UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

CONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO SIMPLÉ-
TICA IRREDUTÍVEL PARA O MODELO ALGÉ-
BRICO DE EVOLUÇÃO DO CÓDIGO GENÉTICO.

Marconi Soares Barbosa

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física de São Carlos, da Universidade de
São Paulo, para obtenção do título de
Mestre em Ciências: **Física Básica.**

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos

OK

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
SÃO CARLOS - 1996

Construção da representação simplética irreduzível para o modelo algébrico de evolução do código genético /Marconi S.Barbosa.-São Carlos, 1996.

<117> p.

Tese (Mestrado)-Instituto de Física de São Carlos, 1996.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos 1.

Método Polinomial. 2. Código Genético. I. Título.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

CONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO SIMPLÉ-
TICA IRREDUTÍVEL PARA O MODELO ALGÉ-
BRICO DE EVOLUÇÃO DO CÓDIGO GENÉTICO.

Marconi Soares Barbosa

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física de São Carlos, da Universidade de
São Paulo, para obtenção do título de
Mestre em Ciências: Física Básica.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
SÃO CARLOS - 1996

IFSC**UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO****Instituto de Física de São Carlos**

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
CEP 13560-250 - São Carlos - SP
Brasil

Fone (016) 272-6222
Fax (016) 272-2218

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
MARCONI SOARES BARBOSA APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO
CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 17 DE DEZEMBRO DE 1996.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos/IFSC-USP

Prof. Dr. José Fernando Fontanari/IFSC-USP

Prof. Dr. Antonio Lima Santos/UFSCar

À minha mãe,
Conceição, por tudo.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à todos que contribuíram para a realização deste trabalho.
Em especial:

- ao Prof. Hornos, orientador e educador, pelo belo tema a mim apresentado e pela tranquilidade de nossa jornada por ele.
- a Marcos Moshinsky, da universidade do México, pela substancial contribuição para este trabalho.
- à Claudia, parte de minha forma de pensar.
- a todos os colegas de nosso grupo de pesquisa e do departamento por toda a ajuda, principalmente a Mauro e Ghandi com a incrível rede de computadores.
- aos colegas da salinha, Gabriel(Zoppo) e o intruso Marcelo(Prank).
- aos velhos e bons amigos, Daniel(Hare), Mário(Paia), Márcio(Lider), Rodrigo e Luciano(Ban-Ban)
- aos novos, Abdala, Casé, Cléber, Andrea, Ana, Cibelle, J.Paulo(Zeppa) Paulo(Nescau) e Rodrigo(Ganso)
- à Gilda, pelas caminhadas

Enfim, à Valéria, impossível dizer o quanto.

*Este trabalho teve o apoio
financeiro da CAPES.*

Índice

1	Introdução	5
2	O Modelo Algébrico para o Código Genético	11
3	Grupos e Álgebras de Lie	15
3.1	Grupo de Lie	15
3.2	A Álgebra de Lie	18
3.2.1	Introdução	18
3.2.2	A Álgebra dos Geradores de um Grupo de Lie	19
3.2.3	Álgebra de Lie: Definição	21
3.3	Conceitos Fundamentais	21
3.3.1	Simplicidade e semisimplicidade	22
3.3.2	Soma Direta e Semidireta	25
3.3.3	Solubilidade e Nilpotência	26
3.4	Raízes e a Base de Cartan-Weyl	31
3.4.1	Diagrama de raízes	37
3.5	Representação	38
3.6	Pesos	40
3.7	O Diagrama de Pesos	41
3.7.1	As Bases de Cartan-Weyl [CW] e Dynkin (DYN)	41
3.7.2	Algoritmo Prático	44
4	Simetria Simplética	47
4.1	Transformações Canônicas	47
4.2	O parênteses de Poisson	48

ÍNDICE	2
4.3 Grupo e Álgebra Simplética	50
4.4 A Álgebra Simplética $sp(6)$	51
5 O Método Polinomial	55
5.1 Introdução	55
5.2 O Grupo de Rotações	56
5.3 Base para Irreps dos Grupos Unitários	58
5.4 Representações de $U(3)$	62
6 Base Polinomial para a Irrep dos Códon	65
6.1 A Álgebra $u(6)$ e sua Complementar $u(2)$	66
6.2 O Estágio Primordial	68
6.3 A subálgebra $sp(4) \oplus su(2)$: Primeira Quebra de Simetria.	69
6.4 Segunda Quebra de Simetria: $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$	71
6.5 A Base Polinomial Completa	74
7 Resultados	79
7.1 Introdução	79
7.2 Transição entre Códon: A Atuação de $sp(6)$	80
7.2.1 Transições Invariantes	85
7.2.2 O Operador Evolução, $\mathcal{L}_{-5}^5$	85
7.2.3 Transições Intra-férmions e Intra-bósons	86
7.2.4 Transições Primordiais	90
7.3 Conclusões	94
7.4 Perspectivas	94
A Rotinas Algébricas	97
A.1 ActA.map	97
A.2 ActB.map	99
A.3 ActC.map	102
B A Ação Completa dos Operadores da Cadeia de Álgebras de Lie para o Modelo Simplético.	109

Resumo

A evolução do código genético foi analisada recentemente por Hornos & Hornos segundo um modelo algébrico baseado em um processo de quebra de simetria induzido pela cadeia de álgebras de Lie, $sp(6) \supset sp(4) \oplus su(2) \supset su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$. Inserindo a álgebra $sp(6)$ numa álgebra unitária de maior dimensão é possível estender uma análise, bem conhecida para os grupos unitários, à série simplética. Construímos aqui, seguindo um procedimento desenvolvido por Marcos Moshinsky, polinômios em termos de operadores de destruição que constituem uma base para uma representação irredutível da álgebra $sp(6)$ na cadeia canônica. A estes polinômios, autênticos vetores de estado, associamos os aminoácidos e os códons, seguindo o princípio do modelo algébrico para evolução do código genético. Implementamos toda a ação dos operadores em linguagem algébrica Maple, com o recurso de realizar simplificações por meio de um produto escalar. Podemos portanto, realizar ações de qualquer função analítica dos elementos desta álgebra simplética sobre estes vetores de estado além do hamiltoniano de Hornos — que consiste de operadores de Casimir com ação conhecida. Verificamos aqui que algumas transições produzidas pelos geradores seguem simetrias de reflexão no diagrama de pesos. Por outro lado encontramos regras de seleção estabelecidas pela simetria simplética e pela cadeia específica. Discutimos as ações dos geradores do grupo $Sp(6)$ baseado num novo ‘assignment’ que sob certas hipóteses de simetrias se mostrou único.

Abstract

The evolution of the genetic code has been discussed by Hornos & Hornos with an algebraic model based on the chain of Lie algebras, $sp(6) \supset sp(4) \oplus su(2) \supset su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$. By embedding the $sp(6)$ algebra into a unitary algebra of larger dimension, it's possible to extend a previous analysis, which holds for unitary groups, to the symplectic series. We construct here, following a procedure developed by Marcos Moshinsky, polynomials in terms of creation operators which form a basis for the irreducible representation of the $sp(6)$ algebra in the canonical chain. To these polynomials, truly vector states, we associate, in the light of the algebraic approach for the evolution of the genetic code, the amino acids and the codons. All operator action was provided by a maple procedure which uses a scalar product based on simplification routine. Therefore we can perform actions of any analytic function of the symplectic algebra operators on these vector states besides the Hornos's Hamiltonian — which by its turn consists of Casimirs with a known action. We find here that some transitions produced by the generators follow reflectional symmetries in the weight diagram, together with selection rules imposed by the symplectic underground symmetries of the representation and the specific chain. We discuss the operator actions based on the new assignment which was proved to be unique under symmetry hypothesis.

Capítulo 1

Introdução

O conceito de simetria parece estar intimamente associado com a tendência natural humana de privilegiar padrões regulares ante a monotonicidade do continuum. Além desta conotação de caráter psicológico, uma definição precisa do que é a simetria de um objeto e de como ela pode ser tanto útil quanto admirável, remonta por volta de 25 séculos na história da ciência — se contados de quando os geômetras gregos fizeram as primeiras descobertas sobre o conceito, notavelmente a prova da existência de exatamente cinco sólidos regulares. Princípios de conservação, tais como a conservação de energia e do momentum expressam uma simetria que acreditamos ser possuída pela totalidade do espaço-tempo: As leis da física são as mesmas em qualquer tempo e lugar. A mecânica quântica que rege o movimento das partículas fundamentais, um mundo estranho em que um nêutron pode ser transformado em um próton por uma operação de simetria, tem suas leis expressas na linguagem matemática das simetrias. As simetrias dos cristais não somente classificam suas formas mas determinam muitas de suas propriedades. Várias formas naturais, de estrelas do mar à flocos de neve, de vírus à galáxias, possuem um tipo de simetria explícita, perceptível ao primeiro contato. Existem vários livros populares dedicados ao estudo das simetrias [24], [1], [15], em um deles, o memorável trabalho de Herman Weyl [26], um dos estudantes de Hilbert, a idéia de simetria é introduzida de maneira concisa:

‘If I am not mistaken the word symmetry is used in our every day language in two meanings. In the one sense symmetric means something

like well proportioned, well-balanced, and symmetry denotes a sort of concordance of several parts by which they integrate to a whole. Beauty is bound up with symmetry. (..) The image of a balance provides a natural link to the second sense in which the word symmetry is used in modern times: *bilateral symmetry*, the symmetry of left and right, which is so conspicuous in the structure of higher animals, especially the human body. Now this bilateral symmetry is strictly geometric and, in contrast to the vague notion of symmetry discussed above, an absolutely precise concept. (...) Gone may be much of its emotional appeal, but it has the same or even greater unifying power in the realm of thought and is exact instead of vague.'

No segundo sentido é que estamos interessados aqui, apesar de não sermos de maneira nenhuma imunes ao charme do primeiro. Para começar, simetria deve ser reconhecida como uma transformação. Não uma transformação qualquer: a simetria de um objeto é uma transformação que o deixa invariante. O entendimento de que simetrias são melhores focalizadas em termos de transformações surgiu quando os matemáticos se deram conta de que o conjunto de simetrias de um objeto não era uma mera coleção arbitrária de transformações, mas que possuía uma rica estrutura interna. Para expressar este fato em linguagem matemática dizemos que as simetrias de um objeto formam um *grupo*, onde a palavra grupo tem um significado mais específico — um conjunto de transformações munido de uma estrutura advinda da possibilidade de combinar elementos, i.e. transformações, em pares, gerando novos elementos.

Felix Klein, no Programa de Erlanger 1872, privilegiou a simetria em relação a geometria. Ele introduziu novos conceitos de estrutura matemática afim de classificar as possíveis geometrias (euclídeana, riemana, hiperbólica, afim, projectiva...etc.). A ideia de Klein era que a geometria seria uma teoria de grupo. Os grupos são formados pelas transformações que deixam as noções geométricas básicas invariantes. Mas esta relação pode ser invertida, de forma que nas palavras de Klein, 'propriedades geométricas são caracterizadas por suas invariâncias segundo um grupo de transformações'.

Figura 1.1: Padrões formados por areia sobre uma placa vibrante: quebra da simetria do quadrado.

O grupo de simetria que estamos interessados aqui é aquele que preserva as propriedades geométricas do espaço das fases em mecânica analítica, o grupo simplético associado as transformações canônicas. Na verdade, central em nosso trabalho são as transformações canônicas infinitesimais que, como veremos, constitui uma das classes de entidades matemáticas conhecidas como álgebras de Lie. O protótipo mais famoso de álgebra de Lie é a álgebra de momentum angular L_+, L_-, L_z , que como sabemos está associada as rotações infinitesimais. Conhecida a idéia de grupo, a questão pertinente agora é sobre os possíveis subconjuntos fechados de um dado grupo, ou seja, um subconjunto de transformações que deixam o objeto invariante. Como um exemplo mencionamos os padrões de Chladni, figura 1.1, formados por areia sobre placa vibrante. A placa possui as simetrias do quadrado mas vários padrões possuem simetria menor — a simetria total do objeto, no momento que ele passa a evoluir no tempo, pode ser quebrada em subsimetrias. Neste exemplo reside a essência dos tratamentos baseados em quebra espontânea de simetria: os possíveis estados do sistema são caracterizados segundo uma cadeia de subgrupos da simetria inicial. Um exemplo famoso

um pouco mais abstrato deste processo é o efeito Zeeman no qual a simetria esférica é quebrada pela imposição de uma direção preferencial, sendo a simetria remanescente axial.

Como Klein, Cartan realizou um trabalho formidável de classificação, de todas as possíveis álgebras de Lie semisimples complexas. No capítulo 3 desta dissertação revemos o trabalho de Cartan, assim como os conceitos desenvolvidos por uma equipe fantástica de matemáticos e físicos que contribuíram para tal classificação. Ao longo da dissertação o tema álgebra de Lie se torna central, uma vez que o modelo algébrico faz uso de um hamiltoniano extraído naturalmente de uma cadeia de álgebras e subálgebras de Lie para fornecer as degenerescências do código genético. Tarefa árdua [18], se levarmos em consideração a quantidade de cadeias possíveis e das exigências do processo de quebra espontânea de simetria, [9].

O modelo algébrico para evolução do código genético faz uso da idéia de quebra de simetria. O espaço de uma representação irredutível de uma álgebra Lie simplética é dividido em subespaços degenerados na medida que termos (elementos) de suas subálgebras são introduzidos no hamiltoniano. À estes espaços degenerados são associados, no final do processo de quebra de simetria, os 20 aminoácidos e o sinal de terminação. Aos vetores que formam uma base em cada espaço degenerado são associados os códons. A evolução do código é correlacionada com a mudança da dimensão destes espaços degenerados promovida pelos operadores das subálgebras inseridos no hamiltoniano. Porém a ação de todos os operadores envolvidos neste hamiltoniano é conhecida: os vetores associados aos códons são autoestados deste hamiltoniano com autovalores conhecidos. Não poderemos realizar ações de operadores arbitrários da simetria simplética, que acreditamos reger o processo de tradução do código genético, se não possuímos uma realização desta simetria.

Marcos Moshinsky da Universidade do México tem trabalhado com representações polinomiais por mais que três décadas. Em comunicação particular, sugeriu que operadores de bósons seriam candidatos a portarem a informação biológica vinculada a simetria simplética do código. A construção de uma base *polinomial* em termos de operadores de bósons para esta representação é reproduzida nesta

dissertação, baseada em uma série de publicações de M. Moshinsky.. O objetivo desta dissertação é de implementar a ação de qualquer operador simplético sobre os vetores associados aos códons, favorecendo a interpretação biológica do modelo, antes impossível.

Começamos esta dissertação com um breve resumo do modelo algébrico para a evolução do código genético, capítulo 2. No capítulo 4 revemos as origens da simetria simplética em mecânica clássica, preparando o caminho para exposição do método polinomial, capítulo 5, aplicado na específica construção da base para representação irredutível de dimensão 64 de $sp(6)$, capítulo 6.

Finalizamos este trabalho com a aplicação da base construída, analisando o comportamento dos vários operadores simpléticos segundo o grau de interferência no processo de tradução do código genético. Comentamos ainda a existência de regras de seleção nas transições típicas de $sp(6)$ cuja interpretação biológica permanece uma questão em aberto, capítulo 7.

Nesta dissertação procuramos valorizar a apresentação dos conceitos de uma forma intuitiva, através de exemplos familiares aos estudantes de física, para depois apresentarmos as definições formais. Acreditamos que procedendo assim atendemos uma demanda crescente para utilização da teoria dos grupos em áreas interdisciplinares.

Capítulo 2

O Modelo Algébrico para o Código Genético

O código genético é um conjunto de regras que relaciona a sequência de bases químicas no RNA à sequência de aminoácidos nas proteínas. As moléculas de RNA são polímeros compostos por quatro bases, Adenina (A), Guanina (G), Uracil (U) e Citosina (C), numa longa cadeia linear. As proteínas são também cadeias formadas pelos 20 aminoácidos fundamentais. A sequência de bases no RNA determina a sequência de aminoácidos na proteína. Um grande passo na tentativa de decifrar o código genético foi dado por Crick et.al [8] com a descoberta de que a informação genética é armazenada no RNA em *tripletos* de bases, chamados códons. Como temos quatro bases para serem arranjadas em tripletos existem 64 códons possíveis para codificar os vinte aminoácidos e um sinal de terminação para indicar o fim do processo de formação da proteína. O código genético pode ser visto então como um mapa projetivo de um conjunto com 64 elementos sobre um conjunto com 21 símbolos para os aminoácidos e o sinal de terminação.

O modelo algébrico para evolução do código genético foi consequência da procura por simetrias entre as álgebras de Lie complexas, afim de verificar se as degenerescências do código genético poderiam ser obtidas por meio de um procedimento matemático bem definido. A idéia era de se associar os 64 códons à estados que formam uma base num espaço vetorial. À este espaço é imposto o

Primeira base	Segunda base				Terceira base
	U	A	C	G	
U	Phe	Ser	Tyr	Cys	U
	Phe	Ser	Tyr	Cys	C
	Leu	Ser	Term	Term	A
	Leu	Ser	Term	Trp	G
C	Leu	Pro	His	Arg	U
	Leu	Pro	His	Arg	C
	Leu	Pro	Gln	Arg	A
	Leu	Pro	Gln	Arg	G
A	Ile	Thr	Asn	Ser	U
	Ile	Thr	Asn	Ser	C
	Ile	Thr	Lys	Arg	A
	Met	Thr	Lys	Arg	G
G	Val	Ala	Asp	Gly	U
	Val	Ala	Asp	Gly	C
	Val	Ala	Glu	Gly	A
	Val	Ala	Glu	Gly	G

Tabela 2.1: O código genético standard: regras de tradução e degenerescências

requerimento de ser portador de uma representação irredutível de uma álgebra de Lie complexa simples G . A representação da álgebra G foi decomposta como uma soma de representações irredutíveis de uma cadeia de subálgebras maximais $G \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n$. No final desta cadeia, a representação irredutível de G de dimensão 64 deve se dividir em 21 subespaços com dimensões dadas pelas degenerescências dos códons. Estes espaços remanescentes, que são invariantes somente pelas transformações de G_n são etiquetados pelos 20 aminoácidos e mais o códon de terminação. Portanto G_n implementa mudanças nos códons que preserva o processo de tradução efetuado pelo código genético. Este procedimento fornece uma estrutura para a classificação dos códons segundo representações irredutíveis das subálgebras. Classificação esta, que nos permite discutir pro-

priedades de simetrias.

O resultado desta procura foi a seleção da álgebra simplética $sp(6)$ como a melhor escolha de simetria para o processo de tradução. Uma cuidadosa análise de todas as cadeias foi realizada e podemos afirmar que não existe uma simetria perfeita ¹ que forneça as degenerescências do código genético. Entretanto a quebra natural de $sp(6)$ em $sp(4) \oplus su(2)$ é a que melhor se aproxima da tarefa de gerar o padrão de degenerescências. Para concluir esta tarefa, um termo de ‘congelamento’ deve ser introduzido no último passo da quebra de simetria da cadeia. Uma correlação natural se estabelece entre a cadeia de simetrias e a evolução do código, entre o termo de congelamento e a teoria do ‘frozen accident’, anunciada por Crick [7] numa tentativa de explicar a estabilidade do código genético. Baseado em considerações de caráter bioquímico e biológico apenas, Jukes [25] sugeriu que, se o ‘frozen accident’ não tivesse ocorrido, um código de 28 aminoácidos teria surgido. É interessante notar que se nenhum termo de congelamento for introduzido o código genético gerado por esta cadeia de simetria produziria 26 aminoácidos mais um código de término.

A cadeia completa de simetrias proposta para a evolução do código genético foi

$$\begin{aligned} sp(6) &\supset sp(4) \oplus su(2) \supset su_1(2) \oplus su_2(2) \oplus su_3(2) \dots \\ \dots &\supset su_1(2) \oplus u_2(1) \oplus su_3(2) \supset su_1(2) \oplus u_2(1) \oplus *u_3(1) \end{aligned}$$

O operador que fornece um auto valor diferente para cada um dos 21 subespaços degenerados da representação (1,1,0) de $sp(6)$ na cadeia acima é

$$H = h_0 + h_1 \mathcal{L}_4 + q_1 L_1^2 + q_2 L_2^2 + q_3 L_3^2 + p_1 L_{2z}^2 + p_2 (L_1^2 + L_2^2)(L_3^2 - 2)L_{3z} \quad (2.1)$$

onde $h_0, h_1, q_1, q_2, q_3, p_1, p_2$ são constantes arbitrárias e $\mathcal{L}_4$ é o Casimir quadrático de $sp(4)$. L_1, L_2, L_3 , são operadores de momentum angular dos três $su(3)$ envolvidos na cadeia. L_{2z} e L_{3z} são as componentes em z do operador momentum angular que são invariantes da subálgebra abeliana $u_1(1)$ e $u_3(1)$. O termo $(L_1^2 + L_2^2)(L_3^2 - 2)$ é o responsável pelo processo de congelamento. Temos

¹Uma simetria perfeita seria aquela implementada pelos operadores de Casimir de cada subgrupo em *todas* etapas.

Figura 2.1: O 'espectro' do código genético. Os estados e suas degenerescências.

4 passos de quebra de simetria nesta cadeia, no último deles, colocamos a estrela em $*u_3(1)$ para indicar que a quebra é incompleta pela introdução deste termo de congelamento. Este processo de quebra de simetria segundo o hamiltoniano (2.1) está esquematizado na figura (2.1).

No mesmo espírito usado por Hornos & Hornos [16] classificamos as representações que ocorrem na primeira quebra ($sp(4) \oplus su(2)$) de simetria em bosônicas e fermiônicas, de acordo com seu comportamento sob transformações de $su(2)$. As representações chamadas bosônicas estão relacionadas à representações spinoriais enquanto que as fermiônicas estão relacionadas à representações vetoriais. Voltaremos a este ponto no capítulo 7.

Capítulo 3

Grupos e Álgebras de Lie

3.1 Grupo de Lie

A noção de grupo é tradicionalmente apresentada na forma de uma série de requerimentos que um dado conjunto de símbolos $G \equiv \{a, b, c, \dots\}$ deva obedecer. Notemos, antes da definição técnica de grupo, algumas propriedades do conjunto de matrizes que historicamente motivaram o desenvolvimento das noções de grupo e álgebra de Lie. Dentre o conjunto das matrizes quadradas complexas $n \times n$ denotado por $gl(n, C)$ tomemos o subconjunto das matrizes anti-hermitianas, $U^\dagger = -U$, denotado por $u(n)$ e notemos que o produto

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA \neq -BA, \quad (3.1)$$

não é anti-hermitiano, porém que a soma

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger = -(A + B),$$

é anti-hermitiana. Tomemos agora o subconjunto das matrizes ortogonais, $A^t = A^{-1}$, denotado por $O(n)$ e notemos que ocorre o inverso, o produto

$$(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1},$$

é ortogonal, mas a soma

$$(A + B)^t = A^t + B^t \neq (A + B)^{-1},$$

difícilmente seria ortogonal. Presenciamos aqui o fato de que, apesar de cada classe restrita ($U^\dagger = -U$, $A^t = A^{-1}, \dots$) de matrizes formarem um subconjunto

de $gl(n, C)$, as operações entre dois elementos mais básicas que possamos imaginar podem produzir elementos que violam tais restrições. Buscamos portanto, selecionar propriedades comuns a conjuntos matriciais que sejam preservadas por operações básicas, a serem definidas, entre elementos. Com este objetivo definimos.

Definição 1 *Um conjunto G é chamado de grupo se uma regra de multiplicação é definida entre dois elementos de forma satisfazer os seguintes postulados*

1. *Fechamento: Se a e b pertencem a G , ab pertence a G .*
2. *Associatividade: $a(bc) = (ab)c$.*
3. *Existe um elemento e tal que $xe = ex = x$ para todo x pertencente a G .*
4. *Para cada elemento x de G existe um elemento y (elemento inverso) de G tal que $xy = e$.*

Estaremos interessados aqui num tipo especial de grupo cujos elementos são funções analíticas de parâmetros contínuos. A título de exemplo, consideremos o conjunto de matrizes inversíveis que implementam a transformação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad R(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Estas matrizes $R(a)$ formam um grupo de transformações lineares (utilizando a multiplicação usual de matrizes) que é indicado por $Gl(2, C)$. Seus elementos são identificados através dos parâmetros a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} e o número destes parâmetros é chamado de ordem ou dimensão do grupo.

Tomemos agora o conjunto das matrizes unitárias 2×2 , que satisfaçam

$$U^\dagger U = 1 \quad e \quad \det(U) = 1 \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Observamos que, sendo A e B unitárias, então

$$(AB)^\dagger (AB) = B^\dagger A^\dagger AB = 1 \quad (3.4)$$

e que portanto estas matrizes constituem um subgrupo de $Gl(n)$. Uma matriz genérica deste subgrupo pode ser escrita como

$$U(\xi, \eta, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & -e^{i\varphi} \sin \eta \\ e^{i\varphi} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Este grupo é denotado por $SU(2)$ ¹ e sua ordem é 3 (três parâmetros).

O mais familiar exemplo de grupo deste tipo, cujos elementos são funções de parâmetros, é o de uma rotação em torno de um eixo fixo efetuada por

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

pelo fato de $R_z(\varphi)$ ser ortogonal ($R_z^t R_z = 1$) e $\det(R_z) = 1$ o grupo formado por tais matrizes é indicado por $SO(2)$; sua ordem é 1.

Os exemplos acima são exemplos de grupos contínuos, i.e., identificamos qualquer elemento do grupo variando de forma adequada os parâmetros. Um grupo contínuo possui então uma infinidade de elementos.

Agora, um grupo de Lie é um tipo especial de grupo contínuo, sendo os elementos $R(a)$ do qual expressos em termos de r parâmetros reais

$$R(a) = R(a^1, a^2, \dots, a^r). \quad (3.7)$$

Definimos então

Definição 2 Um grupo G é chamado grupo de Lie de ordem r se $R(a)$ obedece:

1. O elemento identidade, $R(a_0)$, existe i.e.,

$$R(a_0)R(a) = R(a)R(a_0) = R(a), \quad \text{para qualquer } R(a) \in G \quad (3.8)$$

os parâmetros a_0 do elemento identidade são normalmente tomados como a origem, ou seja, $R(a_0) = R(0) = e$.

