógio ideal pode ser aproximado a uma precisão arbitrariamente alta.[27,28] O relógio ideal pode ser aproximado por sistemas com um observável T_R que possui um espectro discreto de n autovalores $\phi(t_n)$, onde não há limite para quão bem o a sequência de t_n pode se aproximar da reta real, para assim o espaçamento entre dois autovalores consecutivos ser desprezível e o relógio possuir uma precisão suficientemente alta. Tal possibilidade será assumida nos casos finitos tratados a seguir.

Considere o caso de um observável relógio dado por

$$T_R = \sum_{t\in\mathcal{T}} t|\phi_R(t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t)| \tag{2.22}$$

com $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto maximal do conjunto dos reais, tal que os vetores são ortonomais para $\forall t \in \mathcal{T}$. Se $\mathcal{T}$ for um conjunto de números reais sucessivos separados por Δt, o observável

$$-\frac{i}{\Delta t}\log\left(\sum_{t\in\mathcal{T}} |\phi_R(t+\Delta t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t)|\right) \tag{2.23}$$

pode servir como H_R nesse caso ideal. Isso porque, é possível recuperar a expressão de covariância global,

$$e^{-iH_R\Delta t}T_R e^{iH_R\Delta t} = T_R + \Delta t I \tag{2.24}$$

De fato, utilizando que $e^{\log A} = A$, com A sendo um operador auto-adjunto, segue que

$$\begin{aligned}
e^{-iH_R\Delta t}T_R e^{iH_R\Delta t} &= \sum_{t,t'\in\mathcal{T}} t'|\phi_R(t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t+\Delta t)|\phi_R(t')\,\rangle\langle\,\phi_R(t')|\left(\sum_{t\in\mathcal{T}}|\phi_R(t+\Delta t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t)|\right)\\
&= \sum_{t\in\mathcal{T}}(t+\Delta t)\,|\phi_R(t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t+\Delta t)|\left(\sum_{t\in\mathcal{T}}|\phi_R(t+\Delta t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t)|\right)\\
&= \sum_{t,t'\in\mathcal{T}}(t+\Delta t)\,|\phi_R(t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t+\Delta t)|\phi_R(t'+\Delta t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t')|\\
&= \sum_{t\in\mathcal{T}}(t+\Delta t)\,|\phi_R(t)\,\rangle\langle\,\phi_R(t)| = T_R + \Delta t I
\end{aligned} \tag{2.25}$$

aonde foi utilizada apenas a ortonormalidade dos estados $\langle\phi_R(t)|\phi_R(t')\rangle = \delta_{t,t'}$. Esse é um exemplo de como poderia se aproximar a reta real fazendo $\lim \Delta t \to 0$. Observe que tudo isso ocorre no espaço do relógio.

Agora, seja $|\phi_R(0)\rangle$ o estado do relógio escolhido para corresponder ao tempo zero do relógio e para cada t defina: $|\phi_R(t)\rangle = \exp(-iH_R t)\,|\phi_R(0)\rangle$ como o estado que possui o valor t do tempo de relógio. Por fim, seja $|\psi_S(t)\rangle$ o estado relativo do sistema S quando o relógio R está no estado $|\psi_R(t)\rangle$. Em outras palavras, $|\psi_S(t)\rangle$ é o estado a partir do qual as probabilidades para o sistema podem ser calculadas, dado que o relógio foi encontrado no estado $|\phi_R(t)\rangle$. Matematicamente, $|\psi_S(t)\rangle$ é o resultado da projeção de $|\psi\rangle\rangle$ no subespaço do relógio, ou seja, o coeficiente de $|\phi_R(t)\rangle$ na expansão de $|\psi\rangle\rangle$ como os autovetores do operador temporal T_R,

$$|\psi_S(t)\rangle = \langle\phi_R(t)\,|\psi\rangle\rangle \tag{2.26}$$

Ao escrever (2.17) na representação "posição" em $\mathcal{H}_R$, pode-se facilmente verificar que esse vetor realmente obedece equação de Schrödinger, i.e.,

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\,|\psi_S(t)\rangle &= i\frac{d}{dt}\,\langle\phi_R(t)\,|\psi\rangle\rangle = -\,\langle\phi_R(t)\,|H_R\otimes I_S|\psi\rangle\rangle \\ &= -\,\langle\phi_R(t)\,|H_{tot} - H_S\otimes I_R|\psi\rangle\rangle = \langle\phi_R(t)\,|H_S\otimes I_R|\psi\rangle\rangle \\ &= H_S\,\langle\phi_R(t)\,|\psi\rangle\rangle = H_S\,|\psi_S(t)\rangle \end{aligned} \tag{2.27}$$

Assim, medidas de estados só farão sentido quando condicionadas ao estado do relógio. Note que isso não é tão estranho ao se pensar da seguinte maneira, suponha que um técnico de laborátorio queira fazer uma medida num experimento quântico e para isso utiliza a equação usual de Schrödinger para evoluir o sistema

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle \tag{2.28}$$

a váriavel t é um parâmetro lido pelo relógio da parede, externo ao sistema. Assim, ao realizar a medida, ele condiciona esta ao valor lido pelo relógio da parede, classicamente correlacionado, para anotar o dado. A única diferença aqui é que o relógio será considerado como um sistema quântico, que correlaciona-se quanticamente com o sistema e faz parte dele. Menos estranho?

2.3.1 Um exemplo simples, mas rico: dois qubits

Com propósitos heurísticos, será revisto o primeiro exemplo abordado por Wootters em seu artigo.[29] Considere duas partículas spin-1/2 não-interagentes ou dois quibts em um campo magnético $\overrightarrow{B} = B_o\hat{z}$. Neste modelo, as duas partículas que possuem momentos

magnéticos idênticos μ, iniciam o instante $t = 0$ com ambos os seus spins apontando na direção $\hat{x}$ positivo. Isto é,

$$\left|\psi_{(i)}(0)\right\rangle = |+\rangle \equiv \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},\ i = 1,\ 2, \tag{2.29}$$

em que $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são auto-estados de σ_z[xxiii] e o hamiltoniano total dado por

$$H_{tot} = \sigma_z^R \otimes I^S + I^R \otimes \sigma_z^S \tag{2.31}$$

com σ_z^α sendo a componente $\hat{z}$, de cada partícula, do spinor $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ que satisfaz as seguintes relações $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\epsilon_{ijk}\sigma_k$ e $\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij}$ para $i, j = x, y, z$. Atribua a uma das partículas como um relógio R, sendo sua direção de rotação análoga ao sentido do ponteiro de um relógio ordinário e a outra partícula como o sistema S. Desse modo, o observável relógio pode ser escolhido como σ_x^R.

Pela equação de movimento, as partículas precessionam em conjunto em torno do eixo vertical, de modo que o estado de cada partícula no tempo t é,

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \frac{e^{i\omega t}\,|0\rangle + e^{-i\omega t}\,|1\rangle}{\sqrt{2}},\ \alpha = R,\ S, \tag{2.32}$$

com $\omega \equiv \mu B_o$.

No entanto, a proposta do mecanismo é a inacessibilidade do tempo paramétrico representado pela coordenada t. Uma maneira de livrar-se dela é realizar uma média sobre tal variável inacessível para obter um estado físico para as outras variáveis.[16] Portanto, o vetor desse sistema simples ponderado pela média no tempo será

$$|\psi\rangle\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\,|\psi_R(t)\rangle\,|\psi_S(t)\rangle\,, \tag{2.33}$$

que na base $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$ terá o seguinte aspecto,

$$|\psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\,|-\rangle + |-\rangle\,|+\rangle\right) \tag{2.34}$$

[xxiii] Aqui está sendo utilizada a notação convencional da teoria de informação quântica aonde têm-se as seguintes correspondências,

$$|0\rangle \longleftrightarrow |\uparrow\rangle\ e\ |1\rangle \longleftrightarrow |\downarrow\rangle \tag{2.30}$$

com a notação up-down do spin.

e como requerido o hamiltoniano do relógio gera uma translação dada por $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\sigma_z^R\right)|+\rangle = |-\rangle$.

Na base de energia (autobase de σ_z) o estado do sistema será

$$|\psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right) \tag{2.35}$$

Veja que no sistema total o estado é estático e correlacionado quanticamente: emaranhado. Um outro fato importante de se notar é que na notação matricial, de operador densidade $\rho = |\psi\,\rangle\rangle\langle\langle\,\psi|$,

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & & & \boxed{0} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Enquanto que, caso fosse realizado o procedimento de eliminar o tempo externo t no estado físico

$$\rho = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt|\psi_R(t)\,\rangle\langle\,\psi_R(t)| \otimes |\psi_S(t)\,\rangle\langle\,\psi_S(t)| \tag{2.37}$$

o resultado, na base $\{|0\rangle\,,|1\rangle\}$, seria

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

Note a diferença nos termos selecionados em vermelho. Há um porque? Como é da sabedoria comum, pode-se identificar os estados puros de um sistema quântico como as classes de equivalência de vetores unitários pela relação

$$|\psi\rangle \sim e^{i\theta}\,|\psi\rangle \tag{2.39}$$

com $\theta \in \mathbb{R}$, uma vez que $|\psi\rangle$ e $e^{i\theta}\,|\psi\rangle$ geram o mesmo subespaço, tem-se que o projetor associado a eles é o mesmo. Essa é uma das vantagens de se representar estados usando operadores densidade, pois a cada estado físico há um único operador correspondente e a fase θ é eliminada por construção. Aqui, isso parece fazer uma diferença crucial como pode-se observar acima: ao fazer a média num vetor físico ao invés do estado físico dado pelo operador

densidade, são eliminados estados desnecessários que não são eliminados no segundo caso.[30]

Por isso, faz mais sentido manter como processo de eliminação da coordenada paramétrica de tempo t a seguinte média,[31]

$$\rho = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt\, \rho_R(t) \otimes \rho_S(t) \tag{2.40}$$

Perceba que aqui foi dado um aspecto geral para a operação. No exemplo acima, a evolução provocada pelo hamiltoniano é nada mais do que translações por uma fase e, por isso, a integração foi num intervalo distinto. Esse procedimento será discutido com mais detalhe no próximo capítulo. Isso não alteraria em nada a discussão da seção 2.3 na obtenção da equação de Schrödinger, já que pode-se obter

$$\dot{\rho}_S(t) = i\,[\rho_S(t),\, H_S(t)] \tag{2.41}$$

sendo esta a equação de Schrödinger na notação de operador densidade do sistema S no tempo t quando o sistema relógio R se encontra no estado $\rho_R(t) = e^{-iH_R t}\rho_R(0)e^{iH_R t}$.

Por fim, note que o modelo de relógio acima é um tanto que pobre. Para isso ficar mais claro, faça a seguinte atribuição pitoresca de "horários" à estados do relógio quântico[29] como segue-se: ao estado correspondente à $+\hat{x}$, atribua o horário de meio-dia[xxiv], ou seja, $|+\rangle \longleftrightarrow 12h$ e ao estado correspondente a $-\hat{x}$, tem-se a associação $|-\rangle \longleftrightarrow 6h$ que representam um ângulo de defasagem de π. Agora fica claro que não há mais autoestados no sistema relógio R para atribuir os outros horários de um relógio convencional, ou seja, nesse exemplo o relógio é um binário de tiques: cima-baixo. Portanto, o quão melhor os autovalores do sistema relógio R aproximarem-se da reta real, garantirá chance de atribuir menores intervalos temporais à dinâmica do sistema. Em palavras mais elegantes, para que a construção seja compatível com uma dinâmica realista deve-se ter um alto grau de degenerescência no autoespaço associado ao autovalor nulo do hamiltoniano do sistema total.

Uma outra manifestação de o relógio não ser ideal nesse exemplo é o fato de $[T_R,\, H_R] \equiv [\sigma_x^R,\, \sigma_z^R] \neq iI$, só atingindo tal quando o sistema possui um hamiltoniano e observável relógio ilimitados, o que obviamente não é o caso para o sistema de quibts. Porém, o exemplo é muito útil para clarear a dinâmica do mecanismo de Page e Wootters.

[xxiv] ou meia-noite, isso dependerá da hora que você lerá isso

Essa discussão voltará no capítulo 4 e ficará claro que, num caso similar de aumentar a dimensão do espaço de Hilbert, o relógio funcionará[xxv] melhor.

[xxv] Será procurado também definir melhor o significado do termo “funcionar” para o relógio.

3 SISTEMAS DE REFERÊNCIAS E TEORIA DE ASSIMETRIA

3.1 Introdução

Como discutido, o mecanismo de Page e Wootters oferece um caminho alternativo para tratar tempo em mecânica quântica. No capítulo anterior, tal mecanismo foi introduzido mostrando como ele fica livre das premissas de Pauli. Faz sentido exibir as principais argumentações e outros indícios que fortificam a prosposta deles, uma vez que estas trazem um rico ferramental que possibilita explorar melhor a física. Sendo assim, o motivo desse capítulo será exibir ferramentas visando analisar o mecanismo e discutir os resultados do capítulo que se segue.

Pelo próprio mecanismo, somente os operadores que comutam com o hamiltoniano total podem ser observáveis. Mas esses operadores são estacionários, então como é que observa-se a dependência do tempo no mundo? Foi argumentado que o comportamento temporal tido pela equação de Schrödinger é, na verdade, uma dependência por um tempo de relógio interno e não pelo tempo paramétrico externo. Isto é coerente com as observações de que qualquer sistema fechado está em um autoestado de energia de seu hamiltoniano total e, portanto, estacionário em relação à coordenada tempo.[2]

Um outro argumento que motiva investigar o papel de evoluções temporais em mecânica quântica é o fato dos estados evoluídos estarem nos elementos não-diagonais do operador densidade. Para clarear, tome o exemplo da evolução de um sistema de d-níveis com estado inicial $\rho = \frac{1}{d}\sum_{m,n=1}^{d} |m\rangle\langle n|$ e operador de evolução dado por $U_t = \sum_{m=1}^{d} e^{-i\omega m t} |m\rangle\langle m|$, na base do hamiltoniano. Segue então, que:

$$U_t \rho U_t^\dagger = \frac{1}{d}\sum_{m,n=1}^{d} e^{-i\omega(m-n)t} |m\rangle\langle n| \tag{3.1}$$

Bem, sabe-se que todo o ferramental do axioma de observação na teoria quântica usual se restringe na análise espectral de operadores - obter os autovalores de um observável quântico (operador auto-adjunto). Sabe-se também, da teoria espectral, que autovalores são invariantes por mudanças de base ou transformações de similaridade[i]. Isso é razoável, já que um observável quântico, depois de obtido é algo físico, sendo normal atribuir uma realidade a ele e, portanto, exigindo uma invariância por transformações. Porém, como visto acima, os estados evoluídos obviamente fogem dessa invariância, dando assim mais

[i] Dados um operador O e um operador inversível P, uma transformação é dita similar se $O \to P^{-1}OP$.

um argumento para se investigar as ferramentas utilizadas na descrição da dinâmica na teoria quântica não-relativista.

Esse incômodo é pertinente, já que na Física é interessante associar um axioma físico com imposições na descrição matemática da teoria em questão. Para ver como isso se manifesta em outras áreas, utilize como exemplo a teoria da relatividade restrita. Os dois axiomas fundamentais postulados por Einstein[32] podem ser vistos como:

- constância da velocidade da luz em todos referenciais iniciais;
- invariância de uma teoria física por referenciais inerciais;

O elegante disso é que na sua formulação os dois axiomas físicos acima restringem a ferramenta matemática utilizada, à saber, teorias físicas devem ser descritas por equações diferenciais (parciais) hiperbólicas[33] tensorias sobre um espaço-tempo munido de uma métrica lorentziana plana. A métrica lorentziana faz com que a região de influência de uma equação hiperbólica seja contida no cone de luz futuro - primeiro axioma; o fato de serem tensoriais implica em invariância por referenciais inerciais - segundo axioma.[32]

Assim, o fato de impor a restrição do tempo paramétrico ser inacessível e recuperado pela correlação com um sistema relógio na proposta de Page e Wootters, consegue elevar o nível de dinâmica para algo invariante na teoria matemática da mecânica quântica não-relativista. É importante deixar claro aqui, que a proposta de Page e Wootters não é necessariamente o mecanismo correto para explicar o caráter do tempo descrita acima, apenas oferece um caminho que vale a pena ser investigado por propor uma solução consistente com as digressões acima e até agora obter sucesso em contra-argumentações que apareceram na literatura.[23,28,31]

Após fazer uma pequena introdução de simetrias em física, será visto melhor a estrutura da média uniforme apresentada no capítulo anterior e como ela restringe a dinâmica para uma invariância por grupos.

