Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

**Problemas Atuais em Óptica
Quântica: Novos Mecanismos Para
Gerar Estados Comprimitos e um
Modelo para Determinar o Estado
Quântico do Campo**

Célia Maria Alves Dantas

Tese apresentada ao Instituto
de Física de São Carlos, Uni-
versidade de São Paulo, para
obtenção do título de **Doutor**
em Física Básica.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato

Departamento de Física e Ciência dos Materiais
São Carlos – 1995

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA Tese de Doutorado de **CELIA MARIA ALVES SANTOS** APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 17/02/1993

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

Prof. Dr. Sebastião Nascimento de Paiva

Prof. Dr. Salomão Sylvio Mirzahi

Dr. Paulo Alberto Nussenzveig

Dedico ao
Luis Inácio *LULA* da Silva

Agradecimentos

- Os mais sinceros agradecimentos ao meu orientador, Vanderlei Salvador Bagnato, pela orientação e exemplo de dedicação aos alunos, fazendo sempre com que a gente se sinta importante.
- Ao professor Basílio Baseia, por ter trabalhado comigo durante o tempo que estive em São Carlos, pelo seu apoio e amizade.
- Ao Paulo Nussenzveig por ter lido este trabalho, pelas várias discussões e sugestões.
- Ao Marcelo A. Marchioli e a Reeta Vyas, pelas várias discussões do trabalho.
- Aos amigos da sala, Aparecida, Débora, Monicapuleto, Flemming Montequio, Tereza, Lobinho, pela amizade e constante alegria, mesmo nos momentos mais difíceis, o que eleva o nível da nossa sala, tornando-a um excelente local de trabalho. Especialmente agradeço a Liliane por ter vindo aqui na véspera do Natal corrigir o meu “abstract”.
- Ao Marcassa, meu amigo físico experimental, a quem eu confiei muitas vezes uma chave de fenda e meu computador para “experiências” macabras, e nunca me arrependi!
- Ao Silvio, Marcelo e Rui da oficina de eletrônica.
- Ao professor Salviano A. Leão, pela eterna consultoria computacional, que ele sempre fez com alegria e boa vontade.
- Aos colegas Jeremias, Marcio, João Vítor, Zé Luis, Miled, Virgílio, Mauro, pelas inúmeras dicas computacionais para uma iniciante ao Vax, Estações, etc.
- Ao Professor Zílio, por ter me emprestado uma impressora, facilitando o meu trabalho.
- Especialmente eu agradeço a meus pais e irmãos pelo encorajamento que eles me deram para continuar meus estudos.
- Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro do CNPq.

Conteúdo

Lista de Figuras	iii
Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
2 Estados Comprimidos do Campo da Radiação e o Potencial Não - Local	6
2.1 Quantização do Campo Eletromagnético	8
2.2 Estados do Campo	9
2.2.1 Estado de Número	10
2.2.2 Estados Coerentes	12
2.2.3 Estados Comprimidos	15
2.2.3.1 Estados Comprimidos de Quadratura	16
2.2.3.2 Estados Comprimidos de Número-Fase	22
2.3 Potenciais Não-Locais e os Estados Comprimidos	30

3	Interação da Matéria com um Campo Quântico: Inversão Atômica	36
3.1	Inversão Atômica	38
3.2	Inversão Atômica para o ECCP	42
3.3	Influência da Fase do Campo em $W(\lambda t)$	50
3.3.1	Inversão Atômica para o Estado de Fase de PB	50
4	Espalhamento de Átomos por Luz	54
4.1	Introdução	54
4.2	Modelo	56
4.3	Fundamentos Teóricos	58
4.4	Comparação entre as interações com um e dois fótons	65
4.5	Distribuição de Quase-probabilidade	69
4.6	Determinação da variância do operador de fase	73
5	Conclusão	79
	Apêndices	83
	Bibliografia	85

Lista de Figuras

2.1	Distribuição de número de fons para um estado coerente comprimido para três valores do parâmetro de compressão	20
2.2	Distribuição de número de fons para o estado de vácuo comprimido com parâmetro de compressão (real) $r = 2.0$	22
2.3	Variância do número de fons para o estado coerente comprimido para três valores diferentes do parâmetro de compressão, em comparação com o estado coerente	29
2.4	Gráfico da função $u(x, x')$ dada pela Eq.(2.100) para $N_\sigma = (1/2\pi)^{1/2}$ e $\sigma = 1$	33
3.1	Inversão atômica para o campo em um estado (a) coerente, (b) coerente comprimido, (c) vácuo comprimido	41
3.2	Distribuição de fons para o estado coerente comprimido par	45
3.3	Envelopes das distribuições de fons para o estado coerente comprimido par	46
3.4	Inversão atômica para o campo inicialmente em um ECCP para três valores do parâmetro de compressão	47
3.5	Vista expandida da inversão atômica para o ECCP mostrada na Fig.(3.4)	49

3.6	Inversão atômica para o campo inicialmente em um estado de fase	51
4.1	Esquema para a interação de um único modo do campo com um átomo de dois níveis	57
4.2	Distribuição de momento, $W(\varphi)$, para o estado de vácuo comprimido em comparação com as superposições $ C_m + C_{m-2} ^2(\varphi \geq 0)$ e $ C_m - C_{m-2} ^2(\varphi < 0)$	62
4.3	Distribuição de momento $W(\varphi)$ para o estado de vácuo comprimido (a) $W(\varphi)$ total, (b) $W_+(\varphi)$, (c) $W_-(\varphi)$ e (d) $W(\varphi = 0)$	63
4.4	Distribuição de momento $W'(\varphi)$ para a interação de um fóton para: (a) o estado coerente, (b) o estado de vácuo comprimido	67
4.5	Linhas de contorno da função Q para o estado coerente calculada com os coeficientes obtidos pela distribuição de momento dos átomos espalhados . .	71
4.6	Linhas de contorno da função Q para o estado de vácuo comprimido calculada com os coeficientes obtidos pela distribuição de momento dos átomos espalhados	72

Resumo

Fazendo uso da equivalência entre um potencial não-local e um potencial dependente da velocidade, mostramos como construir um potencial não-local capaz de gerar estados comprimidos. No contexto do modelo de Jaynes-Cummings que descreve a interação quântica de um único átomo de dois níveis com um único modo do campo eletromagnético quantizado, mostrando uma nova característica no comportamento dinâmico da inversão atômica, quando o campo é preparado em um estado coerente comprimido par. Usando o modelo de Jaynes-Cummings propomos um método para estudar o estado quântico e a variância do operador de fase, através da medida da distribuição de momento de átomos espalhados, proveniente da interação de um feixe atômico com um único modo do campo eletromagnético via interação de dois ftons.

Abstract

Exploring the equivalence between a nonlocal and a velocity-dependent potential we show how to construct a nonlocal potential which is able to generate squeezed states. In the context of the Jaynes-Cummings model we describe the quantum interaction of a single two-level atom with a single mode of a quantum electromagnetic field, showing a new feature in the dynamical behavior of atomic inversion when the electromagnetic field is prepared in an even squeezed coherent state. By using the Jaynes-Cummings model, a method to study quantum state and variance of the phase operator is proposed. The method consists in measuring the momentum distribution of atoms resulting from the interaction of a prepared atomic beam with a single mode electromagnetic field via two-photon interaction.

Capítulo 1

Introdução

A natureza dual da luz é um conceito muito bem estabelecido desde a demonstração do efeito fotoelétrico por Einstein em 1905 e suportada pela famosa experiência de Young. Por outro lado, até 1920 a natureza puramente corpuscular da matéria parecia ser bem definida. A medida da razão entre a carga e a massa e/m do elétron por J.J. Thomson em 1897 e o experimento da gota líquida de Millikan em 1909, firmavam fortemente o elétron como uma partícula com carga e massa. Somente em 1924 é que a dualidade onda partícula da matéria foi apresentada por de Broglie, e verificada experimentalmente por Davisson e Germer em 1927 [1], quando eles observaram na difração de elétrons por um cristal de níquel, características ondulatórias do elétron.

Em 1933 Kapitza e Dirac [2] propuseram um experimento para espalhar elétrons por uma onda estacionária. Eles desenvolveram um formalismo para a probabilidade do elétron ser defletido após interagir com uma onda estacionária de luz. Somente depois da invenção

do laser em 1960, experiências do tipo proposto por Kapitza e Dirac puderam ser realizadas. Apesar das várias dificuldades que este tipo de experiência apresenta, após várias tentativas obteve-se indicações de reflexão de elétrons por luz [3].

Por outro lado, baseados na proposta de Kapitza e Dirac, questionou-se que a reflexão por ondas estacionárias não seria restrita a elétrons, mas poderia ocorrer para todas as partículas capazes de espalhar ftons, inclusive átomos neutros [4]. Vários trabalhos foram publicados demonstrando a deflexão de um feixe atômico, dentre os quais podemos citar o trabalho de Gould, Ruff e Pritchard [5], que investigaram a interação adiabática de átomos de sódio com um campo não ressonante, observando assim efeitos interferométricos de átomos neutros [6].

A partir daí, estimulada por novos desenvolvimentos em resfriamento por ação laser e manipulação de átomos neutros, a interferometria atômica tornou-se um campo atrativo de pesquisa em física. A manipulação de átomos, em analogia à manipulação de luz, requer os análogos atômicos dos elementos ópticos, tais como divisores de feixes atômicos, capazes de separar a função de onda de um único átomo numa superposição macroscópica de estados que correspondem a dois pacotes de onda se propagando em direções diferentes do espaço, e espelhos atômicos, que defletem estes pacotes de onda tal que a onda original viajando ao longo dos dois caminhos do interferômetro possa sofrer interferência. Com a viabilização destes instrumentos atômicos, tornou-se possível construir um interferômetro atômico, o qual é da ordem de 10^{10} vezes mais sensível do que um interferômetro óptico (considerando geometrias similares), podendo ser fundamental para experimentos que necessitam de alta

precisão.

Recentemente, vários trabalhos têm cogitado a possibilidade de se obter informação sobre o campo, fazendo-o interagir com átomos [ver capítulo 4]. É que pode-se mostrar teoricamente, que a deflexão atômica por um campo quântico ressonante depende da estatística de ftons do campo, permitindo extrair informações do campo através das variáveis atômicas.

Classicamente, a radiação luminosa é tratada como uma onda que possui fase e amplitude bem determinadas. Uma teoria quântica da luz, onde o campo eletromagnético interagindo com um sistema atômico é tratado do ponto de vista quântico, veio com Dirac em 1927. Inicialmente, foi questionada a necessidade da quantização do campo, visto que a teoria de vários fenômenos envolvendo luz tais como interferência, difração e a geração da luz eram bem entendidos com a física semi-clássica. Entretanto, com os trabalhos pioneiros de Glauber [7] e Sudarshan [8], tornou-se claro que alguns estados da luz não poderiam ser descritos em termos da física clássica, assim também como a análise da geração de tais estados não poderia ser feita semi-classicamente. O primeiro fenômeno puramente quântico predito pela teoria quântica da luz [9] e detectado, foi o fóton “antibunching”. Kimble, Dagenais e Mandel [10] mediram a correlação da flutuação da intensidade de dois campos distintos, mostrando a desagregação apresentada pelos ftons [lembrando o comportamento fermiônico], e a quase zero probabilidade de detecção simultânea de dois ou mais ftons.

A óptica quântica preocupa-se com o estudo de problemas relativos à luz sem análogo clássico. Alguns dos vários problemas relacionados a ela são: definição e estudo de pro-

priedades de novos campos quânticos da luz, produção de novos estados, ruído quântico e as implicações dos aspectos quânticos destes campos. Devido ao caráter quântico destes campos, torna-se necessário desenvolver novas ferramentas teóricas e experimentais, assim como também métodos de análise, resultando algumas vezes em descobertas puramente matemáticas ou experimentais, as quais são úteis para outras áreas da física, tais como gravitação, física matemática, computação, teoria de medidas, etc.

Nos últimos anos houve um grande interesse em se produzir novos estados não clássicos da luz. O estado comprimido é um exemplo, e a grande atenção que vem sendo dada a este estado vem do fato de que a flutuação em uma das variáveis canonicamente conjugadas do campo neste estado é menor que a correspondente flutuação do estado coerente, considerada anteriormente o limite quântico mínimo. Motivados pelo progresso experimental em se produzir estes estados e pela recente descoberta de um operador de fase Hermitiano que permite a investigação de propriedades de fase do campo, ao contrário do que se pensava até há algum tempo atrás, neste trabalho nós propomos um método para determinar o estado quântico do campo e a variância do operador de fase.

Este método consiste em fazer átomos de dois níveis interagirem com um modo do campo ressonante. Ao interagir com o campo, os átomos são defletidos, fornecendo informação sobre o estado do campo. O modelo que descreve a interação ressonante entre o átomo e o campo é o modelo tradicional de Jaynes-Cummings [11], que trata o átomo e o campo sob o ponto de vista totalmente quântico.

Assim, apresentaremos este trabalho da seguinte forma: no capítulo 2, faremos uma

breve revisão sobre a quantização do campo eletromagnético, e sobre alguns estados definidos dentro desse formalismo, assim como do formalismo do operador de fase Hermitiano que pode descrever propriedades físicas do campo. Por fim, apresentaremos um método diferente de se obter estados comprimidos, através de potenciais não-locais.

No capítulo 3, discutiremos o modelo de Jaynes-Cummings que descreve a interação ressonante de um único modo do campo com um átomo de dois níveis, ambos tratados quanticamente. Mostraremos uma nova característica na inversão atômica, com o campo inicialmente em um estado coerente comprimido par e em um estado de fase.

No capítulo 4, mostraremos um método para obter informação completa sobre um campo quântico em uma cavidade e sobre sua fase. O método usa o modelo de Jaynes-Cummings para a interação ressonante átomo-campo.

Finalmente, no capítulo 5 apresentaremos os comentários e conclusões.

Capítulo 2

Estados Comprimidos do Campo da Radiação e o Potencial Não - Local

Um dos mais recentes estados do campo eletromagnético, descoberto teoricamente na década de 70 [12], é denominado estado comprimido. Este estado caracteriza-se pelo fato de possuir a flutuação em uma das variáveis canonicamente conjugadas do campo, menor que a correspondente flutuação do estado coerente, sem a violação do princípio de incerteza, desde que a compressão em uma das variáveis conjugadas tenha como consequência uma expansão na outra. Sua geração dá-se através de processos não lineares sensíveis à fase, pela interação de dois ftons e por isso, eles são também conhecidos como estados coerentes de dois ftons [13].

Sua preparação experimental foi primeiramente obtida em 1985 por Slusher et al. [14], que geraram e detectaram, usando mistura de quatro ondas em cavidade óptica, radiação

com níveis de ruído inferiores ao ruído do estado coerente.

A partir daí, uma série de novos experimentos e aplicações usando luz comprimida foram imaginados. Exemplo disso é a proposta de desenvolvimento de detectores de baixo ruído, para a detecção de ondas gravitacionais [15].

Se nos últimos anos, a óptica quântica teve um fantástico desenvolvimento, propiciado sem dúvida pela invenção do laser em 1960, os experimentos usando luz comprimida representam um passo à frente, seja no refinamento de técnicas de detecção e transmissão de sinais de baixo ruído, como nos desdobramentos teóricos que surgiram a partir destas experiências [16].

Devido à grande aplicabilidade dos estados comprimidos, é grande o interesse em sistemas físicos que possam gerar este tipo de efeito. Baseado nos potenciais não-locais, propomos um método diferente de se obter estados comprimidos. Os potenciais não-locais foram introduzidos na literatura por volta de 1930 por Wataghin. Tendo sido adequados para explicar várias situações físicas eles encontraram aplicações em vários campos tais como na física nuclear, física atômica, etc. Aqui nos interessaremos em rever o problema de potenciais não-locais com uma motivação diferente: olharemos para tal modelo de potencial como sendo capaz de gerar estados comprimidos. Explorando a equivalência entre um potencial não-local e um potencial dependente da velocidade, mostraremos como construir um potencial não-local capaz gerar estados comprimidos [17].