2. Para qualquer a podemos achar um $\bar{a}$ tal que

$$R(\bar{a})R(a) = R(a)R(\bar{a}) = R(0) \quad (3.9)$$

ou seja para cada $R(a)$ existe um elemento inverso:

$$R(\bar{a}) = R^{-1}(a).$$

onde $\bar{a}$ são funções analíticas de a .

¹Usamos sempre a letra S , originada de 'special', para expressar o fato do determinante da matriz em questão ser igual a 1.

3. Dados os parâmetros a e b podemos achar c no espaço de parâmetros tal que

$$R(c) = R(a)R(b)$$

onde os parâmetros c são funções analíticas de a e b , $c = \varphi(a, b)$.

4. Associatividade

$$R(a)[R(b)R(c)] = [R(a)R(b)]R(c)$$

O espaço de parâmetro do grupo é gerado associando-se à um ponto cada r -úpla $(a^1, a^2, \dots, a^r)$. Um grupo de Lie é chamado compacto se este espaço de parâmetros assim construído é limitado e fechado. O grupo de rotações $SO(2)$ é um exemplo simples de grupo compacto, onde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3.2 A Álgebra de Lie

3.2.1 Introdução

Com a definição 2 percebemos que as matrizes anti-hermitianas não formam um grupo, pois da equação (3.1) o requerimento 3 da definição 2 é desobedecido. Porém como veremos abaixo, elas mantêm uma relação estreita com as matrizes unitárias que, como já vimos formam um grupo. Sendo A anti-hermitiana, obtemos a matriz x pela operação

$$x = e^A, \quad (3.10)$$

que é por sua vez unitária

$$x = e^{-A^\dagger} \quad x^\dagger = e^{-A} \quad \therefore \quad xx^\dagger = 1. \quad (3.11)$$

Notemos ainda que tomando $\det x = 1$ segue que

$$\det x = \det e^A = e^{\text{tr} A} = 1 \implies \text{tr} A = 0. \quad (3.12)$$

Ou seja, as matrizes anti-hermitianas de traço nulo estão associadas as matrizes de determinante 1 via aplicação exponencial. Agora consideremos as três matrizes anti-hermitianas de traço nulo abaixo

$$e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

E calculemos a quantidade (o comutador)

$$[X, Y] = XY - YX, \quad (3.14)$$

para todas estas matrizes e_j ($j = 1, 2, 3$) acima. Obtemos

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k, \quad (3.15)$$

que equivale a dizer que qualquer matriz anti-hermitiana de traço nulo (2×2) pode ser construída a partir de e_1, e_2, e_3 , e que o comutador de qualquer uma delas pode ser escrito como uma combinação linear de outras matrizes anti-hermitianas. Ou seja, temos os requerimentos para a formação de um espaço vetorial usando o comutador (3.14) como multiplicação. Procuremos então alguma generalidade deste conceito de espaço vetorial dotado de um comutador como operação binária.

3.2.2 A Álgebra dos Geradores de um Grupo de Lie

Expandindo o elemento $R(a)$ de um grupo de Lie G em série de Taylor obtemos

$$R(a) = R(0) + \sum_{\rho} a^{\rho} X_{\rho} + \dots$$

onde $X_{\rho} = \left(\frac{\partial R(a)}{\partial a^{\rho}} \right)_{a=0}$, são chamados de geradores do grupo de Lie. Retendo termos lineares em a exploramos a vizinhança da identidade,

$$R(a) = 1 + \sum_{\rho} a^{\rho} X_{\rho} \quad (3.16)$$

para termos o elemento

$$R^{-1}(a) = 1 - \sum_{\rho} a^{\rho} X_{\rho} \quad (3.17)$$

também na vizinhança.

Supondo agora que existam dois elementos infinitesimais e cada um tenha somente um parâmetro não nulo

$$R(\alpha) = 1 + \alpha^i X_i \quad (\text{sem soma}) \quad (3.18)$$

$$R(\beta) = 1 + \beta^j X_j \quad (\text{sem soma}) \quad (3.19)$$

calculamos o comutador

$$\begin{aligned}
 [R(\alpha), R(\beta)] &= (1 + \alpha^i X_i)(1 + \beta^j X_j) - (1 + \beta^j X_j)(1 + \alpha^i X_i) \\
 &= 1 + \beta^j X_j + \alpha^i X_i + \alpha^i X_i \beta^j X_j - \{1 + \beta^j X_j + \alpha^i X_i + \beta^i X_j \alpha^j X_i\} \\
 &= \alpha^i \beta^j [X_i, X_j].
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por outro lado este comutador pode ser escrito, em segunda ordem, como

$$\begin{aligned}
 R(\alpha)R(\beta) - R(\beta)R(\alpha) &= 1 - R(\alpha)R(\beta)R^{-1}(\alpha)R^{-1}(\beta) + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2) \\
 &\simeq 1 - R(a),
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde usamos o fato de $R(\alpha)R(\beta)R^{-1}(\alpha)R^{-1}(\beta)$ também pertencer a vizinhança da identidade. Portanto de (3.20) e (3.21) obtemos

$$\begin{aligned}
 \alpha^i \beta^j [X_i, X_j] &= (1 - \sum_{\rho} a^{\rho} X_{\rho}) - 1 \\
 [X_i, X_j] &= \frac{\sum_{\rho} a^{\rho} X_{\rho}}{\alpha^i \beta^j} = \sum_{\rho} C_{ij}^{\rho} X_{\rho},
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ou seja, o comutador de dois geradores é uma combinação linear dos r geradores. C_{ij}^{ρ} é chamada de constante de estrutura do grupo de Lie. Os r geradores geram um espaço vetorial de dimensão r , $\mathcal{V}_r$. Qualquer vetor neste espaço pode ser expresso como $\sum a^{\rho} X_{\rho}$, sendo o produto de dois vetores quaisquer definido pelo seu comutador. O conjunto $\{X_{\sigma}\}$, é portanto fechado e constitui uma álgebra. De fato esta álgebra cumpri, como veremos na próxima seção, os requerimentos de uma álgebra de Lie.

Para fixarmos a relação entre os geradores X_i de um dado grupo e seus elementos $R(a)$, consideremos o exemplo de uma transformação finita construída através de sucessivas transformações infinitesimais. O grupo $\text{So}(2)$ de um parâmetro φ , ilustra perfeitamente essa situação. A rotação por um ângulo $\delta\varphi$ infinitesimal é implementada por

$$R(\delta\varphi) = 1 + \delta\varphi X_{\varphi} \quad , \quad X_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

escrevendo $\delta\varphi = \varphi/N$, onde N é um número arbitrariamente grande, temos

$$R(\delta\varphi) = 1 + \frac{\varphi}{N} X_{\varphi} \tag{3.24}$$

Aplicando $R(\delta\varphi)$ N vezes, obtemos a relação

$$\begin{aligned}
 R(\varphi) &\cong \left(1 + \frac{\varphi}{N}X_\varphi\right)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \left(\frac{\varphi}{N}X_\varphi\right)^n \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 + \varphi X_\varphi + \frac{\varphi^2}{2!}X_\varphi^2 + \frac{\varphi^3}{3!}X_\varphi^3 + \dots \\
 &= \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

ou ainda

$$R(\varphi) = e^{\varphi X_\varphi}. \tag{3.26}$$

Esta relação já encontrada antes no começo desta seção estabelece um vínculo entre as matrizes com propriedades de grupo e matrizes com propriedades de espaço vetorial, com o comutador por multiplicação.

3.2.3 Álgebra de Lie: Definição

Podemos definir a álgebra de Lie, sem fazermos nenhuma menção aos grupos de Lie, da seguinte maneira

Definição 3 *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K dos números reais ou complexos. O espaço vetorial $\mathcal{V}$ é chamado álgebra de Lie se existe uma regra de composição $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ em $\mathcal{V}$ que satisfaça os seguintes axiomas:*

1. $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ para $\alpha, \beta \in K$ (linearidade),
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ para todos $X, Y \in \mathcal{V}$ (anti-simetria),
3. $[X[Y, Z]] + [Y[Z, X]] + [Z[X, Y]] = 0$ para todos $X, Y, Z \in \mathcal{V}$.

onde a operação $[,]$ é chamada multiplicação de Lie.

3.3 Conceitos Fundamentais

Temos usado com frequência exemplos matriciais para elucidar as propriedades algébricas de nosso interesse. Não necessitamos nada mais geral, e de fato o seguinte teorema nos garante que a utilização de matrizes como representantes gerais dos elementos de uma álgebra associada a um grupo de Lie é suficiente.

Teorema 1 (Ado) *Qualquer álgebra de Lie é isomórfica a alguma álgebra matricial.*

A medida que avançamos para o entendimento do modelo álgebraico nosso interesse se concentra em álgebras de Lie mais que em grupos de Lie, apesar de alguns conceitos serem carregados naturalmente por ambas entidades matemáticas. Nesta seção revemos com exemplos matriciais, alguns destes conceitos.

3.3.1 Simplicidade e semisimplicidade

Os grupos de Lie semisimples tem uma importância especial em física, particularmente em teoria de momentum angular. A seguir explicamos este conceito e a razão de sua particular relevância. Para tal investiguemos um grupo $G = \{G_\nu\}$ com um subgrupo abeliano $A = \{A_i\}$. Se

$$G_\nu A_i G_\nu^{-1} = A_j \quad (3.27)$$

$$A_i A_j = A_j A_i \quad (3.28)$$

valem para qualquer A_j do subgrupo e G_ν do grupo, i.e., se $G_\nu A_i G_\nu^{-1}$ ainda é um elemento do subgrupo abeliano A , A é chamado de subgrupo invariante abeliano. Se (3.27) vale mas (3.28) não, então A é chamado somente de subgrupo invariante.

Definição 4 *Um grupo de Lie é chamado **simples** se não contém um subgrupo invariante; e chamado de **semisimples** se, apesar de poder ter um subgrupo invariante, não tiver um subgrupo invariante abeliano.*

O grupo E_3 , constituído de todas translações e rotações em R_3 , tem as translações como um subgrupo abeliano. Nossa intuição mostra que, figura (3.1), a combinação de operações

$$RTR^{-1} = T', \quad (3.29)$$

onde R é uma rotação e T é uma translação, é novamente uma translação T' .

Conseqüentemente o grupo de translação é um subgrupo invariante abeliano do grupo E_3 que por sua vez não é nem simples nem semisimples.

Figura 3.1: As translações: subgrupo invariante abeliano do grupo euclidiano E_3 .

Estendamos estas definições às álgebras de Lie. Tomemos os elementos A_j e A_i^{-1} pertencentes ao subgrupo invariante A de G tais que

$$A_j = G_\nu A_i G_\nu^{-1}. \quad (3.30)$$

Logo o elemento

$$A_l = A_j \cdot A_i^{-1} = G_\nu A_i G_\nu^{-1} A_i^{-1} \quad (3.31)$$

também pertence ao subgrupo A . Sendo g_k geradores de G e a_j geradores de A em termos de álgebra (como vimos na seção (1.2) esta relação, (3.31), implica em,

$$[g_i, a_k] = b_{ikl} a_l \quad (3.32)$$

Então, se podemos combinar M geradores a_l dos N geradores ($M < N$) do grupo de Lie G de forma a valer (3.32), é porque o grupo G possui um subgrupo invariante. Além disso os M geradores a_l formam uma álgebra e tal álgebra (para qual (3.32) vale) é chamada de ideal. Formalmente, denotando por $[M, N]$ o arranjo linear de todos os vetores da forma $[X, Y]$, $X \in M$, $Y \in N$, onde M e N são dois subconjuntos de vetores de uma álgebra de Lie L , definimos:

Definição 5 Um subespaço N da álgebra de Lie L é uma **subálgebra** se $[N, N] \subset N$, e um **ideal** se $[L, N] \subset N$.

Definimos então, em analogia a definição de grupos simples e semisimples:

Definição 6 Uma álgebra de Lie g é chamada **simples** se não possuir um ideal além de g e $\{0\}$, é chamada de **semisimples** se não possuir um ideal abeliano.

Exemplos

a. Consideremos os geradores do grupo de rotações

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_3, J_1] = iJ_2, \quad [J_2, J_3] = iJ_1 \quad (3.33)$$

como não existe uma subálgebra destes geradores que satisfaçam (3.32) a não ser a própria álgebra inteira, a álgebra de momentum angular não possui ideal, de fato ela é simples.

b. A álgebra e_3 , constituída dos elementos $\{P_\nu, J_\mu, \mu, \nu = x, y, z\}$ e definida por

$$\begin{aligned} [P_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k \\ [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, \end{aligned} \quad (3.34)$$

tem os geradores do grupo de translações $P_\nu = -i\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ como subálgebra abeliana, pois $[P_\nu, P_\mu] = 0$. Estas relações de comutação (3.34) são do tipo (3.32), portanto a álgebra de $\{P_\nu\}$ é um ideal abeliano dentro de e_3 e portanto a álgebra de E_3 não é nem simples nem semisimples.

c. Protótipos de grupos semisimples são os produtos diretos² de grupos simples. Em acoplamento de momentum angular encontramos frequentemente o grupo semisimples $SO(3) \times SO(3)$. Os elementos deste grupo tem a forma

$$e^{-i\phi \cdot \mathbf{J}^1} \cdot e^{-i\varphi \cdot \mathbf{J}^2}, \quad (3.35)$$

onde $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ são parâmetros independentes. Os geradores $\mathbf{J}^{1,2} = \{J_1^{1,2}, J_2^{1,2}, J_3^{1,2}\}$ (separadamente 1 e 2) constituem as álgebras

$$[J_i^{1,2}, J_j^{1,2}] = i\epsilon_{ijk}J_k^{1,2}, \quad (3.36)$$

além de comutarem entre si

$$[J_i^1, J_j^2] = 0 \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.37)$$

Reconhecemos que os geradores $\{J_1^1, J_2^1, J_3^1\}$ bem como os geradores $\{J_1^2, J_2^2, J_3^2\}$ constituem —cada conjunto por si próprio— um ideal não abeliano da álgebra

²Na próxima seção formalizaremos esta operação, por instante lembremos apenas que as álgebras semisimples são composições de álgebras simples.

de Lie gerada por $\{J_1^{1,2}, J_2^{1,2}, J_3^{1,2}\}$. Portanto a álgebra (e o grupo) é semisimples, pois de fato existe um ideal (um subgrupo invariante) não abeliano. Esta é uma propriedade típica dos grupos semisimples, eles são confeccionados pelo produto direto de grupos simples. Esta propriedade vale para todos grupos semisimples.

3.3.2 Soma Direta e Semidireta

A noção de decomposição de uma álgebra de Lie é bastante interessante e leva a uma surpreendente classificação de simetrias possíveis. Ao longo desta seção reforçamos este comentário com os conceitos de soma de álgebras.

Seja V_i ($i = 1, 2, \dots, k$), subespaços de um espaço vetorial V e seja

$$D = \sum_{i=1}^k V_i. \quad (3.38)$$

Consideremos a coleção de todos vetores da forma

$$d = \sum v_i, \quad v_i \in V_i. \quad (3.39)$$

Se cada vetor $d \in D$ tiver uma única representação na forma (3.39), dizemos que D é a soma direta dos subespaços V_i e denotada por

$$D = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_k = \sum \dot{+} V_i. \quad (3.40)$$

Agora, se uma álgebra de Lie, como espaço vetorial, pode ser escrita na forma (3.40), i.e., $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_k$, e ainda valer as relações

$$[L_i, L_i] \subset L_i, \quad [L_i, L_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.41)$$

dizemos então que tal álgebra de Lie é decomposta em uma **soma direta** de subálgebras de Lie denotada por

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k. \quad (3.42)$$

Notemos que as álgebras L_i constituem ideais de L , de fato

$$[L, L_i] = [L_i, L_i] \subset L_i \quad (3.43)$$

além de que se N é ideal de L_i , então N é também ideal de L .

Uma álgebra de Lie é **soma semidireta** das subálgebra T e M se, como espaço vetorial tivermos $L = T \dot{+} M$, e valerem as seguintes relações

$$[T, T] \subset T, \quad [M, M] \subset M, \quad [M, T] \subset T, \quad (3.44)$$

denotamos fato por $L = T \uplus M$, escrevendo o ideal T primeiro. Ao longo desta seção encontraremos exemplos de ambos conceitos.

3.3.3 Solubilidade e Nilpotência

O seguinte teorema (devido a Dynkin) nos coloca numa fácil posição de estudarmos alguns exemplos que esclareçam estes conceitos. Denotemos então por $T^{(m)}$ o espaço vetorial de todas matrizes $(m \times m)$ triangulares superiores e por $S^{(m)}$ o espaço vetorial de todas matrizes $(m \times m)$ triangulares superiores com elementos diagonais iguais. Denotemos ainda por $S^{(m_1, m_2, \dots, m_k)}$ o conjunto de todas transformações lineares A agindo no espaço

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \dots \dot{+} V_k \quad (3.45)$$

de maneira tal que

- i) $A \in S^{(m_1, m_2, \dots, m_k)}$ deixe os subespaços V_i invariantes.
- ii) Em cada subespaço V_i com base $\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_{m_i}^i$, $A \in V_i$ tenha a forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & a_{ij} \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Com estas definições estabelecemos o seguinte teorema

Teorema 2 *Uma álgebra de Lie **solúvel** arbitrária é isomórfica a uma subálgebra de alguma álgebra de Lie $T^{(m)}$. Uma álgebra de Lie **nilpotente** é isomórfica a uma subálgebra de alguma álgebra de Lie $S^{(m_1, m_2, \dots, m_k)}$.*

Consideremos então, a título de exemplo, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & e_1 & f_1 & g_1 \\ 0 & 0 & h_1 & i_1 \\ 0 & 0 & 0 & j_1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & e_2 & f_2 & g_2 \\ 0 & 0 & h_2 & i_2 \\ 0 & 0 & 0 & j_2 \end{pmatrix}$$

temos

$$AA' = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1e_2 & a_1c_2 + b_1f_2 + c_1h_2 & a_1d_2 + b_1g_2 + c_1i_2 + d_1j_2 \\ 0 & e_1e_2 & e_1f_2 + f_1h_2 & e_1g_2 + f_1i_2 + g_1j_2 \\ 0 & 0 & h_1h_2 & h_1i_2 + i_1j_2 \\ 0 & 0 & 0 & j_1j_2 \end{pmatrix}$$

$$A'A = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_2b_1 + b_2e_1 & a_2c_1 + b_2f_1 + c_2h_1 & a_2d_1 + b_2g_1 + c_2i_1 + d_2j_1 \\ 0 & e_1e_2 & e_2f_1 + f_2h_1 & e_2g_1 + f_2i_1 + g_2j_1 \\ 0 & 0 & h_1h_2 & h_2i_1 + i_2j_1 \\ 0 & 0 & 0 & j_1j_2 \end{pmatrix}$$

logo o comutador de duas matrizes do tipo A é uma matriz do tipo B

$$[A, A'] = B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & e & d \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo B' e B'' matrizes da forma de B

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B'' = \begin{pmatrix} 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & d_4 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos

$$B''B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_4d_3 & a_4f_3 + b_4g_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B'B'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3d_4 & a_3f_4 + b_3g_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_3g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[B'', B'] = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_4d_3 - a_3d_4 & a_4f_3 + b_4g_3 - a_3f_4 - b_3g_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4g_3 - d_3g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo C' e C'' matrizes da forma de C

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$[C', C''] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dizemos tendo em vista a propriedade acima, que as matrizes da forma de A são solúveis. Formalmente, se N é um ideal de uma álgebra de Lie L , então $[N, N]$ é também um ideal, de fato

$$[L, [N, N]] \subset [N, [N, L]] + [N, [L, N]] \subset [N, N] \quad (3.47)$$

em particular L é um ideal de L , e portanto $[L, L]$ é ainda um ideal de L , e logo pode acontecer que a sequência de ideais

$$L^{(0)} = L; \quad L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(0)}], \quad \dots, \quad L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}], \quad (3.48)$$

termine em 0, i.e., $L^{(n)} = 0$ para algum n . Definimos então

Definição 7 Uma álgebra de Lie é chamada **solúvel** se para algum n inteiro positivo $L^{(n)} = 0$.

Como exemplo, consideremos a álgebra (e_2) dos geradores do grupo Euclideo (E_3) em duas dimensões: $\{P_x, P_y, L_z\}$. Calculemos, sendo

$$A = \alpha_1 P_x + \alpha_2 P_y + \alpha_3 L_z \quad (3.49)$$

$$B = \beta_1 P_x + \beta_2 P_y + \beta_3 L_z \quad (3.50)$$

o comutador

$$\begin{aligned} [A, B] &= \alpha_3 \beta_1 [L_z, P_x] + \alpha_3 \beta_2 [L_z, P_y] - \alpha_2 \beta_3 [L_z, P_y] - \alpha \beta [L_z, P_x] \\ &= f(P_x, P_y). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Como a álgebra de $\{P\}$ é comutativa, $L^{(2)} = 0$. Portanto e_2 é solúvel.

Observemos agora o comportamento das matrizes triangulares superiores de diagonal idêntica na sequência de operações seguintes. Tomemos exemplares A e A' destas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & a_1 & h_1 & f_1 \\ 0 & 0 & a_1 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & a_2 & h & f_2 \\ 0 & 0 & a_2 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$AA' = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2 & a_1c_2 + b_1h + c_1a_2 & a_1d_2 + b_1f_2 + c_1g_2 + d_1a_2 \\ 0 & a_1a_2 & a_1h + h_1a_2 & a_1f_2 + h_1g_2 + f_1a_2 \\ 0 & 0 & a_1a_2 & a_1g_2 + g_1a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1a_2 \end{pmatrix}$$

$$A'A = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2 & c_1a_2 + b_2h_1 + a_1c_2 & d_1a_2 + b_2f_1 + c_2g_1 + a_1d_2 \\ 0 & a_1a_2 & a_1h + h_1a_2 & f_1a_2 + hg_1 + a_1f_2 \\ 0 & 0 & a_1a_2 & a_1g_2 + g_1a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1a_2 \end{pmatrix}$$

$$[A, A'] = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1h - b_2h_1 & b_1f_2 + c_1g_2 - b_2f_1 - c_2g_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_1g_2 - hg_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calculando o comutador de uma matriz do tipo A com uma do tipo B obtemos

$$A''B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3(b_1h - b_2h_1) & a_3b_1f_2 + a_3c_1g_2 - a_3b_2f_1 - a_3c_2g_1 + b_3h_1g_2 - b_3hg_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3(h_1g_2 - hg_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3(b_1h - b_2h_1) & g_3b_1h - g_3b_2h_1 + a_3b_1f_2 + a_3c_1g_2 - a_3b_2f_1 - a_3c_2g_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3(h_1g_2 - hg_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A'', B] = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_3 h_1 g_2 - b_3 h g_1 - g_3 b_1 h + g_3 b_2 h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finalmente, o comutador de uma matriz do tipo A com uma do tipo C se anula, de fato

$$CA'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & za_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A''C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & za_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que matrizes do tipo A são nilpotentes. Notemos que tais matrizes são também solúveis, de fato, toda álgebra de Lie nilpotente é também solúvel, mas nem toda álgebra de Lie solúvel é nilpotente. A propriedade acima de tais matrizes é expressa, formalmente, na seguinte definição.

Definição 8 *Uma álgebra de Lie é chamada nilpotente se na sequência de ideais*

$$L_{(0)} = L, \quad L_{(1)} = [L_{(0)}, L], \quad \dots, \quad L_{(n)} = [L_{(n-1)}, L] \quad (3.52)$$

para algum n inteiro positivo, $L_{(n)} = 0$.

Percebemos portanto através destes conceitos que a classe das álgebras solúveis complementa em algum sentido a classe das semisimples, de fato toda álgebra de Lie solúvel contém um ideal abeliano (comutativo) enquanto por outro lado uma álgebra de Lie semisimples não o possui.

Chegamos ao ponto de anunciar um resultado importante para a classificação das álgebras de Lie. E veremos que a estrutura das álgebras de Lie é passiva de análise, que facilita o trabalho da procura por uma determinada simetria.

Teorema 3 (Levi-Malcev) *Seja L uma álgebra de Lie **arbitrária** com um ideal **solúvel** maximal (radical) N . Então existe uma subálgebra **semisimples** S de L tal que vale (a menos de um automorfismo de L) a decomposição única.*

Figura 3.2: Os possíveis tipos de álgebras de Lie.

$$L = N \uplus S. \quad (3.53)$$

o teorema (3) implica em

$$[N, N] \subset N \quad [S, S] \subset S \quad [N, S] \subset N$$

i.e. qualquer álgebra de Lie L é uma soma semidireta $N \uplus S$ de um ideal solúvel maximal N e uma subálgebra semisimples de L , S . Novamente um exemplo vem dos geradores $\{p, R\}$ (onde $\{p\}$ são geradores das translações e R são geradores das rotações) do grupo euclidiano E_3 , que satisfazem as relações

$$[p, p] \subset p \quad [R, R] \subset R \quad [p, R] \subset p, \quad (3.54)$$

e portanto temos a decomposição

$$E_3 = T \uplus R. \quad (3.55)$$

Finalizamos esta seção apresentando as ocorrências possíveis das álgebras de Lie e sua classificação de acordo com os conceitos e resultados obtidos, figura 2.

3.4 Raízes e a Base de Cartan-Weyl

As constantes de estrutura de uma álgebra semisimples fornece toda informação para sua completa classificação. Buscaremos nesta seção estabelecer uma forma

comum de escrever as relações de comutação das álgebras semisimples. Para tal consideremos antes como exemplo o oscilador harmônico unidimensional

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) \quad \text{com} \quad [P, Q] = i. \quad (3.56)$$

Se agruparmos tanto P e Q na mesma quantidade Z tal que

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

obtemos o comutador

$$[Z_i, Z_j] = i g_{ij} \quad \text{com} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

As transformações do espaço de fase (Z_1, Z_2) que preserva a “métrica” g_{ij} são chamadas de simpléticas. Voltaremos a este ponto no próximo capítulo.

