UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

"Construção das Representações Irredutíveis das Álgebras q Deformadas U_q (su(2)) e U_q (sl(3)) na Raiz da Unidade".

USP / IFQSC / SBI
8-2-001143

FERNANDO FAGUNDES FERREIRA

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências "Física Básica".

Orientador: Prof.Dr. José Eduardo Martinho Hornos

SÃO CARLOS SÃO PAULO
1997

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

Ferreira, Fernando F.

Construção das representações irredutíveis das álgebras q deformadas $U_q(su(2))$ e $U_q(sl(3))$ na raiz da unidade/Fernando F. Ferreira.–São Carlos, 1997.

<97> p.

Tese (Mestrado)–Instituto de Física de São Carlos, 1997.

Orientador: Prof. Dr.José Eduardo M. Hornos

1.Álgebras Quânticas. 2.Álgebras q deformadas. 3.Álgebras de Lie. I. Título.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
CEP 13560-250 - São Carlos - SP
Brasil

Fone (016) 272-6222
Fax (016) 272-2218

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **FERNANDO FAGUNDES FERREIRA** APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 17 DE MARÇO DE 1997.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos/IFSC-USP

Prof. Dr. José Fernando Fontanari/IFSC-USP

Prof. Dr. Robert Sebastian Sachse/IME-USP

1743

Aos meus pais

Agradecimentos

Gostaria de agradecer todas as pessoas que contribuiram direta e indiretamente para a realização deste trabalho. Em especial:

- Ao Prof. Hornos, pela oportunidade de realizar o mestrado sob sua orientação, através de um belíssimo projeto, pelos 6 anos como professor durante a graduação e o mestrado, pela influência positiva que exerceu sobre minha formação, sempre muito crítico, incentivador, criativo, ambicioso, além de esbanjar muita cultura. Incontestavelmente foi um prazer muito grande trabalhar com o Professor Hornos.

- Ao Esmerindo, pela incrível assistência computacional e acadêmica, ajudando-me com as discussões sobre teoria de grupos, álgebras de Lie e sobretudo álgebras quânticas, e com sugestões que foram decisivas. A ele sou extremamente grato.

- Aos amigos: Marconi, Washington, Salviano, que me ajudaram a caminhar pelos labirintos do "*Scientific WorkPlace* ". Valeu mesmo!

- Aos amigos do grupo de pesquisa: Cláudia, Lígia, Antônio Sérgio, Zé Paulo, Gabriel, Mauro, João Paulo e Cristiano, por terem proporcionado uma convivência muito agradável e um ambiente propício para a pesquisa.

- Aos Amigos: Esponja, Marletta, Cleber, Fernandão, Nório, Jabah, Domingos, Marcinho, Daniela, Cristiane, Maria do Rosario, Pepo, Ana, Júlio, Pira, Waldeck, e aos muitos outros amigos da minha turma pelos anos que compartilhamos uma amizade profícua, tanto nas jornadas de estudo, quanto nos momento de ócio.

- Aos meus amigos José Maurício e Christian, pela amizade sincera, pelas longas horas de discussão, pelas críticas, pelo intercambio cultural, que indubitavelmente contribuiram, como elementos instigadores, para que eu pudesse atingir meus objetivos.

- Ao meu amigo e professor Milton F. Peixoto, pelo incentivo, pela ajuda nos tempos difíceis que enfrentamos na escola Adelino Peters, e sobretudo por ter acreditado, fomentado e

imprimido em nosso espírito o ideal da busca por um ensino de qualidade.

- A todos os meus amigos penapolenses.
- Ao Santos Futebol Clube, que desde a minha tenra infância ensinou-me a ser um sofredor tácito e perseverante com suas incontáveis derrotas!
- Aos meus queridos amigos do peito: Marcelo (Ianella), Junião, Ricardo (Rick), Sandro (Zé Pinto), João, Aguinaldo, Fabinho (Cipó), Anderson (Acerola), Bisnaga, Zinho, pelos anos que moramos juntos, pela amizade fraterna, solidária e leal, por estarem presentes, tanto nos momentos difíceis, quanto nos momento de alegria. É impossível dizer em palavras o quanto sou grato.
- Finalmente à minha mãe Ester, meu pai Elpídio, meus irmãos Flávio e Flaviano, à minha tia Irani, à minha avó Isaura, ao meu tio Antônio e à minha prima Antônia. Sem eles nada disso teria sentido.
- A todos, de coração, obrigado.

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

O presente trabalho foi financiado pela ***FAPESP***

Índice

Lista de Figuras iii

Lista de Tabelas iv

Resumo vi

Abstract vii

1 Introdução 1

2 Álgebras de Lie 6

2.1 Conceitos básicos 6

2.1.1 Estruturas das Álgebras de Lie semisimples. 13

2.1.2 Representações 15

2.1.3 A Relação entre a Álgebra e o Grupo 18

3 Raízes. 21

3.0.4 Forma Padrão das Álgebras de Lie Semisimples. 22

3.0.5 Raízes. 24

3.0.6 Diagrama de Dynkin e a Matriz de Cartan 27

3.0.7 A forma de Dynkin para Raízes e a Mudança de base 30

3.0.8 Determinação de todas as Raízes a partir das Raízes Simples 32

3.0.9 A Base de Chevalley 33

4 Pesos e Operadores de Casimir 35

4.1 Pesos 35

4.2 Operadores de Casimir 40

5 O método de Gel'fand-Zetlin **43**

5.1 A Representação da Álgebra su(2) 43

5.2 O método de Gel 'fand-Zetlin. 46

5.2.1 A base de Gel'fand-Zetlin para a álgebras sl(3). 49

6 Álgebras Quânticas **57**

6.1 Representações 58

6.1.1 Operadores de Bosons 59

6.1.2 Os Operadores de Bosons q-deformados 60

6.2 A álgebra quântica $U_q(su(2))$ 60

6.2.1 As quebras das representações de $U_q(su(2))$ na raíz da unidade 62

6.3 A álgebra quântica $U_q(sl(3))$ 70

6.3.1 A base de Gel'fand-Zettlin para a álgebra $U_q(sl(3))$ 70

6.3.2 Matrizes das Representações da Álgebra $U_q(sl(3))$ 73

6.4 Reduções Dimensionais das Representações de $U_q(sl(3))$ 77

6.4.1 Resultados Finais 81

6.5 O operador de Casimir 86

6.5.1 O operador de Casimir da subalgebra $U_q(sl(2))$ 88

7 Conclusões **94**

7.1 Perspectivas 95

Lista de Figuras

1.1 Regras de Tradução: RNA 3

1.2 O Espectro do Código Genético 4

2.1 Estrutura das Álgebras de Lie 15

5.1 Diagrama de Peso da Representação (1,0) 55

5.2 Diagrama de Peso da Representação (2,0) 56

5.3 Diagrama de Peso da Representação (1,1) 56

5.4 Diagrama de Peso da Representação (3,0) 56

6.1 Representação (2,0) em $\theta = \frac{\pi}{2}$ 78

6.2 Representação (1,1) em $\theta = \frac{\pi}{3}$ 79

6.3 Representação (3,0) em $\theta = \frac{\pi}{2}$ 79

6.4 Representação (3,0) em $\theta = \frac{\pi}{3}$ 79

Lista de Tabelas

2.1 As Matrizes dos Grupos e das Álgebra de Lie 20

3.1 Regras Comutação da Álgebra gl(3) 25

3.2 Diagrama de Dynkin para as Álgebras Clássicas 28

3.3 Diagrama de Dynkin para as Álgebras Excepcionais 28

3.4 Base de Chevalley para sl(3) 34

4.1 Operadores de Casimir 42

5.1 Dimensão das Representações Irredutíveis da Álgebra A_2 51

6.1 Ângulos de quebra para j=3/2 64

6.2 Redução dimensional para j=3/2 64

6.3 Ângulos de quebra para j=2 64

6.4 Redução dimensional para j=2 65

6.5 Ângulos de quebra para j=5/2 65

6.6 Redução dimensional para j=5/2 66

6.7 Ângulos de quebra para j=3 66

6.8 Redução dimensional para j=3 67

6.9 Ângulos de quebra para j=7/2 67

6.10 Redução dimensional para j=7/2 68

6.11 Ângulos de quebra para j=4 68

6.12 Redução dimensional para j=4 69

6.13 Relações de Comutação da álgebra Uq(sl(3)) 71

6.14 Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/2$ 82

6.15 Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/3$ 83

6.16 Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/4$ 83
6.17 Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/5$ 84
6.18 Dimensão das Representaçõesl de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/6$ 84
6.19 Dimensãol das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/7$ 85
6.20 Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/8$ e $\pi/9$ 85
6.21 Representações de $U_q(sl(3))$ 86
6.22 Regras de Ramificação 89

Resumo

As Álgebras Quânticas foram recentemente introduzidas como uma generalização das álgebras de Lie clássicas e estão sendo intensamente investigadas, tanto de um ponto de vista matemático quanto em aplicações envolvendo problemas de Mecânica Estatística e Física Molecular. As representações dessas álgebras podem ser construídas a partir de técnicas tradicionais e apresentam novidades se o parâmetro de deformação q for uma raiz complexa da unidade, e neste caso pode ocorrer perda de irredutibilidade e consequentemente alterações nas dimensões dessas representações. Primeiramente, estudamos as representações no caso clássico, a seguir introduzimos as deformações quânticas nas relações de comutação envolvendo os geradores associados às raízes simples. Posteriormente, estudamos especificamente o caso em que q é uma raiz complexa da unidade, à procura de novas reduções dimensionais que não aparecem no caso clássico. Mais precisamente, nos detemos ao estudo das representações das álgebras deformadas $U_q(su(2))$ e $U_q(sl(3))$, determinando suas a dimensões, os vetores de base do espaço portador e as suas matrizes irredutíveis. Por fim, calculamos o operador de Casimir quadrático deformado procurando saber como ficam as regras de ramificação da cadeia $U_q(sl(3)) \supset U_q(sl(2))$.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

Abstract

The Quantum Algebras has been recently introduced as a generalization of classical Lie algebras. The representations of these algebras can be built from the traditional technics and arise novelty, if the parameter of deformation q is a root of unity, in this case, can occur loss of irredutibility and consequently alteration in the dimension of these representations. First of all, we study the representations in the classic case, after that we introduce the quantum deformation in the comuting relations involving the generators associated with the simple roots. Subsequently we studied specifically the case that q is a root of unity, searching for dimensional reduction that do not appear in the classic algebras. More exactly, we studied the deformed representations of $\mathrm{U}_q(su(2))$ e $\mathrm{U}_q(sl(3))$, determining their dimensions, the base vectors of the carrier space and their irreducible matrices. Finally, we calculated the deformed quadratic Casimir operator in the chain $\mathrm{U}_q(sl(3)) \supset \mathrm{U}_q(sl(2))$.

Capítulo 1

Introdução

Wigner conta que quando publicou o livro intitulado " *Group Theory And Its Applications To The Quantum Mechanics Of Atomic Spectra* " em 1931 [1], havia uma grande relutância entre os físicos em aceitar argumentos de teoria de grupos para ajudar a solucionar problemas em Física, e que essa relutância foi virtualmente desaparecendo. Da geração mais velha foi provavelmente M. Laue quem primeiro reconheceu o significado da teoria de grupos como uma ferramenta natural com a qual se obtém as primeiras orientações em um problema de mecânica quântica. Encontrar o espectro atômico a partir da equação de Schrödinger, por meio de cálculos diretos, resultam no desenvolvimento de técnicas numéricas que fornecem aproximações de soluções reais. É gratificante ver que grande parte dos resultados relevantes podem ser deduzidos, considerando operações de simetria. Com o desenvolvimento de alguns ramos da física teórica, como a física de altas energias, física nuclear entre outras , a teoria de grupos vai deixando de ser considerada meramente uma valiosa ferramenta para elucidar os aspectos de simetria dos mais variados problemas e passa a ocupar uma posição indispensável e crucial no desenvolvimento da própria Física.

Recentemente surgiu o conceito de Álgebras Quânticas, também conhecida por Grupos Quânticos, como uma tentativa de entender as características comuns de modelos exatamente solúveis em Mecânica Quântica. Elas são generalizações dos conceitos fundamentais de simetria das álgebras de Lie envolvendo duas idéias fundamentais e distintas: Deformação e co-multiplicação não comutativa. Na verdade, a álgebra universal envolvente é deformada ao definirmos algumas constantes de estruturas como funções contínuas de um parâmetro q, de forma a recuperarmos a álgebra de Lie tradicional quando tomamos q=1. A idéia de deformação

não é nova em Física. O grupo de Poincaré da relatividade Einsteniana pode ser considerada uma deformação do grupo de Galileu da relatividade Newtoniana, a qual é recuperada no limite $c \to \infty$. A mecânica quântica pode ser considerada a deformação da mecânica clássica, a qual pode também ser recuperada no limite $\hbar \to 0$ [2].

A primeira Álgebra Quântica escrita foi o SU(2) deformado, por Kulish, Reshetikhin [3] e Sklyanin, Takhtajan e Fadeev [4, 5] usado no método de espalhamento inverso quântico para estudar o comportamento de sistema integraveis em teoria de campo quântico e mecânica estatística.

Contudo, nos últimos anos, as Álgebras Quânticas vêm sendo largamente aplicadas na Física e na Matemática, em problemas que serão meramente mencionados: em gravidade quântica, por Gervais [6]; em teoria de gauge, por Witten [7,8]; em teoria de campo quântica, Reshetikhin e Smirnov [5]; em espectro rotacional de núcleos e moléculas, por Bonatsos e Daskaloyannis [9]; em ótica quântica, por Solomon [10]; em física da matéria condensada, Rasetti [7]; entre outros. Os grupos quânticos têm fornecido significantes e às vezes espetaculares conexões entre algumas áreas da Matemática.

As álgebras quânticas foram formalizadas em 1986 por Drinfeld [11–13] em termos de uma álgebra de Hopf (não necessariamente comutativa). Esta forma de apresentar os álgebras quânticas é muito abstrata e pouco atraente aos físicos, devido ao infeliz fato de muitas teorias da matemática moderna estarem escritas em um estilo de difícil cognição. Por isso nos propusemos a investigar as álgebras mais simples como o $U_q(su(2))$ e $U_q(sl(3))$ a partir de suas representações explícitas como uma alternativa para estudar e entender alguns fenômenos simples e relevantes exibidos por esta estrutura, e em seguida explorá-las por meio de aplicações. Finalmente a motivação primordial desta dissertação fora dada pelo trabalho de Hornos e Hornos [14] que propuseram um modelo algébrico para a evolução do código genético.

As primeiras idéias a respeito da evolução surgiram há muito tempo, mas elas se fundamentaram lentamente a ponto de culminarem nas sólidas teorias em biologia. Até o século XIX, não se tinha tentado explicar a evolução das espécies, e a idéia generalizada, adotada até mesmo por vários naturalistas, era a do **fixismos,** ou seja, a de que as espécies eram únicas e imutáveis. A partir dos trabalhos de Lamarck e Darwin, o **evolucionismo** começa a ser discutido. Atualmente o estudo da evolução se dá em nível molecular, por meio de moléculas portadoras de informações biológicas, como os ácidos nucleicos e as proteínas. Os

ácidos nucleicos são moléculas formadas pelo encadeamento de um grande número de unidades chamadas nucleotídeos. Cada nucleotídeo é formada por três tipos de substâncias químicas: um composto cíclico contendo nitrogênio (base nitrogenada), um açúcar de cinco carbonos (pentose) e um radical do ácido fosfórico (fosfato). Os nucleotídeos estão ligados, formando uma longa cadeia de açúcar e fosfato, da qual se projetam as bases nitrogenadas. Existem cinco tipos de bases e dois tipos de açúcares, formando nucleotídeos diferentes. Em alguns ácidos nucleicos só há nucleotídeos com o açúcar ribose, que são chamados de ácido ribonucleico (**RNA**), em outros apenas com o açúcar desoxirribose, chamados de ácido desoxirribonucleico (**DNA**).

As moléculas de RNA são polímeros compostos por quatro bases nitrogenadas, a saber: adenina (**A**), guanina (**G**), uracil (**U**) e citosina (**C**). Traduzir a mensagem genética significa passar o código, que está na forma de "letras " (bases) do RNA, para uma sequência de aminoácidos que formam uma proteína. Desse modo, a mensagem genética contida no RNA é materializada na forma de uma proteína estrutural ou enzimática, que por sua vez é responsável por uma característica do organismo. O mecanismo de tradução é o seguinte: um grupo de três letras (bases) consecutivas do RNA é o código correspondente a um aminoácido. Esses trios de base, chamados **códons**, são todos conhecidos, veja a figura 1.1 e são o mesmo para a grande maioria dos seres vivos. Note que há quatro bases, combinando-se três a três, formando um total de 64 códons. Contudo há somente 20 aminoácidos que participam do processo da vida, mais um código de terminação, portanto ocorrem muitas degenerescências, ou seja, existe simetria.

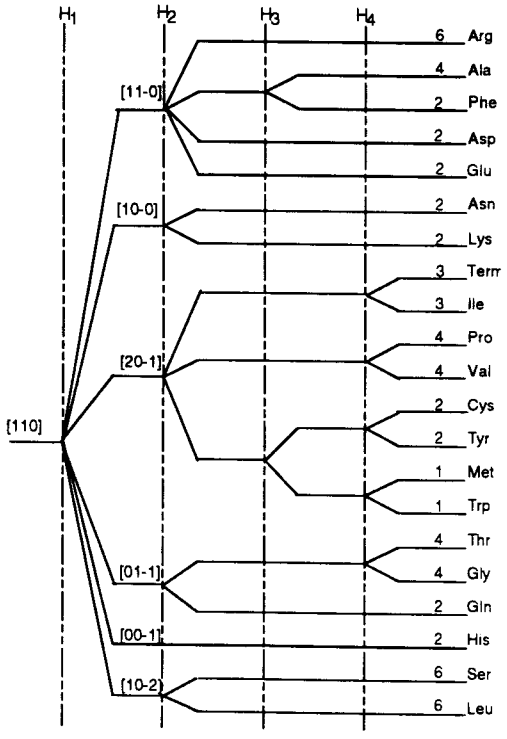
Primeira base	Segunda base				Terceira base
	U	A	C	G	
U	Phe	Ser	Tyr	Cys	U
	Phe	Ser	Tyr	Cys	C
	Leu	Ser	Term	Term	A
	Leu	Ser	Term	Trp	G
C	Leu	Pro	His	Arg	U
	Leu	Pro	His	Arg	C
	Leu	Pro	Gln	Arg	A
	Leu	Pro	Gln	Arg	G
A	Ile	Thr	Asn	Ser	U
	Ile	Thr	Ans	Ser	C
	Ile	Thr	Lys	Arg	A
	Met	Thr	Lys	Arg	G
G	Val	Ala	Asp	Gly	U
	Val	Ala	Asp	Gly	C
	Val	Ala	Glu	Gly	A
	Val	Ala	Glu	Gly	G

Figura~1.1: Regras de Tradução: RNA

O modelo algébrico para o código genético é uma abordagem matemática, baseada na procura de simetrias entre as álgebras de Lie complexas com o objetivo de reproduzir as degenerescências apresentadas pelo código genético. Dessa forma procura-se investigar a própria evolução do código genético. A idéia resume-se em associar os 64 códons a estados que formem uma base num espaço vetorial portadora de uma representação irredutível de uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$. A representação da álgebra $\mathcal{L}$ será decomposta em somas de representações irredutíveis de uma cadeia de subálgebras $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_1 \supset ... \supset \mathcal{L}_n$. No final desta cadeia devemos encontrar 21 subespaços com dimensões dadas pelas degenerescências dos códons. Estes subespaços serão etiquetados pelos 20 aminoácidos mais o códon de terminação. O resultado desta procura mostrou que a álgebra simplética sp(6) foi a melhor simetria para o processo de tradução, e a cadeia completa proposta para a evolução do código foi:

$$sp(6) \supset sp(4) \otimes su(2) \supset su(2) \otimes su(2) \otimes su(2).$$

contudo esta simetria não é perfeita no sentido de reproduzir naturalmente a degenerescência do código genético. Por isso foi introduzido um termo de congelamento no hamiltoniano para descrever o espectro do código no estágio atual mostrado na figura 1.2.



Figura~1.2: O Espectro do Código Genético

O objetivo dessa dissertação é construir as representações irredutíveis das álgebras deformadas $U_q(su(2))$ e $U_q(sl(3))$ a partir de técnicas tradicionais, determinando a dimensão do espaço portador dessas representações quando q é uma raiz da unidade.

Começamos esta dissertação fazendo uma revisão dos conceitos fundamentais que julgamos mais importantes sobre grupos e álgebras de Lie, expomos sua estrutura, lançando idéias básicas sobre representação e, em seguida, discutimos brevemente a relação entre o grupo e a álgebra, capítulo 2. Depois, no capítulo 3, nos dedicamos ao estudo das raízes e suas propriedades. Os pesos e os operadores de Casimir quadráticos são vistos no capítulo 4, onde se encontram as definições e os teoremas principais. As técnicas tradicionais que permitem construir explicitamente as representações irredutíveis das álgebras de Lie clássicas são apresentadas no capítulo 5.

Finalizamos este trabalho com um capítulo sobre as Álgebras Quânticas, onde construímos as representações das álgebras unitárias deformadas para um parâmetro q arbitrário. Por meio de uma análise exaustiva, tomando q na raiz da unidade, observamos a perda de irredutibilidade de $U_q(su(2))$ e $U_q(sl(3))$, e ainda investigamos a decomposição dessas representações na cadeia $U_q(sl(3)) \supset U_q(sl(2))$.

Por se tratar de um tópico muito abstrato, procuramos realizar este trabalho por meio de uma abordagem simples, compreensível e sobretudo intuitiva, usando representações explícitas (matrizes) e muitos exemplos. Este enfoque privilegia sobretudo os físicos, porque ele visa em ultima instância, as mais diversas aplicações em ciências naturais.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

Capítulo 2

Álgebras de Lie

É uma tarefa árdua expor em poucas linhas as idéias básicas das álgebras de Lie, pois corremos o risco de perder toda a beleza que esse ramo do conhecimento matemático desfruta. As álgebras de Lie, conforme enfatizamos na introdução, fornecem uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas em Física, porque elas organizam as informações dos mais variados sistemas e nos levam a interpretações com base em argumentos de simetria.

2.1 Conceitos básicos

Neste capítulo temos três objetivos a serem alcançados. O primeiro é expor a estrutura das álgebras de Lie visando uma classificação geral [15,16]. Em seguida apresentamos o conceito de representação [17], por desempenhar um papel central no nosso trabalho e finalmente mostrar alguns resultados que ilustram a correspondência entre o grupo e a álgebra [18]. Portanto começamos com a definição de um grupo .

Definição 1 Um conjunto G é chamado de grupo se uma regra de multiplicação for definida entre dois elementos de forma a satisfazer os seguintes postulados.

1. **Fechamento:** Se x e y pertencem G, então xy pertence a G.
2. **Associatividade**: $x(yz) = (xy)z$.
3. **Identidade**: Existe um elemento identidade e tal que, $ex = xe = x$, para todo $x \in G$.
4. **Inverso:** Para cada elemento x de G, existe um elemento inverso $\widetilde{x}$ tal que, $x\widetilde{x} = e$.

Os grupos são classificados de acordo com o número e a natureza dos elementos do conjunto G, podendo ser finitos ou infinitos, discretos ou contínuos. O grupo finito e discreto mais

importante é o grupo simétrico S_n gerado por todas as permutações possíveis dos p_i no diagrama $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$. Um resultado muito conhecido, devido a Cayley, diz que todo grupo G de ordem n é isomórfico a um subgrupo de permutação S_n. Um outro grupo importante é o chamado grupo de Lie.

Um grupo de Lie é um tipo especial de grupo contínuo, onde os elemento do grupo R(a) são etiquetados por parâmetros reais a^1, a^2, $\dots, a^r$,

$$R(a) = R(a^1, a^2, \dots, a^r), \tag{2.1}$$

variando sobre um intervalo finito ou infinito. Um grupo G é chamado de grupo de Lie de ordem r, se R(a) obedece aos postulados:

- Para um dado parâmetro a e b, nós encontramos um outro parâmetro c, tal que,

$$R(c) = R(a)R(b), \tag{2.2}$$

onde o parâmetro c são dadas por funções reais dos parâmetros a e b,

$$c = \varphi(a, b). \tag{2.3}$$

- Associatividade.

$$R(a)[R(b)R(c)] = [R(a)R(b)]R(c). \tag{2.4}$$

- Existe um elemento identidade $R(a_0)$, isto é,

$$R(a_0)R(a) = R(a)R(a_0) = R(a) \qquad \text{para qualquer } R(a) \in G, \tag{2.5}$$

os parâmetros a_0 da identidade são tomados como sendo zero, isto é, $R(a_0) = R(0)$.