Neste capítulo revisaremos brevemente a quantização do campo eletromagnético, introduzindo alguns estados quânticos dentro deste formalismo. Iniciaremos pelo estado de

número, que é o estado que tem um número definido de ftons no campo. Outros estados envolvem a superposição dos estados de número. Em seguida daremos uma nova abordagem para a geração de estados comprimidos. Mostraremos como construir um potencial não-local que é capaz de gerar estados comprimidos.

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

A quantização do campo é feita através da associação de cada modo de oscilação destes campos a um oscilador harmônico quantizado, o número de ftons do modo associando-se ao nível de excitação do oscilador. Um modo do operador do campo eletromagnético, em termos de suas duas partes de frequência, positiva e negativa, pode ser escrito como

$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \left[\hat{a} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \hat{a}^\dagger e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right], \quad (2.1)$$

onde E_0 é uma constante e $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de criação e aniquilação de ftons, que satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.2)$$

É útil decompor o campo elétrico em termos de suas quadraturas $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$, definidas como

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.3)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} i (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (2.4)$$

Estes operadores são Hermitianos e satisfazem a seguinte relação de comutação,

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i \quad (2.5)$$

a qual é obtida a partir da relação de comutação de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ [conf. Eq.(2.2)]. Se escrevermos o campo em termos deles encontramos

$$\hat{E} = E_0[\hat{X}_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{X}_2 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] . \quad (2.6)$$

O operador Hamiltoniano do campo é o de um oscilador harmônico, dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2 \right) = \frac{1}{2} \hbar\omega \left(\hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 \right) , \quad (2.7)$$

e cada modo de oscilação é descrito por um vetor estado $|\psi\rangle$ do espaço de Hilbert.

2.2 Estados do Campo

Nos últimos anos, a geração e produção de novos estados quânticos da luz tem constituído assunto de extremo interesse tanto pela sua aplicabilidade tecnológica como pelos desdobramentos teóricos que surgem a partir das propriedades destes novos estados.

O mais exótico conjunto de estados do campo eletromagnético são os estados comprimidos. Estes estados se caracterizam por possuírem o ruído em uma das quadraturas do campo menor que o ruído do estado coerente. Antes de introduzirmos as propriedades básicas dos estados comprimidos, definiremos inicialmente o estado de número de fons que, embora até hoje tenha sido usado apenas como uma ferramenta matemática, tudo leva a crer, serão criados em laboratório num futuro próximo. Definiremos em seguida os estados coerentes, que têm um significado prático na óptica quântica, uma vez que um laser operando bem acima do limiar pode ser descrito por um estado coerente[7].

2.2.1 Estado de Número

Os estados de número de ftons, também conhecidos como estados de Fock, são estados com um número bem definido de ftons no campo. Eles formam uma base completa para o espaço de estados do campo. Suas relações de completeza e de ortogonalidade são dadas respectivamente por

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{1} \quad (2.8)$$

$$\langle n | m \rangle = \delta_{n,m} . \quad (2.9)$$

Os operadores de criação e aniquilação ($\hat{a}^\dagger, \hat{a}$) atuando neste estado fazem as seguintes transformações

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (2.10)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.11)$$

$$\hat{a} |0\rangle = 0 . \quad (2.12)$$

O operador número, $\hat{n}$, é definido por

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} . \quad (2.13)$$

Pelas Eqs.(2.10) e (2.11), é fácil ver que

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle . \quad (2.14)$$

Uma inspeção da equação (2.7) mostra que $|n\rangle$ é auto-estado do Hamiltoniano do campo,

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle , \quad (2.15)$$

com energia $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

Um resultado útil é obtido usando a Eq.(2.10) e aplicando o operador $\hat{a}^\dagger$ ao vácuo n vezes. Fazendo isto, gera-se o estado $|n\rangle$ dado por

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle}{\sqrt{n!}}. \quad (2.16)$$

Na linguagem do campo eletromagnético quantizado, a probabilidade de encontrar n ftons em um estado genérico $|\psi\rangle$ é dada por

$$P = |\langle n|\psi\rangle|^2. \quad (2.17)$$

Para um estado de número $|m\rangle$, devido à ortogonalidade destes estados, esta distribuição é dado por

$$P_m = \delta_{m,n}, \quad (2.18)$$

ou seja, tem um número de ftons bem determinado.

Embora o estado de número seja extremamente difícil de ser criado experimentalmente, campos contendo um número muito pequeno de ftons já foram criados [18]. Isto representa um grande avanço para experimentos atualmente em andamento, no qual um dos objetivos é a produção do estado de número [19].

A variável canonicamente conjugada ao operador número é o operador fase. O princípio de incerteza impõe que esta seja totalmente indeterminada no caso de determinação do número. Mas, por outro lado, podem existir situações em que o interesse seja justamente ter uma fase bem definida. Neste sentido, existem propostas para preparar estados com a fase o mais bem definida possível, utilizando um esquema experimental semelhante ao que é utilizado para preparar os estados de número [20].

2.2.2 Estados Coerentes

Os estados coerentes tornaram-se populares a partir de 1963, com Glauber [7], por serem úteis para descrever o campo de radiação. É que a radiação num laser operando bem acima do limiar pode ser descrita por um estado coerente. Além disso, por possuírem um número de fons indefinidos e, por isso, uma fase razoavelmente definida (ao contrário do estado de número onde a fase é completamente indefinida) eles são conhecidos como estados quase-clássicos.

O estado coerente é definido como auto-estado do operador de aniquilação [7]

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.19)$$

Como $\hat{a}$ não é Hermitiano, o auto-valor α é um número complexo, $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$.

Ele pode ser gerado pelo deslocamento do vácuo,

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.20)$$

onde o operador de deslocamento de Glauber é dado por [7]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (2.21)$$

Este operador é unitário,

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = 1, \quad (2.22)$$

e produz as seguintes transformações

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (2.23)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^* . \quad (2.24)$$

Usando a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff [21]

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \quad (2.25)$$

$|\alpha\rangle$ pode ser escrito como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot e^{-\alpha^* \hat{a}} \cdot e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle . \quad (2.26)$$

Pelas Eqs.(2.12) e (2.16) podemos ver que a expansão de um estado coerente em termos de uma base de número é dada por

$$|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle , \quad (2.27)$$

onde

$$C_m = \langle m|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \quad (2.28)$$

é o coeficiente de Fourier da expansão, dando a transformação da representação de estado de número para o estado coerente.

Estados coerentes distintos não são ortogonais. É fácil verificar a partir da Eq.(2.26), que

$$\langle \beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2) + \beta^* \alpha} \quad (2.29)$$

de onde obtemos

$$|\langle \beta|\alpha\rangle|^2 = e^{-(|\beta - \alpha|^2)} . \quad (2.30)$$

Os estados coerentes formam uma base completa, a relação de completeza sendo dada por [21]

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha = \hat{1} . \quad (2.31)$$

O número médio e a variância do número de ftons em um estado coerente são iguais e dados por

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.32)$$

A distribuição de número de ftons do estado coerente é uma distribuição Poissoniana, dada por

$$P_m = |\langle \hat{n} | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!}. \quad (2.33)$$

As propriedades estatísticas de um estado qualquer podem ser dadas pelo parâmetro Q , de Mandel, definido em termos da variância e do número médio de ftons calculados neste estado como,

$$Q \equiv \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle}. \quad (2.34)$$

Por esta definição, podemos estabelecer a seguinte classificação para a estatística do campo:

$$Q < 0 \ (\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle) \implies \text{Estatística Sub-Poissoniana}$$

$$Q = 0 \ (\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle) \implies \text{Estatística Poissoniana}$$

$$Q > 0 \ (\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle > \langle \hat{n} \rangle) \implies \text{Estatística Super-Poissoniana}$$

De acordo com esta definição, o estado de número, com $Q = -1$, é o estado mais sub-poissoniano possível.

Com a ajuda das Eqs.(2.9),(2.10) e (2.11) é fácil ver que o valor esperado do campo (assim como das quadraturas) dado pela Eq.(2.6), quando calculado em um estado de número é zero, a energia está nas flutuações de suas quadraturas $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$. Definindo a variância de $\hat{X}_i$ em termos de $\langle \hat{X}_i \rangle$ e $\langle \hat{X}_i^2 \rangle$ como,

$$\Delta \hat{X}_i^2 = \langle \hat{X}_i^2 \rangle - \langle \hat{X}_i \rangle^2, \quad (2.35)$$

podemos calcular, para o estado de número, as variâncias nas quadraturas, definidas pela Eq.(2.35), onde encontramos

$$\Delta \hat{X}_1^2 = \Delta \hat{X}_2^2 = (n/2 + 1/4) . \quad (2.36)$$

Um caso particular é o estado com mais baixo auto-valor ($n = 0$), o estado fundamental, conhecido como estado de vácuo. As variâncias nas quadraturas calculadas no estado de vácuo são dadas por

$$\Delta \hat{X}_1^2 = \Delta \hat{X}_2^2 = 1/4 , \quad (2.37)$$

que corresponde ao mesmo valor obtido quando calculadas em um estado coerente. Elas são iguais, independentes de α , e seu produto

$$\Delta \hat{X}_1^2 \cdot \Delta \hat{X}_2^2 = 1/16 . \quad (2.38)$$

é o menor valor permitido pelo princípio da incerteza. Assim, podemos ver que o estado de vácuo é um caso particular do estado coerente. Por possuírem a menor variância nas quadraturas do campo permitida pelo princípio da incerteza e uma fase relativamente bem definida, os estados coerentes são os estados quânticos mais próximos da descrição clássica do campo.

2.2.3 Estados Comprimidos

Dentro do formalismo do campo eletromagnético quantizado, além dos estados com número de fons bem definidos e os estados quase-clássicos, como os estados coerentes,

surgem estados puramente quânticos, como os estados comprimidos. Estes estados foram descobertos teoricamente na década de 70 por Stoler [12], quando este pesquisava estados de incerteza mínima, e caracterizam-se pelo fato de possuírem o ruído em uma das variáveis canonicamente conjugada menor que o ruído correspondente de um estado coerente. Como consequência do princípio de incerteza, o ruído na outra variável é amplificado.

Dado que número-fase e as quadraturas $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$ são dois conjuntos de operadores canonicamente conjugados do campo eletromagnético, surgem dois tipos de estados comprimidos, relativos a estas variáveis: o estado comprimido de número-fase e o estado comprimido de quadratura, sobre os quais passaremos a nos interessar.

2.2.3.1 Estados Comprimidos de Quadratura

Assim como os estados coerentes, os estados comprimidos de quadratura também são estados de incerteza mínima [conf. Eq.(2.40)], sendo que o ruído quântico agora não é mais uniformemente distribuído nas suas duas quadraturas. Eles têm uma das quadraturas com um ruído menor que aquela de um estado coerente e, como consequência, o ruído na outra quadratura é aumentado. Sua preparação experimental foi primeiramente obtida em 1985 por Slusher et. al. [14], que geraram e detectaram, usando mistura de quatro ondas em cavidade óptica, níveis de ruído inferiores ao ruído de vácuo.

Um estado comprimido genérico é definido como,

$$|\psi_c\rangle \equiv \hat{S}(z) |\psi_i\rangle, \quad (2.39)$$

onde $\hat{S}(z)$ é um operador de evolução unitário, definido como operador de compressão,

$$\hat{S}(z) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (2.40)$$

sendo $\hat{H}$ o Hamiltoniano de interação que gera a compressão.

A geração de estados comprimidos de quadratura dá-se através de processos não lineares, pela interação de dois ftons [13], envolvendo Hamiltonianos quadráticos nos operadores de criação e aniquilação ($\hat{a}^\dagger, \hat{a}$). Um estado comprimido de quadratura ideal, satisfazendo $\Delta\hat{X}_1 \Delta\hat{X}_2 = 1/16$, com $\Delta\hat{X}_1$ ou $\Delta\hat{X}_2$ menor que $1/4$, pode ser gerado por um meio não-linear descrito pelo Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \hbar \kappa [\hat{X}_1, \hat{X}_2]_+, \quad (2.41)$$

onde a simetrização garante a Hermiticidade de $\hat{H}$ e κ é uma constante.

Em particular, o estado coerente comprimido é definido como

$$|\alpha, z\rangle = \hat{S}(z)|\alpha\rangle = \hat{S}(z) \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.42)$$

onde $\hat{D}(\alpha)$ é dado pela Eq.(2.25) e o operador de compressão $\hat{S}(z)$ é dado por [13]

$$\hat{S}(z) = e^{\frac{1}{2}(z^* \hat{a}^2 - z \hat{a}^{\dagger 2})}, \quad (2.43)$$

onde z é o parâmetro de compressão, um número complexo, $z = re^{i\theta}$. $\hat{S}(z)$ é unitário,

$$\hat{S}(z) \hat{S}^\dagger(z) = \hat{S}^\dagger(z) \hat{S}(z) = 1, \quad (2.44)$$

e produz as seguintes transformações [13]

$$\hat{b} = \hat{S}^\dagger(z) \hat{a} \hat{S}(z) = \mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger \quad (2.45)$$

$$\hat{b}^\dagger = \hat{S}^\dagger(z) \hat{a}^\dagger \hat{S}(z) = \mu \hat{a}^\dagger - \nu^* \hat{a}, \quad (2.46)$$

onde

$$\mu = \cosh(r), \quad \nu = e^{i\theta} \sinh(r) \quad (2.47)$$

Na representação de Heisenberg, o operador $\hat{a}$ evolui para o operador $\hat{b}$ pela transformação unitária dada pela Eq.(2.45). Assim, os estados coerentes comprimidos são auto-estados do operador $\hat{b}$,

$$\hat{b}|\alpha, z\rangle = \beta|\alpha, z\rangle \quad (2.48)$$

onde

$$\beta = \alpha \nu + \alpha^* \mu. \quad (2.49)$$

Podemos expandir um estado coerente comprimido numa base de número,

$$|\alpha, z\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle, \quad (2.50)$$

onde os coeficientes da expansão, C_m , neste caso são dados por [13]

$$C_m = \langle m|\alpha, z\rangle = (m!\mu)^{-1/2} \cdot (\nu/2\mu)^{m/2} \cdot H_m [\beta(2\mu\nu)^{-1/2}] \\ \times e^{[-\frac{1}{2}|\beta|^2 + (\frac{\nu^*}{2\mu})\beta^2]}, \quad (2.51)$$

com μ e ν dados pela Eq.(2.47) e β pela Eq.(2.49). $H_m[\beta(2\mu\nu)^{-1/2}]$ são os polinômios de Hermite.

Com a ajuda das Eqs.(2.42), (2.45), (2.47) e (2.19) podemos calcular o número médio de ftons e a variância do número de ftons em um estado coerente comprimido:

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2(r), \quad (2.52)$$

$$\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = |\alpha|^2 \left[(e^{-2r} \cos^2 \left(\varphi - \frac{\theta}{2} \right) + e^{2r} \sin^2 \left(\varphi - \frac{\theta}{2} \right)) \right] + 2 \sinh^2(r) \cosh^2(r). \quad (2.53)$$

Como podemos ver, o estado coerente comprimido depende de três parâmetros: r , θ e φ . O parâmetro r nos dá a magnitude de compressão e os parâmetros φ e θ , que são relacionados com os operadores de deslocamento e de compressão respectivamente, nos dá a direção de compressão. Juntos, eles definem a estatística de ftons, que pelas Eqs.(2.52),(2.53) e (2.34), podemos ver que a distribuição de número de ftons do estado coerente comprimido, dada por

$$P_m = |\langle n | \hat{S}(z) | \alpha \rangle|^2 = (m! \mu)^{-1} \cdot (\nu/2\mu)^m \cdot \left| H_m \left[\beta(2\mu\nu)^{-1/2} \right] \right|^2 \times e^{[-|\beta|^2 + \frac{\nu^*}{2\mu} \beta^2 + \frac{\nu}{2\mu} \beta^{*2}]}, \quad (2.54)$$

pode ser super-Poissoniana, Poissoniana ou sub-Poissoniana, dependendo dos parâmetros r , θ e φ .

