UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

CARLOS ALEXANDRE BRASIL

Descrição de medidas em sistemas de 2 níveis pela equação de Lindblad
com inclusão de ambiente,

São Carlos
2012

CARLOS ALEXANDRE BRASIL

Descrição de medidas em sistemas de 2 níveis pela equação de
Lindblad com inclusão de ambiente,

*Tese de Doutorado apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física do Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Doutor em Ciências:
Física básica.*

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Reginaldo de Jesus Napolitano

Versão corrigida
(Versão original disponível no Instituto de Física de São Carlos)

São Carlos
2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Brasil, Carlos Alexandre

Descrição de medidas em sistemas de 2 níveis pela equação de Lindblad com inclusão de ambiente/ Carlos Alexandre Brasil; orientador Reginaldo de Jesus Napolitano - Versão corrigida - São Carlos, 2012.
216 p.

Tese (Doutorado – Programa de Pós-graduação em Física Básica) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

1. Teoria quântica da medida. 2. Equação de Lindblad. 3. Álgebra de super-operadores. 4. Super-operadores de Nakajima-Zwanzig.

“Eis que a Ciência, esse sistema exato de conhecimentos, ultrapassa os campos da imaginação... Cuidado, artistas, escritores, poetas, homens que viveis de criar mundos imaginários! Os cientistas, dentro de seu minucioso mundo matemático, invadem também o vosso, e com que grau de beleza!”

Vinícius de Moraes, *Para viver um grande amor (A outra face de Lucina)*

“Nós levantamos nossos filhos aos ombros para que eles vejam melhor um cometa e, assim fazendo, juntamo-nos a uma cadeia de gerações que se estende para trás no passado muito além da memória escrita. Nenhuma causa é mais importante do que preservar essa antiga e preciosíssima continuidade.”

Carl Sagan e Ann Druyan, *Cometa*

Para meus sobrinhos Ana Luiza e Gabriel. Que este trabalho se torne insignificante perante suas realizações.

AGRADECIMENTOS

Mais uma vez, me vejo com o problema de ser justo com todos aqueles que me ajudaram e me influenciaram positivamente. Este doutorado constitui o encerramento de um ciclo que se iniciou em 2001, com meu ingresso no curso de Bacharelado em Física no Instituto de Física de São Carlos. Assim, a lista a seguir deve ser considerada em conjunto com aquela contida em minha dissertação de mestrado, embora algumas redundâncias tenham sido intencionalmente cometidas. Não terei como, aqui, enumerar todos os que merecem a minha gratidão, mas espero poder compensar pessoalmente as inevitáveis omissões.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador neste fascinante (e divertido) projeto de doutorado, Professor Reginaldo de Jesus Napolitano, por ter me proporcionado quatro anos de convivência extremamente agradável com discussões científicas e filosóficas não apenas sobre este nosso trabalho. Sua grande paciência, clareza e disposição para o ensino, aliados a um profundo conhecimento da Física em geral, me deixam com a sensação de que estou deixando um mestre que ainda tem muito para me passar. Que continuemos a colaborar por muitos e muitos anos.

Por diversas vezes, mantive agradáveis e importantes discussões com o Professor Miled Hassan Youssef Moussa, que levantou importantes questões sobre a fundamentação de meu trabalho, além de me esclarecer diversas dúvidas a respeito da Mecânica Quântica. Espero também que possamos iniciar uma ativa colaboração em um futuro próximo.

Para as correções apresentadas nesta versão, gostaria de agradecer a colaboração dos membros de minha banca, professores José Maria Villas Bôas, José Antonio Roversi, Diogo de Oliveira Soares Pinto e Roberto Menezes Serra.

Agradeço também ao Professor José Eduardo Martinho Hornos pelas várias manhãs devotadas a discussões (por diversas vezes irreverentes) sobre ciência, história, política e filosofia.

Sobre a natureza deste trabalho e suas possíveis aplicações, tive discussões relevantes com Felipe Fernandes Fanchini e Paulo Eduardo Marques Furtado de Mendonça. Nestas reuniões, destaco a participação do Leonardo Andreta de Castro que também fez uma revisão minuciosa desta tese - entretanto, assumo responsabilidade por todos os erros e falhas aqui contidos.

Nosso grupo pôde contar, pelo menos durante minha estadia, com a ajuda e a simpatia das secretárias Mariana Rodrigues e Yvone Aparecida Biason Lopes. Agradeço não apenas pelo auxílio em certos entraves burocráticos como, também, pelos cafés em agradável companhia.

Não poderia deixar de mencionar aqui os diversos setores que forneceram o apoio fundamental para este e todos os demais trabalhos de estudantes do IFSC: Serviço de Pós-graduação, Serviço de Gráfica, Assistência Técnica Financeira, Seção Técnica de Informática e Serviço de Biblioteca e Informação.

Aos meus colegas de sala Diego Paiva Pires, Guilherme Nery Prata e Luiz Gustavo Esmenard Arruda pelas discussões e pela descontração. Incluo aqui alguém que sempre esteve tão próximo como se, de fato, dividisse a sala conosco, Renato Aparecido Pimentel da Silva. O Renato, ao final, me forneceu uma valiosa ajuda para colocar meu texto no LaTeX (o processador de textos que é um verdadeiro trambolho). Guardarei excelentes e divertidas lembranças da convivência com todos.

Aos demais colegas de pós-graduação: Caio Martins Ramos, Gabriel Luchini, Jorge Douglas Massayuki Kondo, Pawel Klimas, Thiago Mosqueiro e Tiago Barbin Batalhão.

Por fim, agradeço mais uma vez aos meus familiares. Aos meus irmãos Carlos Magno e Alex Ricardo pela ajuda e conselhos. Aos meus pais, Esther Maria e José Carlos pelo apoio incondicional em todas as etapas de minha vida.

RESUMO

BRASIL, C. A. **Descrição de medidas em sistemas de 2 níveis pela equação de Lindblad com inclusão de ambiente.** 2012. 216p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

O objetivo deste trabalho é explorar um modelo para medidas quânticas de duração finita baseado na equação de Lindblad, com a análise de um sistema de 2 níveis acoplado a um reservatório térmico que ocasiona decoerência. A interação entre o sistema e o dispositivo de medida é markoviana, justificando o uso da equação de Lindblad para obter a dinâmica do processo de medida. Para analisar a influência do ambiente/reservatório térmico não-markoviano, cuja definição não inclui o aparato de medida, foi utilizada a abordagem de Redfield para a interação entre o sistema e o ambiente. Na teoria híbrida aqui exposta, para efetuar o traço parcial dos graus de liberdade do ambiente foi desenvolvido um método analítico baseado na álgebra de super-operadores e no uso dos super-operadores de Nakajima-Zwanzig. Foi verificado que medidas de duração finita sobre o sistema aberto de 2 níveis podem proteger o estado inicial dos efeitos do ambiente, desde que o observável medido não commute com a interação. Quando o observável medido comuta com a interação sistema-ambiente, a medida de duração finita acelera a decoerência induzida pelo ambiente. A validade das previsões analíticas foi testada comparando os resultados com uma abordagem numérica exata. Quando o acoplamento entre o sistema e o aparato de medida excede a faixa de validade da aproximação analítica, o estado inicial ainda é protegido pela medida de duração finita, como indicam os cálculos numéricos exatos.

Palavras-chave: *Teoria quântica da medida. Equação de Lindblad. Álgebra de super-operadores. Super-operadores de Nakajima-Zwanzig.*

ABSTRACT

BRASIL, C. A. **Analysis of the environmental influence on the measurement process of a 2-level system using the Lindblad equation.** 2012. 216p. Tese (Doutorado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

The aim of this work is to explore a model for finite-time measurement based on the Lindblad equation, with analysis of a system consisting of a 2-level system coupled to a thermal reservoir. We assume a Markovian measuring device and, therefore, use a Lindbladian description for the measurement dynamics. For studying the case of noise produced by a non-Markovian environment, whose definition does not include the measuring apparatus, we use the Redfield approach to the interaction between system and environment. In the present hybrid theory, to trace out the environmental degrees of freedom, we introduce an analytic method based on superoperator algebra and Nakajima-Zwanzig superoperators. We show that measurements of finite duration performed on an open two-state system can protect the initial state from a phase-noisy environment, provided the measured observable does not commute with the perturbing interaction. When the measured observable commutes with the environmental interaction, the finite-duration measurement accelerates the rate of decoherence induced by the phase noise. We have tested the validity of the analytical predictions against an exact numerical approach. When the coupling between the system and the measuring apparatus increases beyond the range of validity of the analytical approximation, the initial state is still protected by the finite-time measurement, according with the exact numerical calculations.

Keywords: *Quantum measurement theory. Lindblad equation. Superoperator algebra. Nakajima-Zwanzig superoperators.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 7.1 – Evolução temporal para as populações no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{ +\rangle_x, -\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1). A linha tracejada vertical indica o valor escolhido para o tempo de duração da medida (ver item 7.2.2).	159
Figura 7.2 – Curvas referentes a $\eta = 0, 5$, selecionadas na figura 7.1 para os vários valores de λ , no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{ +\rangle_x, -\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).	160
Figura 7.3 – Evolução temporal para os quadrados dos módulos das coerências no caso da medida de $\hat{\sigma}_z$ na base de autoestados $\{ +\rangle, -\rangle\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).	164
Figura 7.4 – Evolução temporal para os módulos das coerências no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{ +\rangle_x, -\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1). A linha tracejada vertical indica t_M com $f = 0, 3$	167
Figura 7.5 – Comparações entre as soluções numéricas e analíticas para a evolução temporal das populações, no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$, na base de autoestados $\{ +\rangle_x, -\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).	170
Figura 7.6 – Comparações entre as soluções numéricas e analíticas para a evolução temporal das coerências, no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{ +\rangle_x, -\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).	171
Figura 7.7 – Dependência dos tempos de medida em função de λ para $f = 0, 3$	171

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Erros ϵ das medidas considerando todos os casos exibidos na figura 7.1 para os quais as soluções analíticas (6.143) são válidas. Como para $\lambda = 0$ não há medidor, o critério adotado não se aplica.	160
--	-----

SUMÁRIO

Introdução	19
1 O problema da medida na mecânica quântica	25
1.1 Introdução	25
1.2 Mecânica quântica: (4+2) postulados	27
1.3 O surgimento da função de onda: de Broglie, Einstein e Schrödinger	28
1.4 A interpretação probabilística da função de onda	32
1.4.1 O trabalho de Born	32
1.4.2 O trabalho de Dirac	38
1.5 O trabalho de von Neumann	40
1.5.1 Lei dos números grandes e Causalidade	41
1.5.2 O processo de medida	42
1.6 A medida de tempo finito	45
1.7 Contextualização	46
2 A equação de Lindblad	47
2.1 Introdução	47
2.2 A equação-mestra de Born-Markov	48
2.3 A equação de Lindblad	51
2.3.1 Definições	51
2.3.2 Cálculo do comutador na equação-mestra	53
2.3.3 Cálculo do traço parcial	55
2.3.4 Expansão da integral da equação-mestra	57
2.3.5 Cálculo do traço parcial do ambiente	58
2.3.6 Transição para o contínuo	61
2.3.7 Aproximação de Markov	61
2.3.8 Forma final	62
2.4 Contextualização	64
3 Duas soluções analíticas para a equação de Lindblad	65
3.1 Introdução	65
3.2 Definições	66
3.3 Medida da componente z	68
3.4 Medida da componente x	70
3.5 Medidas instantâneas <i>versus</i> medidas finitas	79

3.5.1	Condições iniciais	80
3.5.2	Medida de $\hat{\sigma}_z$	81
3.5.3	Medida de $\hat{\sigma}_x$	82
3.6	Contextualização	84
4	Os projetores de Nakajima-Zwanzig	85
4.1	Introdução	85
4.2	Definições	86
4.3	A equação de Nakajima-Zwanzig	87
4.4	A equação-mestra de Born-Markov	88
4.5	Contextualização	91
5	Equação-mestra para a medida sobre o sistema em contato com ambiente	93
5.1	Introdução	93
5.2	Definições	94
5.3	Propriedades dos super-operadores $\hat{B}$, $\hat{S}$ e $\hat{F}$	96
5.4	Traço parcial do ambiente	98
5.5	Contextualização	104
6	Medida sobre o sistema em contato com o ambiente	105
6.1	Introdução	105
6.2	Estabelecimento do problema	107
6.3	Expandindo o integrando	109
6.4	Tratamento do ambiente	113
6.5	Transição para o contínuo	120
6.6	Medida da componente z	121
6.6.1	Resolvendo o integrando	121
6.6.2	Obtenção das populações	126
6.6.3	Obtenção das coerências	126
6.7	Medida da componente x	130
6.7.1	Resolvendo o integrando	131
6.7.2	Obtenção das populações na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$	142
6.7.3	Obtenção das coerências na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$	143
6.8	Obtenção do operador densidade na base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$	154
6.9	Contextualização	155
7	Estudo das soluções	157
7.1	Introdução	157
7.2	Soluções analíticas: acoplamento sistema-ambiente fraco	158
7.2.1	Populações: erros na medida	158
7.2.2	Coerências: duração da medida	161
7.3	Soluções numéricas: acoplamento sistema-ambiente arbitrário	168
7.3.1	Método utilizado	168
7.3.2	Comparações	169

7.4 Contextualização	172
Conclusões e perspectivas	174
REFERÊNCIAS	177
Apêndice A Resultados envolvendo os operadores de criação e destruição	183
Apêndice B Função Gama	189
B.1 Definições	189
B.2 Propriedades	190
B.3 Representação da função gama em produto	190
B.4 Simplificação para a medida da componente z	190
Apêndice C Integrais	193
C.1 Resultados extraídos de tabelas ou programas	193
C.2 Desenvolvimentos importantes	194
C.3 Integrais utilizadas no item 6.6.3	198
C.4 Integrais utilizadas no item 6.7.3.1	200
Apêndice D Verificação das soluções (6.143)	211
D.1 Resultados prévios	211
D.2 Verificações	213

Introdução

O problema da medida na mecânica quântica é responsável por grande parte das polêmicas que ainda existem nessa teoria. Enquanto que, na física clássica, a observação de um objeto não pressupõe que suas propriedades sejam alteradas por causa da interação com o observador (ou aparato de medida), na teoria quântica essa interação, longe de ser insignificante, passa a provocar profundas alterações naquilo que está sendo observado. Além de mudar o estado de seu sistema, a medida de uma dada propriedade física pode influenciar no valor de outra propriedade (no caso de observáveis conjugados como, por exemplo, posição e *momentum*). Outro agravante é o fato de não ser possível conhecer, com certeza, o resultado de uma única medida: as regras da mecânica quântica permitem conhecer apenas os vários resultados possíveis e as respectivas probabilidades de que um dado resultado ocorra - uma teoria de *ensemble*.

Em termos mais precisos, na mecânica quântica o sistema é descrito por uma *função de onda* e, ao medidor, é associado um *observável*, que se trata de um *operador hermitiano*. Para realizar uma medida, é necessário *expandir a função de onda* em termos dos *auto-estados* do observável: os resultados possíveis de uma *medida* serão os respectivos auto-valores do observável e as probabilidades de que ocorram serão dadas pelo módulo ao quadrado dos coeficientes da expansão da função de onda. Uma vez que a medida é feita, ocorre a *redução da função de onda*: se um resultado/auto-valor é obtido, o estado do sistema passa a ser apenas seu respectivo auto-estado.

Esta tese se ocupa exatamente do processo de medida da função de onda, que usualmente é considerado junto com o processo de redução e é tido como instantâneo. Aqui, através de um modelo baseado na equação de Lindblad, serão analisados os efeitos que o tempo de interação entre o sistema medido e o aparato de medida produz nas probabilidades associadas aos possíveis resultados finais. Em particular, através da análise de uma situação simples - um sistema de 2 níveis acoplado a um banho térmico - foram obtidos alguns resultados interessantes, mostrados

nos capítulos 6 e 7, não apenas do ponto de vista fundamental mas, também em aplicações envolvendo informação quântica.

O capítulo 1 faz uma breve exposição sobre a origem do problema da medida na teoria quântica, abordando o surgimento da função de onda, sua interpretação probabilística por Born e Dirac, a análise de von Neumann sobre o processo de medida e as interpretações convencionais da teoria.

O capítulo 2 é uma expansão direta do primeiro capítulo. Na década de 1970, através de estudos do formalismo de semi-grupos dinâmicos quânticos, foi apresentada a equação de Lindblad que pode ser utilizada para descrever processos irreversíveis na mecânica quântica, da dissipação e decoerência às medidas, das quais esta tese se ocupa. Trata-se de uma equação para o operador densidade que se assemelha à já conhecida equação de Liouville-von Neumann onde, ao liouvilliano, que trata das evoluções unitárias, é acrescentado um termo referente a evoluções estocásticas - o lindbladiano. Neste capítulo, considerando um sistema principal S (que deve obedecer a apenas uma hipótese a ser explicada) e um outro sistema tratado como um banho térmico à temperatura nula, partindo da equação-mestra na aproximação de Born-Markov, a equação de Lindblad é obtida. Essa dedução simples permite a familiarização com a equação e uma melhor compreensão do significado físico dos lindblads que, aqui, serão utilizados para descrever a medida de tempo finito.

O capítulo 3 trata da resolução da equação de Lindblad para a medida de tempo finito sobre um sistema de 2 níveis em duas situações distintas. São obtidas soluções analíticas exatas vitais para o capítulo 5.

O capítulo 4 é dedicado aos operadores de Nakajima-Zwanzig, que fatoram o operador densidade em uma parte referente ao sistema principal e outra ao sistema secundário, sendo que este último é colocado no instante inicial. Esse conceito será extremamente importante nas deduções do capítulo seguinte.

O capítulo 5 mostra o primeiro resultado inédito deste trabalho, onde a interação markoviana entre o sistema principal S e o aparato de medida - representado pelo lindbladiano - é introduzido um ambiente não-markoviano B . Através da álgebra de super-operadores e dos operadores de Nakajima-Zwanzig - vistos no capítulo anterior - uma equação-mestra final é obtida, onde as contribuições referentes a cada sistema S e B são facilmente fatoráveis. Tal equação é válida no limite de acoplamento fraco entre o sistema principal e o ambiente.

O capítulo 6 trata da resolução da equação obtida no capítulo anterior, utilizando as soluções

analíticas do capítulo 3 para o sistema S . São analisados os casos em que o observável medido comuta ou não com a hamiltoniana de interação sistema-ambiente. As soluções obtidas são analíticas e válidas para o limite de acoplamento fraco sistema-ambiente.

O capítulo 7 compara os resultados obtidos no capítulo 6, analíticos e válidos para acoplamento fraco sistema-ambiente, com resultados numéricos, baseados no método do operador-partido, válidos para acoplamentos arbitrários sistema-ambiente, cuja obtenção fez parte do projeto de mestrado do aluno Leonardo Andreta de Castro. São explorados os limites de acoplamento em que as duas soluções concordam e se, qualitativamente, as conclusões obtidas no capítulo 6 são também válidas para acoplamento forte.

Pela síntese anterior, fica claro que os quatro primeiros capítulos são dedicados meramente a esclarecer e deixar a par o leitor dos objetivos desta tese, sem resultados novos. Aqueles já familiarizados com o problema da medida e a equação de Lindblad podem tranquilamente pular esses capítulos, excetuando-se as soluções analíticas obtidas no capítulo 3, que serão vitais nas aplicações dos capítulos 6 e 7.

Capítulo 1 O problema da medida na mecânica quântica

“A compreensão correta de uma coisa e a má compreensão dessa mesma coisa não se excluem completamente.”

Franz Kafka, *O processo*

“Que espécie de libertação seria essa, abandonar um absurdo que é lógico e coerente para abraçar outro que é ilógico e incoerente?”

James Joyce, *Retrato do artista quando jovem*

1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é, de maneira breve, apresentar o problema da medida na teoria quântica com origens e precedentes rumo à visão adotada nesta tese. É exatamente na extração de informações a partir da função de onda para explicar os registros obtidos no laboratório que residem as maiores controvérsias dessa teoria que originou uma das revoluções científicas - talvez a maior - do século XX. Nesse processo, segundo a interpretação convencional, uma entidade que representa o sistema sob análise - a função de onda - e evolui segundo uma lei determinística - a equação de Schrödinger - não fornece resultados precisos para um único experimento, apenas probabilidades referentes a um conjunto de experimentos.

O formalismo de análise de medidas segundo a equação de Lindblad considera que toda a informação possível de ser obtida ainda está contida no operador densidade e possui um caráter

intrinsecamente probabilístico, em pleno acordo, nesse sentido, com as interpretações convencionais (1–5). Assim, o caminho seguido aqui para o estabelecimento do problema começa com Louis de Broglie e Albert Einstein, que por meio de seus trabalhos explorando direta ou indiretamente a dualidade onda-partícula na matéria (6–9), influenciaram Erwin Schrödinger, que estudava estatística de gases (sendo um entusiasta do trabalho de Boltzmann) e os trabalhos de William Rowan Hamilton sobre a analogia entre mecânica e óptica geométrica (que originaram a formulação da mecânica clássica de Hamilton-Jacobi) (2, 10, 11). A princípio, a função de onda foi introduzida sem motivações físicas por Schrödinger em seus famosos trabalhos em mecânica ondulatória (12), embora logo tentasse interpretá-la de uma maneira causal e realística. Aplicando a teoria de Schrödinger ao problema do espalhamento, Born (13, 14) apresentou a interpretação probabilística, que se consolidaria - convém mencionar também a contribuição de Paul Dirac (15). Ocorreram vários debates envolvendo, entre outros, Bohr, Heisenberg e Einstein sobre o caráter definitivo da mecânica quântica e o problema da medida (2, 3). O primeiro texto em que a teoria seria apresentada de um ponto de vista formal em todos os seus aspectos foi o de von Neumann (1), que se tornaria a principal referência para a atual interpretação convencional.

Mesmo ao tratar as origens da interpretação convencional foi feito aqui um esforço para omitir certos detalhes e desdobramentos que não se aplicam diretamente ao trabalho desta tese. Dessa forma, foram omitidos os famosos já citados debates entre Einstein e Bohr (2, 3, 13) ou mesmo o problema do caráter (in)completo da mecânica quântica, iniciado por Einstein, Podolsky e Rosen em seu famoso artigo (16) com posteriores desdobramentos (3, 13, 17) até chegar à análise de Bell (13). Entretanto, detalhes históricos poderão ser encontrados nas referências apontadas no decorrer do texto, principalmente nos livros de Max Jammer (2, 3) e nos artigos publicados em revistas de história da ciência tais como *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*.

Não serão abordadas aqui outras interpretações que, de uma maneira ou de outra, tentam eliminar ou restringir o caráter probabilístico ou conciliar a teoria com a física clássica, tais como, por exemplo, as de David Bohm (18–20), Alfred Landè (21–25) ou de Everett (26–29).

1.2 Mecânica quântica: (4+2) postulados

A mecânica quântica pode ser formulada em termos de postulados, cujo número pode variar conforme o autor (3, 30), mas devem sempre responder às questões básicas relacionadas a qualquer teoria física: como descrever o estado do sistema matematicamente, como extrair informações desse estado relativas ao resultado de medidas e como determinar a evolução do sistema temporalmente, dada uma condição inicial. Seguindo um caminho parecido com o de (3), que se baseia no estabelecimento prévio (1) de conceitos como espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, operador auto-adjunto, vetor (e função de onda) e equação de Schrödinger, os postulados podem ser escritos como:

1. A cada sistema físico corresponde um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ cujos vetores (vetores de estado, funções de onda) ψ descrevem completamente o estado do sistema.
2. A cada quantidade física mensurável $\mathcal{A}$ corresponde um único operador auto-adjunto $\hat{A}$, chamado de observável, atuando em $\mathcal{H}$.
3. A evolução temporal de ψ , para uma dada condição inicial, *quando nenhuma medida é realizada*, é governada pela equação de Schrödinger.
4. O resultado de uma medida da quantidade $\mathcal{A}$ sobre o sistema físico descrito pelo estado ψ só poderá ser um dos autovalores a do respectivo observável $\hat{A}$.
5. A expansão ψ na base de autoestados de $\hat{A}$ permite obter a probabilidade de o resultado de uma medida da quantidade $\mathcal{A}$ ser a : tal probabilidade será igual à soma dos quadrados dos módulos de todos os coeficientes da expansão que acompanham os autoestados de $\hat{A}$ referentes ao autovalor a .
6. O estado do sistema, após uma medida da quantidade $\mathcal{A}$ fornecer como resultado a , será igual à parcela normalizada formada por todos os autoestados de $\hat{A}$ referentes ao autovalor a na expansão de ψ na base de autoestados de $\hat{A}$.

Dos postulados acima, é possível notar que os quatro primeiros não oferecem grandes dificuldades filosóficas, apenas constituem uma formalização matemática dos componentes físicos envolvidos, informam a equação que rege a evolução do sistema *para a situação em que nenhuma medida*

é realizada sobre o mesmo e fornecem uma lista de resultados numéricos possíveis *quando uma medida é efetuada*. Os dois últimos, entretanto, carregam todo o conteúdo “polêmico” da teoria, já que o postulado (5) não fornece uma regra para a obtenção do resultado de uma medida (apenas a probabilidade de o resultado ser obtido) e o postulado (6) envolve uma transição brusca entre os estados anterior e posterior à medida, transição esta denominada (utilizando uma terminologia mais usual para o *estado*) de *colapso da função de onda* onde, de uma superposição geral envolvendo a princípio todos os autoestados do observável, o sistema é levado a uma superposição envolvendo apenas os autoestados relativos ao autovalor medido.

Os próximos itens explicarão como que a formulação da mecânica quântica sintetizada pelos seis postulados foi alcançada, do aparecimento do conceito de função de onda ao modelo de medida convencionalmente aceito, devido principalmente a von Neumann (1).

1.3 O surgimento da função de onda: de Broglie, Einstein e Schrödinger

Os raios-x, descobertos por Wilhelm Conrad Röntgen (que foi o primeiro Nobel em física - 1901 (31)), apresentavam alguns aspectos inusitados (ou até mesmo misteriosos - daí sua denominação) para os pesquisadores da época (incluindo seu descobridor): eram emitidos junto com radiações α e β , reconhecidamente corpusculares, e considerações energéticas (William Henry Bragg, em um de seus artigos, diz “*o raio-x não pode dispersar sua energia conforme avança, ou seja, ele é um corpúsculo*” (2)) levavam à crença de que os raios-x eram partículas; entretanto, foram realizados experimentos de difração (entre os quais os de William Henry e William Lawrence Bragg) que sugeriam um caráter ondulatório. William Henry Bragg diria (2):

“O problema consiste, a meu ver, não em decidir entre duas teorias de raios-x mas em encontrar, como eu já disse anteriormente, uma teoria que possua a capacidade de englobar ambos os aspectos [corpuscular e ondulatório].”

Entre os experimentais que trabalhavam com raios-x, estava Maurice de Broglie, irmão mais velho de Louis-Victor de Broglie. As discussões entre os dois motivaram o trabalho de Louis, que tinha formação em história, originando aquela que pode ser considerada “*sem exageros, a mais*

influyente e importante tese de doutorado da história da física” (6). Sua fórmula relacionando o *momentum* p de uma partícula, seu comprimento de onda λ e a constante de Planck h ,

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (1.1)$$

encontrou uma justificativa nos experimentos de difração de elétrons e permitia explicar a teoria de Bohr das órbitas eletrônicas: quando o comprimento da órbita é igual a um número inteiro do comprimento de onda do elétron, a órbita é estável. Para de Broglie, a onda guiava a trajetória do elétron, sem considerações probabilísticas. Em sua banca de doutorado, em 1924, estava Paul Langevin que participou no mesmo ano do quarto Congresso de Solvay, encontrando Einstein e expondo-lhe tais idéias (2).

Em 1905 Einstein publicara seu artigo *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* (“Sobre um ponto de vista heurístico para a emissão e transformação da luz”, tradução para o inglês em (7)) em *Annalen der Physik* volume 17 de 1905, propondo uma nova teoria para o efeito fotoelétrico - que acabaria lhe rendendo o Nobel em 1921 (32) - através da aplicação das leis relativas à radiação de corpo negro para a radiação em geral, levando ao conceito do fóton. Mais precisamente:

“Me parece que as observações associadas com a radiação de corpo negro, fluorescência, produção de raios catódicos pela luz ultravioleta e outros fenômenos relacionados à emissão ou transformação da luz podem ser melhor compreendidos se assumirmos que a energia da luz é distribuída em todo o espaço de maneira descontínua. De acordo com o pressuposto a ser considerado aqui, a energia de um raio de luz originando-se de uma fonte puntual não é continuamente distribuída sobre o espaço, mas consiste de um número finito de quanta de energia que são pontos localizados espacialmente, movem-se sem se dividir e podem ser produzidos e absorvidos apenas em unidades completas.” (7)

No artigo *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases - Zweite Abhandlung* (“Teoria quântica do gás ideal monoatômico - segundo tratado”, tradução para o português em (9)) dos *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* volume I de 1925, Einstein propõe a que se tornaria conhecida como “condensação de Bose-Einstein” logo na seção 1. Na seção 8, entretanto, o seguinte problema é analisado: Einstein imagina um gás contido em um volume V que se comunica com outro gás de mesma natureza e volume infinito, separados por

uma parede que permite a passagem apenas de moléculas com energia cinética pertencente a uma região infinitesimal ΔE , sendo todas as moléculas de outras energias cinéticas refletidas. Ele se pergunta, então, qual a flutuação no número de moléculas pertencentes a esse intervalo de energia. Ao deduzir uma fórmula para o quadrado do valor médio para flutuações no número de moléculas, surge um termo que, nas suas palavras (9):

“[O termo] *corresponde, no contexto da radiação, a flutuações de interferência. Pode-se interpretá-lo de uma certa maneira também no gás em se associando a ele, de maneira adequada, uma radiação e calculando-se as flutuações na interferência a ela associadas. (...) A maneira pela qual a uma partícula material ou a um sistema de partículas materiais podemos associar um campo ondulatório (escalar) foi-nos mostrada em um trabalho bastante notável do senhor L. de Broglie.*”

A referência é a própria tese de doutorado de de Broglie. Assim, além de associar à radiação um caráter corpuscular em 1905, agora Einstein faz o caminho inverso e associa, às partículas de um gás, um caráter ondulatório.

O grande desenvolvimento no problema da dualidade onda-partícula seria dado por Erwin Schrödinger, que era um entusiasta do trabalho de Ludwig Boltzmann sobre estatística de gases (ele descreveria a teoria de Boltzmann como “*meu primeiro amor na ciência; nenhuma outra teoria teve tanto impacto sobre mim, ou algum dia terá*” (11)) e também estudava a teoria de William Rowan Hamilton sobre a analogia entre o movimento de um ponto de massa sob a ação de um potencial $V(\vec{r})$ e a propagação de raios luminosos num meio com índice de refração $n(\vec{r})$ no limite da óptica geométrica, que levaria à formulação da mecânica (clássica) de Hamilton-Jacobi (referente a Carl Gustav Jacob Jacobi) (2, 10, 11, 33). Hamilton mostrou que tanto a óptica quanto a mecânica obedecem o mesmo princípio variacional para uma função característica $S(q_k, E)$ através da equação

$$H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = E, \quad (1.2)$$

onde q_k são coordenadas dos pontos finais das trajetórias, E a energia total e H o hamiltoniano - energia expressa como função das posições q_k e dos momenta p_k . A função S é denominada de *ação* e está relacionada aos momenta por

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}. \quad (1.3)$$

O formalismo de Hamilton era tratado somente como uma analogia formal, destituída de significado físico mais profundo (2). Entretanto, Schrödinger estava convencido de que tal analogia representava não somente uma teoria matemática robusta, mas algo real na natureza. Em seus estudos de mecânica estatística, ele tomou contato com o artigo supracitado de Einstein de 1925 e, conseqüentemente, com a teoria de de Broglie pela referência do artigo.

Lembrando-se de seus próprios estudos na teoria de Hamilton, Schrödinger utilizou a analogia óptico-mecânica como um argumento heurístico para a derivação de uma equação de onda para a matéria. No seu artigo *Quantisierung als Eigenwertproblem I* (“Quantização como um problema de autovalores I”, tradução para o inglês em (12)), publicado em *Annalen der Physik* volume 79 em 1926, partindo da equação (1.2) para uma única partícula

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E \quad (1.4)$$

por praticidade, Schrödinger introduz uma nova variável ψ relacionada à ação por

$$S = K \ln \psi \quad (1.5)$$

onde, a princípio, não atribui nenhuma interpretação física, apenas o pré-requisito de que $\psi \in \mathbb{R}$; K é uma constante a ser determinada. Essa é a *função de onda* propriamente dita. Mais adiante, ele diz (12):

“Obviamente, mostra-se natural relacionar a função ψ a algum processo oscilatório no átomo, que poderia estar mais próximo da realidade do que as órbitas eletrônicas, cuja existência tem sido muito questionada nos últimos tempos.”

E complementa:

“Podemos tecer algumas observações a mais sobre a representação da vibração. Acima de tudo, gostaria de mencionar que fui levado a tais deliberações, em primeiro lugar, pelos artigos sugestivos de M. Louis de Broglie e pelas reflexões acerca de suas ‘ondas de fase’, as quais ele mostrou estarem sempre relacionadas por um número inteiro ao período ou semi-período do elétron.”

Nesse artigo, ele apresenta a *equação de Schrödinger independente do tempo*, encontrando que $K = \frac{h}{2\pi}$. Já em *Quantisierung als Eigenwertproblem IV* (“Quantização como um problema de autovalores IV”, tradução para o inglês em (12)), publicado no mesmo ano, no volume 81 do

mesmo periódico, é apresentada a *equação de Schrödinger dependente do tempo* e o pré-requisito de que $\psi \in \mathbb{R}$ é colocado de lado, sendo admitidas soluções complexas.

A equação de Schrödinger permitia calcular os valores das energias que concordavam com as situações experimentais. Surge o problema, então, da interpretação da função de onda ψ . No artigo *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen* (“Sobre a relação entre as mecânicas quânticas de Heisenberg, Born, Jordan e a minha”, tradução para o inglês em (12)), publicado em *Annalen der Physik* volume 79 em 1926, Schrödinger argumenta a necessidade de atribuir um significado eletromagnético a ψ tendo em vista que o elétron, em transições, emite ondas eletromagnéticas cujas frequências são iguais à diferença entre dois autovalores dividida pela constante de Planck h e praticamente postula que a densidade de carga elétrica seria dada pela parte real de $\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$. Já no artigo em que apresenta a equação dependente do tempo, na última seção, Schrödinger demonstra que $\psi\psi^*$ obedece a uma equação de continuidade (que hoje é conhecida como *continuidade da corrente de probabilidade* (30)) e propõe que $|\psi|^2$, multiplicada pela carga elétrica, fornece a *densidade de carga*.

Para Schrödinger, a função de onda era uma entidade tão real quanto as ondas eletromagnéticas descritas pelas equações de Maxwell (3). Entretanto, essa interpretação realista enfrentou alguns obstáculos, entre eles: o fato de ψ ser uma entidade complexa e depender do conjunto de observáveis escolhido para sua representação (o exemplo mais evidente, na época, era no caso das representações de posição e *momentum*). O impasse foi solucionado - pelo menos até o presente momento - pela abordagem probabilística.

1.4 A interpretação probabilística da função de onda

1.4.1 O trabalho de Born

A primeira comunicação de Born da interpretação estatística de ψ ocorreu em seu artigo *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge* publicado em *Zeitschrift für Physik*, volume 37 de 1926 (ZP37, “Sobre a mecânica quântica de colisões” - tradução para o inglês disponível em (13)),

um artigo de poucas páginas e de argumento principalmente qualitativo. Born expandiu essas idéias no artigo *Quantenmechanik der Stossvorgänge* no mesmo periódico no volume 38 de 1926 (ZP38, “Mecânica quântica de colisões” - tradução para o inglês em (14)). Aliás, a expressão “mecânica quântica” apareceu pela primeira vez na história em seu artigo *Über Quantenmechanik* de *Zeitschrift für Physik*, volume 26 de 1924 (ZP26, “Mecânica quântica” - tradução para o inglês em (34)).

Quando Born assumiu seu cargo na Universidade de Göttingen, em 1921, estabeleceu um programa de pesquisa na teoria quântica que envolvia a seleção dos problemas físicos mais simples no assunto para os quais existisse o maior número possível de dados empíricos, para tentar elaborar uma teoria físico-matemática sobre eles (35). Seu departamento era próximo do laboratório de James Franck e eles freqüentemente trocavam informações de seus trabalhos (2). Franck estava preocupado em analisar colisões eletrônicas em gases (ele receberia o Nobel em 1925 junto com Gustav Hertz “*por suas descobertas relativas às leis que regem o impacto de um elétron sobre o átomo*” (36)) e isso, por sua vez, motivou Born a analisar quanticamente problemas de espalhamento de partículas. Maiores detalhes da colaboração entre Born e Franck podem ser encontrados na referência (35). No início, Born tentou abordar o problema utilizando a formulação matricial de Heisenberg mas, como ele mesmo admite em seu artigo ZP37,

“Das diferentes formas [da teoria quântica], somente a versão de Schrödinger se mostrou adequada para analisar esse processo e é exatamente por essa razão que eu a tratarei como a mais profunda formulação das leis quânticas.”

A equivalência entre as formulações matricial (Heisenberg) e ondulatória (Schrödinger) foi demonstrada em 1925 naquele que ficou conhecido como “artigo de três autores” (*Drei Männer Arbeit*), *Zur Quantenmechanik II* (“Sobre mecânica quântica II” - tradução para o inglês em (34)), publicado em *Zeitschrift für Physik*, volume 35 de 1926 de autoria de Max Born, Werner Heisenberg e Pascual Jordan que, por sua vez, era uma continuação do artigo de Born e Jordan *Zur Quantenmechanik* (ZP34, “Sobre mecânica quântica” - tradução para o inglês, exceto do capítulo 4, em (34) e guia para leitura em (37)), da mesma publicação, volume 34 de 1925.

O artigo ZP37 consiste na análise assintótica do espalhamento elástico de um elétron por um núcleo atômico. Aqui, a idéia de seu artigo será exposta segundo a versão mais geral e a notação de (30), desconsiderando *spin* e estruturas internas para o caso de um feixe de partículas incidindo sobre um alvo. Sejam $V(\vec{r})$ o potencial (centrado no próprio alvo) de interação entre

o feixe e o alvo, onde $\vec{r}$ é o vetor distância entre ambos, z a direção de propagação do feixe e F_i seu número de partículas, por unidade de tempo, que atravessam uma superfície unitária (longe do alvo) perpendicular a $\hat{z}$. Se um detector for colocado longe da região de influência do potencial, em uma direção caracterizada pelos ângulos polares (θ, φ) e com uma área de detecção abrangendo o ângulo sólido $d\Omega$, o número dn de partículas espalhadas por unidade de tempo contadas será dado por

$$dn = F_i \sigma(\theta, \varphi) d\Omega \quad (1.6)$$

onde $\sigma(\theta, \varphi)$ é a *seção transversal diferencial de espalhamento* e possui a dimensão de área.

Inicialmente, a partícula não sofre os efeitos da interação com o alvo (o potencial é localizado) e será representada por uma onda plana e^{ikz} . Na região de predomínio do potencial, nas proximidades do alvo, a função de onda sofrerá modificações que não serão tratadas aqui. Quando o feixe estiver bem afastado do alvo, ele terá novamente uma forma não muito complicada: será composto por uma parcela referente à função de onda inicial (termo e^{ikz}) e uma parcela contendo a contribuição do espalhamento.