- Para qualquer a nós podemos encontrar um $\overline{a}$ tal que

$$R(\overline{a})R(a) = R(a)R(\overline{a}) = R(0), \tag{2.6}$$

isto é, para todo $R(a)$ existe um elemento inverso:

$$R^{-1}(a) = R(\overline{a}) \tag{2.7}$$

Os grupos de Lie são chamados de compactos se os parâmetros forem limitados, caso contrário, são não compactos. As matrizes n×n são objetos interessantíssimos que sob certas condições satisfazem os postulados de grupos.

Exemplo O grupo SU(2) é gerado por matrizes da forma:

$$R(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} e^{ia_1}\cos(a_2) & -e^{-ia_3}\sin(a_2) \\ e^{ia_3}\sin(a_2) & e^{-ia_1}\cos(a_2) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

verifica-se facilmente que estas matrizes satisfazem o postulado do fechamento e a associatividade, se adotarmos o produto matricial usual. Existe uma identidade para $a_1 = a_2 = a_3 = 0$:

$$R(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

e a inversa é encontrada transpondo e conjugando 2.8, portanto,

$$R^{-1}(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} e^{-ia_1}\cos(a_2) & e^{-ia_3}\sin(a_2) \\ -e^{ia_3}\sin(a_2) & e^{ia_1}\cos(a_2) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Em analogia à exposição feita para os grupos, partiremos do conceito geral de álgebra e em seguida definiremos uma álgebra de Lie [19].

Definição 2 Uma álgebra linear A consiste de um conjunto de vetores $v_i \in \mathcal{V}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ com uma multiplicação de vetores, $\square$ satisfazendo os postulados.

1.Fechamento: $v_i \square\ v_j \in \mathcal{V}$.

2. Bilinearidade: $(v_i + v_j)\square\ v_k = v_i\square\ v_k + v_j\square\ v_k$

$$v_i\square(v_j + v_k) = v_i\square\ v_j + v_i\square\ v_k.$$

As diferentes variedades de álgebras podem ser obtidas, dependendo dos postulados adicionais por elas satisfeitos. Para ser uma álgebra associativa impomos:

3. Associatividade: $(v_i \Box\ v_j) \Box\ v_k = v_i \Box (v_j \Box v_k)$.

Por outro lado, para ser uma álgebra associativa com identidade, basta adicionar o postulado:

4. Existência de uma identidade: $v_i \Box\ I = v_i$.

E ainda existem álgebras que satisfazem as propriedades de

5. Simetria ou antisimetria: $v_i \Box\ v_j = \pm v_j \Box\ v_i$.

6. Propriedade Derivativa: $v_i \Box (v_j \Box v_k) = (v_i \Box v_j \Box) v_k + (v_j \Box (v_i \Box v_k)$.

Em particular, uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de dimensão **n** (≥ 1) é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (real ou complexo) de dimensão **n** equipado com uma operação chamada de **produto de Lie** ou **comutador** [,] definido para todo X,Y,Z $\in \mathcal{L}$ e todo α e $\beta \in \mathbb{K}$, tal que :

1. **Fechamento:** [X, Y] $\in \mathcal{L}$
2. **Bilinearidade:**$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$.
3. **Antisimetria:** [X,Y] = -[Y,X].
4. **Identidade de Jacobi:** [X,[Y,Z] +[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] = 0.

O produto de dois elementos quaisquer da álgebra deve ser ainda um outro elemento dessa álgebra e portanto, pode ser escrito como uma combinação linear dos seus geradores, i.e.,

$$[X_p, X_q] = \sum_{r=1}^{n} c_{pq}^{r} X_r, \qquad p, q = 1, 2, ..., n. \tag{2.11}$$

onde as constantes c_{pq}^{r} são conhecidas como **constantes de estrutura** da álgebra, as quais satisfazem as propriedades: $c_{pq}^{r} = -c_{qp}^{r}$ devido a antisimetria e $c_{pq}^{s} c_{rs}^{t} + c_{qr}^{s} c_{ps}^{t} + c_{rp}^{s} c_{qs}^{t} = 0$ devido à identidade de Jacobi.

Não é absolutamente essencial termos uma definição explícita de [X,Y] em termos de objetos possivelmente mais simples tais como matrizes ou operadores lineares. Poderíamos proceder a investigação da estrutura dessas álgebras exclusivamente com base nos axiomas que a definem, sem fazer qualquer hipótese sobre a natureza de [X,Y]. O desenvolvimento resultante seria a teoria abstrata das álgebras de Lie, contudo nenhuma estrutura nova advém desse procedimento por causa do teorema de **Ado** (1947), o qual afirma que *qualquer álgebra de Lie é isomórfica a uma álgebra matricial.*

A seguir daremos exemplos apresentando as álgebras de Lie na forma matricial. O primeiro exemplo é a álgebra geral linear gl(n). Uma base muito simples para essa álgebra foi dada por Weyl . Cada elemento da base será uma matriz e_{ij} , i,j = 1,2,...,n, sendo que o elemento a_{mn} é

igual a 1 e os demais são nulos, em outras palavras,

$$(e_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{nj}.$$

O exemplo mais trivial é a álgebra gl(2) formada pelas quatro matrizes 2x2:

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que qualquer matriz complexa de grau 2 pode ser escrita como uma combinação linear delas. Definimos uma álgebra de Lie a partir das relações de comutação entre seus elementos, e no caso da álgebra de Lie gl(n) são simplesmente dadas por:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}. \tag{2.12}$$

Em particular, para a álgebra gl(2) temos:

$$\begin{aligned} [e_{11}, e_{22}] &= 0 & [e_{12}, e_{21}] &= e_{11} - e_{22} \\ [e_{11}, e_{12}] &= e_{12} & [e_{11}, e_{21}] &= -e_{21} \\ [e_{22}, e_{12}] &= -e_{12} & [e_{22}, e_{21}] &= e_{21} \end{aligned}$$

A álgebra sl(n) corresponde a matrizes com traço nulo na álgebra gl(n). Podemos novamente tomar como base as matrizes e_{ij} e construir matrizes de traço nulo:

$$A_{ii} = e_{ii} - e_{i+1,i+1}, \qquad A_{ij} = e_{ij} \qquad (i \neq j),$$

onde os A_{ij} são elementos da base de sl(n) e os e_{ij} são elementos da base de Weyl. No caso da álgebra sl(2) temos:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As relações de comutação desta álgebra são:

$[A_{ii}, A_{kl}] = (\delta_{ki} - \delta_{il} - \delta_{k,i+1} + \delta_{i+1,l})A_{kl}$

$[A_{ij}, A_{ji}] = [e_{ij}, e_{ji}] = (A_{ii} - A_{jj})$

$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{kj}A_{il} - \delta_{il}A_{kj}$

A álgebra unitária u(n) são geradas por n^2 matrizes que obedecem a condição de hermiticidade, i.e.,

$$M^{\dagger} = M,$$

elas podem ser construídas aplicando-se o truque de Weyl:

$$A_{kk} = e_{kk} \qquad (k = 1, 2, ..., n), \tag{2.13}$$

$$A_{kl} = e_{kl} + e_{lk} \qquad (k < l \leq n), \tag{2.14}$$

$$\widetilde{A}_{kl} = i(e_{kl} - e_{lk}) \qquad (k < l \leq n). \tag{2.15}$$

As relações de comutação nessa base são facilmente obtidas usando 2.12.

Finalmente a álgebra su(n) possui $n^2 - 1$ matrizes de traço nulo:

$$A_{kk} = e_{kk} - e_{k+1,k+1} \qquad (k = 1, 2, ..., n-1), \tag{2.16}$$

$$A_{kl} = e_{kl} + e_{lk} \qquad (k < l \leq n), \tag{2.17}$$

$$\widetilde{A}_{kl} = i(e_{kl} - e_{lk}) \qquad (k < l \leq n). \tag{2.18}$$

Esta álgebras foram chamadas por Cartan de **família $\mathbf{A}_n$**. O exemplo mais elementar é a álgebra su(2) gerada por A_{11}, A_{12} e $\widetilde{A}_{12}$, contudo temos a liberdade de multiplicar essas matrizes por uma constante, e portanto, por conveniência definimos,

$$J_x = \frac{iA_{12}}{2}, \qquad J_y = \frac{i\widetilde{A}_{12}}{2}, \qquad J_z = \frac{iA_{11}}{2}, \tag{2.19}$$

que obedecem as relações de comutação :

$$[J_x, J_y] = J_z, \qquad [J_z, J_x] = J_y, \qquad [J_z, J_y] = -J_x. \tag{2.20}$$

Há ainda as **famílias $\mathbf{B}_l$ e $\mathbf{D}_l$** compostas por matrizes antisimétricas, i.e.,

$$X^T = -X, \tag{2.21}$$

O conjunto das matrizes complexas antisimétricas de dimensão ímpar formam a álgebra ortogonal o(2l+1,C) ou B_l, enquanto que as de dimensão par formam a álgebra ortogonal o(2l,C) ou D_l. Caso nos restrinjamos às matrizes antisimétricas de traço nulo, teremos as álgebras de

Lie ortogonais especiais, so(2n+1,C) ou so(2n,C). Os geradores destas álgebras, satisfazendo 2.21, em termos da base e_{ij} são:

$$A_{ij} = e_{ij} - e_{ji}, \tag{2.22}$$

usando 2.12 nós obtemos a relação:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{jk}A_{il} + \delta_{il}A_{jk} + \delta_{jl}A_{ki} + \delta_{ik}A_{lj}. \tag{2.23}$$

Finalmente como um último exemplo, temos a álgebra de Lie sp(2n,C), também conhecida por C_n, formada pelo conjunto de matrizes complexas $\mathcal{X}$ (2nx2n) que obedece a equação abaixo.

$$\mathcal{X}^T J + J\mathcal{X} = 0. \tag{2.24}$$

onde J = $\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I}_n \\ -\mathcal{I}_n & 0 \end{bmatrix}$.

As matrizes que satisfazem 2.24 são da forma:

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

onde A, B e C são matrizes complexas simétricas (nxn).

Em termos da base de Weyl o geradores de sp(2n,C) podem ser escritos na forma de matrizes (2nx2n), veja:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq i, j \leq n), \tag{2.26}$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & e_{ij} + e_{ji} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1 \leq i \leq j \leq n), \tag{2.27}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} + e_{ji} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1 \leq i \leq j \leq n), \tag{2.28}$$

ou ainda,

$$A_{ij} = e_{ij} - e_{j+1,i+n}$$
$$B_{ij} = e_{i,j+n} + e_{j,i+n}$$
$$C_{ij} = e_{i+n,j} + e_{j+n,i}$$

As relações de comutação que definem a álgebra simplética são:

1- $[A_{ij},A_{kl}] = \delta_{kj}\ A_{il}$ - $\delta_{il}\ A_{kj}$,

2- $[A_{ij},B_{kl}] = \delta_{kj}\ B_{il}$- $\delta_{jl}\ B_{ik}$,

3- $[A_{ij},C_{kl}] =$ - $\delta_{ik}C_{jl}$ - $\delta_{il}\ C_{jk}$,

4- $[B_{ij},B_{kl}] = 0$,

5- $[C_{ij},C_{kl}] = 0$,

6- $[B_{ij},C_{kl}] = \delta_{ik}\ A_{jl} + \delta_{jk}\ A_{il} + \delta_{il}A_{jk} + \delta_{jl}\ A_{ik}$.

2.1.1 Estruturas das Álgebras de Lie semisimples.

Uma subálgebra N de uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é um subconjunto dos elementos de $\mathcal{L}$ que satisfazem os axiomas que definem uma álgebra de Lie, sobre o mesmo corpo, onde naturalmente,

$$[N, N] \supset N. \tag{2.29}$$

As vezes pode acontecer que o comutador entre todos os elementos de N com todos os elementos de $\mathcal{L}$, dê sempre um elemento de N, i.e.,

$$[N, L] \supset N, \tag{2.30}$$

quando isto ocorre, dizemos que N é uma **subálgebra invariante** ou um **ideal**. Por outro lado, se esse comutador for nulo,

$$[N, \mathcal{L}] \supset 0, \tag{2.31}$$

então N é um **ideal abeliano** ou simplesmente **centro da álgebra**.

Uma álgebra de Lie é **simples** se ela não possuir um ideal e é **semisimples** se possuir um ideal não abeliano.

O ideal abeliano aparece em álgebras solúveis que são isomórficas às matrizes triangulares. Formalmente, considere uma álgebra de Lie L onde a sequência de ideais

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(0)}], ..., \quad L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}], \tag{2.32}$$

termine em zero, i.e., $L^{(n)} = 0$. Esta álgebra recebe o nome de álgebra de Lie **solúvel.** Uma álgebra de Lie é chamada de **nilpotente** se a sequência de ideais

$$L_{(0)} = L, \quad L_{(1)} = [L_{(0)}, L], ..., \quad L_{(n)} = [L_{(n-1)}, L], \tag{2.33}$$

terminar em zero para algum n positivo, i.e., $L_{(n)} = 0$. As álgebras nilpotentes são álgebras solúveis.

Definição 3 Soma Direta e Soma Semi-Direta de Álgebras de Lie

Uma álgebra de Lie **L** é decomposta em uma soma direta de k outras álgebras de Lie, sobre o mesmo corpo, se:

a. Para todo par de subálgebra $\mathcal{L}_{i,}, \mathcal{L}_j \subset$ **L** ocorrer $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = 0$ e

b. $\mathbf{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{L}_k$.

Se uma álgebra de Lie tem duas subálgebras $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ tal que $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1] \subset \mathcal{L}_1$, $[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2] \subset \mathcal{L}_2$ e $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] \subset \mathcal{L}_1$, então escreve-se a álgebra **L** como sendo a soma semi-direta da subálgebra invariante ($\mathcal{L}_1$) com a subálgebra residual $\mathcal{L}_2$. Em outras palavras,

$$\mathbf{L} = \mathcal{L}_1 \circledS \mathcal{L}_2. \tag{2.34}$$

Chegamos ao ponto de enunciar dois resultados importantíssimos rumos a uma classificação completa das álgebras de Lie. Esses resultados vão limitando os tipos de simetria possíveis dentro dessa abordagem.

Teorema 1 (Cartan)

Toda álgebra de Lie $\mathcal{L}$ semisimples é simples ou a soma direta de um conjunto de álgebras de Lie simples. Isto é, se $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Lie semisimples, então existe um conjunto de subálgebras invariantes $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, ..., \mathcal{L}_k$ (k$\geq$ 1) simples, tal que:

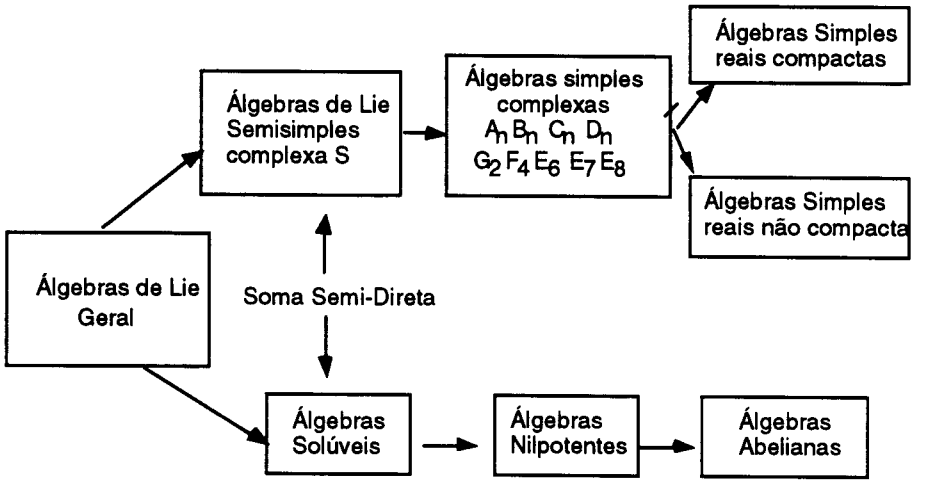
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{L}_k. \tag{2.35}$$

Esta decomposição é única.

Teorema 2 (Levi-Malcev)

Qualquer álgebra de Lie $\mathcal{L}$ pode ser escrita como a soma semi-direta de uma álgebra de Lie solúvel R e uma álgebra de Lie semisimples S. Em outras palavras:

$$\mathcal{L} = \mathbf{R} \circledS \mathbf{S}. \tag{2.36}$$



Figura~2.1: Estrutura das Álgebras de Lie

2.1.2 Representações

Gostaríamos de trabalhar com objetos matemáticos mais concretos, analíticos como operadores lineares ou matrizes para podermos aplicar em problemas de interesse físico, no entanto, até o presente momento temos explorado as álgebras de Lie por meio de uma abordagem abstrata e geral. Motivado pelo teorema de Ado, vamos estudar alguns conceitos básicos da teoria de representações.

Definição 4 Representação de uma álgebras de Lie $\mathcal{L}$

Suponha que para todo X,Y $\in \mathcal{L}$ e α e $\beta \in \mathbb{K}$, existam matrizes $\Gamma(X)$ e $\Gamma(Y)$ d×d tal que:

1. $\Gamma(\alpha X + \beta Y) = \alpha\Gamma(X) + \beta\Gamma(Y)$
2. $\Gamma([X,Y]) = [\Gamma(X), \Gamma(Y)]$

Então estas matrizes são chamadas de **representação** de dimensão **d** da álgebras de Lie $\mathcal{L}$.

Naturalmente o conjunto de matrizes $\Gamma(X)$ forma uma álgebra de Lie com o mesmo corpo de $\mathcal{L}$. Haverá uma quantidade muito grande de representações para uma mesma álgebra, devido ao caráter pouco restritivo das propriedades 1 e 2. Todavia, muitas dessas representações estão correlacionadas entre si, e para selecionarmos as representações realmente interessantes foi concebida a idéia de irredutibilidade, a saber: Se Γ é uma representação de uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$, de dimensão **d** e **S** é uma matriz não singular também de dimensão **d**, então o conjunto de matrizes $\Gamma'(X)$, definido por

$$\Gamma'(X) = \mathbf{S}^{-1}\Gamma(X)\mathbf{S}, \qquad \text{para todo } X \in \mathcal{L}, \tag{2.37}$$

também forma uma representação de dimensão **d**, de $\mathcal{L}$ e neste caso Γ e Γ' são chamadas de representações equivalentes. Toda representação Γ de $\mathcal{L}$ que for equivalente a uma representação de matrizes bloco diagonal Γ'', i.e.,

$$\Gamma''(X) = \begin{bmatrix} \Gamma''_{11}(X) & & .. & 0 \\ 0 & \Gamma''_{22}(X) & .. & 0 \\ : & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma''_{rr}(X) \end{bmatrix} \qquad \text{para todo } X \in L, \tag{2.38}$$

é dita ser completamente redutíveis, caso contrário é irredutível.

Há muitos tipos de representações, dentre eles destacamos três. O primeiro é aquele formado por matrizes unitárias, ou seja, $\Gamma^{\dagger}(X) = \Gamma^{-1}(X)$, o qual recebe o nome de **representação unitária.** É sabido, conforme veremos mais tarde, que toda representação irredutível das álgebras de Lie simples é especificada por um vetor $[m] = (\mathrm{m}_1, m_2, ..., \mathrm{m}_l)$, com m_i inteiro não negativo. As representações rotuladas por uma componente m_{in} igual a 1 e as demais componentes iguais a zero são chamadas de **representações fundamentais.**

Agora consider uma álgebra de Lie real ou complexa $\mathcal{L}$ de dimensão **n** gerada por X_1, X_2,..., X_n. Para qualquer X $\in \mathcal{L}$, ad(X) será uma matriz n $\times$ n definida por:

$$[X, X_j] = \sum_{k=1}^{n} (ad(X))_{kj} X_k, \tag{2.39}$$

para j =1,2,...,n. Então o conjunto de matrizes ad(X) formam uma representação de $\mathcal{L}$ de dimensão **n** chamada de **representação adjunta**.

Exemplo Representação adjunta da a álgebra de Lie so(3)

A álgebra so(3) é definida pelas relações de comutação 2.23. Usaremos a definição 2.39 para construir a representação adjunta, i.e.,

$[\mathrm{X}_1, X_1] = \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{11}\mathrm{X}_1 + \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{21}\mathrm{X}_2 + \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{31}\mathrm{X}_3 = 0$

$[\mathrm{X}_1, X_2] = \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{12}\mathrm{X}_1 + \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{22}\mathrm{X}_2 + \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{32}\mathrm{X}_3 = -X_3$

$[\mathrm{X}_1, X_3] = \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{13}\mathrm{X}_1 + \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{23}\mathrm{X}_2 + \mathrm{ad}(\mathrm{X}_1)_{33}\mathrm{X}_3 = X_2$

repetindo o procedimento para ad(X_2) e ad(X_3), encontramos:

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$ad(X_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, ad(X_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, ad(X_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

As álgebras de Lie foram classificadas em termos do conceito de ideal, porém, de um ponto de vista operacional isto não é viável, seria interessante se pudéssemos classificá-las a partir das relações de comutação da álgebra. Felizmente isto é possível e precisaremos introduzir o conceito de forma de Killing.

Definição 5 Forma de Killing

A forma de Killing K(X,Y) correspondente a dois elementos quaisquer X e Y de uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é definida por:

$$K(X,Y) = tr\{ad(X)ad(Y)\}, \tag{2.41}$$

onde ad(X) denota a matriz que representa X$\in \mathcal{L}$ na representação adjunta e tr é o traço da matriz resultante do produto matricial definido acima.

Se $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Lie real, todos os elementos de ad(X) serão reais para todo X$\in \mathcal{L}$, neste caso, K(X,Y) será real. Isto deixa de ser verdade quando $\mathcal{L}$ é complexo.

Exemplo A Forma de Killing para $\mathcal{L}$=so(3).

As matrizes da representação adjunta desta álgebra são dadas por 2.40 e obedecem 2.23.Vamos escrever essa matrizes em termos da base e_{ij},ou seja,

$$\begin{aligned} ad(X_1) &= e_{23} - e_{32}, \\ ad(X_2) &= e_{13} - e_{31}, \\ ad(X_3) &= e_{12} - e_{21}. \end{aligned}$$

De uma maneira geral podemos escrever as matrizes acima como: ad(X_p) = ($e_{qr} - e_{rq}$). O produto de duas matrizes da base é dado por : $e_{ij}e_{kl} = \delta_{kj}e_{il}$. Pela expressão 2.41 temos:

$$\begin{aligned} K(X_p, X_q) &= tr\{(e_{qr} - e_{rq})(e_{pr} - e_{rp})\} = tr\{e_{qr}e_{pr} - e_{qr}e_{rp} - e_{rq}e_{pr} + e_{rq}e_{rp}\} \\ &= tr\{\delta_{pr}e_{qr} - \delta_{rr}e_{qp} - \delta_{pq}e_{rr} + \delta_{rq}e_{rp}\} = -2\delta_{pq}. \end{aligned}$$

Élie Cartan propôs dois critérios que classificam as álgebras de Lie solúveis e semisimples, em termos da forma de Killing. O primeiro critério de Cartan diz que uma álgebra de Lie L

é solúvel, se e somente se, K(X,Y) = 0 para todo X,Y $\in L^{(1)}$, onde K é a forma de Killing de $L^{(1)} = [\ L,\ L]$. Enquanto que pelo segundo critério de Cartan, uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é semisimples, se e somente se, a forma de Killing é não degenerada. Isto é, se det $\mathbf{K} \neq 0$, onde $\mathbf{K}$ é uma matriz n×n, cujos elementos são definidos por $K_{pq} = (X_p, X_q)$, p,q = 1,2,...,n e $X_1, X_2, ..., X_n$ são os geradores de $\mathcal{L}$. Um outro resultado muito interessante afirma que uma álgebra de Lie real semisimples $\mathcal{L}$ é compacta se sua forma de Killing for negativa (ou positiva) definida, isto é, K(X,X)$\prec$ 0 para todo X $\in \mathcal{L}$ não nulo. De outra forma é não compacta. Daí resulta que uma álgebra de Lie compacta é necessariamente semisimples, enquanto uma álgebra de Lie complexa é não compacta, pois a forma de Killing é indefinida.