Ao invés de coordenadas e momenta podemos introduzir operadores de criação e destruição

$$b^+ = \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}}, \quad \text{com} \quad [b, b^+] = 1 \quad (3.59)$$

e construir os operadores quadráticos

$$B^+ = b^+ b^+ \quad B = b b \quad C = b^+ b + \frac{1}{2}. \quad (3.60)$$

Os operadores acima formam a álgebra $sp(2, R)$, dada por

$$[B, B^+] = 4C, \quad [C, B^+] = +B, \quad [C, B] = -B. \quad (3.61)$$

A seguinte mudança de notação

$$B^+ \rightarrow E_{+1} \quad B \rightarrow E_{-1} \quad C \rightarrow H_1 \quad (3.62)$$

leva as relações de comutação de tal álgebra para a forma

$$[E_{+1}, E_{-1}] = -4H_1 \quad (3.63)$$

$$[H_1, E_{\pm}] = \pm E_{\pm} \quad (3.64)$$

Esta é a forma³ “standard” dos comutadores de uma álgebra de Lie semisimples, i.e., operadores de levantamento, de abaixamento e diagonal. Veremos a seguir

³A menos de uma normalização adequada dos elementos.

que de fato todas álgebras de Lie **semisimples** podem ser colocadas nesta forma e classificadas de acordo com ela.

Consideremos então a equação

$$[A, X] = \rho X, \quad (3.65)$$

onde A e X são combinações lineares arbitrárias dos elementos de uma álgebra de Lie ⁴

$$A = a^\mu X_\mu$$

$$X = x^\nu X_\nu.$$

Equação 3.65 pode ser expandida

$$\begin{aligned} [a^\mu X_\mu, x^\nu X_\nu] &= \rho x^\nu X_\nu \\ a^\mu x^\nu C_{\mu\nu}^\sigma X_\sigma &= \rho x^\nu X_\nu \\ a^\mu x^\nu C_{\mu\nu}^\sigma X_\sigma &= \rho x^\nu \delta_\sigma^\nu X_\sigma \\ (a^\mu C_{\mu\nu}^\sigma - \rho \delta_\sigma^\nu) x^\nu &= 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Esta equação tem a forma de uma equação de autovalor para a matriz $M_\nu^\sigma = a^\mu C_{\mu\nu}^\sigma$, onde devemos esperar degenerescências. O fato mais relevante⁵ aqui é que, podemos escolher A de forma que o número de soluções distintas de (3.65) seja máximo e que somente o autovalor $\rho = 0$ seja degenerado. Esta degenerescência é chamada de rank da álgebra. Denotando de H_i os elementos associados às raízes nulas da equação (3.66), a equação (3.65) fica

$$[A, H_i] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (3.67)$$

Notemos que multiplicando (3.67) por λ^i e somando temos

$$\lambda^i [A, H_i] = 0 = [A, \lambda^i H_i] = 0. \quad (3.68)$$

Agora, o único jeito de escrever $[A, A] = 0$ é reconhecendo que

$$A = \lambda^i H_i. \quad (3.69)$$

⁴Usaremos daqui em diante a convenção de somar índices repetidos salvo explicitamente divulgado.

⁵Este resultado é devido a Cartan

A equação (3.65) para os elementos não associados com soluções nulas, fica

$$[A, E_\alpha] = \alpha E_\alpha \quad (3.70)$$

Esta separação dos elementos se mostrará útil na sequência de propriedades que passamos a comentar. Primeiro os operadores H_i formam uma subálgebra. Para verificar isto percebemos da identidade de Jacobi

$$[A, [H_\alpha, H_\beta]] + [H_\alpha, [H_\beta, A]] + [H_\beta, [A, H_\alpha]] = 0 \quad (3.71)$$

$$[A, [H_\alpha, H_\beta]] = 0 \quad (3.72)$$

que o comutador de H_α com H_β deve ser uma combinação linear de H_i , do contrário não comutaria com A .

$$[H_\alpha, H_\beta] = C_{\alpha\beta}^\tau H_\tau. \quad (3.73)$$

Mais impressionante, esta subálgebra é abeliana, i.e. $C_{\alpha\beta}^\tau \equiv 0$. A comutatividade de H_i é garantida pela nossa escolha de A como a combinação linear que forneça o número maior de soluções não nulas de (3.65). De fato, suponhamos que (3.73) é verdade com $C_{\alpha\beta}^\tau \neq 0$ para algum α e β , façamos as combinações lineares

$$\mathcal{A} = \alpha^i H_i \quad \text{e} \quad \overline{X} = \beta^j H_j \quad (3.74)$$

Acrescentamos em A de (3.69) uma quantidade

$$A' = A + \varepsilon \mathcal{A}, \quad (3.75)$$

tão pequena que os autovalores não nulos de (3.65) não se altere efetivamente, i.e., continuem diferentes⁶ de 0

$$[A', X] = (\rho + \varepsilon \rho') X \quad \text{com } (\rho + \varepsilon \rho') \neq 0. \quad (3.76)$$

Como os H_i formam uma álgebra deve existir pelo menos um s não nulo tal que

$$[\mathcal{A}, \overline{X}] = s \overline{X}. \quad (3.77)$$

Obtemos então

$$[A', \overline{X}] = [A, \overline{X}] + \varepsilon [\mathcal{A}, \overline{X}] \quad (3.78)$$

$$= \varepsilon s \overline{X} \quad (3.79)$$

⁶Notemos que A' continua sendo uma combinação de H_i , logo $[A', X] \sim X$.

ou seja, encontramos um A' que fornece mais raízes distintas que A , contrariando as premissas do teorema de Cartan.

Portanto os H_i são elementos da álgebra que comutam entre si e geram uma subálgebra abeliana denominada subálgebra de Cartan. Estudemos agora as relações de comutação dos dois tipos de geradores, H_i e E_α .

Considerando o comutador

$$\begin{aligned} [A, [H_i, E_\alpha]] &= [A, H_i E_\alpha] - [A, E_\alpha H_i] \\ &= [A, H_i] E_\alpha + H_i [A, E_\alpha] - [A, E_\alpha] H_i - E_\alpha [A, H_i] \\ &= \alpha H_i E_\alpha - \alpha E_\alpha H_i = \alpha [H_i, E_\alpha] \end{aligned} \quad (3.80)$$

concluimos que, se E_α é autovetor associado com o autovalor α existem l autovetores $[H_i, E_\alpha]$ com o mesmo autovalor α . Porém somente $\rho = 0$ é degenerado, então H_i deve ser proporcional a E_α , escrevemos

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha = \alpha_i \delta_\alpha^\tau E_\tau. \quad (3.81)$$

E como

$$[H_i, E_\alpha] = c_{i\alpha}^\tau E_\tau, \quad (3.82)$$

relacionamos as constantes de estrutura com os α_i

$$c_{i\alpha}^\tau = \alpha_i \delta_\alpha^\tau. \quad (3.83)$$

Finalmente de (3.67) e (3.70) concluimos que

$$[A, E_\alpha] = [\lambda^i H_i, E_\alpha] = \lambda^i \alpha_i E_\alpha = \alpha E_\alpha \Rightarrow \alpha = \lambda^i \alpha_i.$$

Reconhecemos α_i como componentes de um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ num espaço l -dimensional. O vetor α é chamado raiz, associada ao elemento E_α da álgebra.

Vejamos agora as propriedades do comutador de dois elementos de fora da subálgebra de Cartan. Para isso usamos a identidade de Jacobi

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, A]] + [E_\beta, [A, E_\alpha]] = 0 \quad (3.84)$$

que fornece

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha + \beta)[E_\alpha, E_\beta]. \quad (3.85)$$

Usando em (3.85) a relação

$$[E_\alpha, E_\beta] = c_{\alpha\beta}^\tau E_\tau \quad (3.86)$$

obtemos, considerando que $\alpha + \beta$ seja também raiz

$$\begin{aligned} [A, c_{\alpha\beta}^\tau E_\tau] &= (\alpha + \beta) c_{\alpha\beta}^\tau E_\tau \\ [A, E_\tau] &= (\alpha + \beta) E_\tau \Rightarrow (\alpha + \beta) = \tau \end{aligned} \quad (3.87)$$

Se caso $\alpha + \beta$ não for raiz, a única solução de (3.85) é

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_\beta] &= c_{\alpha\beta}^\tau E_{\alpha+\beta} \quad \text{se } \alpha + \beta \text{ for raiz} \\ [E_\alpha, E_\beta] &= 0 \quad \text{se } \alpha + \beta \text{ não for raiz.} \end{aligned}$$

Notemos que se $\alpha + \beta = 0$, equação (3.85) se anula

$$[A, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] = 0 \quad (3.88)$$

Porém a equação (3.67) sugere que $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ seja uma combinação linear de H_i

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = c_{\alpha-\alpha}^i H_i \quad (3.89)$$

Escolhida uma normalização adequada de E_α , pode-se colocar (3.89) na forma

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = a_i E_i. \quad (3.90)$$

Em resumo, as propriedades da estrutura de uma álgebra de Lie semisimples ficam sintetizadas na forma de Cartan-Weyl,

$$\begin{aligned}
[H_i, H_k] &= 0 \\
[H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha \\
[E_\alpha, E_\beta] &= \begin{cases} c_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha + \beta \neq 0 \text{ e se } \alpha + \beta \text{ for raiz} \\ 0 & \text{se } \alpha + \beta \text{ não for raiz} \end{cases} \\
[E_\alpha, E_{-\alpha}] &= a_i H_i.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

3.4.1 Diagrama de raízes

Veremos no decorrer deste capítulo que esta maneira (3.91) de separar os geradores de uma álgebra de Lie lança mão de propriedades fantásticas das raízes que limitam as possíveis estruturas com que as simetrias existentes podem se manifestar. Afim de enunciar tais propriedades definimos

Definição 9 Uma raiz é dita **positiva** se a primeira componente não nula for positiva e dita **simples** se não for uma combinação de duas raízes positivas.

Um resultado muito importante do comportamento do conjunto de raízes é estabelecido pelos seguintes

Teorema 4 Se α e β são raízes então $n = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ é inteiro e $\beta - n\alpha$ é raiz..

Teorema 5 Se α e β são raízes simples então $\theta_{\alpha\beta}$ pode somente ser igual a 90, 120, 135, ou 150.

E se $|\alpha| < |\beta|$ temos a seguinte tabela

$\theta_{\alpha\beta}$	$\cos\theta_{\alpha\beta}$	$\frac{ \beta ^2}{ \alpha ^2}$	família	Dynkin	$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$
120	$-1/2$	1	A_2		-1
135	$-\sqrt{2}/2$	2	$B_2(C_2)$		-2
150	$-\sqrt{3}/2$	3	G_2		-3
90	0		D_2		

(3.92)

onde como, Dynkin, associamos as raízes simples α e β com círculos ligados por uma duas ou três linhas para $\theta_{\alpha\beta}$ igual a 120, 135, 150, respectivamente. Ou as

deixamos desligadas se $\theta_{\alpha\beta} = 0$. Círculos correspondentes as raízes longas são vazios. Estes **ângulos e módulos relativos** entre as raízes estipula em nove o número de famílias algébricas semisimples existentes, quatro que são extensões direta dos protótipos A_n, B_n, C_n, D_n da tabela (3.92) mais somente cinco excepcionais G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 . No capítulo 3 trabalharemos um exemplo completo da família C , a álgebra simplética $sp(6)$.

Toda informação da álgebra, que é resumida completamente pelas raízes simples, pode ser armazenada na matriz

$$A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (3.93)$$

chamada de matriz de Cartan. Esta matriz se mostrará útil adiante quando introduzirmos o conceito de vetor peso e suas propriedades.

3.5 Representação

Quando temos uma prescrição de como um determinado operador “age” num vetor de estado podemos imediatamente construir matrizes que *representam* este operador num subespaço de dimensão finita. Lembremos que com a prescrição

$$\begin{aligned} J_z |k, j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |k, j, m\rangle \\ J_{\pm} |k, j, m\rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |k, j, m \pm 1\rangle \end{aligned}$$

obtemos os elementos de matriz, usando a ortonormalidade da base $|k, j, m\rangle$, abaixo

$$\begin{aligned} \langle k, j, m | J_z | k, j, m \rangle &= m\hbar \delta_{k,k'} \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \\ \langle k, j, m | J_{\pm} | k, j, m \rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \delta_{k,k'} \delta_{j,j'} \delta_{m,m' \pm 1} \end{aligned}$$

A dimensão de cada subespaço $\Omega(k, j)$ é determinada por j e o espaço de estado Ω é determinado pela soma de todos possíveis $\Omega(k, j)$. Portanto a matriz que *representa* as componentes de $\mathbf{J}$ (ou qualquer função analítica de $\mathbf{J}$) em Ω é da

forma bloco diagonal

$$\begin{pmatrix} J_\mu^{(1/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_\mu^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_\mu^{(3/2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

onde as submatrizes $J_\mu^{(j)}$ são de dimensão $2j+1$. Dizemos que o subespaço $\Omega(k, j)$ é *irredutível* com respeito a $\mathbf{J}$: não existe subespaço de $\Omega(k, j)$ outro além do próprio $\Omega(k, j)$ que seja globalmente invariante sobre a ação das varias componentes de $\mathbf{J}$. Em paralelo dizemos que as matrizes que representam as componentes de $\mathbf{J}$ dentro do subespaço $\Omega(k, j)$ constituem uma *representação irredutível* de dimensão $2j+1$ da álgebra de momentum angular. Todas estas matrizes, independentemente da dimensão satisfazem as regras de comutação da álgebra $so(3)$. Notemos aqui que as representações irredutíveis desta álgebra estão associadas unicamente como auto valor máximo ($m=j$) do operador diagonal da álgebra $so(3)$. Formalmente definimos

Definição 10 Uma representação de um grupo G sobre um espaço vetorial L é um homomorfismo φ de G sobre o grupo $D(G)$ das transformações em L .

Ou seja, os elementos de $D(G)$ atuam como operadores lineares num espaço L . Aqui estaremos somente interessados em representações onde $D(G)$ são matrizes $n \times n$, ou seja representações matriciais. Uma representação é dita totalmente redutível se através de uma operação de similaridade (mudança de base), **todas** matrizes da representação podem ser colocadas na forma bloco diagonal:

$$D(R) = \begin{pmatrix} (D^{(1)}(R)) & 0 & 0 \\ & \begin{pmatrix} D^{(2)}(R) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

O problema de encontrar uma representação de um grupo de Lie pode ser reduzido ao problema de encontrar uma representação da álgebra de Lie, i.e., encontrar r

matrizes $D(X_\rho)$ para os r geradores X_ρ de forma que elas obedeçam a relação:

$$[D(X_\rho), D(X_\sigma)] = \sum_{\tau} C_{\rho\sigma}^{\tau} D(X_\tau) \quad (3.96)$$

Na próxima seção veremos que a idéia de associar uma representação irredutível ao autovalor máximo do gerador diagonal como fizemos para $\mathfrak{so}(3)$ é generalizável para álgebras de rank maior.

3.6 Pesos

Como as l matrizes H_i da subálgebra de Cartan são comutantes, podemos construir um conjunto de autovetores simultâneos das l matrizes no espaço de representação R_ρ , análogo a um dos $\Omega(k, j)$ da seção anterior.

Suponha que $|u\rangle$ seja um destes autoestados, escrevemos, para cada gerador da subálgebra

$$H_i |u\rangle = \Lambda_i |u\rangle \quad (3.97)$$

onde Λ_i são as componentes de um vetor Λ num espaço l -dimensional, ou seja, construímos o vetor

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_l) \quad (3.98)$$

e definimos Λ como o peso (ou vetor peso) do estado $|u\rangle$.

Uma propriedade importante dos pesos é estabelecida pelo seguinte teorema

Teorema 6 *Se $|u_\Lambda\rangle$ é vetor de peso Λ então $E_\beta |u_\Lambda\rangle$, onde β é uma raiz, é de peso $\Lambda + \beta$*

De fato

$$\begin{aligned} H_i E_\beta |u_\Lambda\rangle &= ([H_i, E_\beta] + E_\beta H_i) |u_\Lambda\rangle \\ &= (\beta_i E_\beta + \Lambda_i E_\beta) |u_\Lambda\rangle = (\Lambda_i + \beta_i) E_\beta |u_\Lambda\rangle. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Percebemos aqui que existe uma correlação algébrica entre pesos e raízes. raízes, como vimos estão intimamente relacionadas aos geradores não diagonais i.e. pertencentes a subálgebra de Cartan, via relações de comutação. raízes são independentes da representação. Os pesos estão associados a geradores diagonais via

vetores de estado, seu significado depende da representação em questão. Os conceitos de raízes e pesos se completam para a descrição de toda ação da simetria no espaço de representação.

Notemos ainda que o espaço vetorial R_φ pode ser decomposto da seguinte forma

$$R_\varphi = \sum_{\Lambda \in \Delta_\varphi} R_\varphi^\Lambda = R_\varphi^{\Lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_\varphi^{\Lambda_i} \oplus \cdots \oplus R_\varphi^{\Lambda_l} \quad (3.100)$$

onde Δ_φ é o conjunto de todos os vetores de peso, e a i -ésima parcela define $R_\varphi^{\Lambda_i}$ como subespaço de R_φ gerado por todos estados de peso Λ^i , $|u_{\Lambda^i}| > 0$.

Definição 11 Um peso é dito **positivo** se sua primeira componente não nula for positiva. Um peso Λ é dito **maior** que outro Λ^* se $\Lambda - \Lambda^*$ for positivo.

Temos, para os pesos um resultado análogo ao Teorema 1,

Teorema 7 Seja Λ um peso de uma irrep e α uma raiz, então $n = \frac{2(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ é inteiro e $\Lambda - n\alpha$ é peso.

A base de nosso interesse em pesos e que será de central importância nas próximas seções é estabelecida pelo

Teorema 8 Se uma rep é irredutível, seu peso maior, $\Lambda_{\text{máx}}$, é não degenerado.

Ou seja, podemos usar o peso maior $\Lambda_{\text{máx}}$ para identificar uma irrep. Podemos mais, podemos construir todo o conjunto de pesos a partir de $\Lambda_{\text{máx}}$. Nos dedicaremos a esta tarefa na próxima seção, onde estabelecemos um algoritmo prático e o aplicamos a irrep dos Códons.

3.7 O Diagrama de Pesos

3.7.1 As Bases de Cartan-Weyl [CW] e Dynkin (DYN)

A forma de se escrever as raízes (e os pesos) de uma álgebra de Lie possui uma certa liberdade. O sistema [CW] é o sistema natural em que as relações de comutação se apresenta. Porém afim de construir o conjunto completo de pesos

para uma dada irrep é conveniente, baseando-nos no teorema (7), definirmos, para cada raiz ou peso $\mathbf{v}$ um conjunto de números

$$v_i^{DYN} = \frac{2(\alpha_i, \mathbf{v})}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (3.101)$$

onde o vetor α_i são as l raízes simples, $\alpha_i \in \Pi$, e definimos também o vetor

$$\mathbf{v}^{DYN} = (v_1^{DYN}, \dots, v_l^{DYN}) \quad (3.102)$$

Este é o vetor $\mathbf{v}$ (peso ou raiz) escrito à maneira de Dynkin” (DYN).

Notemos que o produto escalar em (3.101) pode ser feito em qualquer base, desde que se use uma métrica adequada. A referência [4], fornece meios de se efetuar este produto mesmo em sistemas diferentes para α_i e $\mathbf{v}$. Trataremos aqui de encontrar a matriz que efetua a mudança de base do sistema [CW] para o (DYN) e veremos que essa matriz corresponde a uma regra mnemônica bastante simples que usaremos com frequência.

Tomemos primeiro um exemplo, como veremos no próximo capítulo das regras de comutação de $\mathfrak{sp}(6)$ fornecem as raízes simples são, na forma [CW]

$$\alpha_1 = [1, -1, 0] \quad \alpha_2 = [0, 1, -1] \quad \alpha_3 = [0, 0, 2], \quad (3.103)$$

onde as componentes são relativas à um sistema ortogonal

$$2\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (3.104)$$

Usando a equação (3.101) obtemos as raízes simples de $\mathfrak{sp}(6)$ na forma DYN:

$$\bar{\alpha}_1 = (2, -1, 0), \quad \bar{\alpha}_2 = (-1, 2, -1), \quad \bar{\alpha}_3 = (0, -2, 2). \quad (3.105)$$

Vejamos agora como fica a matriz da mudança de base. Seja $\mathbf{v}$ um vetor arbitrário, peso ou raiz, escrito em [CW], i.e.

$$\mathbf{v}^{CW} = v_1^{CW} \mathbf{e}_1 + v_2^{CW} \mathbf{e}_2 + v_3^{CW} \mathbf{e}_3 \quad (3.106)$$

as raízes simples escritas em [CW] são, esquecendo por instante (3.103), da forma

$$\alpha_1 = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3 \quad (3.107)$$

$$\alpha_2 = D\mathbf{e}_1 + E\mathbf{e}_2 + F\mathbf{e}_3$$

$$\alpha_3 = G\mathbf{e}_1 + H\mathbf{e}_2 + I\mathbf{e}_3.$$

Temos condições de realizar o produto escalar de (3.101) no mesmo sistema (3.104), obtemos

$$v_1^{DYN} = \frac{2(\alpha_1, v^{CW})}{(\alpha_1, \alpha_1)} = Av_1^{CW} + Bv_2^{CW} + Cv_3^{CW} \quad (3.108)$$

$$v_2^{DYN} = \frac{2(\alpha_2, v^{CW})}{(\alpha_2, \alpha_2)} = Dv_1^{CW} + Ev_2^{CW} + Fv_3^{CW} \quad (3.109)$$

$$v_3^{DYN} = \frac{2(\alpha_3, v^{CW})}{(\alpha_3, \alpha_3)} = \frac{G}{2}v_1^{CW} + \frac{H}{2}v_2^{CW} + \frac{I}{2}v_3^{CW} \quad (3.110)$$

O fator $\frac{1}{2}$ aparece porque α_3 é a raiz longa. Escrevemos então

$$(v)^{DYN} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ \frac{G}{2} & \frac{H}{2} & \frac{I}{2} \end{pmatrix} [v]^{CW} = W[v]^{CW} \quad (3.111)$$

$$(v)^{DYN} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [v]^{CW}, \quad (3.112)$$

e a matriz que procuramos é portanto da forma

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

Esse procedimento equivale a seguinte regra para a mudança de base que desejamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{DYN} = \begin{bmatrix} a + b + c \\ b + c \\ c \end{bmatrix}^{CW} \quad (3.114)$$

Notemos que poderíamos encontrar tal matriz para qualquer álgebra de Lie, tendo em mãos somente as raízes simples.

Daqui em diante suprimimos o sobrescrito CW ou DYN e a responsabilidade da distinção fica a cargo do formato do parêntesis, [...] ou (...). A notação (DYN) é particularmente útil na elaboração do seguinte algoritmo para a construção do diagrama de pesos a partir do peso máximo da referida irrep.

3.7.2 Algoritmo Prático

Nesta seção estabelecemos, baseado em [4], um algoritmo para a obtenção do conjunto completo de pesos de uma álgebra de Lie e exemplificamos sua utilização numa representação particular de nosso interesse.

1. Construa a matriz de Cartan A e escreva as l raízes simples da álgebra na forma de Dynkin". (As colunas de A fornecem as raízes simples na forma DYN)
2. Começando pelo peso máximo $\Lambda = (a_1, a_2, \dots, a_l)$ para cada $a_i > 0$, temos a sequência de pesos

$$\lambda^1 (= \Lambda), \lambda^2, \dots, \lambda^{a_i+1}, \quad \lambda^n = \Lambda - (n-1)\alpha_i \quad (3.115)$$

3. Para cada peso da sequência encontrada acima $\lambda^m = (m_1, m_2, \dots, m_l)$, se $m_k > 0$, temos a sequência de pesos

$$\lambda^m, \lambda^m - \alpha_k, \dots, \lambda^m - m_k \alpha_k \quad (3.116)$$

4. Continue

A melhor maneira de explicar esse algoritmo é fazer um exemplo. A irrep que estaremos interessados em breve é a de peso máximo $(1,1,0)$, escrito na forma de Dynkin como é de praxe, da álgebra simplética $\mathfrak{sp}(6)$. Essa irrep é de dimensão 64, ou seja todos os pesos que encontrarmos multiplicados pela sua multiplicidade devem somar 64.

Começamos com o peso maior $(1, 1, 0)$ e primeiramente subtraímos α_1 e α_2 uma vez como manda o passo 1 do algoritmo, esta operação está indicada pelas duas primeiras setas do tipo 1 na figura 3.3. Voltemos nossa atenção para a sequência de pesos obtida por sucessivas aplicações representadas pela seta de tipo 1, a esquerda de Λ , que termina em $(-1, 0, 0)$. Esta sequência foi obtida subtraindo sempre a raiz associada com a primeira componente positiva do peso antecedente. Nos casos em que temos duas componentes positivas a segunda gera outras duas sequências periféricas representadas pelas setas do tipo 2 e 3 que terminam em $(-2, 2, -1)$ e $(0, 0, -1)$. Observemos que não temos necessidade de continuar a sequência de $(-2, 2, -1)$ pois encontraríamos $(-1, 0, 0)$ que já obtemos na primeira sequência. Lembramos que as sequências periféricas ocorrem sempre da segunda componente positiva de um determinado peso, a última delas (desta sequência à

Figura 3.3: O diagrama do processo de construção do conjunto de pesos para irrep $(1,1,0)$ de $sp(6)$.

esquerda de Λ , inicializada por α_1) começa em $(1,2,-2)$, termina em $(-1,-1,0)$ e está representada pela seta do tipo 4. A sequência do lado direito de Λ , inicializada por α_2 , segue esta mesma prescrição.

Após construído todo o conjunto de pesos, aplicamos a regra (3.114) para termos os pesos no sistema ortogonal de Cartan-Weyl, aptos a serem plotados num diagrama tridimensional, apresentado na figura (3.4). Como veremos adiante os operadores da álgebra $sp(6)$ agem naturalmente neste diagrama deslocando um estado de um determinado peso $\mathcal{K}$ para um estado de peso $\mathcal{K} + \beta$ onde β é a raiz do operador em questão.

No próximo capítulo investigaremos as principais propriedades da estrutura algébrica simplética usando conceitos desenvolvidos neste.

Figura 3.4: O diagrama de pesos da representação dos códons. À cada ponto neste diagrama podem estar associados mais que um vetor de base. Pois temos 38 pesos para esta irrep, porém sua dimensão é 64.