Na Fig.(2.1), mostramos a distribuição de número de ftons, P_m , de um estado coerente comprimido para $\theta = \varphi = 0$ e três valores diferentes do parâmetro de compressão r . Neste caso, para os parâmetros de compressão $r = 0.5$, $r = 0$ e $r = -0.5$, P_m é super-Poissoniana, Poissoniana ou sub-Poissoniana, respectivamente. Como podemos ver na Fig.(2.1), a estatística sub-Poissoniana(super-Poissoniana) apresenta uma largura menor(maior) do que a estatística Poissoniana.

Figura 2.1: Distribuição de número de ftons para um estado coerente comprimido $|\alpha, z\rangle$ para o parâmetro de deslocamento $|\alpha| = 7$ e parâmetro de compressão real $z = r = \pm 0.5$, comparada com o estado coerente ($r = 0$)

As Variâncias das quadraturas definidas na Eq.(2.35) quando calculadas em um estado coerente comprimido, são dadas por

$$\Delta \hat{X}_1^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-2r} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{2r} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (2.55)$$

$$\Delta \hat{X}_2^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-2r} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{2r} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (2.56)$$

Como podemos ver pelas Eqs.(2.55) e (2.56), as variâncias dependem de dois parâmetros,

r e θ . Se $r > 0$ ($\theta = 0$), há uma compressão na quadratura $\hat{X}_1$ e uma correspondente descompressão na quadratura $\hat{X}_2$. Se $r < 0$ ($\theta = 0$), o inverso ocorre. É importante notar que, qualquer que seja o sinal do parâmetro de compressão r , uma das quadraturas terá a variância reduzida em relação à variância do estado coerente, obtida quando $r = 0$.

Um caso particular é o estado de vácuo comprimido, $|0, z\rangle = \hat{S}(r)|0\rangle$. Os coeficientes da expansão em uma base de número para este estado são obtidos fazendo $\alpha = 0$ na Eq.(2.51),

$$C_m = (m!\mu)^{-1/2} (\nu/2\mu)^{n/2} H_m(0). \quad (2.57)$$

Como pode ser visto pela função geradora dos polinômios de Hermite de argumento zero,

$$H_{2m+1}(0) = 0, \quad (2.58)$$

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}, \quad (2.59)$$

a distribuição de número de ftons do estado de vácuo comprimido, dada por,

$$P_m = (m!\mu)^{-1} (\nu/2\mu)^m H_m^2(0), \quad (2.60)$$

tem um caráter oscilatório. Ela é zero para todos os valores ímpares do número de ftons, conforme mostramos na Fig.(2.2). Além disso é super-Poissoniana.

Figura 2.2: Distribuição de número de ftons para o estado de vácuo comprimido com parâmetro de compressão (real) $r = 2.0$

O estado coerente também é um caso particular do estado coerente comprimido. Para $\mu = 1$ e $\nu = 0$, a forma assintótica dos polinômios de Hermite levam a Eq.(2.54) na Eq.(2.33), conforme mostramos no apêndice A.

2.2.3.2 Estados Comprimidos de Número-Fase

Além dos estados comprimidos de quadratura, outros estados quânticos têm sido preditos. Trata-se dos estados comprimidos de número-fase, que se caracterizam pela compressão na variância do número ou da fase. Estes estados podem ser confundidos com os estados comprimidos de quadratura, dado que estes também podem eventualmente apresen-

tar uma compressão na variância do número de ftons, como se pode ver pela Eq.(2.55).

Uma das diferenças que se apresenta entre os dois tipos de estado comprimido é que a variância do número de ftons em um estado comprimido de quadratura não pode ser reduzida abaixo de $\langle \hat{n} \rangle^{2/3}$ [22].

Ao contrário do estado comprimido de quadratura, pouca atenção foi dada ao estado comprimido de número-fase. Sua preparação experimental é mais complicada devido à dificuldade de se definir, sem ambigüidade, um operador de fase, $\hat{\phi}$, variável conjugada ao operador Hermitiano de número de ftons, $\hat{n}$. A dificuldade vem do fato de que pela tradicional relação de comutação entre número e fase

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] = i, \quad (2.61)$$

este estado não poderia ser descrito dentro do formalismo da mecânica quântica, visto que os elementos de matriz de $\hat{\phi}$ calculados em uma base de estado de número são indefinidos

$$(n - n') \langle n | \hat{\phi} | n' \rangle = i \delta_{nn'}. \quad (2.62)$$

Susskind e Glogower [SG] foram os primeiros a definir um operador de fase que pudesse ser descrito dentro do formalismo da Mecânica Quântica. Definindo os operadores de criação e aniquilação em uma decomposição polar dos operadores de número e fase, o operador de fase de SG pode ser escrito como [23],

$$\widehat{e^{i\phi}}_{SG} = \hat{a} \hat{n}^{-1/2} \quad (2.63)$$

$$\widehat{e^{-i\phi}}_{SG} = \hat{n}^{-1/2} \hat{a}^\dagger. \quad (2.64)$$

As propriedades deste operador são obtidas quando consideramos sua ação no estado de número $|n\rangle$. Pelas Eqs.(2.10) e (2.11) e a relação

$$f(\hat{n})|n\rangle = f(n)|n\rangle, \quad (2.65)$$

é fácil ver que

$$\widehat{e^{i\phi}}_{SG} |n\rangle = |n-1\rangle \quad (2.66)$$

e

$$\widehat{e^{-i\phi}}_{SG} |n\rangle = |n+1\rangle, \quad (2.67)$$

de onde podemos ver que os operadores $\widehat{e^{i\phi}}_{SG}$ e $\widehat{e^{-i\phi}}_{SG}$, são os próprios operadores de levantamento e abaixamento.

Usando as Eqs.(2.8) e (2.65), é fácil ver que as Eqs.(2.63) e (2.64) podem ser escritas como

$$\widehat{e^{i\phi}}_{SG} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|, \quad (2.68)$$

$$\widehat{e^{-i\phi}}_{SG} = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|. \quad (2.69)$$

Pelas Eqs.(2.68) e (2.69), podemos ver que o operador de fase de SG, $\widehat{e^{i\phi}}$ não satisfaz a condição de unitariedade exigida para um operador físico, $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$:

$$\widehat{e^{i\phi}}_{SG} \cdot \widehat{e^{-i\phi}}_{SG} = \sum_{n,n'} |n\rangle\langle n+1|n'+1\rangle\langle n'| = 1, \quad (2.70)$$

enquanto que

$$\widehat{e^{-i\phi}}_{SG} \cdot \widehat{e^{i\phi}}_{SG} = \sum_{n,n'} |n+1\rangle\langle n|n'\rangle\langle n'+1| = 1 - |0\rangle\langle 0|. \quad (2.71)$$

Entretanto, desde que se possa desprezar o estado de vácuo em uma determinada situação física, $\widehat{e^{i\phi}}_{SG}$ passa a ser unitário,

$$\widehat{e^{i\phi}}_{GS} \cdot \widehat{e^{-i\phi}}_{SG} = \widehat{e^{-i\phi}}_{SG} \cdot \widehat{e^{i\phi}}_{SG} = 1. \quad (2.72)$$

Embora $\widehat{e^{i\phi}}_{SG}$ e $\widehat{e^{-i\phi}}_{SG}$ não sejam Hermitianos e portanto não possam representar grandezas físicas do campo eletromagnético, eles podem ser combinados para gerar dois operadores [23],

$$\widehat{\cos \phi}_{SG} = \frac{1}{2} \left[\widehat{e^{i\phi}}_{SG} + \widehat{e^{-i\phi}}_{SG} \right] \quad (2.73)$$

e

$$\widehat{\sin \phi}_{SG} = \frac{1}{2i} \left[\widehat{e^{i\phi}}_{SG} - \widehat{e^{-i\phi}}_{SG} \right], \quad (2.74)$$

que são Hermitianos e portanto podem representar grandezas físicas do campo.

O trabalho de SG é de 1964 [23]. Mais recentemente, Pegg e Barnett [PB] construíram um formalismo para o operador de fase [24] que remove a dificuldade de um operador de fase Hermitiano mesmo considerando o estado de vácuo. PB propuseram um estado de fase $|\theta\rangle$, definido em um espaço de Hilbert de dimensão finita s , mas arbitrariamente grande, que pode ser expandido em uma base de número [24].

$$|\theta_m\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (2.75)$$

onde

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1} \quad (m = 1, 2, 3 \dots s). \quad (2.76)$$

A escolha de θ_0 é arbitrária e determina uma base ortogonal completa particular do espaço

finito s . O estado de fase é auto-estado do operador de fase de PB, $\widehat{e^{i\phi}}_{PB}$

$$\widehat{e^{i\phi}}_{PB}|\theta\rangle = e^{i\theta_m}|\theta\rangle, \quad (2.77)$$

Os estados de fase são estados que têm a fase completamente definida (e consequentemente uma energia média infinita). Portanto eles não são estados físicos no sentido que eles não podem ser preparados.

O estado de número pode ser expandido em uma base de estados de fase $|\theta_m\rangle$ como

$$|n\rangle = \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s e^{-in\theta_m} |\theta_m\rangle. \quad (2.78)$$

As propriedades do operador de fase de PB $\widehat{e^{i\phi}}_{PB}$, são obtidas quando consideramos a ação dele no estado de número $|n\rangle$. Pela Eq.(2.78), temos

$$\begin{aligned} \widehat{e^{i\phi}}_{PB}|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s e^{-in\theta_m} \cdot \widehat{e^{i\phi}}_{PB}|\theta_m\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s e^{-i(n-1)\theta_m} |\theta_m\rangle. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Pelas Eqs.(2.78) e (2.79) podemos ver que, para $n > 0$, o estado resultante é simplesmente

$$\widehat{e^{i\phi}}_{PB}|n\rangle = |n-1\rangle, \quad (2.80)$$

enquanto que para $n = 0$ obtém-se o estado $|-1\rangle$, que é indefinido, mas que pode ser identificado com o estado altamente excitado $|s\rangle$. Fazendo $n = 0$ na Eq.(2.79) obtemos

$$\widehat{e^{i\phi}}_{PB}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s e^{i\theta_m} |\theta_m\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i(s+1)\theta_0} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s e^{-is\theta_m} |\theta_m\rangle \\
&= e^{i(s+1)\theta_0} |s\rangle .
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Portanto, a representação em estado de número do operador de fase de PB é dada por

$$\widehat{e^{i\phi}}_{PB} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + \cdots |s-1\rangle\langle s| + e^{i(s+1)\theta_0} |s\rangle\langle 0| . \tag{2.82}$$

Assim, com a grande idéia de PB de calcular todos os valores esperados em uma base de dimensão finita e somente depois fazer o limite da dimensão do espaço tender a infinito, eles mostraram que é possível construir um operador de fase unitário [24],

$$\widehat{e^{i\phi}}_{PB} \cdot \widehat{e^{-i\phi}}_{PB} = \widehat{e^{-i\phi}}_{PB} \cdot \widehat{e^{i\phi}}_{PB} = 1 , \tag{2.83}$$

que pode ser descrito dentro do formalismo da mecânica quântica. Da mesma forma que o operador de fase de SG, o operador de fase de PB pode ser combinado para gerar dois operadores $\widehat{\sin\phi}$ e $\widehat{\cos\phi}$ Hermitianos que podem representar propriedades físicas do campo.

A descoberta de um operador de fase Hermitiano, permitiu a investigação de propriedades de fase do campo eletromagnético. Estas investigações têm sido em geral mais descritivas ou formais. Embora um estado com fase completamente definida não possa ser preparado, ainda podemos perguntar: para uma dada energia finita, que estado da luz tem a melhor definição possível na fase, ou seja, a menor variância na fase ?

Existem várias propostas de sistemas que geram estados comprimidos de número-fase, embora nenhum deles tenha sido ainda implementado experimentalmente. Entre eles podemos citar os trabalhos de Yamamoto [25] e Collett [26], que propõem interações que

geram estados comprimidos de número a fase a partir de um estado coerente inicial. No caso de Yamamoto, a interação é descrita pelo Hamiltoniano [25]

$$\hat{H}_I = \hbar\chi_{NL}(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2, \quad (2.84)$$

que é quártico nos operadores de criação e aniquilação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ e Collett propõe a interação descrita pelo Hamiltoniano [26]

$$\hat{H}_I = \hbar\chi_{NL}[\hat{n} - n_0, \widehat{\text{sen}\phi}]_+, \quad (2.85)$$

em analogia ao Hamiltoniano que gera estado comprimido de quadratura, dado pela Eq.(2.43).

Pelas Eqs.(2.13) e (2.74) podemos ver que o Hamiltoniano dado pela Eq.(2.85) é cúbico nos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, visto que para $n_0 \approx \alpha^2$ na Eq.(2.85) temos [26]

$$\begin{aligned} \widehat{\text{sen}\phi} &= \frac{1}{2i} (\hat{a}\hat{n}^{-1/2} - \hat{n}^{-1/2}\hat{a}^\dagger) \\ &\cong \frac{1}{2i\alpha} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.86)$$

O processo de geração de estado comprimido de número-fase é semelhante ao que descrevemos para a geração de estado comprimido de quadratura, só mudando o tipo de interação que sofre o estado inicial. A compressão pode ocorrer no número ou na fase, dependendo se o parâmetro de compressão é positivo ou negativo. No caso da compressão no número, a variância no número de ftons é menor que o limite para o estado comprimido de quadratura, que é $\langle \hat{n} \rangle^{2/3}$. Em particular, Yamamoto encontrou [25]

$$\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle^{1/3}. \quad (2.87)$$

O estado comprimido de quadratura eventualmente pode apresentar uma compressão no número de ftons. Por outro lado, podemos ter uma expansão na variância

do número de ftons para determinados valores do parâmetro de compressão, o que significaria uma compressão na fase. Na Fig.(2.3) mostramos a variância do número de ftons de um estado coerente comprimido para diferentes valores do parâmetro de compressão, onde se pode ver que os estados comprimidos de quadratura podem ser uma excelente aproximação para o estado de fase.

Figura 2.3: Variância do número de ftons para o estado coerente comprimido, em função do parâmetro de compressão r , para três valores diferentes do ângulo de compressão: $\varphi = 0$, $\pi/4$, π , em comparação com o estado coerente (com $\alpha = 5.0$)

2.3 Potenciais Não-Locais e os Estados Comprimidos

Nosso objetivo aqui é discutir uma nova forma de geração de estados comprimidos. Explorando a equivalência entre um potencial não-local e um potencial dependente da velocidade, mostraremos como construir um potencial não-local capaz de gerar o efeito de compressão [17].

Os potenciais não-locais foram introduzidos na literatura por Wataghin, o qual estendeu para a física as equações integro-diferenciais de Volterra. Tendo sido adequado para explicar vários problemas, eles encontraram aplicações em vários outros campos, tais como na física nuclear, física atômica, etc [29]. Devido ao seu sucesso em muitas situações físicas, eles foram até incluídos em livros textos [27].

Entretanto, desde o início de 1970 o uso de potenciais não-locais foi sendo discretamente abandonado na literatura, aparecendo apenas esporadicamente [28]. Nosso objetivo agora é rever o problema de potenciais não-locais com uma motivação diferente: queremos olhar para este modelo de potencial como sendo hábil para gerar estados comprimidos. Para mostrar a relação entre potencial não-local e estados comprimidos, vamos começar pela equação de Schrödinger (ES) independente do tempo para uma partícula,

$$\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x). \quad (2.88)$$

A ES escrita na Eq.(2.88), supõe que o potencial $V(x)$ é local, isto é, só depende de uma posição x , por isso ela é chamada ES local. Por outro lado, a ES

$$\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} V(x, x') \psi(x') dx', \quad (2.89)$$

é chamada ES não-local, representada pelo núcleo $V(x, x')$ que é o potencial não-local. Isto significa que a partícula no ponto x sofre a influência de posições vizinhas x' . Assim o potencial não-local $V(x, x')$ leva em conta uma espécie de média tomada em torno do ponto x , com uma extensão que pode variar dependendo da forma de $V(x, x')$, ou seja, do problema específico. A extensão desta vizinhança é usual chamar-se extensão de não-localizabilidade.