2.1.3 A Relação entre a Álgebra e o Grupo

Ao expandirmos os elementos do grupo R(a) em séries de Taylor, obtemos

$$R(a) = R(0) + a^\rho X_\rho + ..., \tag{2.42}$$

onde

$$X_\rho = \left(\frac{\partial R(a)}{\partial a^\rho}\right)_{a=0}, \tag{2.43}$$

são chamados de geradores do grupo de Lie. Para um grupo de Lie de ordem r, existem r geradores linearmente independente. Para explorar a vizinhança da identidade, precisamos reter somente os termos lineares em 2.42, i.e.,

$$R(a) = 1 + a^\rho X_\rho, \tag{2.44}$$

agora tomamos dois elementos infinitesimais em torno da identidade R(a) e R(b), cada qual com um parâmetro não nulo, e por 2.44,

$$R(a) = 1 + \xi X_\rho, \quad R(b) = 1 + \xi X_\sigma. \tag{2.45}$$

De acordo com a definição de grupo de Lie,

$$R(a)R(b) = R(c) = 1 + C^r X_r$$

$$R(b)R(a) = R(c') = 1 + C'^r X_r$$

portanto,

$$[R(a), R(b)] = \xi^2 C^r_{\rho\sigma} X_r, \qquad \text{com } C^r_{\rho\sigma} = (C^r - C'^r)/\xi^2. \tag{2.46}$$

Por outro lado, fazendo uso da 2.45 para o cálculo do comutador,

$$[R(a), R(b)] = \xi^2 [X_\rho, X_\sigma], \tag{2.47}$$

e comparando 2.46 e 2.47, nós encontramos uma relação importante,

$$[X_\rho, X_\sigma] = C^r_{\rho\sigma} X_r. \tag{2.48}$$

Então o comutador de dois geradores é uma combinação linear de r geradores. $C^r_{\rho\sigma}$ são chamadas de constante de estrutura dos grupos de Lie.

Os r geradores expandem um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão r. Um vetor qualquer neste espaço é expresso como $\sum a^\rho X_\rho$. O produto de dois vetores da base é definido pelo comutador. O conjunto $\{X_\rho\}$ satisfaz os postulados de álgebra de Lie. Para um grupo de Lie sempre encontramos uma álgebra de Lie localmente isomórfica (na vizinhança da identidade). A grande contribuição de Sophus Lie foi mostrar que a procura de representações irredutíveis de grupos de Lie com um número infinito de elementos fica reduzida às álgebras de Lie com número finito de elementos. Em problemas físicos ocorre que certos tipos de álgebras de Lie emergem naturalmente, não obstante, o grupo de Lie correspondente não tem um significado físico simples. Na verdade os grupos são objetos matemáticos muito complicados e por isso nos deteremos ao estudo das álgebras, que por sua vez, nos permite estudar todas as propriedades locais do grupo. Para obter o grupo a partir da álgebra, usamos a aplicação exponencial :

$$R(a) = \exp(a^\rho X_\rho). \tag{2.49}$$

A tabela 2.1 sintetiza essa relação, onde listamos a forma das matrizes dos grupos e das álgebras de Lie simples, sendo **a** e A matrizes n$\times$ n complexas, a menos que se afirme o contrário; **g** é uma matriz diagonal n$\times$ n, com p elementos diagonais igual a 1 e q (= n-p) elementos diagonais igual a -1 , onde p$\geq q \geq 1$ e **J** e **G** são matrizes n$\times$ n definidas por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1_{\frac{n}{2}} \\ -1_{\frac{n}{2}} & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -1_r & & & \\ & 1_s & & \\ & & -1_r & \\ & & & 1_s \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

onde $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$ e $s = \frac{n}{2} - r$.

G	condições sobre A∈G	L	condições sobre a∈ L	n
GL(N,ℂ)	—	g;(N,ℂ)	—	$2N^2$
GL(N,ℝ)	Areal	gl(N,ℝ)	a real	N^2
SL(N,ℂ)	detA=1	sl(N,ℂ)	tr a = 0	$2N^2$-2
SL(N,ℝ)	Areal, det A=1	sl(N,ℝ)	a real, tr a = 0	N^2-1
U(N)	$A^\dagger = A^{-1}$	u(N)	$a^\dagger$=-a	N^2
SU(N)	$A^\dagger = A^{-1}$, detA=1	su(N)	$a^\dagger$=-a, tra=0	N^2-1
U(p,q)	$A^\dagger \mathbf{g} = \mathbf{g} A^{-1}$	u(p,q)	$a^\dagger \mathbf{g}$=-**g**a	N^2
SU(p,q)	$A^\dagger \mathbf{g} = \mathbf{g} A^{-1}$, detA=1	su(p,q)	$a^\dagger \mathbf{g}$=-**g**a, tra=0	N^2-1
O(N,ℂ)	$A^t = A^{-1}$			
SO(N,ℂ)	$A^t = A^{-1}$, detA=1	so(N,ℂ)	a^t=-a	(N^2-N)
O(N)	$A^t = A^{-1}$, A real			
SO(N)	$A^t = A^{-1}$, detA =1 e A real	so(N)	a^t=-a, a real	$\frac{1}{2}$(N^2-N)
O(p,q)	$A^t \mathbf{g} = \mathbf{g} A^{-1}$, A real			
SO(p,q)	$A^t \mathbf{g} = \mathbf{g} A^{-1}$, det A=1 e A real	so(p,q)	$a^t \mathbf{g}$=- **g**a, a real	$\frac{1}{2}$(N^2-N)
SO*(N)	$A^t = A^{-1}$, $A^\dagger \mathbf{J} = \mathbf{J} A^{-1}$	so*(N)	a^t=-a, $a^\dagger \mathbf{J}$=- **J**a	$\frac{1}{2}$(N^2-N)
Sp(2N,ℂ)	$A^t \mathbf{J} = \mathbf{J} A^{-1}$	sp(2N,ℂ)	$a^t \mathbf{J}$=- **J**a	2N(2N+1)
Sp(2N,ℝ)	$A^t \mathbf{J} = \mathbf{J} A^{-1}$, A real	sp(2N,ℝ)	$a^t \mathbf{J}$=- **J**a, a real	N(2N+1)
Sp($2N$)	$A^t \mathbf{J} = \mathbf{J} A^{-1}$, $A^\dagger = A^{-1}$	sp($2N$)	$a^t \mathbf{J}$=- **J**a, $a^\dagger$=-a	N(2N+1)
Sp(r,s)	$A^t \mathbf{J} = \mathbf{J} A^{-1}$, $A^\dagger \mathbf{G} = \mathbf{G} A^{-1}$	sp(r,s)	$a^t \mathbf{J}$=- **J**a, $a^\dagger \mathbf{G}$=-**G**a	N(N+1)
SU*(N)	$\mathbf{J}A^* = A\mathbf{J}$, det A = 1	su*(N)	$\mathbf{J}a^*$=a**J**, tr a=0	N^2-1

Tabela 2.1: As Matrizes dos Grupos e das Álgebra de Lie

Capítulo 3

Raízes.

Nesta seção introduziremos uma forma padrão para escrever as relações de comutação que definem as álgebras de Lie, definiremos o conceito de raízes e apresentaremos os teoremas que levam à classificação das álgebra semisimples.

A álgebra de Lie su(2) foi definida por 2.20 em termos das relações de comutação dos geradores J_x,J_y e J_z. Na Teoria de Momento Ângular em Mecânica Quântica [20] costuma-se redefinir os geradores desta álgebra tomando $J_+ = J_x + iJ_y$, $J_- = J_x - iJ_y$ e o próprio J_z. Desta forma, as relações de comutação ficam:

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \qquad [J_+, J_-] = 2J_z. \tag{3.1}$$

Os operadores J_+ e J_- são interpretados como operadores de levantamento e abaixamento respectivamente, porque eles levantam ou abaixam o número quântico magnético por uma unidade, conectando os estados de um sistema físico. Essa forma de definir as álgebras é muito interessante do ponto de vista das aplicação e da teoria de representação das álgebras de Lie. O fato notável é que as demais álgebras de Lie apresentam uma estrutura similar e naturalmente iremos estender este procedimento para elas, que nos levarão a resultados surpreendentes. Antes porém, trabalharemos com mais um exemplo para reforçar esta idéia.

A álgebra não compacta sp(2,R) está relacionada ao oscilador harmônico unidimensional ($\hbar$ = m = w = 1), cuja hamiltoniana é:

$$H = \frac{1}{2}(\widehat{p}^2 + \widehat{x}^2), \tag{3.2}$$

onde $\widehat{x}$ e $\widehat{p}$ são os operadores coordenada e momentum satisfazendo a relação $[\widehat{x}, \widehat{p}] = \mathrm{i}$. Agora

definimos os operadores de bosons de criação e destruição da seguinte forma:

$$a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{x} + i\widehat{p}), \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{x} - i\widehat{p}). \tag{3.3}$$

Para que os operadore $\mathbf{a}^{\dagger}$e $\mathbf{a}$ acima obedeçam a relação $[\widehat{x}, \widehat{p}] = \mathrm{i}$, basta impor que $[\mathbf{a},\mathbf{a}^{\dagger}] = 1$. Os geradores da álgebra sp(2,R) podem ser definido em termos de $\mathbf{a}^{\dagger}$e $\mathbf{a}$ da seguinte maneira:

$$B^{+} = a^{\dagger}a^{\dagger}, \qquad B^{-} = aa, \qquad C = a^{\dagger}a + \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Com esta escolha, obtemos as relações de comutação na forma desejada, veja :

$$[C, B^{\pm}] = \pm B^{\pm}, \qquad [B^{-}, B^{+}] = -4C. \tag{3.5}$$

Assim atingimos nosso objetivo que era mostrar que essa álgebra também pode ser expressa na forma padrão.

3.0.4 Forma Padrão das Álgebras de Lie Semisimples.

A base de uma álgebra de Lie pode ser linearmente transformada em outra, portanto é interessante estabelecer uma forma padrão para apresentar as relações de comutação de uma álgebra de Lie semisimples. Exibiremos abaixo a descrição de como isso é feito [15].

Sejam A e X elementos quaisquer de uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$. De forma geral, eles são combinações lineares dos geradores X_{τ} da álgebra. Em outras palavras,

$$A = a^{\mu}X_{\mu}, \tag{3.6}$$

$$X = b^{\nu}X_{\upsilon}. \tag{3.7}$$

O produto entre dois geradores da álgebra, $\overset{\circ}{A}\, X$ é dado por:

$$[A, X] = \rho X, \tag{3.8}$$

onde ρ e X são visto como o autovalor e o autovetor respectivamente. Substituindo 3.6 e 3.7 em 3.8 obtemos:

$$a^{\mu}b^{\nu}c^{\tau}_{\mu\upsilon}X_{\tau} = \rho b^{\tau}X_{\tau}, \tag{3.9}$$

dado que X_τ são linearmente independente, decorre que

$$(a^\mu c^\tau_{\mu\upsilon} - \rho\delta^\tau_\nu)b^\nu = 0, \tag{3.10}$$

e a correspondente equação secular é :

$$\det \mid a^\mu c^\tau_{\mu\upsilon} - \rho\delta^\tau_\nu \mid = 0, \tag{3.11}$$

e o número máximo de raízes distintas é igual ao número de geradores da álgebra. Contudo pode acontecer que algumas raízes sejam degeneradas. Cartan mostrou que se A for escolhido tal que a equação secular tenha um número máximo de raízes distintas, para uma álgebra semisimples somente $\rho = 0$ será degenerada. E ao grau de degenerescência l dá se o nome de rank da álgebra de Lie semisimples.

A raiz correspondente a $\rho = 0$ está associada a l autovetores H_i linearmente independentes o qual expande um subespaço vetorial de dimensão l, dentro de um espaço vetorial $\mathcal{L}$ de dimensão **n**. Vamos denotar por E_α os geradores, cujas raízes são distintas e não nulas. Como o comutador 3.8 é sempre nulo quando X é igual a H_j, então A deve ser uma combinação linear de H_i, em outras palavras podemos escrever:

$$A = \lambda^i H_i. \tag{3.12}$$

Por outro lado, tomando $X = E_\alpha$ a expressão 3.8 se reduz a

$$[A, E_\alpha] = \alpha E_\alpha. \tag{3.13}$$

Agora estamos pronto para escrever todas as relações de comutação das álgebras de Lie semisimples.

- Tomando $X = H_j$, como o comutador $[A,H_j] = 0$, então $[H_i,H_j] = 0$ para todo i,j = 1,2,...,l.
- Para efetuar o comutador $[H_i,E_\alpha]$ desenvolvemos o duplo comutador dado abaixo:

$$[A,[H_i,E_\alpha]] = [A,H_iE_\alpha] - [A,[E_\alpha H_i] = [A,H_i]E_\alpha + H_i[A,E_\alpha] -$$

$$-[A,E_\alpha]H_i - E_\alpha[A,E_\alpha] = \alpha[H_i,E_\alpha]. \tag{3.14}$$

Mas α é não degenerado, portando pela expressão 3.13 temos

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \tag{3.15}$$

onde $\alpha = \lambda^i \alpha_i$ simplesmente comparando 3.12, 3.13 e 3.15.

- Utilizando a identidade de Jacobi, juntamente com a equação 3.13,

$$\begin{aligned} [A, [E_\alpha, E_\beta]] &= [E_\alpha, [A, E_\beta]] + [[A, E_\alpha], E_\beta] = \beta[E_\alpha, E_\beta] + \alpha[E_\alpha, E_\beta] = \\ &= (\alpha + \beta)[E_\alpha, E_\beta]. \end{aligned}$$

Demonstramos que o autovetor $[E_\alpha, E_\beta]$ está associado com a raiz $\alpha + \beta$ se estas forem não nulas, ou seja, que este autovetor é proporcional ao gerador $E_{\alpha+\beta}$. Mas se $\alpha = -\beta$ então $[E_\alpha, E_\beta]$ será uma combinação linear de H_i.

Resumindo, as relações de comutação para as álgebras semisimples podem ser escritas como:

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{3.16}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \tag{3.17}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_i H_i \tag{3.18}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \qquad (se\ \alpha + \beta \neq 0) \tag{3.19}$$

Esta é a chamada base de **Cartan - Weyl**. Os geradores autocomutantes H_i formam a **subálgebra de Cartan** e é uma subálgebra abeliana maximal de $\mathcal{L}$.

3.0.5 Raízes.

Construiremos um vetor, cujas componentes serão os α_i dados pela expressão 3.17, i.e.,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l). \qquad i = 1, .., l. \tag{3.20}$$

Este vetor recebe o nome de **raiz**. O conceito de raiz é largamente empregado no estudo das álgebras de Lie desde a classificação até a construção das representações. A seguir daremos um exemplo de raízes e mostraremos como obter as relações de comutação da álgebra a partir delas.

Exemplo *Raízes da Álgebra gl(3).*

A Álgebra gl(3) é gerada pelo conjunto $\{H_1, H_2, H_3, A_{12}, A_{23}, A_{13}, A_{21}, A_{32}, A_{31}\}$,onde $H_i = A_{ii}$, cujas regras 2.12 está desenvolvida na tabela 3.1

$[H_1, A_{12}] = A_{12}$	$[H_1, A_{23}] = 0$	$[H_1, A_{13}] = A_{13}$
$[H_2, A_{12}] = -A_{12}$	$[H_2, A_{23}] = A_{23}$	$[H_2, A_{13}] = 0$
$[H_3, A_{12}] = 0$	$[H_3, A_{23}] = -A_{23}$	$[H_3, A_{13}] = -A_{13}$
$[H_1, A_{21}] = -A_{21}$	$[H_1, A_{32}] = 0$	$[H_1, A_{31}] = -A_{31}$
$[H_2, A_{21}] = A_{21}$	$[H_2, A_{32}] = -A_{32}$	$[H_2, A_{31}] = 0$
$[H_3, A_{21}] = 0$	$[H_3, A_{32}] = A_{32}$	$[H_3, A_{31}] = A_{31}$
$[A_{12}, A_{23}] = A_{13}$	$[A_{13}, A_{23}] = 0$	$[A_{23}, A_{31}] = A_{21}$
$[A_{12}, A_{13}] = 0$	$[A_{13}, A_{21}] = -A_{23}$	$[A_{23}, A_{32}] = H_2 - H_3$
$[A_{12}, A_{32}] = 0$	$[A_{13}, A_{32}] = A_{12}$	$[A_{21}, A_{32}] = -A_{31}$
$[A_{12}, A_{21}] = H_1 - H_2$	$[A_{13}, A_{31}] = H_1 - H_3$	$[A_{21}, A_{31}] = 0$
$[A_{12}, A_{31}] = -A_{32}$	$[A_{23}, A_{21}] = 0$	$[A_{31}, A_{32}] = 0$

Tabela 3.1: Regras Comutação da Álgebra gl(3)

A raiz α_{ij} está associada ao gerador A_{ij}. A k-ésima componente da raiz α_{ij} é obtida do comutador $[H_k, A_{ij}]$. Com essa convenção, o sistema de raízes Σ encontrados para a álgebra gl(3) foi:

$$\alpha_{12} = (1, -1, 0), \alpha_{23} = (0, 1, -1), \alpha_{13} = (1, 0. - 1),$$

$$\alpha_{21} = (-1, 1, 0), \alpha_{32} = (0, -1, 1), \alpha_{31} = (-1, 0, 1),$$

$$\alpha_{11} = (0, 0, 0), \alpha_{22} = (0, 0, 0), \alpha_{33} = (0, 0, 0).$$

O conhecimento das raízes para uma dada álgebra possibilita escrevermos todas as suas relações de comutação. Se a soma de duas raízes for uma raiz, ou seja, se pertencer a Σ, então

o comutador dos geradores associados a cada raiz será proporcional ao gerador associado à raiz encontrada ao efetuarmos a soma. Por outro lado, se essa raiz não pertencer a Σ, então o comutador entre elas é nulo. Veja alguns exemplos baseado na tabela 3.1.

$\alpha_{12} + \alpha_{13} = (2, -1, -1) \notin \Sigma$, logo $[A_{12}, A_{13}] = 0$,

$\alpha_{23} + \alpha_{31} = (-1, 1, 0) = \alpha_{21}$, logo $[A_{23}, A_{31}] = A_{21}$,

$\alpha_{32} + \alpha_{13} = (1, -1, 0) = \alpha_{12}$, logo $[A_{32}, A_{13}] = A_{12}$.

As raízes extraídas das relações de comutação na forma Cartan-Weyl podem ser expressas em termos de uma base cartesiana ortonormal, portanto podemos tomar o produto escalar de duas raízes como sendo o produto escalar usual :

$$(\alpha, \beta) = \alpha^i \beta_i$$

A seguir enunciamos três teoremas que expressam as propriedades básicas importantes sobre as raízes.

Teorema 3 Se α e β são raízes, então n $=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ é um inteiro e $\beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ também é uma raiz.

Teorema 4 Para toda raiz não nula α de uma álgebra de Lie semisimples há uma raiz -α

Suponha que exista uma cadeia de raízes do tipo

$$\beta, \beta - \alpha, ..., \beta - n\alpha.$$

o teorema abaixo limita o valor de n nessa cadeia.

Teorema 5 A cadeia α contendo β ($\alpha, \beta \neq 0$), possui no máximo quatro raízes e consequentemente

$$n = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3. \tag{3.21}$$

Com o produto escalar acima podemos calcular o ângulo $\theta_{\alpha\beta}$ entre duas raízes α e β, cujo cosseno é dado por :

$$\cos(\theta_{\alpha\beta}) = \frac{(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}}. \tag{3.22}$$

usando o teorema 3 podemos escrever:

$$\cos^2(\theta_{\alpha\beta}) = \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \; ou \; 1. \tag{3.23}$$

A fórmula acima restringe os ângulos possíveis entre α e β ao seguintes:

$$\varphi = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, \tag{3.24}$$

e também restringe a razão ($k_{\alpha\beta}$) dos comprimentos das raízes.

Eugen B. Dynkin mostrou que todas as informações essenciais no que concerne às raízes para uma dada álgebra de Lie semisimples é derivada de um pequeno subconjunto Π denominado raízes simples. Uma raiz α^+ é **positiva** se em uma base arbitrária sua primeira coordenada diferente de zero é positiva. Uma raiz é **simples** se ela for positiva e não puder ser decomposta como a soma de duas raízes positivas.

Quando nos limitamos às raízes simples, os ângulos $\theta_{\alpha,\beta}$ são maiores do que 90°. A existência de limitações dos ângulos e da razão dos comprimentos entre as raízes fornece uma classifição completa das álgebras de Lie simples complexas, porque reduzem drasticamente o número possível de álgebras de Lie distintas, daí a importância dos teoremas abaixo.

Teorema 6 Se α e β são duas raízes simples, então sua diferença não é uma raiz simples, isto é,

$$if\ \alpha, \beta \in \Pi,\ então\ \alpha - \beta \notin \Pi$$

Se $\alpha, \beta \in \Pi$, então

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = -p, \qquad \text{onde p é um inteiro positivo.}$$

Teorema 7 Se α e β são duas raízes simples, então o ângulo $\theta_{\alpha,\beta}$ é igual a 90°, 120°, 135°ou 150°. Se $(\alpha,\alpha) \leq (\beta,\beta)$ então:

$$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{quando } \theta_{\alpha,\beta} = 120° \\ 2 & \text{quando } \theta_{\alpha,\beta} = 135° \\ 3 & \text{quando } \theta_{\alpha,\beta} = 150° \\ \text{indeterminado} & \text{quando } \theta_{\alpha,\beta} = 90° \end{cases}$$

3.0.6 Diagrama de Dynkin e a Matriz de Cartan

Eugen Dynkin ainda inventou uma maneira de representar em diagramas as informações relevantes de todas as álgebras de Lie semisimples com base no teorema 7. Ele associou as raízes simples a pequenos círculos (o), em seguida conectou esses círculos com uma duas ou três linhas se os ângulos entres as suas raízes associadas fossem respectivamente 120°, 135°ou 150°.

Os circulos correspondentes às raízes ortogonais não foram conectadas diretamente entre si. Os circulos correspondentes às raízes de menor comprimento são cheios (•) e as de comprimento maior são vazios (o). O resultado deste trabalho é ilustrado pelas tabelas 3.2 e 3.3 para todas as famílias das álgebras de Lie simples, A_l, B_l,C_l e D_l e mais cinco álgebras de Lie conhecida como Excepcionais, G_2, F_4, E_6, E_7 e E_8. Nas referidas tabelas, o número sobre os circulos correspondem ao produto (α_i, α_i) e as raízes simples são expressas em termos de um sistemade vetores mutuamente ortogonais: $e_1 = (1,0,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$,...,$e_l = (0,0,0,...,1)$.

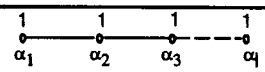
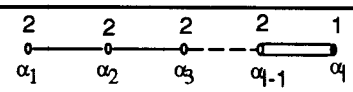
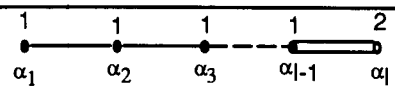
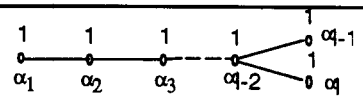
ordem	família	álgebra	diagrama de Dynkin	raízes simples (α_i)
$l(l+2)$	A_l	$su(l+1)$		$e_1-e_2,...,e_l-e_{l+1}$
$l(2l+1)_{l\geq 2}$	B_l	$so(2l+1)$		$e_1-e_2,...,e_{l-1}-e_l,e_l$
$l(2l+1)_{l\geq 3}$	C_l	$sp(2l)$		$e_1-e_2,...,e_{l-1}-e_l, 2e_l$
$l(2l-1)_{l\geq 4}$	D_l	$so(2l)$		$e_1-e_2,...,e_{l-1}-e_l,e_{l-1}+e_l$

Tabela 3.2: Diagrama de Dynkin para as Álgebras Clássicas

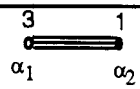
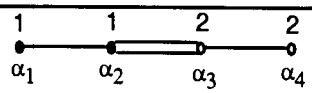
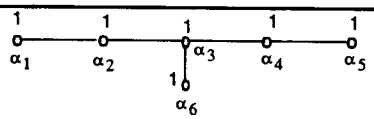
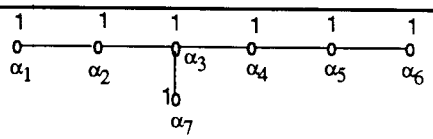
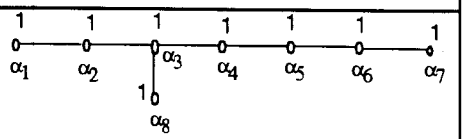
ordem	família	diagrama de Dynkin
14	G_2	
52	F_4	
78	E_6	
133	E_7	
248	E_8	

Tabela 3.3: Diagrama de Dynkin para as Álgebras Excepcionais

A matriz de Cartan

Com as propriedades das raízes simples estabelecidas acima, o próximo passo será introduzir a matriz de Cartan, a qual precisaremos utilizar em aplicações futuras, como por exemplo no algorítmo 1, que determina o sistema de raízes $\sum$, a partir das raízes simples.