Considerando que o espalhamento não seja isotrópico, haverá uma dependência com a orientação (θ, φ) . Qualquer que seja a direção, sua dependência radial terá a forma $\frac{e^{ikr}}{r}$, ou seja, terá a mesma energia da onda incidente mas diminuirá em intensidade conforme a distância com o alvo aumentar. Dessa forma, para uma detecção muito distante do alvo, ou seja, longe da região de predomínio do potencial $V(\vec{r})$, a função de onda resultante, $\psi_{res}(r)$, deverá ter a forma:

$$\psi_{res}(r) = e^{ikz} + f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.7)$$

onde $f_k(\theta, \varphi)$ é a *amplitude de espalhamento*, que dependerá do potencial $V(\vec{r})$ e está relacionada com a seção transversal diferencial de espalhamento segundo (os cálculos podem ser vistos em detalhe em (30))

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f_k(\theta, \varphi)|^2 \quad (1.8)$$

fornecendo, para dn ,

$$dn = F_i |f_k(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (1.9)$$

Analisando essa expressão, o número de partículas detectadas no ângulo sólido por unidade de tempo dn terá uma dependência angular com o módulo ao quadrado da amplitude de espalhamento. Entretanto, $f_k(\theta, \varphi)$ aparece em $\psi_{res}(r)$ na contribuição referente ao espalhamento. Chamando essa contribuição de ψ_{esp} ,

$$\psi_{esp} = f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.10)$$

então $|f_k(\theta, \varphi)|^2$ está relacionado com $|\psi_{esp}|^2$.

A interpretação probabilística do módulo ao quadrado da função de onda, ou seja, de $|\psi|^2$, foi sugerida a Born por um raciocínio totalmente equivalente. Parafraseando-o de seu artigo ZP37, *traduzindo esse argumento em termos de partículas, apenas uma interpretação é possível: $f_k(\theta, \varphi)$ (ou antes, sob considerações mais cuidadosas, $|f_k(\theta, \varphi)|^2$) fornece a probabilidade de a partícula, originada da direção z , ser detectada na direção designada pela orientação (θ, φ)* . Ainda, segundo as próprias palavras de Born no mesmo artigo:

“A mecânica quântica de Schrödinger, portanto, fornece uma resposta definitiva para a questão do efeito da colisão, mas não do ponto de vista causal. Não podemos responder a questão ‘qual é o estado após a colisão’, mas apenas ‘quão provável será um determinado estado após a colisão’ (onde, naturalmente, as condições quânticas relativas à energia devem ser respeitadas)”.

Segundo Max Jammer (2), a afirmação de que $|\psi|^2$, e não ψ , fornece a probabilidade de detecção foi adicionada por Born como nota de rodapé quando estava revisando a prova final do artigo.

Em seu trabalho mais detalhado ZP38 ele diz, na introdução:

“O movimento das partículas segue leis probabilísticas, mas a probabilidade em si se propaga de acordo com uma lei causal”.

E, na conclusão, completa:

“...a teoria proposta não permite a determinação causal de cada evento individualmente.”

Se, em ZP37, através de um argumento em grande parte qualitativo, Born já abre caminho para a interpretação probabilística de $|\psi|^2$, em ZP38 - um trabalho bem mais extenso - ele dá um passo além e atribui, ao quadrado do módulo de cada coeficiente da expansão da função de onda em seus autoestados, a probabilidade de o resultado referente a cada autoestado ser medido. Ou seja,

Born agora atribui a interpretação probabilística não a transições, mas a estados estacionários (houve, nesse caso, grande influência de Wolfgang Pauli como pode ser verificado em (38)).

Em sua introdução, Born cita duas interpretações, até aquele momento, da própria teoria quântica:

- Pela forma matricial de Heisenberg, a representação *exata* dos processos no espaço e no tempo é impossível;
- Segundo Schrödinger, influenciado por de Broglie, as funções de onda utilizadas para descrever fenômenos de escala atômica são tão reais quanto as ondas luminosas.

Nenhuma das duas, diz Born, o satisfaz e ele propõe em seguida sua própria interpretação.

Partindo da equação de Schrödinger estacionária para um sistema discreto não-degenerado

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (1.11)$$

ele considera as autofunções normalizadas ψ_n do hamiltoniano tais que

$$\int_q dq \psi_n(q) \psi_m^*(q) = \delta_{nm} . \quad (1.12)$$

Qualquer função $\psi(q)$ pode ser expandida em termos dessas autofunções $\psi_n(q)$ com coeficientes c_n :

$$\psi(q) = \sum_n c_n \psi_n(q) . \quad (1.13)$$

Sua intenção é obter, partindo de (1.13), uma relação probabilística para as frequências de ocorrência dos possíveis resultados de medidas sobre um *conjunto de partículas idênticas e desacopladas* (não-interagentes). A relação de normalização

$$\int_q dq |\psi_n(q)|^2 = \sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (1.14)$$

permite tratar $|c_n|^2$ como a probabilidade associada ao autoestado n e o resultado da soma como 1 denota apenas a conservação das probabilidades.

Para justificar essa interpretação, Born introduz, em três dimensões, o potencial $U(q)$ e a equação (1.11) assume a forma expandida (adaptando a notação)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (E - U) \psi = 0 \quad (1.15)$$

onde m é a massa da partícula. Essa equação pode ser escrita em termos das autofunções ψ_n e seus respectivos autovalores E_n , fornecendo

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_n + (E_n - U) \psi_n = 0. \quad (1.16)$$

Agora, multiplicando por ψ_m^* e integrando sobre todo o volume dq é obtida

$$\int_q \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \psi_m^* \nabla^2 \psi_n + (E_n - U) \psi_m^* \psi_n \right\} dq = 0. \quad (1.17)$$

Utilizando no primeiro termo uma das *fórmulas de Green* (39, 40),

$$\int_q \psi_m^* \nabla^2 \psi_n dq = \int_S \psi_m^* \vec{\nabla} \psi_n \cdot d\vec{S} - \int_q \vec{\nabla} \psi_m^* \cdot \vec{\nabla} \psi_n dq \quad (1.18)$$

onde S é uma superfície que envolve todo o volume em consideração. Considerando que as funções de onda se anulam no infinito, o termo da integral de superfície se anulará e, ao final,

$$\int_q \psi_m^* \nabla^2 \psi_n dq = - \int_q \vec{\nabla} \psi_m^* \cdot \vec{\nabla} \psi_n dq. \quad (1.19)$$

Substituindo (1.19) em (1.17), é obtida a expressão

$$\int_q \left\{ - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi_m^* \cdot \vec{\nabla} \psi_n + (E_n - U) \psi_m^* \psi_n \right\} dq = 0 \quad (1.20)$$

ou, desenvolvendo-a utilizando (1.12),

$$\int_q \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi_m^* \cdot \vec{\nabla} \psi_n + U \psi_m^* \psi_n \right\} dq = E_n \int_q \psi_m^* \psi_n dq = E_n \delta_{nm}. \quad (1.21)$$

Como, no interior da integral à esquerda, se encontram a contribuição do hamiltoniano e do potencial, segundo (1.21) *cada nível de energia E_n pode ser tratado como a integral espacial da densidade de energia das autofunções.*

Se, agora, para qualquer função ψ for escrita a integral correspondente em (1.21),

$$\int_q \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left| \vec{\nabla} \psi \right|^2 + U |\psi|^2 \right\} dq = E \quad (1.22)$$

a substituição de (1.13) fornecerá:

$$E = \sum_n |c_n|^2 E_n. \quad (1.23)$$

A primeira conclusão importante, que decorre de (1.21), é que cada nível E_n está relacionado à densidade de energia das autofunções. Em (1.23), a soma de todos os níveis, ponderada pelos coeficientes $|c_n|^2$, fornece a energia total. Logo, os $|c_n|^2$ fornecem a probabilidade relacionada à ocorrência do respectivo nível E_n .

1.4.2 O trabalho de Dirac

Desde 1923 Paul Dirac atuava como pesquisador em Cambridge, sob supervisão de R. H. Fowler. Em julho de 1925 Heisenberg ministrou um seminário em Cambridge sobre seu trabalho em mecânica quântica. Fowler demonstrou interesse no assunto, pediu maiores detalhes para Heisenberg e repassou os papéis que lhe foram enviados para Dirac com a pergunta: “*O que você acha disso?*” Dirac estava de férias em Bristol, sua região natal, e declararia mais tarde: “*... foram necessários dez dias ou mais para que eu realmente assimilasse aquelas idéias. Então, subitamente, me convenci de que elas poderiam fornecer a chave para a compreensão do átomo*”. Essa história é narrada na referência (41).

Ainda segundo (41), os trabalhos sobre mecânica quântica eram conduzidos em Göttingen por Born, Heisenberg, Kramers e Pauli, em freqüente correspondência com Bohr em Copenhague. A Inglaterra pouco havia contribuído para a pesquisa teórica em mecânica quântica e Dirac, até 1925, nada havia publicado a respeito. Quando seu primeiro artigo no assunto alcançou a Alemanha, houve um grande alvoroço e Born declararia posteriormente: “[o trabalho de Dirac] foi uma das maiores surpresas de minha vida científica, pois o nome Dirac era completamente desconhecido para mim”.

Os artigos do grupo de Göttingen, além de serem originalmente publicados em língua alemã com raras traduções para o inglês (exceções para as coletâneas (13, 14, 34)), possuem muitas vezes texto e cálculos obscuros, em parte porque conceitos matemáticos hoje elementares - como teoria de matrizes - não eram familiares aos autores. Por exemplo, a referência (37) é um guia para a compreensão do artigo ZP34, enquanto (42) auxilia o entendimento do artigo de Heisenberg *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, publicado em *Zeitschrift für Physik*, volume 33 de 1925 (“Reinterpretação quântica sobre as relações mecânicas e cinemáticas” - tradução para o inglês em (14, 34)).

Por outro lado, os trabalhos originais de Dirac, publicados nas *Proceedings of the Royal Society of London* são extremamente claros ainda hoje, pois neles Dirac introduz convenções e notações atualmente consagradas:

- a introdução dos *parêntesis de Poisson* (43);
- a distribuição *delta* (44);
- a notação de *bras* e *kets* (44).

No mesmo artigo em que apresenta aquela que ficaria conhecida como *estatística de Fermi-Dirac* (15), na seção 5 são tratadas perturbações dependentes do tempo sobre um sistema atômico. A solução ψ do problema não-perturbado é escrita na forma (notação original)

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n \quad (1.24)$$

onde c_n são constantes e as funções ψ_n são escolhidas para que cada uma esteja associada a cada estado estacionário do átomo (autoestados). Para o problema perturbado, Dirac encontra as condições necessárias para que as soluções possam ser expressas da forma

$$\psi = \sum_n a_n(t) \psi_n. \quad (1.25)$$

Substituindo (1.25) na equação de Schrödinger dependente do tempo, Dirac encontra a equação diferencial para os $a_n(t)$ em termos de parâmetros relativos à perturbação. Em suas próprias palavras (15),

“[a solução (1.24)] *representa um conjunto* [no original, *assembly*] *de átomos não-perturbados onde* $|c_n|^2$ *é o número de átomos no* n -*ésimo estado, e iremos assumir que*

(1.25) representa da mesma forma um conjunto [assembly] de átomos perturbados, $|a_n(t)|^2$ sendo o número no n -ésimo estado em qualquer tempo t . Nós consideramos $|a_n|^2$ em lugar de qualquer outra função de a_n porque, como mostraremos logo a seguir, isso faz com que o número total de átomos permaneça constante.”

De fato, Dirac encontra que o número de átomos no n -ésimo estado é $N_n = a_n a_n^*$ e demonstra que $\dot{N} = \sum_n \dot{N}_n = 0$.

Assim, em uma abordagem independente daquela utilizada por Born, Dirac apresenta uma interpretação semelhante para os coeficientes da expansão da função de onda em seus autoestados. Em ambas, é necessário considerar um sistema com vários constituintes (*ensemble*), embora Dirac não utilize explicitamente o termo *probabilidade*.

1.5 O trabalho de von Neumann

Em seu livro (1), von Neumann abordou desde conceitos vitais - e hoje elementares - para as mais comuns aplicações da mecânica quântica, como a função de onda e o espaço de Hilbert, até problemas mais fundamentais como o significado físico da função de onda e como a informação experimental pode ser dela extraída. Ele se mostra de acordo com a interpretação estatística de Born da função de onda:

“Embora possamos acreditar que, após termos especificado [a função de onda] conheceremos o estado completamente, somente afirmações estatísticas poderão ser feitas sobre os valores das quantidades físicas envolvidas”. (página 207)

Essa interpretação somente se torna compatível com o determinismo clássico se forem introduzidas outras entidades para descrever o sistema físico, que ele chama de *parâmetros ocultos* ou *coordenadas ocultas*, mas tal hipótese é por ele rechaçada.

1.5.1 Lei dos números grandes e Causalidade

Duas questões importantes abordadas por von Neumann ao longo dos quatro primeiros capítulos de seu livro são: a causalidade na natureza e as formas como o caráter descontínuo das propriedades dos sistemas físicos se manifestam no mundo macroscópico.

O termo *causalidade* é utilizado no sentido específico de que uma causa produzirá um efeito perfeitamente conhecido, no sentido da física clássica. A interpretação estatística de Born, portanto, faz da teoria quântica uma teoria não-causal, pois uma causa produz um efeito que não pode ser determinado com certeza.

Para von Neumann, o que o ser humano percebe cotidianamente é uma média sobre inúmeros processos individuais microscópicos, que acaba ocultando, no mundo macroscópico, o caráter quântico da natureza. Essa é sua *Lei dos números grandes*, citada - sem explicações precisas de seu significado - logo no capítulo I, “Introductory considerations”:

“... a opinião geral dos teóricos é de que o princípio da continuidade (‘natura non facit saltus’), dominante no mundo macroscópico palpável, é o resultado da média sobre os processos em um mundo de natureza descontínua. Essa média faz com que o homem, em geral, perceba a soma dos vários milhões de processos elementares simultâneos de tal forma que essa lei dos números grandes ofusca completamente a natureza real dos processos individuais”. (página 14)

Interessante notar, entretanto, que embora a causalidade macroscópica possa ser atribuída à Lei dos números grandes, essa lei não implica, necessariamente, na causalidade dos fenômenos elementares, como ele explica no capítulo IV. Objetos macroscópicos idênticos exibem comportamento idêntico, embora as coordenadas de seus átomos constituintes nunca coincidam exatamente: a observação macroscópica faz uma média sobre elas (esse argumento falha em casos como o movimento browniano) tornando irrelevantes os desvios das posições médias. Nesse caso, a única característica importante é essa média das coordenadas, independentemente se os átomos seguem leis causais ou não.

A causalidade pode somente ser testada por uma teoria de processos atômicos, e até o momento a única teoria capaz disso é a mecânica quântica que, entretanto, contraria a causalidade clássica justamente no processo de medida.

1.5.2 O processo de medida

Para von Neumann, a função de onda é apenas parte de um arcabouço físico-matemático e não uma entidade que represente um aspecto real da natureza.

“Os estados são meramente uma construção teórica, apenas os resultados das medidas são verificáveis e o problema da física é fornecer relações entre os resultados de medidas no passado e no futuro”. (página 337)

Existem duas formas pelas quais a função de onda pode evoluir:

- **Processo 1:** Redução, quando uma medida é feita;
- **Processo 2:** Evolução unitária, através da equação de Schrödinger, entre as medidas.

O primeiro processo se distingue do segundo por violar a causalidade clássica e, necessariamente, envolve uma interação entre o sistema sob observação e o medidor. von Neumann reconhece que a pergunta “como a redução ocorre?” permanece sem resposta, mas ele procura explicar “o que ocorre na redução”.

Para discutir a subjetividade contida no ato da medida, von Neumann expõe o *paralelismo psico-físico*: em uma observação científica deve ser possível associar a uma percepção (subjetiva) uma causa no mundo físico (objetivo). Surge, então, o problema de distinguir o observador do sistema físico observado. Quão arbitrária ou exata é essa distinção e que efeitos pode ter para o resultado final? A ilustração é feita por um exemplo bem simples e que não envolve mecânica quântica: a medida da temperatura de um objeto.

- A primeira opção, natural, é fazer a divisão entre o objeto cuja temperatura está sendo determinada como sistema e o termômetro como aparato, fornecendo a informação ao observador.
- O contorno sistema-aparato/observador, entretanto, pode ser deslocado se for considerada a reflexão da luz no termômetro e seu caminho até chegar aos olhos, sua refração nos globos oculares até a formação da imagem na retina. Nesse caso, a própria retina será considerada um instrumento de medida do observador.

- Com conhecimentos fisiológicos é possível ir além, considerando a propagação, através do nervo óptico, da informação registrada na retina, sua chegada à região cerebral responsável pelo processamento da informação visual e estabelecer nesse ponto o contorno.

Esse exemplo ilustra que o contorno sistema-aparato/observador pode ser deslocado arbitrariamente, podendo inclusive ir além das considerações do terceiro item conforme os conhecimentos em neurociência forem aumentando, chegando ao ponto em que o observador se reduziria ao *ego abstrato*. Segundo von Neumann:

“De fato, experiências podem somente fazer afirmações do tipo: um observador fez uma certa observação (subjetiva); nunca algo do tipo: uma quantidade física possui um certo valor.” (página 420)

A mecânica quântica descreve os eventos que ocorrem no sistema, enquanto ele não interage com o aparato de medida, segundo o processo 2. Assim que ocorre a interação com o medidor, o processo 1 é aplicado. Nota-se aí um ponto de extrema importância para a mecânica quântica, afinal nessa teoria a definição do que será considerado como “sistema” é vital para a construção da função de onda. Para que a mecânica quântica seja uma teoria física válida, a posição do contorno sistema-aparato/observador, que define o ponto onde o processo 2 será aplicado, não deve ter influência no resultado do experimento (na equivalência acima, em qualquer das três possibilidades, a medida da temperatura fornecerá o mesmo resultado). É possível encontrar um modelo para o processo de medida que respeite essa condição?

Para responder a essa pergunta, será considerada a divisão do universo em 3 partes:

- Sistema *I*;
- Aparato de medida *II*;
- Observador *III*.

O objetivo é mostrar que a aplicação do processo 1 no ponto entre *I+II* e *III* fornecerá o mesmo resultado de sua aplicação no ponto entre *I* e *II+III*. Convém ressaltar que o objetivo de von Neumann é provar que ambas as escolhas de contorno são válidas, sem considerações acerca da causalidade da medida (para ele esta última é uma questão resolvida, a medida é não-causal - segundo seu próprio sentido de causalidade).

Sejam $\hat{A}^{(I)}$ a quantidade que se deseja medir sobre *I*, $\{|a_n\rangle\}$ suas autofunções associadas aos autovalores a_n e $|\phi^{(I)}\rangle$ o estado inicial do sistema. Se o contorno estiver entre *I* e *II+III*, basta

aplicar a regra de Born sobre o estado de I , expandindo-o nos autoestados de $\hat{A}^{(I)}$,

$$|\phi^{(I)}\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \quad (1.26)$$

e encontrar as respectivas probabilidades $|\langle a_n | \phi^{(I)} \rangle|^2$ referentes aos possíveis resultados a_n .

O contorno, agora, será movido para ficar entre $I + II$ e III . Se os resultados em II forem apresentados pela posição de um ponteiro sobre uma escala de valores, será definido um operador $\hat{B}^{(II)}$ sobre II de tal forma que a posição do ponteiro identifique um dado autovalor b_n (referente ao autoestado $|b_n\rangle$) de $\hat{B}^{(II)}$, obtido se - e somente se - a medida de $\hat{A}^{(I)}$ fornecer a_n em I . Sejam os estados iniciais $|\phi^{(I)}\rangle$ de I acima, desconhecido no sentido de ser uma superposição de autoestados de $\hat{A}^{(I)}$ (pois o objetivo é exatamente determiná-lo) e $|\phi^{(II)}\rangle$ de II , conhecido e sendo igual a (por simplicidade) $|b_0\rangle$. O estado inicial de $I + II$ será, então,

$$|\phi^{(I+II)}(0)\rangle = |\phi^{(I)}\rangle \otimes |\phi^{(II)}\rangle \quad (1.27)$$

onde

$$\begin{cases} |\phi^{(I)}\rangle &= \sum_n c_n |a_n\rangle \\ |\phi^{(II)}\rangle &= |b_0\rangle \end{cases} \quad (1.28)$$

O sinal $\otimes$ será omitido agora. A interação entre III e $I + II$ obedecerá o processo 1 se a medida simultânea de $\hat{A}^{(I)}$ e $\hat{B}^{(II)}$ (por hipótese as duas medidas estão relacionadas) resultar no par (a_n, b_m) com uma certa probabilidade w_n se $m = n$ e 0 se $m \neq n$. Caso isso ocorra, então o processo de medida agora sobre II (contorno entre $I + II$ e III) é tão legítimo como quando ele atuava sobre I (contorno entre I e $II + III$).

A transmissão da informação de I para II envolverá uma operação unitária associada ao hamiltoniano $\hat{H}$ que atua sobre $I + II$ (ou seja, ocorrerá pelo processo 2). Se a medida durar um tempo τ , o estado global se tornará

$$|\phi^{(I+II)}(\tau)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau} |\phi^{(I+II)}(0)\rangle \quad (1.29)$$

Para simplificar, será definido o operador unitário

$$\hat{\Delta} \equiv e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau} \quad (1.30)$$

A questão se resume, agora, em encontrar uma forma para a atuação de $\hat{\Delta}$ que atenda aos critérios estabelecidos para medida. Essa forma é simples:

$$\hat{\Delta} \sum_{m,n} x_{mn} |a_m\rangle |b_n\rangle = \sum_{m,n} x_{mn} |a_m\rangle |b_{m+n}\rangle \quad (1.31)$$

Para mostrar isso, (1.30) será aplicado a (1.27), fornecendo

$$\left| \phi^{(I+II)}(\tau) \right\rangle = \hat{\Delta} \left| \phi^{(I+II)}(0) \right\rangle = \hat{\Delta} \sum_n c_n |a_n\rangle |b_0\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle |b_n\rangle$$

A probabilidade de o resultado a_n ser obtido será dada por $|c_n|^2$ que, de acordo com a primeira das (1.28), é

$$|c_n|^2 = \left| \left\langle a_n | \phi^{(I)} \right\rangle \right|^2 \quad (1.32)$$

a mesma conclusão obtida quando o contorno estava entre I e $II + III$.

Dessa forma, a resposta à pergunta é afirmativa: segundo esse modelo simples, esteja o contorno localizado entre I e $II + III$ ou entre $I + II$ e III , as previsões físicas serão as mesmas. Entretanto, o caráter probabilístico continua inerente ao processo de medida.

1.6 A medida de tempo finito

Como pode ser percebido pela definição (1.30), von Neumann não considerou explicitamente o tempo τ em que o medidor interage com o sistema, possibilitando a aquisição da informação de seu estado. Uma maneira de analisar esse tempo, ainda dentro da visão convencional da mecânica quântica como uma teoria estatística (e não-causal no sentido dado por von Neumann) consiste em considerar a interação sistema-medidor através da equação de Schrödinger ou, de maneira mais abrangente, da equação de Liouville-von Neumann. O tratamento adequado dos graus de liberdade do aparato de medida leva a uma equação em que somente estão presentes as coordenadas do sistema; essa equação para o operador densidade possui um termo referente às evoluções unitárias (o já conhecido liouvillian) e um segundo termo, referente às evoluções não-unitárias sobre o operador densidade. É exatamente esse termo não-unitário que permitirá

a introdução do tempo na interação sistema-aparato e permitirá observar suas conseqüências no resultado final.

Ao final, ainda é tratada uma equação para o operador densidade, conseqüentemente, o caráter probabilístico da mecânica quântica ainda está presente: as *populações* (elementos diagonais do operador densidade - ver explicação no capítulo 3) fornecerão as probabilidades associadas aos possíveis resultados. Aqui, o problema da redução do estado não será tratado e/ou refutado.

1.7 Contextualização

Neste primeiro capítulo, as origens da interpretação probabilística da função de onda foram apresentadas sucintamente. O problema da medida foi abordado segundo a visão de von Neumann, um exemplo de como a informação sobre o estado do sistema passa para o aparato de medida. Isso permite agora explicar a maneira como a medida será tratada nesta tese, considerando que a interação sistema-medidor ocorre durante um intervalo de tempo finito. Essa análise será feita tendo como ponto de partida a equação de Lindblad, apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 2 A equação de Lindblad

“Como se fosse possível matar o tempo sem ofender a eternidade.”

Henry David Thoreau, *Walden*

“O tempo perdido jamais retorna e ninguém conhece o futuro. Contentemo-nos com o tempo que nos é dado a viver, seja qual for!”

Cícero, *Saber envelhecer*

2.1 Introdução

A equação de Lindblad (45) é a forma mais geral de equação-mestra markoviana, sendo extremamente importante para tratar processos irreversíveis, da dissipação (46) ao objeto desta tese, o processo de medida na mecânica quântica (47). Embora seja tão importante e com uma vasta gama de aplicações, sua dedução original (45) envolve o formalismo de semi-grupos dinâmicos quânticos (48, 49), pouco familiar para físicos em geral e estudantes. Outras formas de deduzi-la, mais recentes, envolvem o uso do cálculo estocástico de Itô (50, 51) ou, no caso específico da medida, considerações sobre a interação entre o medidor e o sistema (52). Talvez a forma mais compreensível, semelhante ao método adotado aqui (embora mais geral) seja a da referência (46). Todas, entretanto, fazem com que as hipóteses utilizadas, os casos em que pode ser aplicada e, mais importante, seu significado físico fiquem obscuros.

Para tornar essa equação mais acessível e facilitar o entendimento dos objetivos do presente trabalho, será apresentada aqui uma dedução para o caso específico de dois sistemas S (principal)

e B (que pode ser o ambiente ou o aparato de medida), este último à temperatura nula, com uma interação entre eles que se assemelha ao modelo de Jaynes-Cummings (46). Inicialmente será deduzida a equação-mestra de Born-Markov (46) para, então, ser tomado o traço parcial referente ao sistema B . A equação de Lindblad surgirá naturalmente, adotando a aproximação de Markov. É importante ressaltar que as limitações aqui impostas não provam a validade geral da equação de Lindblad.

A dedução simplificada aqui apresentada pode também ser encontrada no artigo (53) originado pelo trabalho desta tese.

2.2 A equação-mestra de Born-Markov

Seja uma situação física onde um sistema S , cuja dinâmica é o objeto de interesse, estará acoplado a outro sistema quântico B denominado de *ambiente*. Sejam $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente, os espaços de Hilbert do sistema S e do ambiente B ; o espaço de Hilbert do sistema total $S + B$ será dado pelo produto tensorial $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$. O hamiltoniano total, então, terá a forma

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S \otimes \hat{1}_B + \hat{1}_S \otimes \hat{H}_B + \alpha \hat{H}_{SB} \quad (2.1)$$

onde

$\hat{H}_S \equiv$ hamiltoniano do sistema aberto S

$\hat{H}_B \equiv$ hamiltoniano do ambiente B

$\hat{H}_{SB} \equiv$ hamiltoniano descrevendo a interação entre o sistema e o ambiente

ou, suprimindo as identidades e o sinal do produto tensorial, subentendendo que operadores denotados pelos subíndices S e B atuam em espaços de Hilbert diferentes,

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \alpha \hat{H}_{SB}. \quad (2.2)$$

No caso, α é uma constante real que fornece a intensidade da interação entre o sistema principal e o ambiente. Denotando o operador densidade global (referente a $S + B$) por $\hat{\rho}_{SB}$, a equação

de Liouville-von Neumann será dada por:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S + \hat{H}_B + \alpha \hat{H}_{SB}, \hat{\rho}_{SB} \right]. \quad (2.3)$$

É conveniente escrever (2.3) na representação de interação relativa a $\hat{H}_S + \hat{H}_B$. Isso será feito definindo os novos hamiltoniano e operador densidade a seguir:

$$\hat{H}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t} \hat{H}_{SB} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t} \quad (2.4)$$

e

$$\hat{\rho}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t} \hat{\rho}_{SB} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t}, \quad (2.5)$$

forneendo, então, a nova equação para $\hat{\rho}(t)$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \alpha \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t) \right] \quad (2.6)$$

O objeto de interesse é $\hat{\rho}_S(t) = \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_{SB}(t) \}$, ou seja, é necessário ao final retornar para a representação inicial,

$$\hat{\rho}_{SB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t} \hat{\rho} e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t}. \quad (2.7)$$

A equação (2.6) servirá como ponto de partida para uma abordagem iterativa. Sua integração temporal fornecerá

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \alpha \int_0^t \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t') \right] dt'. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.6), é obtida a equação

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \alpha \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(0) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \alpha^2 \left[\hat{H}(t), \int_0^t \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t') \right] dt' \right]. \quad (2.9)$$

Para a *aproximação de Born*, a equação (2.9) é suficiente. Resta tomar o traço parcial dos graus de liberdade do banho,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{i}{\hbar}\alpha\text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(0)\right]\right\} - \frac{1}{\hbar^2}\alpha^2\text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t), \int_0^t\left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')\right]dt'\right]\right\}. \quad (2.10)$$

Pela definição (2.4), $\hat{H}(t)$ depende de $\hat{H}_{SB}$, que sempre pode ser definido de tal forma que o primeiro termo de (2.10) se anule (colocando as contribuições que não anulam esse termo em $\hat{H}_S$ ou $\hat{H}_B$). Assim, a equação se torna

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\alpha^2\text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t), \int_0^t\left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')\right]dt'\right]\right\}. \quad (2.11)$$

Agora, a integração de (2.11) entre dois tempos t e t' fornece

$$\hat{\rho}_S(t) - \hat{\rho}_S(t') = -\frac{1}{\hbar^2}\alpha^2\int_{t'}^t dt' \text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t'), \int_0^{t'}\left[\hat{H}(t''), \hat{\rho}(t'')\right]dt''\right]\right\}$$

mostrando que a diferença entre $\hat{\rho}_S(t)$ e $\hat{\rho}_S(t')$ é da ordem de α^2 e, portanto, é permitido escrever $\hat{\rho}_S(t)$ no integrando de (2.11),

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\alpha^2\text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t), \int_0^t\left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')\right]dt'\right]\right\}. \quad (2.12)$$

A constante α foi introduzida em (2.2) apenas para que a ordem de grandeza dos termos durante a iteração ficasse mais clara e pode ser, agora, suprimida. Assim, a *equação-mestra na aproximação de Born* se torna:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t), \int_0^t\left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}(t')\right]dt'\right]\right\}. \quad (2.13)$$

Por essa aproximação, é permitido escrever dentro do integrando o operador densidade como $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_B$ e a forma da equação utilizada em todos os cálculos subseqüentes será (omitindo o sinal $\otimes$ por praticidade):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' \text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t) \hat{\rho}_B\right]\right]\right\}. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é denominada de *equação de Redfield* (46) e essa mesma metodologia iterativa será retomada no capítulo 5 para a dedução da equação-mestra mista.

Se, em (2.14) o limite de integração for expandido para o infinito, $t \rightarrow \infty$ (ver seção 2.3.7), é obtida a *equação-mestra de Born-Markov*:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t) \hat{\rho}_B \right] \right] \right\}. \quad (2.15)$$

2.3 A equação de Lindblad

2.3.1 Definições

Para o ambiente e a interação sistema-ambiente serão adotados os hamiltonianos

$$\begin{aligned} \hat{H}_B &= \hbar \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \\ \hat{H}_{SB} &= \hbar \left(\hat{S} \hat{B}^\dagger + \hat{S}^\dagger \hat{B} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde os $\hat{a}_k$ e $\hat{a}_k^\dagger$ são os respectivos operadores de destruição e criação do banho para cada modo, ω_k as frequências características de cada modo, $\hat{S}$ um operador geral que atua somente sobre o sistema S e $\hat{B}$ um operador que atua sobre o ambiente B e é dado por

$$\hat{B} = \sum_k g_k^* \hat{a}_k \quad (2.17)$$

onde os g_k são constantes complexas. A interação $\hat{H}_{SB}$ em (2.16) se assemelha à forma de Jaynes-Cummings (46). Por enquanto, não serão feitas considerações a respeito de $\hat{H}_S$. Passando para a representação de interação (2.4),

$$\begin{aligned}
\hat{H}(t) &= \hbar e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t} \left(\hat{S} \hat{B}^\dagger + \hat{S}^\dagger \hat{B} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_B)t} \\
&= \hbar \left[\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) + \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \right],
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\hat{S}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \hat{S} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t}, \\
\hat{B}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_B t} \hat{B} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_B t}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Já que $\hat{S}$ será mantido em uma forma geral, apenas $\hat{B}(t)$ será explicitamente calculado. Segundo (2.16) e (2.17),

$$\hat{B}(t) = e^{it \sum_{k'} \omega_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}} \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-it \sum_{k'} \omega_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'}}. \tag{2.19}$$

Como demonstrado no apêndice A, (2.19) fornecerá

$$\hat{B}(t) = \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-i\omega_k t} \tag{2.20}$$

e, ao final,

$$\hat{H}(t) = \hbar \left[\hat{S}(t) \sum_k g_k \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t} + \hat{S}^\dagger(t) \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-i\omega_k t} \right]. \tag{2.21}$$

Para o ambiente, será suposto o vácuo:

$$\hat{\rho}_B = (|0\rangle |0\rangle \dots) (\langle 0| \langle 0| \dots). \tag{2.22}$$

2.3.2 Cálculo do comutador na equação-mestra

Tendo em vista as definições do item anterior, o comutador em (2.14), $[\hat{H}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t) \hat{\rho}_B]]$, será agora calculado. Inicialmente,

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] &= \hbar [\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) + \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] \\
 &= \hbar [\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] \\
 &\quad + \hbar [\hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] .
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

A expansão gradual de cada termo em (2.23) fornecerá

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t), [\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] &= \hbar [\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t), [\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)]] \\
 &= \hbar \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) [\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)] \\
 &\quad - \hbar [\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t)] \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \\
 &= \hbar \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) [\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t')] \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \\
 &\quad - \hbar \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) [\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t')] \\
 &\quad - \hbar [\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t')] \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \\
 &\quad + \hbar \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) [\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t')] \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] &= \hbar \left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), \left[\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \\
&= \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \left[\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \\
&\quad - \hbar \left[\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \\
&= \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \left[\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \right] \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \\
&\quad - \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \left[\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \right] \\
&\quad - \hbar \left[\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \right] \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \\
&\quad + \hbar \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \left[\hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') + \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \right] \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ou, expandindo e separando em (2.24) e (2.25) os termos referentes a S e B ,

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] &= \hbar \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \\
&\quad + \hbar \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \\
&\quad - \hbar \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \\
&\quad - \hbar \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \\
&\quad - \hbar \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \\
&\quad - \hbar \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \\
&\quad + \hbar \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \\
&\quad + \hbar \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t) \\
&= \hbar \hat{S}(t) \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \\
&\quad + \hbar \hat{S}(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \\
&\quad - \hbar \hat{S}(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t') \\
&\quad - \hbar \hat{S}(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{B}(t') \\
&\quad - \hbar \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t) \\
&\quad - \hbar \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t) \\
&\quad + \hbar \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{S}(t) \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}^\dagger(t) \\
&\quad + \hbar \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{S}(t) \hat{\rho}_B \hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

e

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] &= \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \\
&+ \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \\
&- \hbar \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \\
&+ \hbar \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{B}^\dagger(t') \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \\
&+ \hbar \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t') \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t) \\
&= \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \\
&+ \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{B}(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t') \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \hat{B}(t') \\
&- \hbar^2 \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \hat{B}(t) \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \hat{B}(t) \\
&+ \hbar \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{S}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \\
&+ \hbar \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{S}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{B}(t') \hat{B}(t) . \tag{2.27}
\end{aligned}$$

2.3.3 Cálculo do traço parcial

O traço parcial irá simplificar os termos (2.26) e (2.27) já que, segundo (2.20),

$$tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} = tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} = 0, \forall t, t'.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ \left[\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar \hat{S}(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&- \hbar \hat{S}(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \hat{B}(t') \right\} \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) tr_B \left\{ \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t) \right\} \\
&+ \hbar \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{S}(t) tr_B \left\{ \hat{\rho}_B \hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t) \right\} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ \left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&- \hbar \hat{S}^\dagger(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t') \right\} \\
&- \hbar \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \hat{B}(t) \right\} \\
&+ \hbar \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{S}^\dagger(t) tr_B \left\{ \hat{\rho}_B \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \right\} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

onde, utilizando a propriedade cíclica do traço,

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ \left[\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar \left[\hat{S}(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{S}(t) - \hat{S}(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \right\} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ \left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar \left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{S}^\dagger(t) - \hat{S}^\dagger(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \right\} . \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Os termos (2.30) e (2.31) permitem, agora, o retorno à expressão (2.23):

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar^2 tr_B \left\{ \left[\hat{S}(t) \hat{B}^\dagger(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} \\
&+ \hbar^2 tr_B \left\{ \left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{B}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} \\
&= \hbar^2 \left[\hat{S}(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t) \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \hat{S}(t) - \hat{S}(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t') \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar^2 \left[\hat{S}^\dagger(t) \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger(t) \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \hat{S}^\dagger(t) - \hat{S}^\dagger(t) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}(t') \right] \\
&\times tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \right\}. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

2.3.4 Expansão da integral da equação-mestra

Agora, será feita a hipótese de que $\hat{S}$ comuta com $\hat{H}_S$, ou seja,

$$[\hat{S}, \hat{H}_S] = 0$$

o que implica em

$$\hat{S}(t) = \hat{S} \tag{2.33}$$

($\hat{S}$ não é afetado pela mudança para a representação de interação). Tal fato permitirá uma grande simplificação de (2.32):

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar^2 \left[\hat{S} \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] tr_B \left\{ \hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar^2 \left[\hat{S}^\dagger \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
&+ \hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \right\} .
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Antes de substituir (2.34) na equação-mestra (2.14), convém definir as funções

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^t dt' tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} , \\
G(t) &= \int_0^t dt' tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \right\} .
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
F^*(t) &= \int_0^t dt' tr_B \left\{ \hat{B}(t') \hat{B}^\dagger(t) \hat{\rho}_B \right\} , \\
G^*(t) &= \int_0^t dt' tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} .
\end{aligned}$$

A substituição de (2.34) em (2.15), levando em consideração (2.35), fornecerá:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) &= - \left[\hat{S} \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] G^*(t) - \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] F^*(t) \\
&- \left[\hat{S}^\dagger \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] F(t) - \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] G(t) .
\end{aligned} \tag{2.36}$$

2.3.5 Cálculo do traço parcial do ambiente

O cálculo das funções $F(t)$ e $G(t)$ definidas em (2.35) será feito considerando as definições de $\hat{B}(t)$ e $\hat{\rho}_B$ dadas em (2.20) e (2.22). Segundo (2.20), $\hat{B}^\dagger(t)$ será

$$\hat{B}^\dagger(t) = \sum_k g_k \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t}. \quad (2.37)$$

Assim, o traço parcial em $F(t)$ e $G(t)$ pode ser calculado:

$$tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} = tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') (|0\rangle|0\rangle \dots) \otimes (\langle 0| \langle 0| \dots) \right\} \quad (2.38)$$

e

$$tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \rho_B \right\} = tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) (|0\rangle|0\rangle \dots) \otimes (\langle 0| \langle 0| \dots) \right\}. \quad (2.39)$$

Se for considerada uma certa base de estados do ambiente $\{|b\rangle\}$, as expressões (2.38) e (2.39) se tornarão

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} &= \sum_b \langle b| \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') (|0\rangle|0\rangle \dots) \otimes (\langle 0| \langle 0| \dots) |b\rangle \\ &= \sum_b (\langle 0| \langle 0| \dots) |b\rangle \langle b| \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') (|0\rangle|0\rangle \dots) \\ &= (\langle 0| \langle 0| \dots) \sum_b |b\rangle \langle b| \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') (|0\rangle|0\rangle \dots) \\ &= (\langle 0| \langle 0| \dots) \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') (|0\rangle|0\rangle \dots) \end{aligned} \quad (2.40)$$

e

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \rho_B \right\} &= \sum_b \langle b| \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) (|0\rangle|0\rangle \dots) \otimes (\langle 0| \langle 0| \dots) |b\rangle \\ &= \sum_b (\langle 0| \langle 0| \dots) |b\rangle \langle b| \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) (|0\rangle|0\rangle \dots) \\ &= (\langle 0| \langle 0| \dots) \sum_b |b\rangle \langle b| \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) (|0\rangle|0\rangle \dots) \\ &= (\langle 0| \langle 0| \dots) \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) (|0\rangle|0\rangle \dots). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Explicitando, agora, $\hat{B}^\dagger(t)$ e $\hat{B}(t)$ segundo (2.20) e (2.37),