Entre os potenciais não-locais podemos citar os potenciais separáveis

$$V(x, x') = v_1(x) v_2(x') \quad (2.90)$$

e os potenciais dependentes da soma e diferença das coordenadas,

$$V(x, x') = V(x + x'; x - x'). \quad (2.91)$$

Considere a ES independente do tempo, com um potencial não-local, $V(x, x')$, conf. Eq.(2.89). Podemos decompor $V(x, x')$ em uma parte local $V_0(x)$, mais uma parte não-local $v(x, x')$,

$$V(x, x') = V_0(x) \delta(x' - x) + v(x, x'). \quad (2.92)$$

Substituindo a Eq.(2.92) na Eq.(2.89), obtemos a seguinte equação diferencial,

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi(x) = & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V_0(x) \psi(x) \right) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') \psi(x') dx'. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Note que se $V_0(x) = 0$ então $V(x, x')$ é essencialmente não-local e se $v(x, x') = 0$ então $V(x, x')$ é puramente local.

A seguir vamos calcular o segundo termo do lado direito da Eq.(2.93),

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') \psi(x') dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx'} dp \right) dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') e^{ip(x'-x)} dx' \right) dp \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) G(x, p) e^{ipx} dp,
\end{aligned} \tag{2.94}$$

onde

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x') e^{-ipx'} dx' \tag{2.95}$$

e

$$G(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') e^{ip(x'-x)} dx'. \tag{2.96}$$

Expandindo o potencial não-local em série de potência de p , em torno de $p = 0$,

$$G(x, p) = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n G(x, p)}{\partial p^n} \right)_{p=0} p^n, \tag{2.97}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx} dp \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') e^{ip(x'-x)} dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx} dp \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') dx' \\
&\quad + i \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) p e^{ipx} dp \int_{-\infty}^{\infty} (x - x') v(x, x') dx' \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) p^2 e^{ipx} dp \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^2 v(x, x') dx' + \dots,
\end{aligned} \tag{2.98}$$

ou

$$I \simeq \psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') dx' + \hat{p}\psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} v(x, x') dx' - \frac{1}{2}\hat{p}^2\psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} (x - x')v(x, x') dx'. \quad (2.99)$$

Agora escolheremos $v(x, x')$ na Eq.(2.99) de tal forma que as derivadas pares da expansão do potencial não-local seja nula. Isto ocorrerá sempre que $v(x, x')$ for uma função ímpar na variável $\zeta = x' - x$. Definimos $v(x, x') = 2\lambda u(x, x')$, onde λ é a amplitude de não-localidade e $u(x, x')$ é dada por

$$u(x, x') = N_{\sigma}(x' - x)e^{-\frac{(x' - x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.100)$$

sendo N_{σ} uma constante de normalização para a componente gaussiana e σ (a largura da Gaussiana) a extensão da não-localidade. A dependência Gaussiana foi escolhida como um exemplo devido ao seu freqüente aparecimento em vários problemas. Na Fig.(2.4) mostramos o gráfico da função(ímpar) $u(x, x')$.

Figura 2.4: Gráfico da função $u(x, x')$ dada pela Eq.(2.100) para $N_{\sigma} = (1/2\pi)^{1/2}$ e $\sigma = 1$.

A substituição da Eq.(2.100) na Eq.(2.99) resulta em

$$I \simeq 2\lambda\gamma\hat{x}\hat{p}\psi(x) = \lambda\gamma(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} + i\hbar)\psi(x), \quad (2.101)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)u(x, x')dx' \\ &= N_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^2 e^{-\frac{(x' - x)^2}{2\sigma^2}} dx'. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Escolhendo a parte local do potencial do tipo oscilador harmônico

$$V_0(x) = \frac{1}{2}kx^2 - i\hbar\lambda\gamma, \quad (2.103)$$

e substituindo as Eqs.(2.101) e (2.103) na Eq.(2.93) encontramos

$$\hat{H}\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 \right) \psi(x) + \lambda\gamma(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\psi(x), \quad (2.104)$$

onde λ pode ser dependente ou independente do tempo. Note que o primeiro termo do lado direito da Eq.(2.104) é a ES do oscilador harmônico. De fato, fazendo uma transformação canônica

$$\hat{a} = \alpha\hat{x} + i\beta\hat{p}, \quad \hat{a}^{\dagger} = \alpha\hat{x} - i\beta\hat{p}, \quad (2.105)$$

com $\alpha = \sqrt{m/2\hbar\omega}$, $\beta = \sqrt{1/2\hbar m\omega}$, podemos escrever a Eq.(2.104) na seguinte forma (com $\eta = \lambda\gamma\hbar\omega$),

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}) + i\eta(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2). \quad (2.106)$$

O Hamiltoniano dado pela Eq.(2.106) é constituído de duas partes, uma proveniente da parte local do potencial, $\hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$, e outra originada na parte não-local do potencial, $i\eta(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2)$. Este último termo do Hamiltoniano gera estado comprimido de quadratura, conf. Eq.(2.41), onde η é proporcional ao parâmetro de compressão. O sinal de η na Eq.(2.106) determina qual das duas quadraturas, $\hat{X}_1$ ou $\hat{X}_2$, será comprimida. Uma vez que $\eta \sim \lambda\gamma$, a amplitude e a extensão de não-localidade estão relacionadas à compressão. Além disso, como a compressão é devida a efeitos não-lineares, concluímos que nosso potencial não-local $v(x, x')$ é associado à presença de um meio não linear.

Observe que o nosso potencial não-local, ao contrário dos modelos comuns na literatura, não é nem separável ($v(x, x') \neq v_1(x) v_2(x')$), e nem função da soma e da diferença das coordenadas ($v(x, x') \neq v(x + x' ; x - x')$). Além disso, ele é Hermitiano $V(x, x') = V^*(x, x')$ o que assegura a conservação da probabilidade.

Baseados na expansão direta de um potencial não-local em série de potência no operador momento, $\hat{p}$, mostramos que ele pode gerar estados comprimidos. Portanto podemos dizer que certos sistemas que geram estados comprimidos de quadratura também podem ser descritos por um Hamiltoniano equivalente, com um potencial não-local, que constitui uma importante classe de potencial capaz gerar estados comprimidos. Isto permite criar novos sistemas onde estados comprimidos podem ser gerados, expandindo o domínio de estudos para este importante efeito quântico. É claro que uma investigação mais profunda da existência, ou não, de modelos alternativos de potenciais não-locais, assim como sistemas físicos que possam ser descritos por este tipo de potencial ainda carecem de investigação.

Capítulo 3

Interação da Matéria com um Campo Quântico: Inversão Atômica

Como os estados especiais do campo afetam a dinâmica da inversão atômica? para investigar este efeito utilizaremos o modelo de Jaynes-Cummings (JC) que é o modelo mais simples da ressonância óptica que descreve a interação de um único átomo de dois níveis interagindo com um único modo do campo, onde o átomo e o campo são tratados quanticamente [11]. O modelo foi usado pela primeira vez em 1963. Inicialmente motivado para examinar os aspectos clássicos da emissão espontânea e revelar a existência das oscilações de Rabi da inversão atômica para átomos que interagem com campos com energia (ou número de ftons) definida, o modelo acabou revelando propriedades estatísticas do campo não encontradas em campos clássicos.

Se o átomo interage com um campo que não tem um número de ftons definido,

mas se encontra em um estado puro com uma distribuição estatística de número de fótons, encontra-se que para determinadas condições iniciais a inversão atômica (oscilações de Rabi) evolue em um processo repetido de colapso e ressurreição. Esse é um dos vários efeitos não clássicos que o modelo de JC prediz. Muita atenção tem sido dada ao fenômeno de colapso e ressurreição das oscilações de Rabi, por que este efeito é uma evidência da natureza discreta da radiação.

Realizações experimentais do modelo de JC foram feitas usando átomos de Rydberg interagindo com um campo de radiação em cavidades de micro-ondas de alta qualidade [30], a chamada eletrodinâmica de cavidade, que é capaz de detectar o acoplamento de um único fóton com um átomo. Recentemente, observações do colapso e ressurreição das oscilações de Rabi foram verificadas [31].

Nos últimos anos um grande número de trabalhos têm explorado e generalizado o modelo de JC [32]. Dado que a resposta atômica depende das condições iniciais do átomo e do campo, isto abriu a possibilidade de muitas investigações. A grande atenção que vem sendo dada ao modelo em parte é devida ao descobrimento de um grande número de características importantes que o modelo revela, que ajudam a entender o comportamento quântico da interação átomo-campo. Outro fator que estimula o grande interesse no modelo é o significativo avanço experimental na eletrodinâmica de cavidade [30] que permite levar a teoria de uma curiosidade puramente acadêmica para algo prático.

Neste capítulo, estaremos interessados especificamente, na dinâmica da inversão atômica do modelo de JC. Inicialmente mostraremos como a inversão atômica depende da

estatística do campo, faremos uma breve revisão da dinâmica da inversão atômica já estudada para campos inicialmente nos estados coerente, coerente comprimido e vácuo comprimido. Depois, mostraremos uma nova característica no comportamento dinâmico da inversão atômica considerando o campo inicialmente em um estado coerente comprimido par [ECCP] (cuja distribuição de ftons é oscilatória), e em um estado de fase de PB. Comparando a inversão atômica para dois casos extremos, com o campo inicialmente em um estado de número e em um estado de fase, mostramos a origem física das oscilações e dos colapsos presentes na inversão atômica.

3.1 Inversão Atômica

O Hamiltoniano de JC para a interação ressonante de um modo do campo com um átomo de dois níveis na aproximação de onda girante é dado por [32]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+), \quad (3.1)$$

onde $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e destruição do campo, $\hat{\sigma}_\pm$ são os operadores de Pauli,

$$\sigma_- = |g\rangle\langle e| \quad \sigma_+ = |e\rangle\langle g| \quad \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (3.2)$$

que satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = 2\hat{\sigma}_z, \quad (3.3)$$

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm\hat{\sigma}_\pm, \quad (3.4)$$

e λ é uma constante de acoplamento do átomo com o campo. O Hamiltoniano dado na Eq.(3.1) considera uma troca balanceada de energia entre o átomo e o campo, de forma que a energia na cavidade permanece constante.

Se o átomo está inicialmente em um estado de número $|n\rangle$ e o átomo no estado excitado $|e\rangle$, o estado inicial do sistema é dado por

$$|i\rangle = |n\rangle|e\rangle. \quad (3.5)$$

A aproximação de onda girante acopla este estado somente ao estado $|f\rangle$,

$$|f\rangle = |n+1\rangle|g\rangle. \quad (3.6)$$

Assim, escrevendo a função de onda do sistema átomo campo como

$$\psi(t) = C_g(t)|i\rangle + C_e(t)|f\rangle, \quad (3.7)$$

e resolvendo a Equação de Schrödinger para este sistema acoplado,

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (3.8)$$

onde $\hat{H}$ e $\psi(t)$ são dados pela Eqs.(3.1) e (3.7) respectivamente, encontramos as equações de movimento para as amplitudes de probabilidade, dadas por

$$\dot{C}_g(t) = -i\lambda\sqrt{n+1} C_e(t) \quad (3.9)$$

$$\dot{C}_e(t) = -i\lambda\sqrt{n+1} C_g(t) . \quad (3.10)$$

Resolvendo as equações de movimento para $C_i(t)$ e $C_f(t)$ encontramos a probabilidade do átomo permanecer no estado excitado,

$$P_e(t) = |C_e(t)|^2 = \cos^2(\lambda t\sqrt{n+1}) , \quad (3.11)$$

e a probabilidade do átomo ficar no estado fundamental,

$$P_g(t) = |C_g(t)|^2 = \sin^2(\lambda t\sqrt{n+1}) . \quad (3.12)$$

A inversão atômica é dada pela diferença,

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t) = \cos(2\lambda t\sqrt{n+1}) . \quad (3.13)$$

Se a cavidade não se encontra em um estado de número (com energia definida), precisa-se fazer uma média sobre a distribuição de ftons na cavidade no tempo $t = 0$. Assim, a inversão atômica para um átomo que entra em uma cavidade contendo uma distribuição estatística de ftons P_m , no estado excitado é dada por

$$W(t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m \cos(2\lambda t\sqrt{n+1}) \quad (3.14)$$

A dinâmica da inversão atômica foi investigada por vários autores [32] considerando-se diferentes estatísticas de ftons. Encontra-se que dependendo de P_m , a soma na Eq.(3.14) faz com que a inversão atômica, $W(\lambda t)$ defase (ou colapse) e refase (ou ressuscite) as oscilações de Rabi. Esta ressurreição é uma consequência fundamental da natureza discreta da energia do campo luminoso. A Fig.(3.1) compara a inversão $W(\lambda t)$ para um átomo interagindo com campos nos estados coerente, coerente comprimido e vácuo comprimido.

Figura 3.1: Inversão atômica $W(\lambda t)$ para um átomo inicialmente no estado excitado interagindo com um campo em um estado (a) coerente (com parâmetro de coerência $\alpha = 5$), (b) coerente comprimido (com $\alpha = 5$ e parâmetro de compressão $r = 1$), (c) vácuo comprimido (com $r = 1$)

Comparando as Figs.(3.1a) e (3.1b) podemos ver que, enquanto para o estado coerente as subseqüentes ressurreições das oscilações de Rabi são mais indefinidas, superpondo-se de forma a criar uma evolução irregular no tempo, no estado coerente comprimido as subseqüentes ressuscitações são mais definidas, separadas de um colapso bem definido. Isto se deve ao fato de que a definição na fase deste estado é maior que no estado coerente, já que, como se pode ver pela Eq.(2.53), a variância do número de fons no estado coerente comprimido é maior que no estado coerente (para o parâmetro de compressão $z = r > 0$).

Por outro lado, o estado de vácuo comprimido, para qualquer valor do parâmetro de compressão, apresenta a variância do número de fons pequena, o que significa uma grande indefinição na fase. Assim, como se pode ver na Fig.(3.1a), a inversão atômica não apresenta ressurreição neste caso.

3.2 Inversão Atômica para o ECCP

Conforme mostramos no capítulo 2, vários estados da luz vêm sendo construídos a partir do estado coerente e do estado de número. Baseado no princípio da superposição linear, que é uma característica fundamental da mecânica quântica, recentemente muita atenção vem sendo dada à investigação de superposição de estados, que podem gerar efeitos não clássicos como compressão e estatística sub-Poissoniana. Estes efeitos dependem das fases relativas, assim como da magnitude das amplitudes complexas envolvidas na superposição dos estados. Por exemplo, Schleich e colaboradores [33] mostraram que a superposição de dois estados coerentes com fases diferentes resulta em um estado que pode exibir estatística

de fons sub-poissoniana e compressão. Wódkiewicz e colaboradores [34], superpondo dois estados de número, encontraram uma nova classe de estados que também podem exibir compressão e estatística sub-poissoniana, abrindo-se assim a possibilidade de novas formas de geração de estados comprimidos, pela implementação do princípio da superposição para estados quânticos do campo, paralelamente à geração de estados comprimidos através de processos não-lineares. Em particular, Yurke e Stoler [35] mostraram que um estado coerente se propagando em um meio dispersivo evolui para uma superposição de dois estados coerentes com diferença de fase de π , que para um valor arbitrariamente grande do parâmetro de deslocamento, α , é uma superposição de dois estados macroscopicamente distinguíveis. Este tipo de superposição quântica é geralmente conhecido como “gato” de Schrödinger.

Vários tipos de superposições de estado coerente têm sido discutidos na literatura. Em particular, podemos citar os chamados estado coerente par (ECP) e estado coerente ímpar (ECI). Estes estados podem ser escritos na forma [36]

$$|\alpha, \pm\rangle = N_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (3.15)$$

onde $|\alpha\rangle$ é um estado coerente e onde

$$N_{\pm} = (2 [1 \pm \exp(-2|\alpha|^2)])^{-1/2} \quad (3.16)$$

é um fator de normalização. Enquanto o estado coerente é auto-estado do operador de aniquilação $\hat{a}$, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, os ECP e ECI são auto-estados do operador $\hat{a}^2$, $\hat{a}^2|\alpha, \pm\rangle = \alpha^2|\alpha, \pm\rangle$. Estes estados escritos em termos de uma base de número são

$$|\alpha, +\rangle = (\cosh |\alpha|)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{2m!}} |2m\rangle \quad (3.17)$$

e

$$|\alpha, -\rangle = \left(\frac{|\alpha|}{\sinh|\alpha|} \right)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{(2m+1)!}} |2m+1\rangle. \quad (3.18)$$

Pelas Eqs.(3.16) e (3.17) podemos ver que a distribuição de número de ftons destes estados é oscilatória. As propriedades estatísticas, propostas de produção destes estados [36], assim como sua interação com um átomo de dois níveis [37] já foram estudados.