Definição 6 Se $\Pi \equiv (\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l)$ for um sistema de raízes simples, então a matriz com elementos

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \tag{3.25}$$

é conhecida como a matriz de Cartan. Dado qualquer diagrama de Dynkin nós podemos construir sua matriz de Cartan usando o teorema 5. Os elementos da diagonal serão sempre 2 e os fora da diagonal poderão ser 0,-1,-2,e -3.

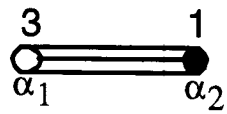
Exemplo *A matriz de Cartan para as álgebras su(3), g_2 e sp(6).*

O diagrama de Dynkin para a álgebra de Lie su(3) é

O diagrama nos diz que o ângulo entre α_1 e α_2 é 120°, $(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = 1$, portanto pela equação 3.22 $(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{-1}{2}$, assim pela expressão 3.25, a matriz de Cartan para su(3) é :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

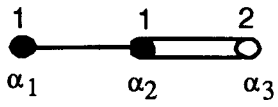
O diagrama de Dynkin para G_2 é



onde $(\alpha_1, \alpha_1) = 3$, $(\alpha_2, \alpha_2) = 1$ e $(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{-3}{2}$, porque o ângulo entre α_1 e α_2 é 150°, portanto a correspondente matriz de Cartan é :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para Sp(6) o diagrama de Dynkin é



e por isso $(\alpha_1, \alpha_1) = 1$, $(\alpha_2, \alpha_2) = 1$, $(\alpha_3, \alpha_3) = 2$ $(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{-1}{2}$, $(\alpha_2, \alpha_3) =$ -1 e $(\alpha_1, \alpha_3) = 0$. Para a sp(6) a matriz de Cartan é :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.0.7 A forma de Dynkin para Raízes e a Mudança de base

As raízes são vetores, cujas componentes são as constantes de estrutura da álgebra na forma de Cartan-Weyl [CW], contudo o teorema 3 levou Dynkin a introduzir uma outra notação para representar as raízes, ou um vetor qualquer nesse espaço. Dado um vetor v em uma base arbitrária, sua forma v^{DYN} [18] é calculado segundo a expressão :

$$\mathrm{v}^{DYN} = \frac{2(\alpha_i, \mathrm{v})}{(\alpha_i, \alpha_i)}. \tag{3.26}$$

uma das vantagens dessa notação é que as componentes do vetor v^{DYN} são sempre números inteiros e mais tarde tiraremos proveito desse fato, porém traz consigo a desvantagem de não ser ortogonal e para fazermos um produto escalar, precisamos conhecer a métrica desse sistema.

Em primeiro lugar, estamos interessados na matriz W que leva um vetor v^{CW} em um vetor v^{DYN}, para as álgebras A_l, a qual derivaremos com brevidade.

Seja v um vetor arbitrário , peso ou raiz escrito em [CW], para as álgebras A_l, i.e.,

$$v^{CW} = v_1^{CW} e_1 + v_2^{CW} e_2 + ... + v_{l+1}^{CW} e_{l+1}, \tag{3.27}$$

Para facilitar os cálculos, expressamos as raízes em uma base ortonormal

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l+1} a_{ij} e_j, \qquad i = 1, 2, ..., l. \tag{3.28}$$

A relação entre as componentes dos vetores em [CW] e (DYN) é obtido usando 3.26,

$$v_1^{DYN} = \frac{2(\alpha_1, \mathrm{v}^{CW})}{(\alpha_1, \alpha_1)} = a_{11} v_1^{CW} + a_{12} v_2^{CW} + ... + a_{1l+1} v_{l+1}^{CW},$$

$$v_2^{DYN} = \frac{2(\alpha_1, \mathrm{v}^{CW})}{(\alpha_1, \alpha_1)} = a_{21}v_1^{CW} + a_{22}v_2^{CW} + ... + a_{2l+1}v_{l+1}^{CW},$$

.....

$$v_l^{DYN} = \frac{2(\alpha_l, \mathrm{v}^{CW})}{(\alpha_l, \alpha_l)} = a_{l1}v_1^{CW} + a_{l2}v_2^{CW} + ... + a_{ll+1}v_{l+1}^{CW},$$

equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix}^{DYN} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1l+1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2l+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & ... & a_{ll+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{l+1} \end{bmatrix}^{CW} = W \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{l+1} \end{bmatrix}^{CW},$$

da tabela 3.2 $\alpha_j = e_j - e_{j+1}$, concluimos que a matriz procurada é :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para a álgebra A_2 temos

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para voltar à base Cartan-Weyl, partindo de vetores na forma Dynkin, temos que aplicar um truque, haja visto que W é uma matriz retangular $l \times l+1$. Introduzimos uma componente nula no vetor v^{DYN} e uma linha na matriz W, onde todos os elementos escolhidos ser iguais a 1, de modo que ela fique quadrada e inversível. Em seguida invertemos a matriz e desprezamos a última coluna. Exemplificamos o procedimento para a álgebra A_2.

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo sua inversa

$$\tilde{W}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

Finalmente, a matriz $\widehat{W}$ que realiza a transformação:

$$\mathrm{v}^{CW} = \widehat{W}\mathrm{v}^{DYN} \tag{3.29}$$

é:

$$\widehat{W} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.0.8 Determinação de todas as Raízes a partir das Raízes Simples

Mostraremos agora como determinar o sistema completo de raízes $\sum$, a partir do conjunto de raízes simples Π. Para aplicações práticas é suficiente determinar somente as raízes positivas . Portanto apresentaremos um algorítmo que nos permite encontrar o sistema de raízes positivas $\sum^{+}$. Usaremos as raízes na forma Dynkin.

Algoritmo 1. Os passos para obter todas as raízes positivas do diagrama de Dynkin são:

1. Construa a matriz de Cartan A e escreva as l raízes simples dadas pelas colunas de A :

$$\alpha_j = (A_{1j}, A_{2,j}, ..., A_{lj}), \qquad j = 1, 2, ..., l. \tag{3.30}$$

2. Começando de $\alpha_1 = (A_{11}, A_{2,1}, ..., A_{l1})$, para cada coordenada negativa A_{i1} temos uma sequência de raízes positivas,

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_i, \alpha_1 + 2\alpha_i, ..., \alpha_1 - A_{i1}\alpha_i. \tag{3.31}$$

3. Tome a última raiz da sequência acima, ao qual chamamos de raiz terminal (β),

$$\beta \equiv \alpha_1 - A_{i1}\alpha_i = (b_1, b_2, ..., b_l), \tag{3.32}$$

e para cada componente negativa (b_l) calcule uma nova sequência,

$$\beta + \alpha_l, \beta + 2\alpha_l, ..., \beta + b_l\alpha_l. \tag{3.33}$$

continue este processo até que todas as coordenadas de todas as raízes terminais sejam positivas.

4. Repita os passos acima para as raízes simple $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_l$,ignorando em cada etapa as raízes que já apareceram anteriormente.

Deste modo, obtemos todas as raízes positivas e cujo resultado pode ser checado pela formula abaixo:

$$R = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha, \tag{3.34}$$

onde α são raízes simples positivas e na forma Dynkin, a soma será sempre :

$$R^{DYN} = (1, 1, ..., 1). \tag{3.35}$$

3.0.9 A Base de Chevalley

A base de Cartan-Weyl nos levou à classificação das álgebras de Lie complexa, além disso, as raízes extraídas dessa base são ortogonais. Vimos anteriormente que Dynkin fornece uma outra forma para representar as raízes, porém esse sistema de raízes não é ortogonal, embora as coordenadas sejam sempre números inteiros. Iremos apresentar uma outra base onde as raízes simples estão naturalmente na forma Dynkin.

Os geradores da subálgebra de Cartan dessa nova base H_{α_i} é uma combinação linear muito especial dos geradores H_i na base Cartan-Weyl, como podemos ver abaixo:

$$H_{\alpha_i} = \frac{2(\alpha_i, H)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \frac{2\sum_j \alpha_i^j H_j}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \tag{3.36}$$

onde $H = (H_1, ..., H_l)$ e $\alpha_i = (\alpha_i^1, ..., \alpha_i^j)$.

Com essa prescrição, os comutadores 3.16a 3.19 ficam:

$$[H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}] = 0 \tag{3.37}$$

$$[H_{\alpha_i}, E_{\pm\alpha_j}] = \pm\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} E_{\pm\alpha_j} \tag{3.38}$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = H_{\alpha_i} \tag{3.39}$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_j}] = \pm(p+1)E_{\alpha_i+\alpha_j} \tag{3.40}$$

onde p = -1 se $\alpha_i + \alpha_j$ não for raiz e p = m se $\alpha_i + \alpha_j$ for raíz, neste caso m($\geq$ 0) é o mair inteiro para o qual $\alpha_j - m\alpha_i$. Esta é a chamada base de **Chevalley**.

Exemplo *A Álgebra su(3) na base de Chevalley.*

A primeira providência é calcular os novos geradores da subálgebra de Cartan. No exemplo raízes da álgebra gl(3), vemos claramente que α_i é dado por $\alpha_{12} = (1, -1, 0)$, $\alpha_{23} = (0, 1, -1)$ e $H = (H_1, H_2, H_3)$. Da expressão 3.36 os novos geradores diagonais são:

$$\mathrm{H}_{\alpha_{12}} = \mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{H}_{\alpha_{23}} = \mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_3.$$

Os demais geradores são os mesmos, potanto resta agora recalcularmos todas as relações de comutação que definem a álgebra. O resultado encontrado foi:

$[H_{\alpha_{12}}, A_{12}] = 2A_{12}$	$[H_{\alpha_{23}}, A_{12}] = -A_{12}$	$[H_{\alpha_{12}}, A_{21}] = -2A_{12}$
$[H_{\alpha_{23}}, A_{21}] = A_{21}$	$[H_{\alpha_{12}}, A_{23}] = -A_{23}$	$[H_{\alpha_{23}}, A_{23}] = 2A_{23}$
$[H_{\alpha_{12}}, A_{32}] = A_{32}$	$[H_{\alpha_{23}}, A_{32}] = -2A_{32}$	$[H_{\alpha_{12}}, A_{13}] = A_{13}$
$[H_{\alpha_{23}}, A_{13}] = A_{13}$	$[H_{\alpha_{12}}, A_{31}] = -A_{31}$	$[H_{\alpha_{23}}, A_{31}] = -A_{31}$
$[A_{12}, A_{23}] = A_{13}$	$[A_{12}, A_{13}] = 0$	$[A_{12}, A_{32}] = 0$
$[A_{12}, A_{21}] = H_{\alpha_{12}}$	$[A_{12}, A_{31}] = -A_{32}$	$[A_{13}, A_{23}] = 0$
$[A_{13}, A_{21}] = -A_{23}$	$[A_{13}, A_{32}] = A_{12}$	$[A_{13}, A_{31}] = H_{\alpha_{12}} + H_{\alpha_{23}}$
$[A_{23}, A_{21}] = 0$	$[A_{23}, A_{31}] = A_{21}$	$[A_{23}, A_{32}] = H_{\alpha_{23}}$
$[A_{21}, A_{32}] = -A_{31}$	$[A_{21}, A_{31}] = 0$	$[A_{31}, A_{32}] = 0$

Tabela 3.4: Base de Chevalley para sl(3)

Capítulo 4

Pesos e Operadores de Casimir

A idéia chave na teoria de representação das álgebras de Lie semisimples são os pesos, mais especificamente o peso máximo, por isso eles serão introduzidos neste capítulo, bem como algumas de suas propriedades básicas. O outro conceito central no desenvolvimento da teoria de representações é o de operador de Casimir [15, 17]. Aqui eles são visto como o centro da álgebra universal envolvente U($\mathcal{L}$) [16].

4.1 Pesos

Uma álgebra de Lie tem uma infinidade de representações irredutíveis, por isso é necessário desenvolver um procedimento sistemático para descrever e distinguir todas essas representações. As matrizes da representação podem ser construídas para satisfazer a base de Cartan-Weyl ou a base de Chevalley. Por isso, para uma representação de dimensão n de uma álgebra de Lie de rank l, teremos l matrizes H_i n×n auto-comutantes, e (n - l) matrizes E_α,com $\alpha \in \sum$, todas satisfazendo por exemplo as equações 3.16 a 3.19. Uma vez que as matrizes H_i são auto-comutantes, nós podemos construir um conjunto de autovetores $|u\rangle$ que diagonalizam simultaneamente essas matrizes, em outras palavras,

$$H_{\alpha_i} |u\rangle = \Lambda_i |u\rangle . \tag{4.1}$$

O conjunto dos l autovalores Λ_i formam um vetor Λ com l componentes chamado peso. Os vetores da base $|u\rangle$ são os vetores peso.

Analogamente às raízes, um peso Λ é dito ser positivo se sua primeira componente não nula

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

for positiva e é dito ser maior do que outro peso Λ^*, se a diferença entre eles, $\Lambda - \Lambda^*$ for positiva. Podemos naturalmente escolher no espaço $\mathcal{H}$ uma base de vetores peso $|u_1\rangle, |u_2\rangle, ..., |u_n\rangle$ onde os autovetores Λ_i estejam arranjados da seguinte forma:

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq ... \geq \Lambda_n. \tag{4.2}$$

Esta é conhecida por base canônica, e Λ_1 é chamado de **peso máximo**. Se a representação for irredutível, o peso máximo é não degenerado, e duas representações irredutíveis Γ_1 e Γ_2 são equivalentes se seus pesos máximos forem iguais. Por isso dizemos que o peso máximo ($\Lambda_{\max}$) especifica completamente uma representação irredutível. A seguir enunciaremos, sem menção a prova, dois teoremas centrais envolvendo os pesos.

Teorema 8 Para qualquer peso Λ e raiz α, n=$\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ é um inteiro e $\Lambda - n\alpha$ é um peso.

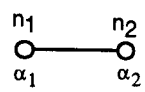
Teorema 9 Para Λ ser o peso máximo de alguma representação irredutível φ de $\mathcal{L}$ é necessário e suficiente que todos os números

$$\Lambda_\alpha = \frac{2(\alpha, \Lambda)}{(\alpha, \alpha)} \qquad (\alpha \in \Pi) \tag{4.3}$$

seja um inteiro positivo.

Nós podemos designar qualquer representação irredutível de $\mathcal{L}$, associando números inteiros não negativos Λ_α com os circulos dos diagramas de Dynkin (que estão associados com as raízes simples). Como existe l raízes simples, haverá somente l componentes Λ_α de $\Lambda_{\max}$ para etiquetar as representações.

Exemplo Considere que para a álgebra su(3), exista uma representação arbitrária $\Lambda_{\alpha_1} = n_1$ e $\Lambda_{\alpha_2} = n_2$,



Escrevendo $\Lambda = a\alpha_1 + b\alpha_2$ e lembrando que$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = 1$ e $(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{-1}{2}$,pelo teorema 2 , montamos o sistema

$$\begin{cases} \Lambda_{\alpha_1} = 2(\Lambda, \alpha_1) = n_1 \\ \Lambda_{\alpha_2} = 2(\Lambda, \alpha_2) = n_2 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\Lambda = \frac{(2n_1 + n_2)\alpha_1}{3} + \frac{(n_1 + 2n_2)\alpha_2}{3} \tag{4.4}$$

A seguir, iremos apresentar um algoritmo que forneçam os pesos de uma representação a partir do peso máximo.

Algoritmo 2. Os passos para computar o conjunto completo de pesos são:

1. Construa a matriz de Cartan A e escreva as l raízes simples dadas pelas colunas de A :

$$\alpha_j = (A_{1j}, A_{2,j}, ..., A_{lj}), \qquad j = 1, 2, ..., l. \tag{4.5}$$

2. Começando do peso máximo $\Lambda = (a_1, a_2, ..., a_l)$ na forma Dynkin, para cada $a_i > 0$,obtemos uma cadeia de pesos da seguinte forma:

$$\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^{a_i+1}, \qquad \lambda^n = \Lambda - (n-1)\alpha_i.$$

3. Para cada peso na cadeia acima, expresse λ^m em termos de suas coordenadas, isto é, $\lambda^m = (m_1, m_2, ..., m_l)$. Para cada $m_k > 0$ há uma outra cadeia de pesos da seguinte forma:

$$\lambda^m, \lambda^m - \alpha_k, ..., \lambda^m - m_k\alpha_k.$$

4. Continue este processo para cada peso que não tenha aparecido em etapas anteriores, até que todos os $m_k \leq 0$.

5. Se o sistema contém o peso nulo, por simetria, basta calcular os pesos positivos.

Exemplos *Sistema de Pesos para as representações (1,0), (1,1) e (2,1) da álgebra A_2.*

1°passo: As colunas da matriz de Cartan A desta álgebra fornece α_1 e α_2,

α_1 α_2	$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	$\alpha_1 = (2,-1), \alpha_2 = (-1,2)$

2º passo: Escrevemos Λ e efetuamos λ^1, pois $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$, portanto,

$$\begin{array}{|c|}\hline \Lambda \\ \hline (1,0) \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline \lambda^1 = \Lambda - \alpha_1 \\ \hline (-1,1) \\ \hline \end{array}$$

3º passo: Como só a compomente m_2 é positiva, subtrimos do peso λ^1 a raiz α_2 :

$$\begin{array}{|c|}\hline \lambda^2 = \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 \\ \hline (0,-1) \\ \hline \end{array}$$

4°passo: Finalizamos o processo, pois λ^2 não tem nenhuma componente positiva.

Continuamos com os demais exemplos, calculando agora o sistema de pesos para a representação (1,1). O primeirro passo já foi implementado acima, agora escrevemos Λ, em seguida implementamos o segundo passo do álgorítmo2, subtraindo de Λ as raiz α_1 e a raiz α_2 pois a_1,$a_2 = 1$, e encontramos dois peso. Para cada componente $m_k > 0$, desses pesos, devemos implementar o terceiro passo, o que resultará em outros quatro pesos. Continuamos o processo (4º passo) para todos os m_k positivos. A seguir finalizamos, pois não há mais $m_k > 0$. Veja o esquema abaixo:

$$\begin{array}{|c|}\hline \Lambda \\ \hline (1,1) \\ \hline \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - \alpha_1 \\ \hline (-1,2) \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3^\circ} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 \\ \hline (0,0) \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ \hline (1,-2) \\ \hline \end{array} \xrightarrow{4^\circ} \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ \hline (-1,-1) \\ \hline \end{array} \end{array} \right. \\ \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - \alpha_2 \\ \hline (2,-1) \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3^\circ} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - \alpha_2 - \alpha_1 \\ \hline (0,0) \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \hline (-2,1) \\ \hline \end{array} \xrightarrow{4^\circ} \begin{array}{|c|}\hline \Lambda - 2\alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \hline (-1,-1) \\ \hline \end{array} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Finalizamos os exemplos com um esquema que exibe o algoritmo 2 para a representação (2,1).

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\Lambda\\ (2,1)\end{array}} \arrow[r, "2^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_1\\ (0,2)\end{array}} \arrow[r, "3^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_1-\alpha_2\\ (1,0)\end{array}} \arrow[r, "4^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1-\alpha_2\\ (-1,1)\end{array}} \arrow[r] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1-2\alpha_2\\ (0,-1)\end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_1-2\alpha_2\\ (2,-2)\end{array}} \arrow[r, "4^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1-2\alpha_2\\ (0,-1)\end{array}} \\
 & & & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-3\alpha_1-2\alpha_2\\ (-2,0)\end{array}} \\
 & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1\\ (-2,3)\end{array}} \arrow[r, "3^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1-\alpha_2\\ (-1,1)\end{array}} \arrow[r, "4^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1-2\alpha_2\\ (0,-1)\end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1-2\alpha_2\\ (0,-1)\end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_1-3\alpha_2\\ (1,-3)\end{array}} \arrow[r, "4^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-3\alpha_1-3\alpha_2\\ (-1,-2)\end{array}} \\
 & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_2\\ (3,-1)\end{array}} \arrow[r, "3^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_2-\alpha_1\\ (1,0)\end{array}} \arrow[r, "4^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_2-2\alpha_1\\ (-1,1)\end{array}} \arrow[r] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_2-2\alpha_1\\ (0,-1)\end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_2-2\alpha_1\\ (-1,1)\end{array}} \arrow[r, "4^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_2-2\alpha_1\\ (0,-1)\end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-\alpha_2-3\alpha_1\\ (-3,2)\end{array}} \arrow[r, "4^\circ"] & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-2\alpha_2-3\alpha_1\\ (-2,0)\end{array}} \arrow[d] \\
 & & & \boxed{\begin{array}{c}\Lambda-3\alpha_1-3\alpha_2\\ (-1,-2)\end{array}}
\end{tikzcd}
$$

4.2 Operadores de Casimir

Um problema clássico em Mecânica Quântica é o estudo da interação entre o momento de dipolo magnético do spin eletrônico e o campo magnético interno de um átomo com um elétron, chamado de interação spin-órbita. Essa interação produz um acoplamento entre o momento angular orbital **L** e momento angular de spin **S**, fazendo com que a orientação de um dependa do outro. A grandeza conservada é o momento angular total **J**,

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \tag{4.6}$$

O que se mede experimentalmente é a intensidade de J e de sua componente J_z. Representando pictoricamente esses vetores num sistema cartesiano, é lícito escrever J^2 termos das projeções J_x, J_y e J_z, como:

$$J^2 = J_z^2 + J_x^2 + J_y^2, \tag{4.7}$$

ou ainda em termos de $J_\pm$,definidos no capítulo anterior,

$$J^2 = J_z^2 + J_+J_- + J_-J_+. \tag{4.8}$$

A intensidade medida é a raiz quadrada do autovalor deste operador enquanto a projeção na direção z é o autovalor de J_z.

Note que J^2 não é um gerador da álgebra, mas o produto de geradores que possui uma propriedade muito peculiar, ele comuta com todos os geradores, i.e.

$$[J^2, J_i] = 0, \qquad J_i \in \mathcal{L}. \tag{4.9}$$

H. B.Casimir mostrou em 1931 como um operador similar a J^2 pode ser definido para qualquer álgebra de Lie semisimples. Sua prescrição produziu um operador de segunda ordem nos geradores de base, que é apropriadamente chamado de operador de Casimir de segunda ordem e denotado por C_2.Usando o tensor métrico g^{ik}, constrói-se esse operador da seguinte forma:

$$C_2 = g^{ik} X_i X_k. \tag{4.10}$$

onde $g^{ik} = tr\{ad(X_i)ad(X_k)\}$.

Um problema de fundamental importância, principalmente em aplicações, é encontrar a fórmula explícita do espectro do operador invariante. Este problema pode ser facilmente resolvido para o operador de Casimir quadrático de uma álgebra de Lie semisimples. O operador C_2, da equação 4.10,na base de Cartan-Weyl [15], tem a forma:

$$C_2 = g^{ik} H_i H_k + \sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha}. \tag{4.11}$$

Se o autovalor do vetor peso $|u_\Lambda\rangle$ for o peso máximo Λ de uma representação irredutível, então

$$C_2 |u_\Lambda\rangle = g^{ik} H_i H_k |u_\Lambda\rangle + \sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha} |u_\Lambda\rangle \tag{4.12}$$

e lembrando que $E_\alpha |u_\Lambda\rangle = 0$, podemos restringir a soma acima tomando somente as raízes positivas, e como

$$E_\alpha E_{-\alpha} = E_{-\alpha} E_\alpha + \alpha^i H_i, \tag{4.13}$$

logo,

$$\begin{aligned} C_2 |u_\Lambda\rangle &= g^{ik} H_i H_k |u_\Lambda\rangle + (\alpha^i H_i + \beta^i H_i + ...) |u_\Lambda\rangle \\ &= (\Lambda, \Lambda) |u_\Lambda\rangle + (\Lambda, \alpha + \beta + ...) |u_\Lambda\rangle \\ &= [(\Lambda, \Lambda) + (\Lambda, \sum_{\alpha>0} \alpha)] |u_\Lambda\rangle \\ &= [(\Lambda, \Lambda) + (\Lambda, 2g)] |u_\Lambda\rangle , \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde g é a metade da soma das raízes positivas.