3.2 Um pouco de simetrias em Física

Acredita-se que as leis da natureza sejam invariantes sob certas operações de simetria do espaço-tempo: translações, rotações e deslocamentos em relação à um sistema de referência se movendo uniformemente. Assim, na construção de uma teoria física (em velocidade baixas - limite não-relativístico) é comum assumir invariância sob essas transformações, logo a descrição de sistemas quânticos que diferem apenas por tais transformações

devem ser equivalentes. Sabe-se, do conhecido teorema de Wigner[14][ii] que essas transformações são representadas por operadores unitários ou anti-unitários[iii] no espaço de Hilbert do sistema. Portanto, correspondente a uma transformação no espaço-tempo τ, deve haver uma transformação unitária $U(\tau)$, que será chamada de transformação de simetria, nos vetores de estado e operadores observáveis.

Uma transformação de simetria deixa os objetos físicos, estruturas ou dinâmica inalterada. O interessante é que a teoria de grupos[iv] fornece a linguagem matemática para descrever simetrias. Pode-se ver facilmente que o conjunto de simetrias de um objeto forma um grupo:

- são fechados, pois tomando uma simetria do objeto e então aplicando outra simetria, a transformação total deixará o objeto inalterado sendo ainda uma simetria;

- a transformação identidade sempre deixa o objeto inalterado sendo portanto uma simetria do objeto;

- finalmente, se uma transformação deixa o objeto inalterado, desfazendo essa transformação o objeto também fica inalterado e assim o inverso de uma simetria é também uma simetria.

Assim, as transformações no espaço-tempo no regime não-relativista, denotadas por τ, são representadas por um grupo, o chamado grupo de Galilei[v,vi]. Dados um operador de densidade arbitrário ρ e um operador unitário U_g, o mapeamento por uma transformação de simetria associada a um grupo G é feito para o operador densidade $U_g \rho U_g^\dagger$.

Seja G um grupo descrevendo um conjunto ou uma transformação de simetria. A ação de cada elemento de grupo $g \in G$ deve ser descrita por uma transformação unitária U_g. Segue que, por consistência, para qualquer par de elementos de grupo $g, g' \in G$

$$U_{gg'} \rho U_{gg'}^\dagger = U_{g'} \left(U_g \rho U_g^\dagger \right) U_{g'}^\dagger \tag{3.2}$$

ii Eugene Paul Wigner (1902 - 1995), físico húngaro.

iii estes são necessários para descrever certas simetrias discretas, como invariância por reversão temporal, porém estes não serão de atenção nesta dissertação.

iv veja apêndice B para detalhes.

v Galileu Galilei (1564 - 1642), personalidade fundamental no que entende-se por fazer ciência.

vi No regime relativístico, é utilizado o grupo de Lorentz.[32,33]

Uma vez que isto deve ser válido para qualquer estado arbitrário ρ, pode-se concluir que

$$U_g U_{g'} = \omega(g, g') U_{gg'} \tag{3.3}$$

em que $\omega(g, g')$ é um fator de fase, i.e. $|\omega(g, g')| = 1$.

Isto significa que uma simetria descrita pelo grupo G deve ser representada por uma representação unitária projetiva do grupo G. O fator de fase $\omega(g, g')$ é chamado de cociclo da representação. No caso específico em que o cociclo é trivial, $\omega(g, g') \equiv 1$, a representação é chamada apenas de representação unitária, esse será o foco de aqui em diante[vii]. Será utilizada a notação unitária de super-operador para representar a ação de grupos. Dados um grupo G e quaisquer representações unitárias $g \to U_g$ para $\forall g \in G$, define-se o super-operador

$$\mathcal{U}_g(\cdot) \coloneqq U_g(\cdot) U_g^\dagger \tag{3.4}$$

Assim, sob a transformação de simetria U_g, um dado estado ρ será mapeado em $\mathcal{U}_g(\rho)$.

Para a maioria das simetrias, como as simetrias fundamentais do espaço-tempo a representação destas em sistemas compostos é dada pela *representação coletiva*: se as representações unitárias de uma transformação de simetria nos sistemas com os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ são dadas por U_g^A e U_g^B, $g \in G$, respectivamente, então a representação unitária dessa transformação de simetria no espaço de Hilbert do sistema com composto $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ será dada por $U_g^A \otimes U_g^B$. Nesta dissertação, sempre será assumido que a representação da simetria no sistema composto será a representação coletiva.

Agora, decomponha o espaço de Hilbert total $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ de um sistema composto na soma direta de seus autoespaços como se segue. Definindo $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_T$ como os autoespaços do operador H_T com autovalores ϵ_n, pode-se assim expressar o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_T$ como,

$$\mathcal{H}_T = \bigoplus_{n=0}^{d} \mathcal{H}_n \tag{3.5}$$

Qualquer estado $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}_n$ transforma-se sob translações temporais, pela representação U_t, como

$$U_t |\psi_n\rangle = e^{-i\epsilon_n t} |\psi_n\rangle \tag{3.6}$$

Definindo Π_n como o projetor em $\mathcal{H}_n$, então um estado arbitrário $|\psi\rangle$[viii] transforma-

vii para uma melhor discussão e exemplos de cociclos não-triviais veja MARVIAN.[34]

viii perceba aqui que este estado tem o mesmo papel daquele com notação de duplo-ket da seção 2.3.

se da forma

$$|\psi(t)\rangle = U_t\,|\psi\rangle = \sum_n e^{-i\epsilon_n t}\Pi_n\,|\psi\rangle \tag{3.7}$$

Suponha agora que Bob prepare um estado quântico $|\psi(t)\rangle$ em relação a sua referência de tempo t. Considere a situação em que Alice não possui conhecimento da referência de tempo de Bob t, ou seja, há uma simetria por translações temporais representadas por $U_t = \{e^{-iHt} : t \in \mathbb{R}\}$. O procedimento de Alice, para descrever o estado de Bob é o mesmo da seção 2.3.1, ela realiza uma média uniforme sobre os possíveis valores de t, dando a sua descrição do estado enviado por Bob. Esta média produz um *estado misto*,

$$\mathcal{G}[|\psi(t)\,\rangle\langle\,\psi(t)|] := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, U_t|\psi\,\rangle\langle\,\psi|U_t^\dagger \tag{3.8}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}[|\psi(t)\,\rangle\langle\,\psi(t)|] &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\,\sum_{m,n} e^{-i\epsilon_m t}\Pi_m|\psi\,\rangle\langle\,\psi|\Pi_n e^{i\epsilon_n t} \\
&= \sum_{m,n}\Pi_n|\psi\,\rangle\langle\,\psi|\Pi_m\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, e^{-i(\epsilon_m-\epsilon_n)t}\right) \\
&= \sum_n \Pi_n|\psi\,\rangle\langle\,\psi|\Pi_n
\end{aligned} \tag{3.9}$$

O fato deste resultado se aplicar a qualquer estado $|\psi(t)\rangle$, permite expressar a ação de $\mathcal{G}$[ix] em um operador densidade arbitrário ρ como,

$$\mathcal{G}[\rho] = \sum_n \Pi_n\rho\Pi_n \tag{3.10}$$

Assim, o estado do sistema como um todo é invariante pelo grupo de translações temporais[x] e o tempo paramétrico é recuperado através de correlações entre os subsistemas em $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$. Mais precisamente, propõe-se o seguinte protocolo para a descrição de tempo:

1. Tratar tempo quanticamente;

2. Fazer o uso de hamiltonianos com simetrias apropriadas - hamiltonianos que comutam com o gerador de translação temporal;

ix Esse formato simples de $\mathcal{G}$ vale apenas para as simetrias fundamentais descritas acima, para sua cara mais complicada, veja BARTLETT et al.[35]

x note que a simetria por G impõe uma decomposição completamente redutível no operador, veja apêndice B.

3. Introduzir classes de equivalência entre estados quânticos relacionados por um elemento do grupo de simetria[xi];

4. Interpretar os operadores de densidade evoluídos como distribuições de probabilidade condicionais.

Na literatura, esse é o formalismo da mecânica quântica relacional,[36] que consiste no tratamento de sistemas de referência como objetos quânticos, relógios no caso trabalhado aqui. Por relacional, entende-se de uma teoria em que não há necessidade de um sistema de referência externo que é utilizado para definir observáveis cinemáticos. A motivação da construção desta teoria é a relatividade geral, uma teoria independente de referenciais cuja generalização quântica é esperada herdar essa propriedade. No limite semi-clássico, em que assume-se sistemas de referência com um espaço de Hilbert de dimensão muita alta, a mecânica quântica relacional reduz-se a mecânica quântica padrão. No entanto, no limite semi-clássico não pode-se negligenciar efeitos gravitacionais devido a esses referenciais.[37–39] Portanto, o problema de encontrar uma "mecânica quântica relacional" é necessariamente parte do projeto de construção de uma teoria quântica da gravidade.

No que segue, discute-se com mais detalhes o papel de um referencial ou sistema de referência na descrição da mecânica quântica e chega-se na conclusão de que apresentar invariância por um sistema de referência é nada mais do que apresentar invariância pela representação de um dado grupo. É importante ressaltar que a teoria de sistemas de referência quânticos não está no seu formato final.[35] O objetivo a seguir é apenas exibi-la para mostrar como o mecanismo de Page e Wootters está diretamente relacionado com esta, o aparecimento de complicações, como discutidas acima, em uma análise mais profunda foge do escopo da dissertação.

3.3 Sistemas de Referências

Sistemas de referência em uma teoria física podem ser tratados como externos ou internos na respectiva descrição física. Um sistema de referência externo é um recurso estático, não sendo descrito como parte da dinâmica, no qual a descrição dos objetos é especificada e em particular não interage com os sistemas físicos da teoria. Tais sistemas de referência serão denominados como sistemas de referência padrão e denotados pela letra p. Por outro lado, sistemas de referência internos são objetos físicos dinâmicos que estão incluídos na descrição da física.[40,41]

[xi] Essas classes pertencem ao mesmo subespaço invariante da decomposição irredutível do operador densidade, Apêndice B.

Eliminando o sistema de referência padrão: partícula clássica

Pode-se ilustrar o conceito de um sistema de referência interno como o exemplo de determinar a posição de uma partícula clássica c em uma dada linha. A posição $\overrightarrow{x_c}$ da partícula depende das coordenadas externas, em especial: fixar uma origem e escolher uma escala. Alternativamente, pode-se utilizar a posição $\overrightarrow{x_r}$ de uma partícula de referência r adicional como um marco físico para a origem. A posição relativa da partícula inicial em relação a esta partícula de referência é dada pela distância $|\overrightarrow{x_c} - \overrightarrow{x_r}|$. Esta posição relativa é um grau de liberdade inseparável tanto da partícula c como da partícula r. Uma vez que esta quantidade é independente do sistema de referência padrão p, o sistema de referência r é dito interno. Nessa descrição física, quando se utiliza um sistema de referência interno, as quantidades físicas importantes são codificadas nas correlações entre o sistema c e o sistema de referência r, que são invariantes sob mudanças do sistemas do referência padrão.

3.3.1 Sistemas de referência na mecânica quântica

Sistemas de referência estão implícitos na descrição de estados quânticos. Por exemplo, na representação de posição da função de onda de uma partícula quântica $\psi(x)$, a coordenada x parametriza a posição da partícula em relação a uma referência espacial externa r - eixo cartesiano. Mais geralmente, o estado quântico de um sistema é uma descrição do sistema relativo à um sistema de referência externo adequado.

Considere agora uma transformação que altera a relação acima. Essa transformação pode ser *ativa* ou *passiva*. Numa transformação ativa, muda-se o sistema tal que o sistema transformado representado pelo estado $\psi'(x)$, mantém uma relação diferente com o sistema de referência r. Já na transformação passiva, o sistema não se altera, mas é descrito em relação a um novo sistema de referência r'. Em ambas as situações, a transformação pode ser representada por um operador unitário, como discutido anteriormente.

Para clarear, considere a figura à seguir, em que ocorre a seguinte mudança do estado na representação posição $\Psi(x) \to \Psi'(x)$, no caso de transformação ativa e a seguinte mudança do sistema de referência $r \to r'$ como sendo uma translação no eixo x, $x_0 \to x_0'$, no caso de transformação passiva.

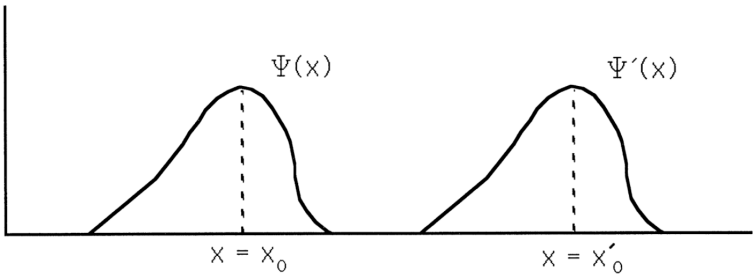

Figura 1 – A função $\Psi(x)$ é transformada na nova função $\Psi'(x) = U(\tau)\Psi(x)$, com τ sendo uma transformação qualquer no espaço-tempo, translação espacial nesse caso. A função original é localizada próxima à $x = x_0$ e a função nova próxima à $x = x'_0$, com $x'_0 = \tau x_0$. A relação precisa das duas funções fica $\Psi'(\tau x) = \Psi(x)$, ao escrever $\tau x = x'$, segue que $\Psi'(x') = \Psi(x) = \Psi'(\tau^{-1}x')$. Porém, por definição, $\Psi'(x') = U(\tau)\Psi(x')$, logo $U(\tau)\Psi(x) = \Psi(\tau^{-1}x)$.

Fonte: BALLENTINE[14]

Assim, pela figura acima, fica claro que quando o vetor abstrato ψ é representado como uma função das coordenadas do espaço-tempo, há uma relação inversa entre transformações no espaço de funções - ativa, e transformações nas coordenadas - passiva. Isso é importante para o que vem a seguir.

3.3.2 Sistemas de referência quânticos

Na discussão acima, ficou claro o papel de um sistema de referência externo (clássico) na descrição de um estado quântico. Mas, o interesse está em utilizar um sistema quântico como referência para um estado quântico, conseguindo assim fazer uma completa descrição quântica, eliminando o sistema de referência padrão p. Assim, como poderia-se utilizar de um sistema de referência interno R[xii], em analogia à partícula clássica, para codificar informações entre este e um sistema de interesse S quântico? Em mecânica quântica, a única maneira de internalizar o sistema de referência é atribuindo um espaço de Hilbert a este.[42]

Em vista desse propósito, considere um sistema quântico S com espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S$, no estado ρ_S em relação ao sistema de referência padrão p. As mudanças de orientação deste sistema em relação à p são descritas por uma representação unitária U_g^S com g sendo um elemento do grupo G que descreve todas as possíveis mudanças de orientação. Em seguida, prepare um outro estado quântico em um sistema adicional R com espaço $\mathcal{H}_R$, que também é definido em relação à p, logo transforma-se através da representação unitária U_g^R de G. Porém, o estado deste é escolhido de modo que representa bem a orientação dada por p. Por exemplo, se p representa orientação no eixo x, um bom estado para R

xii Aqui, as letras maiúsculas e minúsculas diferem sistemas de referência quânticos e clássicos, respectivamente.

seria aqueles apontando para esse direção como $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Agora, considere a utilização de R como um sistema de referência para S, isto é, uma maneira de referir-se à propriedades de S em relação as de R, internalizando o sistema de referência quântico.[43] Assim, as quantidades físicas importantes serão codificadas por correlações quânticas entre o sistema S e o sistema de referência R, sendo invariantes sob mudanças do sistema de referência padrão p. Veja figura à seguir.