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} &= (\langle 0| \langle 0| \dots) \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-i\omega_k t} \sum_{k'} g_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger e^{i\omega_{k'} t'} (|0\rangle |0\rangle \dots) \\ &= \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} (\langle 0| \langle 0| \dots) \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger (|0\rangle |0\rangle \dots) \end{aligned} \quad (2.42)$$

e

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ \hat{B}^\dagger(t') \hat{B}(t) \rho_B \right\} &= (\langle 0| \langle 0| \dots) \sum_{k'} g_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger e^{i\omega_{k'} t'} \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-i\omega_k t} (|0\rangle |0\rangle \dots) \\ &= \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} (\langle 0| \langle 0| \dots) \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k (|0\rangle |0\rangle \dots) = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Resta, então, reescrever (2.42) para colocar os operadores $\hat{a}_k^\dagger$ à esquerda dos $\hat{a}_k$. Como

$$\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger = \delta_{k,k'} + \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k \quad (2.44)$$

então

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^\dagger(t') \hat{\rho}_B \right\} &= \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} \delta_{k,k'} \\ &+ \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(\omega_k t - \omega_{k'} t')} (\langle 0| \langle 0| \dots) \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k (|0\rangle |0\rangle \dots) \\ &= \sum_k |g_k|^2 e^{-i\omega_k(t-t')}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Logo, por (2.43) e (2.45):

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt' e^{-i\omega_k(t-t')}, \\ G(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.3.6 Transição para o contínuo

Na expressão de $F(t)$ em (2.46), se for adotada a definição geral para densidade espectral

$$J(\omega) = \sum_l |g_l|^2 \delta(\omega - \omega_l) \quad (2.47)$$

então a soma sobre o índice k pode ser substituída por uma integral sobre as frequências, fornecendo

$$F(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt' e^{-i\omega(t-t')}.$$

Convém, agora, fazer a mudança de variável na integral temporal,

$$\begin{aligned} \tau &= t - t' \\ d\tau &= -dt' \end{aligned}$$

com

$$\int_0^t dt' = - \int_t^0 d\tau = \int_0^t d\tau$$

fornecendo

$$F(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t d\tau e^{-i\omega\tau}.$$

2.3.7 Aproximação de Markov

Na aproximação de Markov, o limite $t \rightarrow \infty$ é tomado na integral temporal,

$$\int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau}.$$

Como a integral é oscilante, será utilizado o seguinte artifício para calculá-la:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau - \eta\tau} \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta + i\omega} \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta - i\omega}{\eta^2 + \omega^2} \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{\eta^2 + \omega^2} - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{i\omega}{\eta^2 + \omega^2} \\
 &= \pi \delta(\omega) - i\text{P} \frac{1}{\omega},
 \end{aligned}$$

onde P indica a parte principal. Logo,

$$F = \pi \int_0^\infty d\omega J(\omega) \delta(\omega) - i\text{P} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega}.$$

2.3.8 Forma final

Para uma densidade espectral arbitrária, F assume a forma

$$F = \frac{\gamma + i\varepsilon}{2} \quad (2.48)$$

onde

$$\gamma \equiv 2\pi \int_0^\infty d\omega J(\omega) \delta(\omega) \quad (2.49)$$

$$\varepsilon \equiv -2\text{P} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega}. \quad (2.50)$$

Como foi verificado que $G = 0$, resta substituir (2.48) em (2.36):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) &= - \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \frac{\gamma - i\varepsilon}{2} - \left[\hat{S}^\dagger \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \frac{\gamma + i\varepsilon}{2} \\
 &= -\frac{\gamma}{2} \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger + \hat{S}^\dagger \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \\
 &+ i\frac{\varepsilon}{2} \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right].
 \end{aligned}$$

Se a densidade espectral for tal que $\varepsilon = 0$ (como, por exemplo, uma lorentziana onde é permitido expandir o limite inferior de integração para $-\infty$), o resultado final será:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = \gamma \left[\hat{S}\hat{\rho}_S(t)\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \hat{\rho}_S(t) \right\} \right]. \quad (2.51)$$

Resta, então, retornar à representação original. Lembrando que

$$\hat{\rho}_S(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \hat{\rho}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \quad (2.52)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) &= \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \hat{H}_S \hat{\rho}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \frac{d\hat{\rho}_S}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} - \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \hat{\rho}_S \hat{H}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \frac{d\hat{\rho}_S}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \left[\hat{H}_S, \hat{\rho}_S \right] e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Realizando a mesma operação no lado direito de (2.51),

$$\left[\hat{S}\hat{\rho}_S(t)\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \hat{\rho}_S(t) \right\} \right] = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \left[\hat{S}\hat{\rho}_S\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \hat{\rho}_S \right\} \right] e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t}. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.53) e (2.54) em (2.51), é obtida:

$$\frac{d\hat{\rho}_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S, \hat{\rho}_S \right] + \gamma \left[\hat{S}\hat{\rho}_S\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \hat{\rho}_S \right\} \right]. \quad (2.55)$$

A equação (2.55) é comumente apresentada com os operadores $\hat{S}$ denotados por $\hat{L}$ e envolvidos em uma soma. Tais operadores são chamados de *lindblads* e, em uma dedução mais geral, a equação é obtida na forma

$$\frac{d\hat{\rho}_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S, \hat{\rho}_S \right] + \gamma \sum_j \left[\hat{L}_j \hat{\rho}_S \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j, \hat{\rho}_S \right\} \right]. \quad (2.56)$$

Os lindblads representam a contribuição do sistema S para a interação com B (2.16). É importante enfatizar que, pelas hipóteses simplistas apresentadas aqui, a soma em (2.56) não foi obtida em (2.55). Se considerado apenas o primeiro termo do lado direito de (2.56), trata-se da *equação de Liouville-von Neumann* - esse termo é o *liouvillian* e se refere às *evoluções unitárias* sobre o operador densidade. O segundo termo no lado direito é o *lindbladiano* e foi

obtido, na equação (2.55), tomando o traço parcial - uma operação *não-unitária* - dos graus de liberdade do sistema B com o qual S interage e, dessa forma, se refere às evoluções não-unitárias sobre o operador densidade.

2.4 Contextualização

Em suma, neste capítulo foi considerada uma interação (2.16) (que se assemelha à *interação de Jaynes-Cummings* (46)), um banho térmico sobre o sistema S e que o operador $\hat{S}$ comutasse com o hamiltoniano do sistema $\hat{H}_S$ com temperatura nula. Com essas condições, (2.16) foi substituída na equação de Born-Markov (2.14) e o traço parcial dos graus de liberdade de B foi tomado. A hipótese $T = 0$ foi necessária para tornar os cálculos mais acessíveis, simplificando a abordagem de (2.38) e (2.39) e evitando problemas como Lamb shift em (2.48). A aproximação de Markov Foi vital para que a equação assumisse a forma (2.55). Todas essas simplificações limitam a validade de nossa demonstração para casos mais gerais, mas permitem um grande ganho na compreensão da natureza de cada termo na equação de Lindblad, objeto de estudo desta tese no contexto de medidas. O próximo capítulo apresentará duas soluções analíticas para essa equação que serão de vital importância nos capítulos seguintes.

Capítulo 3 Duas soluções analíticas para a equação de Lindblad

“Mesmo uma pequena revelação pode levar a outras, quando se tem um raio de
esperança.”

Sófocles, *Édipo rei*

“...mas nem sempre tem importância o que pode acontecer amanhã.”

Primo Levi, *A trégua*

3.1 Introdução

A equação de Lindblad, embora mais complicada do que a equação de Liouville-von Neumann, pode ser resolvida analiticamente em várias situações bem ilustrativas. No presente capítulo serão apresentadas duas soluções para um $spin\ \frac{1}{2}$, na direção z , nos casos em que são realizadas medidas das componentes z e x . Como ficará claro, o fato de a componente a ser medida comutar ou não com a componente inicial do sistema será decisivo para os cálculos e o grau de complexidade das soluções.

As expressões aqui obtidas serão de fundamental importância nas aplicações desta tese, sendo utilizadas no capítulo 6.

3.2 Definições

A equação de Lindblad em sua forma mais geral (2.56) envolve uma soma sobre diferentes lindblads. Entretanto, para o problema aqui tratado de *1 único spin* $\frac{1}{2}$, o lindbladiano se reduzirá para um único termo referente ao mesmo espaço de Hilbert do *spin*, dependente de um único lindblad $\hat{L}$,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_S] + \hat{L}\hat{\rho}_S\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}\hat{\rho}_S - \frac{1}{2}\hat{\rho}_S\hat{L}^\dagger\hat{L}. \quad (3.1)$$

Essa forma foi obtida no capítulo anterior, expressão (2.55). Nos cálculos subseqüentes, será utilizado o hamiltoniano

$$\hat{H}_S = \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z. \quad (3.2)$$

Por se tratar de um sistema de 2 níveis, serão utilizadas as matrizes de Pauli

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e, inicialmente, os cálculos serão efetuados na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, que correspondem respectivamente aos autovalores -1 e 1 . O índice superior entre parêntesis indicará a base em consideração, x ou z .

Os lindblads assumirão a forma

$$\hat{L} = \lambda\hat{\sigma}_\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha = x, z \quad (3.4)$$

onde a constante λ fornecerá a intensidade da interação entre o sistema e o aparato de medida. Pela maneira como (3.1) foi escrita, comparando com (2.56), $\lambda = \sqrt{\gamma}$.

O método geral consiste em, para cada caso de medida a ser analisado, escrever a equação na forma matricial e resolver as equações diferenciais de primeira ordem para cada componente do operador densidade,

$$\hat{\rho}_S^{(z)}(t) = \begin{bmatrix} \rho_{11}^{(z)}(t) & \rho_{12}^{(z)}(t) \\ \rho_{12}^{(z)*}(t) & 1 - \rho_{11}^{(z)}(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

em termos da condição inicial

$$\hat{\rho}_S^{(z)}(0) = \begin{bmatrix} \rho_{11}^{(z)}(0) & \rho_{12}^{(z)}(0) \\ \rho_{12}^{(z)*}(0) & 1 - \rho_{11}^{(z)}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Os elementos diagonais do operador densidade são denominados de *populações* e os não-diagonais, de *coerências*. Evidentemente, todos dependem da base em que o operador densidade é escrito.

Como a parte unitária em (3.1) será a mesma nos dois casos analisados, ela será analisada em separado por praticidade:

$$\begin{aligned} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^{(z)}] &= \hat{H}_S \hat{\rho}_S^{(z)} - \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{H}_S = \hbar\omega_0 (\hat{\sigma}_z \hat{\rho}_S^{(z)} - \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{\sigma}_z) \\ &= \hbar\omega_0 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \hbar\omega_0 \left[\begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & \rho_{11}^{(z)} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & -\rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & \rho_{11}^{(z)} - 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

e (3.1) se tornará

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S^{(z)} = -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \hat{L} \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{L}^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}^\dagger \hat{L} \hat{\rho}_S^{(z)} - \frac{1}{2} \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{L}^\dagger \hat{L}. \quad (3.8)$$

É possível simplificar ainda mais essa equação utilizando a propriedade (3.4), pois

$$\begin{cases} \hat{L} = \hat{L}^\dagger \\ \hat{L} \hat{L}^\dagger = \hat{L}^\dagger \hat{L} = \hat{L}^2 = \lambda^2 \hat{1} \end{cases}, \quad (3.9)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{(z)} = -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \hat{\sigma}_\alpha \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{\sigma}_\alpha - \lambda^2 \hat{\rho}_S^{(z)}. \quad (3.10)$$

Para a medida da componente x será realizada a mudança de base para a análise dos resultados.

3.3 Medida da componente z

Nesse caso, $\alpha = z$ e (3.10) se torna

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{(z)} = -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \hat{\sigma}_z \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{\sigma}_z - \lambda^2 \hat{\rho}_S^{(z)}. \quad (3.11)$$

O fato de $\hat{L}$ comutar com $\hat{H}_S$ torna os cálculos muito simples, motivo pelo qual a solução obtida nesta seção pode ser facilmente encontrada. O termo não-unitário em (3.11) fornecerá:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & \rho_{11}^{(z)} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & -\rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A substituição de (3.12) em (3.11) origina

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} &= -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & -\rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} \\
&- \lambda^2 \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} \\
&= -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & -2\rho_{12}^{(z)} \\ -2\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} \\
&= -2 \begin{bmatrix} 0 & (\lambda^2 + i\omega_0) \rho_{12}^{(z)} \\ (\lambda^2 - i\omega_0) \rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}
\end{aligned}$$

de onde emerge o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho_{11}^{(z)} = 0 \\ \frac{d}{dt} \rho_{12}^{(z)} = -2(\lambda^2 + i\omega_0) \rho_{12}^{(z)} \end{cases} \tag{3.14}$$

que fornece as soluções gerais

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = A_{11} \\ \rho_{12}^{(z)}(t) = A_{12} e^{-2(\lambda^2 + i\omega_0)t} \end{cases} \tag{3.15}$$

onde A_{11} e A_{12} são constantes. Aplicando a condição inicial (3.6):

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(0) = A_{11} \\ \rho_{12}^{(z)}(0) = A_{12} \end{cases} \tag{3.16}$$

e, finalmente, a solução final é alcançada:

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \rho_{11}^{(z)}(0) \\ \rho_{12}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)}(0) e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \end{cases} \tag{3.17}$$

Logo, segundo (3.17),

- as *populações* são constantes no tempo;
- as *coerências* oscilam, diminuindo exponencialmente no tempo com decaimento

proporcional a λ^2 .

3.4 Medida da componente x

Tomando, agora, $\alpha = x$, (3.10) se tornará

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^{(z)} = -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \hat{\sigma}_x \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{\sigma}_x - \lambda^2 \hat{\rho}_S^{(z)}. \quad (3.18)$$

Agora, $\hat{L}$ e $\hat{H}_S$ não comutam, o que tornará o cálculo um pouco mais complicado. O termo não-unitário se tornará

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x \hat{\rho}_S^{(z)} \hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \\ \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)*} \\ \rho_{12}^{(z)} & \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.18), a equação resultante será

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} &= -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 - \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)*} \\ \rho_{12}^{(z)} & \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} \\
&- \lambda^2 \begin{pmatrix} \rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} & 1 - \rho_{11}^{(z)} \end{pmatrix} \\
&= -i2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^{(z)} \\ -\rho_{12}^{(z)*} & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 - 2\rho_{11}^{(z)} & \rho_{12}^{(z)*} - \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)} - \rho_{12}^{(z)*} & 2\rho_{11}^{(z)} - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda^2 (1 - 2\rho_{11}^{(z)}) & -i2\omega_0 \rho_{12}^{(z)} + \lambda^2 (\rho_{12}^{(z)*} - \rho_{12}^{(z)}) \\ i2\omega_0 \rho_{12}^{(z)*} + \lambda^2 (\rho_{12}^{(z)} - \rho_{12}^{(z)*}) & -\lambda^2 (1 - 2\rho_{11}^{(z)}) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

que originará o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho_{11}^{(z)} &= \lambda^2 (1 - 2\rho_{11}^{(z)}) \\ \frac{d}{dt} \rho_{12}^{(z)} &= \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*} - (\lambda^2 + i2\omega_0) \rho_{12}^{(z)} \end{cases}. \quad (3.20)$$

Comparando (3.20) com (3.14), é possível perceber que $\hat{L} = \lambda \hat{\sigma}_x$ provoca alterações inclusive nas populações na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$ (que se refletirão nas probabilidades associadas à medida quando for realizada a mudança para a base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$). Para obter as populações, será definida na primeira equação de (3.20) a nova variável

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{11}(t) &= 1 - 2\rho_{11}^{(z)}(t), \\ \frac{d}{dt} \rho_{11}^{(z)} &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{11} \end{aligned} \quad (3.21)$$

que permitirá reescrever a equação como

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{11} = \lambda^2 \tilde{\rho}_{11} \Rightarrow \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{11} = -2\lambda^2 \tilde{\rho}_{11}. \quad (3.22)$$

A solução geral de (3.22) será, simplesmente,

$$\tilde{\rho}_{11}(t) = B_{11} e^{-2\lambda^2 t} \quad (3.23)$$

onde B_{11} é uma constante. Retornando a $\rho_{11}^{(z)}(t)$ com (3.21),

$$\rho_{11}^{(z)}(t) = \frac{1 - \tilde{\rho}_{11}(t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{B_{11}}{2} e^{-2\lambda^2 t}. \quad (3.24)$$

Resta determinar B_{11} , o que será feito aplicando a condição inicial (3.6):

$$\rho_{11}^{(z)}(0) = \frac{1}{2} - \frac{B_{11}}{2} \Rightarrow B_{11} = 1 - 2\rho_{11}^{(z)}(0). \quad (3.25)$$

Finalmente, a solução para as populações pode ser escrita em termos das condições iniciais:

$$\rho_{11}^{(z)}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} e^{-2\lambda^2 t}. \quad (3.26)$$

Resta obter as coerências. Para tal, será considerada a última equação de (3.20) junto com sua respectiva conjugada:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho_{12}^{(z)} &= \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*} - (\lambda^2 + i2\omega_0) \rho_{12}^{(z)} \\ \frac{d}{dt}\rho_{12}^{(z)*} &= \lambda^2 \rho_{12}^{(z)} - (\lambda^2 - i2\omega_0) \rho_{12}^{(z)*} \end{cases} \quad (3.27)$$

ou, matricialmente,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda^2 + i2\omega_0) & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -(\lambda^2 - i2\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{12}^{(z)} \\ \rho_{12}^{(z)*} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Para construir a solução geral de (3.28), são necessários os autovalores e autovetores da matriz do sistema. Definindo $a \equiv -(\lambda^2 + i2\omega_0)$, a equação característica será

$$\begin{vmatrix} a - x & \lambda^2 \\ \lambda^2 & a^* - x \end{vmatrix} = 0 \quad (3.29)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (a - x)(a^* - x) - \lambda^4 &= 0 \Rightarrow |a|^2 - ax - a^*x + x^2 - \lambda^4 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - (a + a^*)x + (|a|^2 - \lambda^4) = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Os autovalores serão dados por

$$x_{\pm} = \frac{(a + a^*)}{2} \pm \frac{\sqrt{(a + a^*)^2 - 4(|a|^2 - \lambda^4)}}{2} \quad (3.31)$$

onde, notando que

$$\begin{aligned} a + a^* &= -2\lambda^2 \\ |a|^2 - \lambda^4 &= 4\omega_0^2 \end{aligned}$$

(3.31) se torna

$$x_{\pm} = -\lambda^2 \pm \frac{\sqrt{4\lambda^4 - 16\omega_0^2}}{2} = -\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}. \quad (3.32)$$

É interessante notar que, como se trata de uma medida, $\lambda \gg \omega_0$ por hipótese e a raiz em (3.32) será real. Assim, ambos os autovalores serão negativos.

Agora, serão calculados os autovetores $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$.

$$\begin{pmatrix} a & \lambda^2 \\ \lambda^2 & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_{\pm} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + \lambda^2 x_2 = x_{\pm} x_1 \\ \lambda^2 x_1 + a^* x_2 = x_{\pm} x_2 \end{cases}. \quad (3.33)$$

Deixando x_2 em termos de x_1

$$ax_1 + \lambda^2 x_2 = x_{\pm} x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{(x_{\pm} - a)}{\lambda^2} x_1 \quad (3.34)$$

ou, explicitamente,

$$x_2 = \frac{-\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} + \lambda^2 + i2\omega_0}{\lambda^2} x_1 = \frac{i2\omega_0 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} x_1 \quad (3.35)$$

os autovetores assumirão a forma final

$$\left| -\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \end{pmatrix}, \quad \left| -\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i2\omega_0 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Finalmente, considerando (3.32) e (3.36), a solução geral para as coerências será:

$$\begin{bmatrix} \rho_{12}^{(z)}(t) \\ \rho_{12}^{(z)*}(t) \end{bmatrix} = B_1 e^{(-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \end{pmatrix} + B_2 e^{(-\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i2\omega_0 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

onde B_1 e B_2 são constantes fornecidas pelas condições iniciais. Aplicando (3.6):

$$\begin{bmatrix} \rho_{12}^{(z)}(0) \\ \rho_{12}^{(z)*}(0) \end{bmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i2\omega_0 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \rho_{12}^{(z)}(0) &= B_1 + B_2 \\ \rho_{12}^{(z)*}(0) &= B_1 \frac{i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} + B_2 \frac{i2\omega_0 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \end{cases}. \quad (3.39)$$

A solução de (3.39) fornecerá B_1 e B_2 :

$$B_1 = \rho_{12}^{(z)}(0) - B_2,$$

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{(z)*}(0) &= \left[\rho_{12}^{(z)}(0) - B_2 \right] \frac{i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} + B_2 \frac{i2\omega_0 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{\lambda^2} \\ \Rightarrow \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0) &= \left(i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} \right) \rho_{12}^{(z)}(0) - 2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} B_2 \\ \Rightarrow -2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} B_2 &= \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0) - \left(i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} \right) \rho_{12}^{(z)}(0) \\ \Rightarrow B_2 &= \frac{\left(i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} \right) \rho_{12}^{(z)}(0) - \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \rho_{12}^{(z)}(0) - \frac{\left(i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}\right) \rho_{12}^{(z)}(0) - \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \\
&= \rho_{12}^{(z)}(0) \left[1 - \frac{\left(i2\omega_0 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}\right)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}\right] + \frac{\lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \\
&= \rho_{12}^{(z)}(0) \frac{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} - i2\omega_0 - \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} + \frac{\lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \\
\Rightarrow B_1 &= \frac{\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} - i2\omega_0\right) \rho_{12}^{(z)}(0) + \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} B_1 = \frac{(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} - i2\omega_0) \rho_{12}^{(z)}(0) + \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \\ B_2 = \frac{(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} + i2\omega_0) \rho_{12}^{(z)}(0) - \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \end{cases} \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_{12}^{(z)}(t) &= \left[\frac{(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} - i2\omega_0) \rho_{12}^{(z)}(0) + \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \right] e^{(-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2})t} \\
&+ \left[\frac{(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} + i2\omega_0) \rho_{12}^{(z)}(0) - \lambda^2 \rho_{12}^{(z)*}(0)}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \right] e^{-(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2})t} \\
&= e^{-\lambda^2 t} \left\{ \frac{\rho_{12}^{(z)}(0)}{2} \left[e^{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t} + e^{-\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t} \right] \right. \\
&- \frac{i\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \rho_{12}^{(z)}(0) \left[e^{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t} \right] \\
&+ \left. \frac{\lambda^2}{2\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \rho_{12}^{(z)*}(0) \left[e^{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t} \right] \right\} \\
&= e^{-\lambda^2 t} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \cosh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) - \rho_{12}^{(z)}(0) \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \right. \\
&+ \left. \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \rho_{12}^{(z)*}(0) \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \right\}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Resumindo, de (3.26) e (3.41), as populações e as coerências na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$ serão:

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2\rho_{11}^{(z)}(0)-1}{2}e^{-2\lambda^2 t} \\ \rho_{12}^{(z)}(t) &= e^{-\lambda^2 t} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \cosh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) - \rho_{12}^{(z)}(0) \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \rho_{12}^{(z)*}(0) \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \right\} \end{cases} \quad (3.42)$$

Entretanto, para que conclusões possam ser tiradas de uma medida, é necessário que o operador densidade seja escrito na base de autoestados do medidor $\hat{\sigma}_x$, $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$,

$$\begin{cases} |+\rangle_x &= \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle_x &= \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3.43)$$

A mudança de base é feita através da matriz dos autovetores

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \hat{M}^{-1}. \quad (3.44)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(x)}(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11}^{(z)}(t) & \rho_{12}^{(z)}(t) \\ \rho_{21}^{(z)}(t) & \rho_{22}^{(z)}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + 2\text{Re}\{\rho_{12}^{(z)}(t)\} & 2\rho_{11}^{(z)}(t) - 1 - i2\text{Im}\{\rho_{12}^{(z)}(t)\} \\ 2\rho_{11}^{(z)}(t) - 1 + i2\text{Im}\{\rho_{12}^{(z)}(t)\} & 1 - 2\text{Re}\{\rho_{12}^{(z)}(t)\} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Através de (3.42) a expressão (3.45) pode ser calculada explicitamente:

$$\begin{aligned}
2Re \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} &= \rho_{12}^{(z)}(t) + \rho_{21}^{(z)}(t) \\
&= e^{-\lambda^2 t} \left[\rho_{12}^{(z)}(0) \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \right. \\
&\quad - \rho_{12}^{(z)}(0) \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \\
&\quad + \rho_{12}^{(z)*}(0) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left. \right] \\
&\quad + e^{-\lambda^2 t} \left[\rho_{12}^{(z)*}(0) \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \right. \\
&\quad + \rho_{12}^{(z)*}(0) \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \\
&\quad + \rho_{12}^{(z)}(0) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left. \right] \\
&= e^{-\lambda^2 t} \left\{ \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left[\rho_{12}^{(z)}(0) + \rho_{12}^{(z)*}(0) \right] \right. \\
&\quad - \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left[\rho_{12}^{(z)}(0) - \rho_{12}^{(z)*}(0) \right] \\
&\quad + \left. \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left[\rho_{12}^{(z)}(0) + \rho_{12}^{(z)*}(0) \right] \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
i2Im \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} &= \rho_{12}^{(z)}(t) - \rho_{21}^{(z)}(t) \\
&= e^{-\lambda^2 t} \left[\rho_{12}^{(z)}(0) \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \right. \\
&\quad - \rho_{12}^{(z)}(0) \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \\
&\quad + \rho_{12}^{(z)*}(0) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \Big] \\
&\quad - e^{-\lambda^2 t} \left[\rho_{12}^{(z)*}(0) \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \right. \\
&\quad + \rho_{12}^{(z)*}(0) \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \\
&\quad + \rho_{12}^{(z)}(0) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \Big] \\
&= e^{-\lambda^2 t} \left\{ \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left[\rho_{12}^{(z)}(0) - \rho_{12}^{(z)*}(0) \right] \right. \\
&\quad - \frac{i2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left[\rho_{12}^{(z)}(0) + \rho_{12}^{(z)*}(0) \right] \\
&\quad \left. - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) \left[\rho_{12}^{(z)}(0) - \rho_{12}^{(z)*}(0) \right] \right\},
\end{aligned}$$

que fornecem

$$\begin{aligned}
2Re \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} &= 2e^{-\lambda^2 t} \left\{ \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) Re \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \right. \\
&\quad + \frac{2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) Im \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) Re \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
i2Im \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} &= i2e^{-\lambda^2 t} \left\{ \cosh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) Im \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \right. \\
&\quad - \frac{2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) Re \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \\
&\quad \left. - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t \right) Im \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Ao final,

$$\hat{\rho}^{(x)}(t) = \begin{bmatrix} \rho_{11}^{(x)}(t) & \rho_{12}^{(x)}(t) \\ \rho_{21}^{(x)}(t) & \rho_{22}^{(x)}(t) \end{bmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + e^{-\lambda^2 t} \left\{ \cosh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \operatorname{Re}\left\{\rho_{12}^{(z)}(0)\right\} \right. \\ \quad + \frac{2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \operatorname{Im}\left\{\rho_{12}^{(z)}(0)\right\} \\ \quad \left. + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \operatorname{Re}\left\{\rho_{12}^{(z)}(0)\right\} \right\} \\ \rho_{12}^{(x)}(t) = \frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} e^{-2\lambda^2 t} - i e^{-\lambda^2 t} \left\{ \cosh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \operatorname{Im}\left\{\rho_{12}^{(z)}(0)\right\} \right. \\ \quad - \frac{2\omega_0}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \operatorname{Re}\left\{\rho_{12}^{(z)}(0)\right\} \\ \quad \left. - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \operatorname{Im}\left\{\rho_{12}^{(z)}(0)\right\} \right\} \end{array} \right. . \quad (3.46)$$

Tirar conclusões a partir da expressão (3.46) sobre aspectos gerais das populações e coerências, ao contrário do caso da medida da componente z , é bem mais difícil. Para aumentar a familiaridade não somente com essas expressões, mas também com (3.17), no próximo item serão feitas comparações entre medidas instantâneas e finitas.

3.5 Medidas instantâneas *versus* medidas finitas

O efeito do aparato de medida (variável λ) pode ser melhor compreendido através de comparações simples entre dois aspectos básicos desse processo: *valores médios* (componentes x e z) e *probabilidades*.

No caso de *medidas instantâneas* (ou seja, no formalismo convencional da teoria quântica baseado puramente na equação de Schrödinger), para uma dada condição inicial $|\psi(0)\rangle$, o estado $|\psi(t)\rangle$ foi obtido considerando a evolução com (3.2),

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_0 \hat{\sigma}_z t} |\psi(0)\rangle . \quad (3.47)$$

Com (3.47), as probabilidades foram obtidas expandindo este estado na base de autoestados do medidor $\hat{\sigma}_\alpha$ e os valores médios do observável, $\langle \hat{\sigma}_\alpha \rangle_I$, foram dados simplesmente por

$$\langle \hat{\sigma}_\alpha \rangle_I = \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_\alpha | \psi(t) \rangle \quad (\text{medidas instantâneas}) .$$

Para analisar as *medidas finitas* foi necessário considerar o operador densidade $\hat{\rho}^{(z)}(t)$ referente à condição inicial $\hat{\rho}^{(z)}(0) = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)|$. Com isso, as populações e coerências eram obtidas, dependendo do caso, através de (3.17) ou (3.46). As probabilidades eram dadas pelas populações e os valores médios $\langle \hat{\sigma}_\alpha \rangle_F$ pela expressão

$$\langle \hat{\sigma}_\alpha \rangle_F = \text{tr} \left\{ \hat{\sigma}_\alpha^{(\alpha)} \hat{\rho}(t) \right\} \quad (\text{medidas finitas}) ,$$

onde $\hat{\sigma}_\alpha^{(\alpha)}$ é o observável escrito na base de seus autoestados - $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ para $\hat{\sigma}_x$ e $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ para $\hat{\sigma}_z$ - que terá, para os dois casos $\alpha = x, z$, a forma

$$\hat{\sigma}_\alpha^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

3.5.1 Condições iniciais

Foram escolhidas duas condições iniciais: $|+\rangle$ e $|+\rangle_x$,

$$\begin{cases} |\psi_1(0)\rangle = |+\rangle \\ |\psi_2(0)\rangle = |+\rangle_x = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3.48)$$

que, na representação de interação (3.47), se tornam

$$\begin{cases} |\psi_1(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t} |+\rangle \\ |\psi_2(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 t} |+\rangle - e^{i\omega_0 t} |-\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases} . \quad (3.49)$$

Para análise das medidas finitas, é necessário trabalhar com os operadores densidade referentes a (3.48)

$$\hat{\rho}_1^{(z)}(0) = |\psi_1(0)\rangle \langle \psi_1(0)| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

e

$$\hat{\rho}_2^{(z)}(0) = |\psi_2(0)\rangle \langle \psi_2(0)| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

3.5.2 Medida de $\hat{\sigma}_z$

Evidentemente esse é o caso mais simples de ser analisado, mesmo para as medidas finitas. Como o lindbladiano comuta com o hamiltoniano do sistema, é razoável supor que seu efeito sobre os resultados finais não deve ser significativo.

A primeira condição inicial, $|\psi_1(0)\rangle$, corresponde a um dos autoestados do medidor $\hat{\sigma}_z$, referente ao autovalor 1. Logo, é esperado que o valor médio da medida não se altere com o tempo e seja exatamente esse respectivo autovalor.

Para a medida instantânea, o valor médio será dado por:

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_I = \langle \psi_1(t) | \hat{\sigma}_z | \psi_1(t) \rangle = \langle + | e^{i\omega_0 t} \hat{\sigma}_z e^{-i\omega_0 t} | + \rangle = 1 \quad (3.52)$$

e, para a medida finita, utilizando (3.17)

$$\hat{\rho}_1^{(z)}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o valor médio será

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_F = \text{tr} \left\{ \hat{\sigma}_z^{(z)} \hat{\rho}_1^{(z)}(t) \right\} = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 1. \quad (3.53)$$

Em ambos os casos, os valores médios coincidem entre si e com o resultado esperado.

A segunda condição inicial, $|\psi_2(0)\rangle$, corresponde a um estado em que as duas orientações do spin na direção z , 1 e -1 , são igualmente prováveis. Assim, o valor médio do observável $\hat{\sigma}_z$ deve ser nulo.

Começando com a medida instantânea, o valor médio será dado por:

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_I = \langle \psi_2(t) | \hat{\sigma}_z | \psi_2(t) \rangle = \frac{\langle + | e^{i\omega_0 t} - \langle - | e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t} | + \rangle - e^{i\omega_0 t} | - \rangle}{\sqrt{2}} \hat{\sigma}_z \frac{e^{-i\omega_0 t} | + \rangle - e^{i\omega_0 t} | - \rangle}{\sqrt{2}} = 0. \quad (3.54)$$

Para a medida finita, utilizando (3.17),

$$\hat{\rho}_2^{(z)}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ -e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & 1 \end{pmatrix}$$

e o valor médio será dado por

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle_F = \text{tr} \left\{ \hat{\sigma}_z^{(z)} \hat{\rho}_2^{(z)}(t) \right\} = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ -e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0. \quad (3.55)$$

Mais uma vez, os valores médios correspondem ao esperado e concordam entre si.

Conforme previsto, em ambos os casos, o lindbladiano que comuta com o sistema principal manteve as previsões do formalismo convencional da mecânica quântica.

3.5.3 Medida de $\hat{\sigma}_x$

O fato de o lindbladiano não comutar com o sistema principal levou a uma solução para o operador densidade (3.46) mais elaborada, onde até as populações terão uma dependência temporal com o lindblad (variável λ), tornando quaisquer análises prévias (simples no item anterior) mais difíceis.

Com a primeira condição inicial, o valor médio para o caso de medidas instantâneas será

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_I = \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_x | \psi(t) \rangle = \langle + | e^{i\omega_0 t} \hat{\sigma}_x e^{-i\omega_0 t} | + \rangle = 0. \quad (3.56)$$

Para calcular o valor médio de medidas finitas é necessário utilizar (3.46) para obter $\hat{\rho}_1^{(x)}$:

$$\hat{\rho}_1^{(x)}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\lambda^2 t} \\ e^{-2\lambda^2 t} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

assim,

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_F = \text{tr} \left\{ \hat{\sigma}_x^{(x)} \hat{\rho}_1^{(x)}(t) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\lambda^2 t} \\ e^{-2\lambda^2 t} & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0. \quad (3.58)$$

Para a condição inicial $|\psi_1(0)\rangle$, portanto, a introdução do medidor não altera o valor médio ao final.

Para a segunda condição inicial, que neste caso é um autoestado do medidor, o valor médio para o caso das medidas instantâneas será:

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_I = \langle \psi_2(t) | \hat{\sigma}_x | \psi_2(t) \rangle = \frac{\langle + | e^{i\omega_0 t} - \langle - | e^{-i\omega_0 t}}}{\sqrt{2}} \hat{\sigma}_x \frac{e^{-i\omega_0 t} | + \rangle - e^{i\omega_0 t} | - \rangle}{\sqrt{2}} = -\cos(2\omega_0 t). \quad (3.59)$$

A medida finita exigirá, mais uma vez, o uso de (3.46),

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\lambda^2 t}}{2} \left[\cosh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \right] \\ \rho_{12}^{(x)}(t) = -i \frac{\omega_0 e^{-\lambda^2 t}}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \end{cases} \quad (3.60)$$

forneendo, enfim,

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_F = -e^{-\lambda^2 t} \left[\cosh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} t\right) \right]. \quad (3.61)$$

Este caso é interessante pois, ao contrário dos demais, as previsões considerando a introdução

do medidor não coincidem com as do formalismo convencional da mecânica quântica. As duas expressões coincidem, entretanto, se em (3.61), for tomado o limite $\lambda \rightarrow 0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle \hat{\sigma}_x \rangle_F = \langle \hat{\sigma}_x \rangle_I = -\cos(2\omega_0 t) \quad (3.62)$$

ou seja, na ausência do medidor, o resultado da medida instantânea é alcançado. Outro efeito do medidor pode ser notado tomando o limite $t \rightarrow \infty$ visto que, como $\sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} < \lambda^2$, o termo $e^{-\lambda^2 t}$ fora dos colchetes irá predominar sobre as exponenciais associadas às funções hiperbólicas, de forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{\sigma}_x \rangle_F = 0. \quad (3.63)$$

Assim, ao contrário do caso de medidas instantâneas, onde o valor médio oscila indefinidamente entre -1 e 1 , a introdução do aparato de medida provoca uma diminuição nos valores de tal forma a se aproximar do zero conforme o decorrer do tempo.

3.6 Contextualização

Foram apresentadas duas soluções analíticas da equação de Lindblad, envolvendo sistemas de spin de 2 níveis, que não apenas são ilustrativas com relação aos efeitos da introdução do lindbladiano na equação de Liouville-von Neumann como também serão de vital importância nas aplicações desta tese. As soluções (3.17) e (3.46) constituem o principal resultado do presente capítulo e serão utilizadas no capítulo 6 quando a equação-mestra deduzida no capítulo 5 for resolvida com a inclusão do ambiente na forma do banho térmico.

Capítulo 4 Os projetores de Nakajima-Zwanzig

“No seu delírio, sonha

Com a ciência.”

Edmond Rostand, *Cyrano de Bergerac*

“Uma criança disse O que é a relva?,

encantadora para mim, apresentando-a em suas mãos;

O que eu poderia responder à criança?

Ignoro o que a relva é, tanto quanto esse menino.”

Walt Whitman, *Folhas de relva*

4.1 Introdução

O emaranhamento entre a parte relevante do sistema e o ambiente pode dificultar a determinação da evolução temporal do sistema. Motivados pelos trabalhos de van Hove, Prigogine e Resibois (54–57), Nakajima e Zwanzig propuseram superar essa dificuldade tratando formalmente a operação do traço parcial do ambiente como uma projeção. Os projetores de Nakajima-Zwanzig (58, 59) atuam sobre o operador densidade total $\hat{\rho}_{SB}(t)$ fatorando-o na parte reduzida referente ao sistema principal $\hat{\rho}_S(t)$, calculada no tempo em

questão, tensorialmente multiplicada pela matriz densidade reduzida do ambiente $\hat{\rho}_B$, calculada no instante inicial, ou seja, $\hat{\rho}_{SB}(t) \mapsto \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_B$.

A abordagem seguida neste capítulo é baseada no trabalho de Zwanzig (59) e no capítulo 9 da referência (46). De fato, o próprio Zwanzig diz, na introdução de seu artigo, que seu objetivo é tornar mais compreensível o trabalho de seus antecessores no assunto. Os projetores serão definidos e, em seguida, aplicados sobre a equação de Liouville-von Neumann para obter a equação-mestra na aproximação de Born. Embora essa equação já tenha sido obtida de maneira mais simples por iterações no capítulo 2, o objetivo é exemplificar o uso dos projetores, já que serão de maneira totalmente análoga utilizados no próximo capítulo - e lá se revelarão de extrema utilidade.

4.2 Definições

Seja um sistema S , objeto de interesse, acoplado ao ambiente B . Os projetores de Nakajima-Zwanzig $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ têm sua ação definida sobre o operador densidade total $\hat{\rho}_{SB}(t)$ referente ao sistema total $S + B$ por

$$\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) = \text{tr}_B\{\hat{\rho}_{SB}(t)\} \otimes \hat{\rho}_B = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_B \quad (4.1)$$

e

$$\hat{Q}\hat{\rho}_{SB}(t) = \hat{\rho}_{SB}(t) - \hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) . \quad (4.2)$$

Em todas as aplicações desta tese, $\hat{\rho}_B$ será suposto independente do tempo. O super-operador $\hat{P}$ fornece toda a informação necessária para reconstruir a matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_S(t)$ do sistema principal. Pelas definições, é possível observar que os super-operadores obedecem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
\hat{P} + \hat{Q} &= \hat{1}, \\
\hat{P}^2 &= \hat{P}, \\
\hat{Q}^2 &= \hat{Q}, \\
\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

As duas propriedades intermediárias em (4.3) explicitam que $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ são projetores.