Podemos escrever explicitamente o autovalor 4.14 para uma representação arbitrária $\Gamma(n_1, n_2)$ da álgebra de Lie A_2, simplesmente tomando Λ da equação 4.4 e substituir em 4.14, após algumas manipulações, encontramos:

$$C_2(\Lambda) = \frac{1}{9}(n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2 + 3(n_1 + n_2)). \tag{4.15}$$

O autovalor do operador de Casimir não muda sob transformação de similaridade, portanto esse valor é fixo para uma dada representação irredutível, independentemente da base $|u\rangle$. Uma representação irredutível de uma álgebra de Lie é determinada pelo seu peso máximo Λ, o qual depende de l parâmetros $(n_1, n_2, ..., n_l)$. Contudo não se espera que a especificação do autovalor

de C_2 seja suficiente para fixar uma representação irredutível. Este fato foi confirmado por G. Racah (1950) ao mostrar que para uma álgebra de Lie complexa de rank l (>1), existe um conjunto de operadores de Casimir de ordens superiores, cujos autovalores especificam completamente a representação. A generalização de 4.10 é dada por:

$$C_p = g_{i_1 i_2 ... i_p} X^{i_1} X^{i_2} ... X^{i_p}, \qquad p = 1, 2, ... \tag{4.16}$$

onde $g_{i_1 i_2 ... i_p} = \text{tr}\ (\text{ad}(X^{i_1})...\text{ad}(X^{i_p}))$.

Em particular, ele mostrou que há l operadores invariantes, a saber:

A_l	$C_2, C_3, ..., C_{l+1}$
B_l	$C_2, C_4, ..., C_{2l}$
C_l	$C_2, C_4, ..., C_{2l}$
D_l	$C_2, C_4, ..., C_{2l-1}, C_{2l}$
G_2	C_2, C_6
F_4	C_2, C_6, C_8, C_{12}
E_6	$C_2, C_5, C_6, C_9, C_{12}$
E_7	$C_2, C_6, C_8, C_{10}, C_{12}, C_{14}, C_{18}$
E_8	$C_2, C_8, C_{12}, C_{14}, C_{18}, C_{20}, C_{24}, C_{30}$

Tabela 4.1: Operadores de Casimir

A Álgebra Universal Envolvente [16]

Considere uma álgebra τ gerada pelos produtos tensoriais de uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$, sobre um corpo $\mathbb{K}$, i.e.,

$$\tau = K \oplus \mathcal{L} \oplus (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}) \oplus (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}) \oplus ...$$

e um ideal ideal J gerado por elementos da forma:

$$X \oplus Y - Y \oplus X - [X, Y], \qquad \text{onde X,Y} \in \mathcal{L}$$

A álgebra quociente U=$\frac{\tau}{J}$ é uma álgebra associativa chamada de álgebra universal envolvente **U($\mathcal{L}$)**. A base de **U($\mathcal{L}$)** é formada pelo conjunto de todos os monômios possíveis

$$X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}, \qquad i_k = 1, 2, ..., \tag{4.17}$$

Os operadores de Casimir **C** estão no **centro** da álgebra universal envolvente **U($\mathcal{L}$)**.

Capítulo 5

O método de Gel'fand-Zetlin

Em 1950 I. M. Gel'fand e M. L. Zetlin desenvolveram um método engenhoso para a construção das representações irredutíveis das álgebras de Lie u(n) e so(n), fornecendo fórmulas que generalizam 5.18 e 5.19, sendo válidas tanto para álgebras compactas quanto para álgebras não compactas. Este método é adequado para aplicações em Física Quântica e mais tarde será utilizado para estudar as Álgebras Quânticas, por isso descreveremos este formalismo em detalhe, finalizando com um exemplo para a álgebra sl(3) [16]. Antes derivaremos a representação irredutíveis de su(2) [15].

5.1 A Representação da Álgebra su(2)

A Álgebra de Lie su(2), como sabemos, é gerada por $J_\pm$ e J_z com as regras de comutação:

$$[J_z, J_\pm] = J_\pm \qquad [J_+, J_-] = 2J_z. \tag{5.1}$$

e o operador de Casimir é dado por:

$$\mathbf{C} = J_z^2 + J_+J_- + J_-J_- = \mathbf{J}^2. \tag{5.2}$$

Usando as equação 5.1 e 5.2, encontramos

$$J_+J_- = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z - 1), \tag{5.3}$$

$$J_-J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z + 1). \tag{5.4}$$

Elegemos os vetores $|Xa\rangle$ para ser a base do espaço portador da representação, requerendo que eles sejam autovetores simultâneos dos operadores $\mathbf{J}^2$ e J_z, com autovalores **x** e **a** respectivamente. Estes operadores gozam da propriedade de serem hermitianos e consequentemente os seus autovalores são reais, i.e.,

$$\mathbf{J}^2 |Xa\rangle = x |Xa\rangle , \qquad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

$$\mathbf{J}_z |Xa\rangle = a |Xa\rangle , \qquad a \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

agora podemos avaliar os operadores das equações 5.3 e 5.4,

$$J_- J_+ |Xa\rangle = [x - a(a+1)] |Xa\rangle , \tag{5.7}$$

$$J_+ J_- |Xa\rangle = [x - a(a-1)] |Xa\rangle . \tag{5.8}$$

Como $J_+^\dagger = J_-$, os autovalores de $J_- J_+$ e $J_+ J_-$ devem ser positivos definidos ,

$$x - a(a \pm 1) \geq 0. \tag{5.9}$$

Para determinar os valores de **x** e **a** que satisfazem 5.9, impomos que eles sejam consistentes com 5.1,

$$\langle Xa'| [J_z, J_+] |Xa\rangle = (a' - a) \langle Xa'| J_+ |Xa\rangle = \langle Xa'| J_+ |Xa\rangle , \tag{5.10}$$

daí concluímos que os autovalores sucessivos de J_z devem diferir por uma unidade, i.e.,

$$(a' - a) = 1. \tag{5.11}$$

Resolvendo a equação 5.9, requerendo apenas que **x** seja um número real positivo, deparamos com um resultado surpreendente, os valores possíveis que **a** pode assumir está restrito a um intervalo ($\mathbf{a}_+$,$\mathbf{a}_-$), onde

$$a_\pm = \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{1+4x}}{2}, \tag{5.12}$$

e consequentemente,

$$x = a_+(a_+ + 1) \qquad e \qquad a_- = -a_+ - 1. \tag{5.13}$$

A equação 5.11 nos permite dizer que $\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-$ é um inteiro enquanto a equação 5.13 nos garante que $\mathbf{2a}_+$ é também um inteiro. Uma notação mais conveniente é obtida escolhendo j = $\mathbf{a}_+$ e m igual a todos os valores que **a** pode assumir. Segue das considerações acima que uma representação unitária de su(2) pode ser etiquetada pelo número j e os autovetores por $|j, m\rangle$, conhecida em Mecânica Quântica por base de momento angular. Adotando essa convenção, a equação 5.9 pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \text{j(j+1)-m(m+1)} \geq 0, \\ \\ \text{j(j+1)-m(m-1)} \geq 0, \end{cases} \tag{5.14}$$

com um pouco de cuidado, encontramos todos os valores de m em função de j satisfazendo simultaneamente as equações em 5.14, a saber:

$$m = j, j-1, ..., -j+1, -j, \tag{5.15}$$

o número de valores que m assume é finito e consequentemente a representação unitária de su(2) são todas de dimensão finita igual a 2j+1.

Finalmente resta saber como $J_\pm$ agem em $|j, m\rangle$. Da expressão 5.10 podemos dizer que J_+ é um operador que conecta o estado $|j, m\rangle$ ao estado $|j, m+1\rangle$, analogamente J_- conecta o estado $|j, m\rangle$ ao estado $|j, m-1\rangle$, e mais,

$$|J_+ |j, m\rangle| = \sqrt{\langle j, m| J_- J_+ |j, m\rangle} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}, \tag{5.16}$$

$$|J_- |j, m\rangle| = \sqrt{\langle j, m| J_+ J_- |j, m\rangle} = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}. \tag{5.17}$$

Resumindo, pelo procedimento exibido acima fomos capazes de encontrar uma representação de dimensão finita para a álgebra su(2), que será enunciada a seguir.

Seja V_j , j = 0,$\frac{1}{2}$,1,.. ,o espaço de Hilbert com base $| jm\rangle$, com -j $\leq$ m $\leq$ j, no qual existe uma representação de su(2) dada por:

$$J_z \mid j, m\rangle = m \mid j, m\rangle, \tag{5.18}$$

$$J_{\pm} \mid j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \mid j, m \pm 1\rangle, \tag{5.19}$$

$$C \mid j,m\rangle = j(j+1) \mid j,m\rangle, \tag{5.20}$$

5.2 O método de Gel 'fand-Zetlin.

Uma representação arbitrária da álgebra de Lie geral linear (gl(n)) que satisfaz a condição 2.12, induz uma representação hermitiana de u(n) determinada pelas equações 2.13 a 2.15. A construção de uma base canônica para representar a álgebra u(n) baseia-se em duas propriedades conhecidas:

1. Uma representação irredutível finita da álgebra de Lie u(n) é unicamente determinada por um vetor $m_n = (m_{1n}, m_{2n}, ..., m_{nn})$ com componentes inteiras m_{in} obedecendo a condição:

$$m_{1n} \geq m_{2n} \geq ... \geq m_{nn}. \tag{5.21}$$

2. Na decomposição de representações irredutíveis finitas de u(n), aparecem somente as representações irredutíveis u(n-1), cujas componentes $m_{i,n-1}$ do vetor m_{n-1} obedecem a condição:

$$m_{in} \geq m_{i,n-1} \geq m_{i+1,n}, , i = 1, 2, ..., n-1 \tag{5.22}$$

sendo a multiplicidade de toda representação irredutível de u(n-1) que aparece na decomposição de u(n) é igual a um. Isto ocorre ao longo de toda a cadeia canônica,

$$u(n) \supset u(n-1) \supset ... \supset u(2) \supset u(1). \tag{5.23}$$

Os vetores que expandem o espaço portador da representação são chamados de " patterns " de Gel'fand-Zetlin $|m\rangle$,

$$|m\rangle = \left| \begin{array}{c} m_{1n} \quad m_{2n} \ldots\ldots m_{n-1,n} \quad m_{n,n} \\ m_{1,n-1} \quad m_{2,n-1} \ldots m_{n-1,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{12} \quad m_{22} \\ m_{11} \end{array} \right\rangle. \tag{5.24}$$

A primeira linha do pattern é determinada pelas componentes dos vetores m_n que rotulam as representações irredutíveis de u(n). Na linha seguinte existe inteiros arbitrários o qual obedecem as seguintes desigualdades, advindas da propriedade 2:

$$m_{ij} \geq m_{i,j-1} \geq m_{i+1,j}, \qquad i = 1, 2, ..., n-1, j = 1, 2, ..., n. \tag{5.25}$$

as quais expressam as leis de ramificação de Weyl para o Gl(n).

Para gerarmos todos os vetores de base, nós utilizamos a condição 5.25 até esgotar as possibilidades, sempre colocando os números $m_{i,j-1}$ da (j-1)-ésima linha entre os números $m_{i,j}$ e $m_{i+1,j}$ da j-ésima linha. Para um definido k, k=1,...,n-1, os números $m_{i,j}$, $1 \leq i \leq k$, representam as componentes do vetor m_k que etiqueta uma representação irredutível u(k) que aparece na decomposição de uma outra representação irredutível de u(n) de dimensão maior. Estes vetores $|m\rangle$ formam uma base ortonormal.

Exemplo Uma representação rotulada por m = [2,1,0] é expandida por oito vetores de base do espaço portador da representação, construída a partir de 5.25,veja:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 2 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 1 \end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 0 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{matrix}\right\rangle \text{ e } \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}\right\rangle.$$

Para determinar uma representação hermitiana de uma álgebra de Lie u(n) é suficiente determinar a ação dos geradores A_{ij} , i,j=1,2,..,n , nos vetores $|m\rangle$ e checar se a condição de hermiticidade e a expressão 2.12 estão satisfeitas.

Podemos nos restringir aos geradores $A_{k,k}$, $A_{k,k-1}$ e $A_{k-1,k}$, porque a ação dos outros geradores podem ser obtidos a partir do comutador entre estes geradores mediante o uso da equação 2.12, i.e.,

$$A_{k-2,k} = [A_{k-2,k-1}, A_{k-1,k}], \tag{5.26}$$

e genericamente:

$$A_{k,k-h} = [A_{k,k-1}, A_{k-1,k-h}] \qquad h > 1, \tag{5.27}$$

$$A_{k-h,k} = [A_{k-h,k-1}, A_{k-1,k}] \qquad h > 1. \tag{5.28}$$

Para construir explicitamente as representações irredutíveis da álgebra de Lie u(n), usamos as fórmulas propostas por Gel'fand e Zetlin para a ação dos geradores $A_{k,k}$, $A_{k,k-1}$ e $A_{k-1,k}$ sobre os vetores de base, $|m\rangle$.

Para os geradores diagonais A_{kk},

$$A_{k,k}\,|m\rangle = (\sum_{j=1}^{k} m_{jk} - \sum_{j=1}^{k} m_{jk-1})\,|m\rangle \tag{5.29}$$

para k = 1,2,...,n e com $m_{10} \equiv 0$.

Quanto aos geradores não diagonais $A_{k,k-1}$ e $A_{k-1,k}$,

$$A_{k,k-1}\,|m\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} a^j_{k-1}(m)\,|m^j_{k-1}\rangle \tag{5.30}$$

$$A_{k-1,k}\,|m\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(m)\,\left|m^{\hat{j}}_{k-1}\right\rangle \tag{5.31}$$

onde

$$a^j_{k-1}(m) = \left[\frac{-\prod_{i=1}^{k}(l_{i,k} - l_{j,k-1} + 1)\prod_{i=1}^{k-2}(l_{i,k-2} - l_{j,k-1})}{\prod_{i\neq j}^{k-1}(l_{i,k-1} - l_{j,k-1} + 1)(l_{i,k-1} - l_{j,k-1})}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.32}$$

$$b^j_{k-1}(m) = \left[\frac{-\prod_{i=1}^{k}(l_{i,k} - l_{j,k-1})\prod_{i=1}^{k-2}(l_{i,k-2} - l_{j,k-1} - 1)}{\prod_{i\neq j}^{k-1}(l_{i,k-1} - l_{j,k-1} - 1)(l_{i,k-1} - l_{j,k-1})}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.33}$$

com:

$$l_{i,k} = m_{i,k} - i \tag{5.34}$$

O vetor $|m^j_{k-1}\rangle$ é obtido trocando-se o número $m_{j,k-1}$ na (k-1)-ésima linha de $|m\rangle$ pelo número $m_{j,k-1} - 1$, enquanto o vetor $\left|m^{\hat{j}}_{k-1}\right\rangle$ é obtido trocando-se o número $m_{j,k-1}$ na (k-1)-ésima linha de $|m\rangle$ pelo número $m_{j,k-1}$ +1. Os coeficientes $a^j_{k-1}(b^j_{k-1})$ serão diferentes de zero somente para os patterns que obedecerem desigualdade 5.25.

5.2.1 A base de Gel'fand-Zetlin para a álgebras sl(3).

Para implementar o método descrito acima para a álgebra sl(3), precisamos partir de uma representação caracterizada pelo vetor $m_3=(m_{13},m_{23},0)$, cujas componentes estejam ordenadas de acordo com relação 5.21. Depois geramos os vetores de base usando 5.25 e agimos com os geradores da álgebra nesses vetores de acordo com as fórmula propostas por Gel'fand e Zetlin. Porém pode acontecer que m_3 não esteja ordenada, neste caso podemos somar uma constante τ a todas as suas componentes,

$$m_n = [m_{13} + \tau, m_{23} + \tau, m_{33} + \tau]. \tag{5.35}$$

Isto é permissível porque duas representações que diferem por um número inteiro têm a mesma dimensão e são equivalentes. Portanto os vetores de base $|m\rangle$, para a álgebra sl(3) sempre podem ser escritos como:

$$|m\rangle = \left| \begin{array}{ccc} m_{13} & m_{23} & 0 \\ & m_{12} \quad m_{22} & \\ & m_{11} & \end{array} \right\rangle, \tag{5.36}$$

onde a dimensão é dado pela expressão:

$$(1 + m_{13} - m_{23})(1 + \frac{1}{2}m_{13})(1 + m_{23}). \tag{5.37}$$

Este procedimento é geral e pode ser aplicado para a construção de todas as representações das álgebras da famíla A_l.

A ação dos geradores diagonais sobre $|m\rangle$, de acordo com equação 5.29 são :

$$H_1 |m\rangle = (2m_{11} - m_{12} - m_{22}) |m\rangle, \tag{5.38}$$

$$H_2 |m\rangle = (2m_{12} + 2m_{22} - m_{11} - m_{13} - m_{23}) |m\rangle, \tag{5.39}$$

onde $H_1 = A_{11} - A_{22}$ e $H_2 = A_{22} - A_{33}$.

A ação dos não diagonais, pelas expressões 5.30 e 5.31, é:

$$A_{12} |m\rangle = b_1^1 \left| \begin{array}{ccc} m_{13} & m_{23} & 0 \\ & m_{12} \quad m_{22} & \\ & m_{11} + 1 & \end{array} \right\rangle, \tag{5.40}$$

$$A_{21}\left|m\right\rangle = a_1^1 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12} & m_{22} & \\ & m_{11}-1 & \end{matrix} \right\rangle, \tag{5.41}$$

$$A_{23}\left|m\right\rangle = b_2^1 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12}+1 & m_{22} & \\ & m_{11} & \end{matrix} \right\rangle + b_2^2 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12} & m_{22}+1 & \\ & m_{11} & \end{matrix} \right\rangle, \tag{5.42}$$

$$A_{32}\left|m\right\rangle = a_2^1 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12}-1 & m_{22} & \\ & m_{11} & \end{matrix} \right\rangle + a_2^2 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12} & m_{22}-1 & \\ & m_{11} & \end{matrix} \right\rangle, \tag{5.43}$$

$$A_{13}\left|m\right\rangle = c_1^1 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12}+1 & m_{22} & \\ & m_{11}+1 & \end{matrix} \right\rangle + c_1^2 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12} & m_{22}+1 & \\ & m_{11}+1 & \end{matrix} \right\rangle, \tag{5.44}$$

$$A_{31}\left|m\right\rangle = c_2^1 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12}-1 & m_{22} & \\ & m_{11}-1 & \end{matrix} \right\rangle + c_2^2 \left| \begin{matrix} m_{13} & m_{23} & 0 \\ m_{12} & m_{22}-1 & \\ & m_{11}-1 & \end{matrix} \right\rangle, \tag{5.45}$$

onde:

$$a_1^1 = [(m_{12}-m_{11}+1)(m_{11}-m_{22})]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.46}$$

$$b_1^1 = [(m_{12}-m_{11})(m_{11}-m_{22}+1)]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.47}$$

$$b_2^2 = \left[\frac{(m_{13}-m_{22}+1)(m_{23}-m_{22})(m_{22}+1)(m_{11}-m_{22})}{(m_{12}-m_{22})(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.48}$$

$$a_2^1 = \left[\frac{(m_{13}-m_{12}+1)(m_{12}-m_{23})(m_{12}+1)(m_{12}-m_{11})}{(m_{12}-m_{22})(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.49}$$

$$a_2^2 = \left[\frac{(m_{13}-m_{22}+2)(m_{23}-m_{22}+1)(m_{22})(m_{11}-m_{22}+1)}{(m_{12}-m_{22}+2)(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.50}$$

$$b_2^1 = \left[\frac{(m_{13}-m_{12})(m_{12}-m_{23}+1)(m_{12}+2)(m_{12}-m_{11}+1)}{(m_{12}-m_{22}+2)(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.51}$$

$$c_1^1 = \left[\frac{(m_{13}-m_{12})(m_{12}-m_{23}+1)(m_{12}+2)(m_{11}-m_{22}+1)}{(m_{12}-m_{22}+2)(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.52}$$

$$c_1^2 = -\left[\frac{(m_{13}-m_{22}+1)(m_{23}-m_{22})(m_{22}+1)(m_{12}-m_{11})}{(m_{12}-m_{22})(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.53}$$

$$c_2^1 = \left[\frac{(m_{11}-m_{22})(m_{13}-m_{12}+1)(m_{12}+1)(m_{12}-m_{23})}{(m_{12}-m_{22})(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.54}$$

$$c_2^2 = -\left[\frac{(m_{12}-m_{11}+1)(m_{13}-m_{22}+2)(m_{22})(m_{23}-m_{22}+1)}{(m_{12}-m_{22}+2)(m_{12}-m_{22}+1)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.55}$$

As representações irredutíveis para as álgebras A_l são conhecidas e os pesos máximos que especificam cada uma delas, bem como suas dimensões, estão tabeladas. Segundo W. Mckay and J. Patera [21], as representações com dimensão até 64 para a álgebra A_2 são:

Λ_{max}	(1,0)	(2,0)	(1,1)	(3,0)	(2,1)	(4,0)	(5,0)
dimensão	3	6	8	10	15	15	21
Λ_{max}	(3,1)	(2,2)	(6,0)	(4,1)	(7,0)	(3,2)	
dimensão	24	27	28	35	36	42	
Λ_{max}	(8,0)	(5,1)	(9,0)	(4,2)	(6,1)	(3,3)	
dimensão	45	48	55	60	63	64	

Tabela 5.1: Dimensão das Representações Irredutíveis da Álgebra A_2

Seguindo o procedimento descrito nesta seção, construímos explicitamente as matrizes de cada gerador da álgebra A_2 para as representações irredutíveis de dimensão mais baixa. O resultado obtido foi:

1. Representação fundamental: (1,0).

Pesos: [(1,0), (1,-1), (0,-1)].

Base: $\left|\begin{matrix} 1\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 0\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle.$

Matrizes:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Representação simétrica: (2,0).

Pesos: [(2,0), (0,1), (-2,2), (1,-1), (-1,0), (0,-2)].

Base: $\left| \begin{matrix} 2\,0 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} 2\,0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} 2\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} 1\,0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} 1\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} 0\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle.$

Matrizes:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Representação adjunta: (1,1).

Pesos: [(1,1), (-1,2), (2,-1), (0,0), (-2,1), (0,0), (1,-2), (-1,-1)].

Base: $\left|\begin{matrix} 2\,1 \\ 2 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 2 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle.$

Matrizes:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

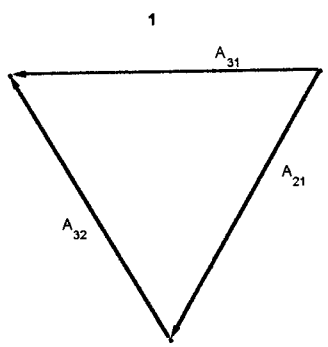
O conjunto de operadores A_{21}, A_{32}, A_{31} (ou A_{12}, A_{23}, A_{13}) conectam todos os vetores da base entre si. Se indexarmos cada vetor m_i com o seu peso associado Λ_i, podemos construir diagramas que nos dêem uma visão global da ação desses geradores. É uma forma prática de

sintetizar as informações e mais tarde eles nos fornecerão um bom método para estudar a perda da irredutibilidade das álgebras quânticas. A construção destes diagramas é simples.

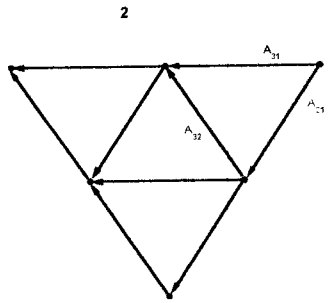
a. Primeiro escrevemos os pesos em termos de um sistema ortonormal. Devemos lembrar que os pesos podem estar na forma Dynkin, para mudar de sistema use a expressão 3.29. Em seguida desenhamos os pesos no plano cartesiano.

b. A Ação de um operador A_{ij} no vetor peso m_{max} associado ao peso máximo Λ_{max} levará a um outro vetor peso m_i associado a um peso Λ_i. Desenhe uma linha que saia do peso Λ_{max} e vá até o peso Λ_i. Continue este processo atuando com todos os geradores de abaixamento (levantamento) sobre todos os vetores da base. O resultado é o que chamamos de diagrama de pesos. Veja a seguir alguns exemplares.