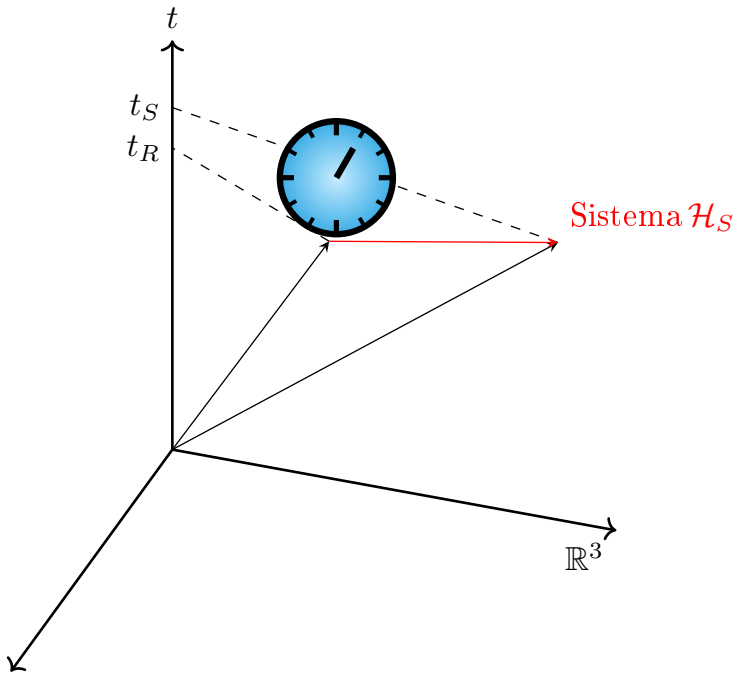

Figura 2 – Aqui o sistema de referência padrão p é o eixo temporal t (que na prática é o relógio de parede do laboratório) para os sistemas quânticos $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_R$ (relógio quântico) que exibem os valores t_S e t_R, respectivamente. Ao eliminar a dependência em relação ao tempo paramétrico t, a dependência temporal do sistema $\mathcal{H}_S$ é descrita em relação ao sistema $\mathcal{H}_R$, o que pictoricamente está exibido pela reta em vermelho. O sistema total fica, assim, invariante por translações temporais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Matematicamente, para eliminar o uso do sistema de referência padrão p, faz-se o uso da técnica de média de grupos como já vista anteriormente. Para um estado geral ρ, isto é feito pela média do estado sobre todas as a representações unitárias, U_g com $g \in G$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ associado a ρ. O mapa resultante é dado por[xiii]

$$\mathcal{G}(\rho) = \int_G dg\, \mathcal{U}_g(\rho) \tag{3.11}$$

[xiii] A medida invariante é escolhida usando o princípio da máxima entropia: o fato de não haver conhecimento prévio sobre o sistema de referência R, implica em assumir uma medida uniforme sobre todas os possibilidades.

em que $\mathcal{U}_g(\cdot) \doteq U_g(\cdot)U_g^\dagger$. Aplicando a operação acima no estado composto $\rho_S \otimes \rho_R$, notando que a representação unitária no espaço de Hilbert composto $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ é dada por $U_g^S \otimes U_g^R$, ou seja, construída a partir das representações individuais de G em S e R. Segue que

$$\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R) = \int_G dg\, \mathcal{U}_g^S(\rho_S) \otimes \mathcal{U}_g^R(\rho_R) \tag{3.12}$$

Isso permite codificar informação de um sistema quântico S utilizando um sistema de referência quântico R.

Assim, a ausência de um sistema de referência para um dado grau de liberdade implica numa teoria G-invariante que restringe os tipos de estados e operações permitidas. Porém, como será clareado por exemplos no capítulo a seguir, mesmo que o sistema composto esteja sob uma simetria G a estrutura de produto tensorial permite utilizar um subsistema, relógio quântico R no caso, para romper parcialmente a simetria no subsistema S, essa é basicamente a raiz do mecanismo Page e Wootters.

Como argumentado no capítulo anterior, o relógio quântico R pode ser um sistema bem definido como um oscilador numa certa frequência ou o sistema de spin utilizado no exemplo 2.3.1. Tome o oscilador como relógio nesse contexto para elucidar. Suponha agora que um observador, Alice, realiza experimentos num sistema S que será considerado como um laser e observa que o laser tem uma fase bem-definida - superposição coerente de níveis de energia em S. Ela pode ter feito isso executando o laser continuamente, enquanto comparando e estabilizando sua fase através do relógio quântico - oscilador local. Agora, considere um outro observador, Bob, que não possui acesso ao oscilador local de Alice, nem a um relógio externo clássico. Assim, ele descreve o estado composto como um estado correlacionado entre o relógio quântico e o laser: o relógio quântico atua como um sistema de referência.

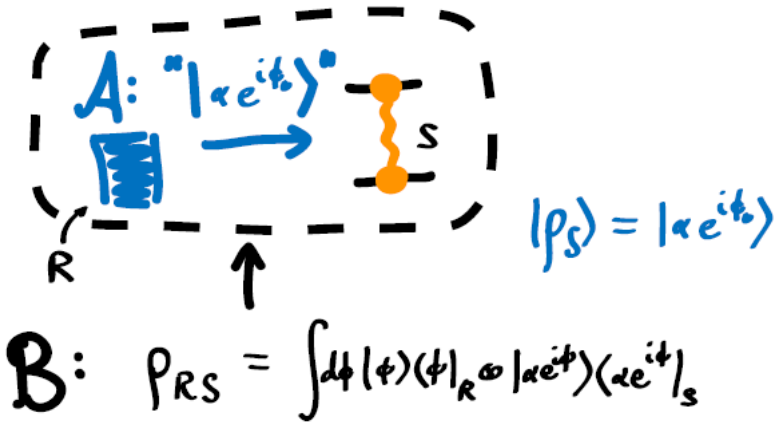

Figura 3 – Relógio quântico como oscilador local. Alice observa um sistema em uma fase bem definida ϕ_0, desta forma Alice pode observar superposições coerentes de níveis de energia em S, ρ_S, utilizando R. Devido a ausência de uma referência, que impõe uma simetria global, Bob explica a situação por um estado correlacionado entre o relógio de Alice e o sistema S, dado por ρ_{RS}.

Fonte: FAIST.[44]

A teoria por trás de sistemas de referência quânticos é nada mais do que a teoria de assimetria, na qual sistemas de referência levam apenas outro nome, estados assimétricos. No que segue, exibi-se brevemente a teoria com algumas definições para chegar no tópico final deste capítulo onde é apresentado um quantificador[xiv] possível para sistemas de referência ou estados assimétricos. A partir daqui, sistemas de referência quânticos serão chamados apenas por sistemas de referência, à menos de ambiguidades no contexto.

3.4 Teoria de Assimetria

De modo análogo ao argumentado no capítulo anterior, faz sentido listar os axiomas da mecânica quântica na notação mais utilizada em teoria da informação quântica. A justificativa é o fato de que toda a teoria de assimetria, discutida brevemente à seguir, ter sido construída utilizando desta notação.[34,35,45,46] Assim, caso o leitor almeje aprofundar, não haverá dificuldades de leitura.

Estados Um estado é um operador de densidade, um operador hermitiano não-negativo no espaço de Hilbert com traço igual a unidade.

Medidas Uma medida é uma medida positiva, POVM[xv], uma divisão da unidade por operadores não-negativos. Quando a medida $E(X)$ é realizada no estado ρ, o resultado X ocorre com probabilidade $p_\rho(X) = \mathrm{tr}[E(X)\rho]$.

[xiv] para outras escolhas, veja MASHHAD.[34]
[xv] do inglês, positive operator valued-measure.

Dinâmica A evolução de um estado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A$ para o espaço $\mathcal{H}_B$ é descrita por um mapa completamente positivo[xvi] que preserva traço, mapa CPTP[xvii].

É importante notar que os postulados enunciados acima para para sistemas abertos não possuem nenhuma diferença na formulação fundamental da teoria[xviii], ssendo realmente uma questão de gosto ou de qual representação é a mais favorável para tratar o problema em questão. Sendo esta última o propósito daqui.

3.4.1 Estados G-invariantes

Para qualquer grupo de simetria dado, existem alguns estados que são invariantes sob as transformações de simetria no grupo. Por exemplo, dada uma simetria G com representação U_g, o estado completamente misto $\rho = \frac{I}{d}$ com d sendo a dimensão do seu espaço de Hilbert, é invariante sob todas as transformações de simetria.

Definição 3.1. *O subgrupo de simetria de um estado ρ relativo ao grupo G, denotado $\mathcal{S}_G(\rho)$, é o subgrupo de G tal que ρ é invariante,*

$$\mathcal{S}_G(\rho) \coloneqq \{\mathcal{U}_g(\rho) = \rho;\, g \in G\} \tag{3.13}$$

Se o subgrupo de simetria contiver apenas o elemento de identidade, ele é dito trivial. Nesse caso, muitas vezes se diz que o estado não possui simetrias (significando simetrias não-triviais). Se o subgrupo de simetria de um estado ρ é todo o grupo G, de modo que ele é invariante por todas as transformações de simetria $g \in G$, i.e.

$$\mathcal{U}_g(\rho) = \rho;\, \forall g \in G, \tag{3.14}$$

então o estado é dit G-invariante e será denotado por ρ^{sim}.

3.4.2 Operações G-invariantes

Uma evolução temporal é dita G-invariante se ela comuta com todas as transformações de simetria do grupo G, ou seja, para qualquer estado inicial e qualquer transformação de simetria, o estado final é independente da ordem em que a transformação de simetria e a evolução temporal são aplicadas. Uma operação G-covariante também pode ser chamada de operação simétrica. É importante não confundir *transformações de simetria* que correspondem a uma ação de um dado grupo, com *transformações simêtricas*, que comutam

[xvi] Seja $\mathcal{K}$ um espaço de Hilbert arbitrário, seja $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ o espaço de operadores lineares limitados em $\mathcal{K}$ e $\mathcal{I}_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}$ o mapa identidade em $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Um mapa $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ é dito completamente positivo se para qualquer espaço de Hilbert $\mathcal{K}$, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}$ é um mapa positivo, isto é, mapeia operadores positivos de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ para operadores positivos em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_B) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

[xvii] do inglês, completely positive trace-preserving.

[xviii] Para mais detalhes, veja a discussão em PRESKILL.[47]

com todas as ações do grupo. Será exibida, primeiramente, a forma rigorosa da noção de G-covariância para evoluções de sistemas fechados e no que segue para sistemas abertos com propósitos que ficarão claros no que se segue.

A dinâmica de um sistema fechado é descrita por mapas lineares V no espaço de operadores que são da forma $\mathcal{V}[\rho] = V\rho V^\dagger$, com V sendo um operador unitário. Uma dinâmica de um sistema fechado associada à operação unitária V é G-invariante se

$$VU_g\rho U_g^\dagger V^\dagger = U_g V\rho V^\dagger U_g^\dagger, \forall g \in G \tag{3.15}$$

Isso implica que,

$$VU_g = \omega(g)U_g V, \forall g \in G \tag{3.16}$$

com $\omega(g)$ sendo um fator de fase. No caso de espaços de Hilbert finitos, $\omega(g) = 1$ se a dinâmica do sistema fechado for contínua e simétrica para todo instante de tempo.[14]

O argumento acima justifica a definição comum usada na literatura, de que se a dinâmica de um sistema fechado é simétrica, então esta pode ser representada pelo diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\rho \arrow[r, "\mathcal{U}_g"] \arrow[d, "\mathcal{V}"'] & \rho^{sim} \arrow[d, "\mathcal{V}"] \\
\rho \arrow[r, "\mathcal{U}_g"'] & \rho^{sim}
\end{tikzcd}$$

Figura 4 – Diagrama comutativo para operações G-invariantes em sistemas fechados ou reversíveis. O fato de comutar significa que a ordem das operações $\mathcal{U}_g(\cdot) \equiv U_g(\cdot)U_g^\dagger, U_g :\ g \in G$ e $\mathcal{V}(\cdot) = V(\cdot)V^\dagger$ aplicadas em $\rho^{sim} \in \mathcal{S}_G(\rho)$ é indiferente e produz o mesmo resultado final.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma operação unitária V que satisfaz a condição acima será chamada de unitária G-invariante. Mais geral, qualquer operação que comute com a representação do grupo G no espaço de Hilbert do sistema, será chamada G-invariante.

No caso de sistemas abertos[xix], segue a seguinte definição:

[xix] Aqui restringi-se a atenção para as operações G-invariantes com espaços de entrada e saída coincidindo, de modo que $\mathcal{E}$ é um automorfismo e $\mathcal{U}_{g,in}(\cdot) = \mathcal{U}_{g,out}(\cdot) \equiv \mathcal{U}_g(\cdot)$.

Definição 3.2. *A operação quântica $\mathcal{E}$ é dita ser G-invariante se o diagrama abaixo comutar*

$$\begin{tikzcd} \rho \arrow[r, "\mathcal{U}_g"] \arrow[d, "\mathcal{E}"'] & \rho^{sim} \arrow[d, "\mathcal{E}"] \\ \rho \arrow[r, "\mathcal{U}_g"'] & \rho^{sim} \end{tikzcd}$$

Figura 5 – Diagrama comutativo para operações G-invariantes em sistemas abertos. Com $\mathcal{U}_g(\cdot) \equiv U_g(\cdot)U_g^\dagger$, sendo $U_g :\ g \in G$ a representação de G nos espaços de Hilbert de entrada e saída da operação $\mathcal{E}$ e $\rho_{sym} \in \mathcal{S}_G(\rho)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como um exemplo, que está sendo o tema central da dissertação, considere o canal da seguinte forma[xx]

$$\mathcal{G}(\rho) = \int_G dg\, \mathcal{U}_g(\rho) \tag{3.17}$$

dado pela média uniforme sobre o grupo G no operador densidade ρ, sendo dg uma medida uniforme sobre G, como discutido no Apêndice B. Então, segue o seguinte:

Proposição 3.1. *A média uniforme sobre qualquer grupo G é um canal G-invariante.*

Demonstração. Em particular, qualquer grupo é o subgrupo normal dele mesmo, portanto, basta mostrar que a média uniforme sobre qualquer subgrupo normal N de G é uma operação G-covariante. Assim, seja

$$\mathcal{N} = \int_N dn\, \mathcal{U}_n \tag{3.18}$$

a média uniforme sobre qualquer subgrupo normal N. Agora, se N é um subgrupo normal de G então: $\forall g \in G \to gNg^{-1} = N$, em que $gNg^{-1} \equiv gng^{-1}$; $n \in N$. Assim, segue que

$$\mathcal{U}_g \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{U}_{g^{-1}} = \int_G dg\, \mathcal{U}_{gng^{-1}} = \mathcal{N},\ \forall g \in G \tag{3.19}$$

e, portanto, $\mathcal{N}$ é G-covariante.

□

É interessante notar que qualquer estado G-invariante pode ser expressado através da operação $\mathcal{G}(\rho)$. A prova decorre do seguinte fato, $U_g\mathcal{G}(\rho)U_g^\dagger = \int_G dg'\ U_{gg'}\rho U_{gg'}^\dagger = \mathcal{G}(\rho)$. Em que foi utilizado apenas a definição de $\mathcal{G}$. Isso permite fazer a seguinte redefinição

[xx] Observe que $\mathcal{G}$ pode ser implementada escolhendo uma unitária do conjunto U_g, $g \in G$ uniformemente ao acaso e aplicando-a ao sistema.

Definição 3.3. *O subgrupo de simetria de um estado ρ relativo ao grupo G, denotado $\mathcal{S}_G(\rho)$, é o subgrupo de G tal que ρ é invariante,*

$$\mathcal{S}_G(\rho) \coloneqq \{\mathcal{G}(\rho) = \rho;\, g \in G\} \tag{3.20}$$

Como anteriormente, se o subgrupo de simetria de um estado ρ for todo o grupo G, os estados G-invariantes serão denotados por

$$\rho^{sim} \equiv \rho = \mathcal{G}(\rho) \tag{3.21}$$

3.4.3 O ponto de vista de uma teoria dos recursos

Pode-se pensar no estudo da assimetria como uma teoria de recursos. Qualquer teoria de recursos é especificada por um conjunto convexo de estados livres e um semi-grupo de transformações livres que são restritas a mapear o conjunto de estados livres nele mesmo, qualquer estado não-livre é chamado de recurso. A teoria de recursos é o estudo de manipulações de recursos sob as transformações livres.

Um exemplo bem conhecido de uma teoria de recursos é a teoria do emaranhamento. O termo livre neste caso, se refere às transformações que podem ser implementadas pelas operações locais e comunicações clássica, LOCC[xxi](veja HORODECKI et al.[48] para uma revisão da teoria de emaranhamento). O conjunto de estados livres é o conjunto de estados separáveis, sendo este conjunto fechado sob LOCC, ou seja, um estado separável não pode ser transformado em um emaranhado através de LOCC.[49] Aqui as propriedades relevantes dos estados que determinam se tal transformação é possível são suas propriedades de emaranhamento. No caso de estados bipartidos puros é um fato bem conhecido que as propriedades de emaranhamento de um estado são especificadas por seus coeficientes de Schmidt.[49]

Da mesma forma, o estudo da assimetria em relação a uma dada representação de um grupo G pode ser visto como uma teoria de recursos. Nesta teoria dos recursos, as evoluções temporais que respeitam a simetria dada, evoluções G-invariantes, são transformações livres e os estados que não quebram a simetria, estados G-invariantes, são os estados livres. Esta é uma escolha consistente pois as evoluções temporais G-invariantes formam um semi-grupo sob o qual o conjunto de estados G-invariantes é mapeado em si mesmo. Da mesma forma que a teoria do emaranhamento, um recurso, estado assimétrico, pode ser utilizado para simular uma transformação não-livre, evolução temporal G-invariante, através de uma transformação livre, evolução do tempo G-covariante.