4.3 A equação de Nakajima-Zwanzig

Prosseguindo com a abordagem de (46), seja a equação de Liouville-von Neumann (2.6) na representação de interação

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB}(t) = -\frac{i}{\hbar}\alpha \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}_{SB}(t) \right] \tag{4.4}$$

que, com a definição do super-operador

$$\hat{H}(t) \cdot \equiv -\frac{1}{\hbar} \left[\hat{H}(t), \cdot \right] \tag{4.5}$$

se torna

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB}(t) = -i\alpha \hat{H}(t) \hat{\rho}_{SB}(t). \tag{4.6}$$

Para obter uma equação para a evolução de $\hat{\rho}_S(t) = \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_{SB}(t) \}$, os projetores serão aplicados sobre (4.6):

$$\begin{aligned}
\hat{P} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SB}(t) &= -i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \hat{\rho}_{SB}(t), \\
\hat{Q} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SB}(t) &= -i\alpha \hat{Q} \hat{H}(t) \hat{\rho}_{SB}(t)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(lembrando que $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ são independentes do tempo). No lado direito das (4.7), entre $\hat{H}(t)$ e $\hat{\rho}_{SB}(t)$, será aplicada a primeira propriedade (4.3) - a identidade:

$$\begin{aligned}\hat{P} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SB}(t) &= -i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t) - i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(t) , \\ \hat{Q} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SB}(t) &= -i\alpha \hat{Q} \hat{H}(t) \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t) - i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(t) .\end{aligned}\quad (4.8)$$

Para atingir o objetivo de obter uma equação para a parte relevante do sistema total, ou seja, $\hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t)$, convém integrar a segunda equação de (4.8) e substituí-la na primeira, ou seja,

$$\hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(t) = \hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(0) - i\alpha \int_0^t dt' \hat{Q} \hat{H}(t') \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t') - i\alpha \int_0^t dt' \hat{P} \hat{H}(t') \hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(t') \quad (4.9)$$

(onde, por simplificação, foi escolhido $t = 0$ como instante inicial) e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t) &= -i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t) \\ &\quad - i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \left[\hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(0) - i\alpha \int_0^t dt' \hat{Q} \hat{H}(t') \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t') \right. \\ &\quad \left. - i\alpha \int_0^t dt' \hat{P} \hat{H}(t') \hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(t') \right] \\ &= -i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(0) - i\alpha \hat{P} \hat{H}(t) \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t) \\ &\quad - \alpha^2 \hat{P} \hat{H}(t) \int_0^t dt' \hat{Q} \hat{H}(t') \hat{P} \hat{\rho}_{SB}(t') - \alpha^2 \hat{P} \hat{H}(t) \int_0^t dt' \hat{P} \hat{H}(t') \hat{Q} \hat{\rho}_{SB}(t') .\end{aligned}\quad (4.10)$$

A equação (4.10), que depende da condição inicial $\hat{\rho}_{SB}(0)$, é *não-markoviana* e exata para os graus de liberdade do sistema S , é a *equação de Nakajima-Zwanzig*. Até o momento, não foram feitas quaisquer hipóteses a respeito das condições iniciais.

4.4 A equação-mestra de Born-Markov

Agora, será feita a hipótese

$$\begin{aligned}
\hat{P}\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) &= \hat{P}\hat{H}(t')\text{tr}_B\{\hat{\rho}_{SB}(t)\}\hat{\rho}_B = -\frac{1}{\hbar}\hat{P}\left[\hat{H}(t'),\text{tr}_B\{\hat{\rho}_{SB}(t)\}\hat{\rho}_B\right] \\
&= -\frac{1}{\hbar}\text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t'),\text{tr}_B\{\hat{\rho}_{SB}(t)\}\hat{\rho}_B\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{\hbar}\text{tr}_B\left\{\left[\hat{H}(t'),\hat{\rho}_S(t)\hat{\rho}_B\right]\right\} \\
&= 0, \forall t, t'
\end{aligned} \tag{4.11}$$

de tal forma que (4.10) se torna

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) &= -i\alpha\hat{P}\hat{H}(t)\hat{Q}\hat{\rho}_{SB}(0) \\
&\quad -\alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{Q}\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') - \alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{P}\hat{H}(t')\hat{Q}\hat{\rho}_{SB}(t').
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Por outro lado, segundo (4.9), o último termo em (4.12) pode ser escrito em termos do estado inicial na aproximação de Born:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) &= -i\alpha\hat{P}\hat{H}(t)\hat{Q}\hat{\rho}_{SB}(0) \\
&\quad -\alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{Q}\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') - \alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{P}\hat{H}(t')\hat{Q}\hat{\rho}_{SB}(0).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Se, também, for suposto que no instante inicial o estado é fatorável, ou seja, $\hat{\rho}_{SB}(0) = \hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B$, então

$$\begin{aligned}
\hat{Q}\hat{\rho}_{SB}(0) &= \hat{Q}\hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B = (\hat{1} - \hat{P})\hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B \\
&= \hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B - \hat{P}\hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B \\
&= \hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B - \hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\hat{P}\hat{H}\hat{Q}\hat{\rho}_{SB}(0) = 0 \quad (4.15)$$

e o primeiro e o último termo em (4.13) se anularão, fornecendo

$$\frac{d}{dt}\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) = -\alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{Q}\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') . \quad (4.16)$$

Agora, o super-operador $\hat{Q}$ será eliminado de (4.16):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) &= -\alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'(\hat{1}-\hat{P})\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') \\ &= -\alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') + \alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{P}\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pela hipótese (4.11), essa equação se reduz a

$$\frac{d}{dt}\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) = -\alpha^2\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') . \quad (4.18)$$

Agora, convém expandir o super-operador $\hat{P}$ em (4.18):

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{H}(t')\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t') &= \hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'\hat{H}(t')\hat{\rho}_S(t')\hat{\rho}_B \\ &= -\frac{1}{\hbar}\hat{P}\hat{H}(t)\int_0^t dt'[\hat{H}(t'),\hat{\rho}_S(t')\hat{\rho}_B] \\ &= \frac{1}{\hbar^2}\hat{P}\left[\hat{H}(t),\int_0^t dt'[\hat{H}(t'),\hat{\rho}_S(t')\hat{\rho}_B]\right] \\ &= \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt'\hat{P}\left[\hat{H}(t),[\hat{H}(t'),\hat{\rho}_S(t')\hat{\rho}_B]\right] \\ &= \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt'tr_B\left\{[\hat{H}(t),[\hat{H}(t'),\hat{\rho}_S(t')\hat{\rho}_B]]\right\}\hat{\rho}_B \end{aligned} \quad (4.19)$$

e

$$\frac{d}{dt}\hat{P}\hat{\rho}_{SB}(t) = \frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t)\hat{\rho}_B \quad (4.20)$$

ou seja, (4.18) se torna

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t') \hat{\rho}_B \right] \right] \right\}. \quad (4.21)$$

Omitindo a constante α^2 , é obtida a *equação-mestra de Born* (ver (2.14) no capítulo 2):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t) \hat{\rho}_B \right] \right] \right\}. \quad (4.22)$$

A aproximação de Markov consistirá em tomar o limite $t \rightarrow \infty$ na integração, sendo então obtida a *equação-mestra de Born-Markov*

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t) \hat{\rho}_B \right] \right] \right\} \quad (4.23)$$

da mesma forma que em (2.15).

4.5 Contextualização

Os cálculos desenvolvidos neste capítulo utilizando os projetores de Nakajima-Zwanzig para obter a equação-mestra de Born-Markov são mais trabalhosos do que os desenvolvidos no início do capítulo 2 para obter o mesmo resultado. Entretanto, eles serviram para ilustrar a aplicação de tais super-operadores, que serão extremamente úteis no próximo capítulo pois, ao contrário do ocorrido aqui, terão um papel vital para compactar e facilitar as deduções.

Capítulo 5 Equação-mestra para a medida sobre o sistema em contato com ambiente

“Quando nos interessamos por uma manifestação da natureza, será que sempre devemos dar a ela um sentido formalizado?”

Johann Wolfgang von Goethe, *Os sofrimentos do jovem Werther*

“Inventei para eles a mais bela ciência, a dos números; formei o sistema do alfabeto e fixei a memória, a mãe das ciências, a alma da vida.”

Ésquilo, *Prometeu acorrentado*

5.1 Introdução

Neste capítulo, se iniciam as contribuições originais da presente tese. A equação de Lindblad - discutida nos capítulos 2 e 3 - permite inserir o tempo de interação entre um sistema e o medidor, quantificando a influência desta interação nas probabilidades associadas aos resultados possíveis. Como exemplificado no capítulo 2, o lindbladiano surge com a aproximação markoviana e sua contribuição não-unitária é utilizada para tratar o medidor. Convencionalmente, nessa abordagem são considerados apenas os dois sistemas já mencionados: o principal S e o medidor. Aqui, para um tratamento mais realista, será introduzido, via

abordagem de Redfield (ver capítulo 2 e (46)) um ambiente B no liouvillian o que, dessa forma, permitirá um tratamento não-markoviano da interação $S - B$. O objetivo será, a partir daí, tomar o traço parcial dos graus de liberdade do ambiente conduzindo a uma equação-mestra onde as contribuições de S e B fiquem fatoradas, facilitando sua resolução. Nesse procedimento, serão utilizados super-operadores referentes aos vários termos da equação de Lindblad com o ambiente e os projetores de Nakajima-Zwanzig, vistos no capítulo anterior e que serão vitais aqui. A equação final se revelará compacta e relativamente simples. A resolução da mesma, abordada no capítulo seguinte para o caso específico de um sistema de dois níveis em contato com um banho de osciladores harmônicos, dependerá das soluções exatas apresentadas no capítulo 3 para o problema sem o ambiente.

Os cálculos apresentados neste capítulo são também mostrados no artigo (60), baseado no trabalho desta tese.

5.2 Definições

Como visto anteriormente, a forma mais geral para uma equação-mestra na abordagem de semi-grupos dinâmicos quânticos é a equação de Lindblad,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_{SB}] + \sum_j \left(\hat{L}_j \hat{\rho}_{SB} \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j, \hat{\rho}_{SB} \} \right). \quad (5.1)$$

Será tratado o caso em que o hamiltoniano $\hat{H}$ é escrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{H}_{SB} + \hat{H}_S \quad (5.2)$$

onde $\hat{H}_B$ corresponde ao ambiente, $\hat{H}_S$ ao sistema de interesse e $\hat{H}_{SB}$ à interação entre o sistema e o ambiente que pode, por sua vez, ser escrita como uma soma de termos fatoráveis

$$\hat{H}_{SB} = \sum_k \hat{S}_k \hat{B}_k, \quad (5.3)$$

onde, para cada k , $\hat{S}_k$ age só no sistema e $\hat{B}_k$, só no ambiente. A condição (5.3) é geral, sendo satisfeita por *amplitude* e *phase dampings* (46). Por hipótese, os lindblads $\hat{L}_j$ atuarão apenas sobre o sistema. O objetivo é obter uma equação para a evolução temporal do operador densidade $\hat{\rho}_S$ relativo apenas ao sistema,

$$\hat{\rho}_S(t) = \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_{SB}(t) \} .$$

Inicialmente, serão definidos alguns super-operadores. Para todo $\hat{X}$,

$$\hat{B}\hat{X} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_B, \hat{X}] , \quad (5.4)$$

$$\hat{S}\hat{X} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{X}] + \sum_j \left(\hat{L}_j \hat{X} \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j, \hat{X} \} \right) , \quad (5.5)$$

e

$$\hat{F}\hat{X} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{SB}, \hat{X}] . \quad (5.6)$$

Além destes, serão utilizados também os projetores de Nakajima-Zwanzig $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ (capítulo 4), que separam as partes relativas ao sistema e ao ambiente, projetando este último no instante inicial $t = t_0$

$$\hat{P}\hat{X}(t) = \hat{\rho}_B(t_0) \otimes \text{Tr}_B \{ \hat{X}(t) \} \quad (5.7)$$

e

$$\hat{Q} = \hat{I} - \hat{P} \quad (5.8)$$

para todo $\hat{X}(t)$.

5.3 Propriedades dos super-operadores $\hat{\hat{B}}$, $\hat{\hat{S}}$ e $\hat{\hat{F}}$

Como, pelas definições (5.4) e (5.5), $\hat{\hat{B}}$ atuará apenas sobre o ambiente e $\hat{\hat{S}}$ somente no sistema, então

$$\hat{\hat{B}}\hat{\hat{S}} = \hat{\hat{S}}\hat{\hat{B}}.$$

Dessa comutação de super-operadores segue que

$$\exp(\hat{\hat{S}}t + \hat{\hat{B}}t) = \exp(\hat{\hat{S}}t) \exp(\hat{\hat{B}}t) = \exp(\hat{\hat{B}}t) \exp(\hat{\hat{S}}t).$$

Para simplificar, será considerado o instante inicial como sendo zero ($t_0 = 0$) e o operador densidade do sistema e seu ambiente fatorável nesse instante:

$$\hat{\rho}_{SB}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_B(0).$$

Daqui em diante, por comodidade, será ignorado o símbolo $\otimes$. Assim,

$$\hat{\rho}_{SB}(0) = \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) = \hat{\rho}_B(0) \hat{\rho}_S(0).$$

Prosseguindo, é conveniente analisar o traço parcial de $\exp(-\hat{\hat{B}}t)$ sobre o operador densidade global,

$$\begin{aligned} \text{tr}_B \left\{ \exp(-\hat{\hat{B}}t) \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \text{tr}_B \left\{ \hat{\hat{B}}^n \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} \\ &= \text{tr}_B \left\{ \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \text{tr}_B \left\{ \hat{\hat{B}}^n \hat{\rho}_{SB}(t) \right\}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \text{tr}_B \left\{ \hat{\hat{B}}^n \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} &= \text{tr}_B \left\{ \hat{\hat{B}} \hat{\hat{B}}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}_B, \hat{\hat{B}}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Como o traço independe da base, a escolha mais óbvia para prosseguir no desenvolvimento da

expressão (5.9) é utilizar a base $\{|k\rangle\}$ do ambiente, formada pelos auto-estados de $\hat{H}_B$, isto é,

$$\hat{H}_B |k\rangle = E_k^B |k\rangle$$

para todo k (onde os autovalores podem ou não ser degenerados). Dessa forma.

$$\begin{aligned} \text{tr}_B \left\{ \hat{B}^n \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \langle k | \left[\hat{H}_B, \hat{B}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) \right] | k \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle k | \hat{H}_B \hat{B}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) | k \rangle - \langle k | \hat{B}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) \hat{H}_B | k \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle k | E_k^B \hat{B}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) | k \rangle - \langle k | \hat{B}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) E_k^B | k \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[E_k^B \langle k | \hat{B}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) | k \rangle - E_k^B \langle k | \hat{B}^{n-1} \hat{\rho}_{SB}(t) | k \rangle \right] \\ &= 0 \text{ para todo } k. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{tr}_B \left\{ \exp(-\hat{B}t) \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} &= \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_{SB}(t) \} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \text{tr}_B \left\{ \hat{B}^n \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} \\ &= \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_{SB}(t) \} + 0 \\ &= \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_{SB}(t) \}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dessa propriedade decorre que

$$\begin{aligned} \exp(-\hat{S}t) \hat{\rho}_S(t) &= \exp(-\hat{S}t) \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_{SB}(t) \} \\ &= \exp(-\hat{S}t) \text{tr}_B \left\{ \exp(-\hat{B}t) \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} \\ &= \text{tr}_B \left\{ \exp(-\hat{S}t) \exp(-\hat{B}t) \hat{\rho}_{SB}(t) \right\} \\ &= \text{tr}_B \left\{ \exp(-\hat{S}t - \hat{B}t) \hat{\rho}_{SB}(t) \right\}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Com relação ao super-operador de interação (5.6), a condição (5.3) fornecerá,

$$\begin{aligned} \hat{F} \hat{X} &= -\frac{i}{\hbar} \left[\sum_k \hat{S}_k \hat{B}_k, \hat{X} \right] \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \left[\hat{S}_k \hat{B}_k, \hat{X} \right] \end{aligned}$$

para todo $\hat{X}$.

5.4 Traço parcial do ambiente

A equação a ser resolvida é

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_{SB}, \hat{\rho}_{SB}(t) \right] + \sum_j \left(\hat{L}_j \hat{\rho}_{SB} \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j, \hat{\rho}_{SB} \right\} \right).$$

Em termos dos super-operadores (5.4), (5.5) e (5.6), essa equação se torna

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB}(t) = \left(\hat{S} + \hat{B} + \hat{F} \right) \hat{\rho}_{SB}(t). \quad (5.12)$$

Com base nas propriedades (5.10) e (5.11), por praticidade convém definir

$$\hat{\alpha}(t) = \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \hat{\rho}_{SB}(t). \quad (5.13)$$

Então,

$$\hat{\rho}_S(t) = \exp \left(\hat{S}t \right) \text{tr}_B \{ \hat{\alpha}(t) \} \quad (5.14)$$

e a equação satisfeita por $\hat{\alpha}(t)$ é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\alpha}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \hat{\rho}_{SB}(t) \right] \\ &= \left[\frac{d}{dt} \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \right] \hat{\rho}_{SB}(t) + \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SB}(t) \\ &= - \left(\hat{S} + \hat{B} \right) \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \hat{\rho}_{SB}(t) + \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SB}(t). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Se (5.12) for substituída em (5.15), o resultado será

$$\frac{d}{dt}\hat{\alpha}(t) = \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \hat{F} \exp \left(\hat{S}t + \hat{B}t \right) \hat{\alpha}(t).$$

Logo, convém definir o super-operador:

$$\hat{G}(t) = \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \hat{F} \exp \left(\hat{S}t + \hat{B}t \right). \quad (5.16)$$

É interessante notar que $\hat{G}(t)$ é da ordem da interação $\hat{H}_{SB}$, pois é proporcional ao super-operador $\hat{F}$ que, por sua vez, é da ordem de $\hat{H}_{SB}$. Assim,

$$\frac{d}{dt}\hat{\alpha}(t) = \hat{G}(t)\hat{\alpha}(t). \quad (5.17)$$

Até agora, foram utilizados super-operadores baseados em cada termo do hamiltoniano e do lindbladiano ($\hat{B}$, $\hat{S}$ e $\hat{F}$) obtendo a equação (5.17) que envolve o operador densidade global $\hat{\rho}_{SB}(t)$ através de $\hat{\alpha}(t)$. Agora serão utilizados os projetores de Nakajima-Zwanzig sobre (5.17):

$$\begin{aligned} \hat{P}\frac{d}{dt}\hat{\alpha}(t) &= \hat{P}\hat{G}(t)\hat{\alpha}(t) \\ &= \hat{P}\hat{G}(t)(\hat{P} + \hat{Q})\hat{\alpha}(t) \\ &= \hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}\hat{\alpha}(t) + \hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}\hat{\alpha}(t) \\ &= \hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}^2\hat{\alpha}(t) + \hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}^2\hat{\alpha}(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{Q}\frac{d}{dt}\hat{\alpha}(t) &= \hat{Q}\hat{G}(t)\hat{\alpha}(t) \\ &= \hat{Q}\hat{G}(t)(\hat{P} + \hat{Q})\hat{\alpha}(t) \\ &= \hat{Q}\hat{G}(t)\hat{P}\hat{\alpha}(t) + \hat{Q}\hat{G}(t)\hat{Q}\hat{\alpha}(t) \\ &= \hat{Q}\hat{G}(t)\hat{P}^2\hat{\alpha}(t) + \hat{Q}\hat{G}(t)\hat{Q}^2\hat{\alpha}(t). \end{aligned}$$

Como esses projetores são independentes do tempo,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[\hat{P}\hat{\alpha}(t)] = [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}][\hat{P}\hat{\alpha}(t)] + [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}][\hat{Q}\hat{\alpha}(t)] \\ \frac{d}{dt}[\hat{Q}\hat{\alpha}(t)] = [\hat{Q}\hat{G}(t)\hat{P}][\hat{P}\hat{\alpha}(t)] + [\hat{Q}\hat{G}(t)\hat{Q}][\hat{Q}\hat{\alpha}(t)] \end{cases}. \quad (5.18)$$

A integração da segunda de (5.18) leva a:

$$\hat{Q}\hat{\alpha}(t) = \hat{Q}\hat{\alpha}(0) + \int_0^t dt' [\hat{Q}\hat{G}(t')\hat{P}][\hat{P}\hat{\alpha}(t')] + \int_0^t dt' [\hat{Q}\hat{G}(t')\hat{Q}][\hat{Q}\hat{\alpha}(t')].$$

Da definição (5.13) de $\hat{\alpha}(t)$,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(0) &= \hat{\rho}_{SB}(0) \\ &= \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\hat{Q}\hat{\alpha}(0) &= (\hat{I} - \hat{P}) \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) \\ &= \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) - \hat{P} \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) \\ &= \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) - \hat{\rho}_B(0) \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) \} \\ &= \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) - \hat{\rho}_B(0) \hat{\rho}_S(0) \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_B(0) \} \\ &= \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) - \hat{\rho}_B(0) \hat{\rho}_S(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{Q}\hat{\alpha}(t) = \int_0^t dt' [\hat{Q}\hat{G}(t') \hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] + \int_0^t dt' [\hat{Q}\hat{G}(t') \hat{Q}] [\hat{Q}\hat{\alpha}(t')], \quad (5.19)$$

mostrando que $\hat{Q}\hat{\alpha}(t)$ é da ordem de $\hat{H}_{SB}$. Aqui, começará a *aproximação de Born*, desprezando todos os termos de ordem de $\hat{H}_{SB}^3$ ou superior. A iteração de (5.19) fornece, até segunda ordem em $\hat{H}_{SB}$,

$$\begin{aligned}\hat{Q}\hat{\alpha}(t) &= \int_0^t dt' [\hat{Q}\hat{G}(t') \hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &+ \int_0^t dt' [\hat{Q}\hat{G}(t') \hat{Q}] \left[\int_0^{t'} dt'' [\hat{Q}\hat{G}(t'') \hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t'')] \right].\end{aligned} \quad (5.20)$$

Integrando, agora, a primeira de (5.18):

$$\hat{P}\hat{\alpha}(t) = \hat{P}\hat{\alpha}(0) + \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t') \hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] + \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t') \hat{Q}] [\hat{Q}\hat{\alpha}(t')]. \quad (5.21)$$

Substituindo (5.21) na primeira de (5.18), é obtida

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\hat{P}\hat{\alpha}(t)] &= [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] + [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &+ [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t')\hat{Q}] [\hat{Q}\hat{\alpha}(t')] + [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}] [\hat{Q}\hat{\alpha}(t)]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

O terceiro termo do membro direito de (5.22) é de terceira ordem em $\hat{H}_{SB}$, segundo a Eq. (5.20), e, portanto, deve ser desprezado. Substituindo a Eq. (5.20) no quarto termo do membro direito de (5.22) e desprezando termos de ordem em $\hat{H}_{SB}$ superior à segunda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\hat{P}\hat{\alpha}(t)] &= [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] + [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &+ [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}] \int_0^t dt' [\hat{Q}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &= [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] + \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &+ \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}] [\hat{Q}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &= [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] + \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}\hat{P}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &+ \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}\hat{Q}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &= [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] + \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &+ \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &= [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] \\ &+ \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}\hat{G}(t')\hat{P} + \hat{P}\hat{G}(t)\hat{Q}\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')] \\ &= [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] \\ &+ \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)(\hat{P} + \hat{Q})\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} [\hat{P}\hat{\alpha}(t)] = [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(0)] + \int_0^t dt' [\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}] [\hat{P}\hat{\alpha}(t')].$$

O primeiro termo do membro direito dessa equação também pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\left[\hat{P} \hat{G}(t) \hat{P} \right] \left[\hat{P} \hat{\alpha}(0) \right] &= \hat{P} \hat{G}(t) \hat{P} \hat{P} \hat{\alpha}(0) \\
&= \hat{P} \hat{G}(t) \hat{P} \hat{\alpha}(0) \\
&= \hat{P} \hat{G}(t) \hat{P} \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) \\
&= \hat{P} \hat{G}(t) \hat{\rho}_B(0) \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) \} \\
&= \hat{P} \hat{G}(t) \hat{\rho}_B(0) \hat{\rho}_S(0) \text{tr}_B \{ \hat{\rho}_B(0) \} \\
&= \hat{P} \hat{G}(t) \hat{\rho}_B(0) \hat{\rho}_S(0) \\
&= \hat{\rho}_B(0) \text{tr}_B \left\{ \hat{G}(t) \hat{\rho}_B(0) \hat{\rho}_S(0) \right\} \\
&= \hat{\rho}_B(0) \text{tr}_B \left\{ \hat{G}(t) \hat{\rho}_B(0) \right\} \hat{\rho}_S(0).
\end{aligned}$$

Mas, segundo (5.16),

$$\begin{aligned}
\text{tr}_B \left\{ \hat{G}(t) \hat{\rho}_B(0) \right\} \hat{\rho}_S(0) &= \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{S}t - \hat{B}t \right) \hat{F} \exp \left(\hat{S}t + \hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right\} \hat{\rho}_S(0) \\
&= \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{S}t \right) \exp \left(-\hat{B}t \right) \hat{F} \exp \left(\hat{B}t \right) \exp \left(\hat{S}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right\} \hat{\rho}_S(0) \\
&= \exp \left(-\hat{S}t \right) \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{B}t \right) \hat{F} \exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right\} \exp \left(\hat{S}t \right) \hat{\rho}_S(0)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[\hat{P} \hat{G}(t) \hat{P} \right] \left[\hat{P} \hat{\alpha}(0) \right] = \hat{\rho}_B(0) \exp \left(-\hat{S}t \right) \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{B}t \right) \hat{F} \exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right\} \exp \left(\hat{S}t \right) \hat{\rho}_S(0).$$

Agora, será utilizada a condição (5.3),

$$\begin{aligned}
\text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{B}t \right) \hat{F} \exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right\} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{B}t \right) \left[\hat{S}_k \hat{B}_k, \left[\exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right] \right] \right\} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{B}t \right) \hat{S}_k \left[\hat{B}_k, \left[\exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right] \right] \right\} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \hat{S}_k \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{B}t \right) \left[\hat{B}_k, \left[\exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Da forma análoga à prova de (5.10), segue que

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_B \left\{ \exp \left(-\hat{B}t \right) \left[\hat{B}_k, \left[\exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right] \right] \right\} &= \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{B}_k, \left[\exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right] \right] \right\} \\
 &= \text{tr}_B \left\{ \hat{B}_k \left[\exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right] \right\} \\
 &= \text{tr}_B \left\{ \left[\exp \left(\hat{B}t \right) \hat{\rho}_B(0) \right] \hat{B}_k \right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

forneendo, então,

$$\left[\hat{P}\hat{G}(t)\hat{P} \right] \left[\hat{P}\hat{\alpha}(0) \right] = 0$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[\hat{P}\hat{\alpha}(t) \right] &= \int_0^t dt' \left[\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P} \right] \left[\hat{P}\hat{\alpha}(t') \right] \\
 &= \int_0^t dt' \left[\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{P}\hat{\alpha}(t') \right] \\
 &= \int_0^t dt' \left[\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t') \right].
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Agora, essa equação pode ser iterada para obter, entre um certo t' e t ,

$$\hat{P}\hat{\alpha}(t) - \hat{P}\hat{\alpha}(t') = \int_{t'}^t dt'' \int_0^{t''} dt''' \left[\hat{P}\hat{G}(t'')\hat{G}(t''')\hat{P}\hat{\alpha}(t''') \right],$$

o que mostra que a diferença entre $\hat{P}\hat{\alpha}(t)$ e $\hat{P}\hat{\alpha}(t')$ é de segunda ordem em $\hat{H}_{SB}$ e, portanto, é permitido escrever $\hat{P}\hat{\alpha}(t)$ ao invés de $\hat{P}\hat{\alpha}(t')$ no integrando de (5.23). Assim, a equação-mestra final será

$$\frac{d}{dt} \left[\hat{P}\hat{\alpha}(t) \right] = \int_0^t dt' \left[\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) \right]. \tag{5.24}$$

Como será visto no próximo capítulo, escolhendo convenientemente a densidade espectral, (5.24) permitirá fazer com que o ambiente seja não-markoviano. A resolução de (5.24) dada a condição

inicial

$$\begin{aligned}
 \mathrm{tr}_B \{ \hat{\alpha}(0) \} &= \mathrm{tr}_B \{ \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_B(0) \} \\
 &= \hat{\rho}_S(0) \mathrm{tr}_B \{ \hat{\rho}_B(0) \} \\
 &= \hat{\rho}_S(0),
 \end{aligned}$$

fornece o operador densidade reduzido do sistema através de (5.14).

5.5 Contextualização

Em suma, foi apresentado neste capítulo um novo método para tratar a equação de Lindblad com a introdução de um ambiente não-markoviano que será, no próximo capítulo, aplicado para tratar medidas de tempo finito. O fato de a interação sistema-medidor ser markoviana, mas a interação sistema-ambiente ser não-markoviana torna essa abordagem inédita. O método apresentado, baseado na álgebra de super-operadores e nos projetores de Nakajima-Zwanzig, simplifica substancialmente o procedimento de tomar o traço parcial dos graus de liberdade do ambiente, originando uma equação compacta e que pode ser solucionada utilizando as soluções originais para o hamiltoniano do sistema sem o ambiente (como será feito no próximo capítulo).

Embora os cálculos desenvolvidos neste capítulo tenham como base a equação de Lindblad, suas aplicações são bem amplas. Por exemplo, como demonstrado em (46), mesmo no caso do movimento browniano quântico é possível levar a equação-mestra de Caldeira-Leggett (61) à forma de Lindblad com o acréscimo de um termo que se torna pequeno no limite de altas temperaturas.

Ressaltando, o principal resultado deste capítulo é a equação (5.24), a partir da qual as situações de medida sobre um sistema em contato com o ambiente serão analisadas. No próximo capítulo, essa equação é resolvida considerando um único *spin* $\frac{1}{2}$ em contato com um banho de osciladores harmônicos, interagindo segundo uma interação do tipo *phase damping* (46). Com o auxílio das soluções do capítulo 3, serão obtidas soluções analíticas de (5.24) para medidas das componentes de *spin* que comutam ou não com o hamiltoniano de interação sistema-ambiente.

Capítulo 6 Medida sobre o sistema em contato com o ambiente

“podeis aprender que o homem é sempre a melhor medida.

Mais: que a medida do homem não é a morte mas a vida.”

João Cabral de Melo Neto, *Paisagens com figuras*

“O que depende da sorte nos é oculto; nada a tal respeito nos pode instruir e nenhuma ciência jamais revelará.”

Eurípedes, *Alceste*

6.1 Introdução

Uma descrição realista do aparato de medida implica na distinção entre seus graus de liberdade microscópicos e macroscópicos. Para cada um dos possíveis autovalores do observável medido, há um único valor macroscópico. Entretanto, tal variável apenas não permite descrever completamente o estado do aparato de medida, pois existem muitos estados microscópicos correspondentes ao mesmo valor da variável macroscópica. Como, em uma medida, a única variável importante do aparato é a macroscópica, deve ser efetuado o traço parcial relativo às variáveis microscópicas. Como sugerido no capítulo 2 e em (53) - podendo ser verificado no caso mais geral em (46) - esse procedimento leva, com a aproximação de Markov para a interação sistema-aparato, à equação de Lindblad (45).

O tratamento dado aqui ao processo de medida obedece à interpretação estatística da mecânica quântica, já que a equação de Lindblad é uma equação para o operador densidade e é dele que todas as informações possíveis do sistema físico em questão serão extraídas. O lindbladiano permitirá analisar a influência, sobre o operador densidade final, do tempo em que o medidor interage com o sistema principal. O medidor poderá afetar as populações, relacionadas às probabilidades associadas aos possíveis resultados da medida, e as coerências, associadas ao tempo ideal de duração dessa interação controlável. A redução - ou colapso - da função de onda não será abordado.

Para tornar mais claro esse tratamento, é conveniente utilizar uma visão semelhante à de Peres (52), que chama o procedimento de obter informações do sistema físico de *intervenção*. Esta se divide em duas partes: a *medida*, onde o aparato interage com o sistema e adquire as informações, e a *leitura* (*output*), onde o resultado da intervenção é conhecido e a redução da função de onda ocorre. Neste último estágio são obtidas as informações probabilísticas através dos elementos diagonais do operador densidade - as populações. Assim, todo o tratamento feito através da equação de Lindblad refere-se ao estágio da medida; o caráter intrinsecamente estatístico da intervenção (e da própria mecânica quântica) é passado para a leitura.

No capítulo anterior, na equação de Lindblad onde o sistema principal S interage markovianamente com o medidor representado pelo lindbladiano, foi acrescentado o ambiente B interagindo com S - para possibilitar o tratamento não-markoviano dessa interação o ambiente foi introduzido no liouvillian. Através dos operadores de Nakajima-Zwanzig (ver capítulo 4) e da álgebra de super-operadores, foi obtida a equação (5.24) onde as contribuições de S e B podem ser facilmente fatoradas. Neste capítulo, a equação será resolvida para o caso em que um único *spin* $\frac{1}{2}$ se encontra em contato com um banho térmico. Serão analisadas duas situações, em que o lindblad comuta ou não com o hamiltoniano de interação. Tal como no capítulo 3, esse fato se revelará de extrema importância nos efeitos sobre as populações e coerências finais. Ilustrando o fato de a equação (5.24) levar imediatamente à fatoração das contribuições do sistema principal e do ambiente, este último será tratado primeiro, e o resultado será utilizado nos itens seguintes.

Os cálculos apresentados neste capítulo são também mostrados no artigo (62), baseado no trabalho desta tese.

6.2 Estabelecimento do problema

A equação (5.24) será resolvida considerando, em (5.2):

$$\begin{cases} \hat{H}_S &= \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z \\ \hat{H}_{SB} &= \hbar\hat{\sigma}_z\sum_k \left(g_k\hat{b}_k^\dagger + g_k^*\hat{b}_k\right) \\ \hat{H}_B &= \hbar\sum_k \omega_k\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k \end{cases} . \quad (6.1)$$

Evidentemente, $\hat{H}_{SB}$ obedece a condição (5.3), pois

$$\begin{cases} \hat{S}_k &= \hbar\hat{\sigma}_z \\ \hat{B}_k &= g_k\hat{b}_k^\dagger + g_k^*\hat{b}_k \end{cases} \quad (6.2)$$

ou, ainda, definindo o operador

$$\hat{B} \equiv \sum_k \hat{B}_k = \sum_k \left(g_k\hat{b}_k^\dagger + g_k^*\hat{b}_k\right) \quad (6.3)$$

a interação poderá ser escrita de forma simplificada como

$$\hat{H}_{SB} = \hbar\hat{\sigma}_z\hat{B} . \quad (6.4)$$

Como no capítulo 3, serão considerados os lindblads (3.4),

$$\hat{L} = \lambda\hat{\sigma}_\alpha, \quad \alpha = x, z, \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Um aspecto pouco usual e que deve ser esclarecido é a ação das exponenciais de superoperadores, $e^{\hat{S}t}$ e $e^{\hat{B}t}$. Para tal, sejam, a princípio, os elementos $\hat{X}'$ e $\hat{X}$, relacionados pelo fator $e^{\hat{B}t}$:

$$\hat{X}' = e^{\hat{B}t}\hat{X} . \quad (6.5)$$

Derivando temporalmente e utilizando a própria (6.5),

$$\frac{d}{dt}\hat{X}' = \hat{B}e^{\hat{B}t}\hat{X} = \hat{B}\hat{X}' . \quad (6.6)$$

Se, agora, for considerada a definição (5.4) do super-operador $\hat{B}$, será obtida a elementar equação de Liouville-von Neumann,

$$\frac{d}{dt}\hat{X}' = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_B, \hat{X}'] , \quad (6.7)$$

cujas solução é facilmente determinada para $\hat{H}_B$ independente do tempo - como é o caso em (6.1):

$$\hat{X}' = e^{\hat{B}t}\hat{X} = e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{X}e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} . \quad (6.8)$$

O procedimento é análogo para $e^{\hat{S}t}$, onde serão utilizadas as soluções analíticas (3.17) e (3.42), conforme o caso. É fácil demonstrar que

$$\begin{aligned} e^{\hat{B}t}e^{\hat{B}t'} &= e^{\hat{B}(t+t')} \\ e^{\hat{S}t}e^{\hat{S}t'} &= e^{\hat{S}(t+t')} . \end{aligned} \quad (6.9)$$

O termo $\hat{P}\hat{\alpha}(t)$ aparece em ambos os lados de (5.24) e uma análise mais aprofundada do mesmo pode simplificar os passos para resolver a equação. Tendo em vista a aproximação de Born-Markov,

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{\alpha}(t) &= \hat{P}e^{-\hat{S}t-\hat{B}t}\hat{\rho}_{SB}(t) \stackrel{(6.9)}{=} \hat{P}e^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\hat{\rho}_{SB}(t) \\ &= tr_B \left\{ e^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\hat{\rho}_S(t)\hat{\rho}_B \right\} \hat{\rho}_B = e^{-\hat{S}t}\hat{\rho}_S(t) tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t}\hat{\rho}_B \right\} \hat{\rho}_B \\ &= e^{-\hat{S}t}\hat{\rho}_S(t)\hat{\rho}_B . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Definindo, então, o operador $\hat{R}(t)$ como

$$\hat{R}(t) \equiv e^{-\hat{S}t}\hat{\rho}_S(t) , \quad (6.11)$$

$\hat{P}\hat{\alpha}(t)$ se torna

$$\hat{P}\hat{\alpha}(t) = \hat{R}(t) \hat{\rho}_B. \quad (6.12)$$

Toda a resolução de (5.24) será feita mantendo o operador $\hat{R}(t)$. Ao final, para recuperar o operador densidade do sistema, será feita a transformação inversa:

$$\hat{\rho}_S(t) = e^{\hat{S}t} \hat{R}(t). \quad (6.13)$$

Evidentemente,

$$\hat{\rho}_S(0) = \hat{R}(0). \quad (6.14)$$

6.3 Expandindo o integrando

Aproveitando a vantagem da equação (5.24) de fornecer, ao final, as partes referentes ao ambiente e ao sistema fatoradas, em primeiro lugar será tratado o integrando envolvendo os super-operadores. O resultado obtido será geral, desde que as condições impostas na dedução sejam obedecidas.