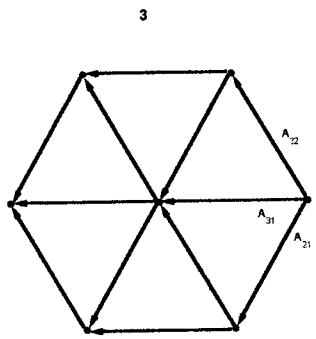
Diagramas de Pesos



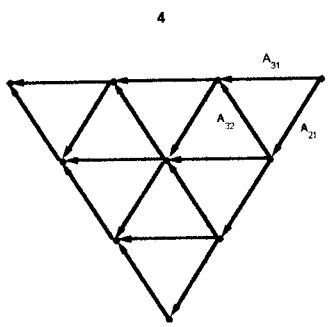
Figura~5.1: Diagrama de Peso da Representação (1,0)



Figura~5.2: Diagrama de Peso da Representação (2,0)



Figura~5.3: Diagrama de Peso da Representação (1,1)



Figura~5.4: Diagrama de Peso da Representação (3,0)

Capítulo 6

Álgebras Quânticas

Neste capítulo estudaremos uma nova modalidade de álgebra, que pode ser vista como generalização das álgebras de Lie clássicas, denominada de **Álgebras Quânticas** . Nosso objetivo é observar a perda de irredutibilidade das representações das álgebras deformadas $U_q(su(2))$ e $U_q(sl(3))$ quando q é uma raiz da unidade. A novidade é a deformação de alguns comutadores através de um parâmetro q, ou seja, as constantes de estrutura passam a ser uma função de q, segundo uma prescrição capaz de devolver as álgebras de Lie clássica quando q é igual a 1. Depois calcularemos o operador de Casimir quadrático deformado utilizando as matrizes de $U_q(sl(3))$ e o operador de Casimir da subálgebra $U_q(sl(2))$ para saber como ficam as regras de ramificação.

Definição 7 Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie simples e complexa, então $U_q(\mathcal{L})$ é a deformação da álgebra universal envolvente $U(\mathcal{L})$ definida como uma álgebra associativa sobre $\mathbb{C}$ com geradores H_i, $A_{k-1,k}$ e $A_{k,k-1}$, com i = 1,..., l (= rank de $\mathcal{L}$) e k=2,...,l, que obedecem as relações a seguir :

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 \qquad [H_i, A_{k-1,k}] = a_{ik-1}A_{k-1,k}, \\ [A_{k-1,k}, A_{k,k-1}] &= \delta_{ik-1}[H_i]_q \quad [H_i, A_{k,k-1}] = -a_{ik-1}A_{k,k-1}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}_q (A_{k-1,k})^i A_{k,k-1}(A_{k-1,k})^{n-i} = 0 \tag{6.2}$$

onde (a_{ij}) é a matriz de Cartan e a abreviação introduzida é definida como:

$$[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}. \tag{6.3}$$

Os geradores acima satisfazem as seguintes propriedades:

$$[A_{ij}, A_{kl}]_{q^a} \equiv A_{ij}A_{kl} - q^a A_{kl}A_{ij} = -q^a[A_{kl}, A_{ij}]_{q^{-a}}, \tag{6.4}$$

$$q^b[A, [B, C]_{q^a}]_{q^{c-b}} + q^c[B, [C, A]_{q^b}]_{q^{a-c}} + q^a[C, [A, B]_{q^c}]_{q^{b-a}} = 0. \tag{6.5}$$

Quando q tende para 1, nós recuperamos as relações de comutação padrão (clássica), bem como a relação de Serre em termos dos geradores H_i e A_{ij}. Os geradores H_i expandem a subalgebra de Cartan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$.

A prescrição $[\ ]_q$ leva a resultados curiosos, como o conceito de q-inteiro dotado de uma lei formal de adição $\oplus$:

$$[m]_q \oplus [n]_q = q^{-n}[m]_q + q^m[n]_q = [m+n]_q, \tag{6.6}$$

e ainda permite generalizar o fatorial e consequentemente o binomial brevemente apresentado abaixo,

$$[m]_q! = [m]_q[m-1]_q[m-2]_q...[1]_q, \tag{6.7}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}. \tag{6.8}$$

6.1 Representações

Muitas representações das Álgebras Quânticas são construídas usando-se os operadores de bosons q-deformados, porém, há representações irredutíveis que não são obtida por esse método, por isso aplicando o método de Ge'fand-Zetlin para para explicitar os elementos de matriz de qualquer representação irredutível de $U_q(u(n))$ [2, 22].

Teorema 10 Em uma representação irredutível de $U_q(u(n))$ os geradores diagonais A_{ii} têm autovalores dados por :

$$A_{ii}\,|m\rangle = \left(\sum_{j=1}^{i} m_{ji} - \sum_{j=1}^{i-1} m_{j,i-1}\right)|m\rangle \tag{6.9}$$

para i = 1,...,n (com $m_{10} \equiv 0$).

Os elementos de matriz dos geradores não diagonais $A_{k,k-1}$ e $A_{k-1,k}$ são dados por:

$$\langle m'|\,\overline{a}^{j}_{k-1}\,|m\rangle = \left[\frac{-\prod_{i=1}^{k}[l_{i,k}-l_{j,k-1}+1]_q \prod_{i=1}^{k-2}[l_{i,k-2}-l_{j,k-1}]_q}{\prod_{i\neq j}^{k-1}[l_{i,k-1}-l_{j,k-1}+1]_q[(l_{i,k-1}-l_{j,k-1}]_q}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.10}$$

$$\langle m'|\,\overline{b}^{j}_{k-1}\,|m\rangle = \left[\frac{-\prod_{i=1}^{k}[l_{i,k}-l_{j,k-1}]_q \prod_{i=1}^{k-2}[l_{i,k-2}-l_{j,k-1}-1]_q}{\prod_{i\neq j}^{k-1}[l_{i,k-1}-l_{j,k-1}-1]_q[l_{i,k-1}-l_{j,k-1}]_q}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.11}$$

com $l_{i,k} = m_{i,k} - i$, cuja ação é dada por 5.30 e 5.31.

6.1.1 Operadores de Bosons

Pascual Jordan e J. Schwinger introduziram uma técnica simples de construir representações irredutíveis unitárias por meio de operadores de criação e destruição. Considere um operador a e seu adjunto $a^\dagger$, agindo também no espaço de Hilbert com base $|\,n\rangle$, n = 0,1,2,.... , tal que:

$$a\,|\,0\rangle = 0, \qquad |\,n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}\,|\,0\rangle, \tag{6.12}$$

$$N = a^\dagger a, \qquad N\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle. \tag{6.13}$$

Podemos facilmente estender estas aplicações para situações mais gerais envolvendo operadores a_i e $a_i^\dagger$ que agem no espaço cuja base é dada pelos kets $|\,n_i\rangle$, que por ora tomaremos i = 1,2 e lançar mão do mapa de Jordan - Schwinger definido como:

$$J_+ = a_1^\dagger a_2, \qquad J_- = a_2^\dagger a_1, \tag{6.14}$$

$$2J_z = [J_+, J_-] \qquad \Longrightarrow \qquad 2J_z = N_1 - N_2. \tag{6.15}$$

Agora podemos definir a realização de su(2), tomando a base $|\,j,m\rangle$, da seguinte forma:

$$|\,j,m\rangle = |\,n_1\rangle\,|\,n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m}\,|\,0\rangle}{[(j+m)!(j-m)!]^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.16}$$

Com essa expressão podemos obter 5.18 e 5.19.

6.1.2 Os Operadores de Bosons q-deformados

Existe uma generalização do mapa de Jordan-Schwinger simples e elegante [23, 24], que permite construir as representações irredutíveis das Álgebras Quânticas. Essa técnica vem sendo usada em diversas aplicações, entre elas, na obtenção do espectro do oscilador harmônico e do átomo de hidrogênio deformados. Considere o operador de criação $\mathbf{a}^q$ e seu hermitiano conjugado, o operador de destruição $\overline{\mathbf{a}}^q$.O estado de vácuo $\mid 0\rangle$ é definido por:

$$\overline{a}^q \mid 0\rangle = 0, \tag{6.17}$$

a seguir postulamos a relação algébrica:

$$\overline{a}^q a^q - q a^q \overline{a}^q = q^{-N_q}, \tag{6.18}$$

onde N_q é um operador hermitiano, que obedece as relações abaixo:

$$[N_q, a^q] = a^q, \tag{6.19}$$

$$[N_q, \overline{a}^q] = -\overline{a}^q, \tag{6.20}$$

$$N_q \mid 0\rangle \equiv 0. \tag{6.21}$$

Esta álgebra é a generalização da álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_q$, a qual é recuperada no limite de q igual a 1.

Os demais vetores normalizados tem a seguinte forma:

$$\mid n\rangle = ([n]_q!)^{\frac{-1}{2}} (a^q)^n \mid 0\rangle, \tag{6.22}$$

onde $[n]_q!$ é a função fatorial q-deformada e $(\mathbf{a}^q)^n$ denota a n-ésima potência de $\mathbf{a}^q$.

6.2 A álgebra quântica $U_q(su(2))$

A realização do grupo quântico $U_q su(2)$ é construída utilizando-se o procedimento acima pelo mapa de Jordan-Schwinger determinando assim uma completa estrutura de representação. O $U_q(su(2))$ é gerado algebricamente pelos operadores J_+^q, J_-^q e J_z^q obedecendo o comutador de Lie definido por meio de um parâmetro q, como segue:

$$[J_z^q, J_\pm^q] = \pm J_\pm^q, \tag{6.23}$$

$$[J_+^q, J_-^q] = [2J_z^q]_q, \tag{6.24}$$

onde a abreviação $[\ ]_q$ foi definida em 6.3.

Jimbo [22,25] tem mostrado que existe uma representação de 6.23 e 6.24 que age no espaço de Hilbert V_j com base $\mid jm\rangle$:

$$J_z^q \mid j,m\rangle = m \mid j,m\rangle, \tag{6.25}$$

$$J_\pm^q \mid j,m\rangle = \sqrt{[j \mp m]_q[j \pm m + 1]_q} \mid j, m \pm 1\rangle, \tag{6.26}$$

$$C_{2q} \mid j,m\rangle = [j]_q[j+1]_q \mid j,m\rangle, \tag{6.27}$$

onde C_{2q} é o operador de Casimir do $U_q(su(2))$ dado por:

$$C_{2q} = [J_z^q]_q[J_z^q + 1]_q + J_-^q J_+^q. \tag{6.28}$$

De fato, a ação 6.25 e 6.26 satisfazem 6.23 e 6.24, veja:

$$[\mathbf{J}_z^q, \mathbf{J}_\pm^q] \mid \mathbf{j}, \mathbf{m}\rangle = J_z^q\sqrt{[j \mp m]_q[j \pm m + 1]_q} \mid j, m \pm 1\rangle - J_\pm^q(m) \mid j,m\rangle =$$

$$\left((m \pm 1)\sqrt{[j \mp m]_q[j \pm m + 1]_q} - m\sqrt{[j \mp m]_q[j \pm m + 1]_q}\right) \mid j, m \pm 1\rangle =$$
$$= \pm \mathbf{J}_\pm^q \mid \mathbf{j}, \mathbf{m}\rangle$$

$$[\mathbf{J}_+^q, \mathbf{J}_-^q] \mid \mathbf{j}, \mathbf{m}\rangle = ([j+m]_q[j-m+1]_q - [j-m]_q[j+m+1]_q) \mid j,m\rangle =$$

$$= \left(\frac{q^{2J_z} - q^{-2J_z}}{q - q^{-1}}\right) \mid j,m\rangle = [\mathbf{2J}_z^q]_q \mid \mathbf{j}, \mathbf{m}\rangle$$

Os elementos de matriz dos geradores não diagonais de $U_q(su(2))$ podem ser obtidos de su(2) simplesmente trocando os fatores inteiros pelo correspondente q-inteiros. Vejamos algumas representações:

para j $= \frac{1}{2}$, temos:

$$J_z^q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \quad J_+^q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_-^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quando j = 1, nós obtemos uma representação tridimensional:

$$J_z^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+^q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{[2]_q} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{[2]_q} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_-^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{[2]_q} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{[2]_q} & 0 \end{pmatrix}$$

6.2.1 As quebras das representações de $U_q(su(2))$ na raíz da unidade

Até aqui temos discutido as Álgebras Quânticas sem assumir q real ou complexo. Se tomarmo q como um número complexo, observaremos um fenômeno interessante, que é a perda de irredutibilidade quando esse parâmetro for uma raiz da unidade, então aparecerão representações de dimensão mais baixa advinda da quebra de representação de peso máximo. Assim, ao tomarmos q = $e^{i\theta}$ na expressão 6.26, encontramos:

$$J_+^q \mid j,m\rangle = \sqrt{\frac{\sin\{(j-m)\theta\}\sin\{(j+m+1)\theta\}}{(\sin\theta)^2}} \mid j,m+1\rangle, \tag{6.29}$$

$$J_-^q \mid j,m\rangle = \sqrt{\frac{\sin\{(j+m)\theta\}\sin\{(j-m+1)\theta\}}{(\sin\theta)^2}} \mid j,m-1\rangle. \tag{6.30}$$

No caso clássico, a ação de J_+, J_- e J_z dada pelas equações 5.18 e 5.19 define uma representação irredutível da álgebra su(2). Ao deformarmos a álgebra , segundo a prescrição acima, a ação dos geradores da álgebra $U_q(su(2))$ dependem de uma função periódica, tal que, para alguns ângulos específicos haverá a perda de irredutibilidade, refletida pelo fato de que sermos capazes de encontrar subespaços invariantes mediante a ação dos geradores desta álgebra. Em outras palavras, estes geradores não mais conectam os estados de base do espaço portador da representação. Agora, ao fixarmos um ângulo e atuarmos com os operadores de levantamento ou abaixamento na base, alguns dos autovalores poderão ser nulos. Consequentemente ocorrerá a formação de subespaços invariantes. Dizemos então, neste caso, que houve a quebra da representação. Por isso estamos interessados em descobrir os ângulos em que ocorrem essa quebra. Para isto temos que resolver as equações abaixo, obtidas ao impor que $J_\pm^q$ anule os estado $\mid j,m\rangle$, i.e.,

$$(j-m)\theta = k\pi, \tag{6.31}$$

$$(j+m+1)\theta = k\pi, \tag{6.32}$$

$$(j+m)\theta = k\pi, \tag{6.33}$$

$$(j-m+1)\theta = k\pi, \tag{6.34}$$

cujas soluções nos permitirão encontrar os ângulos desejados. Vamos restringir o ângulo θ ao intervalo de 0 a 2π, limitando assim os possíveis valores de k. Organizaremos os resultados na forma de tabela e em seguida apresentaremos uma regra geral que descreva esse fenômeno.

Quando j é igual a $\frac{1}{2}$, m assume dois valores: $\frac{1}{2}$ e $\frac{-1}{2}$. Portanto, a base que expande essa representação é $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ e $\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle$. Aplicando 6.29 e 6.30, encontramos:

$$J_+^q\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0, \qquad J_+^q\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$J_-^q\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle, \qquad J_-^q\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle = 0,$$

que é exatamente o resultado clássico, logo esta representação nunca se decompõe.

A próxima representação tem j =1 e m = 1, 0, -1, cuja base é constituída pelos vetores $|\,1,1\rangle$, $|\,1,0\rangle$, $|\,1,-1\rangle$, e novamente, por 6.29 e 6.30, segue que,

$$J_+^q\,|\,1,1\rangle = 0, \qquad J_-^q\,|\,1,1\rangle = \sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}}\,|\,1,0\rangle,$$

$$J_+^q\,|\,1,0\rangle = \sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}}\,|\,1,1\rangle, \qquad J_-^q\,|\,1,0\rangle = \sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}}\,|\,1,-1\rangle,$$

$$J_+^q\,|\,1,-1\rangle = \sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}}\,|\,1,0\rangle, \qquad J_-^q\,|\,1,-1\rangle = 0$$

Naturalmente, só haverá quebra desta representação para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Nestes ângulos a representação tridimensional é decomposta em três representações unidimensionais $\{|\,1,1\rangle\}$, $\{|\,1,0\rangle\}$ e $\{|\,1,-1\rangle\}$ este fato é expresso da seguinte forma : $3=1\oplus1\oplus1$.

Continuando essa investigação para j = $\frac{3}{2}$ com m = $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$ e $\frac{-3}{2}$ encontramos os ângulos que satisfazem 6.31 a 6.34 e os listamos na tabela 6.1. A primeira linha dessa tabela nos diz que J_+^q agindo em $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ tem autovalor nulo para $\theta = \frac{\pi}{3}$,$\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$. A leitura das demais linhas mostra que o espaço originalmente de dimensão 4 quebrou para $\theta = \frac{k\pi}{3}$ em

duas representações unidimensionais, cujos estados invariantes são $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ e $\left|\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right\rangle$ e em uma representação bidimensional com estados invariantes: $\{\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle\}$.

operador	m	ângulo de quebra (θ)
J_+^q	$\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
J_+^q	$\frac{-1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$
J_+^q	$\frac{-3}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
J_-^q	$\frac{3}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
J_-^q	$\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$
J_-^q	$\frac{-1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$

Tabela 6.1: Ângulos de quebra para j=3/2

ângulo	dimensão dos subespaços	base dos subespaços
$\frac{k\pi}{3}$	$4 = 2\oplus 1 \oplus 1$	$\{\frac{3}{2}\},\{\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\},\{\frac{-3}{2}\}$
$\frac{k\pi}{2}$	$4 = 2\oplus 2$	$\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\},\{\frac{-1}{2},\frac{-3}{2}\}$

Tabela 6.2: Redução dimensional para j=3/2

Para $\theta = \frac{k\pi}{2}$ ela quebrou em duas representações bidimensionais expandido por $\{\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\}$ e $\{\left|\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle\}$. Estes resultados foram expressos na tabela 6.2, onde estamos denotando os estados $\mid j,m\rangle$ por {m} simplesmente por conveniência.

operador	m	ângulo de quebra (θ)
J_+^q	1	$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}$
J_+^q	0	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
J_+^q	-1	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
J_+^q	-2	$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}$
J_-^q	2	$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}$
J_-^q	1	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
J_-^q	0	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$
J_-^q	-1	$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}$

Tabela 6.3: Ângulos de quebra para j=2

De acordo com a tabela 6.4, a representação j=2 se decompõe em cinco representações unidimensionais, quando q é a 2ª raiz da unidade, em duas representações bidimensionais e uma unidimensional na 3ª raiz da unidade por fim em uma tridimensional mais uma unidimensional na 4ª raiz da unidade.

ângulos	dimensão dos subespaços	base dos subespaços
$\frac{k\pi}{2}$	$5 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$	{2},{1},{0},{-1},{-2}
$\frac{k\pi}{3}$	$5 = 2 \oplus 2 \oplus 1$	{2,1},{0} , {-1,-2}
$\frac{k\pi}{4}$, k ímpar	$5 = 3 \oplus 1 \oplus 1$	{2}, {1,0,-1},{-2}

Tabela 6.4: Redução dimensional para j=2

operador	m	ângulo de quebra (θ)
J_+^q	$\frac{3}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$
J_+^q	$\frac{1}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{1\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
J_+^q	$\frac{-1}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
J_+^q	$\frac{-3}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{1\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
J_+^q	$\frac{-5}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$
J_-^q	$\frac{5}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$
J_-^q	$\frac{3}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{1\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
J_-^q	$\frac{1}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
J_-^q	$\frac{-1}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{1\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
J_-^q	$\frac{-3}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$

Tabela 6.5: Ângulos de quebra para j=5/2

Quando j = $\frac{5}{2}$ observa-se a decomposição em duas representações tridimensionais, na 3ª raiz da unidade, mais três representações bidimensionais na 4ª raiz da unidade, e uma representação quadrimensional mais duas representações unidimensionais na 5ª raiz da unidade. Estes resultados referem-se à tabela 6.6.

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

ângulos	dimensão dos subespaços	base dos subespaços
$\frac{k\pi}{3}$	$6 = 3 \oplus 3$	$\{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}, \{\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\}$
$\frac{k\pi}{4}$	$6 = 2 \oplus 2 \oplus 2$	$\{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}, \{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}$, $\{\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}\}$
$\frac{k\pi}{5}$	$6 = 4 \oplus 1 \oplus 1$	$\{\frac{5}{2}\}$, $\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\}, \{\frac{-5}{2}\}$

Tabela 6.6: Redução dimensional para j=5/2

A seguir vem a representação etiquetada por j = 3. Quando q é uma $2^{\underline{a}}$ raiz da unidade, ela quebra em sete representações unidimensionais, na $3^{\underline{a}}$ raiz da unidade ela quebra em duas representações bidimensionais e uma representação tridimensional. A seguir, na $4^{\underline{a}}$raiz da unidade ela quebra em duas representações trimensionais e uma representação unidimensional. Para $5^{\underline{a}}$ raiz da unidade ocorre a quebra em duas representações bidimensionais e uma representação tridimensional. Finalmente na $2^{\underline{a}}$ raiz da unidade aparece duas unidimensionais e uma de dimensão 5. Destarte, a tabela 6.8 exibe os estados que expandem essas representações. A partir deles, podemos facilmente construir as matrizes irredutíveis. Note ainda que essa análise esgota todas as possibilidades de redução dimensional, os demais ângulos não apresentarão nenhum resultado novo, pois essa estrutura é periódica em θ.

operador	m	ângulo de quebra (θ)
J_+^q	2	$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$
J_+^q	1	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$
J_+^q	0	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
J_+^q	-1	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
J_+^q	-2	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$
J_+^q	-3	$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$
J_-^q	3	$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$
J_-^q	2	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$
J_-^q	1	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
J_-^q	0	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
J_-^q	-1	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$
J_-^q	-2	$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$

Tabela 6.7: Ângulos de quebra para j=3

ângulos	dimensão dos subespaços	base dos subespaços
$\frac{k\pi}{2}$	7=1⊕1 ⊕ 1 ⊕ 1 ⊕ 1 ⊕ 1 ⊕ 1	{3},{2},....,{-2},{-3}
$\frac{k\pi}{3}$	7=2⊕2 ⊕ 1 ⊕ 1 ⊕ 1	{3},{2,1},{0},{-2,-1},{-3}
$\frac{k\pi}{4}$, k ímpar	7=3⊕3 ⊕ 1	{3,2,1},{0},{-3,-2,-1}
$\frac{k\pi}{5}$	7=2⊕2 ⊕ 3	{3,2},{1,0,-1},{-3,-2}
$\frac{k\pi}{6}$, k ímpar	7=5 ⊕ 1 ⊕ 1	{3},{2,1,0,-1,-2},{-3}

Tabela 6.8: Redução dimensional para j=3

operador	m	ângulo de quebra (θ)
J^q_+	$\frac{5}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$
J^q_+	$\frac{3}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J^q_+	$\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J^q_+	$\frac{-1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{1\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$
J^q_+	$\frac{-3}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J^q_+	$\frac{-5}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J^q_+	$\frac{-7}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$
J^q_-	$\frac{7}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$
J^q_-	$\frac{5}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J^q_-	$\frac{3}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J^q_-	$\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{1\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$
J^q_-	$\frac{-1}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J^q_-	$\frac{-3}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J^q_-	$\frac{-5}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$

Tabela 6.9: Ângulos de quebra para j=7/2

A representação de dimensão 8 quebra de seis maneiras diferentes, com q variando da $2^{\underline{a}}$ à $7^{\underline{a}}$ raiz da unidade. A as respectivas dimensões dos subespaços que expandem essas representações são apresentados na tabela 6.10.