Capítulo 4

Simetria Simplética

4.1 Transformações Canônicas

Nosso interesse em simetria simplética neste trabalho se concentra na análise de uma representação particular da álgebra simplética $sp(6)$, e é portanto de caráter algébrico. Contudo, o significado intuitivo das transformações efetuadas pelos geradores advém de suas propriedades de grupo, no contexto das transformações canônicas em mecânica clássica. As transformações canônicas são aquelas que promovem uma mudança de coordenadas no espaço de fase, i.e., $p, q \rightarrow P, Q$, de forma que as equações de Hamilton sejam satisfeitas em ambos sistemas. Neste contexto o tratamento simplético favorece uma elegante descrição da mecânica clássica em termos de invariantes canônicos como o parênteses de Poisson. Tal descrição possui a vantagem de levar a mecânica clássica em íntimo contato, via princípio da correspondência, com a mecânica quântica no formalismo de Heisenberg. Recordamos aqui algumas propriedades das transformações canônicas que revelam sua natureza de grupo.

As equações de Hamilton, que para um sistema de n graus de liberdade são

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (4.1)$$

podem ser colocadas na forma compacta,

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \text{onde } J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}, \quad I_N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$I_N = \text{IDENTIDADE}$
 $N \times N$

simplesmente pela construção do vetor η com $2n$ elementos tais que

$$n_i = q_i, \quad n_{i+1} = p_i, \quad i \leq n. \quad (4.3)$$

Similarmente o novo conjunto de coordenadas Q_i, P_i , suposto canônico, define o vetor de $2n$ elementos $\zeta = \zeta(\eta)$. Esta transformação fornece

$$\dot{\zeta} = M \dot{\eta}, \quad (4.4)$$

onde M é o seu jacobiano. Usando (4.2) obtemos

$$\dot{\zeta} = M J \frac{\partial H}{\partial \eta} = M J \widetilde{M} \frac{\partial H}{\partial \zeta} = J \frac{\partial H}{\partial \zeta}, \quad (4.5)$$

ou seja, a condição para que a transformação $\zeta = \zeta(\eta)$ preserve a forma da equação de Hamilton (4.2) é

$$M J \widetilde{M} = J. \quad (4.6)$$

A matriz M que satisfaz a condição acima é dita simplética. Não é difícil perceber que as matrizes simpléticas formam um grupo. Notemos que, sendo M_1, M_2 jacobianos de transformações canônicas, temos

$$M_2 J \widetilde{M}_2 = J \quad (4.7)$$

$$M_1 M_2 J \widetilde{M}_2 \widetilde{M}_1 = M_1 J \widetilde{M}_1 \quad (4.8)$$

$$M_1 M_2 J \widetilde{M}_1 \widetilde{M}_2 = J. \quad (4.9)$$

Portanto a transformação cujo jacobiano é dado por $M = M_1 M_2$, é canônica, pois M é também simplética.

4.2 O parênteses de Poisson

A quantidade calculada para duas funções com respeito as variáveis canônicas p e q

$$[u, v]_{p,q} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \quad (4.10)$$

é chamada de parênteses de Poisson. Esta forma bilinear apresenta uma típica estrutura simplética, como as equações de Hamilton ($q \rightarrow p$, $p \rightarrow -q$). De fato, o parênteses de Poisson se mostra adequado a ser escrito na forma

$$[u, v]_\eta = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial \eta} J \frac{\partial u}{\partial \eta}}. \quad (4.11)$$

Realizando a transformação canônica $\eta \rightarrow \zeta$ novamente, obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \widetilde{M} \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad (4.12)$$

de maneira similar temos que

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial \eta}} = \widetilde{\widetilde{M} \frac{\partial u}{\partial \zeta}} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial \zeta}} M, \quad (4.13)$$

usando as regras da cadeia (4.12) e (4.13) concluimos enfim que o parênteses de Poisson (4.11) obedece identidade

$$[u, v]_\eta = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial \eta} J \frac{\partial u}{\partial \eta}} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial \zeta} M J \widetilde{M} \frac{\partial v}{\partial \zeta}} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} J \frac{\partial v}{\partial \zeta} = [u, v]_\zeta. \quad (4.14)$$

Ou seja, o parênteses de Poisson possui o mesmo valor quando calculado com respeito a qualquer conjunto de variáveis *canônicas*.

Como havíamos dito, o grande mérito das transformações canônicas está no fato de manterem as equações de movimento de Hamilton invariantes em forma. Similamente, a invariância canônica do parênteses de Poisson implica que as equações escritas em termos deste são manifestamente invariantes sob tal transformação. De fato pode-se [10] desenvolver uma descrição da mecânica clássica somente em termos de tal invariante canônico. Esta formulação em termos de parênteses de Poisson é especialmente útil no processo de transição para a mecânica quântica. A existência de um princípio de correspondência, que diz que o parênteses de Poisson deve ser substituído pelo comutador de operadores quânticos, é assegurada pela similaridade algébrica das duas estruturas matemáticas.

4.3 Grupo e Álgebra Simplética

A definição de grupo simplético segue da mesma idéia da seção anterior, porém levando em consideração outros tipos de invariantes canônicos além¹ do parênteses de Poisson. O conceito de álgebra simplética está diretamente relacionado, como veremos abaixo, com as transformações canônicas infinitesimais. Sejam F, G , vetores pertencentes a R^{2N} da forma

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_N \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \\ \tilde{g}_1 \\ \vdots \\ \tilde{g}_N \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

onde $f_i = f_i(q_k, \dots, p_l)$ e $g_i = g_i(q_k, \dots, p_l)$, são funções das variáveis canônicas p e q . Se a forma bilinear anti-simétrica

$$\phi : \{R^{2N} \times R^{2N} \rightarrow R \mid \phi(F, G) = F^T J G\}, \quad (4.16)$$

onde J é a matriz, já conhecida

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

é preservada por transformações g , i.e.

$$\phi(gF, gG) = \phi(F, G), \quad g \in gl(2N, R), \quad (4.18)$$

nos referimos então a este conjunto de transformações g como o grupo simplético,

$$Sp(2N, R) = \{g \mid J = g^T J g\}. \quad (4.19)$$

¹Um outro exemplo, de invariante canônico é o parentesis de lagrange, definido por

$$\{u, v\}_{q,p} = \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v}$$

assim como o elemento de volume no espaço de fase, que é o mais simples dos invariantes integrais de Poincaré.

De fato, a condição (4.19) garante que

$$\phi(gF, gG) = (gF)^T J(gG) = F^T (g^T Jg) G = \phi(F, G). \quad (4.20)$$

Pela transformação $g = e^X$, $X \in gl(2N, R)$, $g \in Sp(2N, R)$, a condição simplética (4.19) para X fica

$$(e^X)^T J(e^X) = J \quad (4.21)$$

$$J = (I + X^T + \frac{(X^T)^2}{2!} + \dots) J (I + X + \frac{(X)^2}{2!} + \dots) \quad (4.22)$$

$$X^T J + JX = 0 \quad (4.23)$$

$$(X^T)^2 J + JX^2 + 2X^T JX = 0 \quad (4.24)$$

$$(\dots) \quad (4.25)$$

$$(\vdots)$$

como (4.23) $\rightarrow$ (4.24) $\rightarrow$ (4.25) $\rightarrow$ ($\vdots$), basta que (4.23) seja obedecida por X para que (4.21) seja satisfeita. Equação (4.23) define a álgebra simplética $sp(2N, R)$. E portanto, para a representação fundamental, X , pertencente a álgebra esta simplética, é da forma

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad B = B^T, C = C^T. \quad (4.26)$$

4.4 A Álgebra Simplética $sp(6)$

Nesta seção descrevemos a representação matricial fundamental que define a álgebra simplética $sp(6)$. Para construirmos os geradores, introduzimos como base de $gl(n)$ as matrizes de Weyl e_{ij} definidas por

$$(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.27)$$

e que satisfazem as regras de comutação

$$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il}\delta_{jk} - e_{jk}\delta_{il}. \quad (4.28)$$

Tomamos agora o seguinte procedimento, enumeramos os índices das matrizes de Weyl e_{ij} , considerados como **semi-inteiros** e com o fator $\frac{1}{2}$ **subentendido**, pela sequência

$$1, 3, 5, \dots, n, -1, -3, -5, \dots, -n \quad (4.29)$$

de forma que um elemento arbitrário da base possa ser escrito como

$$e_{\mathbf{k}-\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & -1 & -3 & -5 & \dots \\ 1 & & & & & & & \\ 3 & & 0 & & & & & \\ 5 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ k & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & 1 \\ \vdots & & & & & & & \\ -1 & & & & & & & \\ -3 & & & & & & & \\ -5 & & 0 & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Em termos destas matrizes escrevemos então em particular os geradores de $sp(6)$ decompondo a matriz genérica (4.26)

$$g = \begin{pmatrix} 1 A_{11}^1 & A_{12}^3 & A_{13}^5 & B_{11}^{-1} & B_{12}^{-3} & B_{13}^{-5} \\ 3 A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ 5 A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ -1 C_{11} & C_{12} & C_{13} & -A_{11} & -A_{21} & -A_{31} \\ -3 C_{12} & C_{22} & C_{23} & -A_{12} & -A_{22} & -A_{32} \\ -5 C_{13} & C_{23} & C_{33} & -A_{13} & -A_{23} & -A_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

na base acima. Obtemos os geradores explicitamente, observando o índice correspondente em torno dos elementos superiores e dos elementos à esquerda da matriz g :

1. Tipo A

$$\mathcal{L}_1^1 = e_{11} - e_{-1-1}, \mathcal{L}_3^3 = e_{33} - e_{-3-3}, \mathcal{L}_5^5 = e_{55} - e_{-5-5}, \mathcal{L}_1^3 = e_{13} - e_{-3-1},$$

$$\mathcal{L}_1^5 = e_{15} - e_{-5-1}, \mathcal{L}_3^1 = e_{31} - e_{-1-3}, \mathcal{L}_5^1 = e_{51} - e_{-1-5}, \mathcal{L}_3^5 = e_{35} - e_{-5-3},$$

$$\mathcal{L}_5^3 = e_{53} - e_{-3-5}.$$

2. Tipo B

$$\mathcal{L}_1^{-1} = e_{1-1}, \mathcal{L}_3^{-3} = e_{3-3}, \mathcal{L}_5^{-5} = e_{5-5}, \mathcal{L}_3^{-1} = e_{3-1} + e_{1-3},$$

$$\mathcal{L}_5^{-1} = e_{5-1} + e_{1-5}, \mathcal{L}_5^{-3} = e_{5-3} + e_{3-5}.$$

3. Tipo C

$$\mathcal{L}_{-1}^1 = e_{-11}, \mathcal{L}_{-3}^3 = e_{-33}, \mathcal{L}_{-5}^5 = e_{-55}, \mathcal{L}_{-1}^3 = e_{-13} + e_{-31},$$

$$\mathcal{L}_{-1}^5 = e_{-15} + e_{-51}, \mathcal{L}_{-3}^5 = e_{-35} + e_{-53}.$$

Esta maneira de escrever os geradores é bastante eficiente. Notemos que os geradores de $Sp(6)$ podem ser escritos na forma fechada

$$\mathcal{L}_m^{m'} \equiv [e_{mm'} + (-1)^{m+m'} e_{-m'-m}], \quad (4.32)$$

assim como as relações de comutação que ficam na forma compacta conveniente para implementação computacional

$$[\mathcal{L}_m^{m'}, \mathcal{L}_{m''}^{m'''}] = \mathcal{L}_m^{m'''} \delta_{m''}^{m'} - \mathcal{L}_{m''}^{m'} \delta_m^{m'''} + \quad (4.33)$$

$$+ (-1)^{m''+m'''} \mathcal{L}_m^{-m''} \delta_{-m'''}^{m'} - (-1)^{m''+m'''} \mathcal{L}_{-m'''}^{m'} \delta_m^{-m''}. \quad (4.34)$$

Com a relação (4.33) e uma simples “*procedure*” em Maple, obtemos a seguinte tabela 4.1 de raízes para a álgebra $sp(6)$. Lembremos que desta relação obtemos as raízes em CW, o sistema natural em que elas se apresentam.

Gerador	Raiz	Gerador	Raiz	Gerador	Raiz
$\mathcal{L}_1^3$	[1,-1,0]	$\mathcal{L}_1^{-1}$	[2,0,0]	$\mathcal{L}_{-1}^1$	[-2,0,0]
$\mathcal{L}_1^5$	[1,0,-1]	$\mathcal{L}_3^{-3}$	[0,2,0]	$\mathcal{L}_{-3}^3$	[0,-2,0]
$\mathcal{L}_3^1$	[-1,1,0]	$\mathcal{L}_5^{-5}$	[0,0,2]	$\mathcal{L}_{-5}^5$	[0,0,-2]
$\mathcal{L}_5^1$	[-1,0,1]	$\mathcal{L}_3^{-1}$	[1,1,0]	$\mathcal{L}_{-1}^3$	[-1,-1,0]
$\mathcal{L}_3^5$	[0,1,-1]	$\mathcal{L}_5^{-1}$	[1,0,1]	$\mathcal{L}_{-1}^5$	[-1,0,-1]
$\mathcal{L}_5^3$	[0,-1,1]	$\mathcal{L}_5^{-3}$	[0,1,1]	$\mathcal{L}_{-3}^5$	[0,-1,-1]

Tabela 4.1: Raízes da álgebra $sp(6)$.

A tabela (4.1), mais o conjunto de pesos obtidos no diagrama da figura (3.3) — convertidos para base CW—nos fornecem bastante informação sobre a ação dos operadores de $sp(6)$. Porém existe alguns pontos no diagrama de pesos, figura

Figura 4.1: As possíveis direções indicadas pelas raízes de $sp(6)$, na base CW.

(3.4) associados a mais que um “estado” (vetor de base da irrep), pois o espaço de representação é de dimensão 64 e temos apenas 38 pesos. Existe uma fórmula devida a Freudenthal [4], que faz uso dos teoremas enunciados acima, para se obter a multiplicidade dos pesos. Contudo, visto que construiremos a base da representação $(1,1,0)$ explicitamente, não nos prolongaremos mais nesta discussão. Como veremos adiante, é justamente esta multiplicidade que suporta a existência de regras de seleção, fazendo determinadas transições proibidas.

Capítulo 5

O Método Polinomial

5.1 Introdução

Neste capítulo construímos, um conjunto de polinômios nas componentes de vetores $\eta_{\mu s}$ pertencentes a um espaço vetorial de dimensão $2j + 1$. Estes polinômios, como veremos, formam uma base para todas as representações irredutíveis do grupo unitário U_{2j+1} .

Começamos esta discussão revendo o trabalho de Wigner [6] sobre o grupo de rotação numa linguagem, antes introduzida por Schwinger [23], adaptável ao grupo unitário. Tanto o grupo unitário unimodular¹ como o de rotação tridimensional são grupos de Lie simples (e portanto semisimples) compactos, ainda que a discussão de suas bases são tomadas de ponto de vista bastante diferente. Para o grupo unitário usa-se sua relação com o grupo simétrico para construir tensores irredutíveis que constituem uma base. Para ao grupo de rotação procura-se por polinômios, os harmônicos esféricos, que são soluções de certas equações diferenciais parciais invariantes por rotações, e que também constituem uma base.

Nosso interesse pelo procedimento de Wigner, não menos geral que o baseado em tensores [12], é investigar a natureza da informação biológica, como sugerido por Marcos Moshinsky [5], contida na ação dos operadores de destruição e criação — variáveis em termos das quais nossos polinômios e operadores são funções. Com este formalismo veremos que a adaptação computacional em linguagem algébrica

¹Os grupos unimodulares são representados por matrizes de determinante ± 1 .

se mostra simplificada. A razão de nosso interesse por representações da álgebra unitária ficará clara no próximo capítulo quando veremos que o grupo $Sp(6)$ está contido no grupo unitário $U(6)$ e poderemos usar o procedimento desenvolvido neste capítulo para obter especificamente a irrep $[2, 1, 0]$, espaço dos Códons, da álgebra $sp(6)$.

5.2 O Grupo de Rotações

Os operadores associados as rotações infinitesimais são as componentes do vetor

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = i^{-1} \nabla. \quad (5.1)$$

Estes operadores satisfazem as relações de comutação

$$[L_0, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = 2L_0, \quad \text{onde } L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y, \quad L_0 \equiv L_z. \quad (5.2)$$

Gostaríamos de determinar um conjunto de polinômios $P(x, y, z)$ que formassem uma base para representações irredutíveis do grupo de rotações, ou seja uma base na qual tenhamos matrizes para L_0 e $L_{\pm}$ de maneira tal que seja impossível coloca-las simultaneamente numa forma diagonal de blocos. Para caracterizar estes polinômios procuramos por operadores invariantes com respeito as rotações, que podemos formar a partir de $\vec{r}$ e $\vec{p}$. Temos em segunda ordem

$$I_+ \equiv \frac{p^2}{2}, \quad I_0 \equiv \frac{1}{4i}(\vec{r} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{r}) = -\frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \nabla + \frac{3}{2}), \quad I_- \equiv \frac{r^2}{2}. \quad (5.3)$$

Suas regras de comutação são, usando as de $\vec{r}$ e $\vec{p}$

$$[I_0, I_{\pm}] = \pm I_{\pm}, \quad [I_+, I_-] = 2I_0. \quad (5.4)$$

E portanto estes operadores, que comutam com L_i ($i = 0, \pm 1$), formam uma álgebra de Lie. O operador de Casimir, invariante quadrático, desta álgebra de Lie é dado por

$$I^2 \equiv I_- I_+ + I_0(I_0 + 1) = \frac{1}{4}r^2 p^2 + \frac{1}{4}(r \cdot \nabla + \frac{3}{2})(r \cdot \nabla - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}L^2 - \frac{3}{16}. \quad (5.5)$$

Esta relação entre L^2 e I^2 sugere que os polinômios, que formam uma base para uma representação irredutível de R_3 , devam ser simultaneamente auto funções de I^2 . Uma maneira disto acontecer é quando

$$I_0 P = \kappa P, \quad I_+ P = 0. \quad (5.6)$$

Estas equações garantem que os polinômios são homogêneos de grau κ relacionados a l por

$$\begin{aligned} I^2 P &= \underbrace{I_- I_+ P}_0 + I_0(I_0 + 1)P = \frac{1}{4}L^2 P - \frac{3}{16}P \\ \kappa(\kappa + 1) &= \frac{1}{4}l(l + 1) - \frac{3}{16} \Rightarrow \kappa = -\frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Mostremos então que o conjunto de polinômios linearmente independentes que satisfazem (5.6) forma uma base para uma representação irredutível de R_3 . Para tal usamos o teorema de Cartan [27] que estabelecemos sem prova.

Teorema 9 (Cartan). *O vetor de peso maior numa base para uma representação irredutível de uma Álgebra de Lie semisimples é único.*

Consideremos novamente a equação (5.6),

$$I_0 P = \kappa P, \quad I_+ P = 0,$$

usemos mais uma equação para caracterizar a solução polinomial de (5.6)

$$L_0 P = mP, \quad (5.7)$$

explorando o fato de L_0 comutar com $I_0, I_{\pm}$. A relação de comutação (5.2) implica que $L_+ P$ satisfaz (5.7) e tem peso $m + 1$ e portanto o polinômio de maior peso é identificado por

$$L_0 P = MP, \quad L_+ P = 0. \quad (5.8)$$

Nota-se que, como $I_{\pm}, I_0$, são invariantes por rotações, i.e. comutam com os geradores de rotações infinitesimais, o conjunto de soluções linearmente independentes de (5.6) forma uma base para uma representação de R_3 , garantida por diagonalização simultânea.. Se esta representação fosse redutível poderíamos

construir combinações lineares desses polinômios de tal forma que nessa nova base a representação esteja explicitamente reduzida. Cada subconjunto de polinômios que forma uma base para uma sub-representação irredutível terá um único termo de peso maior. Isto implicaria na existência de várias soluções polinomiais que satisfaçam simultaneamente (5.6) e (5.8) para κ fixo. Entretanto de (5.5), contradizendo a hipótese inicial, temos

$$I^2 P = L^2 P - \frac{3}{16} P \quad (5.9)$$

$$\kappa(\kappa + 1) = \frac{1}{4} M(M + 1) - \frac{3}{16}. \quad (5.10)$$

substituindo $\kappa = -\frac{1}{2}(l + \frac{3}{2})$ obtemos

$$l(l + 1) = M(M + 1). \quad (5.11)$$

A única solução possível é $l = M$, pois l e M são inteiros não negativos, para a qual se tem um único polinômio:

$$P_l^l(x, y, z) = r^l Y_l(\theta, \varphi) = (-1)^l \left[\frac{(2l + 1)!}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} (2^l l!)^{-1} (x + iy)^l. \quad (5.12)$$

O restante da base pode ser obtido através de aplicações sucessivas de L_- , levando em conta a normalização [17] temos

$$P_m^l(x, y, z) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) = [(l + m)!]^{\frac{1}{2}} [(l - m)! (2l!)]^{-\frac{1}{2}} L_-^{l-m} P_l^l(x, y, z). \quad (5.13)$$

5.3 Base para Irreps dos Grupos Unitários

Nesta seção desenvolvemos o processo de construção de uma base para representações irredutíveis de U_{2j+1} . Como na seção anterior utilizaremos dois conjuntos de operadores, que constituem aqui separadamente as álgebras $u(n)$ e $u(2j + 1)$. Por estarmos interessados numa representação irredutível de $u(2j + 1)$, seremos levados a analisar as representações simétricas da álgebra

$$u[n(2j + 1)] \supset u(n) \oplus u(2j + 1).$$

O grupo unitário U_{2j+1} consiste de todas matrizes unitárias num espaço de dimensão $2j + 1$. Denotamos os vetores neste espaço por η_s . O índice s serve para

distinguir os vetores entre si. As componentes destes vetores são denotadas por $\eta_{\mu s}$, $\mu = 1, 2, \dots, 2j + 1$. Ou seja

$$\eta_s = (\eta_{1s}, \eta_{2s}, \dots, \eta_{\mu s}, \dots, \eta_{2j+1s}). \quad (5.14)$$

Tomamos as componentes $\eta_{\mu s}$ como operadores de criação, definindo os correspondentes operadores de aniquilação pelo comutador

$$[\xi_s^\mu, \eta_{\mu' s'}] = \delta_\mu^{\mu'} \delta_{ss'}. \quad (5.15)$$

Estes operadores assim definidos serão interpretados como operadores diferenciais

$$\xi_s^\mu = \frac{\partial}{\partial \eta_{\mu s}}. \quad (5.16)$$

Expressamos os elementos da álgebra unitária $u(2j + 1)$ em termos destes operadores por

$$C_\mu^{\mu'} = \sum_{s=1}^n \eta_{\mu s} \xi_s^{\mu'}. \quad (5.17)$$

estes operadores são análogos às componentes de $L = r \times p$. Pela equação (5.15) verificamos que os $C_\mu^{\mu'}$ satisfazem as regras de comutação usuais para álgebra unitária

$$[C_\mu^{\mu'}, C_{\mu''}^{\mu'''}] = C_\mu^{\mu'''} \delta_{\mu''}^{\mu'} - C_{\mu''}^{\mu'} \delta_\mu^{\mu''}. \quad (5.18)$$

Podemos ainda construir invariantes com relação a $u(2j + 1)$ formados a partir de $\eta_{\mu s}$ e ξ_s^μ . Restringindo-nos a segunda ordem temos os operadores

$$C_{ss'} = \sum_{\mu=1}^{2j+1} \eta_{\mu s} \xi_{s'}^\mu, \quad (5.19)$$

que além de satisfazerem

$$[C_\mu^{\mu'}, C_{ss'}] = 0, \quad (5.20)$$

formam a álgebra de Lie $u(n)$ revelada pelas regras de comutação

$$[C_{\alpha\beta}, C_{\gamma\tau}] = C_{\alpha\tau} \delta_{\gamma\beta} - C_{\gamma\beta} \delta_{\alpha\tau}. \quad (5.21)$$

Para completar a analogia com a seção anterior, devemos verificar que os três subconjuntos de operadores da forma (5.19)

$$C_{ss'} \quad s < s' = 2, \dots, n \quad (5.22)$$

$$C_{ss} \quad s = 1, \dots, n \quad (5.23)$$

$$C_{ss'} \quad s > s' = 1, \dots, n - 1, \quad (5.24)$$

se comportam como I_+ , I_- , I_0 para o grupo de rotações. Para tal, mencionamos os seguintes resultados prévios obtidos por Marcos Moshinsky [tal].

1. Os Polinômios linearmente independentes da forma $P = P(\eta_{\mu s})$ que satisfazem as equações

$$C_{ss}P = h_s P, \quad C_{ss'}P = 0 \quad \text{com} \quad s < s', \quad (5.25)$$

formam uma base para uma representação *irredutível* de $u(2j+1)$ caracterizada por um conjunto de inteiros não negativos $[h_1, h_2, \dots]$.

2. A solução de (5.25) pode ser dada em termos dos determinantes

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}^{s_1 s_2 \dots s_r} &= \det \begin{pmatrix} \eta_{\mu_1 s_1} & \eta_{\mu_1 s_2} & \dots & \eta_{\mu_1 s_r} \\ \eta_{\mu_2 s_1} & \eta_{\mu_2 s_2} & \dots & \eta_{\mu_2 s_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{\mu_r s_1} & \eta_{\mu_r s_2} & \dots & \eta_{\mu_r s_r} \end{pmatrix} \\ &= \sum_p [(-1)^p p \eta_{\mu_1 s_1} \eta_{\mu_2 s_2} \dots \eta_{\mu_r s_r}], \end{aligned} \quad (5.26)$$

por

$$P = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \dots (\Delta_{1\dots 2j+1}^{1\dots 2j+1})^{h_{2j+1}} \times Z\left(\frac{\Delta_1^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_{1\mu}^{12}}{\Delta_{12}^{12}}, \dots, \frac{\Delta_{12\dots \mu}^{12\dots 2j}}{\Delta_{12\dots 2j}^{12\dots 2j}}\right), \quad (5.27)$$

onde p significa uma permutação dos índices s_i e Z é um polinômio arbitrário nas razões indicadas, sujeito somente à condição de que P deva ser um polinômio em $\eta_{\mu s}$.