Tendo em vista (6.11), o integrando assume a forma $\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{R}(t)\hat{\rho}_B$. Expandindo-o gradualmente, primeiro será analisado o termo $\hat{G}(t')\hat{R}(t)\hat{\rho}_B$,

$$\begin{aligned}
\hat{G}(t') \hat{R}(t) \hat{\rho}_B &\stackrel{(5.16)}{=} e^{-\hat{S}t'} e^{-\hat{B}t'} \hat{F} e^{\hat{S}t'} e^{\hat{B}t'} \hat{R}(t) \hat{\rho}_B \\
&= e^{-\hat{S}t'} e^{-\hat{B}t'} \hat{F} \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \\
&\stackrel{(5.6)}{=} -\frac{i}{\hbar} e^{-\hat{S}t'} e^{-\hat{B}t'} \left[\hat{H}_{SB}, \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \\
&\stackrel{(6.4)}{=} -ie^{-\hat{S}t'} e^{-\hat{B}t'} \left[\hat{\sigma}_z \hat{B}, \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \\
&= -ie^{-\hat{S}t'} e^{-\hat{B}t'} \left[\hat{\sigma}_z \hat{B} \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) - \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{\sigma}_z \hat{B} \right] \\
&= ie^{-\hat{S}t'} e^{-\hat{B}t'} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} - \hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \\
&= ie^{-\hat{S}t'} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] e^{-\hat{B}t'} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \\
&- ie^{-\hat{S}t'} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] e^{-\hat{B}t'} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right]. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Ainda não é conveniente explicitar os efeitos das exponenciais de $\hat{S}$ e $\hat{B}$. Agora, sobre (6.15) será atuado o super-operador $\hat{G}(t)$:

$$\begin{aligned}
\hat{G}(t) \hat{G}(t') \hat{R}(t) \hat{\rho}_B &= i\hat{G}(t) e^{-\hat{S}t'} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] e^{-\hat{B}t'} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \\
&- i\hat{G}(t) e^{-\hat{S}t'} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] e^{-\hat{B}t'} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \\
&= ie^{-\hat{S}t} e^{-\hat{B}t} \hat{F} e^{\hat{S}t} e^{\hat{B}t} e^{-\hat{S}t'} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] e^{-\hat{B}t'} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \\
&- ie^{-\hat{S}t} e^{-\hat{B}t} \hat{F} e^{\hat{S}t} e^{\hat{B}t} e^{-\hat{S}t'} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] e^{-\hat{B}t'} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \\
&\stackrel{(6.9)}{=} ie^{-\hat{S}t} e^{-\hat{B}t} \hat{F} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \\
&- ie^{-\hat{S}t} e^{-\hat{B}t} \hat{F} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\}. \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Cada termo em (6.16)

$$\begin{aligned}
\hat{G}(t) \hat{G}(t') \hat{R}(t) \hat{\rho}_B &= ie^{-\hat{S}t} e^{-\hat{B}t} \hat{F} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \\
&- ie^{-\hat{S}t} e^{-\hat{B}t} \hat{F} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

será tratado em separado para a expansão do super-operador $\hat{\hat{F}}$. O primeiro fornece

$$\begin{aligned}
& ie^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\hat{\hat{F}}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\} \\
&= ie^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left[\hat{H}_{SB},\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\right] \\
&= e^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\left[\hat{\sigma}_z\hat{B},\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\right] \\
&= e^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\left[\hat{\sigma}_z\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\hat{B}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\right. \\
&\quad \left.-\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\hat{\sigma}_z\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\hat{B}\right] \\
&= e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}e^{-\hat{B}t}\hat{B}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\} \\
&\quad -e^{-\hat{S}t}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\hat{\sigma}_ze^{-\hat{B}t}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\hat{B}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& ie^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\hat{\hat{F}}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\} \\
&= e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}e^{-\hat{B}t}\hat{B}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\} \\
&\quad -e^{-\hat{S}t}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\hat{\sigma}_ze^{-\hat{B}t}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\hat{B} \quad . \quad (6.17)
\end{aligned}$$

O segundo,

$$\begin{aligned}
& ie^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\hat{\hat{F}}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\} \\
&= ie^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left[\hat{H}_{SB},\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\}\right] \\
&= e^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\left[\hat{\sigma}_z\hat{B},\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\}\right] \\
&= e^{-\hat{S}t}e^{-\hat{B}t}\left[\hat{\sigma}_z\hat{B}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\}\right. \\
&\quad \left.-\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\}\hat{\sigma}_z\hat{B}\right] \\
&= e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}e^{-\hat{B}t}\hat{B}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\} \\
&\quad -e^{-\hat{S}t}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}\hat{\sigma}_ze^{-\hat{B}t}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\}\hat{B}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& i e^{-\hat{S}t} e^{-\hat{B}t} \hat{F} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \\
& = e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} e^{-\hat{B}t} \hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \\
& - e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \hat{B} \quad . \quad (6.18)
\end{aligned}$$

Substituindo (6.17) e (6.18) em (6.16), é obtida a equação

$$\begin{aligned}
\hat{G}(t) \hat{G}(t') \hat{R}(t) \hat{\rho}_B & = e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} e^{-\hat{B}t} \hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \\
& - e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \hat{B} \\
& - e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} e^{-\hat{B}t} \hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \\
& + e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \hat{B} \quad (6.19)
\end{aligned}$$

que depende apenas das exponenciais dos super-operadores $\hat{S}$ e $\hat{B}$. Completando o integrando, a essa expressão será aplicado o projetor $\hat{P}$

$$\begin{aligned}
\hat{P} \hat{G}(t) \hat{G}(t') \hat{P} \hat{\alpha}(t) & = tr_B \left\{ e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} e^{-\hat{B}t} \hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \right. \\
& - e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \hat{B} \\
& - e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} e^{-\hat{B}t} \hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \\
& \left. + e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \hat{B} \right\} \otimes \hat{\rho}_B
\end{aligned}$$

ou, separando os termos,

$$\begin{aligned}
& \hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) \\
&= e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}tr_B\left\{e^{-\hat{B}t}\hat{B}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\right\}\otimes\hat{\rho}_B \\
&-e^{-\hat{S}t}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\hat{\sigma}_z\right]\right\}\hat{\sigma}_ztr_B\left\{e^{-\hat{B}t}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\hat{B}\right]\right\}\hat{B}\right\}\otimes\hat{\rho}_B \\
&-e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}tr_B\left\{e^{-\hat{B}t}\hat{B}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\}\right\}\otimes\hat{\rho}_B \\
&+e^{-\hat{S}t}\left\{e^{\hat{S}(t-t')}\left[\hat{\sigma}_z\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t)\right)\right]\right\}\hat{\sigma}_ztr_B\left\{e^{-\hat{B}t}\left\{e^{\hat{B}(t-t')}\left[\hat{B}\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B\right)\right]\right\}\hat{B}\right\}\otimes\hat{\rho}_B \quad (6.20)
\end{aligned}$$

É interessante notar que, em (6.20), as contribuições referentes a S e B se encontram totalmente separadas em cada termo. Essa é uma vantagem do método proposto no capítulo 5 que se revelará de extremo valor nos cálculos dos próximos itens.

6.4 Tratamento do ambiente

Por uma questão de praticidade, já que as mesmas considerações serão utilizadas nas abordagens para as componentes z e x , os termos referentes ao ambiente na equação (6.20) serão tratados primeiro:

$$\begin{aligned}
\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) &= e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \\
&\times \underbrace{tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t}\hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \right\}}_{(I)} \otimes \hat{\rho}_B \\
&- e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z \\
&\times \underbrace{tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \right\}}_{(II)} \otimes \hat{\rho}_B \\
&- e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\} \\
&\times \underbrace{tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t}\hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \right\}}_{(III)} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z \\
&\times \underbrace{tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \right\}}_{(IV)} \otimes \hat{\rho}_B .
\end{aligned}$$

Utilizando (6.8),

$$\begin{aligned}
&tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t}\hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \right\} \\
(I) \quad &= tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{\rho}_Be^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} \\
&= tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{\rho}_Be^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} , \tag{6.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{B}t'}\hat{\rho}_B \right) \hat{B} \right] \right\} \right\} \\
(II) \quad &= tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{\rho}_Be^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} \\
&= tr_B \left\{ \hat{\rho}_Be^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} = tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{\rho}_Be^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} , \tag{6.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t} \hat{B} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \right\} \\
(III) \quad & = tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} \\
& = tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B \right\} = tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

e

$$\begin{aligned}
& tr_B \left\{ e^{-\hat{B}t} \left\{ e^{\hat{B}(t-t')} \left[\hat{B} \left(e^{\hat{B}t'} \hat{\rho}_B \right) \right] \right\} \hat{B} \right\} \\
(IV) \quad & = tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}(t-t')} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} \\
& = tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\}.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Substituindo, então, (6.21), (6.22), (6.23) e (6.24) em (6.20),

$$\begin{aligned}
\hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) &= e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \\
&\times tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&- e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z \\
&\times tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_A}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_A}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_A}{\hbar}t'} \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&- e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \\
&\times tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z \\
&\times tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} \otimes \hat{\rho}_B
\end{aligned}$$

ou, agrupando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned}
& \hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) \\
&= \left\{ e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} - e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&\quad \times tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} \\
&+ \left\{ e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z - e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\} \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&\quad \times tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\}. \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Os dois termos envolvendo o traço do ambiente em (6.25) possuem a mesma forma. Assim, é necessário apenas calcular o primeiro e depois realizar, no segundo, a substituição $\begin{cases} t & \rightarrow t' \\ t' & \rightarrow t \end{cases}$.

Até agora, os cálculos foram efetuados sem, no entanto, especificar $\hat{\rho}_B$ e $\hat{H}_B$, a única exigência consistiu em que este último independa do tempo.

Para tomar o traço parcial, será utilizada a *base de estados de Fock* $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \dots \equiv \prod_m |n_m\rangle$,

$$tr_B \{.\} \rightarrow \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[\prod_m \langle n_m | \right] \cdot \left[\prod_m |n_m\rangle \right].$$

Como demonstrado no apêndice A, expressão (A.11)

$$e^{it\sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l} \sum_k \left(g_k^* \hat{b}_k + g_k \hat{b}_k^\dagger \right) e^{-it\sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l} = \sum_k \left(g_k^* \hat{b}_k e^{-i\omega_k t} + g_k \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t} \right). \tag{6.26}$$

Assim, especificando $\hat{H}_B$ e $\hat{B}$ segundo (6.1) e (6.3) e utilizando (6.26), o traço do ambiente fornecerá

$$\begin{aligned}
& tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t}\hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'}\hat{B}e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} \\
&= \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[\prod_m \langle n_m | \right] \sum_l \left(g_l^* \hat{b}_l e^{-i\omega_l t} + g_l \hat{b}_l^\dagger e^{i\omega_l t} \right) \hat{\rho}_B \sum_k \left(g_k^* \hat{b}_k e^{-i\omega_k t'} + g_k \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t'} \right) \left[\prod_m |n_m\rangle \right]. \tag{6.27}
\end{aligned}$$

Considerando, então, $\hat{\rho}_B$ como o estado térmico

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{Z_B} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k}, \quad Z_B = \prod_l \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_l}} \tag{6.28}$$

(a explicação sobre Z_B se encontra no apêndice A), com

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (6.29)$$

onde T é a *temperatura* e k_B a *constante de Boltzmann*, (6.27) se tornará

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} &= tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B \right\} \\ &= \frac{1}{Z_B} \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[\prod_m \langle n_m | \right] \sum_k \left(g_k^* \hat{b}_k e^{-i\omega_k t'} + g_k \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t'} \right) \\ &\times \sum_l \left(g_l^* \hat{b}_l e^{-i\omega_l t} + g_l \hat{b}_l^\dagger e^{i\omega_l t} \right) \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p} \left[\prod_m |n_m\rangle \right] \end{aligned}$$

cujo desenvolvimento fornecerá

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} &= \frac{1}{Z_B} \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[\prod_m \langle n_m | \right] \sum_{k,l} \left[g_k^* g_l^* \hat{b}_k \hat{b}_l e^{-i(\omega_k t' + \omega_l t)} \right. \\ &+ g_k^* g_l \hat{b}_k \hat{b}_l^\dagger e^{-i(\omega_k t' - \omega_l t)} + g_k g_l^* \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l e^{i(\omega_k t' - \omega_l t)} \\ &\left. + g_k g_l \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l^\dagger e^{i(\omega_k t' + \omega_l t)} \right] \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p} \left[\prod_m |n_m\rangle \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Uma simplificação óbvia de (6.30) envolve o termo $\prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p} \left[\prod_m |n_m\rangle \right]$:

$$\begin{aligned} tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} &= \frac{1}{Z_B} \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[\prod_m \langle n_m | \right] \sum_{k,l} \left[g_k^* g_l^* \hat{b}_k \hat{b}_l e^{-i(\omega_k t' + \omega_l t)} \right. \\ &+ g_k^* g_l \hat{b}_k \hat{b}_l^\dagger e^{-i(\omega_k t' - \omega_l t)} + g_k g_l^* \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l e^{i(\omega_k t' - \omega_l t)} \\ &\left. + g_k g_l \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l^\dagger e^{i(\omega_k t' + \omega_l t)} \right] \left[\prod_m |n_m\rangle \right] \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p n_p}. \end{aligned}$$

É conveniente deixar os operadores $\hat{b}^\dagger$ à esquerda dos $\hat{b}$, o que pode ser feito utilizando

$$\hat{b}_k \hat{b}_l^\dagger = \delta_{k,l} + \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_k. \quad (6.31)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} &= \frac{1}{Z_B} \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[\prod_m \langle n_m | \right] \sum_{k, l} \left[g_k^* g_l^* \hat{b}_k \hat{b}_l e^{-i(\omega_k t' + \omega_l t)} \right. \\
&+ g_k^* g_l \delta_{k, l} e^{-i(\omega_k t' - \omega_l t)} \\
&+ g_k^* g_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_k e^{-i(\omega_k t' - \omega_l t)} \\
&+ g_k g_l^* \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l e^{i(\omega_k t' - \omega_l t)} \\
&\left. + g_k g_l \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l^\dagger e^{i(\omega_k t' + \omega_l t)} \right] \left[\prod_m |n_m\rangle \right] \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p n_p} .
\end{aligned}$$

Restam as combinações de $\hat{b}_l^\dagger$ e $\hat{b}_l$ entre estados de Fock,

$$\left[\prod_m \langle n_m | \right] \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l'} \left[\prod_m |n_m\rangle \right] = n_l \delta_{l, l'} \quad (6.32)$$

e

$$\left[\prod_m \langle n_m | \right] \hat{b}_k \hat{b}_l \left[\prod_m |n_m\rangle \right] = \left[\prod_m \langle n_m | \right] \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l^\dagger \left[\prod_m |n_m\rangle \right] = 0 \quad (6.33)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} \\
&= \frac{1}{Z_B} \sum_{n_1, n_2, \dots} \sum_l |g_l|^2 \left[e^{i\omega_l(t-t')} + n_l e^{i\omega_l(t-t')} + n_l e^{-i\omega_l(t-t')} \right] \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p n_p} \quad (6.34)
\end{aligned}$$

Para tratar os termos restantes, serão utilizados os seguintes resultados demonstrados no apêndice A, expressões (A.12) e (A.17) :

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p n_p} = \prod_p \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_p}} = Z_B \quad (6.35)$$

e

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} n_l e^{i\alpha\omega_l} \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p n_p} = \frac{e^{i\alpha\omega_l}}{e^{\hbar\beta\omega_l} - 1} Z_B . \quad (6.36)$$

Logo, (6.34) se torna

$$\begin{aligned}
& tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} \\
&= \frac{1}{Z_B} \sum_{n_1, n_2, \dots} \sum_l |g_l|^2 \left[e^{i\omega_l(t-t')} + n_l e^{i\omega_l(t-t')} + n_l e^{-i\omega_l(t-t')} \right] \prod_p e^{-\hbar\beta\omega_p n_p} \\
&= \sum_l |g_l|^2 \left[e^{i\omega_l(t-t')} + \frac{e^{i\omega_l(t-t')}}{e^{\hbar\beta\omega_l} - 1} + \frac{e^{-i\omega_l(t-t')}}{e^{\hbar\beta\omega_l} - 1} \right] = \sum_l |g_l|^2 \left[e^{i\omega_l(t-t')} + \frac{2\cos[\omega_l(t-t')]}{e^{\hbar\beta\omega_l} - 1} \right]
\end{aligned}$$

ou, simplificando,

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} &= \sum_l |g_l|^2 \left\{ \cos [\omega_l (t - t')] + i \operatorname{sen} [\omega_l (t - t')] \right. \\
&+ \left. \frac{2\cos [\omega_l (t - t')]}{e^{\hbar\beta\omega_l} - 1} \right\} \\
&= \sum_l |g_l|^2 \left\{ \frac{e^{\hbar\beta\omega_l} + 1}{e^{\hbar\beta\omega_l} - 1} \cos [\omega_l (t - t')] \right. \\
&+ \left. i \operatorname{sen} [\omega_l (t - t')] \right\} .
\end{aligned}$$

Então, finalmente,

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \right\} &= \sum_l |g_l|^2 \left\{ \operatorname{cotgh} \left(\frac{\hbar\beta\omega_l}{2} \right) \cos [\omega_l (t - t')] \right. \\
&+ \left. i \operatorname{sen} [\omega_l (t - t')] \right\} . \tag{6.37}
\end{aligned}$$

Como explicado, a substituição $\begin{cases} t & \rightarrow t' \\ t' & \rightarrow t \end{cases}$ em (6.37) fornecerá o outro termo necessário para (6.25),

$$\begin{aligned}
tr_B \left\{ e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t'} \hat{\rho}_B e^{i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \hat{B} e^{-i\frac{\hat{H}_B}{\hbar}t} \right\} &= \sum_l |g_l|^2 \left\{ \operatorname{cotgh} \left(\frac{\hbar\beta\omega_l}{2} \right) \cos [\omega_l (t - t')] \right. \\
&- \left. i \operatorname{sen} [\omega_l (t - t')] \right\} . \tag{6.38}
\end{aligned}$$

O resultado final é alcançado substituindo (6.37) e (6.38) em (6.25):

$$\begin{aligned}
& \hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) \\
&= \left\{ e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} - e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&\quad \times \sum_l |g_l|^2 \left\{ \cotgh \left(\frac{\hbar\beta\omega_l}{2} \right) \cos [\omega_l (t-t')] + i \operatorname{sen} [\omega_l (t-t')] \right\} \\
&+ \left\{ e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z - e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\} \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&\quad \times \sum_l |g_l|^2 \left\{ \cotgh \left(\frac{\hbar\beta\omega_l}{2} \right) \cos [\omega_l (t-t')] - i \operatorname{sen} [\omega_l (t-t')] \right\} . \tag{6.39}
\end{aligned}$$

O tratamento análogo será realizado para os fatores correspondentes ao sistema principal e dependerá da escolha da componente a ser medida.

6.5 Transição para o contínuo

Na expressão (6.39), se for adotada a definição geral para densidade espectral

$$J(\omega) = \sum_l |g_l|^2 \delta(\omega - \omega_l) \tag{6.40}$$

então a soma sobre o índice l pode ser substituída por uma integral sobre as frequências (para facilitar o tratamento posterior do sistema, cada termo será assinalado):

$$\begin{aligned}
& \hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) \\
&= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left\{ \cotgh \left(\frac{\hbar\beta\omega}{2} \right) \cos [\omega (t-t')] + i \operatorname{sen} [\omega (t-t')] \right\} \\
&\times \left\{ \underbrace{e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\}}_{(A)} - \underbrace{e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z}_{(B)} \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&\quad + \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left\{ \cotgh \left(\frac{\hbar\beta\omega}{2} \right) \cos [\omega (t-t')] - i \operatorname{sen} [\omega (t-t')] \right\} \\
&\times \left\{ \underbrace{e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z}_{(C)} - \underbrace{e^{-\hat{S}t}\hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) \right) \right] \right\}}_{(D)} \right\} \otimes \hat{\rho}_B . \tag{6.41}
\end{aligned}$$

Existe uma certa polêmica acerca da definição de um processo não-markoviano (63–65). Nas aplicações específicas da presente tese, foi escolhida a densidade espectral ôhmica:

$$J(\omega) = \eta \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \eta, \omega_c \geq 0 \quad (6.42)$$

onde η fornecerá a intensidade do acoplamento entre o sistema e o ambiente. Tal densidade será entendida aqui como fornecendo um ambiente não-markoviano por definir em (5.24) um coeficiente dependente do tempo.

Uma outra transformação de variáveis ocorrerá quando for considerada a integral temporal, $\tau = t - t'$, mas será explicada para cada caso particular de $\hat{L}$.

6.6 Medida da componente z

6.6.1 Resolvendo o integrando

De acordo com a solução (3.17), a aplicação de $e^{\hat{S}t}$ sobre um dado operador $\hat{X}$ fornece:

$$e^{\hat{S}t} \hat{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ X_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & X_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Corroborando (6.9), é fácil verificar que essa propriedade é obedecida pelo fato de os elementos em (6.43) serem constantes (populações) ou envolverem exponenciais temporais.

Cada termo referente ao sistema em (6.41) deverá ser calculado gradativamente, aproveitando semelhanças entre eles. Em primeiro lugar, considerando

$$\hat{R}(t) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

(onde a dependência temporal nos R_{ij} fica subentendida) então

$$e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} & R_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Nas chaves internas de (6.41) há elementos comuns em (A) e (B) e em (C) e (D), que serão calculados antes. O termo $\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t)\right) \hat{\sigma}_z$ aparece em (A) e (B),

$$\begin{aligned} \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t)\right) \hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12}e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} & -R_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.46)$$

enquanto que $\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t)\right)$ aparece em (C) e (D),

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t)\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} & R_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} \\ -R_{21}e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} & -R_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

O resultado (6.46) permite obter $e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t)\right) \hat{\sigma}_z\right]$, presente em (A) e (B),

$$\begin{aligned} &e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t)\right) \hat{\sigma}_z\right] \\ &= e^{\hat{S}(t-t')} \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12}e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} & -R_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12}e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} e^{-2\lambda^2(t-t')} e^{-i2\omega_0(t-t')} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} e^{-2\lambda^2(t-t')} e^{i2\omega_0(t-t')} & -R_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12}e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & -R_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.48)$$

enquanto que (6.48) permite obter $e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t)\right)\right]$, presente em (C) e (D),

$$\begin{aligned}
& e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \\
&= e^{\hat{S}(t-t')} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} \\ -R_{21} e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} & -R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} e^{-2\lambda^2 t'} e^{-i2\omega_0 t'} e^{-2\lambda^2(t-t')} e^{-i2\omega_0(t-t')} \\ -R_{21} e^{-2\lambda^2 t'} e^{i2\omega_0 t'} e^{-2\lambda^2(t-t')} e^{i2\omega_0(t-t')} & -R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ -R_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & -R_{22} \end{pmatrix}. \tag{6.49}
\end{aligned}$$

Neste ponto, com (6.48) e (6.49), cada elemento (A) , (B) , (C) e (D) pode ser efetivamente calculado:

$$\begin{aligned}
& e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \\
&= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ R_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & -R_{22} \end{pmatrix} \\
(A) \quad &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ -R_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} e^{2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} \\ -R_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} e^{2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z \\
&= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12}e^{-2\lambda^2 t}e^{-i2\omega_0 t} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t} & -R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
(B) \quad &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}e^{-2\lambda^2 t}e^{-i2\omega_0 t} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}e^{-2\lambda^2 t}e^{-i2\omega_0 t}e^{2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t} \\ R_{21}e^{-2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t}e^{2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z \\
&= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}e^{-2\lambda^2 t}e^{-i2\omega_0 t} \\ -R_{21}e^{-2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t} & -R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
(C) \quad &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12}e^{-2\lambda^2 t}e^{-i2\omega_0 t} \\ -R_{21}e^{-2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12}e^{-2\lambda^2 t}e^{-i2\omega_0 t}e^{2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t} \\ -R_{21}e^{-2\lambda^2 t}e^{i2\omega_0 t}e^{2\lambda^2 t}e^{-i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \tag{6.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \\
&= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ -R_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & -R_{22} \end{pmatrix} \\
(D) \quad &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} \\ R_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} e^{-2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} e^{2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} \\ R_{21} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} e^{2\lambda^2 t} e^{-i2\omega_0 t} & R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}. \tag{6.53}
\end{aligned}$$

Com (6.50), (6.51), (6.52) e (6.53), a expressão (6.41) pode ser simplificada:

$$\begin{aligned}
& \hat{\hat{P}} \hat{\hat{G}}(t) \hat{\hat{G}}(t') \hat{\hat{P}} \hat{\alpha}(t) = \\
&= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left[\begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \right] \\
&\quad \times \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) - i \operatorname{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left[\begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \right] \\
&\quad \times \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) + i \operatorname{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & -2R_{12} \\ -2R_{21} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) - i \operatorname{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & -2R_{12} \\ -2R_{21} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) + i \operatorname{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&= -4 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \otimes \hat{\rho}_B. \tag{6.54}
\end{aligned}$$

Finalmente, a equação original (5.24) pode ser retomada com (6.54). Considerando apenas a parte referente ao sistema (fatorada de $\hat{\rho}_B$ em ambos os lados pela aproximação de Born-Markov),

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix} \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right). \quad (6.55)$$

6.6.2 Obtenção das populações

Segundo (6.55), as populações independem de maiores considerações sobre $J(\omega)$ e podem ser imediatamente calculadas:

$$\frac{d}{dt} R_{ii} = 0 \Rightarrow R_{ii}(t) = R_{ii}(0) \quad (6.56)$$

onde $i = 1, 2$. Realizando o retorno para os elementos do operador densidade segundo (6.13):

$$\rho_{ii}^{(z)}(t) = R_{ii}(0) \quad (6.57)$$

ou, em termos de $\rho_{ii}^{(z)}(0)$,

$$\rho_{ii}^{(z)}(t) = \rho_{ii}^{(z)}(0). \quad (6.58)$$

Assim, utilizando o vínculo de que o traço do operador densidade deve ser unitário,

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \rho_{11}^{(z)}(0) \\ \rho_{22}^{(z)}(t) = 1 - \rho_{11}^{(z)}(0) \end{cases}. \quad (6.59)$$

6.6.3 Obtenção das coerências

Como já mencionado, será escolhida a densidade espectral ôhmica (6.42); assim, em (6.55) os elementos não-diagonais obedecerão a equação

$$\frac{d}{dt}R_{ij} = -4\eta R_{ij}(t) \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \quad (6.60)$$

onde $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

Agora, por conveniência, será realizada a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \tau &= t - t' \\ d\tau &= -dt' \end{aligned}$$

com

$$\int_0^t dt' = -\int_t^0 d\tau = \int_0^t d\tau$$

fornecendo, então,

$$\frac{d}{dt}R_{ij} = -4\eta R_{ij}(t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right). \quad (6.61)$$

O primeiro passo razoável é resolver a integral temporal,

$$\int_0^t d\tau \cos(\omega\tau) = \frac{\text{sen}(\omega\tau)}{\omega} \Big|_0^t = \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega}$$

que leva a

$$\frac{d}{dt}R_{ij} = -4\eta R_{ij}(t) \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \text{sen}(\omega t) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right). \quad (6.62)$$

A integral sobre as frequências fornecerá (C.14) (ver apêndice C):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_{ij} &= i2\frac{\eta}{\beta\hbar}R_{ij}(t) \left[\psi\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right) - \psi\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right) \right. \\ &\quad \left. + \psi\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 + i\frac{t}{\beta\hbar}\right) - \psi\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 - i\frac{t}{\beta\hbar}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Para resolver essa equação diferencial, primeiro ela será integrada,

$$\begin{aligned}
R_{ij}(t) &= R_{ij}(0) \exp \left\{ i2 \frac{\eta}{\beta \hbar} \int_0^t dt' \left[\psi \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t'}{\beta \hbar} \right) - \psi \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t'}{\beta \hbar} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \psi \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t'}{\beta \hbar} \right) - \psi \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t'}{\beta \hbar} \right) \right] \right\}. \quad (6.64)
\end{aligned}$$

No apêndice C cada integral de (6.113) é resolvida. Substituindo (C.17), (C.18), (C.19) e (C.20) em (6.113),

$$\begin{aligned}
R_{ij}(t) &= R_{ij}(0) \exp \left\{ i2 \frac{\eta}{\beta \hbar} \left\{ -i\beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \right] - i\beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right] - i\beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right] \right\} \right\} \\
&= R_{ij}(0) \exp \left\{ 2\eta \left\{ \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \right] + \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right] + \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right] \right\} \right\}
\end{aligned}$$

ou, simplificando mais ainda

$$\begin{aligned}
R_{ij}(t) &= R_{ij}(0) \exp \left\{ 2\eta \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t}{\beta \hbar} \right) \Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar} \right) \Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right] \right\} \\
&= R_{ij}(0) \exp \left\{ \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t}{\beta \hbar} \right) \Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar} \right) \Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right]^{2\eta} \right\} \\
&= R_{ij}(0) \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t}{\beta \hbar} \right) \Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar} \right) \Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right]^{2\eta}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} R_{12}(t) = R_{12}(0) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1\right)} \right]^{2\eta} \\ R_{21}(t) = R_{21}(0) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1\right)} \right]^{2\eta} \end{cases} \quad (6.65)$$

As coerências serão obtidas aplicando a transformação (6.13) a (6.65). Como $\rho_{21}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)*}(t)$, será considerado apenas o elemento $\rho_{12}(t)$:

$$\rho_{12}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)}(0) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1\right)} \right]^{2\eta} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t}. \quad (6.66)$$

Entretanto, essa expressão pode ser simplificada utilizando as propriedades das funções $\Gamma(z)$ (ver apêndice B). Em primeiro lugar, através da terceira de (B.4),

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 + i\frac{t}{\beta\hbar}\right) &= \left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right), \\ \Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 - i\frac{t}{\beta\hbar}\right) &= \left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right), \\ \Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1\right) &= \frac{1}{\omega_c\beta\hbar} \Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{(z)}(t) &= \rho_{12}^{(z)}(0) e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)^2 \Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \right]^{2\eta} \\ &= \rho_{12}^{(z)}(0) e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} \left\{ \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)^2 \Gamma^4\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \left[\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)^2 + \left(\frac{t}{\beta\hbar}\right)^2 \right] \right\}^{2\eta} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_{12}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)}(0) \left\{ \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^4\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \left[1 + (\omega_c t)^2 \right] \right\}^{2\eta} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t}. \quad (6.67)$$

Agora, utilizando (B.11) (apêndice B), o produto das $\Gamma(z)$ entre chaves pode ser levado a

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} &= \frac{1}{1 + (\omega_c t)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\frac{t}{\beta\hbar}}{n + \frac{1}{\omega_c\beta\hbar}}\right)} \\
 &= \frac{1}{1 + (\omega_c t)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n + \frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + \frac{t}{\beta\hbar}}{n + \frac{1}{\omega_c\beta\hbar}}} \\
 &= \frac{1}{1 + (\omega_c t)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{\omega_c\beta\hbar}}{n + \frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + \frac{t}{\beta\hbar}} \\
 &= \frac{1}{1 + (\omega_c t)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega_c\beta\hbar + 1}{1 + n\omega_c\beta\hbar + \omega_c t}
 \end{aligned}$$

fornecendo, finalmente, a expressão mais concisa e adequada para implementações numéricas:

$$\rho_{12}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)}(0) \left\{ \frac{1}{1 + (\omega_c t)^2} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n\omega_c\beta\hbar}{1 + n\omega_c\beta\hbar + \omega_c t} \right]^2 \right\}^{2\eta} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t}. \quad (6.68)$$

A consistência de (6.67) ou (6.68) pode ser verificada, em um primeiro exame, notando que, no limite $\eta \rightarrow 0$ (ou seja, na ausência do ambiente), elas se reduzem a (3.17) como esperado.

A solução final para a medida da componente z será, então:

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \rho_{11}^{(z)}(0) \\ \rho_{12}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)}(0) \left\{ \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right)}{\Gamma^4\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar}\right)} \left[1 + (\omega_c t)^2\right] \right\}^{2\eta} e^{-2\lambda^2 t} e^{i2\omega_0 t} \end{cases} \quad (6.69)$$

6.7 Medida da componente x

Os cálculos serão desenvolvidos de maneira totalmente análoga ao item anterior, primeiro na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$ para, depois, ser feita a mudança para a base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$.

6.7.1 Resolvendo o integrando

Já é possível perceber, pelo formato das soluções (3.42), que os cálculos serão mais elaborados. Com base em (3.42), a aplicação de $e^{\hat{S}t}$ sobre um operador $\hat{X}$ fornecerá

$$e^{\hat{S}t}x = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

onde

$$\begin{cases} s_{11} = \frac{x_{11}-x_{22}}{2}e^{-2\lambda^2 t} + \frac{x_{11}+x_{22}}{2} \\ s_{22} = -\frac{x_{11}-x_{22}}{2}e^{-2\lambda^2 t} + \frac{x_{11}+x_{22}}{2} \end{cases} \quad (6.71)$$

e

$$\begin{cases} s_{12} = \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\Omega} [\Omega \cosh(\Omega t) x_{12} - i2\omega_0 \sinh(\Omega t) x_{12} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) x_{21}] \\ s_{21} = \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\Omega} [\Omega \cosh(\Omega t) x_{21} + i2\omega_0 \sinh(\Omega t) x_{21} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) x_{12}] \end{cases} \quad (6.72)$$

com

$$\Omega = \sqrt{\lambda^4 - 4\omega_0^2} . \quad (6.73)$$

Evidentemente, o primeiro passo será obter $e^{\hat{S}t}$ sobre $\hat{R}(t)$:

$$e^{\hat{S}t'}\hat{R}(t) = e^{\hat{S}t'} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(0)} & r_{12}^{(0)} \\ r_{21}^{(0)} & r_{22}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

onde

$$\begin{cases} r_{11}^{(0)} = \frac{r_{11}-r_{22}}{2}e^{-2\lambda^2 t'} + \frac{r_{11}+r_{22}}{2} \\ r_{22}^{(0)} = -\frac{r_{11}-r_{22}}{2}e^{-2\lambda^2 t'} + \frac{r_{11}+r_{22}}{2} \end{cases} \quad (6.75)$$

e

$$\begin{cases} r_{12}^{(0)} = \frac{e^{-\lambda^2 t'}}{\Omega} [\Omega \cosh(\Omega t') r_{12} - i 2 \omega_0 \sinh(\Omega t') r_{12} + \lambda^2 \sinh(\Omega t') r_{21}] \\ r_{21}^{(0)} = \frac{e^{-\lambda^2 t'}}{\Omega} [\Omega \cosh(\Omega t') r_{21} + i 2 \omega_0 \sinh(\Omega t') r_{21} + \lambda^2 \sinh(\Omega t') r_{12}] \end{cases} \quad (6.76)$$

Nos cálculos subseqüentes, serão a princípio ignorados os vínculos entre os elementos do operador densidade ($\rho_{11} = 1 - \rho_{22}$ e $\rho_{12} = \rho_{21}^*$) e todos os quatro elementos serão considerados para tornar mais fácil a verificação da consistência de cada passo.

Uma vez que $e^{\hat{S}t} \hat{R}(t)$ foi obtido, convém agora abordar os termos $e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right]$ (que aparece em (A) e (B)) e $e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right]$ (que aparece em (C) e (D)). Para $e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right]$,

$$\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}^{(0)} & r_{12}^{(0)} \\ r_{21}^{(0)} & r_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(0)} & r_{12}^{(0)} \\ -r_{21}^{(0)} & -r_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

e

$$e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] = e^{\hat{S}(t-t')} \begin{pmatrix} r_{11}^{(0)} & r_{12}^{(0)} \\ -r_{21}^{(0)} & -r_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(1)} & r_{12}^{(1)} \\ r_{21}^{(1)} & r_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

onde, com (6.75) e (6.76),

$$\begin{cases} r_{11}^{(1)} = \frac{r_{11}^{(0)} - (-r_{22}^{(0)})}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \\ r_{22}^{(1)} = -\frac{r_{11}^{(0)} - (-r_{22}^{(0)})}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \end{cases} \quad (6.78)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{11}^{(1)} = \frac{r_{11}^{(0)} + r_{22}^{(0)}}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \\ r_{22}^{(1)} = -\frac{r_{11}^{(0)} + r_{22}^{(0)}}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} r_{12}^{(1)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} \right. \\ \quad \left. - i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} + \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] (-r_{21}^{(0)}) \right\} \\ r_{21}^{(1)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] (-r_{21}^{(0)}) \right. \\ \quad \left. + i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] (-r_{21}^{(0)}) + \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} \right\} \end{cases} \quad (6.79)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{12}^{(1)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} \right. \\ \quad \left. - i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} - \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} \right\} \\ r_{21}^{(1)} = -\frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} \right. \\ \quad \left. + i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} - \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} \right\} \end{cases}.$$

Analogamente,

$$\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} r_{11}^{(0)} & r_{12}^{(0)} \\ r_{21}^{(0)} & r_{22}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(0)} & -r_{12}^{(0)} \\ r_{21}^{(0)} & -r_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

e

$$e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] = e^{\hat{S}(t-t')} \begin{pmatrix} r_{11}^{(0)} & -r_{12}^{(0)} \\ r_{21}^{(0)} & -r_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(2)} & r_{12}^{(2)} \\ r_{21}^{(2)} & r_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (6.80)$$

onde

$$\begin{cases} r_{11}^{(2)} = \frac{r_{11}^{(0)} - (-r_{22}^{(0)})}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \\ r_{22}^{(2)} = -\frac{r_{11}^{(0)} - (-r_{22}^{(0)})}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \end{cases} \quad (6.81)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{11}^{(2)} = \frac{r_{11}^{(0)} + r_{22}^{(0)}}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \\ r_{22}^{(2)} = -\frac{r_{11}^{(0)} + r_{22}^{(0)}}{2} e^{-2\lambda^2(t-t')} + \frac{r_{11}^{(0)} - r_{22}^{(0)}}{2} \end{cases}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12}^{(2)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] \left(-r_{12}^{(0)} \right) \right. \\ \quad \left. - i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] \left(-r_{12}^{(0)} \right) + \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} \right\} \\ r_{21}^{(2)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} \right. \\ \quad \left. + i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} + \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] \left(-r_{12}^{(0)} \right) \right\} \end{array} \right. \quad (6.82)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{12}^{(2)} = -\frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} \right. \\ \quad \left. - i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} - \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} \right\} \\ r_{21}^{(2)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} \left\{ \Omega \cosh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} \right. \\ \quad \left. + i2\omega_0 \sinh [\Omega (t-t')] r_{21}^{(0)} - \lambda^2 \sinh [\Omega (t-t')] r_{12}^{(0)} \right\} \end{array} \right. .$$

Comparando (6.78) com (6.81) e (6.79) com (6.82), é possível observar que existe uma similaridade entre os elementos: $\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^{(1)} = r_{11}^{(2)} \\ r_{22}^{(1)} = r_{22}^{(2)} \end{array} \right\}$ e $\left\{ \begin{array}{l} r_{12}^{(1)} = -r_{12}^{(2)} \\ r_{21}^{(1)} = -r_{21}^{(2)} \end{array} \right\}$. Outras similaridades desse tipo ocorrerão e se mostrarão úteis ao final para simplificação dos cálculos.

Agora, cada termo (A), (B), (C) e (D) em (6.41) poderá ser calculado. Como a ordem não é importante, dessa vez serão primeiro considerados (C) e (D) com base em (6.77).