ângulos	dimensão dos subespaços	base dos subespaços
$\frac{k\pi}{2}$	8=2⊕2 ⊕ 2 ⊕ 2	$\{\frac{7}{2},\frac{5}{2}\},\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\},\{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\},\{-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\}$
$\frac{k\pi}{3}$	8=2⊕2 ⊕ 2 ⊕ 1 ⊕ 1	$\{\frac{7}{2},\frac{5}{2}\},\{\frac{3}{2}\},\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\},\{-\frac{3}{2}\},\{-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\}$
$\frac{k\pi}{4}$, k ímpar	8=4⊕4	$\{\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\},\{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\}$
$\frac{k\pi}{5}$	8=3⊕3 ⊕ 2	$\{\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}\},\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\},\{-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\}$
$\frac{k\pi}{6}$, k ímpar	8=4 ⊕ 2 ⊕ 2	$\{\frac{7}{2},\frac{5}{2}\},\{\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\},\{-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\}$
$\frac{k\pi}{7}$	8=6 ⊕ 1 ⊕ 1	$\{\frac{7}{2}\},\{\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\},\{-\frac{7}{2}\}$

Tabela 6.10: Redução dimensional para j=7/2

operador	m	ângulo de quebra (θ)
J_+^q	3	$\theta=\frac{\pi}{8},\frac{2\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{8},\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{8},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{8}$
J_+^q	2	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$
J_+^q	1	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J_+^q	0	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J_+^q	−1	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J_+^q	−2	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J_+^q	-3	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$
J_+^q	-4	$\theta=\frac{\pi}{8},\frac{2\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{8},\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{8},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{8}$
J_-^q	4	$\theta=\frac{\pi}{8},\frac{2\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{8},\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{8},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{8}$
J_-^q	3	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$
J_-^q	2	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J_-^q	1	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J_-^q	0	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{8\pi\pi}{5},\frac{9\pi}{5}$
J_-^q	-1	$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}$
J_-^q	-2	$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7},\frac{13\pi}{7}$
J_-^q	−3	$\theta=\frac{\pi}{8},\frac{2\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{8},\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{8},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{8}$

Tabela 6.11: Ângulos de quebra para j=4

O último comentário a fazer é que as representações sempre quebram, a menos de multiplicidades, em duas outras com dimensões distintas. A tabela 6.12 corrobora essa afirmação.

ângulos	dimensão dos subespaços	base dos subespaços
$\frac{k\pi}{2}$	9=1⊕1 ⊕ 1 ⊕ ... ⊕ 1	{4},{3},....,{-3},{-4}
$\frac{k\pi}{3}$	9=3 ⊕ 3 ⊕ 3	{4,3,2},{1,0,-1},{−4,-3,-2}
$\frac{k\pi}{4}$, k ímpar	9=3⊕3 ⊕ 1 ⊕ 1 ⊕ 1	{4},{3,2,1},{0},{-3,-2,-1},{-4}
$\frac{k\pi}{5}$	9=4⊕4 ⊕ 1	{4,3,2,1},{0,},{−4,-3,-2,-1}
$\frac{k\pi}{6}$	9=3 ⊕ 3 ⊕ 3	{4,3,2},{1,0,-1},{−4,-3,-2}
$\frac{k\pi}{7}$	9=5 ⊕ 2 ⊕ 2	{4,3},{2,1,0,-1,-2},{-4,-3}
$\frac{k\pi}{8}$	9=7 ⊕ 1 ⊕ 1	{4},{3,2,1,0,-1,-2,-3},{-4}

Tabela 6.12: Redução dimensional para j=4

Estudando estas tabelas descobrimos que há uma regra geral na quebra do espaço V_j em subespaços W_i.. Apresentaremos a seguir um esquema geral da redução dimensional desta álgebra.

Dado um inteiro j, calculamos a dimensão **d** do espaço V_j pela expressão:

$$d = 2j + 1, \tag{6.35}$$

então os ângulos segundo os quais a representação quebra, serão dados por:

$$\theta = \frac{\pi}{n}, \qquad \text{onde } n = 2, ..., d-1.$$

A partir do ângulo θ somos capazes de encontrar a dimensão dos subespaços W_i , mas para isso vamos primeiro definir algumas variáveis. Sejam l, p e z número inteiros tais que :

$$z = int(\frac{d}{n}), \tag{6.36}$$

$$p = z * n, \tag{6.37}$$

$$l = d - p. \tag{6.38}$$

Denotando a dimensão dessas novas representações por d_{n_1} e d_{n_2}, em termos de 6.36 a 6.38 podemos afirmar:

$$d_{n_1} = n - l, \tag{6.39}$$

$$d_{n_2} = l, \tag{6.40}$$

com degenerescências z e z+1 respectivamente.

Com essa nomenclatura, o espaço quebra da seguinte forma:

$$d = (n-l)^{(1)} \oplus (n-l)^{(2)} \oplus ... \oplus (n-l)^{(z)} \oplus l^{(1)} \oplus ... \oplus l^{(z+1)}. \tag{6.41}$$

Vamos ilustrar o funcionamente destas relações com um exemplo.

Para um espaço de dimensão d = 9, como será a quebra para um ângulo $\theta = \frac{\pi}{5}$, ou seja, n = 5 ? Utilizando 6.36 a 6.38, temos:

$$\begin{aligned} z &= 1, \\ p &= 5, \\ l &= 4, \end{aligned}$$

logo, substituindo em 6.41, resulta:

$$9 = 1 \oplus 4 \oplus 4.$$

6.3 A álgebra quântica $U_q(sl(3))$

A álgebra $U_q(sl(3))$ é uma álgebra associativa sobre o corpo dos números complexos gerada por: $\{H_1, H_2, A_{12}, A_{23}, A_{13}, A_{21}, A_{32}, A_{31}\}$. Na base de Chevalley estes geradores obedecem as regras de comutação da tabela 6.13, segundo Smirnov [26] .

Vale lembrar novamente que ao longo deste trabalho o símbolo $[\ ]_q$ denota a deformação definida na equação 6.3.

6.3.1 A base de Gel'fand-Zettlin para a álgebra $U_q(sl(3))$

Dado um peso máximo m=(m_{13}, m_{23}, m_{33}), onde $m_{i,3} \geq m_{i+1,3}$, construímos a base de

$[H_1, A_{12}] = 2A_{12}$	$[H_2, A_{12}] = -A_{12}$	$[H_1, A_{21}] = -2A_{21}$
$[H_2, A_{21}] = A_{21}$	$[H_1, A_{23}] = -A_{23}$	$[H_2, A_{23}] = 2A_{23}$
$[H_1, A_{32}] = A_{32}$	$[H_2, A_{32}] = -2A_{32}$	$[H_1, A_{13}] = A_{13}$
$[H_2, A_{13}] = A_{13}$	$[H_1, A_{31}] = -A_{31}$	$[H_2, A_{31}] = -A_{31}$
$[A_{12}, A_{23}]_q = A_{13}$	$[A_{12}, A_{13}]_{q^{-1}} = 0$	$[A_{12}, A_{32}] = 0$
$[A_{12}, A_{21}] = [H_1]_q$	$[A_{12}, A_{31}] = -q^{-H_1}A_{32}$	$[A_{13}, A_{23}]_{q^{-1}} = 0$
$[A_{13}, A_{21}] = -A_{23}q^{H_1}$	$[A_{13}, A_{32}] = q^{-H_2}A_{12}$	$[A_{13}, A_{31}] = [H_1 + H_2]_q$
$[A_{23}, A_{21}] = 0$	$[A_{23}, A_{31}] = A_{21}q^{H_2}$	$[A_{23}, A_{32}] = [H_2]_q$
$[A_{21}, A_{32}]_q = -qA_{31}$	$[A_{21}, A_{31}]_{q^{-1}} = 0$	$[A_{31}, A_{32}]_{q^{-1}} = 0$

Tabela 6.13: Relações de Comutação da álgebra Uq(sl(3))

Gel'fand - Zettlin denotado pelos vetores $|m\rangle$:

$$|m\rangle = \left| \begin{matrix} m_{13} \; m_{23} \; m_{33} \\ m_{12} \; m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} \right\rangle , \tag{6.42}$$

onde: $m_{i,j} \geq m_{i,j-1} \geq m_{i+1,j}$, $m_{i,j} \geq m_{i+1,j}$.

No caso da álgebra $U_q(sl(3))$ m_{33} é igual a zero. Para construir explicitamente as representações basta desenvolver as expressões do teorema 10. Note que os geradores diagonais agem da mesma forma que 5.38 e 5.39,

$$H_1 |m\rangle = (2m_{11} - m_{12} - m_{22}) |m\rangle , \tag{6.43}$$

$$H_2 |m\rangle = (2m_{12} + 2m_{22} - m_{11} - m_{13} - m_{23}) |m\rangle , \tag{6.44}$$

enquanto que os não diagonais tem os seus elementos de matriz trocados pelos q-inteiros, como o su(2) visto na seção anterior, ou seja, esses fatores aparecem deformados. Ao implementarmos essas alterações, encontramos:

$$A_{12} \left| \begin{matrix} m_{13} \; m_{23} \; m_{33} \\ m_{12} \; m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} \right\rangle = \bar{b}_1^1 \left| \begin{matrix} m_{13} \; m_{23} \; m_{33} \\ m_{12} \; m_{22} \\ m_{11} + 1 \end{matrix} \right\rangle , \tag{6.45}$$

$$A_{21}\left|\begin{matrix} m_{13}\ m_{23}\ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle = \overline{a}_1^1 \left|\begin{matrix} m_{13}\ m_{23}\ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22} \\ m_{11}-1 \end{matrix}\right\rangle, \tag{6.46}$$

$$A_{23}\left|\begin{matrix} m_{13}\ m_{23}\ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle = \overline{b}_2^1 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}+1\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle + \overline{b}_2^2 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22}+1 \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle, \tag{6.47}$$

$$A_{32}\left|\begin{matrix} m_{13}\ m_{23}\ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle = \overline{a}_2^1 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}-1\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle + \overline{a}_2^2 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22}-1 \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle, \tag{6.48}$$

$$A_{13}\left|\begin{matrix} m_{13}\ m_{23}\ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle = \overline{b}_3^1 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}+1\ m_{22} \\ m_{11}+1 \end{matrix}\right\rangle - \overline{b}_3^2 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22}+1 \\ m_{11}+1 \end{matrix}\right\rangle, \tag{6.49}$$

$$A_{31}\left|\begin{matrix} m_{13}\ m_{23}\ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix}\right\rangle = \overline{a}_3^1 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}-1\ m_{22} \\ m_{11}-1 \end{matrix}\right\rangle - \overline{a}_3^2 \left|\begin{matrix} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}\ m_{22}-1 \\ m_{11}-1 \end{matrix}\right\rangle, \tag{6.50}$$

onde:

$$\overline{b}_1^1 = \sqrt{[m_{12}-m_{11}]_q[m_{11}-m_{22}+1]_q}, \tag{6.51}$$

$$\overline{a}_1^1 = \sqrt{[m_{12}-m_{11}+1]_q[m_{11}-m_{22}]_q}, \tag{6.52}$$

$$\overline{b}_2^1 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{12}]_q[m_{12}-m_{23}+1]_q[m_{12}-m_{33}+2]_q[m_{12}-m_{11}+1]_q}{[m_{12}-m_{22}+2]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}},$$

$$\overline{b}_2^2 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{22}+1]_q[m_{23}-m_{22}]_q[m_{22}-m_{33}+1]_q[m_{11}-m_{22}]_q}{[m_{12}-m_{22}]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}}, \tag{6.53}$$

$$\overline{a}_2^1 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{12}+1]_q[m_{12}-m_{23}]_q[m_{12}-m_{33}+1]_q[m_{12}-m_{11}]_q}{[m_{12}-m_{22}]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}}, \tag{6.54}$$

$$\overline{a}_2^2 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{22}+2]_q[m_{23}-m_{22}+1]_q[m_{22}-m_{33}]_q[m_{11}-m_{22}+1]_q}{[m_{12}-m_{22}+2]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}}, \tag{6.55}$$

$$\overline{b}_3^1 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{12}]_q[m_{12}-m_{23}+1]_q[m_{12}-m_{33}+2]_q[m_{11}-m_{22}+1]_q}{[m_{12}-m_{22}+2]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}}\, q^{m_{11}-m_{12}}, \tag{6.56}$$

$$\overline{b}_3^2 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{22}+1]_q[m_{23}-m_{22}]_q[m_{22}-m_{33}+1]_q[m_{12}-m_{11}]_q}{[m_{12}-m_{22}]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}}\, q^{m_{11}-m_{22}+1}, \tag{6.57}$$

$$\overline{a}_3^1 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{12}+1]_q[m_{12}-m_{23}]_q[m_{12}-m_{33}+1]_q[m_{11}-m_{22}]_q}{[m_{12}-m_{22}]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}}\, q^{m_{12}-m_{11}}, \tag{6.58}$$

$$\overline{a}_3^2 = \sqrt{\frac{[m_{13}-m_{22}+2]_q[m_{23}-m_{22}+1]_q[m_{22}-m_{33}]_q[m_{12}-m_{11}+1]_q}{[m_{12}-m_{22}+2]_q[m_{12}-m_{22}+1]_q}}\, q^{m_{22}-m_{11}-1} \tag{6.59}$$

A partir dessas expressões podemos contruir as matrizes dos geradores da álgebra $U_q(sl(3))$ para qualquer representação associada a um peso $\Lambda_{\max}$, análogo ao que foi feito no capítulo 5.

6.3.2 Matrizes das Representações da Álgebra $U_q(sl(3))$

As matrizes abaixo representam a álgebra $U_q(sl(3))$ e satisfazem as regras de comutação da tabela 6.13. Elas foram devidamente conferidas com o auxílio de um programa de computação algébrica, que fornece as matrizes para qualquer representação de $U_q(sl(3))$. As matrizes que apresentamos estão na seguinte ordem: H_1, H_2 , A_{12}, A_{21}, A_{23}, A_{32}. Devemos lembrar que $A_{13} = A_{12}A_{23} - qA_{23}A_{12}$ e $A_{31} = A_{32}A_{21} - q^{-1}A_{21}A_{32}$, por isso não foram listadas, e que assumimos q como um número complexo, ou seja, $q = e^{i\theta}$, note que suprimimos a primeira linha do pattern $|m\rangle$. A título de ilustração, nos deteremos somente em três representações, a saber :

1 - Representação (2,0).

Pesos: [(2,0), (0,1), (-2,2), (1,-1), (-1,0), (0,-2)].

Base: $\left|\begin{matrix}2\,0\\2\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}2\,0\\1\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}2\,0\\0\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}1\,0\\1\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}1\,0\\0\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}0\,0\\0\end{matrix}\right\rangle.$

Matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

USC -- SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 \end{bmatrix}$$

2 - Representação: (1,1).

Pesos: [(1,1), (-1,2), (2,-1), (0,0), (-2,1), (0,0), (1,-2), (-1,-1)].

Base: $\left|\begin{matrix} 2\,1 \\ 2 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 2 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle$

Matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\sin(\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 - Representação: (3,0)

Pesos: [(3,0), (1,1), (-1,2), (2,-1), (-3,3), (0,0), (-2,1), (1,-2), (-1,-1), (0,-3)].

Base:

$$\left|\begin{matrix} 3\,0 \\ 3 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 3\,0 \\ 2 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 3\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 3\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 2\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 1\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix} 0\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle.$$

Matrizes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(2\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\sin(3\theta)}}{\sqrt{\sin(\theta)}} & 0 \end{bmatrix}$$

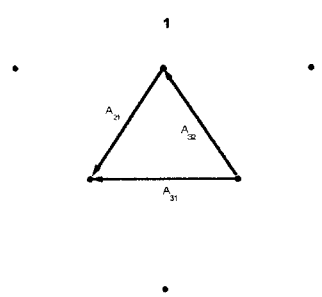
6.4 Reduções Dimensionais das Representações de $U_q(sl(3))$

No capítulo anterior vimos que os operadores A_{ij} conectavam todos os vetores de base de uma representação. Contudo, isto deixa de ser verdade no caso das Álgebras Quânticas, conforme o estudo realizado para a álgebra $U_q(su(2))$, onde foi observado a quebra das representações. Para encontrarmos as novas representações irredutíveis, dado que conhecemos a ação de cada gerador na base de Gel'fand-Zetlin, construímos diagramas de pesos para cada ângulo θ nos casos em que pelo menos um elemento das matriz acima se anule. Para alguns ângulos observamos

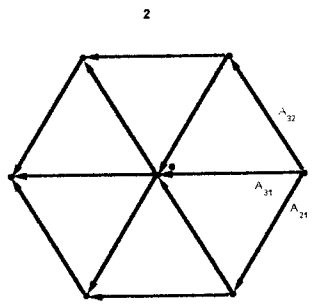
a ocorrência de subespaços invariantes, ou seja, que não são conectados mediante a ação de qualquer gerador da álgebra. Estes subespaços invariantes expandem as novas representações irredutíveis. Investigando várias representações, verificamos que somente quando o parâmetro q é uma raiz da unidade surgem novidades.

Uma análise preliminar mostra-nos a ocorrência de três eventos distintos. O primeiro é que não ocorre uma redução dimensional em qualquer ângulo para uma dada representação. O segundo é que há representações que não estão definidas para algumas raízes da unidade, pois, parte desses elementos de matriz são funções racionais e portanto podem aparecer zeros no denominador(pólos) para determinados ângulos. Uma maneira de resolver este problema seria redefinir adequadamente a ação dos geradores na base de Gel'fand-Zetlin de modo que no limite essa singularidade fosse removida. Por fim, há representações que quebram em outras menores, devido ao fato de existir elementos que se anulam no limite em que o parâmetro tende para uma certa raiz da unidade. Por exemplo, a representação (1,1) não está definida para $\theta = \frac{\pi}{2}$, devido a ocorrência de pólos na matriz do gerador A_{23} e A_{32}, por outro lado, quando o ângulo é $\theta = \frac{\pi}{3}$, surge um representação irredutível de dimensão 7 que satisfaz as regras de comutação da álgebra. Em seguida, a representação (2,0) quebra para o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, em uma representação tridimensional e três unidimensionais. E finalmente a representação (3,0) quebra para $\theta = \frac{\pi}{2}$, em três representações tridimensionais e uma unidimensional, e para o ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$, quebra em três unidimensionais e uma de dimensão 7. Veja abaixo alguns diagrama de peso que ilustram essa discussão:

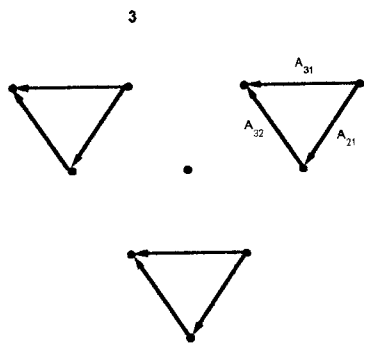
Diagramas de Pesos



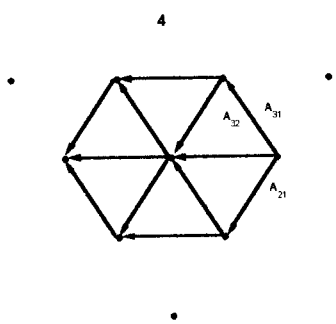
Figura~6.1: Representação (2,0) em $\theta = \frac{\pi}{2}$



Figura~6.2: Representação (1,1) em $\theta = \frac{\pi}{3}$



Figura~6.3: Representação (3,0) em $\theta = \frac{\pi}{2}$



Figura~6.4: Representação (3,0) em $\theta = \frac{\pi}{3}$

Voltemos nossa atenção para a representação (1,1). Conforme o diagrama de peso, existe em $\theta = \frac{\pi}{3}$ uma representação de dimensão 7 e uma outra unidimensional. É fácil verificar que o vetor $\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle$ expande a representação de dimensão 1, pois ele é invariante mediante a ação dos geradores da álgebra. Por outro lado, podemos averiguar se o espaço complementar é fechado, ou seja, se a ação dos geradores da álgebra nos demais vetores da base nunca leva ao vetor invariante. Com base nas equações 6.45 a 6.50 as únicas maneiras de não ocorrer o fechamento do espaço complementar são dados por:

$$A_{13}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 1\,0 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle = -e^{i\theta}\sqrt{\frac{\sin(3\theta)}{\sin(2\theta)}}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle + e^{-i\theta}\sqrt{\frac{\sin(\theta)}{\sin(2\theta)}}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 2\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle,$$

$$A_{23}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 1\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle = \sqrt{\frac{\sin(3\theta)}{\sin(2\theta)}}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle + \left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 2\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle,$$

$$A_{31}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 2\,1 \\ 2 \end{matrix}\right\rangle = \sqrt{\frac{\sin(3\theta)}{\sin(2\theta)}}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle - e^{-2i\theta}\sqrt{\frac{\sin(\theta)}{\sin(2\theta)}}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 2\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle,$$

$$A_{32}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 2\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle = \sqrt{\frac{\sin(3\theta)}{\sin(2\theta)}}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 1\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle + \sqrt{\frac{\sin(\theta)}{\sin(2\theta)}}\left|\begin{matrix} 2\,1\,0 \\ 2\,0 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle,$$

mas como em $\theta = \frac{\pi}{3}$,o coeficiente $\sqrt{\frac{\sin(3\theta)}{\sin(2\theta)}}$ é nulo, portanto esse espaço é fechado. Extraindo o vetor invariante, calculamos novamente as matrizes dessa representação e encontramos:

$$\mathrm{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0&0&0&\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}&0&0&0&0&0&0\\ 0&\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Verificamos também que estas matrizes satisfazem as relações da tabela 6.13. Elas foram calculadas com os vetores da base ordenados da seguinte forma : $\left|\begin{matrix}2\,1\\2\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}2\,1\\1\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}2\,0\\2\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}2\,0\\1\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}2\,0\\0\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}1\,0\\0\end{matrix}\right\rangle, \left|\begin{matrix}1\,0\\1\end{matrix}\right\rangle$.