3. O polinômio que satisfaz

$$\begin{aligned} C_\mu^\mu P &= K_\mu P \\ C_\mu^{\mu'} P &= 0 \quad \text{se} \quad \mu < \mu', \end{aligned} \quad (5.28)$$

e que também satisfaz (5.25) é dado por

$$\mathcal{P} = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} \dots (\Delta_{1\dots 2j+1}^{1\dots 2j+1})^{h_{2j+1}}. \quad (5.29)$$

Notemos aqui que substituindo (5.29) em (5.25) encontramos

$$K_1 = h_1, \quad K_2 = h_2 \dots K_{2j+1} = h_{2j+1}. \quad (5.30)$$

Isto implica que o polinômio que satisfaz tanto (5.25) como (5.28) é único na base gerada pelas soluções de (5.25). Portanto o polinômio de peso maior $\mathcal{P}$ sendo único, pode, pelo teorema de Cartan, ser de fato etiqueta para uma representação irredutível de $u(2j+1)$ caracterizada por $[h_1, h_2, \dots]$.

Escrever os polinômios $P(\eta)$ na forma de determinantes é particularmente interessante para efetuarmos as ações dos operadores das álgebras unitárias numa forma compacta. Notemos que a ação de $C_\mu^{\mu'}$ com $\mu < \mu'$ em um típico determinante é dada por

$$C_\mu^{\mu'} \Delta_{12\dots r-1\mu''}^{12\dots r-1r} = \delta_{\mu''}^{\mu'} \Delta_{12\dots r-1\mu}^{12\dots r-1r} \quad r = 1, \dots, 2j+1. \quad (5.31)$$

Observa-se que nesta igualdade μ deve ser diferente de $(1, 2, \dots, r-1)$ do contrário teremos duas linhas iguais no determinante resultante. Usemos esta regra para verificar que de fato o fator Z em (5.27) é uma constante para todos operadores $C_\mu^{\mu'}$ com $\mu < \mu'$ em (5.28). Para $\mu = 1$ obtemos

$$C_1^{\mu'} P = \frac{P}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\frac{\Delta_1^{\mu'}}{\Delta_1^1})} C_1^{\mu'} \left(\frac{\Delta_1^1}{\Delta_1^1} \right) = \frac{P}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\frac{\Delta_1^{\mu'}}{\Delta_1^1})} = 0 \quad \mu' = 2, \dots, 2j+1,$$

ou seja Z é independente de $\frac{\Delta_1^{\mu'}}{\Delta_1^1}$. Para $\mu = 2$, obtemos

$$C_2^{\mu'} P = \frac{P}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\frac{\Delta_{12}^{\mu'}}{\Delta_{12}^{12}})} C_2^{\mu'} \left(\frac{\Delta_{12}^{12}}{\Delta_{12}^{12}} \right) = \frac{P}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\frac{\Delta_{12}^{\mu'}}{\Delta_{12}^{12}})} = 0 \quad \mu' = 3, \dots, 2j+1$$

Z também é independente de $\frac{\Delta_{12}^{\mu'}}{\Delta_{12}^{12}}$. Prosseguindo dessa forma concluímos que Z é uma constante.

Fica estabelecido então que, o conjunto de polinômios linearmente independentes (5.25) que são também soluções de

$$C_\mu^{\mu'} P = k_\mu P, \quad (5.32)$$

para um P qualquer e de

$$\begin{cases} C_\mu^{\mu'} P = K_\mu P \\ C_\mu^{\mu'} P = 0 \quad \text{se} \quad \mu < \mu' \end{cases} \quad (5.33)$$

para o peso máximo $\mathcal{P}$, formam uma base para uma representação *irredutível* de U_{2j+1} . Porque o polinômio $\mathcal{P}$ de maior peso neste conjunto é único, e temos a expressão (5.29) para ele.

5.4 Representações de $U(3)$

Como exemplo específico deste método usemos a cadeia natural da álgebra unitária em três dimensões, $u(3) \supset u(2) \supset u(1)$. Podemos caracterizar uma representação irredutível de $u(3)$, requerendo que seu polinômio de peso $[k_1, k_2, k_3]$ seja de peso definido no subgrupo $u(2)$, $[q_1, q_2]$. De maneira semelhante que, em R_3 , uma representação irredutível é caracterizada por l mais a condição adicional $L_0 P = mP$. O primeiro passo é conseguir o polinômio de peso máximo em $u(2)$, que deve obedecer

$$C_1^1 P = q_1 P, \quad (5.34)$$

$$C_2^2 P = q_2 P, \quad (5.35)$$

$$C_1^2 P = 0. \quad (5.36)$$

O polinômio de peso máximo $[K_1 = h_1, K_2 = h_2, K_3 = h_3]$ em $u(3)$ é dado por (5.29)

$$\mathcal{P} = (\Delta_1^1)^{h_1-h_2} (\Delta_{12}^{12})^{h_2-h_3} (\Delta_{123}^{123})^{h_3} \quad (5.37)$$

Notemos que a equação (5.36) pede que o polinômio de peso máximo em $u(2)$ deva ser da forma

$$\mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = (\Delta_1^1)^\alpha (\Delta_3^1)^\beta (\Delta_{12}^{12})^\gamma (\Delta_{13}^{12})^\sigma (\Delta_{123}^{123})^{h_3}, \quad (5.38)$$

pois por (5.31) essa é a forma mais geral que é constante para C_1^2 . Mas $\mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3}$ deve obedecer (5.34) e (5.35), enquanto mantendo seu peso no grupo (gerado por $C_{ss'}$) complementar:

$$C_{ss'} \mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = h_s \mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3}, \quad C_{ss'} \mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = 0 \quad s' > s = 1, 2, 3. \quad (5.39)$$

Portanto obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \sigma + h_3 = q_1 \\ \gamma + h_3 = q_2 \\ \alpha + \beta + \gamma + \sigma + h_3 = h_1 \\ \gamma + \sigma + h_3 = h_2 \end{cases} \quad (5.40)$$

cujas soluções nos fornece

$$\mathcal{P}_{q_1, q_2}^{h_1, h_2, h_3} = (\Delta_1^1)^{-h_2+q_1} (\Delta_3^1)^{h_1-q_1} (\Delta_{12}^{12})^{-h_3+q_2} (\Delta_{13}^{12})^{h_2-q_2} (\Delta_{123}^{123})^{h_3}. \quad (5.41)$$

Extraímos de (5.41), naturalmente, as regras de ramificação de $u(3) \supset u(2)$

$$h_1 \geq q_1 \geq h_2 \geq q_2 \geq h_3. \quad (5.42)$$

Podemos conseguir polinômios de qualquer peso em $u(2)$ usando seu operador de abaixamento C_2^1 . Apenas notando que

$$C_1^2, \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^1), C_2^1, \quad (5.43)$$

satisfazem as mesmas regras de comutação que L_+, L_0, L_- . Finalmente obtemos a base explícita para uma representação irredutível de $U(3)$ caracterizada por $h_1, h_2, h_3, q_1, q_2, \tau$ na cadeia canônica acima:

$$\mathcal{P}_{q_1, q_2, \tau}^{h_1, h_2, h_3} = \left[\frac{(t + \tau)!}{(t - \tau)!(2t)!} \right]^{\frac{1}{2}} (C_2^1)^{t - \tau} [(\Delta_1^1)^{-h_2 + q_1} (\Delta_3^1)^{h_1 - q_1} (\Delta_{12}^{12})^{-h_3 + q_2} (\Delta_{13}^{12})^{h_2 - q_2} (\Delta_{123}^{123})^{h_3}], \quad (5.44)$$

onde $t = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$, $\tau = t, t - 1, \dots, -t$.

Resumindo, lembramos que a trinca $[h_1, h_2, h_3]$ é usada como etiqueta da representação de $U(3)$ pois é o valor máximo que $[k_1, k_2, k_3]$ pode tomar. Esta trinca, $[h_1, h_2, h_3]$, é ainda o peso máximo numa determinada representação, geralmente redutível, do grupo complementar à $U(2j + 1), U(n)$.

Como exemplo de manipulação destes resultados, vejamos como fica a representação fundamental $[1, 0, 0]$ de $u(3)$ em termos destes polinômios. Pela regra (5.42) $q_1 = 1, 0$ e $q_2 = 0$, portanto

$$\mathcal{P}_{q_1 0}^{100} = (\Delta_1^1)^{q_1} (\Delta_3^1)^{1 - q_1} \begin{cases} \mathcal{P}_{10}^{100} = \Delta_1^1 \\ \mathcal{P}_{00}^{100} = \Delta_3^1 \end{cases} \quad (5.45)$$

para $t = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$, obtemos um terceiro polinômio aplicando (5.44) com $t = \frac{1}{2}$ e $\tau = -\frac{1}{2}$

$$\mathcal{P}_{10-\frac{1}{2}}^{100} = C_2^1 \Delta_1^1 = \Delta_2^1. \quad (5.46)$$

A base completa é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{10\frac{1}{2}}^{100} &= \Delta_1^1 \\ \mathcal{P}_{10-\frac{1}{2}}^{100} &= \Delta_2^1 \\ \mathcal{P}_{000}^{100} &= \Delta_3^1 \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo de dimensão maior. Para a irrep $[2,1,0]$ temos o polinômio de peso maior

$$\mathcal{P}_{q_1, q_2}^{210} = (\Delta_1^1)^{-1+q_1} (\Delta_3^1)^{2-q_1} (\Delta_{12}^{12})^{q_2} (\Delta_{13}^{12})^{1-q_2}, \quad (5.47)$$

e as regras de ramificação

q_1	q_2	$t = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$
2	1	$\frac{1}{2}$
1	1	0
2	0	1
1	0	$\frac{1}{2}$

(5.48)

Até a quebra $U(3) \supset U(2)$ temos os polinômios

$$\mathcal{P}_{21}^{210} = (\Delta_1^1)(\Delta_{12}^{12}), \quad \mathcal{P}_{11}^{210} = (\Delta_3^1)(\Delta_{12}^{12}), \quad \mathcal{P}_{20}^{210} = (\Delta_1^1)(\Delta_{13}^{12}), \quad \mathcal{P}_{10}^{210} = (\Delta_3^1)(\Delta_{13}^{12}).$$

Continuando o processo de quebra em $U(2) \supset U(1)$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{21-\frac{1}{2}}^{210} &= \mathcal{C}_2^1 \mathcal{P}_{21}^{210} = \mathcal{C}_2^1 (\Delta_1^1)(\Delta_{12}^{12}) = (\Delta_2^1)(\Delta_{12}^{12}) \\ \mathcal{P}_{200}^{210} &= \mathcal{C}_2^1 \mathcal{P}_{20}^{210} = \mathcal{C}_2^1 (\Delta_1^1)(\Delta_{13}^{12}) = (\Delta_2^1)(\Delta_{13}^{12}) + (\Delta_1^1)(\Delta_{23}^{12}) \\ \mathcal{P}_{20-1}^{210} &= \frac{1}{2} \mathcal{C}_2^1 \mathcal{C}_2^1 \mathcal{P}_{20}^{210} = \frac{1}{2} \{ (\Delta_2^1)(\Delta_{23}^{12}) + (\Delta_1^1)(\Delta_{23}^{12}) \} = (\Delta_2^1)(\Delta_{23}^{12}) \\ \mathcal{P}_{10-\frac{1}{2}}^{210} &= \mathcal{C}_2^1 \mathcal{P}_{10}^{210} = \mathcal{C}_2^1 (\Delta_3^1)(\Delta_{13}^{12}) = (\Delta_3^1)(\Delta_{23}^{12}). \end{aligned}$$

Reunimos agora todos os polinômios obtidos acima na base completa de $U(3)$ na cadeia canônica

$\mathcal{P}_{21-\frac{1}{2}}^{210}$	$(\Delta_1^1)(\Delta_{12}^{12})$
$\mathcal{P}_{21-\frac{1}{2}}^{210}$	$(\Delta_2^1)(\Delta_{12}^{12})$
$\mathcal{P}_{201}^{210}$	$(\Delta_1^1)(\Delta_{13}^{12})$
$\mathcal{P}_{200}^{210}$	$(\Delta_2^1)(\Delta_{13}^{12}) + (\Delta_1^1)(\Delta_{23}^{12})$
$\mathcal{P}_{20-1}^{210}$	$(\Delta_2^1)(\Delta_{23}^{12})$
$\mathcal{P}_{10-\frac{1}{2}}^{210}$	$(\Delta_3^1)(\Delta_{13}^{12})$
$\mathcal{P}_{10-\frac{1}{2}}^{210}$	$(\Delta_3^1)(\Delta_{23}^{12})$
$\mathcal{P}_{11}^{210}$	$(\Delta_3^1)(\Delta_{12}^{12})$

Tabela 5.1: Base polinômial completa para a irrep adjunta de $U(3)$ na cadeia canônica

Capítulo 6

Base Polinomial para a Irrep dos Códons

Como vimos no capítulo anterior, para garantir a irredutibilidade de uma representação fornecida por uma determinada base para um grupo unitário $U(2j+1)$ temos que lançar mãos do conceito de grupo complementar, $U(n)$. Os geradores deste grupo são construídos em segunda ordem por operadores que comutam com os geradores de $U(2j+1)$. Precisamos então de um espaço vetorial de dimensão tão grande quanto $(2j+1) \times n$ para suportar a identificação de uma representação irredutível de $U(2j+1)$.

Neste capítulo aplicamos o método desenvolvido no anterior, baseando-nos na referência [5], à cadeia de álgebras e subálgebras de Lie:

$$u(6) \supset sp(6) \supset sp(4) \oplus su(2) \supset su(2) \oplus su(2) \oplus su(2). \quad (6.1)$$

As equações que o polinômio de peso maior deve obedecer em cada estágio do processo de quebra de simetria, podem ser resolvidas por inspeção.

Podemos escrever os elementos da álgebra $sp(6)$ [12] em termos dos elementos da álgebra unitária $u(6)$, apresentados no capítulo anterior por

$$\mathcal{L}_m^{m'} \equiv [\mathcal{C}_m^{m'} + (-1)^{m+m'} \mathcal{C}_{-m'}^{-m}], \quad m = 5/2, 3/2, \dots, -5/2. \quad (6.2)$$

Como antes, omitiremos o fator $1/2$ nos índices m, m' , porém sempre mantendo-o para efetuar as somas entre índices. Das regras de comutação (5.18) dos elementos

de $u(6)$, concluímos que estes elementos de $sp(6)$ acima satisfazem

$$[\mathcal{L}_m^{m'}, \mathcal{L}_{m''}^{m'''}] = \{\mathcal{L}_m^{m'''} \delta_{m''}^{m'} - \mathcal{L}_{m''}^{m'} \delta_m^{m'''} + (-1)^{m''+m'''} \mathcal{L}_m^{-m''} \delta_{-m'''}^{m'} - (-1)^{m''+m'''} \mathcal{L}_{-m'''}^{m'} \delta_m^{-m''}\}. \quad (6.3)$$

Notemos que pela equação (6.2) os elementos abaixo da anti-diagonal estão relacionados por

$$\mathcal{L}_{-m'}^{-m} = (-1)^{m+m'} \mathcal{L}_m^{m'}. \quad (6.4)$$

Podemos ainda classificar os geradores de $Sp(6)$ segundo a tabela 6.1 de acordo com sentido das raízes a eles associadas, tabela (4.1).

Operadores de levantamento	Operadores de abaixamento	Subálgebra de Cartan
$\mathcal{L}_m^{m'}, \quad -m \leq m' < m$ $\mathcal{L}_1^{-1}, \mathcal{L}_3^{-3}, \mathcal{L}_3^{-1}, \mathcal{L}_3^1, \mathcal{L}_5^{-5},$ $\mathcal{L}_5^{-3}, \mathcal{L}_5^{-1}, \mathcal{L}_5^1, \mathcal{L}_5^3$	$\mathcal{L}_m^{m'}, \quad -m' \leq m < m'$ $\mathcal{L}_{-1}^1, \mathcal{L}_{-3}^3, \mathcal{L}_{-1}^3, \mathcal{L}_1^3, \mathcal{L}_{-5}^5,$ $\mathcal{L}_{-3}^5, \mathcal{L}_{-1}^5, \mathcal{L}_1^5, \mathcal{L}_3^5$	$\mathcal{L}_m^m$ $\mathcal{L}_1^1, \mathcal{L}_3^3, \mathcal{L}_5^5$

Tabela 6.1: Os elementos da álgebra $sp(6)$ na forma canônica de Cartan-Weyl

E na tabela 6.2 temos ainda, os elementos da álgebra $sp(6)$ separados de acordo com a cadeia de subálgebra (6.1) que estamos interessados, (6.1).

$sp(6)$			
$\mathcal{L}_5^{-3}, \mathcal{L}_5^{-1}, \mathcal{L}_5^1, \mathcal{L}_5^3, \mathcal{L}_{-3}^5, \mathcal{L}_{-1}^5, \mathcal{L}_1^5, \mathcal{L}_3^5$			
$sp(4)$			$su_5(2)$
$su_1(2)$	$su_3(2)$		
$\mathcal{L}_1^1$	$\mathcal{L}_3^3$	$\mathcal{L}_{-1}^3, \mathcal{L}_1^3$	$\mathcal{L}_5^5$
$\mathcal{L}_1^{-1}$	$\mathcal{L}_3^{-3}$	$\mathcal{L}_3^{-1}, \mathcal{L}_3^1$	$\mathcal{L}_5^{-5}$
$\mathcal{L}_{-1}^1$	$\mathcal{L}_{-3}^3$		$\mathcal{L}_{-5}^5$

Tabela 6.2: A separação dos elementos de $sp(6)$ segundo a cadeia de subálgebras considerada.

6.1 A Álgebra $u(6)$ e sua Complementar $u(2)$.

No capítulo anterior vimos o papel do grupo complementar na obtenção de uma base para uma representação qualquer de $U(3)$. Nossa tarefa aqui é mais simples,

haja visto que estamos interessados numa representação particular de $U(6)$, a $[2,1,0,0,0,0]$. Isto significa que o menor grupo que nos sirva de complementar é o $U(2)$ que somente tem os dois operadores diagonais necessários para uma representação cujo Young Tableaux possui apenas duas linhas.

O polinômio de peso maior na álgebra complementar $u(2)$, ou seja, aquele que satisfaz

$$C_{ss}P = h_s P \quad e \quad C_{ss'}P = 0 \quad \text{com} \quad s < s' = 1, 2, \quad (6.5)$$

nos garante uma base que em termos da qual podemos escrever os polinômios para uma representação qualquer de $u(6)$. No capítulo anterior, na equação (5.29), vimos que a solução geral de (6.5), para a representação de $U(6)$ que estamos interessados, é dada por

$$\mathcal{P} = \Delta_m^1 \Delta_{m'm''}^{12}. \quad m, m', m'' = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \quad (6.6)$$

Sabemos [19] que a irrep $[210000]$ de $u(6)$ contém as irreps $[210]$ e $[100]$ de $sp(6)$ e que sua dimensão é 70. Pelo fato de $\Delta_{m'm''}^{12} = -\Delta_{m''m'}^{12}$ temos apenas os elementos acima (ou abaixo) da diagonal independentes. Então temos $\frac{n^2-n}{2} = 15$ valores diferentes para $\Delta_{m'm''}^{12}$, vezes as 6 possibilidades de Δ_m^1 gerando um total de 90 polinômios diferentes. Desses 90, fixando $m = m'$, ficamos com as 5 possibilidades de $m' \neq m''$ vezes os 6 valores possíveis de m , ou seja, 30 polinômios independentes. Nos resta então 60 polinômios para os quais $m \neq m' \neq m''$. Pela regra de Laplace veremos que um terço (20) desses polinômios podem ser escritos em termos dos outros, de forma que ficamos com $30 + 40 = 70$ polinômios independentes, como é necessário para uma representação de dimensão 70. De fato, se na expansão determinantal

$$\Delta_{mm'm''}^{123} = \Delta_{mm'}^{12} \Delta_{m''}^3 + \Delta_{m'm''}^{12} \Delta_m^3 + \Delta_{m''m}^{12} \Delta_{m'}^3, \quad (6.7)$$

fizermos duas colunas iguais, o determinante vai a zero

$$\Delta_{mm'm''}^{121} = \Delta_{mm'}^{12} \Delta_{m''}^1 + \Delta_{m'm''}^{12} \Delta_m^1 + \Delta_{m''m}^{12} \Delta_{m'}^1 = 0. \quad (6.8)$$

Ficamos então com uma espécie de identidade de Jacobi que reduz em $1/3$ os polinômios independentes, nela envolvidos.

6.2 O Estágio Primordial

Transferimos o processo de procura pelo polinômio de maior peso em $u(6)$, dentre os polinômios (6.6), pela procura de um polinômio de maior peso em $sp(6)$. Essa transferência é justificável simplesmente porque o tal polinômio de peso maior em $sp(6)$ também satisfaz os requerimentos, equações (6.11a) a (6.11d), de maior peso em $u(6)$. De fato, como veremos, o polinômio é o mesmo.

O polinômio de peso maior em $sp(6)$ deve satisfazer

$$\mathcal{L}_m^{m'} P = 0, \quad -m \leq m' < m; \quad \mathcal{L}_m^m P = \tau_m P \quad (6.9)$$

onde $[\tau_5, \tau_3, \tau_1]$ é uma irrep de $sp(6)$. Notemos ainda que os geradores de $sp(4)$ são obtidos restringindo os valores de m para $\pm 1/2, \pm 3/2$, e que os vários $su(2)$ da cadeia são gerados por

$$T_m^+ = \frac{1}{2} \mathcal{L}_m^{-m} = \mathcal{C}_m^{-m}, \quad T_m^0 = \frac{1}{2} \mathcal{L}_m^m = \frac{1}{2} (\mathcal{C}_m^m - \mathcal{C}_{-m}^{-m}), \quad T_m^- = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{-m}^m = \mathcal{C}_{-m}^m \quad (6.10)$$

O polinômio de peso maior em $sp(6)$, isto é, aquele que satisfaz (6.9), pode ser encontrado por simples inspeção, de fato escrevemos (6.9) explicitamente para a irrep [210]

$$(\mathcal{C}_m^{m'} - (-1)^{m+m'} \mathcal{C}_{-m'}^{-m}) P = 0 \quad (6.11a)$$

$$(\mathcal{C}_5^5 - \mathcal{C}_{-5}^{-5}) P = 2P \quad (6.11b)$$

$$(\mathcal{C}_3^3 - \mathcal{C}_{-3}^{-3}) P = P \quad (6.11c)$$

$$(\mathcal{C}_1^1 - \mathcal{C}_{-1}^{-1}) P = 0 \quad (6.11d)$$

No capítulo anterior, a equação (5.31) nos diz como os operadores agem trocando os índices dos determinantes. O polinômio da forma $\Delta_m^1 \Delta_{m'm''}^{12}$ que procuramos deve ser constante, pela equação (6.11a), para todos os operadores de levantamento listados na tabela (6.1). Para tal, nenhum índice negativo pode aparecer em P . Pelo mesmo motivo o índice 1 poderia aparecer na forma Δ_{15}^{12} (pois seria constante em relação a $\mathcal{L}_5^1$) porém violaria (6.11d). O termo Δ_{35}^{12} deve aparecer pois é constante para $\mathcal{L}_5^3$ e satisfaz (6.11c). A equação (6.11b) pede uma dupla aparição do índice 5 que providenciamos usando Δ_5^1 . Temos assim, o polinômio de peso maior em $sp(6)$, na representação [210]

$$\mathcal{P}_{\max}^{210} = \Delta_5^1 \Delta_{35}^{12} \quad (6.12)$$

6.3. A SUBÁLGEBRA $SP(4) \oplus SU(2)$: PRIMEIRA QUEBRA DE SIMETRIA.68

A partir deste polinômio poderíamos construir todos os outros termos da base usando operadores de abaixamento de $sp(6)$. Porém desta forma as representações dos subgrupos não poderiam ser explicitamente identificadas. Seguiremos uma análise que leva em consideração a cadeia de subálgebras (6.1).

6.3 A subálgebra $sp(4) \oplus su(2)$: Primeira Quebra de Simetria.

Notemos que, como a irrep $[210000]$ de $u(6)$ contém também a irrep $[100]$ de $sp(6)$ assim como a $[210]$, devemos tomar a precaução para que polinômios pertencentes a representações de $sp(4) \oplus su(2)$ iguais em $[210]$ e $[100]$ sejam ortogonais. Para isso, construímos um invariante em $sp(6)$ usando o produto escalar¹

$$v = \sum_{m=-5/2}^{5/2} (-1)^{5/2+m} \eta_{m1} \eta_{-m2} = -\Delta_{5-5}^{12} + \Delta_{3-3}^{12} - \Delta_{1-1}^{12}, \quad (6.13)$$

e da mesma forma, um invariante em $sp(4)$

$$w = \sum_{m=-3/2}^{3/2} (-1)^{3/2+m} \eta_{m1} \eta_{-m2} = -\Delta_{3-3}^{12} + \Delta_{1-1}^{12}. \quad (6.14)$$

A ação de qualquer operador de $sp(6)$ (ou $sp(4)$) em v (ou w) deve ser 0. Usamos este fato, primeiramente para checar a rotina de ação dos operadores, ACT1.map. Por um procedimento muito semelhante ao descrito na seção anterior, temos o polinômio de peso maior na irrep $[100]$ de $sp(6)$

$$\mathcal{P}_{\max}^{100} = \Delta_5^1 v \quad (6.15)$$

e a sua base inteira é dada por $\Delta_m^1 v$.

Os requerimentos para o polinômio de maior peso em $sp(4) \oplus su(2)$ são

$$\begin{aligned} T_5^+ P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_5^{-5} P = C_5^{-5} P = 0 \\ T_5^0 P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_5^5 P = \frac{1}{2} (C_5^5 - C_{-5}^{-5}) P = t_5 P \end{aligned} \quad (6.16)$$

¹A métrica, [21] (apêndice A), usada aqui para vetores η_{ms} cujas componentes são escritas na forma esférica, é dada por $g_{mm'} = (-1)^{j+m} \delta_{m, -m'}$.