Para (C),

$$\begin{aligned} e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} \hat{\sigma}_z &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} r_{11}^{(1)} & r_{12}^{(1)} \\ r_{21}^{(1)} & r_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (C) \quad &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} r_{11}^{(1)} & -r_{12}^{(1)} \\ r_{21}^{(1)} & -r_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{11}^{(3)} & r_{12}^{(3)} \\ r_{21}^{(3)} & r_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.83)$$

onde

$$\begin{aligned} & \begin{cases} r_{11}^{(3)} = \frac{r_{11}^{(1)} - (-r_{22}^{(1)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \\ r_{22}^{(3)} = -\frac{r_{11}^{(1)} - (-r_{22}^{(1)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} r_{11}^{(3)} = \frac{r_{11}^{(1)} + r_{22}^{(1)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \\ r_{22}^{(3)} = -\frac{r_{11}^{(1)} + r_{22}^{(1)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.84)$$

e

$$\begin{aligned} & \begin{cases} r_{12}^{(3)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) (-r_{12}^{(1)}) - i2\omega_0 \sinh(-\Omega t) (-r_{12}^{(1)}) + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) r_{21}^{(1)} \right] \\ r_{21}^{(3)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) r_{21}^{(1)} + i2\omega_0 \sinh(-\Omega t) r_{21}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) (-r_{12}^{(1)}) \right] \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} r_{12}^{(3)} = -\frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{12}^{(1)} + i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(1)} \right] \\ r_{21}^{(3)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{21}^{(1)} - i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(1)} \right] \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Agora, para (D) ,

$$\begin{aligned} & e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\hat{\sigma}_z \left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \right] \right\} = e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}^{(1)} & r_{12}^{(1)} \\ r_{21}^{(1)} & r_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \\ & = e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} r_{11}^{(1)} & r_{12}^{(1)} \\ -r_{21}^{(1)} & -r_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} r_{11}^{(4)} & r_{12}^{(4)} \\ r_{21}^{(4)} & r_{22}^{(4)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (D) \quad (6.86)$$

onde

$$\begin{aligned} \begin{cases} r_{11}^{(4)} = \frac{r_{11}^{(1)} - (-r_{22}^{(1)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \\ r_{22}^{(4)} = -\frac{r_{11}^{(1)} - (-r_{22}^{(1)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} r_{11}^{(4)} = \frac{r_{11}^{(1)} + r_{22}^{(1)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \\ r_{22}^{(4)} = -\frac{r_{11}^{(1)} + r_{22}^{(1)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(1)} - r_{22}^{(1)}}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.87)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{cases} r_{12}^{(4)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) r_{12}^{(1)} - i2\omega_0 \sinh(-\Omega t) r_{12}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) (-r_{21}^{(1)}) \right] \\ r_{21}^{(4)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) (-r_{21}^{(1)}) + i2\omega_0 \sinh(-\Omega t) (-r_{21}^{(1)}) + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) r_{12}^{(1)} \right] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} r_{12}^{(4)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{12}^{(1)} + i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(1)} \right] \\ r_{21}^{(4)} = -\frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{21}^{(1)} - i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(1)} \right] \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Mais uma vez surge uma similaridade entre os elementos. Comparando (6.84) com (6.87) e

$$(6.85) \text{ com } (6.88), \begin{cases} r_{11}^{(3)} = r_{11}^{(4)} \\ r_{22}^{(3)} = r_{22}^{(4)} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} r_{12}^{(3)} = -r_{12}^{(4)} \\ r_{21}^{(3)} = -r_{21}^{(4)} \end{cases}.$$

Restam (A) e (B), para os quais será utilizada (6.80). Para (A),

$$\begin{aligned} e^{-\hat{S}t} \hat{\sigma}_z \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}^{(2)} & r_{12}^{(2)} \\ r_{21}^{(2)} & r_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \\ (A) \qquad \qquad \qquad &= e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} r_{11}^{(2)} & r_{12}^{(2)} \\ -r_{21}^{(2)} & -r_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{11}^{(5)} & r_{12}^{(5)} \\ r_{21}^{(5)} & r_{22}^{(5)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.89)$$

onde

$$\begin{aligned} & \begin{cases} r_{11}^{(5)} = \frac{r_{11}^{(2)} - (-r_{22}^{(2)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \\ r_{22}^{(5)} = -\frac{r_{11}^{(2)} - (-r_{22}^{(2)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} r_{11}^{(5)} = \frac{r_{11}^{(2)} + r_{22}^{(2)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \\ r_{22}^{(5)} = -\frac{r_{11}^{(2)} + r_{22}^{(2)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.90)$$

e

$$\begin{aligned} & \begin{cases} r_{12}^{(5)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) r_{12}^{(2)} - i 2\omega_0 \sinh(-\Omega t) r_{12}^{(2)} + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) (-r_{21}^{(2)}) \right] \\ r_{21}^{(5)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) (-r_{21}^{(2)}) + i 2\omega_0 \sinh(-\Omega t) (-r_{21}^{(2)}) + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) r_{12}^{(2)} \right] \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} r_{12}^{(5)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{12}^{(2)} + i 2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(2)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(2)} \right] \\ r_{21}^{(5)} = -\frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{21}^{(2)} - i 2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(2)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(2)} \right] \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Finalmente, para (B) ,

$$\begin{aligned} & e^{-\hat{S}t} \left\{ e^{\hat{S}(t-t')} \left[\left(e^{\hat{S}t'} \hat{R}(t) \right) \hat{\sigma}_z \right] \right\} \hat{\sigma}_z = e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} r_{11}^{(2)} & r_{12}^{(2)} \\ r_{21}^{(2)} & r_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & (B) \quad = e^{-\hat{S}t} \begin{pmatrix} r_{11}^{(2)} & -r_{12}^{(2)} \\ r_{21}^{(2)} & -r_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \\ & \quad = \begin{pmatrix} r_{11}^{(6)} & r_{12}^{(6)} \\ r_{21}^{(6)} & r_{22}^{(6)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.92)$$

onde

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} r_{11}^{(6)} = \frac{r_{11}^{(2)} - (-r_{22}^{(2)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \\ r_{22}^{(6)} = -\frac{r_{11}^{(2)} - (-r_{22}^{(2)})}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} r_{11}^{(6)} = \frac{r_{11}^{(2)} + r_{22}^{(2)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \\ r_{22}^{(6)} = -\frac{r_{11}^{(2)} + r_{22}^{(2)}}{2} e^{2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(2)}}{2} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.93}$$

$$\begin{cases} r_{12}^{(6)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) (-r_{12}^{(2)}) - i2\omega_0 \sinh(-\Omega t) (-r_{12}^{(2)}) + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) r_{21}^{(2)} \right] \\ r_{21}^{(6)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(-\Omega t) r_{21}^{(2)} + i2\omega_0 \sinh(-\Omega t) r_{21}^{(2)} + \lambda^2 \sinh(-\Omega t) (-r_{12}^{(2)}) \right] \end{cases} \tag{6.94}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{12}^{(6)} = -\frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{12}^{(2)} + i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(2)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(2)} \right] \\ r_{21}^{(6)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{21}^{(2)} - i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(2)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(2)} \right] \end{cases}.$$

Novamente, comparando (6.90) com (6.93) e (6.91) com (6.94), nota-se que $\begin{cases} r_{11}^{(5)} = r_{11}^{(6)} \\ r_{22}^{(5)} = r_{22}^{(6)} \end{cases}$ e

$$\begin{cases} r_{12}^{(5)} = -r_{12}^{(6)} \\ r_{21}^{(5)} = -r_{21}^{(6)} \end{cases}.$$

Com (6.83), (6.86), (6.89) e (6.92), a equação (6.41) pode ser simplificada:

$$\begin{aligned}
& \hat{P}\hat{G}(t)\hat{G}(t')\hat{P}\hat{\alpha}(t) \\
&= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left\{ \begin{pmatrix} r_{11}^{(3)} & r_{12}^{(3)} \\ r_{21}^{(3)} & r_{22}^{(3)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{11}^{(4)} & r_{12}^{(4)} \\ r_{21}^{(4)} & r_{22}^{(4)} \end{pmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) + i\text{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left\{ \begin{pmatrix} r_{11}^{(5)} & r_{12}^{(5)} \\ r_{21}^{(5)} & r_{22}^{(5)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{11}^{(6)} & r_{12}^{(6)} \\ r_{21}^{(6)} & r_{22}^{(6)} \end{pmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) - i\text{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} r_{11}^{(3)} - r_{11}^{(4)} & r_{12}^{(3)} - r_{12}^{(4)} \\ r_{21}^{(3)} - r_{21}^{(4)} & r_{22}^{(3)} - r_{22}^{(4)} \end{pmatrix} \\
&\times \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) + i\text{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} r_{11}^{(5)} - r_{11}^{(6)} & r_{12}^{(5)} - r_{12}^{(6)} \\ r_{21}^{(5)} - r_{21}^{(6)} & r_{22}^{(5)} - r_{22}^{(6)} \end{pmatrix} \\
&\times \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) - i\text{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 2r_{12}^{(3)} \\ 2r_{21}^{(3)} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) + i\text{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 2r_{12}^{(5)} \\ 2r_{21}^{(5)} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) - i\text{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B
\end{aligned} \tag{6.95}$$

onde já foram utilizadas as similaridades notadas anteriormente entre os elementos $r_{ij}^{(m)}$ e $r_{ij}^{(m+1)}$. Para facilitar a comparação entre $r_{ij}^{(3)}$ e $r_{ij}^{(5)}$, estes últimos serão colocados em termos de $r_{ij}^{(1)}$ através de (6.79), fornecendo ao final

$$\begin{cases} r_{12}^{(5)} = -\frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{12}^{(1)} + i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(1)} \right] \\ r_{21}^{(5)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} \left[\Omega \cosh(\Omega t) r_{21}^{(1)} - i2\omega_0 \sinh(\Omega t) r_{21}^{(1)} + \lambda^2 \sinh(\Omega t) r_{12}^{(1)} \right] \end{cases} . \tag{6.96}$$

Curiosamente, comparando (6.96) com (6.85), surge a semelhança $\begin{cases} r_{12}^{(5)} = r_{12}^{(3)} \\ r_{21}^{(5)} = r_{21}^{(3)} \end{cases}$ e

$$\begin{aligned}
& \hat{P} \hat{G}(t) \hat{G}(t') \hat{P} \hat{\alpha}(t) \\
&= \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 2r_{12}^{(3)} \\ 2r_{21}^{(3)} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) + i \operatorname{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&+ \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 2r_{12}^{(3)} \\ 2r_{21}^{(3)} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) - i \operatorname{sen}[\omega(t-t')] \right\} \otimes \hat{\rho}_B \\
&= 4 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{pmatrix} 0 & r_{12}^{(3)} \\ r_{21}^{(3)} & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \otimes \hat{\rho}_B.
\end{aligned} \tag{6.97}$$

Aparentemente, todo o processo levou a uma expressão simples, sendo necessário obter apenas as coerências (6.85) através de (6.79) e (6.76). Para simplificar os cálculos, é conveniente definir as funções $K_1(t)$ e $K_2(t)$,

$$\begin{cases} K_1(t) \equiv \Omega \cosh(\Omega t) + i2\omega_0 \operatorname{senh}(\Omega t) \\ K_2(t) \equiv \lambda^2 \operatorname{senh}(\Omega t) \end{cases} \tag{6.98}$$

pois, dessa forma, (6.76) assume a forma compacta

$$\begin{cases} r_{12}^{(0)}(t, t') = \frac{e^{-\lambda^2 t'}}{\Omega} [K_1^*(t') r_{12}(t) + K_2(t') r_{21}(t)] \\ r_{21}^{(0)}(t, t') = \frac{e^{-\lambda^2 t'}}{\Omega} [K_2(t') r_{12}(t) + K_1(t') r_{21}(t)] \end{cases}. \tag{6.99}$$

Continuando, (6.79) se tornará

$$\begin{cases} r_{12}^{(1)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} [K_1^*(t-t') r_{12}^{(0)} - K_2(t-t') r_{21}^{(0)}] \\ r_{21}^{(1)} = \frac{e^{-\lambda^2(t-t')}}{\Omega} [K_2(t-t') r_{12}^{(0)} - K_1(t-t') r_{21}^{(0)}] \end{cases} \tag{6.100}$$

e (6.85)

$$\begin{cases} r_{12}^{(3)} = -\frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} [K_1(t) r_{12}^{(1)} + K_2(t) r_{21}^{(1)}] \\ r_{21}^{(3)} = \frac{e^{\lambda^2 t}}{\Omega} [K_2(t) r_{12}^{(1)} + K_1^*(t) r_{21}^{(1)}] \end{cases}. \tag{6.101}$$

Resta, agora, substituir (6.99) em (6.100) e o resultado em (6.101). Começando com (6.99) e (6.100):

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12}^{(1)} = \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\Omega^2} [K_1^*(t-t') K_1^*(t') - K_2(t-t') K_2(t')] r_{12}(t) \\ \quad + \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\Omega^2} [K_1^*(t-t') K_2(t') - K_2(t-t') K_1(t')] r_{21}(t) \\ r_{21}^{(1)} = \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\Omega^2} [K_2(t-t') K_1^*(t') - K_1(t-t') K_2(t')] r_{12}(t) \\ \quad + \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\Omega^2} [K_2(t-t') K_2(t') - K_1(t-t') K_1(t')] r_{21}(t) \end{array} \right. . \quad (6.102)$$

Substituindo esta expressão em (6.101),

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12}^{(3)} = -\frac{1}{\Omega^3} \{ K_1(t) [K_1^*(t-t') K_1^*(t') - K_2(t-t') K_2(t')] \\ \quad + K_2(t) [K_2(t-t') K_1^*(t') - K_1(t-t') K_2(t')] \} r_{12}(t) \\ \quad - \frac{1}{\Omega^3} \{ K_1(t) [K_1^*(t-t') K_2(t') - K_2(t-t') K_1(t')] \\ \quad + K_2(t) [K_2(t-t') K_2(t') - K_1(t-t') K_1(t')] \} r_{21}(t) \\ r_{21}^{(3)} = \frac{1}{\Omega^3} \{ K_2(t) [K_1^*(t-t') K_1^*(t') - K_2(t-t') K_2(t')] \\ \quad + K_1^*(t) [K_2(t-t') K_1^*(t') - K_1(t-t') K_2(t')] \} r_{12}(t) \\ \quad + \frac{1}{\Omega^3} \{ K_2(t) [K_1^*(t-t') K_2(t') - K_2(t-t') K_1(t')] \\ \quad + K_1^*(t) [K_2(t-t') K_2(t') - K_1(t-t') K_1(t')] \} \end{array} \right. .$$

Novamente, por uma questão de praticidade, serão definidas as funções

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(t, t') \equiv K_1(t) [K_1^*(t-t') K_1^*(t') - K_2(t-t') K_2(t')] \\ \quad + K_2(t) [K_2(t-t') K_1^*(t') - K_1(t-t') K_2(t')] \\ Q_2(t, t') \equiv K_1(t) [K_1^*(t-t') K_2(t') - K_2(t-t') K_1(t')] \\ \quad + K_2(t) [K_2(t-t') K_2(t') - K_1(t-t') K_1(t')] \end{array} \right. , \quad (6.103)$$

de tal forma que

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12}^{(3)} = -\frac{1}{\Omega^3} Q_1(t, t') r_{12}(t) - \frac{1}{\Omega^3} Q_2(t, t') r_{21}(t) \\ r_{21}^{(3)} = -\frac{1}{\Omega^3} Q_2^*(t, t') r_{12}(t) - \frac{1}{\Omega^3} Q_1^*(t, t') r_{21}(t) \end{array} \right. . \quad (6.104)$$

Assim, substituindo (6.104) em (6.97):

$$\begin{aligned}
 & \hat{\hat{P}}\hat{\hat{G}}(t)\hat{\hat{G}}(t')\hat{\hat{P}}\hat{\alpha}(t) = \\
 & = -\frac{4}{\Omega^3} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \begin{bmatrix} 0 & Q_1(t, t') r_{12}(t) + Q_2(t, t') r_{21}(t) \\ Q_2^*(t, t') r_{12}(t) + Q_1^*(t, t') r_{21}(t) & 0 \end{bmatrix} \\
 & \quad \times \cos[\omega(t - t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \otimes \hat{\rho}_B.
 \end{aligned} \tag{6.105}$$

Finalmente, com (6.105) é possível escrever a equação diferencial para o sistema retornando a (5.24):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) \end{bmatrix} &= -\frac{4}{\Omega^3} \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega J(\omega) \cos[\omega(t - t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\
 & \times \begin{bmatrix} 0 & Q_1(t, t') r_{12}(t) + Q_2(t, t') r_{21}(t) \\ Q_2^*(t, t') r_{12}(t) + Q_1^*(t, t') r_{21}(t) & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.106}$$

O fato de os cálculos terem sido realizados considerando todos os elementos fornece um bom indício de que estão corretos, já que o integrando é uma matriz hermitiana, como esperado.

6.7.2 Obtenção das populações na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$

Mais uma vez, as populações na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$ não dependerão de maiores considerações sobre a densidade espectral. Para $i = 1, 2$,

$$\frac{d}{dt} r_{ii}(t) = 0 \Rightarrow r_{ii}(t) = r_{ii}(0). \tag{6.107}$$

Realizando o retorno para $\hat{\rho}_S(t)$ segundo (6.13) e (6.71),

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \frac{r_{11}(0)-r_{22}(0)}{2}e^{-2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}(0)+r_{22}(0)}{2} \\ \rho_{22}^{(z)}(t) = \frac{r_{22}(0)-r_{11}(0)}{2}e^{-2\lambda^2 t} + \frac{r_{11}(0)+r_{22}(0)}{2} \end{cases} \quad (6.108)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \frac{\rho_{11}^{(z)}(0)-\rho_{22}^{(z)}(0)}{2}e^{-2\lambda^2 t} + \frac{\rho_{11}^{(z)}(0)+\rho_{22}^{(z)}(0)}{2} \\ \rho_{22}^{(z)}(t) = \frac{\rho_{22}^{(z)}(0)-\rho_{11}^{(z)}(0)}{2}e^{-2\lambda^2 t} + \frac{\rho_{11}^{(z)}(0)+\rho_{22}^{(z)}(0)}{2} \end{cases} \quad (6.109)$$

e, sabendo que $\rho_{11}^{(z)}(t) + \rho_{22}^{(z)}(t) = 1, \forall t$,

$$\rho_{11}^{(z)}(t) = \frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2}e^{-2\lambda^2 t} + \frac{1}{2}. \quad (6.110)$$

No momento, não é possível ir além dessa expressão pois, como pode ser visto em (3.46), na base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$ esse elemento é necessário apenas nas coerências e, mesmo assim, para obtê-las por completo é necessário o cálculo de $\rho_{12}^{(z)}(t)$.

6.7.3 Obtenção das coerências na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$

Assumindo a densidade espectral ôhmica (6.42), as equações para as coerências se tornarão, de (6.106),

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}r_{12}(t) = -4\frac{\eta}{\Omega^3}\int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ \quad \times [Q_1(t, t')r_{12}(t) + Q_2(t, t')r_{21}(t)] \\ \frac{d}{dt}r_{21}(t) = -4\frac{\eta}{\Omega^3}\int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos[\omega(t-t')] \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ \quad \times [Q_2^*(t, t')r_{12}(t) + Q_1^*(t, t')r_{21}(t)] \end{cases} \quad (6.111)$$

Por um momento, a equação para $r_{21}(t)$ será ignorada, já que é a conjugada da equação para $r_{12}(t)$. Chegou o momento de explicitar $Q_1(t, t')$ e $Q_2(t, t')$. Da definição (6.103), é necessário calcular os termos entre colchetes utilizando (6.98), e as propriedades de soma das

funções trigonométricas hiperbólicas. Em primeiro lugar,

$$K_1(t-t') K_1(t') = \lambda^4 \cosh(\Omega t') \cosh[\Omega(t-t')] - 4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) + i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t) ,$$

$$K_2(t-t') K_2(t') = \lambda^4 \sinh[\Omega(t-t')] \sinh(\Omega t') ,$$

$$K_1(t-t') K_1(t') = \lambda^2 \Omega \sinh[\Omega(t-t')] \cosh(\Omega t') + i2\lambda^2 \omega_0 \sinh[\Omega(t-t')] \sinh(\Omega t') ,$$

$$K_1(t-t') K_2(t') = \lambda^2 \Omega \cosh[\Omega(t-t')] \sinh(\Omega t') + i2\lambda^2 \omega_0 \sinh[\Omega(t-t')] \sinh(\Omega t') ,$$

e, com essas expressões,

$$K_2(t-t') K_2(t') - K_1(t-t') K_1(t') = -\lambda^4 \cosh[\Omega(t-2t')] + 4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) - i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t) ,$$

$$K_2(t-t') K_1^*(t') - K_1(t-t') K_2(t') = \lambda^2 \Omega \sinh[\Omega(t-2t')] - i4\lambda^2 \omega_0 \sinh[\Omega(t-t')] \sinh(\Omega t') ,$$

ou seja,

$$\begin{cases} Q_1(t, t') = K_1(t) \{ \lambda^4 \cosh[\Omega(t-2t')] - 4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) - i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t) \} \\ \quad K_2(t) \{ \lambda^2 \Omega \sinh[\Omega(t-2t')] - i4\lambda^2 \omega_0 \sinh[\Omega(t-t')] \sinh(\Omega t') \} \\ Q_2(t, t') = -K_1(t) \{ \lambda^2 \Omega \sinh[\Omega(t-2t')] + i4\lambda^2 \omega_0 \sinh[\Omega(t-t')] \sinh(\Omega t') \} \\ \quad -K_2(t) \{ \lambda^4 \cosh[\Omega(t-2t')] - 4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) + i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t) \} \end{cases} . \quad (6.112)$$

Como na medida de $\hat{\sigma}_z$ será feita a mudança de variável $\tau = t - t'$ na integral, que fornecerá

$$\frac{d}{dt}r_{12}(t) = -4\frac{\eta}{\Omega^3} \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) [Q_1(t, t-\tau) r_{12}(t) + Q_2(t, t-\tau) r_{21}(t)] \quad (6.113)$$

onde

$$\begin{cases} Q_1(t, t-\tau) = K_1(t) \{ \lambda^4 \cosh[\Omega(2\tau-t)] - 4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) - i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t) \} \\ \quad K_2(t) \{ \lambda^2 \Omega \sinh[\Omega(2\tau-t)] - i4\lambda^2 \omega_0 \sinh(\Omega\tau) \sinh[\Omega(t-\tau)] \} \\ Q_2(t, t-\tau) = -K_1(t) \{ \lambda^2 \Omega \sinh[\Omega(2\tau-t)] + i4\lambda^2 \omega_0 \sinh(\Omega\tau) \sinh[\Omega(t-\tau)] \} \\ \quad -K_2(t) \{ \lambda^4 \cosh[\Omega(2\tau-t)] - 4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) + i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t) \} \end{cases} \quad (6.114)$$

Substituindo (6.114) em (6.113), é obtida a equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r_{12}(t) &= 4\frac{\eta}{\Omega^3} K_1(t) r_{12}(t) [4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) + i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t)] \\ &\times \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &- 4\frac{\eta\lambda^4}{\Omega^3} K_1(t) r_{12}(t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \cosh[\Omega(2\tau-t)] \\ &- 4\frac{\eta\lambda^2}{\Omega^2} K_2(t) r_{12}(t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \sinh[\Omega(2\tau-t)] \\ &+ i16\frac{\eta\lambda^2\omega_0}{\Omega^3} K_2(t) r_{12}(t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &\times \sinh(\Omega\tau) \sinh[\Omega(t-\tau)] \\ &+ 4\frac{\eta\lambda^2}{\Omega^2} K_1(t) r_{21}(t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \sinh[\Omega(2\tau-t)] \\ &+ i16\frac{\eta\lambda^2\omega_0}{\Omega^3} K_1(t) r_{21}(t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \\ &\times \sinh(\Omega\tau) \sinh[\Omega(t-\tau)] \\ &+ 4\frac{\eta\lambda^4}{\Omega^3} K_2(t) r_{21}(t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \cosh[\Omega(2\tau-t)] \\ &- 4\frac{\eta}{\Omega^3} K_2(t) r_{21}(t) [4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) - i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t)] \\ &\times \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

que pode ser colocada em uma forma mais compacta definindo

$$E(t) \equiv 4\omega_0^2 \cosh(\Omega t) + i2\Omega\omega_0 \sinh(\Omega t) \quad (6.115)$$

fornecendo, ao final

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r_{12}(t) &= 4\frac{\eta}{\Omega^3} [K_1(t) E(t) I_1(t) - \lambda^4 K_1(t) I_2(t) \\ &\quad - \lambda^2 \Omega K_2(t) I_3(t) + i4\lambda^2 \omega_0 K_2(t) I_4(t)] r_{12}(t) \\ &- 4\frac{\eta}{\Omega^3} [K_2(t) E^*(t) I_1(t) - \lambda^4 K_2(t) I_2(t) \\ &\quad - \lambda^2 \Omega K_1(t) I_3(t) - i4\lambda^2 \omega_0 K_1(t) I_4(t)] r_{21}(t) . \end{aligned} \quad (6.116)$$

Para encontrar as coerências, é necessário, primeiro, resolver as integrais

$$I_1(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) ,$$

$$I_2(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \cosh[\Omega(2\tau - t)] ,$$

$$I_3(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \sinh[\Omega(2\tau - t)]$$

e

$$I_4(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \sinh(\Omega\tau) \sinh[\Omega(t - \tau)] .$$

Sua integração analítica é extremamente difícil (e a principal fonte de dificuldades é a cotangente hiperbólica). Para contornar tal dificuldade de forma a obter soluções analíticas, foram feitas duas particularizações.

Particularização $T = 0$ e $\omega_0 = 0$

Assumindo temperatura nula para o banho, então $\beta \rightarrow \infty$ (pela direita) e $\cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \rightarrow 1$, fornecendo, então,

$$I_1(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega' \omega' e^{-\frac{\omega'}{\omega_c}} \cos(\omega'\tau) ,$$

$$I_2(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega' \omega' e^{-\frac{\omega'}{\omega_c}} \cos(\omega' \tau) \cosh[\Omega(2\tau - t)] ,$$

$$I_3(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega' \omega' e^{-\frac{\omega'}{\omega_c}} \cos(\omega' \tau) \sinh[\Omega(2\tau - t)]$$

e

$$I_4(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega' \omega' e^{-\frac{\omega'}{\omega_c}} \cos(\omega' \tau) \sinh(\Omega \tau) \sinh[\Omega(t - \tau)] .$$

A resolução dessas integrais (ver apêndice C) fornecerá

$$I_1(t) = \frac{\omega_C^2 t}{1 + (\omega_C t)^2} , \quad (6.117)$$

$$I_2(t) = 2\Omega \sinh(\Omega t) g_0 + \Omega \sinh(\Omega t) g_1(t) + \Omega \cosh(\Omega t) g_2(t) , \quad (6.118)$$

$$I_3(t) = -2\Omega \cosh(\Omega t) g_0 + \Omega \cosh(\Omega t) g_1(t) + \Omega \sinh(\Omega t) g_2(t) \quad (6.119)$$

e

$$I_4(t) = \frac{1}{2} \cosh(\Omega t) I_1(t) - \frac{1}{2} I_2(t) \quad (6.120)$$

onde

$$g_0 = \operatorname{Re} \left\{ \exp\left(i \frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \Gamma\left(0, i \frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \right\} , \quad (6.121)$$

$$g_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ \exp\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \Gamma\left(0, 2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C}\right) + \exp\left[-\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \Gamma\left[0, -\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \right\} \quad (6.122)$$

e

$$g_2(t) = \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] - \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right\} . \quad (6.123)$$

Agora, será realizada a particularização $\omega_0 = 0$ que, segundo (6.73), (6.98) e (6.115), acarretará em

$$\Omega = \lambda^2 , \quad (6.124)$$

$$\begin{cases} K_1(t) \equiv \lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) \\ K_2(t) \equiv \lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) \end{cases} \quad (6.125)$$

e

$$E(t) = 0 . \quad (6.126)$$

Tendo em vista (6.124), (6.125) e (6.126), a equação (6.116) se tornará

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r_{12}(t) &= 4\eta [\sinh(\lambda^2 t) I_2(t) + \cosh(\lambda^2 t) I_3(t)] r_{21}(t) \\ &\quad - 4\eta [\cosh(\lambda^2 t) I_2(t) + \sinh(\lambda^2 t) I_3(t)] r_{12}(t) \end{aligned} \quad (6.127)$$

onde

$$I_2(t) = 2\lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_0 + \lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_1(t) + \lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_2(t) , \quad (6.128)$$

$$I_3(t) = -2\lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_0 + \lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_1(t) + \lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_2(t) , \quad (6.129)$$

$$g_0 = \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} , \quad (6.130)$$

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right. \\
&\quad \left. + \exp \left[- \left(2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[0, - \left(2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{6.131}$$

e

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\left(2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, \left(2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \exp \left[- \left(2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, - \left(2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{6.132}$$

Agora, para resolver (6.127), sua conjugada será considerada:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} r_{21}(t) &= 4\eta \left[\sinh(\lambda^2 t) I_2(t) + \cosh(\lambda^2 t) I_3(t) \right] r_{12}(t) \\
&\quad - 4\eta \left[\cosh(\lambda^2 t) I_2(t) + \sinh(\lambda^2 t) I_3(t) \right] r_{21}(t) .
\end{aligned} \tag{6.133}$$

Somando (6.127) com (6.133) e subtraindo (6.133) de (6.127), é obtido o sistema de equações desacopladas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \{ r_{12}(t) \} = 4\eta \left[\sinh(\lambda^2 t) - \cosh(\lambda^2 t) \right] [I_2(t) - I_3(t)] \operatorname{Re} \{ r_{12}(t) \} \\ \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \{ r_{12}(t) \} = -4\eta \left[\sinh(\lambda^2 t) + \cosh(\lambda^2 t) \right] [I_2(t) + I_3(t)] \operatorname{Im} \{ r_{12}(t) \} \end{cases} \tag{6.134}$$

onde, simplificando a parte que envolve as funções trigonométricas hiperbólicas, será obtido

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \{ r_{12}(t) \} = -4\eta e^{-\lambda^2 t} [I_2(t) - I_3(t)] \operatorname{Re} \{ r_{12}(t) \} \\ \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \{ r_{12}(t) \} = -4\eta e^{\lambda^2 t} [I_2(t) + I_3(t)] \operatorname{Im} \{ r_{12}(t) \} \end{cases} . \tag{6.135}$$

Nesse ponto, o sistema será simplificado segundo as definições de $I_2(t)$ e $I_3(t)$:

$$\begin{aligned}
 I_2(t) - I_3(t) &= 2\lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_0 + \lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_1(t) + \lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_2(t) \\
 &\quad + 2\lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_0 - \lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_1(t) - \lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_2(t) = \\
 &= 2\lambda^2 g_0 [\sinh(\lambda^2 t) + \cosh(\lambda^2 t)] + \lambda^2 g_1(t) [\sinh(\lambda^2 t) - \cosh(\lambda^2 t)] \\
 &\quad + \lambda^2 g_2(t) [\cosh(\lambda^2 t) - \sinh(\lambda^2 t)] \\
 &= \lambda^2 [2g_0 e^{\lambda^2 t} - g_1(t) e^{-\lambda^2 t} + g_2(t) e^{-\lambda^2 t}]
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 I_2(t) + I_3(t) &= 2\lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_0 + \lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_1(t) + \lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_2(t) \\
 &\quad - 2\lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_0 + \lambda^2 \cosh(\lambda^2 t) g_1(t) + \lambda^2 \sinh(\lambda^2 t) g_2(t) \\
 &= 2\lambda^2 g_0 [\sinh(\lambda^2 t) - \cosh(\lambda^2 t)] + \lambda^2 g_1(t) [\sinh(\lambda^2 t) + \cosh(\lambda^2 t)] \\
 &\quad + \lambda^2 g_2(t) [\sinh(\lambda^2 t) + \cosh(\lambda^2 t)] \\
 &= -\lambda^2 [2g_0 e^{-\lambda^2 t} - g_1(t) e^{\lambda^2 t} - g_2(t) e^{\lambda^2 t}] .
 \end{aligned}$$

Todas as simplificações possíveis foram feitas e o sistema assume a forma final

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \text{Re}\{r_{12}(t)\} = & -4\eta\lambda^2 [2g_0 - e^{-2\lambda^2 t} g_1(t) + e^{-2\lambda^2 t} g_2(t)] \text{Re}\{r_{12}(t)\} \\ \frac{d}{dt} \text{Im}\{r_{12}(t)\} = & 4\eta\lambda^2 [2g_0 - e^{2\lambda^2 t} g_1(t) - e^{2\lambda^2 t} g_2(t)] \text{Im}\{r_{12}(t)\} \end{cases} \quad (6.136)$$

cuja solução, em termos de um instante inicial $t_0 = 0$, será dada por:

$$\begin{cases} \text{Re}\{r_{12}(t)\} = & \text{Re}\{\rho_{12}(0)\} e^{-8\eta\lambda^2 g_0 t} \exp\left\{4\eta\lambda^2 \int_0^t e^{-2\lambda^2 t'} g_1(t') dt'\right\} \\ & \times \exp\left\{-4\eta\lambda^2 \int_0^t e^{-2\lambda^2 t'} g_2(t') dt'\right\} \\ \text{Im}\{r_{12}(t)\} = & \text{Im}\{\rho_{12}(0)\} e^{8\eta\lambda^2 g_0 t} \exp\left\{-4\eta\lambda^2 \int_0^t e^{2\lambda^2 t'} g_1(t') dt'\right\} \\ & \times \exp\left\{-4\eta\lambda^2 \int_0^t e^{2\lambda^2 t'} g_2(t') dt'\right\} \end{cases} . \quad (6.137)$$

O próximo passo será explicitar as integrais das funções $g_1(t)$ e $g_2(t)$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{2\xi\lambda^2 t'} g_1(t') dt' &= \int_0^t dt' e^{2\xi\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left[- \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[0, - \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \\
 &= \int_0^t dt' e^{2(\xi+1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\
 &\quad + \int_0^t dt' e^{2(\xi-1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{2\xi\lambda^2 t'} g_2(t') dt' &= \int_0^t dt' e^{2\xi\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \exp \left[- \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, - \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \\
 &= \int_0^t dt' e^{2(\xi+1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \\
 &\quad - \int_0^t dt' e^{2(\xi-1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, - \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{aligned}
 \int_0^t e^{2\xi\lambda^2 t'} g_1(t') dt' &= \int_0^t dt' e^{2(\xi+1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\
 &\quad + \int_0^t dt' e^{2(\xi-1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\
 \int_0^t e^{2\xi\lambda^2 t'} g_2(t') dt' &= \int_0^t dt' e^{2(\xi+1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \\
 &\quad - \int_0^t dt' e^{2(\xi-1)\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, - \left(2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \right. \quad (6.138)$$

Agora, particularizando para $\xi = 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t e^{2\lambda^2 t'} g_1(t') dt' = \int_0^t dt' e^{4\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t' + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\ \quad + \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t' - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\ \\ \int_0^t e^{2\lambda^2 t'} g_2(t') dt' = \int_0^t dt' e^{4\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, \left(2\lambda^2 t' + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \\ \quad - \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, - \left(2\lambda^2 t' + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \end{array} \right. \quad (6.139)$$

e, para $\xi = -1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t e^{-2\lambda^2 t'} g_1(t') dt' = \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ e^{i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t' + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\ \quad + \int_0^t dt' e^{-4\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t' - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\ \\ \int_0^t e^{-2\lambda^2 t'} g_2(t') dt' = \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ e^{i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, \left(2\lambda^2 t' + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \\ \quad - \int_0^t dt' e^{-4\lambda^2 t'} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left[-1, - \left(2\lambda^2 t' + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \right\} \end{array} \right. . \quad (6.140)$$

Ao final, as integrais fornecerão (ver apêndice C):

$$\begin{aligned} A_+(t) &\equiv \int_0^t e^{2\lambda^2 t'} g_1(t') dt' \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[e^{4\lambda^2 t} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) - e^{-i4\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{2\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) + \Gamma \left(1, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\ &+ t \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right\} + \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_1 + e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_3 \right\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_-(t) &\equiv \int_0^t e^{-2\lambda^2 t'} g_1(t') dt' \\ &= -\frac{1}{4\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[e^{-4\lambda^2 t} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) - e^{i4\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{2\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) - \Gamma \left(1, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\ &+ t \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_1^* + e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_3^* \right\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_+(t) &\equiv \int_0^t e^{2\lambda^2 t'} g_2(t') dt' \\
&= \frac{1}{4\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[e^{4\lambda^2 t} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) + e^{-i4\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) + \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\
&\quad - t \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_2 - e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_4 \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B_-(t) &\equiv \int_0^t e^{-2\lambda^2 t'} g_2(t') dt' \\
&= \frac{1}{4\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[e^{-4\lambda^2 t} \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t - i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) + e^{i4\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \left[i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) - \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \right\} \\
&\quad + t \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t + i2\frac{\lambda^2}{\omega_c} \right) \right\} - \operatorname{Re} \left\{ e^{i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_2^* - e^{-i2\frac{\lambda^2}{\omega_c}} c_4^* \right\}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases}
c_1 = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \Gamma \left(0, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) + \Gamma \left(1, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \\
c_2 = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \Gamma \left(-1, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) + \Gamma \left(0, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \\
c_3 = -\frac{1}{4\lambda^2} \left[\Gamma \left(0, i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) - e^{-i\frac{4\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(0, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) \right] \\
c_4 = -\frac{1}{4\lambda^2} \left[\Gamma \left(-1, i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) + e^{-i\frac{4\lambda^2}{\omega_c}} \Gamma \left(-1, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_c} \right) \right]
\end{cases}.$$

Finalmente,

$$\begin{cases}
\operatorname{Re} \{ r_{12}(t) \} = \operatorname{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} e^{-8\eta\lambda^2 g_0 t} e^{4\eta\lambda^2 [A_-(t) - B_-(t)]} \\
\operatorname{Im} \{ r_{12}(t) \} = \operatorname{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} e^{8\eta\lambda^2 g_0 t} e^{-4\eta\lambda^2 [A_+(t) + B_+(t)]}
\end{cases} \quad (6.141)$$

e as coerências serão, de acordo com (6.13) e (6.72),

$$\rho_{12}^{(z)}(t) = \operatorname{Re} \{ r_{12}(t) \} + ie^{-2\lambda^2 t} \operatorname{Im} \{ r_{12}(t) \}$$

ou, com (6.141),

$$\rho_{12}^{(z)}(t) = \text{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} e^{-8\eta\lambda^2 g_0 t} e^{4\eta\lambda^2 [A_-(t) - B_-(t)]} + i \text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} e^{-2\lambda^2 t} e^{8\eta\lambda^2 g_0 t} e^{-4\eta\lambda^2 [A_+(t) + B_+(t)]}. \quad (6.142)$$

6.8 Obtenção do operador densidade na base de autoestados de

$$\hat{\sigma}_x$$

Agora que tanto as populações (6.110) quanto as coerências (6.142) foram obtidas na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$, a mudança para a base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$ descrita no final do item 3.4 pode ser feita. Com o auxílio de (3.44),

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(x)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11}^{(z)}(t) & \rho_{12}^{(z)}(t) \\ \rho_{21}^{(z)}(t) & \rho_{22}^{(z)}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + 2\text{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} & 2\rho_{11}^{(z)}(t) - 1 - i2\text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} \\ 2\rho_{11}^{(z)}(t) - 1 + i2\text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} & 1 - 2\text{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \text{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} \\ \rho_{12}^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} + \rho_{11}^{(z)}(t) - i\text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(t) \right\} \end{cases}.$$

Explicitando com base em (6.110) e (6.142), o resultado final é obtido:

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \text{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} e^{-8\eta\lambda^2 g_0 t} e^{4\eta\lambda^2 [A_-(t) - B_-(t)]} \\ \rho_{12}^{(x)}(t) = \frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} e^{-2\lambda^2 t} - i\text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} e^{-2\lambda^2 t} e^{8\eta\lambda^2 g_0 t} e^{-4\eta\lambda^2 [A_+(t) + B_+(t)]} \end{cases}. \quad (6.143)$$

A forma elaborada de (6.143), com as funções $A_{\pm}(t)$ e $B_{\pm}(t)$ escritas em termos das $\Gamma(a, z)$ e que se originou de cálculos extensos pode levar a dúvidas sobre sua confiabilidade. Com a finalidade de contribuir para a segurança neste resultado, no apêndice D são analisados alguns limites.

6.9 Contextualização

As expressões (6.69) e (6.143) constituem o principal resultado deste capítulo. Elas são válidas para o acoplamento fraco sistema-ambiente - aproximação de Born no item 5.4 - ou seja, η pequeno. No próximo capítulo, essas soluções serão graficadas para várias situações e, em seguida, comparadas às soluções obtidas por um método puramente numérico, brevemente explicado na ocasião, o que permitirá estabelecer o valor máximo de η em que permanecem válidas. O comportamento das soluções levará a algumas conclusões interessantes não apenas do ponto de vista fundamental da mecânica quântica mas, também, com possíveis aplicações em informação quântica (como discutido na conclusão).

Capítulo 7 Estudo das soluções

“Dúvidas de todas as coisas terrestres e intuições de algumas coisas celestiais, eis uma combinação que não faz de ninguém crente ou descrente e sim uma criatura que observa tudo isso com um olhar imparcial.”

Herman Melville, *Moby Dick*

“ Juro por Deus; eu jamais acreditaria nisso

Sem a prova sensível e verdadeira

Dos meus próprios olhos”

William Shakespeare, *Hamlet*

7.1 Introdução

A abordagem da medida através da equação de Lindblad com inclusão do ambiente não-markoviano começou no capítulo 5 com a dedução de uma equação-mestra híbrida, válida para acoplamento sistema-ambiente fraco, em um método que pode ser utilizado também em aplicações mais amplas. No capítulo 6, essa equação-mestra foi resolvida para dois casos distintos, utilizando as soluções analíticas da equação de Lindblad obtidas no capítulo 3. Aqui, o ciclo se encerrará e as soluções da equação-mestra híbrida serão estudadas e comparadas com soluções numéricas de validade mais geral, com acoplamento sistema-ambiente arbitrário.