6.4.1 Resultados Finais

As considerações feitas no início da secão visam esclarecer a técnica que usamos para obter as representações após a quebra listadas nas tabelas 6.14 a 6.20. A coluna irrep indica o rótulo das representações irredutíveis clássicas, cujas dimensões é fornecida pela

coluna dim. Apresentamos uma tabela para cada ângulo considerado relevante, os demais contém informações repetidas, pois estas representações são periódicas em θ. Para esclarecer a nomenclatura utilizada na apresentação dos resultado, tomamos como exemplo a segunda linha da tabela 6.14, onde dizemos que a representação (2,0) de dimensão 6 quebrou no ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ em três representações unidimensionais mais uma tridimensional.

irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{2}$
$(1,0)$	3	$3 \times \text{dim} = 1$
$(2,0)$	6	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 3$
$(3,0)$	10	$1 \times \text{dim} = 1 \oplus 3 \times \text{dim} = 3$
$(2,1)$	15	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 2 \times \text{dim} = 3 \oplus 1 \times \text{dim} = 6$
$(4,0)$	15	$6 \times \text{dim} = 1 \oplus 3 \times \text{dim} = 3$
$(5,0)$	21	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 6 \times \text{dim} = 3$
$(2,2)$	27	$9 \times \text{dim} = 1 \oplus 2 \times \text{dim} = 3 \oplus 2 \times \text{dim} = 6$
$(6,0)$	28	$10 \times \text{dim} = 1 \oplus 6 \times \text{dim} = 3$
$(4,1)$	35	$8 \times \text{dim} = 1 \oplus 3 \times \text{dim} = 3 \oplus 3 \times \text{dim} = 6$
$(7,0)$	36	$6 \times \text{dim} = 1 \oplus 10 \times \text{dim} = 3$
$(3,2)$	42	$9 \times \text{dim} = 1 \oplus 5 \times \text{dim} = 3 \oplus 3 \times \text{dim} = 6$
$(8,0)$	45	$15 \times \text{dim} = 1 \oplus 10 \times \text{dim} = 3$
$(9,0)$	55	$10 \times \text{dim} = 1 \oplus 15 \oplus \text{dim} = 3$
$(4,2)$	60	$18 \times \text{dim} = 1 \oplus 4 \times \text{dim} = 3 \oplus 5 \times \text{dim} = 6$
$(6,1)$	63	$15 \times \text{dim} = 1 \oplus 4 \times \text{dim} = 3 \oplus 6 \times \text{dim} = 6$

Tabela 6.14: Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/2$

irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{3}$
$(1,1)$	8	$1 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 7$
$(3,0)$	10	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 7$
$(4,0)$	15	$3 \times \text{dim} = 3 \oplus 1 \times \text{dim} = 6$
$(5,0)$	21	$1 \times \text{dim} = 3 \oplus 3 \times \text{dim} = 6$
$(6,0)$	28	$7 \times \text{dim} = 1 \oplus 3 \times \text{dim} = 7$
$(4,1)$	35	$7 \times \text{dim} = 1 \oplus 2 \times \text{dim} = 7 \oplus 1 \times \text{dim} = 14$
$(7,0)$	36	$6 \times \text{dim} = 3 \oplus 3 \times \text{dim} = 6$
$(8,0)$	45	$3 \times \text{dim} = 3 \oplus 6 \times \text{dim} = 6$
$(9,0)$	55	$13 \times \text{dim} = 1 \oplus 6 \times \text{dim} = 7$
$(3,3)$	64	$15 \times \text{dim} = 1 \oplus 2 \times \text{dim} = 14 \oplus 1 \times \text{dim} = 21$

Tabela 6.15: Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/3$

irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{4}$
$(4,0)$	15	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 12$
$(2,1)$	15	$1 \times \text{dim} = 3 \oplus 1 \times \text{dim} = 12$
$(5,0)$	21	$3 \times \text{dim} = 3 \oplus 1 \times \text{dim} = 12$
$(6,0)$	28	$3 \times \text{dim} = 6 \oplus 1 \times \text{dim} = 10$
$(7,0)$	36	$1 \times \text{dim} = 6 \oplus 3 \times \text{dim} = 10$
$(8,1)$	45	$6 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 3 \oplus 3 \times \text{dim} = 12$
$(9,0)$	55	$1 \times \text{dim} = 1 \oplus 6 \times \text{dim} = 3 \oplus 3 \times \text{dim} = 12$
$(6,1)$	63	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 4 \times \text{dim} = 3 \oplus 2 \times \text{dim} = 12 \oplus 1 \times \text{dim} = 24$

Tabela 6.16: Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/4$

irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{5}$
$(5,0)$	21	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 18$
$(3,1)$	24	$1 \times \text{dim} = 6 \oplus 1 \times \text{dim} = 18$
$(2,2)$	27	$1 \times \text{dim} = 8 \oplus 1 \times \text{dim} = 19$
$(6,0)$	28	$3 \times \text{dim} = 3 \oplus 1 \times \text{dim} = 19$
$(7,0)$	36	$3 \times \text{dim} = 6 \oplus 1 \times \text{dim} = 18$
$(8,0)$	45	$3 \times \text{dim} = 10 \oplus 1 \times \text{dim} = 15$
$(9,0)$	55	$1 \times \text{dim} = 10 \oplus 3 \times \text{dim} = 15$

Tabela 6.17: Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/5$

irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{6}$
$(6,0)$	28	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 1\times \text{dim} = 25$
$(4,1)$	35	$1 \times \text{dim} = 10 \oplus 1\times \text{dim} = 15$
$(7,0)$	36	$3\times \text{dim} = 3 \oplus 1\times \text{dim} = 27$
$(3,2)$	42	$1 \times \text{dim} = 14 \oplus 1 \times \text{dim} = 28$
$(8,0)$	45	$3\times \text{dim} = 6 \oplus 1 \times \text{dim} = 27$
$(9,0)$	55	$3 \times \text{dim} =10\oplus 1 \oplus \text{dim}=25$

Tabela 6.18: Dimensão das Representaçõesl de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/6$

irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{7}$
$(7,0)$	36	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 33$
$(5,1)$	48	$1 \times \text{dim} = 15 \oplus 1 \times \text{dim} = 33$
$(8,0)$	45	$3\times \text{dim} = 3 \oplus 1 \times \text{dim} = 36$
$(9,0)$	55	$3 \times \text{dim} =6\oplus 1 \oplus \text{dim}=37$
$(4,2)$	60	$1 \times \text{dim} = 24 \oplus 1 \times \text{dim} = 36$
$(3,3)$	64	$1 \times \text{dim} = 37 \oplus 1 \times \text{dim} = 27$

Tabela 6.19: Dimensãol das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/7$

irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{8}$
$(8,0)$	45	$3 \times \text{dim} = 1 \oplus 1 \times \text{dim} = 42$
$(9,0)$	55	$3 \times \text{dim} =3\oplus 1 \oplus \text{dim}=46$
$(6,1)$	63	$1 \times \text{dim} = 21 \oplus 1 \times \text{dim} = 42$
irrep	dim	quebra $\theta = \frac{\pi}{9}$
(9,0)	55	$3\times\text{dim}=1\oplus1\times\text{dim}=52$

Tabela 6.20: Dimensão das Representações de $U_q(sl(3))$ para $\theta = \pi/8$ e $\pi/9$

Procuramos uma regra que descrevesse as quebras das representações acima, mas infelizmente, devido ao padrão altamente irregular das mesmas, esse objetivo não foi alcançado. Seria interessante se removessemos a singularidade que compromete algumas representações, conforme já mencionamos, pois introduziria mais informações que poderiam resolver o problema da busca de uma regra geral. Devemos notar também que muitas dessas representações que surgem no processo de redução tem equivalente clássico. Não obstante, foi possível observar que de fato essas álgebras deformadas ampliam o conceito de simetria, agora existem representações novas, veja por exemplo a representação (2,1) no ângulo $\frac{\pi}{4}$ uma representação de dimensão 12, a representação (3,3) no ângulo $\frac{\pi}{3}$ tem uma de dimensão 14 e a representação (6,0) tem uma de dimensão 25 no ângulo $\frac{\pi}{6}$. Atualmente, encontram-se na literatura trabalhos que se dedicam ao estudo das álgebras mais simples como as estudadas aqui. Dentre eles destacamos a investigação feita por Dobrev [27], onde ele fornece fórmulas que prevêm a dimensão e o ângulo das novas

representações. Seus resultados estão sintetizados na tabela 6.21, onde expomos os ângulos em termos de um indexador N (leia-se $\theta = \frac{\pi}{N}$) e a dimensão dim L_λ do espaço portador da representação após a quebra, para as algumas representações da álgebra $U_q(sl(3))$.

(l_1,l_2)	$d(l_1,l_2)$	N	dim L_λ
(1, 1)	8	3	7*
(2, 1)	15	4	12*
(2, 2)	27	4	26
(2, 2)	27	5	19*
(3, 1)	24	5	18 *
(3, 2)	42	5	39
(3, 2)	42	6	27*
(3, 3)	64	5	63
(3, 3)	64	6	56
(3, 3)	64	7	37*

Tabela 6.21: Representações de $U_q(sl(3))$

As representações assinaladas por (*) são aquelas que apresentaram resultados que coincidem com os nossos. Não foi possível analisar as demais representações, pois elas não estão definidas para os respectivos ângulos (listados na tabela acima). Por fim note que não aparecem nenhuma representação simétrica na tabela 6.21, porque segundo as fórmulas obtidas pelo autor mencionado, essas representações nunca apresentam novidades. Isto contradiz com aqueles listados nas tabelas 6.14 a 6.20, veja que a representação (9,0) no ângulo $\frac{\pi}{3}$ quebra em uma de dimensão 7 enquanto a representação (7,0) no ângulo $\frac{\pi}{7}$ quebra em uma de dimensão 33 e ambas não tem uma equivalente clássica, portanto são novas.

6.5 O operador de Casimir

O operador de Casimir quadrático das álgebras de Lie sl(2) e sl(3), compatíveis com as relações de comutação 6.13 quando q é igual a 1, são bem conhecidos e dado respectivamente por:

$$\tilde{C}_2 = \frac{1}{4}(H+1)^2 + A_{21}A_{12}. \tag{6.60}$$

$$C_2 = \frac{2}{3}(H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2) + A_{12}A_{21} + A_{21}A_{12} + A_{23}A_{32} + A_{32}A_{23} + A_{13}A_{31} + \\ + A_{31}A_{13}. \tag{6.61}$$

Se deformarmos as relações de comutação de uma álgebra de Lie, de modo arbitrário, é possível que o centro da álgebra não mais exista. Contudo, quando deformamos a álgebra universal envolvente de acordo com a prescrição 6.3, o centro sobrevive ao processo de deformação. Particularmente, a versão deformada do operador de Casimir quadrático para as álgebras $U_q(sl(2))$ e $U_q(sl(3))$ é dado pelas seguintes equações [28]:

$$\tilde{C}_{2q} = [\frac{H+1}{2}]^2 + A_{21}A_{12}. \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned} C_{2q} = {} & \frac{1}{2}(q^2+q^{-2})\left([\frac{2H_1}{3}+\frac{H_2}{3}]_q^2 + [\frac{H_1}{3}+\frac{2H_2}{3}]_q^2\right) + [\frac{H_1}{3}-\frac{H_2}{3}]_q^2 + \\ & \frac{1}{2}(KK_2q^{-1}+K^{-1}K_2^{-1}q)A_{12}A_{21} + \frac{1}{2}(KK_2q+K^{-1}K_2^{-1}q^{-1})A_{21}A_{12} + \\ & \frac{1}{2}(KK_1^{-1}q+K^{-1}K_1q^{-1})A_{23}A_{32} + \frac{1}{2}(KK_1^{-1}q^{-1}+K^{-1}K_1q)A_{32}A_{23} + \\ & \frac{1}{2}K\left\{(q^{\frac{1}{2}}A_{12}A_{23} - q^{\frac{-1}{2}}A_{23}A_{12})(-q^{\frac{-1}{2}}A_{21}A_{32} + q^{\frac{1}{2}}A_{32}A_{21}) + \right. \\ & \left.(-q^{\frac{-1}{2}}A_{21}A_{32} + q^{\frac{1}{2}}A_{32}A_{21})(q^{\frac{1}{2}}A_{12}A_{23} - q^{\frac{-1}{2}}A_{23}A_{12})\right\} + \\ & \frac{1}{2}K^{-1}\left\{(-q^{\frac{-1}{2}}A_{12}A_{23} + q^{\frac{1}{2}}A_{23}A_{12})(q^{\frac{1}{2}}A_{21}A_{32} - q^{\frac{-1}{2}}A_{32}A_{21})\right. \\ & \left.(q^{\frac{1}{2}}A_{21}A_{32} - q^{\frac{-1}{2}}A_{32}A_{21})(-q^{\frac{-1}{2}}A_{12}A_{23} + q^{\frac{1}{2}}A_{23}A_{12})\right\} \end{aligned} \tag{6.63}$$

onde :

$$K_i = q^{H_i} \qquad \text{e} \qquad K = K_1^{\frac{1}{3}}K_2^{\frac{-1}{3}}. \tag{6.64}$$

O operador de Casimir dado por 6.63 é de fato multiplo da identidade na base de Gel'fand-Zetlin. Agindo em um vetor de peso máximo $|\, v_{j_1\, j_2}\rangle$ de uma representação irredutível de $U_q sl(3)$ encontra-se o autovalor do operador de Casimir dado por[3] 6.63:

$$c_{2q} = \left[\frac{j_1}{3} - \frac{j_2}{3}\right]_q^2 + \left[\frac{2j_1}{3} + \frac{j_2}{3} + 1\right]_q^2 + \left[\frac{j_1}{3} + \frac{2j_2}{3} + 1\right]_q^2 - 2. \tag{6.65}$$

Tomando q=1 reproduz-se o resultado clássico:

$$c_2 = 2(j_1+j_2)+\frac{2}{3}(j_1^2+j_2^2+j_1j_2). \tag{6.66}$$

O programa que implementamos para calcular o operador de Casimir, para as representações estudas, mostrou que ele é multiplo da identidade como esperávamos, visto que ele é um operador invariante. Alguns de seus autovalores, quando $q = e^{i\theta}$, após simplificações são:

1- Representação fundamental (1,0):

$$c_{2q} = \frac{8\cos^2(\frac{\theta}{3})[32\cos^8(\frac{\theta}{3})-72\cos^6(\frac{\theta}{3})+50\cos^4(\frac{\theta}{3})-9\cos^2(\frac{\theta}{3})-1]}{\cos^2(\theta)-1}.$$

2- Representação simétrica (2,0):

$$c_{2q} = 4\cos(\tfrac{5}{3}\theta)\cos(\theta)+\frac{\sin^2(\frac{4}{3}\theta)+2cos(2\theta)\sin^2(\frac{2}{3}\theta)}{\sin^2(\theta)}.$$

3- Representação adjunta (1,1):

$$c_{2q} = 8\cos^2(\theta) - 2.$$

4- Representação simétrica (3,0):

$$c_{2q} = 16\cos^4(\theta) - 4\cos^2(\theta).$$

5- Representação simétrica (4,0):

$$c_{2q}=\frac{2\cos(\frac{20}{3}\theta)+4\cos(\frac{18}{3}\theta)+6\cos(\frac{16}{3}\theta)+8\cos(\frac{14}{3}\theta)+12\cos(4\theta)+16\cos(\frac{10}{3}\theta)+20\cos(\frac{8}{3}\theta)+26\cos(2\theta)+28\cos(\frac{4}{3}\theta)+30\cos(\frac{2}{3}\theta)+16}{(2\cos(\frac{2}{3}\theta)+1)^2}$$

6- Representação mista (2,1):

$$c_{2q} = \frac{18[cos(\frac{2}{3}\theta)+cos(2\theta)+cos(\frac{4}{3}\theta)]+10cos(\frac{10}{3}\theta)+14cos(\frac{8}{3}\theta)+6cos(\frac{2}{3}\theta)++2\cos(\frac{14}{3}\theta)+10}{(2\cos(\frac{2}{3}\theta)+1)^2}.$$

6.5.1 O operador de Casimir da subalgebra $U_q(sl(2))$

Exibimos nesta seção o operador de Casimir da álgebra $U_q(sl(2))$ contida canonicamente na álgebra $(U_q sl(3))$, que é gerado por $\{H_1, A_{12}, A_{21}\}$, somente para algumas representações. Novamente denotamos por $\tilde{C}_{2q}(j_1, j_2, \theta)$ a matriz do operador de Casimir da representação (j_1, j_2) na notação de Dynkin e θ o ângulo em questão. No caso clássico é conhecido a regra de ramificação da cadeia $A_2 \supset A_1$ e de acordo com Mackey e Patera [21] para as primeiras representações são as seguintes:

A_2 :dimensão	A_2 : *irrep*	A_1 : *irrep*	A_1 : dimensão
3	$(1,0)$	$(\frac{1}{2}) \dot{+} (0)$	$2 \oplus 1$
6	$(2,0)$	$(1) \dot{+} (\frac{1}{2}) \dot{+} (0)$	$3 \oplus 2 \oplus 1$
8	$(1,1)$	$(1) \dot{+} (\frac{1}{2}) \dot{+} (\frac{1}{2}) \dot{+} (0)$	$3 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 1$
10	$(3,0)$	$(\frac{3}{2}) \dot{+} (1) \dot{+} (\frac{1}{2}) \dot{+} (0)$	$4 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 1$
15	$(4,0)$	$(2) \dot{+} (\frac{3}{2}) \dot{+} (1) \dot{+} (\frac{1}{2}) \dot{+} (0)$	$5 \oplus 4 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 1$
15	$(2,1)$	$(\frac{3}{2}) \dot{+} (1) \dot{+} (1) \dot{+} (\frac{1}{2}) \dot{+} (\frac{1}{2}) \dot{+} (0)$	$4 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 1$

Tabela 6.22: Regras de Ramificação

Vejamos agora o operador de Casimir para algumas representações q-deformadas.

Para determinarmos as regras de ramificação, devemos calcular explicitamente o operador de Casimir da álgebra $U_q(sl(2))$ utilizando as matrizes de $U_q(sl(3))$. Quando restringimos a álgebra à sua subálgebra, ela deixa de ser irredutível e as matrizes da representação aparecem bloco diagonalizadas. Agora, cada bloco pertence a uma representação, que por sua vez possui um autovalor do operador de Casimir bem definido. Nada impede que uma representação aparece mais de uma vez. Ao calcularmos o operador de Casimir esperamos encontrar uma matriz diagonal que exiba a dimensão da representação e sua multiplicidade.

Ve-se claramente que o Casimir abaixo corresponde a uma representação bidimensional com autovalor 1 e outra unidimensional com autovalor $\frac{1}{2\cos(\theta)+2}$.

$\tilde{C}$2q(1,0, θ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\cos(\theta)+2} \end{bmatrix}$$

Já o próximo Casimir prevê que a representação de dimensão 6 quebre em uma tridimensional com autovalor $\frac{4(\cos(\theta))^2+4\cos(\theta)+1}{2\cos(\theta)+2}$, em outra bidimensional com autovalor 1 e por fim uma unidimensional com autovalor$\frac{1}{2\cos(\theta)+2}$.

$\tilde{C}$2q(2,0, θ):

$$\begin{bmatrix} \frac{4(\cos(\theta))^2+4\cos(\theta)+1}{2\cos(\theta)+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4(\cos(\theta))^2+4\cos(\theta)+1}{2\cos(\theta)+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(\cos(\theta))^2+4\cos(\theta)+1}{2\cos(\theta)+2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\cos(\theta)+2} \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}21q(2,0,0)$:

$$\begin{bmatrix} 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(2,0,\pi/2)$:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(1,1,\theta)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(\cos(\theta))^2+4\cos(\theta)+1}{2\cos(\theta)+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4(\cos(\theta))^2+4\cos(\theta)+1}{2\cos(\theta)+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(\cos(\theta))^2+4\cos(\theta)+1}{2\cos(\theta)+2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\cos(\theta)+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}21q(1,1,0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(1,1,\pi/3)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(3,0,0)$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$\tilde{C}2q(3,0,\ \pi/2)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}21q(3,0,\ \pi/3)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(4,0,0)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{25}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(4,0,\ \pi/2)$:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{C}$2q(4,0, $\pi/3$):

$$\begin{bmatrix}
1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3
\end{bmatrix}$$

$\tilde{C}$2q(4,0, $\pi/4$):

$$\begin{bmatrix}
\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\sqrt{2}+2\right)^{-1}
\end{bmatrix}$$

$\tilde{C}$2q(2,1,0):

$$\begin{bmatrix}
9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(2,1,\pi/2)$:

$$\begin{bmatrix}
1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$\tilde{C}2q(2,1,\pi/4)$:

$$\begin{bmatrix}
\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\sqrt{2}+2\right)^{-1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

O operador de Casimir da álgebra $U_q(sl(2))$ mostra-nos que as regras de ramificaçã0 para as representações acima não diferirem do caso clássico pois elas coincidem com aquelas listadas na tabela 6.22.

Capítulo 7

Conclusões

Demos um primeiro passo rumo ao entendimento das Álgebras Quânticas ao construirmos explicitamente as matrizes de suas representações, implementando as técnicas tradicionais adaptadas às deformações. Antes porém foi necessário estudarmos as álgebras de Lie no que concerne aos conceitos básicos, sua estrutura e dois métodos para a construção de representações irredutíveis, o de Gel 'fand-Zetlin e o de operadores de bósons, para podermos acompanhar a discussões e extrair as informações relevante, dentro de nossa linha de pesquisa, de questões que vem sendo levantadas e difundidas pela literatura internacional. Ao realizarmos uma revisão bibliográfica, nos deparamos com centenas de artigos sobre Álgebras Quânticas, apesar de terem surgidos na década passada. O maior desafio de um iniciante, do ponto de vista cognitivo, é ganhar intuição, principalmente em disciplinas altamente abstratas como álgebras. Reside aí o mérito deste trabalho, pois nossa abordagem consistiu basicamente em investigar as propriedade dessas estruturas a partir de representações explícitas, permitindo-nos checar os mais variados resultados abstratamente concebidos.

Verificamos que uma representação de peso máximo da álgebra $U_q(su(2))$ sofre perda de irredutibilidade somente quando q é uma raiz da unidade, e mais, determinamos facilmente os estados invariantes que expandem as representações após a quebra e, por fim, fornecemos uma lei geral que descreve a dimensão e a multiplicidade dessa novas representações. Em seguida elegemos a álgebra $U_q(sl(3))$ como o protótipo de nossas investigações, construímos as suas representações quando o parâmetro de deformação é simplesmente um número complexo (fase), e variamos q no circulo unitário no diagrama de Argand, fomos vendo como essas representações se quebravam, determinando assim aquelas que não tem uma equivalente

clássica. E de fato encontramos muitas representações novas, que foram oportunamente discutidas, confirmando o sucesso da prescrição que deforma as álgebras de Lie, generalizando-as em função de um parâmetro q. Finalmente, calculamos o operador de Casimir quadrático para as álgebras $U_q(sl(3))$ e $U_q(sl(2))$ e concluímos que as regras de decomposicão das mencionadas representações na cadeia $U_q(sl(3)) \supset U_q(sl(2))$ não apresentam novidades, pois são identicas às conhecidas para o caso clássico.

7.1 Perspectivas

O próximo passo é regularizar as representações, ou seja, remover as singularidades que deixaram indefinidas álgumas representações, conforme tivemos a oportunidade de ver no capítulo anterior. E depois estender este estudo para outras álgebras, em especial, deformar e repetir a investigação descrita no presente trabalho, para a álgebra de Lie sp(4), cuja realização fora recentemente obtida por Bernardes [29]. Na verdade estamos interessados, como dissemos na introdução, em encontrar uma simetria que descreva exatamente o código genético. Este é eminentemete o fulcro do nosso trabalho e acredito termos avançado efetivamente na direção de atingir os objetivos a que aspiramos.

Bibliografia

[1] E. P. Wigner. *Group Theory And Its Applications To The Quantum Mechanics Of Atomic Spectra.* Academic Press- New York and London, 2th edition, 1959.

[2] L. C. Biedenharn and M.A. Lohe. *Quantum Group Simetry And q-Tensor Algebras.* World Scientific, 1th edition, 1995.

[3] P. kulish and N. Reshetikhin. Quantum linear problem for the sine-gordon equations higher representations. *J. Soviet Math.*, 23:2435, 1983.

[4] E. Sklyanin, L. Takhatajan, and L. Faddev. Quantum inverse problem metod i. *Theor. Math. Phys*, 40:688, 1979.

[5] L. D. Fadeev. Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory. In *Les Thouches Lectures*, number XXXIX, page 563. Elsevier Science Publisher B. V., North Holland, Amsterdam, 1982.

[6] J. L. Gervais. The quantum group structure of 2d gravity and minimals models i. *Commun. Math. Phys.*, 130:257, 1990.

[7] E. Witten. Gauche theories, vertex models and quantum groups. *Nucl. Phys.*, B330:285, 1990.

[8] E. Witten. Gauche theories and integrable lattice models. *Nucl. Phys.*, B322:629, 1989.

[9] Bonatsos and Daskaloyannis. Deformed rotational spectra of nuclei and molecules. In B. Gruber, editor, *Simetries in Science*, volume VI, page 89. Plenium Press, 1993.

[10] Solomon. From the rotation to quantum algebras. In B. Gruber, editor, *Simetries in Science*, volume VI, page 705. Plenium Press, 1993.

[11] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum yong-baxter equations. *Sov. Math. Dokl.*, 32:254, 1985.

[12] V. G. Drinfeld. A new realizations of yangians and quantized affine algebras. *Sov. Math. Dokl.*, 36:212, 1988.

USC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

[13] V. G. Drinfeld. Quantum group. In *Int. Cong. of Math.*, volume 1, page 798, MSRI Berkeley California, 1986.

[14] J. E. Hornos and Y. M.M. Hornos. Algebraic models for the evolutions of the genetic code. *Phis. Rev. Lett.*, 71(26):4401, 1993.

[15] B. G. Wybourne. *Classical Group for Physicists.* John Wiley Sons, 1th edition, 1974.

[16] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of Group Representations and Applications.* World Scientific, 2th edition, 1986.

[17] J. F. Cornwell. *Group Theory in Physics*, volume 2. Academic Press, 4th edition, 1990.

[18] Jin-Quan Chen. *Group Representation Theory For Physicists.* World Scientific, 1th edition, 1989.

[19] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applicatins.* John Wiley Sons, 1th edition, 1974.

[20] G. Muller. *Quantum Mechanics Simetries.* Spring-Verlag, Germany, 2th edition, 1994.

[21] W. G.Mackey and J. Patera. *Indices and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras*, volume 69 of *Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, New York, 1981.

[22] M. Jimbo. Quantum r matrix related to the generalized toda sistem: an algebraic approach. *Lecture Notes in Physics*, 246:335, 1985.

[23] A. J. Macfarlane. On q-analogues of the quantum harmônics oscillators and the quantum group $su_q(2)$. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:4581, 1989.

[24] L. C. Biedenharn. The quantum group $su_q(2)$ and q-analogue of the bosons operators. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:L873, 1989.

[25] M. Jimbo. A q-difference analogue of u(g) and the yang-baxter equations. *Lett. Math. Phys.*, 10:63, 1985.

[26] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoi, and Yu. I. Kharitonov. The quantum algebra $u_q(3)$. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 54(3):437, 1991.

[27] V. K. Dobrev. Quantum algebras:representations and real forms. In B. Gruber, editor, *Simetries in Science*, volume VI, page 195. Plenium Press, 1993.

[28] M. J. Rodrigues-Plaza. Casimir operators of $u_q sl(3)$. *J.Math.Phys*, 32(8):2020, 1991.

[29] E. S. Bernardes. Matrix elements for the symplectic sp(4,c) lie algebras. *submetido*, 1996.