[xxi] do inglês, local operations and classical communications.

A teoria de assimetria então, pode ser vista, a priori, como uma teoria G-invariante (ausência de sistema de referência para um dado grau de liberdade) que utiliza de recursos, como estados assimétricos ou sistemas de referência, para implementar tarefas que são impossíveis utilizando canais G-invariantes e estados simétricos.

3.4.4 A assimetria monótona de Holevo

Em qualquer teoria de recursos uma medida do recurso é uma função do espaço de estados para números reais que define uma ordem parcial no conjunto de estados. A propriedade essencial que qualquer função deve ter é ser um monótono - não aumentar monotonicamente sob uma operação livre. Portanto, é natural utilizar da seguinte definição para uma medida de assimetria, aonde a proposta é escolhida como G-invariância:

Definição 3.4. *Uma função $f : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ é dita ser uma medida de informação de acordo com uma determinada proposta se,*

- $f(\cdot) \geq 0$;
- *Para qualquer operação quântica $\mathcal{E}$ que preserva traço, sendo livre de acordo com a proposta, tem-se que $f(\mathcal{E}(\cdot)) \leq f(\cdot)$;*
- *Para qualquer estado livre ρ, tem-se que $f(\rho) = 0$.*

Definindo uma função f_I tal que seu valor em um estado ρ é uma medida de informação I sobre o conjunto de estados obtidos quando se atua sobre o estado todos elementos do grupo de translação, ou seja, se

$$f_I(\rho) \coloneqq I\left(\left\{U_g \rho U_g^\dagger\right\}_{g\in G}\right) \tag{3.22}$$

então, esta define uma medida de assimetria para estados com a proposta de simetria por translação de um dado grupo. Utilizando a quantidade $\chi_{\mathcal{E}}(\rho) \equiv S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i)$, $\rho_i = \frac{\mathcal{E}_i[\rho]}{p_i}$, do teorema de Holevo[xxii], como medida de informação,[46] consegue-se provar que a função

$$\Gamma_G(\rho) \coloneqq S(\mathcal{G}(\rho)) - S(\rho) \tag{3.23}$$

[xxii] Seja Q um sistema quântico preparado no estado misto ρ_K com probabilidade p_k a priori. O ensemble total de estados é dado por, $\rho = \sum_k p_k \rho_k$. A informação adquirida numa medição M é representada pela informação mútua $I(M : K)$ entre o resultado da medição M e a preparação K. O teorema de Holevo estabelece que

$$I(M : K) \leq \chi,$$

em que a quantidades de Holevo, $\chi(\rho) \coloneqq S(\rho) - \sum_k p_k S(\rho_k)$, limita a informação acessível no ensemble quântico.

é uma medida de assimetria. De fato, seja $\mathcal{G}$ a media uniforme sobre o grupo G unimodular[xxiii]. A medida dada pela equação (3.23) satisfaz as condições de ser um monótono de assimetria:

(i) $\Gamma_G(\rho) \geq 0$;

(ii) $\Gamma_G(\rho) = 0 \leftrightarrow \rho$ é simétrico;

(iii) $\Gamma_G(\rho)$ não aumenta, em média, sob operações G-invariantes.

Demonstração. (i) e (ii) Serão provadas utilizando a proposição 3.2 e a desigualdade de Klein.

(iii) Aqui será exibida a prova dada em VACCARO et al.[50]. A operação G-invariante mais geral[xxiv] que pode-se ter é uma medida que transforma um estado inicial ρ em um dos N estados abaixo

$$\rho_i = \frac{\mathcal{E}_i\left[\rho\right]}{p_i},\ i = 1, \ldots, N \tag{3.24}$$

com a condição $U_g \mathcal{E}_i\left[\rho\right] U_g^\dagger = \mathcal{E}_i\left[U_g \rho U_g^\dagger\right]$ $\forall g \in G$ e probabilidade $p_i = \mathrm{tr}(\mathcal{E}_i\left[\rho\right])$. O objetivo é mostrar que

$$\Gamma_G(\rho) \geq \sum_i p_i \Gamma_G(\rho_i) \tag{3.25}$$

ou seja,

$$S(\mathcal{G}_G(\rho)) - S(\rho) \geq \sum_i p_i \left[S(\mathcal{G}_G(\rho_i)) - S(\rho_i)\right] \tag{3.26}$$

podendo rearranjar como

$$S(\mathcal{G}_G(\rho)) - \sum_i p_i S(\mathcal{G}_G(\rho_i)) \geq S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) \tag{3.27}$$

Observe que como os $\mathcal{E}_i$ são G-invariantes, pode-se permutá-los com a operação $\mathcal{G}(\cdot)$. Denotando a variação média na entropia sob a operação $\mathcal{E}(\cdot)$ pela quantidade de Holevo:

$$\chi_{\mathcal{E}}(\rho) \equiv S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) \tag{3.28}$$

tem-se a seguinte forma compacta da relação a ser demonstrada,

$$\chi_{\mathcal{E}}(\mathcal{G}_G(\rho)) \geq \chi_{\mathcal{E}}(\rho) \tag{3.29}$$

[xxiii] Um grupo é dito unimodular se possui uma única medida de Haar invariante pela esquerda e direita. Lembre-se de que todos os grupos finitos e de Lie compactos são unimodulares (veja apêndice B), assim G pode ser escolhido como qualquer um desses.

[xxiv] Esta operação inclui a possibilidade de adicionar subsistemas em estados, realizar operações unitárias e medições no sistema composto com tais subsistemas.

Agora, é importante salientar as seguintes propriedades:

(i) para qualquer operação $\mathcal{E}$, a quantidade $\chi_{\mathcal{E}}(\cdot)$ é côncava,[51] ou seja, $\chi_{\mathcal{E}}(\sum_i p_i\rho_i) \geq \sum_i p_i\chi_{\mathcal{E}}(\rho_i)$;

(ii) a definição da operação de media uniforme, dada pela mistura convexa $\mathcal{G}_G(\rho) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} U_g\rho U_g^\dagger$;

(iii) $\chi_{\mathcal{E}}(U_g\rho U_g^\dagger) = \chi_{\mathcal{E}}(\rho)$, devido $\mathcal{E}$ ser G-invariante e a unitariedade de U_g.

Colocando os três fatos juntamente,

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{E}}(\mathcal{G}_G(\rho)) &= \chi_{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(U_g\rho U_g^\dagger\right)\right) \\
&\geq \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathcal{E}}(U_g\rho U_g^\dagger) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathcal{E}}(\rho) \\
&= \chi_{\mathcal{E}}(\rho) \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

□

Acontece que a função acima possui uma interpretação muito simples:

Proposição 3.2. *Seja* $\Gamma_G(\rho) := S(\rho||\mathcal{G}(\rho))$, *então*

$$\Gamma_G(\rho) = S(\mathcal{G}(\rho)) - S(\rho) = \inf_{\sigma\in\mathcal{S}} S(\rho||\sigma) \qquad (3.31)$$

com $\mathcal{S}$ *sendo um conjunto de estados G-invariantes, ou seja,* $\sigma = \mathcal{G}(\sigma)$.

Demonstração. Para provar a primeira igualdade, perceba que

$$\begin{aligned}
\Gamma_G(\rho) &= S(\rho||\mathcal{G}(\rho)) \\
&= \mathrm{tr}(\rho\log\rho) - \mathrm{tr}(\rho\log\mathcal{G}(\rho)) \\
&= \mathrm{tr}(\rho\log\rho) - \mathrm{tr}(\mathcal{G}(\rho)\log\mathcal{G}(\rho)) \\
&= S(\mathcal{G}(\rho)) - S(\rho) \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

em que na terceira igualdade utilizou o fato de que $\mathcal{G}(\rho)$ é G-invariante ($\mathcal{G}\circ\mathcal{U} = \mathcal{U}\circ\mathcal{G}$) $\rightarrow$ $\mathrm{tr}(\rho\log\mathcal{G}(\rho)) = \mathrm{tr}(\mathcal{U}(\rho)\log\mathcal{G}(\rho))$, $\forall g \in G$ e $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}((\rho)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(\mathcal{U}(\rho)) = \mathrm{tr}(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathcal{U}(\rho))$.

Para provar a segunda igualdade, utiliza-se primeiramente a desigualdade de Klein: $S(\rho||\sigma) \geq 0$ e $S(\rho||\sigma) = 0 \leftrightarrow \rho = \sigma$. Isto implica que para qualquer par de estados ρ e σ,

$$\mathrm{tr}(\rho \log \sigma) \leq \mathrm{tr}(\rho \log \rho) \tag{3.33}$$

com igualdade se, e somente se, $\rho = \sigma$. Assim, para $\forall \rho$ fixo

$$\max_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathrm{tr}(\rho \log \sigma) = \mathrm{tr}(\rho \log \rho) \tag{3.34}$$

Agora para encontrar

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho||\sigma) = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} [\mathrm{tr}(\rho \log \rho) - (\rho \log \sigma)] \tag{3.35}$$

Observe primeiro que o mínimo ocorre para o mesmo ρ G-invariante que maximiza $\mathrm{tr}(\rho \log \sigma)$. Então, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \max_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathrm{tr}(\rho \log \sigma) &= \max_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathrm{tr}(\rho \log \mathcal{G}(\sigma)) \\ &= \max_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathrm{tr}(\mathcal{G}(\rho) \log \sigma) \\ &= \mathrm{tr}(\mathcal{G}(\rho) \log \mathcal{G}(\rho)) \\ &= \mathrm{tr}(\rho \log \mathcal{G}(\rho)) \end{aligned} \tag{3.36}$$

em que a terceira igualdade é obtida usando a equação (3.34). Note que este argumento também implica que o estado σ G-invariante que minimiza $S(\rho||\sigma)$ é $\mathcal{G}(\rho)$.

□

O segundo item da proposição acima sugere que $\Gamma_G(\rho)$ pode ser interpretada como a distância mínima de entropia relativa entre o estado ρ e o conjunto de estados G-invariantes $\mathcal{S}$(note que estritamente falando a entropia relativa não define uma métrica pois em geral $S(\rho||\sigma) \neq S(\sigma||\rho)$. Além disso, implica que dado ρ, o estado mais próximo no conjunto $\mathcal{S}$ é $\mathcal{G}(\rho)$. Assim, $\Gamma_G(\rho)$ como medida de assimetria quantifica a distância mínima do estado ρ ao conjunto de estados simétricos.

4 REVISITANDO PAGE E WOOTTERS: UM CARÁTER TEÓRICO-INFORMACIONAL

Como discutido no capítulo 2, o mecanismo de Page e Wootters busca explicar tempo e dinâmica em termos de emaranhamento. Essa abordagem atemporal para a natureza do tempo pressupõe um sistema composto num estado estacionário com dois subsistemas não-interagentes, assimétricos e emaranhados. Como consequência, ao escolher um observável apropriado para o relógio R, o estado relativo do sistema S evolui unitariamente em relação a variável associada aos autoestados do observável do relógio, que é então interpretado como tempo. Esse modelo de "evolução sem evolução"[2] embora elegante, não foi levado adiante até recentemente.[23,28]

Aqui, lista-se sucintamente as condições da abordagem Page e Wootters discutidas anteriormente que esse modelo deve possuir para que seja aplicável.

- *Atemporalidade.* A primeira condição é que o sistema total (composto) seja"atemporal", existe um autoestado $|\psi\rangle\rangle \in \mathcal{H}$ do seu hamiltoniano H, que pode ser sempre escolhido de modo que

$$H\ |\psi\rangle\rangle = 0 \tag{4.1}$$

- *Bons relógios são possíveis.* A segunda condição suficiente é que o hamiltoniano inclui pelo menos um bom relógio R - um sistema com um grande conjunto de estados distinguíveis, que interagem fracamente com o resto do subsistema (sistema S). Sendo que no caso ideal, não há nenhuma interação. Assim, o hamiltoniano deve ser tal que permita a existência de uma estrutura de produto tensorial (EPT) $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_S$, em que o primeiro subsistema representa o relógio R e o segundo, o sistema S, de tal forma que a propriedade fundamental de não-interação seja satisfeita,

$$H = H_R \otimes I_S + I_R \otimes H_S, \tag{4.2}$$

  com I_α denotando o operador identidade em cada subsistema $\alpha = R, S$. O fato de os relógios serem possíveis, na realidade, significa que o comportamento de um relógio ideal pode ser aproximado a uma precisão arbitrariamente elevada,[27] ou seja, o relógio ideal pode ser aproximado por sistemas com um observável T que tenha um espectro discreto de n valores t_n, onde não há limite para quão bem a sequência de t_n pode aproximar-se para a reta real $\mathbb{R}$.

- *Emaranhamento.* A terceira condição suficiente para garantir a construção Page e Wootters é que o relógio e o sistema estão emaranhados: este é o recurso que permite emergir uma dinâmica do sistema S a ser recuperada a partir de correlações existentes no sistema composto estacionário. Formalmente, isso significa que o estado total $|\psi\rangle$ deve ter a seguinte forma,

$$|\psi\rangle\rangle = \sum_t c_t \, |\phi_R(t)\rangle \, |\psi_S(t)\rangle \, , \tag{4.3}$$

  para apropriados $|\psi_S(t)\rangle \in \mathcal{H}_S$, com pelo menos dois ou mais dos coeficientes c_t sendo diferentes de zero. Para isso produzir uma dinâmica realista, tem-se que $c_t \neq 0$ para um número suficientemente grande de $t's$. Isto porque tudo o que acontece no sistema S pode ser visto inteiramente no estado composto $|\psi\rangle\rangle$. Ao tomar um dos autoestados do relógio $|\phi_R(0)\rangle$ como tempo inicial, com $|\phi_R(t)\rangle = e^{-iH_R t} \, |\phi_R(0)\rangle$, a história do sistema S fica dada por uma sequência de eventos codificados nos vários $|\psi_S(1)\rangle \, , |\psi_S(2)\rangle \, , \ldots , |\psi_S(t)\rangle$. Note ainda que o sistema e o relógio não devem estar num auto-estado de seus hamiltonians locais, caso contrário, a dinâmica seria trivial. Nessa base $|E_m^R\rangle \, |E_n^S\rangle$ definida pelos hamiltonianos locais H_R e H_S, o estado do sistema composto é, portanto, $|\psi\rangle\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} \, |E_m^R\rangle \, |E_n^S\rangle$, com $H \, |E_m^R\rangle \, |E_n^S\rangle = 0$, $\forall m$, n. Portanto, para esta construção ser compatível com uma dinâmica realista deve-se ter um alto grau de degenerescência no autoespaço do hamiltoniano associado ao autovalor nulo.

O propósito desse capítulo final será discutir tal modelo utilizando de recursos da teoria da informação quântica, a teoria de assimetria abordada no capítulo anterior, procurando definir melhor o relógio R, propor um quantificador para este e analisar modelos ótimos. Posteriormente, seguindo alguns resultados interessantes,[52] aonde foi levantada uma relação mais próxima entre as teoria de recursos de assimetria e emaranhamento, será discutido como a proposta de o relógio R funcionar como um sistema de referência quântico interno está relacionado com a exigência de emaranhamento no sistema composto $S + R$, supondo estes descorrelacionados inicialmente, ou seja, a capacidade de analisar superposições de auto-estados de energia ou coerência no sistema S através de emaranhamento no sistema composto, buscando assim dar um caráter teórico-informacional para o termo *tempo através de correlações* no mecanismo de Page e Wootters.

Abaixo, segue uma tabela de teorias de recursos atualmente utilizadas na área da teoria da informação quântica. Deixa-se claro os tipos de estados, operações permitidos e exibindo quantificadores para tais,

Teoria	*Operações Livres*	*Estados Livres*	*Monótonos*
Assimetria	$\mathcal{E}_{inv} = U_g \circ \mathcal{E}_{inv} \circ U_g^\dagger$	$\rho_{sim} = U_g \rho U_g^\dagger$	$\Gamma(\rho) := \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho \| \sigma) = S(\mathcal{G}(\rho)) - S(\rho)$
Emaranhamento	*LOCC*	*Estados separáveis*, ρ	$S(\rho \| \mathbb{1}/d) = \log d - S(\rho)$

Figura 6 – Tabela de teorias de recursos de assimetria e emaranhamento. A palavra livres, pode ser vista aqui como um sinônimo de permitidas (os).