6.3. A SUBÁLGEBRA $SP(4) \oplus SU(2)$: PRIMEIRA QUEBRA DE SIMETRIA.69

$$(C_3^1 - C_1^{-3})P = 0, \quad 2C_3^{-3}P = 0$$

$$(C_5^{-1} - C_1^{-5})P = 0, \quad 2C_1^{-1}P = 0$$

$$(C_3^3 - C_{-3}^{-3})P = \sigma_3 P, \quad (C_1^1 - C_{-1}^{-1})P = \sigma_1 P$$

e numa primeira inspeção obtemos a tabela 6.3 constituída de polinômios que satisfazem as equações (6.16).

t_5	$[\sigma_3 \sigma_1]$	Polinômio	Dimensão
0	[21]	$\Delta_3^1 \Delta_{31}^{12}$	$1 \times 16 = 16$
1/2	[20]	$\Delta_3^1 \Delta_{53}^{12}$	$2 \times 10 = 20$
1/2	[11]	$\Delta_5^1 \Delta_{31}^{12}$	$2 \times 5 = 10$
1	[10]	$\Delta_5^1 \Delta_{35}^{12}$	$3 \times 4 = 12$
0	[10]	$\Delta_3^1 \Delta_{5-5}^{12}$	$1 \times 4 = 4$
1/2	[00]	$\Delta_5^1 \Delta_{5-5}^{12}$	$2 \times 1 = 2$

Tabela 6.3: Sugestão de polinômios de peso máximo em $sp(4) \oplus su(2)$

Mas sabemos que as equações (6.16) acima são igualmente satisfeitas pelos polinômios (6.15) de maior peso nas irreps $[0, [10]]$ e $[1/2, [00]]$ de $sp(4) \oplus su(2)$ contidas na $[100]$ de $sp(6)$, nominalmente $\Delta_3^1 v = \vec{q}_1$ e $\Delta_5^1 v = \vec{q}_2$ respectivamente.

Devemos então fazer uso dos invariantes que construímos (6.13) e (6.14) para corrigir as duas últimas linhas da tabela 6.3. Com isso garantimos que estes polinômios não pertençam às representações de $sp(4) \oplus su(2)$ contidas na $[100]$ de $sp(6)$. Com tal finalidade construímos os polinômios mais gerais em $sp(4) \oplus su(2)$ que satisfaçam as equações (6.16):

$$\vec{p}_1 = \Delta_3^1 (\beta \Delta_{5-5}^{12} + \alpha w), \quad (6.17)$$

$$\vec{p}_2 = \Delta_5^1 (\beta' \Delta_{5-5}^{12} + \alpha' w).$$

Definimos o produto escalar entre dois polinômios P e P' por

$$(P, P') = \langle 0 | P^\dagger P' | 0 \rangle$$

onde $P^\dagger$ é obtido de P substituindo todos os η_{ms} por ξ_{ms} . Impomos enfim, a ortogonalidade relativa aos polinômios q_1 e q_2 de $sp(4) \oplus su(2) \supset [100]$ de $sp(6)$

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{q}_1 = 0 \quad (6.18)$$

$$\vec{p}_2 \cdot \vec{q}_2 = 0,$$

obtendo

$$\begin{aligned} 5\alpha + 2\beta &= 0 \\ -4\alpha' - 3\beta' &= 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Temos assim, os polinômios de peso maior em $sp(4) \oplus su(2)$, polinômios autênticos da irrep $[2,1,0]$ de $sp(6)$, na tabela 6.4, onde substituímos $\overline{\Delta}_{5-5}^{12} = \Delta_{5-5}^{12} + \frac{v}{3}$

t_5	$[\sigma_3 \sigma_1]$	Polinômio	Dimensão
0	[21]	$\Delta_3^1 \Delta_{31}^{12}$	$1 \times 16 = 16$
1/2	[20]	$\Delta_3^1 \Delta_{53}^{12}$	$2 \times 10 = 20$
1/2	[11]	$\Delta_5^1 \Delta_{31}^{12}$	$2 \times 5 = 10$
1	[10]	$\Delta_5^1 \Delta_{35}^{12}$	$3 \times 4 = 12$
0	[10]	$\Delta_3^1 (15 \overline{\Delta}_{5-5}^{12} + w)$	$1 \times 4 = 4$
1/2	[00]	$\Delta_5^1 (6 \overline{\Delta}_{5-5}^{12} - w)$	$2 \times 1 = 2$

Tabela 6.4: Primeira quebra de simetria: $sp(4) \oplus su(2)$

6.4 Segunda Quebra de Simetria: $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$

Dando continuidade a esse processo observemos as regras de ramificação [19] de $sp(4)$ em $su(2) \oplus su(2)$ mostradas na tabela 6.5 abaixo

$[\sigma_3 \sigma_1]$	$[t_3, t_1]$
[21]	$[1, 1/2], [1/2, 1], [1/2, 0], [0, 1/2]$
[20]	$[1, 0], [1/2, 1/2], [0, 1]$
[11]	$[1/2, 1/2], [0, 0]$
[10]	$[1/2, 0], [0, 1/2]$
[00]	$[0, 0]$

Tabela 6.5: Regas de ramificação de $sp(4)$ em $su(2) \oplus su(2)$

Percebemos, pela definição dos geradores dos $su_m(2)$ na equação (6.10), os polinômios da tabela 6.4 também são de peso maior na representação de $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$ correspondente ao primeiro termo da ramificação na tabela 6.5, isto é $t_3 = \frac{\sigma_3}{2}$, $t_1 = \frac{\sigma_1}{2}$. Entretanto temos que construir os outros polinômios que são de peso máximo em $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$, ou seja aqueles que devem cumprir

$$\begin{aligned} T_5^+ P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_5^{-5} P = C_5^{-5} P = 0 \\ T_5^0 P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_5^5 P = \frac{1}{2} (C_5^5 - C_{-5}^{-5}) P = t_5 P \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} T_3^+ P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_3^{-3} P = C_3^{-3} P = 0 \\ T_3^0 P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_3^3 P = \frac{1}{2} (C_3^3 - C_{-3}^{-3}) P = t_3 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1^+ P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^{-1} P = C_1^{-1} P = 0 \\ T_1^0 P &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^1 P = \frac{1}{2} (C_1^1 - C_{-1}^{-1}) P = t_1 P \end{aligned}$$

Vemos que, na tabela de ramificações de $sp(4)$ em $su(2) \oplus su(2)$ que representações diferentes de $sp(4)$ possuem irreps iguais na subálgebra $su(2) \oplus su(2)$, por exemplo, a $[1/2, 0]$ pertence a $[21]$ e a $[10]$ de $sp(4)$. Mas o polinômio de peso maior de $[1/2, 0] \subset [10]$ já foi identificado ($\vec{p}_1 = \Delta_3^1(15\overline{\Delta}_{5-5}^{12} + w)$), assim como o polinômio de peso maior de $[1/2, 0] \subset [10] \subset [100]$ de $sp(6)$ ($\Delta_3^1 v = \vec{q}_1$). Portanto devemos procurar a solução mais geral de (6.20) e impor ortogonalidade entre estas representações conflitantes de $sp(4)$: $[2, 1]$ e $[1, 0] \supset [2, 1, 0]$, e $[1, 0] \supset [1, 0, 0]$. Propomos para a representação $[1/2, 0]$ de $su(2) \oplus su(2)$, pertencente a representação $[21]$ de $sp(4)$, o polinômio mais geral que satisfaça as equações (6.20)

$$\vec{p} = \Delta_3^1(\alpha\Delta_{3-3}^{12} + \beta\Delta_{1-1}^{12} + \gamma\Delta_{5-5}^{12}). \quad (6.21)$$

Impomos então, a ortogonalidade para os polinômios de maior peso em $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$ associados a representações conflitantes

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p}_1 &= 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{q}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Com isto, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} 20\gamma + 12\alpha - 8\beta &= 0 \\ -2\gamma + 3\alpha - 2\beta &= 0, \end{aligned} \quad (6.23)$$

cujas soluções nos leva, a menos de um fator multiplicativo, ao polinômio

$$\vec{p} = \Delta_3^1(\Delta_{3-3}^{12} + \frac{3}{2}\Delta_{1-1}^{12}) \quad (6.24)$$

Após repetir este processo a todas irreps conflitantes, obtemos a tabela abaixo com todos os polinômios de maior peso em $su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$. Neste estágio todos outros polinômios são obtidos diretamente, aplicando-se os operadores de abaixamento de cada $su(2)$. Como estes operadores são incapazes de conectar representações de $sp(4)$ ou $sp(6)$ (ou seja, de dois $su(2)$ distintos) as condições de ortogonalidade estão espontaneamente satisfeitas.

$\begin{bmatrix} \sigma_3 \sigma_1 \\ t_5 t_3 t_1 \end{bmatrix}$	Polinômio	Dimensão
$\begin{bmatrix} [21] \\ 01\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\Delta_3^1 \Delta_{31}^{12}$	6
$\begin{bmatrix} [21] \\ 0\frac{1}{2}1 \end{bmatrix}$	$\Delta_3^1 \Delta_{31}^{12}$	6
$\begin{bmatrix} [21] \\ 0\frac{1}{2}0 \end{bmatrix}$	$\Delta_3^1(\Delta_{3-3}^{12} + \frac{3}{2}\Delta_{1-1}^{12})$	2
$\begin{bmatrix} [21] \\ 00\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\Delta_1^1(\frac{3}{2}\Delta_{3-3}^{12} + \Delta_{1-1}^{12})$	2
$\begin{bmatrix} [20] \\ \frac{1}{2}10 \end{bmatrix}$	$\Delta_3^1 \Delta_{53}^{12}$	6
$\begin{bmatrix} [20] \\ \frac{1}{2}01 \end{bmatrix}$	$\Delta_1^1 \Delta_{51}^{12}$	6
$\begin{bmatrix} [20] \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\Delta_3^1 \Delta_{51}^{12} + \Delta_1^1 \Delta_{53}^{12}$	8
$\begin{bmatrix} [11] \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\Delta_5^1 \Delta_{31}^{12}$	8
$\begin{bmatrix} [11] \\ \frac{1}{2}00 \end{bmatrix}$	$\Delta_5^1(\Delta_{3-3}^{12} + \Delta_{1-1}^{12})$	2
$\begin{bmatrix} [10] \\ 1\frac{1}{2}0 \end{bmatrix}$	$\Delta_5^1 \Delta_{53}^{12}$	6
$\begin{bmatrix} [10] \\ 10\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\Delta_5^1 \Delta_{51}^{12}$	6
$\begin{bmatrix} [10] \\ 0\frac{1}{2}0 \end{bmatrix}$	$\Delta_3^1(15\overline{\Delta}_{5-5}^{12} + w)$	2
$\begin{bmatrix} [10] \\ 00\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\Delta_1^1(15\overline{\Delta}_{5-5}^{12} + w)$	2
$\begin{bmatrix} [00] \\ \frac{1}{2}00 \end{bmatrix}$	$\Delta_3^1(6\overline{\Delta}_{5-5}^{12} - w)$	2

6.5 A Base Polinomial Completa

Está listado nas seguintes tabelas, o resultado da implementação da primeira rotina em linguagem algébrica Maple, chamada “ACT2.map”—Apêndice A, para efetuar as derivadas parciais necessárias para gerar a base polinomial completa. Nesta altura recuperamos o fator $1/2$ nos índices m , para indicar a qual índice as derivadas devem ser tomadas relativas.

TabelaA1: Base Polinomial para a Representação dos Códon..	
Polinômio	“Etiqueta”
	$ \sigma_1, \sigma_3, t_5, t_3, t_1, m_5, m_3, m_1\rangle$
$\eta_{-3/2,1}\eta_{1/2,1}\eta_{1/2,2} - \eta_{-3/2,2}\eta_{1/2,1}^2$	$[2, 1, 0, 1/2, 1, 0, -1/2, 1]$
$\eta_{-5/2,1}(2\eta_{-5/2,1}\eta_{1/2,2} - \eta_{-5/2,2}\eta_{1/2,1}) - \eta_{-5/2,2}\eta_{-5/2,1}\eta_{1/2,1}$	$[1, 0, 1, 0, 1/2, -1, 0, 1/2]$
$\eta_{-3/2,1}(2\eta_{-3/2,1}\eta_{1/2,2} - \eta_{-3/2,2}\eta_{1/2,1}) - \eta_{-3/2,2}\eta_{-3/2,1}\eta_{1/2,1}$	$[2, 1, 0, 1, 1/2, 0, -1, 1/2]$
$\eta_{-1/2,2}\eta_{-1/2,1}\eta_{1/2,1} - \eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1}^2 + \frac{3\eta_{-1/2,1}\eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2}}{2} - \frac{3\eta_{-1/2,1}\eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1}}{2}$	$[2, 1, 0, 0, 1/2, 0, 0, -1/2]$
$\eta_{-3/2,1}(\eta_{5/2,1}\eta_{3/2,2} - 2\eta_{5/2,2}\eta_{3/2,1}) + \eta_{-3/2,2}\eta_{3/2,1}\eta_{5/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1, 0, 1/2, 0, 0]$
$\eta_{-5/2,1}\eta_{3/2,1}\eta_{3/2,2} - \eta_{-5/2,2}\eta_{3/2,1}^2$	$[2, 0, 1/2, 1, 0, -1/2, 1, 0]$
$-\eta_{-1/2,1}\eta_{5/2,1}\eta_{5/2,2} + \eta_{-1/2,2}\eta_{5/2,1}^2$	$[1, 0, 1, 0, 1/2, 1, 0, -1/2]$
$\eta_{1/2,1}(\eta_{5/2,1}\eta_{1/2,2} - \eta_{5/2,2}\eta_{1/2,1})$	$[2, 0, 1/2, 0, 1, 1/2, 0, 1]$
$\eta_{-5/2,1}\eta_{1/2,1}\eta_{1/2,2} - \eta_{-5/2,2}\eta_{1/2,1}^2$	$[2, 0, 1/2, 0, 1, -1/2, 0, 1]$
$\eta_{-1/2,1}(\eta_{5/2,1}\eta_{1/2,2} - 2\eta_{5/2,2}\eta_{1/2,1}) + \eta_{-1/2,2}\eta_{1/2,1}\eta_{5/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 0, 1, 1/2, 0, 0]$
$\eta_{-5/2,1}(\eta_{3/2,1}\eta_{1/2,2} + \eta_{3/2,2}\eta_{1/2,1}) - 2\eta_{-5/2,2}\eta_{3/2,1}\eta_{1/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2, 1/2]$
$\eta_{3/2,1}(\eta_{5/2,1}\eta_{3/2,2} - \eta_{5/2,2}\eta_{3/2,1})$	$[2, 0, 1/2, 1, 0, 1/2, 1, 0]$
$\eta_{-1/2,1}(-2\eta_{-1/2,1}\eta_{5/2,2} + \eta_{-1/2,2}\eta_{5/2,1}) + \eta_{-1/2,2}\eta_{-1/2,1}\eta_{5/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 0, 1, 1/2, 0, -1]$
$\eta_{-5/2,1}(\eta_{1/2,1}\eta_{-1/2,2} - \eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1} + \eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2} - \eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1})$	$[1, 1, 1/2, 0, 0, -1/2, 0, 0]$
$\eta_{-3/2,1}(\eta_{5/2,1}\eta_{1/2,2} - 2\eta_{5/2,2}\eta_{1/2,1}) + \eta_{-3/2,2}\eta_{1/2,1}\eta_{5/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2]$
$-\eta_{-1/2,1}\eta_{5/2,1}\eta_{3/2,2} + \eta_{-1/2,2}\eta_{3/2,1}\eta_{5/2,1}$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2]$
$\eta_{3/2,1}(\eta_{3/2,1}\eta_{1/2,2} - \eta_{3/2,2}\eta_{1/2,1})$	$[2, 1, 0, 1, 1/2, 0, 1, 1/2]$

TabelaA1: Base Polinomial para a Representação dos Códon.. Continuação.	
Polinômio	“Etiqueta”
	$[\sigma_1, \sigma_3, t_5, t_3, t_1, m_5, m_3, m_1]$
$\eta_{5/2,1} (\eta_{3/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{3/2,2} \eta_{1/2,1})$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$
$\eta_{-1/2,1} (-2 \eta_{-1/2,1} \eta_{3/2,2} + \eta_{-1/2,2} \eta_{3/2,1}) + \eta_{-1/2,2} \eta_{-1/2,1} \eta_{3/2,1}$	$[2, 1, 0, 1/2, 1, 0, 1/2, -1]$
$\eta_{1/2,1} (\eta_{1/2,1} \eta_{-1/2,2} - \eta_{1/2,2} \eta_{-1/2,1} + \frac{3 \eta_{3/2,1} \eta_{-3/2,2}}{2} - \frac{3 \eta_{3/2,2} \eta_{-3/2,1}}{2})$	$[2, 1, 0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]$
$\eta_{5/2,1} (\eta_{5/2,1} \eta_{3/2,2} - \eta_{5/2,2} \eta_{3/2,1})$	$[1, 0, 1, 1/2, 0, 1, 1/2, 0]$
$\eta_{-5/2,1} (\eta_{3/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{3/2,2} \eta_{1/2,1})$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2, 1/2]$
$\eta_{-5/2,1} (\eta_{3/2,2} \eta_{-3/2,1} + \eta_{3/2,1} \eta_{-3/2,2}) - 2 \eta_{-5/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{3/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1, 0, -1/2, 0, 0]$
$\eta_{-5/2,1} (\eta_{-3/2,1} \eta_{1/2,2} + \eta_{-3/2,2} \eta_{1/2,1}) - 2 \eta_{-5/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{1/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2, 1/2]$
$-2 \eta_{-1/2,1} \eta_{-3/2,1} \eta_{-3/2,2} + 2 \eta_{-1/2,2} \eta_{-3/2,1}^2$	$[2, 1, 0, 1, 1/2, 0, -1, -1/2]$
$\eta_{3/2,1} (\eta_{3/2,1} \eta_{-3/2,2} - \eta_{3/2,2} \eta_{-3/2,1} + \frac{3 \eta_{1/2,1} \eta_{-1/2,2}}{2} - \frac{3 \eta_{1/2,2} \eta_{-1/2,1}}{2})$	$[2, 1, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0]$
$\eta_{-5/2,1} (2 \eta_{-5/2,1} \eta_{-1/2,2} - \eta_{-5/2,2} \eta_{-1/2,1}) - \eta_{-5/2,2} \eta_{-5/2,1} \eta_{-1/2,1}$	$[1, 0, 1, 0, 1/2, -1, 0, -1/2]$
$\eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{-3/2,2} \eta_{1/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2]$
$\eta_{-5/2,1} (\eta_{-1/2,1} \eta_{-3/2,2} + \eta_{-1/2,2} \eta_{-3/2,1}) - 2 \eta_{-5/2,2} \eta_{-1/2,1} \eta_{-3/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2, -1/2]$
$\eta_{-3/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{3/2,1} - \eta_{3/2,2} \eta_{-3/2,1}^2 + \frac{3 \eta_{-3/2,1} \eta_{1/2,1} \eta_{-1/2,2}}{2} - \frac{3 \eta_{-3/2,1} \eta_{1/2,2} \eta_{-1/2,1}}{2}$	$[2, 1, 0, 1/2, 0, 0, -1/2, 0]$
$2 \eta_{-5/2,1} \eta_{-1/2,1} \eta_{-1/2,2} - 2 \eta_{-5/2,2} \eta_{-1/2,1}^2$	$[2, 0, 1/2, 0, 1, -1/2, 0, -1]$
$2 \eta_{-5/2,1} \eta_{-3/2,1} \eta_{-3/2,2} - 2 \eta_{-5/2,2} \eta_{-3/2,1}^2$	$[2, 0, 1/2, 1, 0, -1/2, -1, 0]$
$\eta_{-5/2,1} (\eta_{1/2,2} \eta_{-1/2,1} + \eta_{1/2,1} \eta_{-1/2,2}) - 2 \eta_{-5/2,2} \eta_{-1/2,1} \eta_{1/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 0, 1, -1/2, 0, 0]$
$\eta_{-1/2,1} (\eta_{5/2,1} \eta_{3/2,2} - 2 \eta_{5/2,2} \eta_{3/2,1}) + \eta_{-1/2,2} \eta_{3/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2]$
$\eta_{5/2,1} (\eta_{1/2,1} \eta_{-1/2,2} - \eta_{1/2,2} \eta_{-1/2,1} + \eta_{3/2,1} \eta_{-3/2,2} - \eta_{3/2,2} \eta_{-3/2,1})$	$[1, 1, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 0]$
$\eta_{1/2,1} (\eta_{3/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{3/2,2} \eta_{1/2,1})$	$[2, 1, 0, 1/2, 1, 0, 1/2, 1]$
$-\eta_{-1/2,1} \eta_{-5/2,1} \eta_{-3/2,2} + \eta_{-1/2,2} \eta_{-5/2,1} \eta_{-3/2,1}$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2, -1/2]$

TabelaA1: Base Polinomial para a Representação dos Códons.. Continuação.	
Polinômio	“Etiqueta”
	$[\sigma_1, \sigma_3, t_5, t_3, t_1, m_5, m_3, m_1]$
$\eta_{-1/2,1} (\eta_{3/2,1} \eta_{1/2,2} - 2 \eta_{3/2,2} \eta_{1/2,1}) + \eta_{-1/2,2} \eta_{3/2,1} \eta_{1/2,1}$	$[2, 1, 0, 1/2, 1, 0, 1/2, 0]$
$\eta_{-1/2,1} (-\eta_{3/2,2} \eta_{-3/2,1} - \eta_{3/2,1} \eta_{-3/2,2}) + 2 \eta_{-1/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{3/2,1}$	$[2, 1, 0, 1, 1/2, 0, 0, -1/2]$
$\eta_{-1/2,1} (-2 \eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,2} + \eta_{-3/2,2} \eta_{5/2,1}) + \eta_{-1/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2]$
$\eta_{-5/2,1} (-\eta_{-1/2,1} \eta_{5/2,2} + 2 \eta_{-1/2,2} \eta_{5/2,1}) - \eta_{-5/2,2} \eta_{-1/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[1, 0, 1, 0, 1/2, 0, 0, -1/2]$
$\eta_{-1/2,1} (\eta_{-5/2,1} \eta_{3/2,2} - 2 \eta_{-5/2,2} \eta_{3/2,1}) + \eta_{-1/2,2} \eta_{-5/2,1} \eta_{3/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2, -1/2]$
$\eta_{-5/2,1} (2 \eta_{-5/2,1} \eta_{3/2,2} - \eta_{-5/2,2} \eta_{3/2,1}) - \eta_{-5/2,2} \eta_{-5/2,1} \eta_{3/2,1}$	$[1, 0, 1, 1/2, 0, -1, 1/2, 0]$
$\eta_{-5/2,1} (-\eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,2} + 2 \eta_{-3/2,2} \eta_{5/2,1}) - \eta_{-5/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[1, 0, 1, 1/2, 0, 0, -1/2, 0]$
$\eta_{-5/2,1} (-\eta_{-1/2,1} \eta_{3/2,2} + \eta_{-1/2,2} \eta_{3/2,1})$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2, -1/2]$
$\eta_{3/2,1} (\eta_{5/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{5/2,2} \eta_{1/2,1})$ $+ \eta_{1/2,1} (\eta_{5/2,1} \eta_{3/2,2} - \eta_{5/2,2} \eta_{3/2,1})$	$[2, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$
$\eta_{-5/2,1} (\eta_{-3/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{-3/2,2} \eta_{1/2,1})$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2, 1/2]$
$-\eta_{-1/2,1} \eta_{3/2,1} \eta_{3/2,2} + \eta_{-1/2,2} \eta_{3/2,1}^2$	$[2, 1, 0, 1, 1/2, 0, 1, -1/2]$
$\eta_{-5/2,1} (2 \eta_{5/2,1} \eta_{3/2,2} - \eta_{5/2,2} \eta_{3/2,1}) - \eta_{-5/2,2} \eta_{3/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[1, 0, 1, 1/2, 0, 0, 1/2, 0]$
$\eta_{-3/2,1} (\eta_{1/2,2} \eta_{-1/2,1} + \eta_{1/2,1} \eta_{-1/2,2}) - 2 \eta_{-3/2,2} \eta_{-1/2,1} \eta_{1/2,1}$	$[2, 1, 0, 1/2, 1, 0, -1/2, 0]$
$\eta_{-5/2,1} (2 \eta_{-5/2,1} \eta_{-3/2,2} - \eta_{-5/2,2} \eta_{-3/2,1}) - \eta_{-5/2,2} \eta_{-5/2,1} \eta_{-3/2,1}$	$[1, 0, 1, 1/2, 0, -1, -1/2, 0]$
$\eta_{-1/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,1} - \eta_{-3/2,2} \eta_{-1/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[1, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2]$
$-\eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,1} \eta_{5/2,2} + \eta_{-3/2,2} \eta_{5/2,1}^2$	$[1, 0, 1, 1/2, 0, 1, -1/2, 0]$
$\eta_{5/2,1} (\eta_{5/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{5/2,2} \eta_{1/2,1})$	$[1, 0, 1, 0, 1/2, 1, 0, 1/2]$
$\eta_{-5/2,1} (2 \eta_{5/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{5/2,2} \eta_{1/2,1}) - \eta_{-5/2,2} \eta_{1/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[1, 0, 1, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]$
$2 \eta_{-3/2,1} \eta_{-1/2,1} \eta_{-1/2,2} - 2 \eta_{-3/2,2} \eta_{-1/2,1}^2$	$[2, 1, 0, 1/2, 1, 0, -1/2, -1]$
$\eta_{-3/2,1} (2 \eta_{3/2,1} \eta_{1/2,2} - \eta_{3/2,2} \eta_{1/2,1}) - \eta_{-3/2,2} \eta_{3/2,1} \eta_{1/2,1}$	$[2, 1, 0, 1, 1/2, 0, 0, 1/2]$
$\eta_{-3/2,1} (-2 \eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,2} + \eta_{-3/2,2} \eta_{5/2,1}) + \eta_{-3/2,2} \eta_{-3/2,1} \eta_{5/2,1}$	$[2, 0, 1/2, 1, 0, 1/2, -1, 0]$

TabelaA1: Base Polinomial para a Representação dos Códon.. Continuação.	
Polinômio	“Etiqueta”
	$[\sigma_1, \sigma_3, t_5, t_3, t_1, m_5, m_3, m_1]$
$\eta_{-1/2,1}(10\eta_{5/2,1}\eta_{-5/2,2} - 10\eta_{5/2,2}\eta_{-5/2,1} + 4\eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2}$ $- 4\eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1} - 8\eta_{1/2,1}\eta_{-1/2,2} + 4\eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1}) + 4\eta_{-1/2,2}\eta_{-1/2,1}\eta_{1/2,1}$	$[1, 0, 0, 0, 1/2, 0, 0, -1/2]$
$\eta_{-3/2,1}(10\eta_{5/2,1}\eta_{-5/2,2} - 10\eta_{5/2,2}\eta_{-5/2,1} + 8\eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2}$ $- 4\eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1} - 4\eta_{1/2,1}\eta_{-1/2,2} + 4\eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1}) - 4\eta_{-3/2,2}\eta_{-3/2,1}\eta_{3/2,1}$	$[1, 0, 0, 1/2, 0, 0, -1/2, 0]$
$\eta_{5/2,1}(4\eta_{5/2,1}\eta_{-5/2,2} - 4\eta_{5/2,2}\eta_{-5/2,1} + 3\eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2}$ $- 3\eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1} - 3\eta_{1/2,1}\eta_{-1/2,2} + 3\eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1})$	$[0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 0]$
$\eta_{3/2,1}(10\eta_{5/2,1}\eta_{-5/2,2} - 10\eta_{5/2,2}\eta_{-5/2,1} + 4\eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2}$ $- 4\eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1} - 4\eta_{1/2,1}\eta_{-1/2,2} + 4\eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1})$	$[1, 0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0]$
$\eta_{-5/2,1}(8\eta_{5/2,1}\eta_{-5/2,2} - 4\eta_{5/2,2}\eta_{-5/2,1} + 3\eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2}$ $- 3\eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1} - 3\eta_{1/2,1}\eta_{-1/2,2} + 3\eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1}) - 4\eta_{-5/2,2}\eta_{5/2,1}\eta_{-5/2,1}$	$[0, 0, 1/2, 0, 0, -1/2, 0, 0]$
$\eta_{1/2,1}(10\eta_{5/2,1}\eta_{-5/2,2} - 10\eta_{5/2,2}\eta_{-5/2,1} + 4\eta_{3/2,1}\eta_{-3/2,2}$ $- 4\eta_{3/2,2}\eta_{-3/2,1} - 4\eta_{1/2,1}\eta_{-1/2,2} + 4\eta_{1/2,2}\eta_{-1/2,1})$	$[1, 0, 0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]$

Capítulo 7

Resultados

7.1 Introdução

Usando a base construída no capítulo anterior, expomos aqui alguns aspectos relevantes sobre o mecanismo de ação dos operadores de $sp(6)$ e de suas subálgebras na cadeia considerada neste modelo. A ação destes operadores sobre os vetores de estados associados aos códons é analisada no contexto de um novo ‘assignment’, de acordo com as mudanças produzidas no código genético ao longo da sequência evolutiva. Este novo ‘assignment’ é o resultado de um processo de resolução da ambigüidade relativa a associação dos aminoácidos a estrutura de multipletos da cadeia de subálgebras de Lie. A ambigüidade foi eliminada por meio de hipóteses de simetria visando incorporar o emparelhamento de Watson-Crick e a completeza de famílias de códons. A distinção entre as representações de $sp(4) \oplus su(2)$ é feita de acordo com o valor do spin deste $su(2)$: se 1 ou 0, representação bosônica; se $1/2$ representação fermiônica. Com esta separação temos um notável equilíbrio entre os dois setores: 32 códons em cada. As propriedades de simetria que levaram a este assignment dos aminoácidos é discutida em [14]. Ressaltamos que ainda permanece alguma liberdade de mudança nos códons pertencentes a um mesmo aminoácido.