Outro estado de superposição interessante vem da superposição de dois estados coerentes comprimidos. Neste caso, em analogia à superposição de dois estados coerentes, Eq.(3.14), os ECCP e ECCI são auto-estados do operador $\hat{b}^2$ (dado pela Eq.(2.45)), $\hat{b}^2 |\beta, \pm\rangle = \beta^2 |\beta, \pm\rangle$. Em termos de uma base de número estes estados são escritos como [38]

$$|\beta, +\rangle = (\cosh|\beta|)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} |2m\rangle \quad (3.19)$$

$$|\beta, -\rangle = (\sinh|\beta|)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} |2m+1\rangle, \quad (3.20)$$

onde β é dado pela Eq.(2.49) e $C_{2m, 2m+1}$ são os coeficientes do estado coerente comprimido dado pela Eq.(2.51). É fácil ver que para $\mu = 1, \nu = 0$, ou seja, $\beta = \alpha$ [conf. Eqs. (2.47) e (2.49)] os ECCP e ECCPI dados pelas Eqs.(3.19) e (3.20) se reduzem aos ECP e ECI, dados pelas Eqs.(3.17) e (3.18). A distribuição de número de ftons do ECCP,

$$P_m = |\langle\beta, +|m\rangle|^2 = \cosh|\beta| e^{|\beta|^2} |C_{2m}|^2, \quad (3.21)$$

é mostrada na Fig.(3.2) para o parâmetro de coerência $\alpha = 5$ e três diferentes valores do

parâmetro de compressão.

Figura 3.2: Distribuição do número de ftons para o ECCP, para o parâmetro de coerência $\alpha = 5$ e o parâmetro de compressão : (a) $r = 0.5$, (b) $r = 1.0$, (c) $r = 1.5$

Como podemos ver pela Fig.(3.2), além do caráter oscilatório intrínseco da distribuição de ftons do ECCP [devida ao fato de que ela é nula para todo número de ftons m ímpar], para grandes valores do parâmetro de compressão, esta distribuição apresenta uma

oscilação secundária, que pode ser vista pelo envelope da distribuição, o qual é mostrado na Fig.(3.3).

Figura 3.3: Envelopes das distribuições do número de ftons para o ECCP, para o parâmetro de coerência $\alpha = 5$ e o parâmetro de compressão: (a) $r = 0.5$, (b) $r = 1.0$, (c) $r = 1.5$

As propriedades físicas do ECCP foram recentemente investigadas, assim como também foram derivadas algumas propriedades matemáticas destes estados, incluindo a

relação de completude [38]. Nosso objetivo aqui é examinar alguns aspectos da inversão atômica para o campo inicialmente em um ECCP, levando em consideração estas oscilações secundárias na distribuição de ftons [39]. Gráficos da inversão atômica para o campo preparado inicialmente em um ECCP correspondendo às distribuições de ftons da Fig.(3.2) são mostrados na Fig.(3.4).

Figura 3.4: Inversão atômica $W(\lambda t)$ para um átomo inicialmente no estado excitado interagindo com um campo em um ECCP com parâmetro de coerência $\alpha = 5$ e parâmetro de compressão (a) $r = 0.5$, (b) $r = 1$ e (c) $r = 1,5$

Conforme podemos ver na Fig.(3.4), a superposição de dois estados coerentes comprimidos, resultando no chamado ECCP, não destrói a coerência inicial dos estados, de forma que a inversão atômica ainda continua exibindo o fenômeno de ressurreição, embora a frequência de batimento agora seja menor em comparação à frequência de batimento do estado coerente comprimido [conf. Fig.(3.1b)], o que era esperado, tendo em vista que agora a contribuição dos cossenos, $\cos(2\lambda t \sqrt{n+1})$, só ocorrerá para n par, já que para n ímpar a distribuição de ftons é nula. Outro efeito interessante ocorre à medida que o parâmetro de compressão aumenta. Na Fig.(3.5) mostramos uma vista expandida entre duas ressurreições consecutivas para melhor mostrar a influência das oscilações de P_m na inversão atômica. Como podemos notar, à medida que as oscilações em P_m aumentam, a ressurreição da inversão atômica deixa de ser seguida por um simples colapso como ocorre para pequenos valores do parâmetro de compressão [Fig.(3.5a)] e passa a ser seguida por ecos, que modulam o colapso [conf. Figs(3.5c)]. Ou seja, os vários picos no envelope da distribuição de ftons provocam o aparecimento de ressurreição na inversão atômica onde antes se tinha um simples colapso.

O aparecimento de oscilações na distribuição de ftons para o estado coerente comprimido foi investigado por Wheeler e Schleich [40]. Eles explicaram a origem destas oscilações em termos do conceito de interferência no espaço de fase. Aqui nós verificamos que esta interferência, no caso do ECCP, é construtiva no sentido de que ela contribui para que a inversão atômica antes defasada (ou colapsada), seja refasada(ou ressuscitada), efeito que é possível devido à granularidade dos ftons na cavidade.

Figura 3.5: Vista expandida da inversão atômica para o ECCP mostrada na Fig.(3.4) para o parâmetro de coerência $\alpha = 5$ e parâmetro de compressão (a) $r = 0,5$, (b) $r = 1,0$ e (c) $r = 1,5$. Como se pode ver, à medida que o parâmetro de compressão aumenta (e como consequência aumentam as oscilações na distribuição de ftons), a inversão atômica inicialmente defasada (ou colapsada) é refasada (ou ressuscitada).

3.3 Influência da Fase do Campo em $W(\lambda t)$

Na seção anterior, estudamos a inversão atômica de um átomo de dois níveis interagindo com um campo de radiação que se encontra inicialmente em um ECCP. Conforme mostramos, a inversão atômica, $W(\lambda t)$, depende sensivelmente da distribuição de ftons do campo inicial [conf. Eq.(3.13)] e portanto do estado inicial do campo. Quando o ECCP está fortemente comprimido e sua distribuição de número de ftons exibe um comportamento oscilatório, a inversão atômica começa a apresentar ecos após cada ressurreição. O surgimento de novas ressurreições na inversão atômica à medida que o parâmetro de compressão aumenta, é devido ao fato de que o aumento no parâmetro de compressão afeta a definição na fase do campo a qual é a responsável pelo colapso na inversão atômica. Para melhor ilustrar isto, vamos considerar a inversão atômica em dois casos extremos: o átomo interagindo com o estado de número e com o estado de fase de PB, definidos pelas Eqs.(2.16) e (2.75) respectivamente.

3.3.1 Inversão Atômica para o Estado de Fase de PB

Para o estado de número (o qual tem a fase completamente indefinida), a inversão atômica dada pela Eq.(3.14) é dada simplesmente por

$$W(\lambda t) = \cos(2\lambda t\sqrt{n+1}). \quad (3.22)$$

Se $n = 0$, a inversão atômica oscila periodicamente com frequência de Rabi $\Omega = 2\lambda$. O

átomo emite espontaneamente um fóton na cavidade, depois reabsorve este fóton e continua neste processo de emissão e absorção indefinidamente.

Para o estado de fase, a inversão atômica é dada, no limite em que $s \rightarrow \infty$, por

$$W(\lambda t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+1} \cdot \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}). \quad (3.23)$$

Quanto maior for o valor de s , mais nos aproximamos do estado de fase.

Na Fig.(3.6) mostramos a inversão atômica para o estado dado pela Eq.(3.23) para diferentes valores de s .

Figura 3.6: Inversão atômica em função do parâmetro s em comparação com o estado de número: (a) estado de número, (b) $s = 10$ e (d) $s = 50$.

Na Fig.(3.6a) temos o estado de número, cuja inversão atômica corresponde às

oscilações de Rabi com frequência $\Omega = 2\lambda$ (para $n = 0$). Mas à medida que s aumenta, na Eq.(3.23), podemos ver que a inversão atômica tende a um valor constante. Este resultado pode ser interpretado como um equilíbrio termodinâmico entre o átomo e o campo. Ocorre que à medida que s tende a infinito, cada vez mais nos aproximamos do estado de fase (cujo número de ftons é totalmente indefinido), correspondendo a uma energia infinita na cavidade. Assim, ao invés da energia estar repartida de maneira discreta entre os diferentes estados de número na cavidade, temos um contínuo de energia.

Portanto, a definição no número de ftons na cavidade é responsável pelas oscilações na inversão atômica, enquanto que a definição na fase é responsável pelos colapsos da inversão atômica. Entre os estados de número e estados de fase, temos os estados comprimidos que, como vimos, são estados que, embora estejam longe de ser um estado de fase, possuem uma boa definição na fase e cuja inversão atômica é caracterizada por colapsos e ressurreições.

Nós usamos o modelo de JC como inicialmente definido, descrevendo a interação ressonante de um único átomo de dois níveis com um único modo do campo, para estudar a dinâmica da inversão atômica para diferentes campos iniciais presentes na cavidade, mostrando a importância da fase do campo na resposta atômica.

Além de ser usado para investigar o efeito de colapso e ressurreição das oscilações de Rabi, sendo a ressurreição caracterizada como um efeito puramente quântico, vários métodos usando o modelo de JC vem sendo propostos para a geração de estados não clássicos da luz, como os estados comprimidos, gato de Schrödinger, e os estados de número, cuja verificação experimental espera-se que ocorra em um futuro próximo, haja visto o grande progresso

feito neste sentido nos últimos anos [18]. O grande sucesso do modelo desde a sua criação em 1963, pode ser visto pela enorme extensão de generalizações que já foram feitas até hoje [41].

Uma vez que investigamos como é que certos campos especiais afetam a dinâmica da inversão atômica, no capítulo 4, ainda no contexto do modelo de JC, mostraremos um método pelo qual se pode determinar o estado quântico de um modo do campo fazendo-o interagir com um átomo de dois níveis.

Capítulo 4

Espalhamento de Átomos por Luz

4.1 Introdução

Sendo um dos objetivos da óptica quântica a produção de novos estados quânticos da luz e motivado pelo progresso experimental em produzir estes estados, surge o interesse em saber como se pode obter informação completa sobre o estado quântico de um campo.

Cahill e Glauber [42] mostraram que uma distribuição de quase-probabilidade, como a função de Wigner ou a função Q contém informação completa do campo. Todas as propriedades estatísticas do campo são conhecidas se uma distribuição de quase-probabilidade é conhecida. A razão é que todos os valores esperados podem ser calculados como médias clássicas usando uma distribuição de quase-probabilidade, desde que os observáveis quânticos estejam expressos na ordem requisitada para uma determinada distribuição, eliminando assim o problema de comutação dos operadores. A função Q , em particular, é relacionada com

a ordem antinormal dos operadores do campo. Recentemente as distribuições de quase-probabilidade tornaram-se acessíveis de serem medidas indiretamente. Baseados em medidas de distribuição de probabilidade da amplitude de quadratura do campo para o estado de vácuo e o estado comprimido, Smithey et. al. [43], mostraram uma técnica de tomografia óptica com detecção “homodyne” para determinar a distribuição de Wigner.

Por outro lado, existem outros interessantes mecanismos de medidas na óptica quântica que também fornecem alguma informação sobre o estado quântico do campo, como por exemplo a estatística de fons e de fase, baseados na interação do campo com átomos. Duas abordagens diferentes baseadas na interação do campo com átomos têm sido usadas: uma delas é a medida quântica não demolidora, que consiste na interação não ressonante entre o átomo e o campo, a qual vem sendo utilizada com o objetivo de preparar estados com o número de fons bem definido (estados de Fock) em uma cavidade [19]. Uma outra abordagem é a interação ressonante entre átomo e campo, que é muito mais forte que a interação não ressonante e portanto mais fácil de ser detectada experimentalmente.

Quando um átomo entra numa cavidade contendo um campo estacionário, seu momento de dipolo reage à variação espacial do campo, gerando sobre ele uma força que faz com que ele seja defletido. Nos últimos anos, a deflexão atômica por um campo quântico ressonante vem sendo proposta como uma possível forma de se reconstruir a estatística de fons original do campo [44] e tem despertado cada vez maior interesse, uma vez que foi mostrado teoricamente, que o momento transferido para um feixe atômico, por uma onda estacionária fornece informação suficiente para se determinar o estado quântico do campo

de radiação. Recentemente, Freyberger & Herkomer [Phys. Rev. Lett. **72**, 1952(1994)], apresentaram uma proposta para a determinação do estado de um campo de radiação quantizado, através da medida da distribuição de momento de átomos espalhados, resultando da interação de um feixe atômico com um único modo do campo eletromagnético via interação de um fóton. Este método de interação de um fóton é interessante, entretanto para alguns campos especiais este método não fornece informação completa sobre o campo.

Neste capítulo, estendemos este modelo para o caso da interação de dois ftons [45], onde torna-se possível resolver o problema da indeterminação de campos especiais. Ao mesmo tempo, mostraremos que os dois métodos (interação de um e dois ftons), quando combinados, podem fornecer uma medida da variância do operador de fase.

4.2 Modelo

O modelo consiste em fazer passar átomos de dois níveis através de uma cavidade, que se encontra em um estado quântico puro, genérico $|\psi\rangle$; o qual pode sempre ser expandido em uma base de número

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle \quad (4.1)$$

com os coeficientes C_m de uma representação de estado de número.

Devido à interação entre o átomo e o campo, o átomo é defletido durante sua passagem através da cavidade. Examinando a distribuição de momento dos átomos defletidos, é

possível determinar cada coeficiente individual C_m do campo, permitindo-nos a reconstrução do estado $|\psi\rangle$, do campo.

Um esquema para ilustrar o experimento idealizado é mostrado na figura abaixo.

Figura 4.1: Esquema para a interação de um único modo do campo com um átomo de dois níveis. Átomos passam por uma fenda estreita e ficam confinados numa região centrada em torno do nodo do campo, interagem com o campo, são defletidos e viajam para uma tela, colocada na frente da cavidade, a qual exibirá a distribuição de momento dos átomos após a interação.

Uma fenda estreita colocada na frente da cavidade em torno de $x = 0$ transmitirá os átomos somente em uma pequena região centrada em torno do nodo do campo. Assim, os átomos irão interagir somente com uma pequena parte do campo, causando-lhe a menor perturbação possível.

A interação de dois ftons entre o átomo e o campo é dada pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [11]

$$\hat{V}_2 = \lambda' \text{sen}(kx) (\hat{\sigma}^+ \hat{a}^2 + \hat{\sigma}^- \hat{a}^{\dagger 2}) , \quad (4.2)$$

onde λ' é a constante de acoplamento; $\hat{\sigma}^+$ and $\hat{\sigma}^-$ são os operadores atômicos (de levantamento e abaixamento) que descrevem as transições dos átomos de dois níveis; $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação do campo.

Um campo clássico deve preparar os átomos de dois níveis que irão interagir com o campo numa superposição coerente de seus estados excitado ($|e\rangle$) e fundamental ($|g\rangle$). Esta superposição com uma fase ajustável φ , que vem do campo clássico, é fundamental para o método. Nós encontramos que esta superposição dos dois níveis atômicos, para a interação de dois ftons, invoca correlações entre C_{m-2} e C_m , o que se manifestará naturalmente na distribuição de momento dos átomos defletidos.

4.3 Fundamentos Teóricos

O estado inicial do sistema átomo-campo é dado pelo produto tensorial do estado do campo pelo estado atômico,

$$|\Phi(t=0)\rangle = |\psi_{at}\rangle |\Psi\rangle . \quad (4.3)$$

O pacote de onda atômico entra no campo de luz estacionário no estado

$$|\psi_{at}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) |x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|g\rangle + e^{i\varphi} |e\rangle \right] , \quad (4.4)$$

onde

$$f(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (4.5)$$

é o perfil espacial do feixe atômico, uma distribuição Gaussiana normalizada, com largura muito menor que o comprimento de onda do único modo do campo, $\sigma \ll \lambda$. Isto nos permite trocar a usual dependência $\sin kx$ da onda estacionária pela dependência linear kx [cf. Eq.(4.2)].