Fonte: adaptado de HORODECKI; OPPENHEIM.[53]

No final desse capítulo as três condições listadas acima, serão revistas utlizando desse formalismo que virá a seguir, deixando assim bem explícita o objetivo deste.

4.1 Quantificando um sistema de referência

Pelo capítulo anterior, se G representa o grupo correspondente a uma dada simetria imposta num sistema S e U_g^S denota a representação unitária de um elemento do grupo $g \in G$ no sistema S, tem-se que os estados e operações permitidos seguem as seguintes regras, dadas pelo diagrama comutativo a seguir.

$$\begin{tikzcd} \rho \arrow[d, "\mathcal{G}(\cdot)"'] \\ \rho^{sim} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \rho_S \arrow[r, "\mathcal{U}_g^S"] \arrow[d, "\mathcal{E}^{S\to S}"'] & \rho_S^{sim} \arrow[d, "\mathcal{E}^{S\to S}"] \\ \rho_S \arrow[r, "\mathcal{U}_g^S"'] & \rho_S^{sim} \end{tikzcd}$$

Figura 7 – Estados e operações permitidas, com $\mathcal{G}(\cdot) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathcal{U}_g^S(\cdot)$ e $\mathcal{U}_g^S(\cdot) = U_g^S(\cdot)U_g^{S\dagger}$ sendo a média uniforme para grupos finitos e $|G|$ a ordem do grupo. Note que o canal aqui é um automorfismo, $S \to S$. Caso contrário, seria preciso saber a representação da simetria nos espaços de saída e chegada para especificar todos conjunto de canais G-invariantes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Acima, a média uniforme foi definida para grupos finitos. Para grupos contínuos como o $U(1)$ ou $SU(2)$ basta trocar a soma por uma integral sobre o grupo com uma medida uniforme de Haar dg, como no capítulo anterior,

$$\mathcal{G}(\cdot) = \int dg\, \mathcal{U}_g^S(\cdot) \tag{4.4}$$

Para o grupo de translações temporais, com gerador dado pelo hamiltoniano H_S, $U_t^S = e^{-iH_S t}$ ou mais geral, qualquer outro observável, a operação pode ser definida por

$$\mathcal{G}(\cdot) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt\, \mathcal{U}_t^S(\cdot) \tag{4.5}$$

O propósito de um sistema de referência é quebrar os efeitos de uma simetria imposta num dado sistema. Para isso, um sistema de referência deve produzir menos mistura do que a imposta pela simetria num estado qualquer ρ, isso porque a média uniforme produz um estado maximamente misto na presença de uma simetria, assim qualquer estado menos misto que este pode ser utilizado como recurso.

Portanto, uma definição com um significado físico para a abilidade de um sistema atuar como sistema de referência deveria involver uma quantidade física que mede o grau de mistura de um dado estado. Tal medida é convenientemente dada pela quantidade de trabalho extraído de um estado quântico[54] ρ,

$$W(\rho) = [\log D - S(\rho)]\,, \tag{4.6}$$

com D sendo a dimensão do espaço de Hilbert e $S(\rho) \equiv -\mathrm{tr}(\rho \log \rho)$ a entropia de von Neumann de ρ. Analisando a expressão acima, nota-se que quanto maior a pureza de ρ[i], mais trabalho pode ser extraído usando tal estado, já que no processo de tornar o estado maximamente misto o estado final perde a sua coerência ou assimetria, ou seja, a coerência é utilizada para extrair trabalho. Na presença de uma dada simetria G, esse recurso se reduz ao *trabalho extraível sob a simetria* G[ii], que será denotado por

$$W_G(\rho) \coloneqq W(\mathcal{G}\,[\rho]), \tag{4.7}$$

Perceba que, uma vez que foi extraído trabalho por uma operação G-invariante, aplicando $\mathcal{G}(\cdot)$ no sistema não terá mudança na quantidade de trabalho que foi extraída, assim estados simétricos não sofrem diminuição na extração de trabalho, ao contrário de estados assimétricos, os quais sofrem uma redução na quantidade extraída.

Para clarear essa última afirmação, considere o exemplo simples de um sistema de spin-$\frac{1}{2}$ ou um qubit sob uma simetria imposta pelo grupo de fases $U(1)$. Seja ρ o estado

i Aqui utiliza-se a seguinte relação entre pureza e entropia

$$\frac{1}{D} \leq \mathrm{tr}(\rho^2) \leq 1 \to \log D \geq S(\rho) \geq 0$$

sendo D a dimensão do espaço do operador ρ. Assim, estados puros possuem entropia nula, enquanto que estados maximamentes mistos possuem entropia igual ao logaritmo da dimensão do espaço associado.

ii em outras áreas, à saber, na termodinâmica quântica tal grandeza já vem sendo discutida.[55]

preparado por Alice que, posteriormente, envia para Bob. Devido a simetria imposta pelo grupo $U(1)$ associado a seguinte representação unitária,

$$U_\theta = \{e^{i\theta J_z};\ \theta \in (0,\, 2\pi]\}, \tag{4.8}$$

com $J_z = \frac{1}{2}\sigma_z$, sendo σ_z uma matriz de Pauli, Bob não está apto a distinguir os deslocamentos provocados por Alice em torno do eixo $\hat{z}$. Assim, ele descreve o estado aplicando a média uniforme:

$$\mathcal{G}_{U(1)}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, U_\theta \rho U_\theta^\dagger \tag{4.9}$$

i) Caso ρ simétrico.

Considerando $\rho = |1\,\rangle\langle\, 1|$, ou seja, um autoestado do hamiltoniano e portanto, simétrico em relação a U_θ, segue que,

$$W(\rho) = W_{U(1)}(\rho) = 1 \tag{4.10}$$

ii) Caso ρ assimétrico.

Agora, se $\rho = |+\rangle\langle+|$, com $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$, exibindo coerência na base do hamiltoniano e portanto assimétrico,

$$W(\rho) = 1,\ W_{U(1)}(\rho) = 0 \tag{4.11}$$

Assim, sob a $U(1)$-simetria, Bob não é capaz de extrair trabalho. Portanto, a grandeza $W_G(\rho)$ codifica a informação de assimetria de um dado estado. Uma coisa interessante de calcular é a entropia de assimetria de ambos casos, note que

$$\Gamma_{U(1)}(\rho) = 0,\ \Gamma_{U(1)}(\rho) = 1 \tag{4.12}$$

nos casos i) e ii), respectivamente. Isso sugere a seguinte expressão,

$$W(\rho) = W_G(\rho) + \Gamma_G(\rho) \tag{4.13}$$

que pode ser facilmente obtida usando apenas as definições dos termos da direita. De fato,

$$\begin{aligned} W_G(\rho) + \Gamma_G(\rho) &= [\log D - S(\mathcal{G}(\rho))] + [S(\mathcal{G}(\rho)) - S(\rho)] \\ &= [\log D - S(\rho)] \\ &= W(\rho) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Tem-se então a seguinte interpretação: sob uma dada simetria G, o trabalho possível de extrair de um dado sistema é quebrado em duas grandezas, Γ_G que quantifica abilidadade de atuar como sistema de referência e W_G que fornece o quanto de trabalho pode ser

extraído sob a simetria.

No que segue, será desenvolvido novos recursos para trabalhar com simetrias impostas em sistemas compostos.

4.2 Simetrias em sistemas compostos

Considerando um sistema composto de dois subsistemas S e R, há duas possibilidades para uma simetria atuar: *globalmente* e *localmente*. Elas podem ser ilustradas avaliando seus efeitos no estado global $\rho \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. A simetria global atua da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_G(\rho) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g^{SR} \rho U_g^{SR\dagger} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(U_g^S \otimes U_g^R \right) \rho \left(U_g^{S\dagger} \otimes U_g^{R\dagger} \right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Em contraste, simetrias locais atuam como,

$$\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G} \left(U_g^S \otimes U_{g'}^R \right) \rho \left(U_g^{S\dagger} \otimes U_{g'}^{R\dagger} \right) \tag{4.16}$$

O símbolo $\mathcal{G}_{G \otimes G}$ será utilizado para indicar que a média uniforme atua localmente nos subsistemas S e R. Assim, um estado pode ser simétrico globalmente, $\mathcal{G}_G(\rho) = \rho$, ou localmente, $\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho) = \rho$. Caso os estados não satisfaçam essas condições, eles serão ditos assimétricos globalmente e localmente, respectivamente.

No capítulo anterior, demonstrou-se que a entropia de assimetrica $\Gamma_G(\rho)$ quantifica a abilidade de ρ atuar como sistema de referência (ser assimétrico). Mas agora, com motivação dada pelo mecanismo de Page e Wootters, será de interesse um novo recurso: um subsistema atuando como referência para o outro em questão, sendo que o sistema composto está sob uma simetria global G. Em outras palavras, é de interesse um sistema de referência quântico interno, devido a simetria global imposta pela incapacidade de observar-se a passagem do tempo.

Abaixo, demonstra-se que a função $\Gamma_G(\rho)$ também quantifica a abilidade de um subsistema ρ atuar como um sistema de referência,[50] quando o sistema composto está sob simetria global. Quando isso ocorrer, será dito que o sistema composto possui um sistema de referência interno.

Proposição 4.1. *$\Gamma_G(\rho)$ quantifica a abilidade de ρ atuar como um subsistema de referência.*

Para mostrá-la, defini-se as seguintes grandezas

$$W_G(S:R) \coloneqq W_G(\rho_S \otimes \rho_R) - [W_G(\rho_S) + W_G(\rho_R)] \tag{4.17}$$

$$\Gamma_G(S:R) \coloneqq \Gamma_G(\rho_S) + \Gamma_G(\rho_R) - \Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) \tag{4.18}$$

que serão chamadas de trabalho mútuo e informação mútua de assimetria, respectivamente. O primeiro compara o trabalho extraível do conjunto com a soma do trabalho extraível das partes. E o segundo quantifica quanto o sistema R atua como um sistema de referência para o sistema S[iii]. Acontece que nesse contexto, as duas grandezas são iguais, como será visto pelo teorema a seguir.

Teorema 4.1. *A informação mútua de assimetria é limitada pela entropia de assimetria:*

$$\Gamma_G(S:R) \leq \min\{\Gamma_G(\rho_S),\, \Gamma_G(\rho_R)\} \tag{4.19}$$

com ρ_S e ρ_R sendo estados arbitrários de dois sistemas compartilhando a mesma simetria imposta pelo grupo G. Além disso, a igualdade é satisfeita, no sentido que, $\forall\, \rho_S$, $\exists\, \rho_R$; $\Gamma_G(S:R) = \Gamma_G(\rho_R)$

Demonstração. Utilizando a equação

$$W_G(\rho) = W(\rho) - \Gamma_G(\rho) \tag{4.20}$$

e devido ao fato de satisfazer a mesma propriedade da entropia, a saber, a aditividade: $W(\rho_S \otimes \rho_R) = W(\rho_S) + W(\rho_R)$, tem-se que

$$\begin{aligned} W_G(S:R) &= W_G(\rho_S \otimes \rho_R) - [W_G(\rho_S) + W_G(\rho_R)] \\ &= W(\rho_S \otimes \rho_R) - \Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) - [W(\rho_S) - \Gamma_G(\rho_S) + W(\rho_R) - \Gamma_G(\rho_R)] \\ &= \Gamma_G(\rho_S) + \Gamma_G(\rho_R) - \Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) \\ &= \Gamma_G(S:R) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ou seja, o trabalho mútuo é igual a assimetria mútua. Agora, note que

$$\begin{aligned} \Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) &= S(\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R)) - S(\rho_S \otimes \rho_R) \\ &= -S(\rho_S \otimes \rho_R) + \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} \left(U_g \rho_S U_g^\dagger\right) \otimes \left(U_g \rho_R U_g^\dagger\right) \end{aligned} \tag{4.22}$$

que é nada mais do que a quantidade de Holevo χ já discutida no capítulo anterior. Assim, se χ_S e χ_R são as quantidades de Holevo para o ensemble dos subsistemas R e S, respectivamente, e usando que χ é não-crescente sobre traços parciais,[51]

$$\Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) \geq \Gamma_G(\rho_\alpha),\ \alpha = S,\, R \tag{4.23}$$

[iii] Observe que a grandeza é simétrica para $\Gamma_G(S:R) = \Gamma_G(R:S)$, porém, devido ao significado físico de R ser o relógio no problema tratado aqui, sempre será referido a R como o sistema de referência.

aplicando isso na equação 4.21, verifica-se a desigualdade de 4.19. Para mostrar a igualdade, considere $\rho_R = |\psi\rangle\langle\psi|$; $\langle\psi_{g'}|\psi_g\rangle = \delta_{g,g'}$ e $|\psi_g\rangle = U_g^R\,|\psi\rangle$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}[\rho_S \otimes \rho_R] &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} U_g^S \otimes U_g^R(\rho_S \otimes \rho_R)U_g^{S\dagger} \otimes U_g^{R\dagger} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} U_g^S \rho_S U_g^{S\dagger} \otimes |\psi_g\rangle\langle\psi_g|; \end{aligned} \tag{4.24}$$

A ortonormalidade do conjunto $\{|\psi_g\rangle\,;\, g \in G\}$ garante que,

$$\begin{aligned}S(\mathcal{G}_G(\rho)) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(U_g^S \rho_S U_g^{S\dagger} - \log\frac{1}{|G|}\right) \\ &= S(\rho_S) - S(\mathcal{G}(\rho_R)) \end{aligned} \tag{4.25}$$

utilizando a condição $S(\mathcal{G}_G(\rho_R)) = \log|G|$.

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathcal{G}_G(\rho)) &= [S(\mathcal{G}_G(\rho_S)) - S(\rho_S)] + [S(\mathcal{G}_G(\rho_R)) - S(\rho_R)] - [S(\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R)) - S(\rho_S \otimes \rho_R)] \\ &= S(\mathcal{G}_G(\rho_S)) + S(\mathcal{G}_G(\rho_R)) - S(\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R)) \\ &= S(\mathcal{G}_G(\rho_S)) - S(\rho_S) \\ &= \Gamma(\rho_S) \end{aligned} \tag{4.26}$$

□

Pelo resultado do teorema, segue o seguinte: se os subsistemas S e R não forem assimétricos locamente em relação a G, ou seja, se $\Gamma_G(\rho_S) = 0$ ou $\Gamma_G(\rho_R) = 0$, então $\Gamma_G(S : R) = 0$. Isso deixa claro o fato de que a entropia de assimetria quantifica a abilidade de ρ_α $\alpha = S, R$ atuar como sistema de referência interno. Então,

Proposição 4.2. *Uma condição necessária para haver sistemas de referência internos é assimetria local entre ambos subsistemas do sistema composto em questão.*

Essa discussão, motiva a seguinte definição

Definição 4.1. *Dado um sistema composto $S+R$ sob a simetria global imposta por G, será dito que R atua ou funciona como sistema de referência interno para S se $\Gamma_G(S : R) \neq 0$.*

4.3 Relógios como sistemas de referências

Suponha que seja de interesse analisar um sistema S com Hamiltoniano H_S no estado σ que possui coerência na autobase de energia. Tal estado é dependente do tempo e, portanto, a questão anterior é ambígua, a menos que se diga que σ é o estado do sistema S num certo tempo t em relação a um relógio R. Tal relógio pode ser, por exemplo, um oscilador harmônico oscilando numa certa frequência, uma partícula movendo

na reta real ou um sistema de d-níveis. Este último será considerado no restante do capítulo.