Este capítulo tratará em separado do estudo das populações, que se relacionarão ao possível erro da medida, e das coerências, que fornecerão o tempo em que a medida poderá ser

interrompida. O primeiro caso pode ser verificado na referência (62) e o estudo do tempo de medida pode ser também encontrado em (67), ambas referências que se originaram do trabalho desta tese.

Segundo (6.69) e (6.143), para verificar a influência do ambiente, é necessário partir de um estado inicial com coerências não-nulas na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$. Assim, em todos os gráficos a condição inicial escolhida foi:

$$\hat{\rho}^{(z)}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

7.2 Soluções analíticas: acoplamento sistema-ambiente fraco

7.2.1 Populações: erros na medida

As populações fornecem as probabilidades associadas aos possíveis resultados da medida. Assim, a diferença entre o valor inicial da população (instante t_0) e seu valor no final da medida (instante t_f) representa a probabilidade de que a medida forneça um resultado diferente do esperado. Isso pode ser compreendido sabendo que, se os valores inicial $\rho_{11}(t_0)$ e final $\rho_{11}(t_f)$ forem distintos, haverá uma fração

$$\epsilon \equiv |\rho_{11}(t_f) - \rho_{11}(t_0)| \quad (7.2)$$

de sistemas, no *ensemble*, que colapsaram em um autoestado diferente daquele que seria obtido se a medida fosse um processo totalmente instantâneo compreendido em t_0 . Assim, a grandeza ϵ será considerada o *erro* da medida.

Como nem o ambiente nem o medidor influenciam as populações para a medida da componente z , segundo (6.69), aqui será analisado apenas o caso para a medida da componente x . A figura 7.1 mostra a evolução temporal, calculada a partir de (6.143), das populações na base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$ para o caso $\hat{L} = \lambda \hat{\sigma}_x$ com $T = 0$ para vários valores de λ e η ; foram

Figura 7.1 – Evolução temporal para as populações no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1). A linha tracejada vertical indica o valor escolhido para o tempo de duração da medida (ver item 7.2.2).

escolhidos valores para o acoplamento sistema-ambiente em que as soluções analíticas são válidas.

É possível notar que, para um dado valor de η , quanto maior λ mais lenta é a diminuição das populações, o que pode ser melhor visualizado na figura 7.2, onde as curvas referentes aos vários valores de λ são colocadas juntas, para um valor fixo de η . **Isso permite concluir que a medida de tempo finito, quando não comuta com o hamiltoniano de interação sistema-ambiente, protege o estado medido - pelo menos no caso de acoplamento sistema-ambiente fraco.** Esse fato pode ter várias aplicações em informação quântica, em particular em códigos de correção e prevenção de erros.

Resta calcular os erros ϵ das medidas, segundo (7.2), para os vários casos considerados mas, para isso, é necessário adotar um tempo t_f em que a interação sistema-medidor deve ser interrompida. No próximo item, um critério para determinar o tempo t_M de duração de uma

Figura 7.2 – Curvas referentes a $\eta = 0,5$, selecionadas na figura 7.1 para os vários valores de λ , no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).

Tabela 7.1 – Erros ϵ das medidas considerando todos os casos exibidos na figura 7.1 para os quais as soluções analíticas (6.143) são válidas. Como para $\lambda = 0$ não há medidor, o critério adotado não se aplica.

η	$\lambda = 1$ ($t_f = 0,60 \omega_c^{-1}$)	$\lambda = 2$ ($t_f = 0,15 \omega_c^{-1}$)	$\lambda = 3$ ($t_f = 0,07 \omega_c^{-1}$)
0	0	0	0
0,1	0,016	0,001	0,000
0,5	0,071	0,006	0,001
1,0	0,128	0,011	0,002

medida será explicado, baseado no comportamento das coerências e que depende apenas do acoplamento sistema-medidor λ . Esse foi o critério utilizado aqui, ou seja, $t_f = t_M$, assinalado em cada gráfico da figura 7.1 como uma linha tracejada vertical. A tabela 1 indica os erros ϵ para cada caso analisado exceto para $\lambda = 0$ onde não há medidor e o critério utilizado não se aplica.

A primeira linha da tabela 7.1 corresponde ao esperado segundo (6.143) pois, na ausência do ambiente, as populações são constantes. Corroborando o parágrafo anterior, verifica-se que, para um dado valor de η , o erro diminui conforme o acoplamento sistema-medidor λ aumenta, chegando a praticamente zero com o valor mais intenso considerado, $\lambda = 3$. Verifica-se também o papel do ambiente em aumentar o erro da medida, já que este cresce conforme η aumenta. Em aplicações experimentais, portanto, é conveniente ajustar o acoplamento sistema-medidor para que tenha uma intensidade tal que compense os efeitos do ambiente e diminua a duração da medida.

7.2.2 Coerências: duração da medida

Uma vez que a medida é tratada como um processo finito temporalmente, é conveniente estabelecer um critério para que ela possa ser dada como encerrada. Isso é extremamente importante em situações experimentais já que, como explicado no item anterior, com o controle da interação sistema-medidor, a duração da medida deverá ser levada em consideração no planejamento da duração total do experimento.

Será considerado aqui, para estabelecer um critério para a duração da medida, o comportamento das coerências. Como é possível observar pelos gráficos dos módulos das coerências em ambos os casos (figuras 7.3 e 7.4), eles tendem a um valor assintótico próximo de zero após um certo tempo. Assim, o problema consiste em encontrar uma expressão *simples* para o tempo em que $|\rho_{12}^{(\alpha)}(t)|$, $\alpha = x, z$ seja igual a uma fração f de seu valor inicial, ou seja,

$$|\rho_{12}^{(\alpha)}(t_M)| = f |\rho_{12}^{(\alpha)}(0)| \quad (7.3)$$

onde $0 < f < 1$ em um determinado tempo t_M . As formas não-triviais de (6.67) e (6.143) impedem que (7.10) seja resolvida exatamente. Assim, as expressões deverão ser aproximadas por meio de expansões em séries considerando $t_M \ll 1$, o que se justifica pelo comportamento das expressões. Como os dois casos considerados envolvem exponenciais,

$$|\rho_{12}(t)| \propto e^{F(t)}, \quad (7.4)$$

onde $F(t)$ é uma função cuja forma depende da situação considerada e o sinal $\propto$ engloba exponenciais de argumentos lineares em t , a abordagem consistirá em expandir $F(t)$ em série de potências considerando os termos até primeira ordem

$$F(t) \simeq F(0) + F'(0)t,$$

substituir a expansão no argumento da exponencial

$$|\rho_{12}(t)| \propto e^{F(0)+F'(0)t} \quad (7.5)$$

e resolver a equação (7.3) usando (7.5).

Caso $\hat{L} = \lambda \hat{\sigma}_z$

Aqui será considerada a expressão (6.62). O módulo da coerência será dado por

$$|\rho_{12}(t)| = |\rho_{12}(0)| \exp \left[-4\eta \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t') \cotgh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] e^{-2\lambda^2 t}$$

então (7.3) se torna

$$|\rho_{12}(0)| \exp \left[-4\eta \int_0^{t_M} dt' \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t') \cotgh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] e^{-2\lambda^2 t_M} = f |\rho_{12}(0)|$$

ou, simplificando,

$$\exp \left[-4\eta \int_0^{t_M} dt' \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t') \cotgh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right] e^{-2\lambda^2 t_M} = f.$$

A metodologia da expansão será aplicada para o argumento da primeira exponencial definindo a função

$$F(t) \equiv -4\eta \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t') \cotgh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right). \quad (7.6)$$

Como

$$F(0) = 0$$

e

$$F'(0) = \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t) \cotgh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \Big|_{t=0} = 0$$

assim, até primeira ordem,

$$e^{-2\lambda^2 t_M} = f. \quad (7.7)$$

A expressão para t_M se torna

$$t_M = -\frac{1}{2\lambda^2} \ln(f) \quad (7.8)$$

lembrando que $f < 1$.

A figura 7.3 mostra a evolução temporal dos quadrados dos módulos das coerências, calculados segundo (6.68), para vários valores de η , λ e $T = (k_B\beta)^{-1}$.

Como, para a medida da componente z , as populações permanecem constantes, a fórmula (7.8) não é necessária.

Caso $\hat{L} = \lambda\hat{\sigma}_x$, $T = 0$ e $\omega_0 = 0$

Agora será considerada a segunda das (6.143). O módulo ao quadrado da coerência será dado por

$$\left| \rho_{12}^{(x)}(t) \right|^2 = \left[\frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} \right]^2 e^{-4\lambda^2 t} + \text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\}^2 e^{-4\lambda^2 t} e^{16\eta\lambda^2 g_0 t} e^{-8\eta\lambda^2 [A_+(t) + B_+(t)]} . \quad (7.9)$$

Com base nessa equação, (7.3) será desenvolvida:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} \right]^2 e^{-4\lambda^2 t_M} \\ & + \text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\}^2 e^{-4\lambda^2 t_M} e^{16\eta\lambda^2 g_0 t_M} e^{-8\eta\lambda^2 [A_+(t_M) + B_+(t_M)]} \\ & = f^2 \left\{ \left[\frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} \right]^2 + \text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\}^2 \right\} \end{aligned}$$

ou, chamando

$$\begin{aligned} R_0 &= \left[\frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} \right]^2 , \\ I_0 &= \text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\}^2 , \\ N_0 &= R_0 + I_0 , \end{aligned}$$

a equação se simplifica para

$$\frac{R_0}{N_0} e^{-4\lambda^2 t_M} + \frac{I_0}{N_0} e^{-4\lambda^2 t_M} e^{16\eta\lambda^2 g_0 t_M} e^{-8\eta\lambda^2 [A_+(t_M) + B_+(t_M)]} = f^2 .$$

Para ficar ainda mais prático, serão definidos os parâmetros

Figura 7.3 – Evolução temporal para os quadrados dos módulos das coerências no caso da medida de $\hat{\sigma}_z$ na base de autoestados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{R_0}{N_0} , \\ k_2 &= \frac{I_0}{N_0} . \end{aligned}$$

A equação principal do problema será, então:

$$k_1 e^{-4\lambda^2 t_M} + k_2 e^{-4\lambda^2 t_M} e^{16\eta\lambda^2 g_0 t_M} e^{-8\eta\lambda^2 [A_+(t_M) + B_+(t_M)]} = f^2 . \quad (7.10)$$

A expansão será aplicada sobre a última exponencial do segundo termo do lado esquerdo,

$$F(t) = -8\eta\lambda^2 [A_+(t) + B_+(t)] , \quad (7.11)$$

onde

$$F(t) \simeq -8\eta\lambda^2 [A_+(0) + B_+(0)] - 8\eta\lambda^2 [A'_+(0) + B'_+(0)] t . \quad (7.12)$$

Pelas próprias definições,

$$A_+(0) = B_+(0) = 0 .$$

As primeiras derivadas são simples de obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_+(t) &= e^{2\lambda^2 t} g_1(t) , \\ \frac{d}{dt} B_+(t) &= e^{2\lambda^2 t} g_2(t) \end{aligned}$$

e, considerando que

$$\begin{aligned} g_1(0) &= 2 \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} = 2g_0 , \\ g_2(0) &= 0 , \end{aligned}$$

então, até primeira ordem:

$$\begin{aligned} A_+(t) &= 2g_0t, \\ B_+(t) &= 0. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Agora, substituindo (7.13) em (7.12) e o resultado em (7.10):

$$\begin{aligned} k_1 e^{-4\lambda^2 t_M} + k_2 e^{-4\lambda^2 t_M} e^{16\eta\lambda^2 g_0 t_M} e^{-8\eta\lambda^2 (2g_0 t_M)} &= f^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_1 e^{-4\lambda^2 t_M} + k_2 e^{-4\lambda^2 t_M} &= f^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k_1 + k_2}{f^2} &= e^{4\lambda^2 t_M} \end{aligned}$$

logo, segundo as definições de k_1 e k_2 ,

$$t_M = -\frac{1}{2\lambda^2} \ln(f), \tag{7.14}$$

lembrando mais uma vez que $f < 1$. Essa expressão é idêntica a (7.8), obtida no item anterior. Logo, nos dois casos considerados, o tempo para o término da interação sistema-medidor será (7.14). Para exemplificar, foi adotado no cálculo de t_M o valor $f = 0,3$.

A figura 7.4 mostra a evolução temporal dos módulos das coerências na base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$, calculados segundo (6.143), para os valores de λ e η considerados no item 7.2.1. Assim como na figura 1, t_M está assinalado por uma linha tracejada vertical. Conforme a interação sistema-medidor se torna mais intensa, ou seja, conforme λ aumenta, as curvas para os diferentes valores de η convergem.

A fórmula (7.14) não depende do acoplamento sistema-ambiente η , entretanto é interessante notar que, conforme esse parâmetro aumenta, o valor da coerência no tempo t_M diminui. Isso significa que, se fosse adotado como critério para finalizar a medida apenas (7.3), com $f = 0,3$ sem maiores desenvolvimentos, ou seja, $|\rho_{12}^{(\alpha)}(t_M)| = 0,3 |\rho_{12}^{(\alpha)}(0)|$, o tempo final t_f da medida seria ainda menor do que t_M . **Dessa forma, (7.14) pode ser encarada como um limitante superior para o tempo da medida:**

$$t_f \leq t_M. \tag{7.15}$$

Figura 7.4 – Evolução temporal para os módulos das coerências no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1). A linha tracejada vertical indica t_M com $f = 0, 3$.

7.3 Soluções numéricas: acoplamento sistema-ambiente arbitrário

7.3.1 Método utilizado

Os resultados analíticos, válidos para acoplamento sistema-ambiente fraco, podem ser comparados com soluções numéricas da equação de Lindblad com a inclusão do ambiente, obtendo soluções válidas para acoplamento sistema-ambiente arbitrário. O algoritmo utilizado, cuja implementação fez parte do projeto de mestrado do aluno Leonardo Andreta de Castro - maiores informações podem ser encontradas em sua dissertação e na referência (62)- é baseado no *método do operador partido* (66), que é adequado para resolver numericamente equações diferenciais de primeira ordem da forma:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB}(t) = \hat{A}\hat{\rho}_{SB}(t) + \hat{B}\hat{\rho}_{SB}(t).$$

Como os dois super-operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são independentes do tempo, a solução da equação diferencial será

$$\hat{\rho}_{SB}(t) = e^{(\hat{A}+\hat{B})t}\hat{\rho}_{SB}(0).$$

No problema abordado neste trabalho, essa exponencial não pode ser determinada analiticamente, mas é possível obter a atuação de $e^{\hat{A}t}$ e $e^{\hat{B}t}$ em separado. Assim, foi utilizada a aproximação

$$e^{(\hat{A}+\hat{B})\Delta t} = e^{\hat{A}\Delta t}e^{\hat{B}\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

para expandir a solução em termos de um produto de N fatores calculados em intervalos de tempo Δt curtos. A aplicação alternada destes dois super-operadores, $e^{\hat{A}\Delta t}$ e $e^{\hat{B}\Delta t}$, constitui o método do operador partido. Para a medida de tempo finito, $\hat{A}$ representará o liouvilliano e $\hat{B}$ o lindbladiano. A forma da exponencial do liouvilliano independente do tempo é elementar,

enquanto que $e^{\hat{B}\Delta t}$ obedece (6.43) para a medida da componente z e (6.71) e (6.72) para a medida da componente x . Como o comportamento das populações na base de auto-estados de $\hat{\sigma}_z$ pode ser descrito por uma fórmula analítica simples em ambos os casos - equações (6.59) e (6.110) - somente as coerências foram tratadas numericamente.

A figura 7.5 exhibe as curvas numéricas e analíticas para as populações nas situações consideradas no item anterior. Embora os resultados numéricos e analíticos comecem a divergir a partir de $\eta = 0,5$, os resultados analíticos mostram excelente concordância para períodos curtos de tempo e, se a medida for interrompida no tempo t_M para cada situação, as expressões analíticas permanecem confiáveis. Além disso, verificando as escalas envolvidas, as diferenças das curvas analíticas e numéricas não são grandes.

A figura 7.6 mostra as curvas numéricas e analíticas para as coerências, na região de acoplamento sistema-ambiente além da validade das soluções analíticas, com os valores nos tempos de medida assinalados.

Nota-se que, até esse limiar (ou seja, com $f = 0,3$), as soluções analíticas concordam muito bem com as numéricas mesmo para $\eta = 5$, muito além da região onde as soluções seriam válidas. Conseqüentemente, as principais conclusões baseadas na análise das soluções analíticas apenas, principalmente que (7.14) pode ser encarada como um limitante superior para o tempo da medida, continuam válidas. Para ilustrar esse fato melhor, a figura 7.7 mostra a curva analítica de t_M em função de λ para $f = 0,3$, acompanhada de curvas numéricas para três valores de η , da região de validade das soluções analíticas para um valor que extrapola esse limite.

A curva analítica sempre assume valores de t_M maiores e, além disso, os dados numéricos mostram que o tempo da medida tende a ficar constante e próximo de zero conforme η aumenta, ou seja, o processo de medida tende a ficar instantâneo.

7.3.2 Comparações

Ambas as expressões obtidas analiticamente para o final da medida, (7.8) e (7.14), são idênticas. Esse é um fato interessante, visto que as situações são distintas não apenas pela componente que medida ($\hat{\sigma}_z$ e $\hat{\sigma}_x$), mas também pelas particularizações realizadas no segundo

Figura 7.5 – Comparações entre as soluções numéricas e analíticas para a evolução temporal das populações, no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$, na base de autoestados $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).

Figura 7.6 – Comparações entre as soluções numéricas e analíticas para a evolução temporal das coerências, no caso da medida de $\hat{\sigma}_x$ na base de autoestados $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ do medidor, com tempo em unidades de ω_c^{-1} . A condição inicial é (7.1).

Figura 7.7 – Dependência dos tempos de medida em função de λ para $f = 0,3$.

caso ($\omega_0 = 0$ e $T = 0$).

A expressão depende apenas da intensidade λ do acoplamento sistema-medidor (e da fração f do módulo da coerência inicial para o qual a medida é considerada terminada) e não das condições iniciais. Quanto maior esse acoplamento, mais intensa a medida e, conseqüentemente, mais rápida ela se torna.

Contribuições do ambiente (dependência com η) podem surgir se, em lugar de considerar apenas o termo de primeira ordem na expansão (7.5), termos de ordens mais altas forem mantidos também, o que poderia aumentar a concordância com as curvas analíticas e numéricas para vários valores de η . Entretanto, isso tornaria os cálculos muito mais complicados e fugiriam do objetivo de obter uma expressão simples para estimativas.

7.4 Contextualização

O presente capítulo conclui a tese com a análise gráfica das soluções obtidas no capítulo 6 e sua comparação com soluções numéricas mais gerais. Importante ressaltar que foi verificada uma concordância muito boa entre as curvas numéricas e analíticas no domínio de validade dessas últimas - acoplamento sistema-ambiente fraco - e todas as conclusões obtidas com as soluções analíticas se verificaram qualitativamente nos casos mais gerais:

- Quando o observável medido não comuta com o hamiltoniano de interação, a diminuição da população se torna mais lenta, ou seja, a medida ajuda a proteger o sistema.
- Quanto mais intenso o acoplamento sistema-medidor, menor a taxa de diminuição da população.
- Quanto mais intenso o acoplamento sistema-ambiente, maior o erro associado à medida.
- A expressão obtida para o tempo de finalização da medida, considerando a diminuição do módulo da coerência, com aproximação de primeira ordem, serve como um limite superior.

As soluções numéricas concordam muito bem com as analíticas para tempos pequenos, o que envolve o intervalo considerado para finalizar a medida. Além disso, mesmo para intensidades

muito grandes do acoplamento sistema-ambiente, as discrepâncias analítico-numéricas são pequenas, o que aumenta a confiabilidade das soluções analíticas.

Conclusões e perspectivas

Como visto no capítulo 1, o tempo de duração da medida foi um problema ao qual o próprio von Neumann não concedeu grande atenção. No capítulo 5, em uma abordagem inédita, totalmente compatível com os pressupostos probabilísticos das interpretações convencionais da mecânica quântica, esse problema foi retomado considerando não apenas uma interação markoviana entre o sistema principal e o medidor, já consagrada no uso da equação de Lindblad para a descrição do fenômeno, mas também uma interação sistema-ambiente que é não-markoviana.

Pode-se dizer que as duas principais contribuições desta tese foram:

- O método utilizado para derivar a equação-mestra mista no capítulo 5, com utilização da álgebra de super-operadores e projetores de Nakajima-Zwanzig.
- A descoberta de que a medida de um observável que não comuta com a interação sistema-ambiente pode proteger o sistema medido.

Além disso, convém destacar:

- A compreensão das dificuldades matemáticas do problema através do tratamento de uma situação extremamente simples conceitualmente, um sistema de 2 níveis em contato com um banho de osciladores harmônicos.
- A verificação dos efeitos dos acoplamentos sistema-ambiente e sistema-medidor no operador densidade final.
- A obtenção de uma fórmula simples para o tempo em que a medida deve se encerrar, que depende apenas do acoplamento sistema-medidor.
- A confiabilidade das soluções analíticas, obtidas para o caso do acoplamento sistema-ambiente fraco, já que várias conclusões delas extraídas continuam válidas

qualitativamente para acoplamentos sistema-ambiente intensos.

Entre as perspectivas relacionadas a este trabalho:

- Utilização de medidas incompatíveis de tempo finito em protocolos de correção de erros (68).
- Explorar outras formas de interação sistema-ambiente como, por exemplo, a de Jaynes-Cummings (46).
- Reintrodução de ω_0 e da temperatura do banho térmico para o caso de $\hat{L} = \lambda \hat{\sigma}_x$.
- Aumento gradual da complexidade do sistema principal, aumentando o número de níveis visando aplicações em computação irreversível.
- Abordagem de outros contextos, como movimento browniano quântico, através da equação de Caldeira-Leggett (61).

REFERÊNCIAS

- 1 VON NEUMANN, J. **Mathematical foundations of quantum mechanics**. Princeton: Princeton University Press, 1953. 445 p.
- 2 JAMMER, M. **The conceptual development of quantum mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1966. 399 p.
- 3 JAMMER, M. **The philosophy of quantum mechanics: the interpretations of quantum mechanics in historical perspective**. New York: Wiley, 1974. 536 p.
- 4 STAPP, H. P. The Copenhagen interpretation. **American Journal of Physics**, New York, v. 40, n. 8, p. 1098-1116, 1972.
- 5 HANSON, N. R. Copenhagen interpretation of quantum theory. **American Journal of Physics**, New York, v. 27, n. 1, p. 1-15, 1959.
- 6 MACKINNON, E. De Broglie's thesis: a critical retrospective. **American Journal of Physics**, New York, v. 44, n. 2, p. 1047-1055, 1976.
- 7 ARONS, A. B.; PEPPARD, M. B. Einstein's proposal of the photon concept - a translation of the Annalen der Physik paper of 1905. **American Journal of Physics**, New York, v. 33, n. 5, p. 367-374, 1965.
- 8 DAHMEN, S. R. Einstein e a teoria quântica de gases. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p. 109-111, 2005.
- 9 EINSTEIN, E. Teoria quântica do gás ideal monoatômico - segundo tratado. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 27, n. 1, p. 113-120, 2005.

-
- 10 JOAS, C; LEHNER, C. The classical roots of wave mechanics: Schrödinger's transformations of the optical-mechanical analogy. **Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, Oxford, v. 40, n. 4, p. 338-351, 2009.
- 11 WESSELS, L. Schrödinger's route to wave mechanics. **Studies in History and Philosophy of Science**, Oxford, v. 10, n. 4, p. 311-340, 1977.
- 12 SCHRÖDINGER, E. **Collected papers on wave mechanics**. New York: Chelsea Pub. Co., 1978. 146 p.
- 13 WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H. **Quantum theory and measurement**. Princeton: Princeton University Press, 1983. 811 p.
- 14 LUDWIG, G. **Wave mechanics**. Oxford: Pergamon Press, 1968. 230 p.
- 15 DIRAC, P. A. M. On the theory of quantum mechanics. **Proceedings of the Royal Society of London A**, London, v. 112, n. 762, p. 661-677, 1926.
- 16 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, College Park, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935.
- 17 BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, College Park, v. 48, n. 8, p. 696-702, 1935.
- 18 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables I. **Physical Review**, College Park, v. 85, n. 2, p. 166-179, 1952.
- 19 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables II. **Physical Review**, College Park, v. 85, n. 2, p. 180-193, 1952.
- 20 MOKROSS, B. J. Não-localidade na mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 136-151, 1997.
- 21 LANDÉ, A. Quantum fact and fiction. **American Journal of Physics**, New York, v. 33, n. 2, p. 123-127, 1965.
- 22 LANDÉ, A. Quantum fact and fiction II. **American Journal of Physics**, New York, v. 34, n. 12, p. 1160-1163, 1966.

-
- 23 LANDÉ, A. Quantum fact and fiction III. **American Journal of Physics**, New York, v. 37, n. 5, p. 541-548, 1969.
- 24 LANDÉ, A. Quantum fact and fiction IV. **American Journal of Physics**, New York, v. 43, n. 8, p. 701-704, 1975.
- 25 MOKROSS, B. J. Fundamentação clássica de Alfred Landé para a mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 380-388, 1999.
- 26 EVERETT III, H. "Relative state" formulation of quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, College Park, v. 29, n. 3, p. 454-462, 1957.
- 27 WHEELER, J. A. Assessment of Everett's "Relative state" formulation of quantum theory. **Reviews of Modern Physics**, College Park, v. 29, n. 3, p. 463-465, 1957.
- 28 DEWITT, B. S.; GRAHAM, N. **The many-worlds interpretation of quantum mechanics**: a fundamental exposition by Hugh Everett, III. Princeton: Princeton University Press, 1973. 252 p.
- 29 FREITAS, F.; FREIRE JR, O. A formulação dos "estados relativos" da teoria quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 1-15, 2008.
- 30 COHEN-TANNOUDJI, C. C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley, 1977. 1524 p.
- 31 The Nobel Prize in Physics 1901, Stockholm, 2011. Disponível em: <http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1901>. Acesso em: 17/10/2011.
- 32 The Nobel Prize in Physics 1921, Stockholm, 2011. Disponível em: <http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1921>. Acesso em: 17/10/2011.
- 33 KÖBERLE, R. Sobre a gênese da mecânica ondulatória. **Revista Brasileira de Física**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 243-273, 1979.
- 34 VAN DER WAERDEN, B. L. **Sources of quantum mechanics**. Amsterdam: North Holland Pub. Co., 1967. 430 p.
- 35 IM, G. S. Experimental constraints on formal quantum mechanics: The emergence of Born's quantum theory of collision processes in Göttingen, 1924-1927. **Archive for History of Exact Sciences**, Heidelberg, v. 50, n. 1, p. 73-101, 1995.

-
- 36 The Nobel Prize in Physics 1925, Stockholm, 2011. Disponível em: <http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1925>. Acesso em: 17/10/2011.
- 37 FEDAK, W. A.; PRENTIS, J. J. The 1925 Born and Jordan paper “On quantum mechanics”. **American Journal of Physics**, New York, v. 77, n. 2, p. 128-139, 2009.
- 38 BELLER, M. Born’s probabilistic interpretation: a case study of ‘concepts in flux’. **Studies in History and Philosophy of Science**, Oxford, v. 21, n. 4, p. 563-588, 1990.
- 39 MORSE, P. M.; FESHBACH, H. **Methods of theoretical physics**. New York: McGraw-Hill, 1953.
- 40 BUTKOV, E. **Física matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978. 725 p.
- 41 GOTTFRIED, K. P. A. M. Dirac and the discovery of quantum mechanics. **American Journal of Physics**, New York, v. 79, n. 3, p. 261-266, 2011.
- 42 AITCHISON, I. J. R.; MACMANUS, D. A.; SNYDER, T. M. Understanding Heisenberg’s “magical” paper of July 1925: a new look at the calculational details. **American Journal of Physics**, New York, v. 72, n. 11, p. 1370-1379, 2004.
- 43 DIRAC, P. A. M. The fundamental equations of quantum mechanics. **Proceedings of the Royal Society of London A**, London, v. 109, n. 752, p. 642-653, 1925.
- 44 DIRAC, P. A. M. The physical interpretation of the quantum dynamics. **Proceedings of the Royal Society of London A**, London, v. 113, n. 765, p. 621-641, 1927.
- 45 LINDBLAD, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. **Communications in Mathematical Physics**, Berlin, v. 48, n. 2 p. 119-130, 1976.
- 46 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**, Oxford: Oxford University Press, 2002. 625 p.
- 47 PERCIVAL, I. **Quantum state diffusion**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 198 p.
- 48 DAVIES, E. B. **Quantum theory of open systems**. London: Academic Press, 1976. 171 p.

-
- 49 ALICKI, R.; LENDI, K. **Quantum dynamical semigroups and applications**. Berlim: Springer-Verlag, 2007. 128 p.
- 50 ADLER, S. L. Derivation of the Lindblad generator structure by use of the Itô stochastic calculus. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 265, n. 1, p. 58-61, 2000.
- 51 ADLER, S. L. Corrigendum to: "Derivation of the Lindblad generator structure by use of the Itô stochastic calculus", **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 267, n. 3, p. 212, 2000.
- 52 PERES, A. Classical interventions in quantum systems. I. the measuring process. **Physical Review A**, College Park, v. 61, n. 022116, p. 1-9, 2000.
- 53 BRASIL, C. A.; FANCHINI, F. F.; NAPOLITANO, R. D. J. A simple deduction of the Lindblad equation. Disponível em: <http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1110/1110.2122v1.pdf>. Acesso em 18 de janeiro de 2012.
- 54 VAN HOVE, L. Quantum mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation. **Physica**, La Haye, v. 21, n. 1-5, p. 517-540, 1955.
- 55 VAN HOVE, L. The approach to equilibrium in quantum statistics. **Physica**, La Haye, v. 23, n. 1-5, p. 441-480, 1957.
- 56 PRIGOGINE, I.; RÉSIBOIS, P. On the kinetics of the approach to equilibrium. **Physica**, La Haye, v. 27, n. 7, p. 629-646, 1961.
- 57 RÉSIBOIS, P. On the equivalence between two generalized master equations. **Physica**, La Haye, v. 29, n. 8, p. 721-741, 1963.
- 58 NAKAJIMA, S. On quantum theory of transport phenomena. **Progress of Theoretical Physics**, Toquio, v. 20, n. 6, p. 948-959, 1958.
- 59 ZWANZIG, R. Ensemble method in the theory of irreversibility. **The Journal of Chemical Physics**, Lancaster, v. 33, n. 5, p. 1338-1341, 1960.
- 60 BRASIL, C. A.; NAPOLITANO, R. D. J. The master equation for the reduced open-system dynamics, including a Lindbladian description of finite-duration measurement. **The European Physical Journal Plus**, Bologna, v. 126, n. 91, p. 1-12, 2011.

-
- 61 CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J. Path integral approach to quantum brownian motion. **Physica**, La Haye, v. 121A, n. 3, p. 587-616, 1983.
- 62 BRASIL, C. A.; DE CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J. Protecting a quantum state from environmental noise by an incompatible finite-time measurement. **Physical Review A**, College Park, v. 84, n. 022112, p. 1-16, 2011.
- 63 OPPENHEIM, I.; SCHULER, K. E. Master equations and Markov processes. **Physical Review B**, College Park, v. 138, n. 4, p. 1007-1011, 2011.
- 64 Hänggi, P.; Talkner, P. Non-Markov processes: the problem of the mean first passage time. **Zeitschrift für Physik B**, Berlin, v. 45, n. 1, p. 79-83, 1981.
- 65 Hänggi, P.; Talkner, P. Memory index of first-passage time: a simple measure of non-Markovian character. **Physical Review Letters**, College Park, v. 51, n. 25, p. 2242-2245, 1983.
- 66 PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing**. New York: Cambridge University Press, 2007.
- 67 BRASIL, C. A.; DE CASTRO, L. A.; NAPOLITANO, R. D. J. How much time does a measurement take? Disponível em: <http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1109/1109.4613v4.pdf>. Acesso em 18 de janeiro de 2012.
- 68 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Computação quântica e informação quântica**. Porto Alegre: Bookman, 2005. 733 p.
- 69 BRIEGEL, H. J.; RAUSSENDORF, R. Persistent entanglement in arrays of interacting particles. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 5, p. 910-913, 2001.
- 70 BRIEGEL, H. J.; BROWNE, D. E.; DÜR, W.; RAUSSENDORF, R.; NEST, M. V. D. Measurement-based quantum computation. **Nature Physics**, v. 5, p. 19-26, 2009.
- 71 WILCOX, R. W. Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics. **Journal of Mathematical Physics**, v. 8, n.4, p. 962-982, 1967.
- 72 GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. 7 ed. Burlington: Elsevier, 2007. 1220 p.

Apêndice A – Resultados envolvendo os operadores de criação e destruição

Aqui, os operadores de criação e destruição referentes a um certo modo k serão denotados, respectivamente, por $\hat{b}_k^\dagger$ e $\hat{b}_k$.

$$\bullet e^{it \sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l} \sum_k g_k^* \hat{b}_k e^{-it \sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l}$$

Como operadores de criação/destruição referentes a modos diferentes *sempre* comutam, a expressão pode ser simplificada para

$$e^{i \sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l t} \sum_k g_k^* \hat{b}_k e^{-i \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t} = \sum_k e^{i \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t} g_k^* \hat{b}_k e^{-i \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t}. \quad (\text{A.1})$$

Nesse caso, a fórmula (2.2) do artigo (71)

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (\text{A.2})$$

será fundamental. Os vários termos da série de (A.2) serão calculados segundo as equivalências

$$\begin{aligned} \hat{A} &= i \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t, \\ \hat{B} &= g_k^* \hat{b}_k. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O primeiro termo já é óbvio. O segundo termo, embora seja apenas um comutador,

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] &= [\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t, g_k^* \hat{b}_k] = [\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t, g_k^* \hat{b}_k] \\
&= i\omega_k t g_k^* [\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{b}_k] ,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

origina uma expressão não muito simples. Para calcular os comutadores de (A.4), serão utilizadas a propriedade fundamental

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B} + \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}] \tag{A.5}$$

e as relações de comutação

$$\begin{aligned}
[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] &= [\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_{k'}^\dagger] = 0 , \\
[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] &= \delta_{k,k'} .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Assim,

$$[\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{b}_k] = [\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k] \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger [\hat{b}_k, \hat{b}_k] = -\hat{b}_k . \tag{A.7}$$

Voltando à (A.4), (A.7) permite calcular o segundo termo:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\omega_k t (-g_k^* \hat{b}_k) . \tag{A.8}$$

Por sua vez, (A.8) permite calcular o terceiro termo em (A.2):

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] &\stackrel{(A.8)}{=} [\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t, i\omega_k (-g_k^* \hat{b}_k)] \\
&= (i\omega_k t)^2 [\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, -g_k^* \hat{b}_k] \\
&= (i\omega_k t)^2 [-[\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, g_k^* \hat{b}_k]] \\
&= (i\omega_k t)^2 [-g_k^* [\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{b}_k]] \\
&\stackrel{(A.7)}{=} (i\omega_k t)^2 g_k^* \hat{b}_k .
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Juntando os termos calculados (A.8) e (A.9) em (A.2), com as devidas definições de $\hat{A}$ e $\hat{B}$:

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t} g_k^* \hat{b}_k e^{-i\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t} &= g_k^* \hat{b}_k + i\omega_k t \left(-g_k^* \hat{b}_k \right) + \frac{1}{2!} (i\omega_k t)^2 g_k^* \hat{b}_k + \dots \\
 &= g_k^* \hat{b}_k \left[1 - i\omega_k t + \frac{1}{2!} (i\omega_k t)^2 + \dots \right] \\
 &= g_k^* \hat{b}_k e^{-i\omega_k t} .
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Retornando aos vários modos, a expressão desejada é alcançada:

$$e^{i \sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l t} \sum_k g_k^* \hat{b}_k e^{-i \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k t} = \sum_k g_k^* \hat{b}_k e^{-i\omega_k t} . \tag{A.11}$$

$$\bullet \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_k e^{-\hbar \beta \omega_k n_k}$$

A demonstração desta expressão utiliza apenas um resultado elementar, a fórmula da soma de elementos de uma progressão geométrica de razão menor do que 1.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_k e^{-\hbar \beta \omega_k n_k} &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \left(e^{-\hbar \beta \omega_1 n_1} e^{-\hbar \beta \omega_2 n_2} \dots \right) \\
 &= \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\hbar \beta \omega_1 n_1} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\hbar \beta \omega_2 n_2} \right) \dots \\
 &= \prod_k \left(\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\hbar \beta \omega_k n_k} \right) \\
 &= \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_k}} .
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\bullet Z_B$$

Da própria definição da função de partição Z_B para o estado térmico *não-normalizado*

$$\prod_k e^{-\hbar \beta \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k},$$

$$Z_B = \text{tr}_B \left\{ \prod_k e^{-\hbar \beta \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k} \right\} . \tag{A.13}$$

Utilizando a base de estados de Fock,

$$\begin{aligned}
Z_B &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[\prod_m \langle n_m | \right] \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k} \left[\prod_m |n_m\rangle \right] \\
&= \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} \stackrel{(A.12)}{=} \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\bullet \sum_{n_1, n_2, \dots} n_l e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k}$$

Nesta expressão, n_l não somente multiplica as exponenciais como também aparece no argumento de uma delas (de $k = l$) no produtório. Isso sugere que alguma forma de derivação pode ser útil. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\omega_l} \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} &= \sum_{n_1, n_2, \dots, k \neq l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} \frac{\partial}{\partial\omega_l} e^{-(\hbar\beta\omega_l - i\alpha)\omega_l} \\
&= \sum_{n_1, n_2, \dots, k \neq l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} \left[-(\hbar\beta\omega_l - i\alpha) e^{-(\hbar\beta\omega_l - i\alpha)\omega_l} \right] \\
&= \underbrace{-\hbar\beta \sum_{n_1, n_2, \dots} n_l e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k}}_{\text{termo desejado}} + i\alpha \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

O termo desejado apareceu em (A.15) e o próximo passo é isolá-lo:

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} n_l e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} = -\frac{1}{\hbar\beta} \frac{\partial}{\partial\omega_l} \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} + i\frac{\alpha}{\hbar\beta} \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k}.$$

Agora, utilizando (A.12),

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1, n_2, \dots} n_l e^{i\alpha\omega_l} \prod_k e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} &= -\frac{1}{\hbar\beta} \frac{\partial}{\partial\omega_l} e^{i\alpha\omega_l} \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}} + i\frac{\alpha}{\hbar\beta} e^{i\alpha\omega_l} \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}} \\
&= -\frac{1}{\hbar\beta} \prod_{k \neq l} \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}} \frac{\partial}{\partial\omega_l} \left(\frac{e^{i\alpha\omega_l}}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_l}} \right) + i\frac{\alpha}{\hbar\beta} e^{i\alpha\omega_l} \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial \omega_l} \left(\frac{e^{i\alpha \omega_l}}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_l}} \right) = i\alpha \frac{e^{i\alpha \omega_l}}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_l}} - \hbar \beta \frac{e^{i\alpha \omega_l} e^{-\hbar \beta \omega_l}}{(1 - e^{-\hbar \beta \omega_l})^2},$$

então

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, n_2, \dots} n_l e^{i\alpha \omega_l} \prod_k e^{-\hbar \beta \omega_k n_k} \\ &= -\frac{1}{\hbar \beta} \prod_{k \neq l} \frac{1}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_k}} \left[i\alpha \frac{e^{i\alpha \omega_l}}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_l}} - \hbar \beta \frac{e^{i\alpha \omega_l} e^{-\hbar \beta \omega_l}}{(1 - e^{-\hbar \beta \omega_l})^2} \right] + i \frac{\alpha}{\hbar \beta} e^{i\alpha \omega_l} \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_k}} \\ &= \prod_{k \neq l} \frac{1}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_k}} \frac{e^{i\alpha \omega_l} e^{-\hbar \beta \omega_l}}{(1 - e^{-\hbar \beta \omega_l})^2} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_k}} \frac{e^{i\alpha \omega_l} e^{-\hbar \beta \omega_l}}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_l}} = \frac{e^{i\alpha \omega_l}}{e^{\hbar \beta \omega_l} - 1} \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\hbar \beta \omega_k}}. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando (A.14),

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} n_l e^{i\alpha \omega_l} \prod_k e^{-\hbar \beta \omega_k n_k} = \frac{e^{i\alpha \omega_l}}{e^{\hbar \beta \omega_l} - 1} Z_B. \quad (\text{A.17})$$

Apêndice B – Função Gama

Todas as propriedades e definições aqui listadas foram extraídas da referência (72). As indicações à esquerda das expressões a seguir referem-se às seções ou sub-seções daquela referência.