Projetando o estado inicial do sistema no auto-estado da posição $|x\rangle$ e definindo os chamados estados vestidos ($m \geq 2$),

$$|\pm, m\rangle \equiv [|g\rangle|m\rangle \pm |e\rangle|m-2\rangle] / \sqrt{2} , \quad (4.6)$$

que são os auto-estados do Hamiltoniano de interação,

$$V_2|\pm, m\rangle = \lambda' kx \sqrt{m(m-1)} |\pm, m\rangle , \quad (4.7)$$

encontramos para o estado inicial do sistema, Eq.(4.3),

$$\begin{aligned} |\Phi(x, t=0)\rangle &= \frac{f(x)}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \left[(C_m + e^{i\varphi} C_{m-2}) |+, m\rangle \right. \\ &\quad \left. + (C_m - e^{i\varphi} C_{m-2}) |-, m\rangle \right] \\ &\quad + \frac{f(x)}{\sqrt{2}} [C_0|0\rangle|g\rangle + C_1|1\rangle|g\rangle] . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Este estado evoluirá durante um tempo τ de acordo com o Hamiltoniano de interação V_2 , sendo que após este tempo os átomos defletidos serão novamente partículas livres, isto é, a distribuição espacial dos átomos na tela colocada na frente da cavidade (Fig.4.1) mostrará a distribuição de momento dos átomos exatamente após a sua passagem através do campo em $t = \tau$. Após a interação, o estado final do sistema será dado por

$$\begin{aligned} |\Phi(x, \tau)\rangle = & \frac{f(x)}{2} \sum_{m=2}^{\infty} [e^{i\sqrt{m(m-1)} \kappa k x} (C_m + e^{i\varphi} C_{m-2}) |+, m\rangle \\ & + e^{-i\sqrt{m(m-1)} \kappa k x} (C_m - e^{i\varphi} C_{m-2}) |-, m\rangle] \\ & + \frac{f(x)}{\sqrt{2}} [C_0|0\rangle|g\rangle + C_1|1\rangle|g\rangle] \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\kappa \equiv \mu\epsilon_0\tau/\hbar = -\lambda'\tau/\hbar$ é o parâmetro de interação, μ o momento de dipolo do átomo e ϵ_0 o campo elétrico efetivo por fóton.

Fazendo uma transformada de Fourier sobre a função espacial $|\Psi(x, t)\rangle$, obtemos o estado final do sistema em termos do momento atômico p ,

$$|\Phi(p, \tau)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} |\Phi(x, \tau)\rangle dx, \quad (4.10)$$

a partir do qual, usando a ortogonalidade dos estados $|\pm m\rangle$, podemos calcular a distribuição de probabilidade $W(\wp)$ de encontrar um átomo com momento $\wp(\wp = p/\hbar k)$, a saber

$$\begin{aligned}
W(\wp) = & \hbar k \sum_{m=2}^{\infty} [\left| \tilde{f} \left(\wp - \sqrt{m(m-1)} \kappa \right) \right|^2 |C_m + e^{i\wp} C_{m-2}|^2 \\
& + \left| \tilde{f} \left(\wp + \sqrt{m(m-1)} \kappa \right) \right|^2 |C_m - e^{i\wp} C_{m-2}|^2] \\
& + 2\hbar k \left| \tilde{f}(\wp) \right|^2 (|C_0|^2 + |C_1|^2) ,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $\tilde{f}(\wp)$ é a transformada de Fourier de $f(x)$, dada na Eq.(4.5),

$$\tilde{f}(\wp \pm \sqrt{m(m-1)} \kappa) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{2} (\wp \pm \sqrt{m(m-1)} \kappa)^2} . \tag{4.12}$$

Pela Eq.(4.11), podemos notar que a distribuição de momento dos átomos espalhados $W(\wp)$ depende da estatística de ftons do campo e que os termos cruzados das amplitudes de probabilidade $C_{m-1}^* C_m$, contribuem para $W(\wp)$. Para mostrarmos a importância destes termos cruzados e do coeficiente individual C_m , considere a Fig.(4.2), onde comparamos a distribuição de momento $W(\wp)$ assumindo a cavidade inicialmente em um estado de vácuo comprimido (cujos coeficientes são dados pela Eq.(2.57)), com as superposições $|C_m - e^{i\wp} C_{m-2}|^2$ e $|C_m + e^{i\wp} C_{m-2}|^2$, para $\wp \geq$ e $\wp < 0$ respectivamente, mostradas nos pontos $\wp/\kappa = \pm \sqrt{m(m-1)}$ (barras verticais). Pela Fig.(4.2) podemos ver que $W(\wp)$ apresenta uma estrutura de picos que vão se tornando cada vez mais definidos à medida que κ aumenta.

Figura 4.2: Distribuição de momento, $W(\varphi)$, para o estado de vácuo comprimido com parâmetro de compressão $r = 1$. Os graficos são mostrados para $\sigma = \lambda/10$, $\varphi = 0$ e para três valores diferentes de $\kappa = 3, 5$, e 10 . Para comparação, as superposições $|C_m + C_{m-2}|^2 (\varphi \geq 0)$ e $|C_m - C_{m-2}|^2 (\varphi < 0)$ também são mostradas (barras verticais)

A Eq.(4.11) pode ser escrita na forma

$$W(\varphi) = W_+(\varphi - \sqrt{m(m-1)\kappa}) + W_-(\varphi + \sqrt{m(m-1)}) + W_0(\varphi = 0). \quad (4.13)$$

A figura abaixo mostra cada um destes termos separadamente.

Figura 4.3: Distribuição de momento $W(\varphi)$ para o campo no estado de vácuo comprimido com parâmetro de compressão $r = 1$. As curvas são mostradas para $\kappa = 3$, $\varphi = 0$ e $\sigma = \lambda/10$ (a) $W(\varphi)$ total, (b) $W_+(\varphi)$, (c) $W_-(\varphi)$ e (d) $W(\varphi = 0)$

Pela Fig.(4.3) podemos ver que $W(\varphi)$ apresenta duas seqüências de picos. À medida que κ aumenta o termo $\left| \tilde{f}(\varphi/\kappa \pm \sqrt{m(m+1)}) \right|^2$ da Eq.(4.11) atua como uma função delta, seleccionando nos lados esquerdo e direito da distribuição de momento (que correspondem a $\varphi > 0$ e $\varphi < 0$), respectivamente as duas seqüências de picos dadas aproximadamente por

$$W_{\pm}(\wp/\kappa = \pm\sqrt{m-1}) \cong \left(\frac{k^2\sigma^2}{16\pi}\right)^{1/2} |C_m \pm e^{i\varphi} C_{m-2}|^2, \quad (4.14)$$

e um pico central dado por

$$W(\wp = 0) = \left(\frac{k^2\sigma^2}{4\pi}\right) (|C_0|^2 + |C_1|^2). \quad (4.15)$$

Quando subtraímos dois picos correspondentes ao mesmo valor de m , encontramos

$$W(\wp/\kappa = \sqrt{m(m-1)}) - W(\wp/\kappa = -\sqrt{m(m-1)}) = \left(\frac{k^2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/2} \Re(C_{m-2}^* C_m) \cos \varphi + i \Im(C_{m-2}^* C_m) \sin \varphi \quad (4.16)$$

Para $\varphi = 0$, a assimetria na distribuição de momento $W(\wp)$ fornece a parte real do produto dos coeficientes $\Re(C_{m-2}^* C_m)$, enquanto que, para $\varphi = \pi/2$, esta assimetria fornece a parte imaginária do produto dos coeficientes $\Im(C_{m-2}^* C_m)$. Assim, toda a sequência dos produtos $C_{m-2}^* C_m$ pode ser encontrada através da distribuição de momento dos átomos espalhados que nada mais é do que a distribuição espacial registrada na tela colocada na frente da cavidade. É interessante lembrar que a Eq.(4.11), mostrada na Fig.(4.2), representa a probabilidade de encontrar um único átomo com momento $\wp$ depois de ter interagido com o campo. Portanto, para se obter uma distribuição espacial significativa na tela a fim de reconstruir o estado do campo $|\psi\rangle$, pela determinação dos coeficientes C_m , é necessário que o experimento seja repetido várias vezes, assumindo que cada átomo irá interagir sempre com uma cópia do campo original, visto que cada átomo que passar pela cavidade, ao interagir com o campo, lhe

causará sempre uma perturbação, por menor que seja. Para certos campos, deve ser suficiente acoplar a cavidade a um reservatório externo para que o campo possa ser recomposto após a passagem de cada átomo. Os experimentos devem ser feitos com dois conjuntos de átomos. A fase $\varphi = 0$ do campo clássico define um conjunto e $\varphi = \pi/2$ define o outro.

4.4 Comparação entre as interações com um e dois ftons

Como mostramos na seção anterior, cada medida da posição atômica nos dá alguma informação sobre os coeficientes do campo, de forma a nos permitir deduzir cada coeficiente individual e assim reconstruir o campo. No caso da interação de um fóton, a assimetria na distribuição de momento fornece a seqüência dos produtos $C_{m-1}^* C_m$ [46]. Neste caso, começando por C_0 , que pode ser obtido pelo pico central da distribuição de momento para a interação de um fóton, a saber [46]

$$\begin{aligned} W'(\varphi) = & \hbar k \sum_{m=1}^{\infty} [|\tilde{f}(\varphi - \sqrt{m} \kappa)|^2 |C_m + e^{i\varphi} C_{m-1}|^2 \\ & + |\tilde{f}(\varphi + \sqrt{m} \kappa)|^2 |C_m - e^{i\varphi} C_{m-1}|^2] \\ & + 2\hbar k |\tilde{f}(\varphi)|^2 |C_0|^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

obtem-se todos os coeficientes pela fórmula de recorrência

$$C_m = \frac{\Delta_1(\varphi = 0) + \Delta_1(\varphi = \pi/2)}{C_{m-1}^*} \quad (4.18)$$

onde

$$\Delta_1 = W'(\varphi = \sqrt{m}\kappa) - W'(\varphi = -\sqrt{m}\kappa). \quad (4.19)$$

Pela fórmula de recorrência dada na Eq.(4.18) podemos ver que cada coeficiente C_m é determinado em função do coeficiente anterior, assim para campos onde os coeficientes pares (ou ímpares) são nulos, como é o caso do estado de número comprimido, dependendo se n é ímpar (ou par) respectivamente, os coeficientes não podem ser determinados. De fato, a distribuição de momento $W'(\varphi)$ dada pela Eq.(4.17) é mostrada na Fig.(4.4) para: (a) um estado coerente e (b) um estado de vácuo comprimido (que é um caso particular do estado de número comprimido, para $n = 0$), cujos coeficientes são dados pelas Eqs.(2.28) e (2.57) respectivamente. Em comparação, as superposições $|C_m - e^{i\varphi}C_{m-1}|^2$ e $|C_m + e^{i\varphi}C_{m-1}|^2$ para $\varphi < 0$ e $\varphi \geq 0$, respectivamente, são mostradas nos pontos $\varphi/\kappa = \pm\sqrt{m}$ (barras verticais).

Assim como na interação de dois fótons, a interação de um fóton apresenta duas seqüências de picos, agora localizados em $\varphi/\kappa = \pm\sqrt{m}$. Para o estado coerente, onde todos os coeficientes são não nulos, $W'(\varphi)$ é assimétrica (Fig. [4.4(a)]) e todos os coeficientes podem ser obtidos pela fórmula de recorrência dada pela Eq.(4.18). Entretanto, para o estado de vácuo comprimido, onde todos os coeficientes ímpares são nulos ($C_{2m+1} = 0$), a Eq.(4.18) não pode determinar os coeficientes pares C_{2m} que são não-nulos neste exemplo e portanto o campo não pode ser determinado neste caso. Este resultado expresso em termos da distribuição de momento $W'(\varphi)$ é mostrado na Fig.(4.4(b)) onde podemos ver que $W'(\varphi)$ é simétrica. Isto implica que $W'(\varphi/\kappa = \sqrt{m}) - W'(\varphi/\kappa = -\sqrt{m}) = 0$.

Figura 4.4: Distribuição de momento $W'(\varphi)$ para a interação de um fóton para $\varphi = 0$, $\sigma = \lambda/10$ e três valores diferentes de κ ($\kappa = 10, 20, 40$). (a) o campo está em um estado coerente com $\alpha = 1.5e^{i\pi/6}$ (b) o campo está em um estado de vácuo comprimido com parâmetro de compressão $r = 1$. Para comparação, em ambos os casos as superposições $|C_m + C_{m-1}|^2(\varphi \geq 0)$ e $|C_m + C_{m-1}|^2(\varphi < 0)$ também são mostradas (barras verticais)

Por outro lado, no caso da interação de dois ftons, por nós proposto, este problema de indeterminação de campos especiais como por exemplo o estado de vácuo comprimido pode ser resolvido. Neste caso a assimetria na distribuição de momento $W(\varphi)$ fornece-nos a seqüência dos produtos $C_{m-2}^* C_m$, de onde podemos tirar a formula de recorrência dos

coeficientes pares (C_{2m}) e ímpares (C_{2m+1}) a saber

$$C_{2m} = \frac{\Delta_2(\varphi = 0) + \Delta_2(\varphi = \pi/2)}{C_{2m-2}^*}, \quad (4.20)$$

$$C_{2m+1} = \frac{\Delta_2(\varphi = 0) + \Delta_2(\varphi = \pi/2)}{C_{2m-1}^*}, \quad (4.21)$$

onde

$$\Delta_2 = W(\varphi = \sqrt{m(m-1)}) - W(\varphi = -\sqrt{m(m-1)}). \quad (4.22)$$

Portanto, no caso do campo estar em um estado de vácuo comprimido, $C_{2m+1} = 0$, C_0 é obtido pelo pico central da distribuição dado pela Eq.(4.15) ($|C_1|^2 = 0$) e todos os outros coeficientes podem ser obtidos pela Eq.(4.20). Da mesma forma, para um estado de número comprimido com n ímpar, $C_{2m} = 0$, C_1 é obtido a partir da Eq.(4.15) ($|C_0|^2 = 0$) e os demais coeficientes obtidos pela Eq.(4.21). O gráfico da distribuição de momento $W(\varphi)$ para o estado de vácuo comprimido é mostrado na Fig.(4.2) para três diferentes valores do parâmetro de interação κ .

Outra característica útil da interação de dois fótons, além de fornecer informação sobre o campo mesmo para o caso onde todos os coeficientes pares (ou ímpares) são todos nulos, é que a localização dos picos é dada por $\sqrt{m(m-1)}$ ao invés de $\sqrt{m}$ como no caso da interação de um fóton. Assim, os picos estando mais distantes entre si, temos uma resolução melhor na estrutura de picos da distribuição de momento.

4.5 Distribuição de Quase-probabilidade

Para verificar a precisão na determinação dos coeficientes do campo através da medida da distribuição de momento, vamos simular a reconstrução da função distribuição de quase-probabilidade Q , obtida com os coeficientes C_m provenientes da assimetria das distribuições de momento e comparar com a função Q obtida a partir dos coeficientes do campo conhecidos na literatura.

Uma distribuição de quase-probabilidade fornece todas as propriedades estatísticas do campo. Elas são introduzidas para trocar toda a álgebra de operadores em álgebra com números complexos. A função Q é uma distribuição de quasiprobabilidade associada com a ordem antinormal dos operadores do campo [42]. Para um estado genérico $|\psi\rangle$ ela é definida em função da sua projeção em uma base de estado coerente como

$$Q(\beta) \equiv \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \psi \rangle|^2, \quad (4.23)$$

onde $|\beta\rangle$ é um estado coerente. Embora a função Q seja sempre positiva, como podemos ver pela Eq.(4.23), ela faz parte de um conjunto de distribuições de probabilidade no espaço de fase que pode assumir valores negativos, que não podem ser interpretadas como probabilidade, daí o nome quase-probabilidade. Com a ajuda das Eqs.(2.28) e (4.1) a Eq.(4.23) pode ser escrita como

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta|^2} \left| \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{\beta^{*m}}{\sqrt{m!}} \right|^2. \quad (4.24)$$

Para simular a reconstrução da função Q calculamos numericamente a Eq.(4.24) usando os coeficientes C_m obtidos pela assimetria das distribuições de momento de átomos de dois níveis resultante de sua interação com um único modo do campo quantizado.