Porém, como já clareado, existe uma restrição no conjunto de operações que podem ser implementadas no sistema S e no relógio R: Se o sistema de referência de tempo é definido *apenas* pelo relógio R e o sistema S não possui qualquer tipo de informação sobre como referência de tempo é definida, então as únicas operações permitidas no sistema $S + R$ são aquelas que não dependem implicitamente ou explicitamente de uma referência de tempo.[56] Mais precisamente, são operações que são invariantes em relação ao grupo de translações temporais, isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
\rho \arrow[r, "\mathcal{U}_t^{RS}"] \arrow[d, "\mathcal{E}^{RS\to RS}"'] & \rho^{sim} \arrow[d, "\mathcal{E}^{RS\to RS}"] \\
\rho \arrow[r, "\mathcal{U}_t^{RS}"'] & \rho^{sim}
\end{tikzcd}$$

Figura 8 – Operações permitidas em relação ao grupo de translações temporais, com $\mathcal{U}_t^{SR}(\cdot) = U_t^S \otimes U_t^R(\cdot) U_t^{S\dagger} \otimes U_t^{R\dagger}$ atuando no sistema $S+R$ e $U_t^\alpha = \{e^{-iHt}; t \in \mathbb{R}\}$ sendo a representação do grupo de translações temporais para cada sistema $\alpha = S,\, R$. O canal $\mathcal{E}^{SR}$ G-invariante atuando no sistema $S + R$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na prática, dada a interpretação de certos tipos de sistemas de referência de fase como relógios, pode-se falar de invariância por translação temporal utilizando propriedades de grupos como $U(1)$ e $SU(2)$. De fato, se o hamiltoniano é dado pelo operador número ou operador momento angular, o tempo paramétrico covaria com os autovalores destes, dados por fases, basta fazer uma reparametrização pela frequência associada. O uso de tais grupos será bastante conveniente, já que estes além de possuírem muitas propriedades interessantes, são compactos.[33]

Agora, será revisto o exemplo de Wootters,[29] trabalhado na subseção 2.3.1, mostrando que esse formalismo desenvolvido até agora possibilita quantificar a abilidade do subsistema R atuar como relógio. Para isso, considere novamente o sistema composto de dois qubits no estado inicial $\rho_\alpha = |+\rangle\langle+|$, em que $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$, $\alpha = S,\, R$. Perceba que pela discussão anterior o estado exibe coerência na base do hamiltoniano e portanto é assimétrico em relação ao grupo $U(1)$.

Suponha que Alice envia para Bob o sistema composto $\rho_S \otimes \rho_R$. Como Bob está

sob uma simetria - invariância por translação temporal, ele atribui o seguinte estado

$$\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, U_\theta \left(\rho_S \otimes \rho_R\right) U_\theta^\dagger \tag{4.27}$$

com $U_\theta = e^{i\theta J_z}$ e $J_z = J_z^S \oplus J_z^R$, a soma de Kronecker[iv] do hamiltoniano associado a cada sistema $\alpha = S$, R. O estado $\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R)$ terá o seguinte formato

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

Utilizando as definições, nota-se facilmente que $\Gamma_G(\rho_\alpha) = 1$, $\alpha = S$, R e $\Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) = \frac{3}{2}$. Portanto, a informação mútua de assimetria do sistema composto é,

$$\Gamma_G(S : R) = \frac{1}{2} > 0 \tag{4.29}$$

Ou seja, um qubit atua como relógio para o outro, quebrando parcialmente a simetria global imposta pelo grupo de fases. Assim, mesmo sob simetria global, é possível utilizar estados assimétricos em relação ao grupo local para um sistema atuar como referência para outro. O interessante da discussão é a existência de uma grandeza para quantificar se o sistema composto possui um sistema de referência interno, sendo esta dada por $\Gamma_G(S : R)$.

4.4 Quantificando um bom relógio

Lembre que pela discussão final do capítulo 2, o sistema de dois qubits não fornecia um relógio tão promissor. Foi argumentado que isso era devido ao fato de o espectro do relógio ser distante de um ideal. Assim, espera-se que aumentando o espectro, há um melhor funcionamento para o relógio, ou seja, pela definição 4.1 a grandeza $\Gamma_G(S : R)$ deve atingir seu valor máximo. Para ilustrar isso nesse contexto, considere o relógio como um sistema de d níveis com hamiltoniano $H_R = J_z = \sum_{m=0}^{d-1} m|m\rangle\langle m|$, em que m denota a componente z do momento angular.

[iv] A soma de Kronecker de n operadores O_i $i = 1, \ldots, n$ é definida por,

$$\bigoplus_{i=1}^{n} O_i \doteq O_1 \bigotimes_{j=2}^{n} I_j + \ldots + O_n \bigotimes_{j=1}^{n-1} I_j,$$

com I_j sendo o operador identidade para o sistema j.

Considere o sistema S, como anteriormente, no estado assimétrico $|\psi_R\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ com hamiltoniano igual ao do relógio. Considere também, o relógio R numa superposição uniforme,

$$|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{d-1} |m\rangle \,, \tag{4.30}$$

ou seja, um sistema coerente e, portanto, assimétrico em relação à simetria imposta por $U_\theta = \{e^{i\theta J_z};\ \theta \in (0,\, 2\pi]$. Denotando $\rho_S = |\psi_S\rangle\langle\psi_S|$ e $\rho_R = |\psi_R\rangle\langle\psi_R|$, segue que $\Gamma_G(\rho_S) = 1$ e $\Gamma_G(\rho_R) = \log d$. Notando que $\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R)$ pode ser visualizada como, na seguinte base $\{|00\rangle, \ldots, |d-1,\, 0\rangle, |01\rangle, \ldots, |d-1,\, 1\rangle\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

d-1 vezes

Então, não é difícil de obter $\Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) = \log d + \frac{1}{d}$. Portanto, a informação mútua de assimetria do sistema composto é,

$$\Gamma_G(S:R) = 1 - \frac{1}{d} > 0 \tag{4.32}$$

Atingindo o valor $\max \Gamma_G(S:R) = 1$ para $d \to \infty$. Em outras palavras, o sistema relógio é melhor conforme se aumenta a dimensão do seu espaço de Hilbert em relação ao do sistema. Perceba que o teorema 4.1 ainda é respeitado já que $\max \Gamma_G(S:R) = \Gamma_G(|\psi^S\rangle) = 1 = \min\{\Gamma_G(\rho_S),\, \Gamma_G(\rho_R)\}$.

Para ganhar um pouco mais de intuição, considere ainda o sistema e o relógio como anteriormente, ou seja, sistemas de d-níveis com hamiltonianos $H_S = H_R = J_z = \sum_{m=0}^{d-1} m|m\rangle\langle m|$, e m denotando a componente z do momento angular.

Porém, considere agora o sistema S no seguinte estado assimétrico $|\psi_S\rangle = \frac{|0\rangle+|d-1\rangle}{\sqrt{2}}$ e o relógio R novamente na superposição uniforme,

$$|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{d-1} |m\rangle \tag{4.33}$$

Nesse caso, representado na base $\{|00\rangle, \ldots, |d-1,\, 0\rangle, |0,\, d-1\rangle, \ldots, |d-1,\, d-1\rangle\}$[v],

[v] o fato de ter realizado a mudança de base é devido a simplicidade da matriz para realizar o cálculo da entropia de assimetria.

$\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R)$ terá o seguinte formato:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

d-1 vezes

d-1 vezes

e aqui, $\Gamma_G(\rho_S \otimes \rho_R) = \log d + 1 - \frac{1}{d}$. Assim, nesse caso a informação mútua de assimetria do sistema composto é,

$$\Gamma_G(S : R) = \frac{1}{d} > 0 \tag{4.35}$$

Entretanto, note que $\Gamma_G(S : R) \to 0$ para $d \to \infty$. Assim, o sistema relógio não se comporta bem conforme aumenta-se a dimensão do seu espaço de Hilbert juntamente com a dimensão do sistema. Verifica-se então que é impossível observar um intervalo alto (da mesma ordem da dimensão do relógio R) de coerência no sistema S.

Outro fato importante de se observar é o seguinte: ao diagonalizar o operador $\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R)$, que devido a sua simplicidade, basta diagonalizar o seguinte bloco 2×2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

a degenerescência do autespaço associado ao autovalor nulo no hamiltoniano é da ordem de $d-1$ no caso do sistema $S+R$ ser $\frac{1}{2} \times d$. Em contraste com os casos $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ e $d \times d$, em que o autovalor nulo é não degenerado. Aqui fica claro o argumentado tanto na introdução deste capítulo, quanto no capítulo 2, ou seja, o fato de haver uma melhor dinâmica para o sistema S movida pelo relógio R no mecanismo de Page e Wootters. No que segue, é mostrado que os autoestados pertencentes ao autoespaço com autovalores nulo são exatamente aqueles emaranhados no sistema composto.

4.5 Funcionando um relógio: Enfim, o emaranhamento

A discussão feita até aqui utiliza da condição discutida no início do capítulo: o caso em que não houve interação ou troca de energia previamente entre os subsistemas S e R, com o estado inicial dado por $\rho = \rho_S \otimes \rho_R$, ou seja, não há correlação entre o sistema S e o relógio R inicialmente. No que segue, será utilizado o superíndice a (s) para denotar

estados assimétricos (simétricos).

Antes, analisando a assimetria mútua $\Gamma_G(S:R)$ e utilizando o fato de que qualquer estado simétrico é dado pela condição $\rho^S = \mathcal{G}_G(\rho^S)$, perceba que se o sistema S está num estado simétrico, então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_G(\rho_S^s \otimes \rho_R^a) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} U_g^S \otimes U_g^R(\rho_S^s \otimes \rho_R^a)U_g^{S\dagger} \otimes U_g^{R\dagger} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_S^s \otimes U_g^R(\rho_R^a)U_g^{R\dagger} \\
&= \rho_S^s \otimes \mathcal{G}_G(\rho_R^a)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

em que na segunda linha foi utilizado que $U_g^S \rho_S^s U_g^{S\dagger} = \rho_S^s$. Portanto, usando a aditividade da entropia de Von Neumann[49] e o resultado acima,

$$\begin{aligned}
\Gamma_G(S:R) &= \Gamma_G(\rho_S^s) + \Gamma_G(\rho_R^a) - \Gamma_G(\rho_S^s \otimes \rho_R^a) \\
&= 0 + [S(\mathcal{G}_G(\rho_R^a)) - S(\rho_R^a)] - [S(\rho_S^s \otimes \mathcal{G}_G(\rho_R^a)) - S(\rho_S^s \otimes \rho_R^a)] \\
&= [S(\mathcal{G}_G(\rho_R^a)) - S(\rho_R^a)] - [S(\mathcal{G}_G(\rho_R^a)) - S(\rho_R^a)] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

O argumento é análogo caso R esteja num estado simétrico. Com essa digressão, pode-se demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 4.3. *Seja $S(\mathcal{G}_G(\rho)||\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho))$, então*

$$S(\mathcal{G}_G(\rho)||\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)) = \Gamma_G(S:R) \tag{4.39}$$

Demonstração. Devido a argumentação acima, será utilizado $\rho = \rho_S^a \otimes \rho_R^a$, para garantir que $\Gamma_G(S:R) \neq 0$. Agora note que,

$$\begin{aligned}
\Gamma_G(S:R) &= \Gamma_G(\rho_S^a) + \Gamma_G(\rho_R^a) - \Gamma_G(\rho_S^a \otimes \rho_R^a) \\
&= S(\mathcal{G}_G(\rho_S^a)) + S(\mathcal{G}_G(\rho_R^a)) - S(\mathcal{G}_G(\rho_S^a \otimes \rho_R^a)) \\
&= S(\mathcal{G}_G(\rho_S^a) \otimes \mathcal{G}_G(\rho_R^a)) - S(\mathcal{G}_G(\rho_S^a \otimes \rho_R^a)) \\
&= S(\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)) - S(\mathcal{G}_G(\rho))
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{G}_G(\rho)||\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)) &= \mathrm{tr}(\mathcal{G}(\rho)\log\mathcal{G}(\rho)) - \mathrm{tr}(\mathcal{G}(\rho)\log\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)) \\
&= \mathrm{tr}(\mathcal{G}(\rho)\log\mathcal{G}(\rho)) - \mathrm{tr}(\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)\log\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)) \\
&= S(\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)) - S(\mathcal{G}_G(\rho)) \\
&= \Gamma_G(S:R)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

em que, da primeira para a segunda linha foi utilizado um raciocínio análogo ao argumentado na equação (3.32) e a definição dada pela equação (4.16).

□

Isso permite fazer uso da desigualdade de Klein[vi] em (4.41) para afirmar que $\Gamma_G(S:R) \neq 0 \leftrightarrow \mathcal{G}_G(\rho) \neq \mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho)$ com $\rho = \rho_S^a \otimes \rho_R^a$. Logo, os estados que permitem sistemas de referência internos devem diferir entre simetrias global e local. No que segue, verifica-se que tais estados são exatamente aqueles que são emaranhados no sistema $S+R$.

Proposição 4.4. *Emaranhamento é um recurso para haver sistemas de referência internos.*

Demonstração. Basta analisar melhor a expressão da equação (4.41), para garantir $\Gamma_G(S:R) \neq 0$ é preciso que $\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho) \neq \mathcal{G}_G(\rho)$. Como o objetivo é assimetria em relação a base da energia, por clareza, fixe G como sendo o grupo de translações temporais. Todavia, o raciocínio é análogo para qualquer outro grupo de simetria fundamental com média uniforme bem definida. Assim, pela definição de $\mathcal{G}(\cdot)$

$$\mathcal{G}_G(\rho) = \sum_l \Pi_l^{SR} \rho \Pi_l^{SR} \tag{4.42}$$

$$\mathcal{G}_{G\otimes G}(\rho) = \sum_{m,n} \left(\Pi_m^S \otimes \Pi_n^R\right) \rho \left(\Pi_m^S \otimes \Pi_n^R\right) \tag{4.43}$$

com Π_m^S, Π_n^R sendo os projetores nos autoespaços dos subsistemas S e R, respectivamente, e Π_l^{SR} os projetores nos autoespaços do sistema composto. Agora, pela condição $\rho = \rho_S \otimes \rho_R$ e propriedade do produto tensorial, para existir sistemas de referência internos, é necessário que

$$\sum_l \Pi_l^{SR} \left(\rho_S \otimes \rho_R\right) \Pi_l^{SR} \neq \sum_m \left(\Pi_m^S \rho_S \Pi_m^S\right) \otimes \sum_n \left(\Pi_n^R \rho_R \Pi_n^R\right) \tag{4.44}$$

Assim, autoestados emaranhados no autoespaço do hamiltoniano total sob a simetria G satisfazem a condição acima, já que estes não podem ser decompostos como o produto tensorial de autoestados dos hamiltonianos locais.

□

Isso fica claro pelos exemplos anteriores. Basta escrever a expressão analítica da representação matricial dos operadores densidade (4.28), (4.31) e (4.34). Tem-se, respectivamente

$$\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{1} \left(|n,0\rangle\langle n,0| + |n,1\rangle\langle n,1|\right) + |1,0\rangle\langle 0,1| + |0,1\rangle\langle 1,0|\right] \tag{4.45}$$

[vi] veja capítulo anterior.

$$\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R) = \frac{1}{2d}\sum_{n=0}^{d-1}\left(|n0\rangle\langle n,0| + |n,1\rangle\langle n,1| + |n+1,0\rangle\langle n,1| + |n,1\rangle\langle n+1,0|\right), \tag{4.46}$$

com a soma atuando até $d-2$ nos dois últimos estados. E o terceiro é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_G(\rho_S \otimes \rho_R) &= \frac{1}{2d}\left[\sum_{n=0}^{d-1}\left(|n,0\rangle\langle n,0| + |n,d-1\rangle\langle n,d-1|\right)\right. \\ &\quad \left. +|0,d-1\rangle\langle d-1,0| + |d-1,0\rangle\langle 0,d-1|\right] \end{aligned} \tag{4.47}$$

Observe que nenhum dos estados acima podem ser colocados na forma $\sum_i p_i\,(\rho_S \otimes \rho_R)$ com $\sum_i p_i = 1$.

Agora, um pouco de reflexão. Considere dois sistemas que não interagem com hamiltonianos idênticos, H_A e H_B, com autobase de energia $|E\rangle_A$ e $|E\rangle_B$ respectivamente. No cenário trabalhado até aqui, os dois subsistemas foram considerados não podendo trocar energia, por serem mantidos bem distantes por exemplo, assim foi obtido que estados emaranhados como $(|E_1\rangle_A\,|E_2\rangle_B + |E_2\rangle_A\,|E_1\rangle_B)/\sqrt{2}$ são utilizados como recursos. Por outro lado, em cenários em que operações com fluxo de energia entre os dois subsistemas são permitidas, o observável relevante é a energia total, e não a energia dos subsistemas individuais. Portanto, nesse caso, estados emaranhados tais como $(|E_1\rangle_A\,|E_2\rangle_B + |E_2\rangle_A\,|E_1\rangle_B)/\sqrt{2}$ não são, necessariamente, mais utilizados como recursos. Isso pode sugerir um caminho interessante de buscar quais são os recursos no caso em que há uma interação entre o sistema S e o relógio R, dado pela equação (2.16)

$$H_{tot} := H_S \otimes I_R + I_S \otimes H_R + V_S \otimes V_R \tag{4.48}$$

Observe por fim que, a operação $\mathcal{G}(\cdot)$ descreve um processo no qual duas partes, S e R, utilizam de comunicação clássica para selecionar uma unitária G-invariante, U_g^S e U_g^R, implementada localmente por cada. Isto faz de $\mathcal{G}(\cdot)$ uma operação LOCC, implicando que o emaranhamento não aumenta sob tal operação. Logo,

Proposição 4.5. *Seja E um monótono de emaranhamento*[vii]*. Então, para transformações*

[vii] Como discutido no capítulo anterior, um monótono de emaranhamento satisfaz as condições:

(i) $E(\rho) \geq 0$;

(ii) $E(\rho) = 0 \leftrightarrow \rho$ é separável;

(iii) $E(\rho)$ não aumenta, em média, sob operações LOCC.