Nas tabelas 7.1 a 7.4 que se seguem expomos este assignment. Nestas tabelas a notação usada é a original de Hornos & Hornos [13], que faz uso dos números

quânticos

$$| k_1, k_2, s_1, s_2, s_3, m_1, m_2, m_3 > . \quad (7.1)$$

Como exposto nas tabelas referentes a base polinomial completa no capítulo anterior, os polinômios estão apresentados com a notação usada por M. Moshinsky [5]

$$| \sigma_1, \sigma_3, t_5, t_3, t_1, m_5, m_3, m_1 > . \quad (7.2)$$

Para encontrar o polinômio correspondente a um códon nestas tabelas é necessário efetuar a transformação

$$\begin{cases} \sigma_1 = k_1 + k_2, \sigma_3 = k_2 \\ t_3 = \frac{s_1}{2}, t_1 = \frac{s_2}{2}, t_5 = \frac{s_3}{2} \\ m_5 = \frac{m_3}{2}, m_3 = \frac{m_1}{2}, m_1 = \frac{m_2}{2} . \end{cases} \quad (7.3)$$

Nestas tabelas estão presentes os códons com suas coordenadas relativas ao sistema de pesos numa base ortogonal.

Na tabela 7.1, encontramos parte do setor bosônico. A representação denotada por [10-2] é uma representação bosônica, pois o valor do spin de $su(2)$ é 1 —nesta notação o valor de s_i é dobrado, portanto m_i assume $m_i = 2, 0, -2$. Sua localização geométrica é vertical, mostrada na figura 7.1, e são chamados bósons vetoriais. Todos os outros bósons se encontram no plano $z = 0$, estes são chamados bósons escalares. O restante do setor bosônico é mostrado na tabela 7.2.

O setor fermiônico é visto nas tabelas 7.3 e 7.4. Estas representações estão distribuídas espacialmente ao longo dos planos $z = \pm 1$, que intercalam as representações. De cima para baixo: bósons vetoriais, férmions, bósons escalares, férmions, bósons vetoriais. A disposição destas representações fermiônicas nos planos $z = \pm 1$ é mostrada na figura 7.2. Notemos que em todo o diagrama a multiplicidade dos pontos é inversamente proporcional a distância do seu centro, assumindo os valores 4,2,1, figura 7.3.

7.2 Transição entre Códon: A Atuação de $sp(6)$.

Sabemos que, pelas propriedades de raízes e pesos, um estado de peso Λ será levado, por um operador de raiz α , a uma posição no diagrama de pesos cor-

Bosons Vetoriais [10-2]		
Aminoácido	Códons	Pesos
Leu	UUA	[0,1,0]
	UUG	[0,-1,0]
	CUU	[0,1,2]
	CUC	[0,-1,2]
	CUA	[0,1,-2]
	CUG	[0,-1,-2]
Ser	UCU	[-1,0,2]
	UCC	[1,0,2]
	UCA	[-1,0,-2]
	UCG	[1,0,-2]
	AGU	[-1,0,0]
	AGC	[1,0,0]
Representação Fundamental [10-0]		
Asn	AAU	[0,-1,0]
	AAC	[0,1,0]
Lys	AAA	[1,0,0]
	AAG	[-1,0,0]

Tabela 7.1: Parte do setor bosônico, bósons fundamentais e vetoriais.

Representação Principal [11-0]		
Aminoácido	Códons	Pesos
Arg	AGA	[0,-1,0]
	AGG	[0,1,0]
	CGU	[-2,1,0]
	CGC	[2,1,0]
	CGA	[-2,-1,0]
	CGG	[2,-1,0]
Ala	GCU	[-1,2,0]
	GCC	[1,2,0]
	GCA	[-1,-2,0]
	GCG	[1,-2,0]
Phe	UUU	[1,0,0]
	UUC	[-1,0,0]
Asp	GAU	[0,1,0]
	GAC	[0,-1,0]
Glu	GAA	[-1,0,0]
	GAG	[1,0,0]

Tabela 7.2: O restante do setor bosônico: os bósons principais.

Representação Adjunta [20-1]		
Aminoácido	Códons	Pesos
Tyr	UAU	(0,2,1)
	UAC	(0,-2,1)
Trp	UGG	(0,0,1)
Cys	UGU	(0,2,-1)
	UGC	(0,-2,-1)
Met	AUG	(0,0,-1)
Val	GUU	(-1,1,-1)
	GUC	(1,1,-1)
	GUA	(-1,-1,-1)
	GUG	(1,-1,-1)
Pro	CCU	(-1,1,1)
	CCC	(1,1,1)
	CCA	(-1,-1,1)
	CCG	(1,-1,1)
Term	UAA	(-2,0,-1)
	UAG	(2,0,-1)
	UGA	(0,0,-1)
Ile	AUU	(-2,0,1)
	AUC	(2,0,1)
	AUA	(0,0,1)

Tabela 7.3: Parte do setor fermiônico: férmions adjuntos.

Decuplete de Férmions [01-1]		
Aminoácido	Códons	Pesos
Thr	ACU	(-1,1,1)
	ACC	(1,1,1)
	ACA	(-1,-1,1)
	ACG	(1,-1,1)
Gly	GGU	(-1,1,-1)
	GGC	(1,1,-1)
	GGA	(-1,-1,-1)
	GGG	(1,-1,-1)
Gln	CAA	(0,0,1)
	CAG	(0,0,-1)
Representação trivial [00-1]		
His	CAU	(0,0,1)
	CAC	(0,0,-1)

Tabela 7.4: O restante do setor fermiônico: férmions triviais e o decuplete de férmions.

Figura 7.1: O setor Bosônico.

Figura 7.2: O setor Fermiônico

respondente a um estado de peso $\Lambda + \alpha$. Mas, como veremos, existem certas restrições a esta regra para algumas transições. Discutimos nesta seção a ação de alguns operadores típicos, sendo a ação dos operadores similares a estes, tabelada no apêndice B.

7.2.1 Transições Invariantes

Na tabela A, mostramos as transições promovidas pelo operador $\mathcal{L}_{-3}^3$, este operador pertence a $su_1(2)$ e sua ação é ao longo do eixo x . Nestas transições a mudança nos códons é realizada basicamente, 18 em 24, na terceira base. Notemos aqui a maior tendência¹ das transições de $C \rightarrow U$, 8 em 10; e de $G \rightarrow A$, 9 em 11. Estas bases, C e G, quando na terceira posição sempre mudam. Enquanto que, quando a terceira base é A ou U, a mudança pode ocorrer somente nas duas primeiras posições. Ressaltamos ainda a resistência dos códons da ILE de se encaixarem nas regras de maior frequência. Este operador portanto implementa uma mudança nos códons deixando invariante o processo de tradução do código genético.

7.2.2 O Operador Evolução, $\mathcal{L}_{-5}^5$

Este operador, $\mathcal{L}_{-5}^5$, é pertencente a $su_3(2)$, e age deslocando os estados de cima para baixo na direção vertical, sua raiz é $(0, 0, -1)$. Esta ação, exposta na tabela B, preserva somente a tradução da SER e LEU, bósons vetoriais, da HIS, férmion trivial, e do GLN, pertencente ao decuplete de férmions— vide figura 7.2. Notemos que nesta ação, em contraste com a anterior efetuada por $\mathcal{L}_{-3}^3$, a tendência da terceira base de permanecer invariante é acentuada: em somente 7 das 24 transições ocorre mudança. Esta ação não mistura as representações fermiônicas/bosônicas, esta propriedade pode ser também verificada com a ajuda das figuras 7.1 e 7.2. Este fato corresponde a dizer que este operador preserva o código genético em sua forma primordial intermediária, em que cada representação fermiônica/bosônica codificava apenas um aminoácido. Notemos ainda que este operador aniquila *todos* os bósons escalares.

¹Nesta estatística contamos as transições em ambos sentidos.

Figura 7.3: A disposição espacial dos códons, mostrando suas multiplicidades. Atenção deve ser dada aos planos horizontais, $z = 0, \pm 1, \pm 2$.

7.2.3 Transições Intra-férmions e Intra-bósons

Na tabela C, mostramos a ação do operador $\mathcal{L}_1^3$. Esta ação é realizada espacialmente numa direção diagonal se limitando a um plano. Notemos que a ação deste operador não mistura as representações fermiônicas nem as bosônicas, i.e. no diagrama das figuras 7.1 e 7.2 as transições são realizadas respeitando o sistema de cores que indica cada representação. Contudo ela mistura códons associados a diferentes aminoácidos no estágio atual. Nenhuma regularidade na mudança dos códons foi encontrada até o momento, entretanto a possibilidade de se fazer mudanças no assignment dos códons associados a um mesmo aminoácido ainda estimula esta procura.

Tabela A. A ação não nula do gerador $\mathcal{L}_{-3}^3$.	
$\mathcal{L}_{-3}^3 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$	$2 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$	$2 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$	$2 (ARG_{-1,1/2,0}) (CGU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$2 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$	$2 (TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$	$2 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (SER_{1/2,0,1}) (UCC)$	$2 (SER_{-1/2,0,1}) (UCU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)$	$2 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$	$2 (TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$2 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$	$2 (ILE_{-1,0,1/2}) (AUU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$	$2 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$	$2 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$	$2 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$	$2 (ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$	$2 (ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$2 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$	$2 (PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (SER_{1/2,0,-1}) (UCG)$	$2 (SER_{-1/2,0,-1}) (UCA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)$	$2 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ALA_{1/2,-1,0}) (GCG)$	$2 (ALA_{-1/2,-1,0}) (GCA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)$	$2 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)$	$2 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)$
$\mathcal{L}_{-3}^3 (ILE_{1,0,1/2}) (AUC)$	$2 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$

Tabela B. A ação não nula do gerador $\mathcal{L}_{-5}^5$	
$\mathcal{L}_{-5}^5 (SER_{1/2,0,1}) (UCC)$	$2 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$	$2 (LEU_{0,-1/2,-1}) (CUG)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$	$2 (SER_{1/2,0,-1}) (UCG)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (ILE_{-1,0,1/2}) (AUU)$	$2 (TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (TYR_{0,-1,1/2}) (UAC)$	$2 (CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$2 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$	$2 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$	$2 (CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (HIS_{0,0,1/2}) (CAU)$	$2 (HIS_{0,0,-1/2}) (CAC)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$2 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$	$2 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (ILE_{1,0,1/2}) (AUC)$	$2 (TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$	$2 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$2 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$	$2 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$2 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (SER_{-1/2,0,1}) (UCU)$	$2 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$	$2 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$	$2 (LEU_{0,1/2,-1}) (CUA)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (LEU_{0,1/2,1}) (CUU)$	$2 (LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$	$2 (SER_{-1/2,0,-1}) (UCA)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$	$2 (TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$	$2 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$
$\mathcal{L}_{-5}^5 (LEU_{0,-1/2,1}) (CUC)$	$2 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$

Tabela C. A ação de um típico operador de $sp(4)$, $\mathcal{L}_1^3$.	
$\mathcal{L}_1^3 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$	$(GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$
$\mathcal{L}_1^3 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$	$-2 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)$
$\mathcal{L}_1^3 (ILE_{1,0,1/2}) (AUC)$	$(PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$
$\mathcal{L}_1^3 (ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$	$(GLU_{1/2,0,0}) (GAG) + \frac{(PHE_{1/2,0,0})(UUU)}{2}$
$\mathcal{L}_1^3 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)$	$(ASN_{0,1/2,0}) (AAC)$
$\mathcal{L}_1^3 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)$	$(GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$
$\mathcal{L}_1^3 (SER_{1/2,0,-1}) (UCG)$	$(LEU_{0,1/2,-1}) (CUA)$
$\mathcal{L}_1^3 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$	$(TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$
$\mathcal{L}_1^3 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$	$2 (CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$
$\mathcal{L}_1^3 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)$	$\frac{3 (GLU_{-1/2,0,0})(GAA)}{2} - \frac{5 (PHE_{-1/2,0,0})(UUC)}{4}$
$\mathcal{L}_1^3 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$(TRP_{0,0,1/2}) (UGG) + (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$
$\mathcal{L}_1^3 (TYR_{0,-1,1/2}) (UAC)$	$2 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$
$\mathcal{L}_1^3 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$	$-2 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$
$\mathcal{L}_1^3 (TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$	$(VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$
$\mathcal{L}_1^3 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$	$(ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$
$\mathcal{L}_1^3 (CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$	$2 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_1^3 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)$	$-\frac{5 (ARG_{0,1/2,0})(AGG)}{4} + \frac{3 (ASP_{0,1/2,0})(GAU)}{2}$
$\mathcal{L}_1^3 (ALA_{1/2,-1,0}) (GCG)$	$2 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC) + (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$
$\mathcal{L}_1^3 (LEU_{0,-1/2,1}) (CUC)$	$(SER_{-1/2,0,1}) (UCU)$

Tabela C. Continuação	
$\mathcal{L}_1^3 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$(PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$
$\mathcal{L}_1^3 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$	$(GLU_{-1/2,0,0}) (GAA) + \frac{(PHE_{-1/2,0,0})(UUC)}{2}$
$\mathcal{L}_1^3 (ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$	$(ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$
$\mathcal{L}_1^3 (PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$	$\frac{(ARG_{0,1/2,0})(AGG)}{2} + (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$
$\mathcal{L}_1^3 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$	$(PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$
$\mathcal{L}_1^3 (LEU_{0,-1/2,-1}) (CUG)$	$(SER_{-1/2,0,-1}) (UCA)$
$\mathcal{L}_1^3 (TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$	$(VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$
$\mathcal{L}_1^3 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$	$(VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$
$\mathcal{L}_1^3 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$	$(TERM_{0,0,-1/2}) (UGA) + (MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$
$\mathcal{L}_1^3 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)$	$(LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)$
$\mathcal{L}_1^3 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)$	$-\frac{5 (ARG_{-1,1/2,0})(CGU)}{4}$
$\mathcal{L}_1^3 (PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$	$\frac{(ARG_{-1,1/2,0})(CGU)}{2}$
$\mathcal{L}_1^3 (ALA_{-1/2,-1,0}) (GCA)$	$(ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)$
$\mathcal{L}_1^3 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$	$-\frac{5 (ALA_{-1/2,1,0})(GCU)}{2}$
$\mathcal{L}_1^3 (SER_{1/2,0,1}) (UCC)$	$(LEU_{0,1/2,1}) (CUU)$
$\mathcal{L}_1^3 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$	$(ILE_{-1,0,1/2}) (AUU)$
$\mathcal{L}_1^3 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$	$(SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$
$\mathcal{L}_1^3 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$	$(LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$
$\mathcal{L}_1^3 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$2 (TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$

7.2.4 Transições Primordiais

O último tipo de gerador a ser analisado, é um típico gerador de $sp(6)$. Esta classe de operadores tem a capacidade de misturar as representações fermiônicas e bosônicas, e inclusive transformar férmions em bósons e vice-versa. A ação do gerador $\mathcal{L}_1^5$, é apresentada na tabela D. Especialmente sua ação é efetuada ao longo de uma diagonal inter-planos—sua raiz é $(0,1,-1)$, representada na figura 7.4. Notemos que em princípio não existe uma razão para a transição, por exemplo

$$\mathcal{L}_1^5 (TYR_{0,-1,1/2}) (UAC) \rightarrow \frac{4 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)}{5} - \frac{3 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)}{10} - (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG),$$

não conter a ARG. A resposta a esta questão permanece aberta, e acreditamos poder correlacionar este fato, um subproduto da simetria simplética, com justificativas biológicas numa análise futura.

Tabela D: A ação não nula de um típico gerador de $sp(6)$: $\mathcal{L}_1^5$

$\mathcal{L}_1^5 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$	$-\frac{(LEU_{0,1/2,-1})(CUA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$	$(TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$
$\mathcal{L}_1^5 (ILE_{-1,0,1/2}) (AUU)$	$-(ARG_{-1,1/2,0}) (CGU)$
$\mathcal{L}_1^5 (ALA_{1/2,-1,0}) (GCG)$	$-3 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG) + (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$
$\mathcal{L}_1^5 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$	$\frac{(VAL_{1/2,1/2,-1/2})(GUC)}{2} - \frac{3 (GLY_{1/2,1/2,-1/2})(GGC)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$	$(ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$
$\mathcal{L}_1^5 (PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$	$-\frac{3 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2})(GGU)}{2} + \frac{(VAL_{-1/2,1/2,-1/2})(GUU)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$	$-\frac{(PHE_{-1/2,0,0})(UUC)}{2} + \frac{3 (GLU_{-1/2,0,0})(GAA)}{5} - \frac{(SER_{-1/2,0,0})(AGU)}{2}$ $-\frac{3 (LYS_{-1/2,0,0})(AAG)}{20}$
$\mathcal{L}_1^5 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)$	$\frac{3 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2})(GGU)}{4} + \frac{3 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2})(GUU)}{4}$
$\mathcal{L}_1^5 (PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$	$\frac{(VAL_{1/2,1/2,-1/2})(GUC)}{2} - \frac{3 (GLY_{1/2,1/2,-1/2})(GGC)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$-(ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$
$\mathcal{L}_1^5 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$	$-\frac{(ASN_{0,1/2,0})(AAC)}{20} + \frac{4 (ASP_{0,1/2,0})(GAU)}{5} + \frac{(LEU_{0,1/2,0})(UUA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (HIS_{0,0,-1/2}) (CAC)$	$-\frac{7 (LEU_{0,1/2,-1})(CUA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$-\frac{(SER_{1/2,0,0})(AGC)}{2} - \frac{(PHE_{1/2,0,0})(UUU)}{2} - \frac{3 (LYS_{1/2,0,0})(AAA)}{20}$ $+\frac{3 (GLU_{1/2,0,0})(GAG)}{5}$
$\mathcal{L}_1^5 (ILE_{1,0,1/2}) (AUC)$	$-(ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$
$\mathcal{L}_1^5 (SER_{-1/2,0,1}) (UCU)$	$-\frac{3 (THR_{-1/2,1/2,1/2})(ACU)}{2} + \frac{(PRO_{-1/2,1/2,1/2})(CCU)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (TYR_{0,-1,1/2}) (UAC)$	$\frac{4 (ASP_{0,-1/2,0})(GAC)}{5} - \frac{3 (ASN_{0,-1/2,0})(AAU)}{10} - (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$
$\mathcal{L}_1^5 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)$	$\frac{(MET_{0,0,-1/2})(AUG)}{2} - \frac{3 (GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)$	$-14 (CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$
$\mathcal{L}_1^5 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$	$-(ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$
$\mathcal{L}_1^5 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)$	$-7 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC) - 7 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)$
$\mathcal{L}_1^5 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)$	$\frac{(SER_{1/2,0,-1})(UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$(ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$

Tabela D: Continuação.	
$\mathcal{L}_1^5 (SER_{1/2,0,1}) (UCC)$	$\frac{(PRO_{1/2,1/2,1/2})(CCC)}{2} - \frac{3(THR_{1/2,1/2,1/2})(ACC)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$	$-(ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$
$\mathcal{L}_1^5 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)$	$-7 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG) - \frac{5(HIS_{0,0,-1/2})(CAC)}{2}$ $+ \frac{7(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)$	$(TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$
$\mathcal{L}_1^5 (HIS_{0,0,1/2}) (CAU)$	$\frac{3(ASN_{0,1/2,0})(AAC)}{4} - \frac{7(LEU_{0,1/2,0})(UUA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$	$-(LEU_{0,-1/2,-1}) (CUG)$
$\mathcal{L}_1^5 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$	$(CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$
$\mathcal{L}_1^5 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$-\frac{3(ASN_{0,1/2,0})(AAC)}{20} + \frac{2(ASP_{0,1/2,0})(GAU)}{5} - \frac{(LEU_{0,1/2,0})(UUA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (LEU_{0,1/2,1}) (CUU)$	$(TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$
$\mathcal{L}_1^5 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$	$\frac{(LEU_{0,1/2,-1})(CUA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (LEU_{0,-1/2,1}) (CUC)$	$\frac{3(GLN_{0,0,1/2})(CAA)}{4} - \frac{(HIS_{0,0,1/2})(CAU)}{4} + \frac{(TRP_{0,0,1/2})(UGG)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)$	$\frac{3(VAL_{1/2,1/2,-1/2})(GUC)}{4} + \frac{3(GLY_{1/2,1/2,-1/2})(GGC)}{4}$
$\mathcal{L}_1^5 (ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$	$(TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$
$\mathcal{L}_1^5 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)$	$\frac{(SER_{-1/2,0,-1})(UCA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$	$-\frac{(SER_{-1/2,0,-1})(UCA)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$	$-\frac{(SER_{1/2,0,-1})(UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$	$\frac{(MET_{0,0,-1/2})(AUG)}{2} - \frac{(HIS_{0,0,-1/2})(CAC)}{4} + \frac{3(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{4}$
$\mathcal{L}_1^5 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$	$\frac{(PHE_{-1/2,0,0})(UUC)}{2} + \frac{(GLU_{-1/2,0,0})(GAA)}{5} + \frac{(SER_{-1/2,0,0})(AGU)}{2}$ $-\frac{(LYS_{-1/2,0,0})(AAG)}{20}$
$\mathcal{L}_1^5 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$	$\frac{(SER_{1/2,0,0})(AGC)}{2} + \frac{(PHE_{1/2,0,0})(UUU)}{2} - \frac{(LYS_{1/2,0,0})(AAA)}{20}$ $+ \frac{(GLU_{1/2,0,0})(GAG)}{5}$
$\mathcal{L}_1^5 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$	$-\frac{3(GLY_{-1/2,1/2,-1/2})(GGU)}{2} + \frac{(VAL_{-1/2,1/2,-1/2})(GUU)}{2}$
$\mathcal{L}_1^5 (LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$	$(CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$
$\mathcal{L}_1^5 (ALA_{-1/2,-1,0}) (GCA)$	$-3 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA) + (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_1^5 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)$	$-7 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU) - 7 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$

Figura 7.4: A ação do operador $\mathcal{L}_1^5$. A tabela D mostra as regras de transição.

7.3 Conclusões

Neste trabalho atingimos um primeiro objetivo, usando uma técnica [22] largamente utilizada em teoria de representação dos grupos unitários para construir um espaço vetorial equipado com qualidades de uma representação irredutível de álgebra de Lie. Este espaço vetorial tem a capacidade de suportar a associação de vetores de estado aos aminoácidos, segundo o espírito do modelo algébrico de Hornos & Hornos. Para trabalharmos neste estágio atual de pesquisa, no qual os conceitos mais pertinentes da teoria de álgebra de Lie e representação estão profundamente entrelaçados, nos envolvemos tanto numa jornada de revisão bibliográfica quanto ao estudo de textos clássicos. Jornada esta, condensada nos dois primeiros capítulos desta dissertação. A utilização de linguagem algébrica, que se fez necessária para implementar rotinas de simplificação inconcebíveis manualmente, fez surgir uma classe de problemas metodológicos² cujas soluções se apresentam na forma das extensas tabelas, apêndice B, de atuação dos operadores simpléticos. Com a base em mãos, sob controle computacional, tivemos a chance de analisar a ação dos operadores no contexto do novo assignment [16], segundo o grau de interferência produzida no processo de tradução do código genético pelos geradores simpléticos. Com estes resultados demos um passo na direção de uma possível interpretação biológica do modelo algébrico, que se torna agora possível. Levantamos ainda algumas questões ainda por serem biologicamente investigadas com o espírito de se colocar o modelo de simetria simplética em prova.