Nas Figs(4.5) e (4.6) mostramos as linhas de contorno da função Q , dada pela Eq.(4.24), para um estado coerente e para um estado comprimido, cujos coeficientes C_m são obtidos pelas Eqs.(4.18) e (4.20) respectivamente. Em cada caso mostramos para três diferentes valores de κ em comparação com a função Q exata, que é obtida também pela Eq.(4.24), mas com os coeficientes C_m do estado coerente e vácuo comprimido exatos, os quais são dados pelas Eqs.(2.28) e (2.57) respectivamente.

Como podemos ver nas Figs.(4.5) e (4.6), para menores valores do parâmetro de interação κ , as linhas de contorno são bastante distorcidas, enquanto que para κ grande a função Q é reconstruída exatamente. Este resultado está de acordo com o que esperávamos, uma vez que a distribuição de momento $W'(\rho)$ apresenta melhor resolução na estrutura de picos (essencial para a determinação dos coeficientes C_m) à medida que κ cresce, como pode ser visto na Fig.(4.4) onde $W'(\rho)$ é mostrado para diferentes valores de κ . O mesmo ocorre para o estado de vácuo comprimido cujos coeficientes C_m são obtidos pela interação de dois ftons. A função Q neste caso é reconstruída exatamente, para menores valores do parâmetro de interação, κ , do que no caso do estado coerente com os coeficientes C_m obtidos pela interação de um fóton.

Figura 4.5: Reconstrução da função Q de um estado coerente com $\alpha = 1, 5e^{i\pi/6}$. Comparamos as linhas de contorno da função Q exata (a) com a calculada com os coeficientes obtidos da Eq.(4.18) para (b) $\kappa = 5$, (c) $\kappa = 10$ e (d) $\kappa = 40$.

Figura 4.6: Reconstrução da função Q de um estado de vácuo comprimido com parâmetro de compressão $r = 1$. Comparamos as linhas de contorno da função Q exata (a) com a calculada com os coeficientes obtidos da Eq.(4.20) para (b) $\kappa = 1$, (c) $\kappa = 3$ e (d) $\kappa = 10$.

4.6 Determinação da variância do operador de fase

No capítulo 2 discutimos o formalismo do operador de fase. Aqui nós mostraremos como a medida da distribuição de momento dos átomos espalhados resultando da interação de um feixe atômico com um único modo do campo via interação de dois fótons, quando combinada com a interação de um fóton, pode fornecer a variância do operador de fase do campo, mesmo quando a distribuição de momento não apresenta uma estrutura de picos muito bem definida. Na literatura o operador de fase é definido de diferentes formas, resultando em diferentes expressões para as variâncias. Aqui calcularemos a variância para dois operadores de fase introduzidos na literatura: por Susskind e Glogower (SG) e Pegg e Barnett (PB).

Seja o operador de fase definido como

$$\widehat{e^{i\phi}} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m+1| . \quad (4.25)$$

Não existe diferença entre o valor médio do operador de fase quando calculado nos formalismos de PB e SG. Esta diferença entretanto aparece quando calculamos sua variância. Para mostrar isto vamos calcular a variância dos operadores Hermitianos $\widehat{\cos\phi}$, $\widehat{\sin\phi}$, definidos pelas Eqs.(2.73) e (2.74). Para o operador $\widehat{\cos\phi}$ temos,

$$\langle\psi|(\widehat{\cos\phi})^2|\psi\rangle = \frac{1}{4}\langle\psi|(\widehat{e^{i\phi}} + \widehat{e^{-i\phi}})^2|\psi\rangle . \quad (4.26)$$

Dado que a diferença básica entre os formalismo de SG e PB é que no formalismo de SG o estado de vácuo é excluído, para que o operador de fase satisfaça a condição de unitariedade

exigida para um operador físico [23], para um estado genérico $|\psi\rangle$ expandido em uma base de número [cf.Eq.(4.1)], usando a ortogonalidade dos estados de número e a Eq.(4.25) encontramos para o formalismo de SG,

$$\begin{aligned}\langle(\widehat{\cos\phi})^2\rangle_{SG} &= \frac{1}{4} [\langle\psi|(\widehat{e^{i\phi}})^2 + \langle\psi|(\widehat{e^{-i\phi}})^2|\psi\rangle + 2 - \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle] \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m + \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+2}^* C_m + 2 - |C_0|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 - \frac{|C_0|^2}{2} \right],\end{aligned}\quad (4.27)$$

e similarmente,

$$\langle(\widehat{\sin\phi})^2\rangle_{SG} = \frac{1}{2} \left[-\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 - \frac{|C_0|^2}{2} \right]. \quad (4.28)$$

Enquanto que para o formalismo de PB, temos

$$\begin{aligned}\langle(\widehat{\cos\phi})^2\rangle_{PB} &= \frac{1}{4} [\langle\psi|(\widehat{e^{i\phi}})^2 + \langle\psi|(\widehat{e^{-i\phi}})^2|\psi\rangle + 2] \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m + \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+2}^* C_m + 2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 \right],\end{aligned}\quad (4.29)$$

e similarmente

$$\langle(\widehat{\sin\phi})^2\rangle_{PB} = \frac{1}{2} \left[-\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 \right]. \quad (4.30)$$

Os valores médios dos operadores $\widehat{\cos\phi}$ e $\widehat{\sin\phi}$ nos dois formalismos, SG e PB, são iguais e dados por

$$\langle\widehat{\cos\phi}\rangle = \frac{1}{2} [\langle\psi|\widehat{e^{i\phi}}|\psi\rangle + \langle\psi|\widehat{e^{-i\phi}}|\psi\rangle] = \text{Re} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right) \quad (4.31)$$

e

$$\langle \widehat{\text{sen}}\phi \rangle = \text{Im} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right). \quad (4.32)$$

Assim, para as variância dos operadores $\widehat{\cos}\phi$ e $\widehat{\text{sen}}\phi$ no formalismo de SG, encontramos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \widehat{\cos}\phi)^2 \rangle_{SG} &= \langle (\cos\phi)^2 \rangle_{SG} - \langle \cos\phi \rangle^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 - \frac{|C_0|^2}{2} \right] - \left[\text{Re} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

e

$$\langle (\Delta \widehat{\text{sen}}\phi)^2 \rangle_{SG} = \frac{1}{2} \left[-\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 - \frac{|C_0|^2}{2} \right] - \left[\text{Im} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right) \right]^2, \quad (4.34)$$

enquanto que no formalismo de PB encontramos

$$\langle (\Delta \widehat{\cos}\phi)^2 \rangle_{PB} = \frac{1}{2} \left[\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 \right] - \left[\text{Re} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right) \right]^2, \quad (4.35)$$

e

$$\langle (\Delta \widehat{\text{sen}}\phi)^2 \rangle_{PB} = \frac{1}{2} \left[\text{Re} \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) + 1 \right] - \left[\text{Im} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right) \right]^2. \quad (4.36)$$

No caso em que $W(\phi)$ apresentar uma estrutura de picos bem definida é possível determinar todos os coeficientes C_m do campo, da maneira que nós descrevemos na sec.(4.2), e portanto o estado $|\psi\rangle$, podendo-se desta forma conhecer tudo a respeito do campo, até mesmo a variância do operador de fase, como se pode ver pelas Eqs.(4.33)-(4.36). O que

mostraremos a seguir é que mesmo no caso em que $W(\varphi)$ não apresente uma estrutura de picos muito bem definida, sua análise ainda pode fornecer alguma informação sobre o campo, como a variância do operador de fase. A idéia consiste em contar na tela colocada na frente da cavidade, a qual registra a chegada dos átomos espalhados, todos os átomos com momento positivo $\varphi \geq 0$, N_+ e todos os átomos com momento negativo $\varphi < 0$, N_- . Sendo o número de átomos em cada uma destas regiões igual ao número total de átomos multiplicado pela probabilidade dele ser detectado lá, a diferença do número de átomos nas duas partes em relação ao número total de átomos, $N_{tot} = N_+ + N_-$, é dada por

$$\frac{N_+ - N_-}{N_{tot}} = \int_0^\infty W(\varphi) d\varphi - \int_{-\infty}^0 W(\varphi) d\varphi. \quad (4.37)$$

Para a interação de um e de dois ftons pode-se mostrar que esta diferença é dada respectivamente por

$$\frac{N'_+ - N'_-}{N'_{tot}} = Re \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right) \cos(\varphi) + iIm \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1}^* C_m \right) \sin(\varphi) \quad (4.38)$$

e

$$\frac{N_+ - N_-}{N_{tot}} = Re \left(\sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) \cos(\varphi) + iIm \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m-2}^* C_m \right) \sin(\varphi). \quad (4.39)$$

A derivação das Eqs.(4.38), (4.39) é mostrada no apêndice B. Pelas Eqs.(4.38), (4.39), podemos ver que as variâncias dos operadores $\widehat{\cos \phi}$ e $\widehat{\sin \phi}$ dado pelas Eqs.(4.33) e

(4.34) são expressas como seguem

$$\langle (\Delta \widehat{\cos \phi})^2 \rangle_{SG} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{N_+ - N_-}{N_{tot}} \right)_{\varphi=0} + 1 - \frac{1}{2} |C_0|^2 \right]^2 - \left(\frac{N'_+ - N'_-}{N'_{tot}} \right)_{\varphi=0} \quad (4.40)$$

e

$$\langle (\Delta \widehat{\sin \phi})^2 \rangle_{SG} = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{N_+ - N_-}{N_{tot}} \right)_{\varphi=0} + 1 - \frac{1}{2} |C_0|^2 \right]^2 + \left(\frac{N'_+ - N'_-}{N'_{tot}} \right)_{\varphi=\pi/2} \quad (4.41)$$

O primeiro e o segundo termo do lado direito das Eqs.(4.40) e (4.41) devem ser determinados pela experiência usando a interação de um e dois ftons. Similarmente, podemos determinar as variâncias dos operadores no formalismo de PB, uma vez que eles são relacionados aos operadores de SG por

$$\langle (\Delta \widehat{\cos \phi})^2 \rangle_{PB} = \langle (\Delta \widehat{\cos \phi})^2 \rangle_{SG} + \frac{|C_0|^2}{4}, \quad (4.42)$$

$$\langle (\Delta \widehat{\sin \phi})^2 \rangle_{PB} = \langle (\Delta \widehat{\sin \phi})^2 \rangle_{SG} + \frac{|C_0|^2}{4}. \quad (4.43)$$

Pelas Eqs.(4.31) e (4.32) podemos ver que $\langle \widehat{\cos \phi} \rangle = \langle \widehat{\sin \phi} \rangle = 0$ para o estado de vácuo comprimido [onde os coeficientes são dados pela Eq.(2.55)]. Isto pode ser visto pela própria função geradora dos polinômios de Hermite de argumento zero, dado pelas Eqs.(2.58) e (2.59). Este resultado pode também ser visto em termos da distribuição de momento $W'(\varphi)$ a qual é mostrada na Fig.[4.4(b)] para o estado de vácuo comprimido. $W'(\varphi)$ neste caso é simétrica $\left[\int_0^\infty W'(\varphi') d\varphi' - \int_{-\infty}^0 W'(\varphi') d\varphi' = 0 \right]$ e portanto $(N'_+ - N'_-)/N'_{tot} = 0$.

Portanto neste caso temos que as variâncias dos operadores $\widehat{\cos \phi}$ e $\widehat{\sin \phi}$ são dadas simplesmente pelos primeiros termos do lado direito das Eqs.(4.33) e (4.34), que podem ser determinados pela contagem do número de átomos com momento positivo e negativo que atingem a tela no experimento de interação de dois ftons. Por outro lado, para o estado coerente, os dois termos das variâncias dos operadores de fase são não nulos e podem ser determinados da mesma maneira, cada um separadamente pela combinação das interações de um e de dois ftons.

Em conclusão nós propomos uma estratégia para determinar o estado quântico do campo mesmo quando todos os coeficientes pares ou ímpares são nulos. Nossa abordagem é baseada na medida da distribuição de momento de átomos que interagem com o campo durante um intervalo de tempo muito pequeno via interação de dois ftons. Nós encontramos que tal medida pode fornecer melhor resolução que a medida da distribuição de momento de átomos espalhados via interação de um fóton, principalmente quando o número de ftons é grande tal que $\sqrt{m(m+1)} \cong m$ e portanto a localização dos picos é aproximadamente proporcional a m ao invés de $\sqrt{m}$ como no caso da interação de um fóton. Nós também mostramos que a combinação dos dois métodos permite-nos obter a variância dos operadores de fase, mesmo quando a distribuição de momento dos átomos espalhados não esteja muito bem definida.

Capítulo 5

Conclusão

A manifestação quântica macroscópica através de estados sem análogo clássico, como é o caso dos estados comprimidos, nos oferece condições de entendermos cada vez mais a natureza quântica da radiação, além de nos permitir manipular, de acordo com nossas conveniências e necessidades, os limites mínimos imposto por ela. A geração de estados comprimidos já é um conceito muito bem estabelecido e familiar na óptica quântica. Devido à grande aplicabilidade destes estados, existe um grande interesse em sistemas físicos que possam produzi-los. Neste trabalho mostramos que os potenciais não-locais constituem uma importante classe de potenciais que podem gerar estados comprimidos. Isto cria novos mecanismos de onde se poderá obter, eventualmente, estados comprimidos, expandindo o domínio de estudos para este importante efeito quântico. É claro que uma investigação mais profunda da existência, ou não, de sistemas físicos que possam ser descritos por este ou outros modelos alternativos de potenciais não-locais e suas aplicações são assuntos que

ainda merecem nossa atenção.

Além de investigarmos novos mecanismos para a geração de estados comprimidos, também nos interessamos pela sua interação com a matéria. Estudamos a interação da radiação com a matéria no nível mais fundamental, ou seja, considerando a interação de um único modo do campo com um átomo de dois níveis, o chamado modelo de Jaynes-Cummings. Através deste estudo pudemos compreender adequadamente que o comportamento da inversão atômica, representada na forma de colapsos e ressurreições, depende sensivelmente da estatística de ftons do campo que interage com a matéria. Mais do que isso, mostramos que é a definição no número de um determinado estado que é responsável pelas oscilações, enquanto que sua definição na fase é que é responsável pelos colapsos na inversão atômica. Verificamos isto, comparando a inversão atômica considerando o campo inicialmente preparado em um estado coerente comprimido par, em comparação com o campo preparado em dois casos extremos: no estado de número e no estado de fase.

Ainda considerando a interação da radiação com a matéria, investigamos um método pelo qual se pode obter informação sobre o campo, através da matéria que interage com ele. Recentemente o avanço de técnicas modernas da óptica quântica, tem permitido a realização de experimentos onde partículas mais pesadas como átomos, manifestam sua natureza ondulatória durante sua interação com a luz. Assim, o espalhamento de átomos por luz transformou-se em um campo bem estabelecido criando possibilidades para o surgimento de novas idéias que devam levar ao surgimento de novos experimentos. Explorando o espalhamento de átomos por um campo de luz estacionário, o átomo sendo tratado sob o

ponto de vista ondulatório, mostramos que é possível determinar cada coeficiente individual deste campo, determinando assim, o campo propriamente dito. Nosso método consiste na interação de um átomo de dois níveis previamente preparado numa superposição coerente dos seus dois estados, com um campo genérico, via transição de dois ftons. Mostramos que a superposição dos dois níveis atômicos invocam correlações entre os coeficientes do campo, C_m , C_{m-2} , que se manifesta na assimetria da distribuição de momento dos átomos que são defletidos devido à sua interação com o campo, permitindo-nos determinar cada coeficiente individual, C_m do campo.