G-invariantes reversíveis (unitárias), a função

$$C(\cdot) \coloneqq E\left(\mathcal{G}(\cdot)\right) \tag{4.49}$$

é uma quantidade conservada.

Assim, existe uma quantidade conservada para sistemas fechados. O interessante é que estas são identificadas em termos de monótonos de emaranhamento ao invés do valor esperado dado pelo gerador da simetria - hamiltoniano.

Mostrando como a teoria de emaranhamento se manifesta dentro da teoria de assimetria novamente. Abaixo conclui-se o capítulo, como prometido, listando as condições para o mecanismo de Page e Wootters na linguagem trabalhada até agora.

- *Atemporalidade $\longleftrightarrow$ Simetria por translação temporal.* O sistema $S + R$ com hamiltoniano H é um sistema G-invariante, com G sendo grupo de translações temporais, representado pelos operadores unitários: $U_t = \{e^{-iHt};\ t \in \mathbb{R}\}$;

- *Bons relógios são possíveis $\longleftrightarrow$ Bons sistemas de referências de tempo.* Para realizar tarefas proibidas pela simetria temporal, há necessidade de uma referência para tempo, estado assimétrico. Este, possui um desempenho melhor quando seu espaço de Hilbert possui uma dimensão suficientemente alta, veja equação (4.32), o que corresponde a uma autobase aproximando-se da reta real;

- *Emaranhamento $\longleftrightarrow$ Existência de sistema de referência quântico interno num estado composto.* Na condição de não-interação inicial, $\rho = \rho_S \otimes \rho_R$, pode-se ver pela proposição 4.4 que emaranhamento é um recurso necessário para o relógio R funcionar, ou seja, para a grandeza $\Gamma_G(S : R)$ não ser nula.

5 CONCLUSÃO

Sendo esse trabalho dedicado a explorar a questão do tempo na teoria quântica, em particular, como representá-lo dentro da teoria matemática que descreve esta, o leitor pode ter notado que em momento algum foi oferecido uma justificativa acerca da relevância de tais questões. Assim, é interessante concluir mostrando quão vasta a questão trabalhada pode chegar.

O problema de se observar apenas estados estacionários na base do hamiltoniano está intimamente relacionado com a questão das restrições impostas por regras de superseleção. Regras de superseleção são regras postuladas que proibem a preparação de estados quânticos que exibem coerência entre os autoestados de certos observáveis.[35] Originalmente, essas regras eram consideradas como algumas limitações axiomáticas adicionadas à teoria quântica não-relativística.[57] Por exemplo, a regra de superseleção para carga elétrica proibe a produção de estados superpostos com cargas diferentes. No entanto, como sugerido por AHARANOV; SUSSKIND,[58,59] a introdução dessas regras de superseleção fundamentais na teoria quântica não-relativística resulta de fazer a suposição não-física de que existem operações absolutas sem qualquer dependência de um sistema de referência. Concluíram assim que a falta de um sistema de referência quebrando a simetria que impõe restrições nas operações implementáveis. Similarmente, ARAKI; YANASE,[60] supondo que o hamiltoniano de um sistema fosse invariante por uma simetria G, propuseram um esquema para medir um operador que assimétrico em relação a G com uma precisão arbitrária, utilizando um sistema de referência quântico atuando como sistema principal. Como resultado, a precisão da medida aumenta com a dimensão do espaço de Hilbert do sistema de referência em questão (não necessariamente de modo linear), isso é bem similar com o resultado dos exemplos do capítulo 4 dessa dissertação.

Mais recente, KITAEV et al.[61] mostraram que todas as regras de superseleção descritas por grupos compactos resultam da falta de um sistema de referência apropriado. Portanto, seria interessante uma prova rigorosa com toda a generalidade para a superseleção de energia, ou seja, impossibilidade de observação de estados superpostos com energias diferentes. Porém, o grupo de translação temporal é não-compacto, invalidando várias propriedades interessantes que pode-se usar na teoria de grupos, como o exemplo da existência de uma medida de Haar bem definida para a média uniforme vastamente utilizada nessa dissertação. Outro resultado interessante nessa linha foi obtido por MARVIAN; LLOYD,[56] no artigo em questão o sistema de referência relógio é utilizado para criar superposição de energia no sistema S, inicialmente simétrico, o interessante é que para isso utiliza-se uma operação G-invariante num sistema também G-invariante, fartalecendo assim a ideia de

que a coordenada tempo paramétrico não parece tão fundamental na descrição quântica, como defendido ao longo da dissertação.

Há também outras situações que são de interesse no tratamento de sistemas de referência como objetos quânticos. Por exemplo, em alguns experimentos propostos para medir o spin,[62] um pequeno ímã é utilizado para medir um único spin. Note que, tal ímã pode ser considerado como um sistemas de referência que define uma direção específica e devido ao seu pequeno tamanho, o ímã deve ser tratado como um objeto da mecânica quântica. Considerando tal objeto como um sistema de referência quântico finito, vem à tona alguns efeitos colaterais no sistema. Primeiramente, utilizando um sistema de referência de dimensão finita não pode-se implementar perfeitamente a evolução temporal ou medida, devido ao aparecimento de flutuações quânticas.[63] Em segundo lugar, dada a execução de uma medida ou uma evolução temporal, sempre haverá alguma reação de volta no sistema de referência quântico.[64]

Vale refletir por fim, o caráter que a proposta de Page e Wootters propõe para a interpretação do tempo dentro da teoria quântica. Aqui está uma caracterização superficial de três posições metafísicas e o significado que elas tem para a existência de bons relógios na discussão que segue.[5]

Realista o tempo externo é absoluto e um bom relógio é aquele que mede a passagem do tempo absoluto.

Operacionista o tempo não é nada mais do que o que é lido por um bom relógio.

Relacionista o tempo é uma ordem sobre eventos e nada mais.

Para um realista, a existência de sistemas físicos que atuam como bons relógios não passa de uma questão pragmática. Newton é a figura que mais lembra essa definição e esta é assumida na mecânica quântica padrão não-relativística. Ao introduzir os relógios quânticos, como discutido na seção 2.1, o problema para o conceito usual de tempo posto pelo relógio ideal de Schrödinger satisfaz as necessidades de um operacionista, o qual acredita que as quantidades físicas devem estar associadas a procedimentos experimentais concretos. Assim, para um operacionista, o conceito de tempo não tem sentido sem meios para medi-lo. O argumento dado de garantir a convergência para um sistema físico ideal, ao que parece, é que o operacionista pode se contentar com um procedimento que fornece os meios para medir o tempo aproximadamente, com uma precisão que pode ser aumentada sem limite. Isso parece ser uma resposta justa, particularmente no contexto da teoria quântica, que introduz um problema semelhante para medições de posição no espaço.[65] Se isso é ou não uma análise satisfatória do tempo dependerá de sua inclinação filosófica.

Porém, mesmo em outra linha que não o operacionismo, esta tem que garantir uma noção satisfatória de tempo em física, fornecendo alguma relação com os meios pelos quais pode ser medido, mesmo se o tempo por si é, em última análise, definido independentemente dos meios de sua medição.

Já no contexto Page e Wootters o papel da medida parece fazer um papel importante para se ter um ordenamento de eventos. O fluxo de tempo tem que emergir como resultado de haver subsistemas no sistema S que podem realizar medições e armazenar seus resultados. Nas palavras de Wootters[29]:

"...Para ver a evolução, você precisa olhar pelo menos para duas partículas e deixar uma delas servir como um relógio. De fato, isso é o que fazemos na vida real: quando falamos de um sistema que muda no tempo, estamos sempre comparando dois sistemas, um sistema objeto e um relógio. Na maioria dos casos cotidianos, o relógio é nada mais do que o sistema físico que corresponde ao nosso próprio sentido interno do tempo...Quando você faz uma medição sobre o mundo ao seu redor, também faz uma medição sem sequer notar, em algumas de suas próprias variáveis internas....As correlações que assim observa entre seu próprio estado e o estado do mundo ao seu redor, bem como as correlações entre as várias partes do mundo ao seu redor, são interpretadas como a passagem do tempo".

Agora, para um relacionista, a noção de tempo deve ser construída a partir dos conteúdos do mundo como dados, sem referência a instrumentos ideais ou operações. Em particular, Leibniz considerou a coordenada do tempo externo como ideal não porque deveria ser medido por um relógio ideal, mas porque deve ser construído a partir do que é dado pelo mundo físico: a ordem temporal dos eventos.[5]

A ideia subjacente ao relacionismo é a seguinte: dada uma descrição completa da realidade, os fatos espaço-temporais são fixados pelas relações entre os eventos e objetos do mundo. Como Leibniz colocou: "tempos, considerados sem mencionar coisas ou eventos, não são nada, e...constituem apenas da ordem sucessiva das coisas e dos acontecimentos".[66]

Perceba que com essa definição, a visão de Page e Wootters não parece fornecer uma ordem temporal global, que satisfaça o desejo leibniziano de que o tempo seja dado pelas relações entre os acontecimentos. Pelo menos não no sentido de que as relações descritas por Leibniz são nada mais do que o resultado das medições e correlações com o conteúdo do mundo argumentado por Wootters. Assim, parece apenas fazer sentido falar das relações com o mundo quando se compara por algum procedimento físico, a medida no caso quântico.

REFERÊNCIAS

1 WHITROW, G. J. **O que é tempo?**: uma visão clássica sobre a natureza do tempo. Tradução de Maria Ignez Duque Estrada. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2005.

2 PAGE, D. N.; WOOTTERS, W. K. Evolution without evolution: dynamics described by stationary observables. **Physical Review D**, v. 27, n. 12, p. 2885–2892, 1983.

3 PAULI, W. **Die allgemeine prinzipien der wellenmechanik**. Berlin: Springer, 1933.

4 DIRAC, P. A. M. On the theory of quantum mechanics. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 112, n. 762, p. 661–677, 1926.

5 PASHBY, T. **Time and the foundations of quantum mechanics**. 2014. 209 p. Ph. D. Thesis (Physics) — Faculty of the Dietrich School of Arts and Sciences, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 2014.

6 SCHRÖDINGER, E. Zur quantendynamik des elektrons. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, p. 63–72, 1931.

7 SALECKER, H.; WIGNER, E. P. Quantum limitations of the measurement of space-time distances. **Physical Review**, v. 109, n. 2, p. 571–577, 1958.

8 SCHRÖDINGER, E. Spezielle relativitätstheorie und quantenmechanik. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, p. 238–247, 1931.

9 GALAPON, E. Pauli's theorem and quantum canonical pairs: the consistency of a bounded, self–adjoint time operator canonically conjugate to a hamiltonian with non–empty point spectrum. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 458, n. 2018, p. 451–472, 2002.

10 MALAMENT, D. In defense of dogma: why there cannot be a relativistic quantum mechanical theory of (localizable) particles. In: CLIFTON, R. (Ed.). **Perspectives on quantum reality**. New York: Kluwer Academic Publishers, 1996.

11 PERES, A. Measurement of time by quantum clocks. **American Journal of Physics**, v. 48, n. 7, p. 552–557, 1980.

12 JORDAN, T. F. **Linear operators for quantum mechanics**. New York: John Wiley and Sons, 1969.

13 RIESZ F.; SZ.-NAGY, B. **Functional analysis**. New York: Dover, 1990.

14 BALLENTINE, L. E. **Quantum mechanics**: a modern development. Singapore: World scientific, 1998.

15 BUTTERFIELD, J. On time in quantum physics. 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1406.4745>. Acesso em: 11 nov. 2016.

16 HALL, B. **Quantum theory for mathematicians**. New York: Springer, 2013.

17 BUSCH, P.; GRABOWSKI, M.; LAHTI, P. J. Time observables in quantum theory. **Physics Letters A**, v. 191, n. 5, p. 357 – 361, 1994.

18 SRINIVAS, M. D.; VIJAYALAKSHMI, R. The 'time of occurrence' in quantum mechanics. **Pramana**, v. 16, n. 3, p. 173–199, 1981.

19 HALVORSON, H. A quantum-theoretic argument for timelessness. 2010. Disponível em: <http://www.princeton.edu/~hhalvors/notime.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2016.

20 MACCONE, L. **Workshop on time in physics**. 2015. Disponível em: <http://www.video.ethz.ch/conferences/2015/d-phys.html>. Acesso em: 23 fev. 2016.

21 DIRAC, P. A. M. **Lectures on quantum mechanics**. Mineola: Dover, 1964.

22 DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. **Physical Review**, v. 160, n. 5, p. 1113–1148, 1967.

23 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum time. **Physical Review D**, v. 92, n. 4, p. 045033, 2015.

24 MOREVA, E. et al. Time from quantum entanglement: an experimental illustration. **Physical Review A**, v. 89, n. 5, p. 052122, 2014.

25 VEDRAL, V. Time, (inverse) temperature and cosmological inflation as entanglement. 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1408.6965>. Acesso em: 15 out. 2016.

26 PERES, A. **Quantum theory**: concepts and methods. New York: Springer, 1995.

27 DEUTSCH, D. A measurement process in a stationary quantum system. 1990. Disponível em: <http://people.maths.ox.ac.uk/lmason/Tn/31/TN31-04.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2016.

28 MARLETTO, C.; VEDRAL, V. Evolution without evolution, and without ambiguities. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1610.04773>. Acesso em: 23 out. 2016.

29 WOOTTERS, W. K. "time" replaced by quantum correlations. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 23, n. 8, p. 701–711, 1984.

30 POULIN, D. Toy model for a relational formulation of quantum theory. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 45, n. 7, p. 1189–1215, 2006.

31 PAGE, D. N. Clock time and entropy. 1993. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/543554>. Acesso em: 15 mar. 2016.

32 RINDLER, W. **Introduction to special relativity**. New York: Oxford University Press, 1982.

33 BARATA, J. C. A. **Notas de aula**. versão de 13 de dezembro de 2016. Disponível em: <http://denebola.if.usp.br>. Acesso em: 13 dez. 2016.

34 MASHHAD, I. M. Symmetry, asymmetry and quantum information. 2012. Disponível em: <https://uwspace.uwaterloo.ca/bitstream/handle/10012/7088/Marvian%20Mashhad_Iman.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 oct. 2016.

35 BARTLETT, S. D.; RUDOLPH, T.; SPEKKENS, R. W. Reference frames, superselection rules, and quantum information. **Reviews of Modern Physics**, v. 79, n. 2, p. 555–609, 2007.

36 GAMBINI, R.; PULLIN, J. The montevideo interpretation of quantum mechanics: a short review. 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1502.03410>. Acesso em: 11 ago. de 2016.

37 PALMER, M. C.; GIRELLI, F.; BARTLETT, S. D. Changing quantum reference frames. **Physical Review A**, v. 89, n. 5, p. 052121, 2014.

38 ZYCH, M. et al. General relativistic effects in quantum interference of "clock". **Journal of Physics**, v. 723, n. 1, p. 012044, 2016.

39 CASTRO-RUIZ, E.; GIACOMINI, F.; BRUKNER, Č. Entanglement of quantum clocks through gravity. 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1507.01955>. Acesso em: 11 ago. de 2015.

40 ANGELO, R. M. et al. Physics within a quantum reference frame. **Journal of Physics A**, v. 44, n. 14, p. 145304, 2011.

41 AHARONOV, Y.; KAUFHERR, T. Quantum frames of reference. **Physical Review D**, v. 30, n. 2, p. 368–385, 1984.

42 BARTLETT, S. D.; RUDOLPH, T.; SPEKKENS, R. W. Dialogue concerning two views on quantum coherence: factist and fictionist. **International Journal of Quantum Information**, v. 04, n. 01, p. 17–43, 2006.