B.1 Definições

- *Função gama* $\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$(8.310) \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{B.1})$$

- *Função gama incompleta* $\Gamma(a, z)$, $a, z \in \mathbb{C}$

$$(8.350) \quad \Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \quad (\text{B.2})$$

- *Função psi de Euler* $\psi(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$(8.360) \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln [\Gamma(z)] , \operatorname{Re}\{z\} > 0 \quad (\text{B.3})$$

B.2 Propriedades

$$(8.350) \quad \Gamma(a, 0) = \Gamma(a)$$

$$(8.338) \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad (\text{B.4})$$

$$(8.331) \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

B.3 Representação da função gama em produto

$$(8.322) \quad \Gamma(z) = e^{-Cz} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{k}}}{1 + \frac{z}{k}}, \quad \text{Re}\{z\} > 0 \quad (\text{B.5})$$

onde C é a *constante de Euler*

$$(9.73) \quad C = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=1}^s \frac{1}{m} - \ln(s) \right] = 0.577215...$$

B.4 Simplificação para a medida da componente z

O ponto de partida será a representação (B.5). Em primeiro lugar, o argumento será expandido em suas formas real e imaginária

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.6})$$

Assim,

$$\Gamma(z) = e^{-C(x+iy)} \frac{1}{x+iy} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x+iy}{k}}}{1 + \frac{x+iy}{k}}. \quad (\text{B.7})$$

Tendo em vista (6.67), é conveniente definir a função Q em termos dos produtos de gamas,

$$Q \equiv \frac{\Gamma(z) \Gamma(z^*)}{\Gamma(x) \Gamma(x)} \quad (\text{B.8})$$

para, então, representar essa função utilizando (B.7) com

$$\begin{cases} \Gamma(z^*) &= e^{-C(x-iy)} \frac{1}{x-iy} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x-iy}{k}}}{1 + \frac{x-iy}{k}}, \\ \Gamma(x) &= e^{-Cx} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Logo,

$$Q = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{x}{k})^2}{(1 + \frac{x}{k})^2 + (\frac{y}{k})^2} \quad (\text{B.10})$$

ou, simplificando o produto,

$$Q = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{y}{k+x} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.11})$$

Apêndice C – Integrais

C.1 Resultados extraídos de tabelas ou programas

Todos os resultados aqui listados foram extraídos da referência (72), salvo indicações em contrário. As indicações à esquerda das expressões a seguir referem-se às seções ou sub-seções daquela referência.

- Integrais definidas

$$(3.893 - 1) \quad \int_0^{\infty} e^{-px} \operatorname{sen}(qx + \lambda) dx = \frac{1}{p^2 + q^2} [q \cos(\lambda) + p \operatorname{sen}(\lambda)] \quad \operatorname{Re}\{p\} > 0 \quad (\text{C.1})$$

$$(3.389 - 6) \quad \left[\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu} e^{-\mu x}}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \beta^{\nu-1} \left\{ \exp \left[i\mu\beta + i\frac{(\nu-1)\pi}{2} \right] \Gamma(1-\nu, i\mu\beta) \right. \right. \\ \left. \left. + \exp \left[-i\mu\beta - i\frac{(\nu-1)\pi}{2} \right] \Gamma(1-\nu, -i\mu\beta) \right\}, \right. \\ \left. \begin{cases} \operatorname{Re}\{\beta\} > 0 \\ \operatorname{Re}\{\mu\} > 0 \\ \operatorname{Re}\{\nu\} > -1 \end{cases} \right. \quad (\text{C.2})$$

$$(3.311) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x} - e^{-\nu x}}{1 - e^{-x}} dx = \psi(\nu) - \psi(\mu), \quad \operatorname{Re}\{\mu\} > 0, \operatorname{Re}\{\nu\} > 0 \quad (\text{C.3})$$

- Integrais indefinidas

$$(2.671 - 2) \quad \int \sinh(ax + b) \cos(cx + d) dx = \frac{a}{a^2 + c^2} \cosh(ax + b) \cos(cx + d) + \frac{c}{a^2 + c^2} \sinh(ax + b) \sin(cx + d) \quad (C.4)$$

$$(2.671 - 4) \quad \int \cosh(ax + b) \cos(cx + d) dx = \frac{a}{a^2 + c^2} \sinh(ax + b) \cos(cx + d) + \frac{c}{a^2 + c^2} \cosh(ax + b) \sin(cx + d) \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sinh(bx) \cos(cx) dx &= \frac{e^{(a+b)x}}{2[(a+b)^2 + c^2]} [(a+b) \cos(cx) + c \sin(cx)] + \\ &\quad - \frac{e^{(a-b)x}}{2[(a-b)^2 + c^2]} [(a-b) \cos(cx) + c \sin(cx)] \end{aligned} \quad (C.6)$$

Com o auxílio do programa *Wolfram Mathematica*, foram obtidas as seguintes integrais envolvendo funções $\Gamma(a, z)$:

$$\int \Gamma(a, bx + id) dx = \frac{1}{b} [id \Gamma(a, bx + id) - \Gamma(a + 1, bx + id)] + x \Gamma(a, bx + id) \quad (C.7)$$

$$\int e^{cx} \Gamma(a, bx + id) dx = \frac{1}{c} \left[e^{cx} \Gamma(a, bx + id) - e^{-i \frac{cd}{b}} \frac{b^a}{(b-c)^a} \Gamma\left(a, \frac{(b-c)(bx + id)}{b}\right) \right] \quad (C.8)$$

C.2 Desenvolvimentos importantes

Nos cálculos desenvolvidos no capítulo 6, foram necessárias algumas integrais que não se encontram na referência (72), mas que podem ser obtidas por meio dos resultados listados no item anterior.

- $\int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} dx, \beta \in \mathbb{R}$

Em (C.2), fazendo $\begin{cases} \nu = 1 \\ \mu = b \end{cases}$,

$$\int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} dx = \frac{1}{2} \Gamma(1) [\exp(ib\beta) \Gamma(0, ib\beta) + \exp(-ib\beta) \Gamma(0, -ib\beta)]$$

e, utilizando (B.4)

$$\int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} dx = \frac{1}{2} [\exp(ib\beta) \Gamma(0, ib\beta) + \exp(-ib\beta) \Gamma(0, -ib\beta)] .$$

Enfim, se $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} dx = \operatorname{Re} \{ \exp(ib\beta) \Gamma(0, ib\beta) \} . \quad (\text{C.9})$$

$$\bullet \int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \cos(cx) dx, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

O primeiro passo, para essa integral, será escrever o cosseno em termos de exponenciais:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \cos(cx) dx &= \int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \frac{e^{icx} + e^{-icx}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-(b-ic)x} dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-(b+ic)x} dx \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

Agora, (C.2) será utilizada duas vezes. Primeiro, com a substituição $\begin{cases} \nu = 1 \\ \mu = b - ic \end{cases}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-(b-ic)x} dx &= \frac{1}{2} \Gamma(1) \{ \exp[i(b-ic)\beta] \Gamma[0, i(b-ic)\beta] \\ &\quad + \exp[-i(b-ic)\beta] \Gamma[0, -i(b-ic)\beta] \} \\ &\stackrel{(B.4)}{=} \frac{1}{2} \{ \exp[i(b-ic)\beta] \Gamma[0, i(b-ic)\beta] \\ &\quad + \exp[-i(b-ic)\beta] \Gamma[0, -i(b-ic)\beta] \} \end{aligned}$$

e, em seguida, com $\begin{cases} \nu = 1 \\ \mu = b + ic \end{cases}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-(b+ic)x} &= \frac{1}{2} \Gamma(1) \{ \exp[i(b+ic)\beta] \Gamma[0, i(b+ic)\beta] \\
&\quad + \exp[-i(b+ic)\beta] \Gamma[0, -i(b+ic)\beta] \} \\
&\stackrel{(B.4)}{=} \frac{1}{2} \{ \exp[i(b+ic)\beta] \Gamma[0, i(b+ic)\beta] \\
&\quad + \exp[-i(b+ic)\beta] \Gamma[0, -i(b+ic)\beta] \} .
\end{aligned}$$

Assim, retornando a (C.10),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \cos(cx) dx &= \frac{1}{4} \{ \exp[(c+ib)\beta] \Gamma[0, (c+ib)\beta] \\
&\quad + \exp[-(c+ib)\beta] \Gamma[0, -(c+ib)\beta] \\
&\quad + \exp[(c-ib)\beta] \Gamma[0, (c-ib)\beta] \\
&\quad + \exp[-(c-ib)\beta] \Gamma[0, -(c-ib)\beta] \}
\end{aligned}$$

ou, se $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \cos(cx) dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \exp[(c+ib)\beta] \Gamma[0, (c+ib)\beta] \\
&\quad + \exp[-(c+ib)\beta] \Gamma[0, -(c+ib)\beta] \} . \quad (C.11)
\end{aligned}$$

- $\int_0^\infty \frac{x^2}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \sin(cx) dx, \beta \in \mathbb{R}$

Assim como no caso anterior, o primeiro passo será escrever o seno em termos de exponenciais:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \sin(cx) dx &= \int_0^\infty \frac{x^2}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \frac{e^{icx} - e^{-icx}}{2i} dx \\
&= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \frac{x^2}{\beta^2 + x^2} e^{-(b-ic)x} dx - \frac{1}{2i} \int_0^\infty \frac{x^2}{\beta^2 + x^2} e^{-(b+ic)x} dx .
\end{aligned} \quad (C.12)$$

Novamente (C.2) será utilizada duas vezes. Primeiro, com $\begin{cases} \nu = 2 \\ \mu = b - ic \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-(b-ic)x}}{\beta^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \Gamma(2) \beta \left\{ \exp \left[i(b-ic)\beta + i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, i(b-ic)\beta] \right. \\
&+ \exp \left[-i(b-ic)\beta - i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, -i(b-ic)\beta] \left. \right\} \\
&= \frac{1}{2} \beta \left\{ \exp \left[(c+ib)\beta + i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, (c+ib)\beta] \right. \\
&+ \exp \left[-(c+ib)\beta - i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, -(c+ib)\beta] \left. \right\}
\end{aligned}$$

e, em seguida, com
$$\begin{cases} \nu &= 2 \\ \mu &= b+ic \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-(b+ic)x}}{\beta^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \Gamma(2) \beta \left\{ \exp \left[i(b+ic)\beta + i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, i(b+ic)\beta] \right. \\
&+ \exp \left[-i(b+ic)\beta - i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, -i(b+ic)\beta] \left. \right\} \\
&= \frac{1}{2} \beta \left\{ \exp \left[-(c-ib)\beta + i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, -(c-ib)\beta] \right. \\
&+ \exp \left[(c-ib)\beta - i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, (c-ib)\beta] \left. \right\} .
\end{aligned}$$

Agora, retornando a (C.12), é obtido

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x^2}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \operatorname{sen}(cx) dx \\
&= \frac{1}{4i} \beta \left\{ \exp \left[(c+ib)\beta + i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, (c+ib)\beta] + \exp \left[-(c+ib)\beta - i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, -(c+ib)\beta] \right. \\
&\quad \left. - \exp \left[-(c-ib)\beta + i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, -(c-ib)\beta] - \exp \left[(c-ib)\beta - i\frac{\pi}{2} \right] \Gamma[-1, (c-ib)\beta] \right\} \\
&= \frac{1}{4} \beta \left\{ \exp \left[(c+ib)\beta \right] \Gamma[-1, (c+ib)\beta] - \exp \left[-(c+ib)\beta \right] \Gamma[-1, -(c+ib)\beta] \right. \\
&\quad \left. - \exp \left[-(c-ib)\beta \right] \Gamma[-1, -(c-ib)\beta] + \exp \left[(c-ib)\beta \right] \Gamma[-1, (c-ib)\beta] \right\} .
\end{aligned}$$

Enfim, se $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x^2}{\beta^2 + x^2} e^{-bx} \operatorname{sen}(cx) dx \\
&= \frac{1}{2} \beta \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[(c+ib)\beta \right] \Gamma[-1, (c+ib)\beta] - \exp \left[-(c+ib)\beta \right] \Gamma[-1, -(c+ib)\beta] \right\} . \quad (\text{C.13})
\end{aligned}$$

C.3 Integrais utilizadas no item 6.6.3

- $\int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \text{sen}(\omega t) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)$

Em primeiro lugar, são realizadas algumas manipulações no integrando:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \text{sen}(\omega t) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) &= \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \frac{1 + e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{e^{i\omega t} + e^{-(\beta\hbar - it)\omega} - e^{-i\omega t} - e^{-(\beta\hbar + it)\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty d\omega \frac{e^{-(\frac{1}{\omega_c} - it)\omega} + e^{-(\frac{1}{\omega_c} + \beta\hbar - it)\omega} - e^{-(\frac{1}{\omega_c} + it)\omega} - e^{-(\frac{1}{\omega_c} + \beta\hbar + it)\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}. \end{aligned}$$

Através da mudança de variável $\begin{cases} x &= \beta\hbar\omega \\ dx &= \beta\hbar d\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega &= \frac{x}{\beta\hbar} \\ d\omega &= \frac{dx}{\beta\hbar} \end{cases}$ é obtida

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \text{sen}(\omega t) \cotgh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \frac{dx}{\beta\hbar} \left[\frac{e^{-(\frac{1}{\omega_c} - it)\frac{x}{\beta\hbar}} + e^{-(\frac{1}{\omega_c} + \beta\hbar - it)\frac{x}{\beta\hbar}}}{1 - e^{-x}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-(\frac{1}{\omega_c} + it)\frac{x}{\beta\hbar}} + e^{-(\frac{1}{\omega_c} + \beta\hbar + it)\frac{x}{\beta\hbar}}}{1 - e^{-x}} \right] \\ &= \frac{1}{i2\beta\hbar} \int_0^\infty dx \left[\frac{e^{-(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar})x} + e^{-(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 - i\frac{t}{\beta\hbar})x}}{1 - e^{-x}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar})x} + e^{-(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + 1 + i\frac{t}{\beta\hbar})x}}{1 - e^{-x}} \right], \end{aligned}$$

o que permite o uso de (C.3):

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mu &\rightarrow \frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar} \\ \nu &\rightarrow \frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar} \end{cases} \Rightarrow \int_0^\infty dx \frac{e^{-(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar})x} - e^{-(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar})x}}{1 - e^{-x}} \\ &= \psi\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} + i\frac{t}{\beta\hbar}\right) - \psi\left(\frac{1}{\omega_c\beta\hbar} - i\frac{t}{\beta\hbar}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \mu & \rightarrow \frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar} \\ \nu & \rightarrow \frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar} \end{cases} \Rightarrow \int_0^\infty dx \frac{e^{-\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar}\right)x} - e^{-\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar}\right)x}}{1 - e^{-x}} \\
= \psi\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar}\right) - \psi\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar}\right).
\end{aligned}$$

O resultado final é:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\Omega}} \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{cotgh}\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \\
& = \frac{1}{i2\beta \hbar} \left[\psi\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t}{\beta \hbar}\right) - \psi\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t}{\beta \hbar}\right) + \psi\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar}\right) - \psi\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar}\right) \right] \quad \text{C.14}
\end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^t dt' \psi(a + ibt'), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Integrais desse tipo podem ser solucionadas por meio de uma simples mudança de variável,

$$\begin{cases} z & = a + ibt' \\ dz & = ibdt' \end{cases}$$

forneendo

$$\int_0^t dt' \psi(a + ibt') = \frac{1}{ib} \int_a^{a+ibt} dz \psi(z). \quad \text{C.15}$$

Tendo em vista (B.3), o resultado obtido é:

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' \psi(a + ibt') & = \frac{1}{ib} \int_a^{a+ibt} dz \frac{d}{dz} \ln[\Gamma(z)] = \frac{1}{ib} \{ \ln[\Gamma(a + ibt)] - \ln[\Gamma(a)] \} \\
& = -\frac{i}{b} \ln \left[\frac{\Gamma(a + ibt)}{\Gamma(a)} \right]. \quad \text{C.16}
\end{aligned}$$

Agora, cada integral em (6.113) pode ser resolvida:

$$\begin{cases} a & = \frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \\ b & = \frac{1}{\beta \hbar} \end{cases} \Rightarrow \int_0^t dt' \psi\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t'}{\beta \hbar}\right) = -i\beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + i \frac{t}{\beta \hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar}\right)} \right], \quad \text{C.17}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \\ b = -\frac{1}{\beta \hbar} \end{cases} \Rightarrow \int_0^t dt' \psi \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t'}{\beta \hbar} \right) = i \beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} \right)} \right], \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \\ b = \frac{1}{\beta \hbar} \end{cases} \Rightarrow \int_0^t dt' \psi \left(\frac{1}{\beta \hbar \omega_c} + 1 + i \frac{t'}{\beta \hbar} \right) = -i \beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 + i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right] \quad (\text{C.19})$$

e

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \\ b = -\frac{1}{\beta \hbar} \end{cases} \Rightarrow \int_0^t dt' \psi \left(\frac{1}{\beta \hbar \omega_c} + 1 - i \frac{t'}{\beta \hbar} \right) = i \beta \hbar \ln \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 - i \frac{t}{\beta \hbar} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{\omega_c \beta \hbar} + 1 \right)} \right]. \quad (\text{C.20})$$

C.4 Integrais utilizadas no item 6.7.3.1

- $I_1(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau)$

Integrando primeiro em τ ,

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) = \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{\text{sen}(\omega\tau)}{\omega} \Big|_0^t \\ &= \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \\ &= \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \text{sen}(\omega t). \end{aligned}$$

Agora, utilizando (C.1) com $\begin{cases} p = \frac{1}{\omega_c} \\ q = t \\ \lambda = 0 \end{cases}$, o resultado final é alcançado:

$$I_1(t) = \frac{t}{\left(\frac{1}{\omega_c}\right)^2 + t^2} = \frac{\omega_c^2 t}{1 + (\omega_c t)^2}. \quad (\text{C.21})$$

- $I_2(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \cosh[\Omega(2\tau - t)]$

Mais uma vez será feita primeiro a integração em τ . Antes, a integral será reescrita para facilitar a visualização,

$$I_2(t) = \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \int_0^t d\tau \cos(\omega\tau) \cosh[\Omega(2\tau - t)].$$

Agora, através de (C.5) com $\begin{cases} a = 2\Omega \\ b = -\Omega t \\ c = \omega \\ d = 0 \end{cases}$, a integral em τ fornece

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \cos(\omega\tau) \cosh[\Omega(2\tau - t)] &= \frac{2\Omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \sinh[\Omega(2\tau - t)] \cos(\omega\tau) \Big|_0^t \\ &+ \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \cosh[\Omega(2\tau - t)] \sin(\omega\tau) \Big|_0^t \\ &= \frac{2\Omega}{4\Omega^2 + \omega^2} [\sinh(\Omega t) \cos(\omega t) + \sinh(\Omega t)] \\ &+ \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \cosh(\Omega t) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

restando em $I_2(t)$ a integração em ω ,

$$\begin{aligned} I_2(t) &= 2\Omega \sinh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega t) \\ &+ 2\Omega \sinh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \\ &+ \cosh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Nessa expressão, serão utilizados os resultados (C.11), (C.9) e (C.13) com a substituição

$$\begin{cases} b &= \frac{1}{\omega_C} \\ c &= t, \text{ que fornecerão:} \\ \beta &= 2\Omega \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_C}} \cos(\omega t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, 2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[0, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_C}} = \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right\} \quad (\text{C.23})$$

e

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\omega^2}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_C}} \sin(\omega t) d\omega \\ &= \Omega \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Assim, $I_2(t)$ se tornará

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \Omega \sinh(\Omega t) \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, 2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[0, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right\} \\ &\quad + 2\Omega \sinh(\Omega t) \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right\} \\ &\quad + \Omega \cosh(\Omega t) \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Por uma questão de comodidade, é conveniente adotar as seguintes definições:

$$g_0 \equiv \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right\}, \quad (\text{C.25})$$

$$g_1(t) \equiv \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, 2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) + \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[0, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right\} \quad (\text{C.26})$$

e

$$g_2(t) \equiv \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] - \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right\} . \quad (\text{C.27})$$

Com (C.25), (C.26) e (C.27), a forma mais compacta é alcançada:

$$I_2(t) = 2\Omega \sinh(\Omega t) g_0 + \Omega \sinh(\Omega t) g_1(t) + \Omega \cosh(\Omega t) g_2(t) . \quad (\text{C.28})$$

$$\bullet \quad I_3(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \sinh[\Omega(2\tau - t)]$$

A integral será reescrita para facilitar a visualização para a integração em τ :

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \sinh[\Omega(2\tau - t)] \\ &= \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \int_0^t d\tau \cos(\omega'\tau) \sinh[\Omega(2\tau - t)] . \end{aligned}$$

Agora será utilizado o resultado (C.4) com $\begin{cases} a = 2\Omega \\ b = -\Omega t \\ c = \omega' \\ d = 0 \end{cases}$, que fornecerá

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \cos(\omega\tau) \sinh[\Omega(2\tau - t)] &= \frac{2\Omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \cosh[\Omega(2\tau - t)] \cos(\omega\tau) \Big|_0^t \\ &+ \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \sinh[\Omega(2\tau - t)] \sin(\omega\tau) \Big|_0^t \\ &= \frac{2\Omega}{4\Omega^2 + \omega^2} [\cosh(\Omega t) \cos(\omega t) - \cosh(\Omega t)] \\ &+ \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \sinh(\Omega t) \sin(\omega t) , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 I_3(t) &= 2\Omega \cosh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega t) \\
 &- 2\Omega \cosh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \\
 &+ \sinh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t) .
 \end{aligned}$$

É interessante notar que essas integrais já foram calculadas anteriormente ((C.22), (C.23) e (C.24)) e $I_3(t)$ se torna

$$\begin{aligned}
 I_3(t) &= \Omega \cosh(\Omega t) \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, 2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right. \\
 &+ \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[0, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Big\} \\
 &- 2\Omega \cosh(\Omega t) \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \Gamma \left(0, i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right\} \\
 &+ \Omega \sinh(\Omega t) \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \right. \\
 &- \exp \left[- \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Gamma \left[-1, - \left(2\Omega t + i \frac{2\Omega}{\omega_C} \right) \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

ou, novamente, com (6.121) (6.122) e (6.123),

$$I_3(t) = -2\Omega \cosh(\Omega t) g_0 + \Omega \cosh(\Omega t) g_1(t) + \Omega \sinh(\Omega t) g_2(t) . \quad (\text{C.29})$$

- $I_4(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega \tau) \sinh(\Omega \tau) \sinh[\Omega(t - \tau)]$

Para determinar essa integral, o primeiro passo será abrir $\sinh[\Omega(t - \tau)]$ em termos de exponenciais.

$$\begin{aligned}
I_4(t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau) \sinh[\Omega(t-\tau)] \\
&= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau) \frac{e^{\Omega(t-\tau)} - e^{-\Omega(t-\tau)}}{2} \\
&= \frac{1}{2} e^{\Omega t} \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau) e^{-\Omega\tau} \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{-\Omega t} \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau) e^{\Omega\tau}.
\end{aligned}$$

Realizando, agora, a integração em τ :

$$\begin{aligned}
I_4(t) &= \frac{1}{2} e^{\Omega t} \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \int_0^t d\tau e^{-\Omega\tau} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau) \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{-\Omega t} \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \int_0^t d\tau e^{\Omega\tau} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau).
\end{aligned}$$

Em ambos os casos será utilizado o resultado (C.6). Primeiro, com as substituições $\begin{cases} a = -\Omega \\ b = \Omega \\ c = \omega \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int_0^t d\tau e^{2\Omega\tau} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau) &= \frac{1}{2\omega^2} \omega \sin(\omega\tau) \Big|_0^t \\
&\quad - \frac{1}{2(4\Omega^2 + \omega^2)} e^{-2\Omega\tau} [-2\Omega \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau)] \Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{1}{2(4\Omega^2 + \omega^2)} \{e^{-2\Omega t} [-2\Omega \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)] + 2\Omega\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \Omega e^{-2\Omega t} \frac{1}{4\Omega^2 + \omega^2} \cos(\omega t) - \frac{e^{-2\Omega t}}{2} \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \sin(\omega t) \\
&\quad - \Omega \frac{1}{4\Omega^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

e, em seguida, com $\begin{cases} a = \Omega \\ b = \Omega \\ c = \omega \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int_0^t d\tau e^{\Omega\tau} \cos(\omega\tau) \sinh(\Omega\tau) &= \frac{1}{2(4\Omega^2 + \omega^2)} e^{2\Omega\tau} [2\Omega \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau)] \Big|_0^t \\
&- \frac{1}{2\omega^2} \omega \sin(\omega\tau) \Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2(4\Omega^2 + \omega^2)} \{e^{2\Omega t} [2\Omega \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)] - 2\Omega\} \\
&- \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\
&= \Omega e^{2\Omega t} \frac{1}{(4\Omega^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) + \frac{e^{2\Omega t}}{2} \frac{\omega}{(4\Omega^2 + \omega^2)} \sin(\omega t) \\
&- \Omega \frac{1}{4\Omega^2 + \omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_4(t) &= \frac{1}{2} e^{\Omega t} \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \Omega e^{-2\Omega t} \frac{1}{4\Omega^2 + \omega^2} \cos(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-2\Omega t}}{2} \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} \sin(\omega t) - \Omega \frac{1}{4\Omega^2 + \omega^2} \right\} \\
&- \frac{1}{2} e^{-\Omega t} \int_0^\infty d\omega \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \left\{ -\Omega \frac{1}{4\Omega^2 + \omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right. \\
&\quad \left. + \Omega e^{2\Omega t} \frac{1}{(4\Omega^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) + \frac{e^{2\Omega t}}{2} \frac{\omega}{(4\Omega^2 + \omega^2)} \sin(\omega t) \right\}
\end{aligned}$$

e, reorganizando os termos,

$$\begin{aligned}
I_4(t) &= \frac{1}{4} (e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}) \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t) - \frac{\Omega}{2} (e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega t) \\
&- \frac{1}{4} (e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t) - \frac{1}{2} \Omega (e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \\
&= \frac{1}{2} \cosh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t) - \Omega \sinh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \cos(\omega t) \\
&- \frac{1}{2} \cosh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \sin(\omega t) - \Omega \sinh(\Omega t) \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\Omega^2 + \omega^2} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}.
\end{aligned}$$

Utilizando (C.21), (C.22), (C.23) e (C.24),

$$\begin{aligned}
I_4(t) = & \frac{1}{2} \frac{\omega_C^2 t}{1 + (\omega_C t)^2} \cosh(\Omega t) - \frac{\Omega}{4} \sinh(\Omega t) \left\{ \exp\left(2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \Gamma\left(0, 2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \right. \\
& + \exp\left[-\left(2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \Gamma\left[0, -\left(2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \\
& + \exp\left(2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \Gamma\left(0, 2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \\
& + \exp\left[-\left(2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \Gamma\left[0, -\left(2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \left. \right\} \\
& - \frac{\Omega}{4i} \cosh(\Omega t) \left\{ \exp\left[\left(2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) + i\frac{\pi}{2}\right] \Gamma\left[-1, \left(2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \right. \\
& + \exp\left[-\left(2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) - i\frac{\pi}{2}\right] \Gamma\left[-1, -\left(2\Omega t + i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \\
& - \exp\left[-\left(2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) + i\frac{\pi}{2}\right] \Gamma\left[-1, -\left(2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \\
& \left. - \exp\left[\left(2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) - i\frac{\pi}{2}\right] \Gamma\left[-1, \left(2\Omega t - i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right)\right] \right\} \\
& - \frac{\Omega}{2} \sinh(\Omega t) \left[\exp\left(i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \Gamma\left(0, i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) + \exp\left(-i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \Gamma\left(0, -i\frac{2\Omega}{\omega_C}\right) \right].
\end{aligned}$$

A simplificação final é alcançada utilizando (C.21) mais uma vez junto com (C.28) e (C.27),

$$I_4(t) = \frac{1}{2} \cosh(\Omega t) I_1(t) - \frac{1}{2} I_2(t). \quad (\text{C.30})$$

- Integrais em (6.139) e (6.140)

Neste item serão utilizadas os dois resultados fornecidos pelo *Wolfram Mathematica*. Em primeiro lugar, com (C.7):

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' \Gamma\left(0, -2\lambda^2 t' - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) &= \frac{1}{2\lambda^2} \left[i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \Gamma\left(0, -2\lambda^2 t - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) + \Gamma\left(1, -2\lambda^2 t - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right] + \\
&+ t \Gamma\left(0, -2\lambda^2 t - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) + c_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' \Gamma\left(0, 2\lambda^2 t' + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) &= \frac{1}{2\lambda^2} \left[i\frac{2\lambda^2}{\omega_C} \Gamma\left(0, 2\lambda^2 t + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) - \Gamma\left(1, 2\lambda^2 t + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right] + \\
&+ t \Gamma\left(0, 2\lambda^2 t + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) - c_1^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) &= \frac{1}{2\lambda^2} \left[i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) + \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] + \\ &+ t \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) + c_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) &= \frac{1}{2\lambda^2} \left[i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) - \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] + \\ &+ t \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) - c_2^* \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \Gamma \left(0, -i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) + \Gamma \left(1, -i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \\ c_2 = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \Gamma \left(-1, -i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) + \Gamma \left(0, -i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] \end{cases}.$$

Por fim, utilizando (C.8),

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' e^{4\lambda^2 t'} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) &= \frac{1}{4\lambda^2} \left[e^{4\lambda^2 t} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right. \\ &\left. - e^{-i \frac{4\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] + c_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' e^{-4\lambda^2 t'} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) &= -\frac{1}{4\lambda^2} \left[e^{-4\lambda^2 t} \Gamma \left(0, -2\lambda^2 t - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right. \\ &\left. - e^{i \frac{4\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(0, 2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] - c_3^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' e^{4\lambda^2 t'} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) &= \frac{1}{4\lambda^2} \left[e^{4\lambda^2 t} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right. \\ &\left. + e^{-i \frac{4\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right] + c_4 \end{aligned}$$

e

$$\int_0^t dt' e^{-4\lambda^2 t'} \Gamma\left(-1, -2\lambda^2 t' - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) = -\frac{1}{4\lambda^2} \left[e^{-4\lambda^2 t} \Gamma\left(-1, -2\lambda^2 t - i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) + e^{i\frac{4\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma\left(-1, 2\lambda^2 t + i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right] - c_4^*$$

onde

$$\begin{cases} c_3 = -\frac{1}{4\lambda^2} \left[\Gamma\left(0, i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) - e^{-i\frac{4\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma\left(0, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right] \\ c_4 = -\frac{1}{4\lambda^2} \left[\Gamma\left(-1, i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) + e^{-i\frac{4\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma\left(-1, -i\frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right] \end{cases}.$$

Apêndice D – Verificação das soluções (6.143)

Para aumentar a segurança no resultado (6.143), serão tomados os seguintes limites na expressão para compará-los com resultados mais simples conhecidos:

$$\begin{cases} t & \rightarrow 0 \\ \eta & \rightarrow 0 \\ \lambda & \rightarrow 0 \end{cases} .$$

Assim, serão necessárias as soluções para ausência do ambiente ($\eta = 0$), com presença do medidor ($\lambda \neq 0$) e presença do ambiente ($\eta \neq 0$) com ausência do medidor ($\lambda = 0$). A verificação da condição inicial é bem simples, como será mostrado.

D.1 Resultados prévios

A solução para ausência do ambiente com a presença do medidor é exatamente (3.46). Entretanto, na obtenção de (6.143) foi feita a particularização $\omega_0 = 0$. Nesse caso, (3.46) se torna

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \text{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \\ \rho_{12}^{(x)}(t) = \frac{2\rho_{11}^{(z)}(0)-1}{2} e^{-2\lambda^2 t} - i e^{-2\lambda^2 t} \text{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \end{cases} . \quad (\text{D.1})$$

Para analisar a presença do ambiente com a ausência do medidor serão utilizadas as soluções (6.59) e (6.68) obtidas na medida de $\hat{\sigma}_z$. Nessas expressões, fazendo $\lambda \rightarrow 0$, é obtido o resultado, na base de autoestados de $\hat{\sigma}_z$, da equação (5.24) para $\hat{L} = 0$:

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \rho_{11}^{(z)}(0) \\ \rho_{12}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)}(0) \left\{ \frac{1}{1+(\omega_c t)^2} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\omega_c\beta\hbar}{1+n\omega_c\beta\hbar+\omega_c t} \right]^2 \right\}^{2\eta} e^{i2\omega_0 t} \end{cases} \quad (D.2)$$

Entretanto, para chegar a (6.143), foram feitas as particularizações $\omega_0 = 0$ e $T = 0$. O primeiro destes é bem simples, pois afeta apenas a última exponencial, e fornece

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \rho_{11}^{(z)}(0) \\ \rho_{12}^{(z)}(t) = \rho_{12}^{(z)}(0) \left\{ \frac{1}{1+(\omega_c t)^2} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\omega_c\beta\hbar}{1+n\omega_c\beta\hbar+\omega_c t} \right]^2 \right\}^{2\eta} \end{cases} \quad (D.3)$$

Já $T = 0$, que implica $\beta = \frac{1}{k_B T} \rightarrow \infty$, afeta o produto entre colchetes mas também não é complicado de ser calculado, fornecendo

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(z)}(t) = \rho_{11}^{(z)}(0) \\ \rho_{12}^{(z)}(t) = \frac{\rho_{12}^{(z)}(0)}{[1+(\omega_c t)^2]^{2\eta}} \end{cases} \quad (D.4)$$

Agora, para tornar possível a comparação com (6.143), é necessário realizar a mudança para a base de autoestados de $\hat{\sigma}_x$, que fornecerá

$$\begin{cases} \rho_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \frac{\text{Re}\{\rho_{12}^{(z)}(0)\}}{[1+(\omega_c t)^2]^{2\eta}} \\ \rho_{12}^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} + \rho_{11}^{(z)}(0) - i \frac{\text{Im}\{\rho_{12}^{(z)}(0)\}}{[1+(\omega_c t)^2]^{2\eta}} \end{cases} \quad (D.5)$$

Os resultados (D.1) e (D.5) serão utilizados nas verificações a seguir.

D.2 Verificações

Limite $t \rightarrow 0$ (condição inicial)

Para esse limite, serão comparadas as três expressões (6.143), (D.1) e (D.5). O limite pode ser facilmente tomado em (6.143), lembrando que as funções $A_{\pm}(t)$ e $B_{\pm}(t)$ são definidas em termos de integrais e devem necessariamente se anular em $t = 0$, fornecendo

$$(6.143) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \hat{\rho}_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \hat{\rho}_{12}^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} + \rho_{11}^{(z)}(0) - i \operatorname{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \end{cases} . \quad (D.6)$$

Para as expressões (D.1) e (D.5), o limite também é simples de ser tomado, fornecendo o mesmo resultado (D.6).

Limite $\eta \rightarrow 0$

Nesse caso, serão comparadas as expressões (D.5) e (6.143). O limite também é simples de ser tomado nas duas expressões

$$(D.5) \quad \begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{\rho}_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{\rho}_{12}^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} + \rho_{11}^{(z)}(0) - i \operatorname{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \end{cases} \quad (D.7)$$

e

$$(6.143) \quad \begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{\rho}_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{\rho}_{12}^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} + \rho_{11}^{(z)}(0) - i \operatorname{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \end{cases} \quad (D.8)$$

e os resultados coincidem.

Limite $\lambda \rightarrow 0$

Serão comparadas as expressões (D.5) e (6.143), pois a última deve se reduzir à primeira nesse limite. É conveniente conhecer de antemão os seguintes limites envolvendo as funções $\Gamma(a, z)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{(a+ib)\lambda^2} \Gamma(0, c\lambda^2 + id\lambda^2) = 0 \quad (\text{D.9})$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{(a+ib)\lambda^2} \Gamma(-1, c\lambda^2 + id\lambda^2) = \frac{1}{c + id}. \quad (\text{D.10})$$

Com base em (D.9) e (D.10), os limites relacionados à variável λ nas exponenciais de (6.143), que envolvem $\lambda^2 g_0$, $\lambda^2 A_{\pm}(t)$ e $\lambda^2 B_{\pm}(t)$ podem ser avaliados.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 g_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \text{Re} \left\{ e^{i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma\left(0, i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right\} = 0, \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 A_+(t) &= \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{(4t' + i \frac{2}{\omega_C})\lambda^2} \Gamma\left(0, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right\} \\ &+ \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{-i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma\left(0, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 A_-(t) &= \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma\left(0, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right\} \\ &+ \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{-(4t' + i \frac{2}{\omega_C})\lambda^2} \Gamma\left(0, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 B_+(t) &= \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{(4t' + i \frac{2}{\omega_C})\lambda^2} \Gamma\left(-1, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right\} \\ &- \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{-i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma\left(-1, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}\right) \right\} \\ &= \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \frac{1}{2t' + i \frac{2}{\omega_C}} - \frac{1}{-2t' - i \frac{2}{\omega_C}} \right\} = \int_0^t dt' \text{Re} \left\{ \frac{1}{t' + \frac{i}{\omega_C}} \right\} = \ln \left[1 + (\omega_C t)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 B_-(t) &= \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{i \frac{2\lambda^2}{\omega_C}} \Gamma \left(-1, 2\lambda^2 t' + i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\
 &\quad - \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 e^{-\left(4t' + i \frac{2}{\omega_C}\right) \lambda^2} \Gamma \left(-1, -2\lambda^2 t' - i \frac{2\lambda^2}{\omega_C} \right) \right\} \\
 &= \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2t' + i \frac{2}{\omega_C}} - \frac{1}{-2t' - i \frac{2}{\omega_C}} \right\} = \int_0^t dt' \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t' + \frac{i}{\omega_C}} \right\} = \ln \left[1 + (\omega_c t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

Com (D.11), (D.12), (D.13), (D.14) e (D.15), os limites das exponenciais em (6.143) podem ser calculados:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-8\eta \lambda^2 g_0 t} e^{4\eta \lambda^2 [A_-(t) - B_-(t)]} &= e^{-4\eta \ln(1 + \omega_c^2 t^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= e^{\ln(1 + \omega_c^2 t^2)^{-2\eta}} = \left[1 + (\omega_c t)^2 \right]^{-2\eta}
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

e

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-2\lambda^2 t} e^{8\eta \lambda^2 g_0 t} e^{-4\eta \lambda^2 [A_+(t) + B_+(t)]} &= e^{-4\eta \ln(1 + \omega_c^2 t^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= e^{\ln(1 + \omega_c^2 t^2)^{-2\eta}} = \left[1 + (\omega_c t)^2 \right]^{-2\eta}.
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Substituindo (D.16) e (D.17) em (6.143),

$$(6.143) \quad \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\rho}_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \left[1 + (\omega_c t)^2 \right]^{-2\eta} \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\rho}_{12}^{(x)}(t) = \frac{2\rho_{11}^{(z)}(0) - 1}{2} - i \operatorname{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\} \left[1 + (\omega_c t)^2 \right]^{-2\eta} \end{cases}$$

ou seja, (6.143) se torna

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\rho}_{11}^{(x)}(t) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Re} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\}}{\left[1 + (\omega_c t)^2 \right]^{2\eta}} \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\rho}_{12}^{(x)}(t) = -\frac{1}{2} + \rho_{11}^{(z)}(0) - i \frac{\operatorname{Im} \left\{ \rho_{12}^{(z)}(0) \right\}}{\left[1 + (\omega_c t)^2 \right]^{2\eta}} \end{cases}$$

que é análoga a (D.5).