Nosso método é uma extensão de um trabalho recente na literatura, que propõe determinar o estado do campo através da medida da distribuição de momento dos átomos espalhados via interação de um fóton. Entretanto este método de interação de um fóton falha nos seus propósitos para campos especiais tal que todos os coeficientes pares ou ímpares são nulos, que são uma classe de estados muito importante, onde se inclui o estado de vácuo comprimido. Com o nosso método de interação de dois ftons, mostramos que é possível resolver o problema da indeterminação destes campos especiais. Mostramos também que nossa abordagem alternativa, quando combinada com a da interação de um fóton, permite-nos obter a variância do operador de fase.

As idéias aqui discutidas, mostram a relevância que o espalhamento de átomos pode ter nos estudos de aspectos mais fundamentais da óptica quântica. Isto não quer dizer de forma alguma, que a realização experimental destas idéias seja fácil. Certamente em alguns casos o avanço da tecnologia experimental ainda deve atingir novos estágios a fim de tornar

viáveis algumas das idéias aqui propostas. De qualquer forma, tanto do ponto de vista teórico como experimental vale a pena concentrar esforços neste fascinante campo da física.

Como continuidade deste trabalho, estamos verificando teoricamente a possibilidade de eliminar certas restrições que foram feitas aos nossos cálculos, como por exemplo, na largura da fenda colocada na frente da cavidade, nos pesos dos dois níveis atômicos e na influência de uma dessintonia incluída no Hamiltoniano de interação, buscando investigar como pequenos desvios destas prescrições afetam os resultados obtidos. Outro interesse é relacionado com a modificação que o campo sofre com a passagem de cada átomo. Neste sentido, devemos começar investigando certos campos especiais que não sejam tão perturbados com a passagem de cada átomo e verificar com que precisão pode-se ainda determinar os coeficientes, para estes campos. O passo seguinte é considerar o campo em um estado mais geral, como em um estado de mistura.

Apêndice A

Obtenção do estado coerente como caso particular do estado coerente comprimido

Pela função geradora dos polinômios de Hermite,

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m!}{k! (m-2k)!} (2x)^{m-2k}, \quad (A1)$$

podemos ver que seu limite assintótico é obtido quando $k = 0$. Para este valor máximo, os polinômios de Hermite dado pela Eq.(A1) se reduzem a

$$H_m(x) = (2x)^m. \quad (A2)$$

Substituindo a Eq.(A2) na Eq.(2.51), com $x = \beta(2\mu\nu)^{-1/2}$, $\mu = 1$ e $\nu = 0$, obtemos

$$C_m = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}},$$

que são os coeficientes do estado coerente.

Apêndice B

Derivação das Eqs.(4.38) e (4.39)

Substituindo a Eq.(4.11) na Eq.(4.37) e usando que

$$\int_{-\infty}^0 e^{a(\wp-b)^2} d\wp = \int_0^{\infty} e^{a(\wp+b)^2} d\wp, \quad (B1)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{N_+ - N_-}{N_{tot}} = & \alpha \sum_{m=2}^{\infty} |C_m + e^{i\varphi} C_{m-2}|^2 \cdot \left\{ \int_0^{\infty} e^{\delta(\wp-\beta)^2} d\wp - \int_0^{\infty} e^{\delta(\wp+b)^2} d\wp \right\} \\ & + \alpha \sum_{m=2}^{\infty} |C_m - e^{i\varphi} C_{m-2}|^2 \cdot \left\{ \int_0^{\infty} e^{\delta(\wp+b)^2} d\wp - \int_0^{\infty} e^{\delta(\wp-b)^2} d\wp \right\}, \end{aligned} \quad (B2)$$

onde por simplicidade, chamamos

$$\beta = \sqrt{m} \kappa, \quad \delta = -k^2 \sigma^2, \quad \alpha = \frac{k\sigma}{4\sqrt{\pi}} \quad (B3)$$

usando a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2 - 4ac)/4a} \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)$$

obtemos,

$$\int_0^\infty e^{\delta(\wp+\beta)^2} d\wp = G \cdot \operatorname{erfc}(\zeta_+) , \quad (B4)$$

$$\int_0^\infty e^{\delta(\wp-\beta)^2} d\wp = G \cdot \operatorname{erfc}(\zeta_-) e^{2k^2\sigma^2 m\kappa^2} . \quad (B5)$$

onde

$$G = \frac{\sqrt{\pi}}{2k\sigma} , \quad \zeta_\pm = \pm\sigma k\sqrt{m}\kappa . \quad (B6)$$

Substituindo as Eqs.(B4) e (B5) na Eq.(B2) e usando o resultado

$$\begin{aligned} |C_m \pm e^{i\varphi} C_{m-2}|^2 &= |C_m|^2 + |C_{m-2}|^2 \\ \pm 2\operatorname{Re}(C_m C_{m-2}^*) \cos(\varphi) &\pm 2\operatorname{Im}(C_m C_{m-2}^*) \sin(\varphi) , \end{aligned} \quad (B7)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{N_+ - N_-}{N_{tot}} &= \alpha \sum_{m=2}^\infty 2G \operatorname{Re}(C_m C_{m-2}^*) \cos(\varphi) [\operatorname{erfc}(\zeta_-) - \operatorname{erfc}(\zeta_+)] \\ &+ \alpha \sum_{m=2}^\infty 2G \operatorname{Im}(C_m C_{m-2}^*) \sin(\varphi) [\operatorname{erfc}(\zeta_-) - \operatorname{erfc}(\zeta_+)] . \end{aligned} \quad (B8)$$

onde

$$\operatorname{erfc}(\zeta_\pm) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta_\pm}^\infty e^{-x^2} dx . \quad (B9)$$

No limite em que $\zeta \gg 1$, o que corresponde a grandes valores de κ na Eq.(B6),

temos

$$\operatorname{erfc}(\zeta_+) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^\infty e^{-x^2} dx = 0 , \quad (B10)$$

$$\operatorname{erfc}(\zeta_-) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 1 . \quad (B11)$$

Substituindo as Eqs.(B10) e B(11) na Eq.(B8), obtemos a Eq.(4.39). Analogamente obtém-se a Eq.(4.38)

Bibliografia

- [1] C. J. Davisson e L. H. Germer *“Diffraction of electrons by a crystal of nickel”*
Phys. Rev. **30**, 705(1927).

- [2] P. L. Kapitza e P. A. M. Dirac *“The reflection of electrons from standing light wave”*
Phil. Soc. Phys. Sci **29**, 297(1933).

- [3] L. S. Bartel, R. R. Roskos e H. B. Thompson *“Reflection of electrons by standing light waves: experimental study”* Phys. Rev. **166**, 1494(1968).

- [4] S. Altshuler, L. M. Frantz e R. Braunstein *“Reflection of atoms from standing light waves”* Phys. Rev. Lett. **17**, 231(1966).

- [5] P. L. Gould, G. A. Ruff e D. E. Pritchard *“Diffraction of atoms by light: the near-resonant Kapitza-Dirac effect”* Phys. Rev. Lett. **56**, 827(1986).

- [6] Para uma revisão sobre a dualidade onda partícula da matéria ver Ronaldo S. Barbieri
“Wave-particle duality: has the history been completed ? (A review on the interaction of particles with standing-wave radiation field)” Ciência e Cultura **44**, 378(1992).

- [7] R. J. Glauber *“Coherent and incoherent states of the radiation field”* Phys. Rev.
131, 2766(1963).
- [8] E. C. Sudarshan *“Equivalence of semiclassical and quantum descriptions of statistical
light beams”* Phys. Rev. A 43, 3832(1991).
- [9] H. J. Carmichael e D. F. Walls *“A quantum-mechanical master equation treatment of
the dynamical Stark effect”* J. Phys. B 9, 1199(1976).
- [10] H. J. Kimble, M. Dagenais e L. Mandel *“Photon antibunching in resonance fluores-
cence”* Phys. Rev. Lett. 39, 691(1977).
- [11] E. T. Jaynes e F. W. Cummings *“Comparison of quantum and semiclassical radiation
theories with applications to the beam maser”* Proc. IEEE 51, 89(1963).
- [12] D. Stoler *“Equivalence classes of minimum uncertainty packets”* Phys. Rev. D 1,
3271(1970).
- * [13] H. P. Yuen *“Two-photon coherent states of the radiation field”* Phys. Rev. A 13,
2226(1976).
- 7 [14] R. E. Slusher, L. W. Holberg, B. Yurke, J. C. Mertz e J. F. Valley *“Observation of
squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity”* Phys. Rev. Lett.
55, 2409(1985).
- [15] C. M. Caves *“Quantum mechanical noise in an interferometer”* Phys. Rev. D 23,
921(1981).

- [16] Para uma revisão sobre estados comprimidos ver J. Opt. Soc. Am. B **4** (10)(1987);
J. Mod. Opt. **34** (78) (1987).
- [17] B. Baseia, Célia M. A. Dantas e V. S. Bagnato “*Nonlocal potential as generators of squeezing*” Phys. Lett. A **187**, 281(1994).
- [18] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J. M. Raimond e S. Haroche “*From Lamb shift to light shifts: vacuum and subphoton cavity fields measured by atomic phase sensitive detection*” Phys. Rev. Lett. **72**, 3339(1994).
- ✂ [19] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond e N. Zagury “*Quantum nonde-
molition measurement of small photon numbers*” Phys. Rev. Lett. **65**, 976(1990) ;
M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich e N. Zagury “*Manipulation of
photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measure-
ments and generation of “Schrödinger cat” states*” Phys. Rev. A **45**, 5193(1993).
- [20] L. Davidovich “*Estados comprimidos de fase em cavidades*” XVI ENFMC,
Caxambu-MG, 18-22 de Maio de 1993.
- [21] W. H. Louisell Quantum Statistical Properties of Radiation (Wiley, 1973)
- [22] R. S. Bondurant e J. H. Shapiro “*Degenerate four wave-mixing as a possible source of
squeezed-states light*” Phys. Rev. A **30**, 343(1984).
- [23] L. Susskind e J. Glogower “*Quantum mechanical phase and time operator*” Physics
1, 49(1964).

- [24] D. T. Pegg e S. M. Barnett *“Unitary phase operator in quantum mechanics”*
Europhysics Lett. **6**, 483(1988).
- [25] M. Kitagawa e Y. Yamamoto *“Number-phase minimum-uncertainty state with reduced
number uncertainty in a Kerr nonlinear interferometer”* Phys. Rev. A **34**, 3974(1986).
- [26] M. J. Collett *“Generation of number-phase squeezed states”* Phys. Rev. Lett. **70**,
3400(1993).
- [27] K. Gottfried Quantum Mechanics (Benjamin, New York, 1965) ; A. Bohr and B.
Mottelson, Nuclear structure, Vol I (Benjamin, New York, 1969).
- [28] G. H. M. van Tartwijk e D. Lenstra *“Nonlocal potential for class-B lasers with external
optical feedback”* Phys. Rev. A **50**, R2837(1994); B. Baseia *“Extended Schrödinger
equations leading to critical phenomena”* J. Math. Phys. **30**, 81(1989); B. Baseia
*“Integro-differential Schrödinger equation as an extension of the differential Schrödinger
equation”* Phys. Rev. A **38**, 1632(1988).
- [29] Y. Yamaguchi *“Two-nucleon problem when the potential is nonlocal but separable”*
Phys. Rev. **95**, 95(1954); F. Tabakin *“Single separable potential with attraction and
repulsion”* Phys. Rev. **174**, 1208(1968).
- [30] P. Filipowicz, P. Meystre, G. Rempe e H. Walther *“A testing ground
for quantum electrodynamics”* Opt. Acta **32**, 1105(1985) ; S. Haroche e J.
M. Raimond, *“Radiative properties of Rydberg states in resonant cavities”*
Adv. atom. molec. Phys. **20**, 347(1985); S. Haroche *“Fundamental systems in quantum*

- optics*” Session LII of Les Houches Summer School 1990, editado por J. Dalibard, J. M. Raimond e J. Zinn-Justin - North Holland, Amsterdam, 1992.
- [31] G. Rempe, H. Walther e N. Klein “*Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*” Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [32] J. H. Eberly, N. B. Narozhny e J. J. Sanchez-Mondragon “*Periodic Spontaneous collapse and revivals in a simple quantum model*” Phys. Rev. Lett. **44**, 1323(1980); G. J. Milburn “*Interaction of a two-level atom with squeezed light*” Opt. Acta **31**, 671(1984); M. V. Satyanarayana, P. Rice, R. Vyas e H. J. Carmichael “*Ringings revivals in the interaction of a two-level atom with squeezed light*” J. Opt. Soc. Am. B **6**, 228(1989); H. Moya Cessa e A. Vidiela Barranco “*Interaction of squeezed light with two-level atoms*” J. Mod. Opt. **39**, 2481(1992); Célia M. A. Dantas, B. Baseia, A. N. Chaba e V. S. Bagnato “*Population trapping in a generalized Jaynes- Cummings model*” Mod. Phys. Lett. B **8**, 1555(1994).
- [33] W. Schleich, M. Pernigo e Fam Le Kien “*Nonclassical states from two pseudoclassical states*” Phys. Rev. A **44**, 2172(1991).
- [34] K. Wódkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle e S. M. Barnett “*Squeezing and superposition states*” Phys. Rev. A **35**, 2567(1987).
- [35] B. Yurke e D. Stoler “*Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion*” Phys. Rev. Lett. **57**, 13(1986).

- [36] C. C. Gerry e E. E. Hach “*Generation of even and odd coherent states in a competitive two-photon processe*” Phys. Lett. A **174**, 185(1993) ; M. Hilley “*Amplitude squared squeezing of the electromagnetic field*” Phys. Rev. A, 3796(1987)

- [37] C. C. Gerry e E. E. Hach “*Interaction of a two-level atom with an even coherent state*” Phys. Lett. A **179**, 1(1993).

- [38] Z. Z. Xin, D. B. Wang, M. Hirayama e K. Matumoko “*Even and odd two-photon coherent states of the radiation field*” Phys. Rev. A **50**, 2865(1994).

- [39] Célia M. A. Dantas, B. Baseia e V. S. Bagnato “*Interaction of a two-level atom with even and odd two-photon coherent states of the radiation field*” Submetido para publicação (1995).

- [40] W. Schleich e J. A. Wheeler “*Oscillations in photon distributions of squeezed states*” J. Opt. Soc. Am. B **4**, 1715(1987).

- [41] B. W. Shore e P. L. Knight *Para uma recente revisão do modelo de JC, e algumas das muitas extensões e generalizações do modelo, ver “Topical review The Jaynes-Cummings model”* J. Mod. Opt. **40**, 1195(1987), e referências contidas lá.

- * [42] K. E. Cahill e R. J. Glauber “*Density operators and quasiprobability distributions*” Phys. Rev. **177**, 1882(1969).

- [43] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer e A. Faridani “*Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodine tomography*”

- appliction to squeezed states and the vacuum*" Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993); M. Wilkens e P. Meystre "Nonlinear atomic homodyne detection: A technique to detect macroscopic superposition in a micromaser" Phys. Rev. A **43**, 3832(1991).
- [44] A. M. Herkommer, V. M. Akulin e W. P. Schleich "Quantum demolition measurement of photon statistics by atomic beam deflection" Phys. Rev. Lett. **69**, 3298(1992) ; V. M. Akulin, Fam Le Kien e W. P. Schleich "Deflection of atoms by a quantum field" Phys. Rev. A **44**, R1462(1991) ; P. Meystre, E. Schumacher e S. Stenholm "Atomic beam deflection in a quantum field" Opt. Commun. **73**,443(1989) ; H. J. Holland, D. F. Walls e P. Zoller "Quantum nondemolition measurements of photon number by atomic beam deflection" Phys. Rev. Lett. **67**,1716(1991).
- [45] B. Baseia, Reeta Vyas, Celia M. A. Dantas e V. S. Bagnato "Scattering of atoms by light: probing a quantum state and variance of the phase operator" Phys. Lett. A **194**, 153(1994).
- [46] M. Freyberger and A. M. Herkommer "Probing a quantum state via atomic deflection" Phys. Rev. Lett. **72**, 1952(1994).