43 PALMER, M. Relativistic quantum information theory and quantum reference frames. 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1312.4780>. Acesso em: 23 ago. 2016.

44 FAIST, P. Quantum coarse-graining: an information-theoretic approach to thermodynamics. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1607.03104>. Acesso em: 15 jul. de 2016.

45 GOUR, G.; SPEKKENS, R. W. The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones. **New Journal of Physics**, v. 10, n. 3, p. 033023, 2008.

46 MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W. How to quantify coherence: distinguishing speakable and unspeakable notions. **Physical Review A**, v. 94, n. 5, p. 052324, 2016.

47 PRESKILL, J. **Lecture notes**. 2015. Disponível em: <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph219/>. Acesso em: 23 abr. 2016.

48 HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. **Review of Modern Physics**, v. 81, n. 2, p. 865–942, 2009.

49 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**. New York: Cambridge University Press, 2000.

50 VACCARO, J. A. et al. Tradeoff between extractable mechanical work, accessible entanglement, and ability to act as a reference system, under arbitrary superselection rules. **Physical Review A**, v. 77, n. 3, p. 032114, 2008.

51 SCHUMACHER, B.; WESTMORELAND, M.; WOOTTERS, W. K. Limitation on the amount of accessible information in a quantum channel. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 18, p. 3452–3455, 1996.

52 TOLOUI, B.; GOUR, G. Simulating symmetric time evolution with local operations. **New Journal of Physics**, v. 14, n. 12, p. 123026, 2012.

53 HORODECKI, M.; OPPENHEIM, J. (quantumness in the context of) resource theories. **International Journal of Modern Physics B**, v. 27, n. 03, p. 1345019, 2013.

54 OPPENHEIM, J. et al. Thermodynamical approach to quantifying quantum correlations. **Physical Review Letters**, v. 89, n. 18, p. 180402, 2002.

55 VINJANAMPATHY, S.; ANDERS, J. Quantum thermodynamics. **Contemporary Physics**, v. 57, n. 4, p. 545–579, 2016.

56 MARVIAN, I.; LLOYD, S. From clocks to cloners: catalytic transformations under covariant operations and recoverability. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1608.07325>. Acesso em: 04 set. 2016.

57 WICK, G. C.; WIGHTMAN, A. S.; WIGNER, E. P. Superselection rule for charge. **Physical Review D**, v. 1, n. 12, p. 3267–3269, 1970.

58 AHARANOV, Y.; ROHRLICH, D. **Quantum paradoxes**. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2005.

59 AHARONOV, Y.; SUSSKIND, L. Charge superselection rule. **Physical Review**, v. 155, n. 5, p. 1428–1431, 1967.

60 ARAKI, H.; YANASE, M. M. Measurement of quantum mechanical operators. **Phyical Review**, v. 120, n. 2, p. 622–626, 1960.

61 KITAEV, A.; MAYERS, D.; PRESKILL, J. Superselection rules and quantum protocols. **Physical Review A**, v. 69, n. 5, p. 052326, 2004.

62 RUGAR, D. et al. Single spin detection by magnetic resonance force microscopy. **Nature**, v. 430, n. 329, p. 329–332, 2004.

63 MARVIAN, I.; MANN, R. B. Building all time evolutions with rotationally invariant hamiltonians. **Physical Review A**, v. 78, n. 2, p. 022304, 2008.

64 WOODS, M.; SILVA, R.; OPPENHEIM, J. Autonomous quantum machines and finite sized clocks. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1607.04591>. Acesso em: 20 ago. 2016.

65 PAULI, W. **General principles of quantum mechanics**. Berlin: Springer, 1958.

66 LEIBNIZ, G. W. Correspondence with samuel clarke - versão de jonathan bennett. 1716. Disponível em: <http://www.earlymoderntexts.com/authors/leibniz>. Acesso em: 26 dez. 2016.

67 BORCHERS, H. J. A remark on a theorem of b. misra. **Communications in Mathematical Physics**, v. 4, n. 5, p. 315–323, 1967.

68 HEGERFELDT, G. C. Causality, particle localization and positivity of the energy. In: BOHM, A.; DOEBNER, H. D.; KIELANOWSKI, P. (Ed.). **Irreversibility and causality semigroups and rigged Hilbert spaces.** Berlin: Springer, 1998. p. 238–245. (Lecture notes in physics, v. 504).

Apêndices

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS 2.3 E 2.4

O resultado devido à Srinivas e Vijayalakshmi faz uso do lema de Borchers que é enunciado a seguir e pode ser visto tanto em seu artigo original,[67] quanto em MALAMENT.[10]

Lema A.1. *(Borchers). Sejam P_1 e P_2 operadores de projeção que*

$$[U_t P_1 U_t^\dagger, P_2] = 0 \tag{A.1}$$

para $|t| < \alpha$ com $\alpha > 0$. Então $P_1 P_2 = 0$implica que

$$P_2 U_t P_1 U_t^\dagger = 0, \tag{A.2}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.

Assim, segue a prova do teorema 2.3.

Demonstração. Para começar, seja $\triangle$ um conjunto de Borel limitado e $|\triangle|$denota seu diâmetro. Agora, defini-se para algum $\lambda > |\triangle|$,

$$P_1 = P^T(\triangle) \tag{A.3}$$

$$P_2 = P^T(\triangle + \lambda), \tag{A.4}$$

então, uma vez que P^T é um projetor, P_1e P_2 são projetores ortogonais então $P_1 P_2 = 0$, mostrando também que ambos comutam e P_2 comuta com $U_t P_1 U_t^\dagger$. Portanto, as condições do lema acima são satisfeitas, logo segue-se que $P_2 U_t P_1 U_t^\dagger = 0$ para $\forall t \in \mathbb{R}$. Da covariância, segue que $P_1 = U_{-t} P_2 U_{-t}^\dagger \to P_1^2 = 0$, ou seja, mostrou-se que $P^T(\triangle) = 0$, para $\forall \triangle \subset \mathbb{R}$. Uma vez que $P^T(\mathbb{R})$ pode ser obtido como $\lim_{\triangle \to \infty} P^T(\triangle) = P^T(\mathbb{R}) = 0$, tem-se uma contradição, já que o requisito básico de que $P^T(\mathbb{R}) = I$ para qualquer medida projetiva $P^T(\triangle)$ não é satisfeito.

□

O resultado devido à Hans Havolrson faz uso do lema de Hegerfeldt,[68] uma demonstração também pode ser vista em PASHBY.[5]

Lema A.2. *(Hegerfeldt). Seja H um operador semi-limitado e $U_t = e^{iHt}$ o grupo fortemente contínuo de operadores unitários gerados por H com $t \in \mathbb{R}$.Seja P um operador projetor em um subespaço $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$. Então para $\forall\ |\psi\rangle \in \mathcal{S}$,*

1.$\langle\psi|\, U_t^\dagger P U_t\, |\psi\rangle \neq 0$ *num conjunto denso aberto, ou*

2. $\langle\psi|\, U_t^\dagger P U_t\, |\psi\rangle = 0$ *para* $\forall t$.

Demonstração. Seja $|\psi\rangle \in \mathcal{S}_\triangle$, será mostrado que $|\psi\rangle = 0$, ou seja, $\mathcal{S}_\triangle$ não possui vetores unitários. Considere a função definida por

$$f(t) = \langle\psi|\, U_t^\dagger P_\triangle U_t\, |\psi\rangle = \langle\psi|\, P_{\triangle+t}\, |\psi\rangle \tag{A.5}$$

para $t \in \mathbb{R}$, como é facil de se ver, f satisfaz as hipóteses do lema anterior. Além disso, usando que $P_\triangle\, |\psi\rangle = |\psi\rangle$ segue que para $\forall t > |\triangle|$,

$$f(t) = \langle\psi|\, P_{\triangle+t}\, |\psi\rangle = \langle\psi|\, P_{\triangle+t} P_\triangle\, |\psi\rangle = 0 \tag{A.6}$$

uma vez que $\mathcal{S}_\triangle \perp \mathcal{S}_{\triangle+t}$. Assim, $f(t) = 0$ em um conjunto aberto e pelo lema acima, $f(t) = 0$ para $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular,

$$0 = f(0) = \langle\psi|\, P_\triangle\, |\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \tag{A.7}$$

se e somente se $|\psi\rangle = 0$. Como $\triangle$ é arbitrário, $\mathcal{S}_\triangle = 0$ para $\forall\triangle$.

□

É curioso ressaltar que tais lemas apareceram em outros resultados da física, à saber, resultados da não-localizabilidade de partículas em teoria quântica de campos relativísticas.[10] Uma pergunta interessante, então, seria ver a possibilidade de equivalência desses lemas.

APÊNDICE B – REPRESENTAÇÃO DE GRUPOS E MÉDIAS INVARIANTES

Uma representação de um grupo G em um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é uma aplicação que a cada $g \in G$ associa um operador linear inversível $\Pi(g) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. $\Pi(g)\Pi(h) = \Pi(gh)$, $\forall g, h \in G$;

2. $\Pi(e) = I$;

3. $\Pi(g^{-1})\Pi(g) = \Pi(g)^{-1}$, $\forall g \in G$.com e sendo a unidade de G e I o operador identidade agindo em $\mathcal{V}$.

Definição B.1. *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e seja $\Pi(g) : g \in G$ uma representação de G em $\mathcal{V}$. Um subespaço $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ é dito invariante por $\Pi(g)$ se $\Pi(g)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$, $\forall g \in G$.*

Definição B.2. *Seja $\mathcal{W}$ um subespaço invariante por $\Pi(g)$. A representação $\Pi(g)$ é chamada irredutível em $\mathcal{W}$ se se os seus únicos subespaços invariantes forem os triviais.*

Uma representação que não é irredutível é dita ser redutível.

Definição B.3. *Um subespaço portador de uma representação irredutível é chamado subespaço irredutível.*

Uma representação $\Pi(g)$ de um grupo G em um espaço vetorial de dimensão finita $\mathcal{V}$ é dita ser uma representação totalmente redutível se for redutível e se $\mathcal{V}$ puder ser escrito como uma soma direta de subespaços invariantes por $\Pi(g) : \mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_k$. Em tal caso, $\Pi(g)$ pode ser escrita em uma base conveniente na forma de blocos

$$\begin{pmatrix} \pi_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \pi_k(g) \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

para todo $g \in G$, onde cada $\pi_i(g)$ é uma representação de G atuando no espaço invariante $\mathcal{W}_i$ de Π, $i = 1, \ldots, k$. Em um tal caso pode-se escrever Π na forma $\Pi = \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_k$

É interessante a situação em que Π é totalmente redutível e cada $\pi_i(g)$ é irredutível. Nesse caso diz-se que Π é uma representação completamente redutível. Em particular, para os grupos finitos e de Lie compactos num espaço de Hilbert segue o seguinte teorema que será omitida a demonstração[33]:

Teorema B.1. *Seja G um grupo finito ou de Lie compacto e seja $U_g : g \in G$ uma representação unitária de G num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, ou seja, G está sendo representado por um operador unitário $U^\dagger U = UU^\dagger$. Então, qualquer representação unitária U_g é irredutível ou completamente redutível.*

Assim, ao impor uma simetria física que geralmente é representada por um operador unitário num estado físico pertencente a um espaço de Hilbert, a decomposição acima é realizada.

A Medida de Haar

A discussão feita aqui pode ser encotrada em BARATA.[33] Seja G um grupo finito e seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função que a cada elemento g do grupo associa um número complexo $f(g)$. Pode-se definir a média de f em G por

$$\mu(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g), \tag{B.2}$$

com $|G|$ sendo a ordem de G, ou seja, o número de elementos. Essa noção de média de uma função em um grupo finito possui algumas propriedades importantes. Seja h qualquer elemento fixo de G. Então, para $\forall h \in G$, segue que

$$\mu(f(g)) = \mu(f(hg)) = \mu(f(gh)) = \mu(f(g^{-1})), \tag{B.3}$$

ou seja, a média é invariante por multiplicação à direita e à esquerda por elementos de G e pela inversão do argumento de f.

Perceba que a média acima foi normalizada de modo que se $f(g) = 1$ para $\forall g \in G$, então $\mu(f) = 1$. Além disso, a média acima é positiva: se $f \geq 0$, então $\mu(f) \geq 0$. O interessante é que grupos finitos não são os únicos a possuírem médias invariantes positivas. Para os grupos $U(1)$ e $SU(2)$ pode-se definir

$$\mu(f) := \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f(\varphi), \tag{B.4}$$

caso a integral seja finita. É fácil verificar que as propriedades de invariância observadas no caso de grupos finitos são satisfeitas aqui também. Para o grupo $(\mathbb{R}, +)$ pode-se definir

$$\mu(f) := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x), \tag{B.5}$$

caso a integral seja finita. Como pode-se ver essa média é positiva, invariante por translações $f(x) \to f(x+y)$ e pela troca do argumento da f por seu inverso: $f(x) \to f(-x)$, em analogia ao caso de grupos finitos. Note-se, porém, que essa média não pode ser normalizada, pois o grupo é não-compacto.

Poderia surgir então, a seguinte pergunta: quais são as condições necessárias para que um grupo possua média invariante positiva como nos exemplos acima. Uma resposta parcial

foi dada por Haar[i]. O teorema de Haar afirma que se G é um grupo compacto, então existe uma medida de integração dg em G, denominada *medida de Haar*, tal que se a média

$$\mu(f) := \int_G dg\, f(g), \tag{B.6}$$

é finita, então

$$\int_G dg\, f(g) = \int_G dg\, f(hg) = \int_G dg\, f(gh) = \int_G dg\, f(g^{-1}) \tag{B.7}$$

para $\forall h \in G$. Além disso, a média é normalizada: $\int_G dg = 1$ e positiva: se $f \geq 0$, então$\int_G dg\, f(g) \geq 0$.

O Teorema de Haar pode ser parcialmente estendido a grupos localmente compactos como $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_+, \cdot)$: Se G é localmente compacto existem medidas positivas de integração dg^e e dg^d em G tais que

$$\int_G dg^e\, f(g) = \int_G dg^e\, f(hg) = \int_G dg^e\, f(gh) = \int_G dg^e\, f(g^{-1}) \tag{B.8}$$

$$\int_G dg^d\, f(g) = \int_G dg^d\, f(hg) = \int_G dg^d\, f(gh) = \int_G dg^d\, f(g^{-1}) \tag{B.9}$$

para $\forall h \in G$. Ou seja, existem uma medida invariante à esquerda e uma outra invariante à direita. Em alguns casos essas medidas

Extensão de média para operadores

As simetrias fundamentais do sistema são representadas por um grupo G. O grupo G atua unitariamente no espaço do estado de cada sistema: o efeito de $g \in G$ no estado $|\psi^S\rangle$ do sistema S é representado por uma matriz unitária U_g^S. Assim, as diferentes bases que podem ser utilizadas para expressarem estados estão relacionadas entre si por um elemento de grupo, isto é, quaisquer duas bases $|e_1^S\rangle, |e_2^S\rangle, , ..., |e_d^S\rangle$ e $|f_1^S\rangle, |f_2^S\rangle, , ..., |f_d^S\rangle$ de $\mathcal{H}_S$ estão relacionados por um elemento $g \in G$, no sentido de que $\forall j\ \exists g\,;\, |e_j^S\rangle = U_g^S\, |f_j^S\rangle$, à menos de uma permutação dos índices j. Nesse sentido, pode-se definir a média de grupo uniforme para estados como,

$$\int_G dg\, U_g^S\, |\psi^S\rangle \tag{B.10}$$

Porém, será mais conveniente trabalhar com a linguagem de operadores densidade. Nesse caso, a média para operadores fica

$$\int_G dg\, U_g^S |\psi^S\rangle\langle\psi^S| U_g^{S\dagger} \tag{B.11}$$

[i] Alfréd Haar (1885–1933), matemático húngaro.

sendo $\rho = |\psi^S\rangle\langle\psi^S|$ um operador densidade. A função f que a cada elemento g do grupo associa um número complexo $f(g)$ é dada aqui pelo elemento de matriz da representaçãoo U_g^S.

Uma clara vantagem da média de grupos aplicada em vetores em relação à média de grupos em operadores é que ela preserva traço. Além disso, transportando a média do grupo no nível de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ao invés de $\mathcal{H}$ pode-se eliminar algumas complicações matemáticas que surgem quando o grupo de simetria admite apenas representações projetivas, isto é, quando as medidas de Haar invariantes à esquerda e à direita são distintas.[30]