7.4 Perspectivas

O problema mais difícil envolvendo o AAGC é diretamente relacionado a análise. Como usual em tratamentos baseados em simetrias, os modelos não levam automaticamente a nenhum tipo de sistema dinâmico. Somente fornece um ambiente geral para as possíveis alternativas. Qualquer sistema dinâmico compatível com

²Aqui a existência de um produto escalar é de enorme importância na maleabilidade dos polinômios e de implementação possível.

o AAGC tem que obedecer os princípios de simetria impostos pelo modelo e deve gerar padrões de quebra em cada etapa. Isto significa não somente encontrar um sistema invariante sob a ação de $sp(6)$, mas um sistema adaptado a completa cadeia de subálgebras. Um passo nesta direção já foi dado com a investigação dos polinômios invariantes em representação irredutíveis, baseado no estudo das funções de Molien [20]. O modelo AAGC se encaixa naturalmente ao processo de quebra espontânea de simetria, análogo à processos semelhantes em teoria de gauge.

Com o processo rápido na determinação do genôma de várias espécies estando em curso atualmente, que produzirá um conjunto formidável de novas informações experimentais, nos propomos ainda analisar o problema relacionado ao reconhecimento entre códons e anticódon, uma importante questão em aberto que deve começar a ser discutida em termos do método polinomial para obtenção de uma base simplética, como realizado nesta dissertação.

Apêndice A

Rotinas Algébricas

A.1 ActA.map

```
#Procedures para efetuar a ação dos geradores1 sobre  $P(\eta)$ .
interface(verboseproc=0):
D2 := proc( m, n )
RETURN( eta[m/2,1]*eta[n/2,2]-eta[m/2,2]*eta[n/2,1] )
end;
# polinomio invariante de ordem 2 para sp(4):
omega := D2(1,-1) - D2(3,-3);
# polinomio invariante de ordem 2 para sp(6):
nu := D2(3,-3) - D2(1,-1) - D2(5,-5);
# Elemento generico para Sp(2j+1)
gL := proc(m,n,p)
local aux1,aux2;
aux1 := eta[m/2,1]*diff(p,eta[n/2,1]) + eta[m/2,2]*diff(p,eta[n/2,2]);
aux2 := eta[-n/2,1]*diff(p,eta[-m/2,1]) + eta[-n/2,2]*diff(p,eta[-m/2,2]);
RETURN( aux1 + ((-1)^(m/2+n/2))*aux2 )
end;
# Geradores su(2) (em duas notações)
Th[3,0] := proc(p)
```

¹Parte desta rotina foi realizada por E.S.Bernardes.

```

RETURN( gL(5,5,p)/2 ) end;
T[5,0] := proc(p)
RETURN( gL(5,5,p)/2 ) end;
Th[3,'+'] := proc(p)
RETURN( gL(5,-5,p)/2 ) end;
T[5,'+'] := proc(p)
RETURN( gL(5,-5,p)/2 ) end;
Th[3,'-'] := proc(p)
RETURN( gL(-5,5,p)/2 ) end;
T[5,'-'] := proc(p)
RETURN( gL(-5,5,p)/2 ) end;
Th[1,0] := proc(p)
RETURN( gL(3,3,p)/2 ) end;
T[3,0] := proc(p)
RETURN( gL(3,3,p)/2 ) end;
Th[1,'+'] := proc(p)
RETURN( gL(3,-3,p)/2 ) end;
T[3,'+'] := proc(p)
RETURN( gL(3,-3,p)/2 ) end;
Th[1,'-'] := proc(p)
RETURN( gL(-3,3,p)/2 ) end;
T[3,'-'] := proc(p)
RETURN( gL(-3,3,p)/2 ) end;
Th[2,0] := proc(p)
RETURN( gL(1,1,p)/2 ) end;
T[1,0] := proc(p)
RETURN( gL(1,1,p)/2 ) end;
Th[2,'+'] := proc(p)
RETURN( gL(1,-1,p)/2 ) end;
T[1,'+'] := proc(p)
RETURN( gL(1,-1,p)/2 ) end;
Th[2,'-'] := proc(p)

```

```

RETURN( gL(-1,1,p)/2 ) end;
T[1, '-'] := proc(p)
RETURN( gL(-1,1,p)/2 ) end;
##Casimires Csp4:=proc(p) local aux; aux:= gL(1,1,gL(1,1,p)) + (1/2)*(gL(-
1,1,gL(1,-1,p)) +gL(1,-1,gL(-1,1,p)))+ gL(3,3,gL(3,3,p)) + (1/2)*(gL(-3,3,gL(3,-
3,p)) +gL(3,-3,gL(-3,3,p)))+ gL(1,3,gL(3,1,p)) + gL(3,1,gL(1,3,p)) +gL(3,-1,gL(-
1,3,p)) + gL(-1,3,gL(3,-1,p)); RETURN(aux) end;
Csp6 := proc(p) local aux; aux:= gL(1,1,gL(1,1,p)) + (1/2)*(gL(-1,1,gL(1,-1,p))
+gL(1,-1,gL(-1,1,p)))+ gL(5,5,gL(5,5,p)) + (1/2)*(gL(-5,5,gL(5,-5,p)) +gL(5,-
5,gL(-5,5,p)))+ gL(3,3,gL(3,3,p)) + (1/2)*(gL(-3,3,gL(3,-3,p)) +gL(3,-3,gL(-3,3,p)))+
gL(1,3,gL(3,1,p)) + gL(3,1,gL(1,3,p)) +gL(3,-1,gL(-1,3,p)) + gL(-1,3,gL(3,-1,p))+
gL(1,5,gL(5,1,p)) + gL(5,1,gL(1,5,p)) + gL(3,5,gL(5,3,p)) + gL(5,3,gL(3,5,p)) +
gL(5,-1,gL(-1,5,p)) + gL(-1,5,gL(5,-1,p)) + gL(5,-3,gL(-3,5,p)) + gL(-3,5,gL(5,-
3,p));
RETURN(aux) end; Csu21:=proc(p) local aux; aux:= gL(1,1,gL(1,1,p))/4 +
(1/2)*(gL(-1,1,gL(1,-1,p))/4 +gL(1,-1,gL(-1,1,p)))/4;
RETURN(aux) end;
Csu23:=proc(p) local aux; aux:=gL(3,3,gL(3,3,p))/4 + (1/2)*(gL(-3,3,gL(3,-3,p))/4
+gL(3,-3,gL(-3,3,p)))/4;
RETURN(aux) end;
Csu25:=proc(p) local aux; aux:=gL(5,5,gL(5,5,p))/4 + (1/2)*(gL(-5,5,gL(5,-5,p))/4
+gL(5,-5,gL(-5,5,p)))/4;
RETURN(aux)
end;

```

A.2 ActB.map

```

read'ActA.map';
#Gera polinômios e perfaz a conversão de notação M→H
P[2,1,0,1,1/2,0,1,1/2]:=eta[3/2,1]*D2(3,1):
P[2,1,0,1,1/2,0,0,1/2]:=T[3, '-'](eta[3/2,1]*D2(3,1)):
P[2,1,0,1,1/2,0,-1,1/2]:=T[3, '-'](P[2,1,0,1,1/2,0,0,1/2]):

```


$P[2,1,0,1,1/2,0,1,-1/2] := T[1, '-'](P[2,1,0,1,1/2,0,1,1/2]):$
 $P[2,1,0,1,1/2,0,0,-1/2] := T[1, '-'](P[2,1,0,1,1/2,0,0,1/2]):$
 $P[2,1,0,1,1/2,0,-1,-1/2] := T[1, '-'](P[2,1,0,1,1/2,0,-1,1/2]):$
 $P[2,1,0,1/2,1,0,1/2,1] := \text{eta}[1/2,1] * D2(3,1):$
 $P[2,1,0,1/2,1,0,1/2,0] := T[1, '-'](\text{eta}[1/2,1] * D2(3,1)):$
 $P[2,1,0,1/2,1,0,1/2,-1] := T[1, '-'](P[2,1,0,1/2,1,0,1/2,0]):$
 $P[2,1,0,1/2,1,0,-1/2,1] := T[3, '-'](P[2,1,0,1/2,1,0,1/2,1]):$
 $P[2,1,0,1/2,1,0,-1/2,0] := T[3, '-'](P[2,1,0,1/2,1,0,1/2,0]):$
 $P[2,1,0,1/2,1,0,-1/2,-1] := T[3, '-'](P[2,1,0,1/2,1,0,1/2,-1]):$
 $P[2,1,0,1/2,0,0,1/2,0] := (\text{eta}[3/2,1] * (D2(3,-3) + (3/2) * D2(1,-1))):$
 $P[2,1,0,1/2,0,0,-1/2,0] := \text{simplify}(T[3, '-'](P[2,1,0,1/2,0,0,1/2,0])):$
 $P[2,1,0,0,1/2,0,0,1/2] := (\text{eta}[1/2,1] * (D2(1,-1) + (3/2) * D2(3,-3))):$
 $P[2,1,0,0,1/2,0,0,-1/2] := \text{simplify}(T[1, '-'](P[2,1,0,0,1/2,0,0,1/2])):$
 $P[2,0,1/2,1,0,1/2,1,0] := \text{eta}[3/2,1] * D2(5,3):$
 $P[2,0,1/2,1,0,1/2,0,0] := T[3, '-'](P[2,0,1/2,1,0,1/2,1,0]):$
 $P[2,0,1/2,1,0,1/2,-1,0] := T[3, '-'](P[2,0,1/2,1,0,1/2,0,0]):$
 $P[2,0,1/2,1,0,-1/2,1,0] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,1,0,1/2,1,0]):$
 $P[2,0,1/2,1,0,-1/2,0,0] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,1,0,1/2,0,0]):$
 $P[2,0,1/2,1,0,-1/2,-1,0] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,1,0,1/2,-1,0]):$
 $P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,1] := \text{eta}[1/2,1] * D2(5,1):$
 $P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,0] := T[1, '-'](P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,1]):$
 $P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,-1] := T[1, '-'](P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,0]):$
 $P[2,0,1/2,0,1,-1/2,0,1] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,1]):$
 $P[2,0,1/2,0,1,-1/2,0,0] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,0]):$
 $P[2,0,1/2,0,1,-1/2,0,-1] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,0,1,1/2,0,-1]):$
 $P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2] := \text{eta}[3/2,1] * D2(5,1) + \text{eta}[1/2,1] * D2(5,3):$
 $P[2,0,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2,1/2] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2]):$
 $P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2] := T[3, '-'](P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2]):$
 $P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2] := T[1, '-'](P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2]):$
 $P[2,0,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2,-1/2] := T[1, '-'](P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2]):$
 $P[2,0,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2,1/2] := T[5, '-'](P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2]):$
 $P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2] := T[1, '-'](P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2]):$

```

P[2,0,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2,-1/2]:=T[5,'-'](P[2,0,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2]):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2]:=eta[5/2,1]*D2(3,1):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2,1/2]:=T[5,'-'](P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2]):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2]:=T[3,'-'](P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2]):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2]:=T[1,'-'](P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2]):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2]:=T[3,'-'](P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2]):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,-1/2,1/2,-1/2]:=T[5,'-'](P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2]):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2,1/2]:=T[5,'-'](P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2]):
P[1,1,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2,-1/2]:=T[1,'-'](P[1,1,1/2,1/2,1/2,1/2,-1/2,-1/2]):
P[1,1,1/2,0,0,1/2,0,0]:=(eta[5/2,1]*(D2(1,-1)+ D2(3,-3))):
P[1,1,1/2,0,0,-1/2,0,0]:=T[5,'-'](P[1,1,1/2,0,0,1/2,0,0]):
P[1,0,1,1/2,0,1,1/2,0]:=eta[5/2,1]*D2(5,3):
P[1,0,1,1/2,0,0,1/2,0]:=T[5,'-'](P[1,0,1,1/2,0,1,1/2,0]):
P[1,0,1,1/2,0,-1,1/2,0]:=T[5,'-'](P[1,0,1,1/2,0,0,1/2,0]):
P[1,0,1,1/2,0,1,-1/2,0]:=T[3,'-'](P[1,0,1,1/2,0,1,1/2,0]):
P[1,0,1,1/2,0,0,-1/2,0]:=T[5,'-'](P[1,0,1,1/2,0,1,-1/2,0]):
P[1,0,1,1/2,0,-1,-1/2,0]:=T[5,'-'](P[1,0,1,1/2,0,0,-1/2,0]):
P[1,0,1,0,1/2,1,0,1/2]:=eta[5/2,1]*D2(5,1):
P[1,0,1,0,1/2,0,0,1/2]:=T[5,'-'](P[1,0,1,0,1/2,1,0,1/2]):
P[1,0,1,0,1/2,-1,0,1/2]:=T[5,'-'](P[1,0,1,0,1/2,0,0,1/2]):
P[1,0,1,0,1/2,1,0,-1/2]:=T[1,'-'](P[1,0,1,0,1/2,1,0,1/2]):
P[1,0,1,0,1/2,0,0,-1/2]:=T[5,'-'](P[1,0,1,0,1/2,1,0,-1/2]):
P[1,0,1,0,1/2,-1,0,-1/2]:=T[5,'-'](P[1,0,1,0,1/2,0,0,-1/2]):
P[1,0,0,1/2,0,0,1/2,0]:=eta[3/2,1]*(15 * (D2(5,-5) + nu/3) +omega):
P[1,0,0,1/2,0,0,-1/2,0]:=T[3,'-'](P[1,0,0,1/2,0,0,1/2,0]):
P[1,0,0,0,1/2,0,0,1/2]:=eta[1/2,1]*(15 * (D2(5,-5) + nu/3) +omega):
P[1,0,0,0,1/2,0,0,-1/2]:=T[1,'-'](P[1,0,0,0,1/2,0,0,1/2]):
P[0,0,1/2,0,0,1/2,0,0]:=eta[5/2,1]*(6 * (D2(5,-5) + nu/3) -omega):
P[0,0,1/2,0,0,-1/2,0,0]:=T[5,'-'](P[0,0,1/2,0,0,1/2,0,0]):
z:=indices(op(1,P)):
zz:=entries(op(1,P)):
for i from 1 to 64 by 1 do

```

```
H[op(subsop(1=z[i][1]-z[i][2],3=2*z[i][4],4=2*z[i][5],5=2*z[i][3],\
6=z[i][7],7=z[i][8],8=z[i][6],z[i]))]:=P[op(z[i])]
```

```
od:
```

```
writeto(u5.tex):
```

```
lprint('\documentclass[12pt,thmsa]{article}');
```

```
lprint('\usepackage{sw20jart}');
```

```
lprint('\input{tcilatex}');
```

```
lprint('\begin{document}');
```

```
lprint('\begin{tabular}{ll}');
```

```
for kk from 1 to 20 do
```

```
lprint(latex(op(z[kk])), '&', z[kk], '\\\\');
```

```
od:
```

```
lprint('\end{tabular}');
```

```
lprint('\begin{tabular}{ll}');
```

```
for kk from 21 to 40 do
```

```
lprint(latex(op(z[kk])), '&', z[kk], '\\\\');
```

```
od:
```

```
lprint('\end{tabular}');
```

```
lprint('\begin{tabular}{ll}');
```

```
for kk from 41 to 64 do
```

```
lprint(latex(op(z[kk])), '&', z[kk], '\\\\');
```

```
od:
```

```
lprint('\end{tabular}');
```

```
lprint('\end{document}');
```

A.3 ActC.map

```
read'Act1.map': # ( Defines procs for actions of the differential operators )
```

```
read'Act2.map': # ( Generates polinomials (P) and convert notations (P) to (H) )
```

```
x:=indices(H):
```

```
y:=entries(H):
```

```
b0:=NULL:
```

```

b1:=NULL:
b2:=NULL:
## MAKES THE NORMS ##
for ll from 1 to 64 do
b0:=expand(y[ll]):
b1:=op(b0):
aux:=NULL:
b3:=NULL:
for i from 1 to nops(b1) do
Q:=op(expand(y[ll])):
b2:=op(b1):
b3:=op(b2[i]):
for j from 1 to nops(b2[i]) do
if degree(b3[1])=0 then
coef[i]:= b3[1]
else
coef[i]:=1 fi;
if degree(b3[j])=1
then Q:=diff(Q,b3[j]) fi;
if degree(b3[j])=2 then
Q:=diff(Q,op(b3[j])[1],op(b3[j])[1]) fi;
od:
aux:= aux, coef[i]*Q: NORMA[ll]:=sum(aux[k],k=1..i):
od:
od:
## MAKES THE SCALAR PRODUCT (frist creating a TCILatex document)
writeto(ger1.tex):
lprint('\documentclass[12pt,thmsa]{article}'):
lprint('\usepackage{sw20jart}'):
lprint('\input{tcilatex}');
lprint('\begin{document}');
lprint('\begin{tabular}{ll}');

```

```

for p from 1 to 64 do
aux2:=NULL:
b0:=NULL:
b1:=NULL:
b2:=NULL:
for ll from 1 to 64 do
b0:=expand(y[ll]):
b1:=op(b0):
aux:=NULL:
b3:=NULL:
for i from 1 to nops(b1) do
###Defines here the operator of which matrices elements will be generated.
P:=gL(1,5,expand(op(y[p]))):
b2:=op(b1): b3:=op(b2[i]):
for j from 1 to nops(b2[i]) do
if degree(b3[1])=0
then coef2[i]:= b3[1] else
coef2[i]:=1 fi;
if degree(b3[j])=1
then P:=diff(P,b3[j]) fi;
if degree(b3[j])=2
then P:=diff(P,op(b3[j])[1],op(b3[j])[1]) fi;
od:
aux:= aux, coef2[i]*P:
COEX[ll]:=sum(aux[n],n=1..i)/NORMA[ll]:
od:
aux2:= aux2, COEX[ll]*h[op(x[ll]):
LC[p]:=sum(aux2[m],m=1..ll):
od:
##MAKES THE ASSINGMENTS ON LEFT SIDE
lc[p]:=subs(\ h[2,0,0,2,1,0,0,-1/2]=MET[0,0,-1/2](AUG),\
h[2,0,0,2,1,0,0,1/2]=TRP[0,0,1/2](UGG),\

```

$h[2,0,0,2,1,0,1,-1/2] = \text{CYS}[0,1,-1/2](\text{UGU}), \backslash$
 $h[2,0,0,2,1,0,-1,-1/2] = \text{CYS}[0,-1,-1/2](\text{UGC}), \backslash$
 $h[1,0,1,0,0,1/2,0,0] = \text{LYS}[1/2,0,0](\text{AAA}), \backslash$
 $h[1,0,1,0,0,-1/2,0,0] = \text{LYS}[-1/2,0,0](\text{AAG}), \backslash$
 $h[1,0,0,1,0,0,1/2,0] = \text{ASN}[0,1/2,0](\text{AAC}), \backslash$
 $h[1,0,0,1,0,0,-1/2,0] = \text{ASN}[0,-1/2,0](\text{AAU}), \backslash$
 $h[0,1,0,0,1,0,0,1/2] = \text{GLN}[0,0,1/2](\text{CAA}), \backslash$
 $h[0,1,0,0,1,0,0,-1/2] = \text{GLN}[0,0,-1/2](\text{CAG}), \backslash$
 $h[2,0,0,2,1,0,1,1/2] = \text{TYR}[0,1,1/2](\text{UAU}), \backslash$
 $h[2,0,0,2,1,0,-1,1/2] = \text{TYR}[0,-1,1/2](\text{UAC}), \backslash$
 $h[1,1,1,2,0,1/2,0,0] = \text{PHE}[1/2,0,0](\text{UUU}), \backslash$
 $h[1,1,1,2,0,-1/2,0,0] = \text{PHE}[-1/2,0,0](\text{UUC}), \backslash$
 $h[1,1,0,1,0,0,1/2,0] = \text{ASP}[0,1/2,0](\text{GAU}), \backslash$
 $h[1,1,0,1,0,0,-1/2,0] = \text{ASP}[0,-1/2,0](\text{GAC}), \backslash$
 $h[1,1,1,0,0,1/2,0,0] = \text{GLU}[1/2,0,0](\text{GAG}), \backslash$
 $h[1,1,1,0,0,-1/2,0,0] = \text{GLU}[-1/2,0,0](\text{GAA}), \backslash$
 $h[0,0,0,0,1,0,0,1/2] = \text{HIS}[0,0,1/2](\text{CAU}), \backslash$
 $h[0,0,0,0,1,0,0,-1/2] = \text{HIS}[0,0,-1/2](\text{CAC}), \backslash$
 $h[2,0,2,0,1,1,0,1/2] = \text{ILE}[1,0,1/2](\text{AUC}), \backslash$
 $h[2,0,2,0,1,0,0,1/2] = \text{ILE}[0,0,1/2](\text{AUA}), \backslash$
 $h[2,0,2,0,1,-1,0,1/2] = \text{ILE}[-1,0,1/2](\text{AUU}), \backslash$
 $h[2,0,2,0,1,1,0,-1/2] = \text{TERM}[1,0,-1/2](\text{UAG}), \backslash$
 $h[2,0,2,0,1,0,0,-1/2] = \text{TERM}[0,0,-1/2](\text{UGA}), \backslash$
 $h[2,0,2,0,1,-1,0,-1/2] = \text{TERM}[-1,0,-1/2](\text{UAA}), \backslash$
 $h[2,0,1,1,1,1/2,1/2,-1/2] = \text{VAL}[1/2,1/2,-1/2](\text{GUC}), \backslash$
 $h[2,0,1,1,1,-1/2,-1/2,-1/2] = \text{VAL}[-1/2,-1/2,-1/2](\text{GUA}), \backslash$
 $h[2,0,1,1,1,1/2,-1/2,-1/2] = \text{VAL}[1/2,-1/2,-1/2](\text{GUG}), \backslash$
 $h[2,0,1,1,1,-1/2,1/2,-1/2] = \text{VAL}[-1/2,1/2,-1/2](\text{GUU}), \backslash$
 $h[0,1,1,1,1,1/2,1/2,1/2] = \text{THR}[1/2,1/2,1/2](\text{ACC}), \backslash$
 $h[0,1,1,1,1,-1/2,-1/2,1/2] = \text{THR}[-1/2,-1/2,1/2](\text{ACA}), \backslash$
 $h[0,1,1,1,1,1/2,-1/2,1/2] = \text{THR}[1/2,-1/2,1/2](\text{ACG}), \backslash$
 $h[0,1,1,1,1,-1/2,1/2,1/2] = \text{THR}[-1/2,1/2,1/2](\text{ACU}), \backslash$

```

h[0,1,1,1,1,1/2,1/2,-1/2]=GLY[1/2,1/2,-1/2](GGC),\
h[0,1,1,1,1,-1/2,-1/2,-1/2]=GLY[-1/2,-1/2,-1/2](GGA),\
h[0,1,1,1,1,1/2,-1/2,-1/2]=GLY[1/2,-1/2,-1/2](GGG),\
h[0,1,1,1,1,-1/2,1/2,-1/2]=GLY[-1/2,1/2,-1/2](GGU),\
h[2,0,1,1,1,1/2,1/2,1/2]=PRO[1/2,1/2,1/2](CCC),\
h[2,0,1,1,1,-1/2,-1/2,1/2]=PRO[-1/2,-1/2,1/2](CCA),\
h[2,0,1,1,1,1/2,-1/2,1/2]=PRO[1/2,-1/2,1/2](CCG),\
h[2,0,1,1,1,-1/2,1/2,1/2]=PRO[-1/2,1/2,1/2](CCU),\
h[1,1,1,2,0,1/2,1,0]=ALA[1/2,1,0](GCC),\
h[1,1,1,2,0,1/2,-1,0]=ALA[1/2,-1,0](GCG),\
h[1,1,1,2,0,-1/2,1,0]=ALA[-1/2,1,0](GCU),\
h[1,1,1,2,0,-1/2,-1,0]=ALA[-1/2,-1,0](GCA),\
h[1,0,0,1,2,0,1/2,1]=LEU[0,1/2,1](CUU),\
h[1,0,0,1,2,0,1/2,0]=LEU[0,1/2,0](UUA),\
h[1,0,0,1,2,0,1/2,-1]=LEU[0,1/2,-1](CUA),\
h[1,0,0,1,2,0,-1/2,1]=LEU[0,-1/2,1](CUC),\
h[1,0,0,1,2,0,-1/2,0]=LEU[0,-1/2,0](UUG),\
h[1,0,0,1,2,0,-1/2,-1]=LEU[0,-1/2,-1](CUG),\
h[1,0,1,0,2,1/2,0,1]=SER[1/2,0,1](UCC),\
h[1,0,1,0,2,1/2,0,0]=SER[1/2,0,0](AGC),\
h[1,0,1,0,2,1/2,0,-1]=SER[1/2,0,-1](UCG),\
h[1,0,1,0,2,-1/2,0,1]=SER[-1/2,0,1](UCU),\
h[1,0,1,0,2,-1/2,0,0]=SER[-1/2,0,0](AGU),\
h[1,0,1,0,2,-1/2,0,-1]=SER[-1/2,0,-1](UCA),\
h[1,1,2,1,0,1,1/2,0]=ARG[1,1/2,0](CGC),\
h[1,1,2,1,0,0,1/2,0]=ARG[0,1/2,0](AGG),\
h[1,1,2,1,0,-1,1/2,0]=ARG[-1,1/2,0](CGU),\
h[1,1,2,1,0,1,-1/2,0]=ARG[1,-1/2,0](CGG),\
h[1,1,2,1,0,0,-1/2,0]=ARG[0,-1/2,0](AGA),\
h[1,1,2,1,0,-1,-1/2,0]=ARG[-1,-1/2,0](CGA),\ LC[p]);

```

##MAKES THE ASSIGNMENTS ON THE RIGHT SIDE

AM[p]:=subs(\ the same assignment above,\ h[op(x[p]])):

```
if lc[p] <> 0 then
  lprint(latex(L[1,5]*(AM[p])),latex(e),latex(lc[p]),'\\\\\\'):
fi:
od:
lprint('\\end{tabular}');
lprint('\\end{document}');
```


Apêndice B

A Ação Completa dos Operadores da Cadeia de Álgebras de Lie para o Modelo Simplético.

Neste apêndice expomos a ação de todos operadores de abaixamento (raízes negativas) da cadeia de álgebras de Lie considerada no modelo em questão. A notação é a de Hornos & Hornos, e a classe do operador pode ser encontrada na tabela 6.2. Estas classes são discutidas no capítulo 7. Estas ações são melhor visualizadas com o auxílio das figuras 7.1 e 7.2.

Tabela B1. A ação do típico operador de $Sp(6)$, $\mathcal{L}_3^5$.

$\mathcal{L}_{-3}^5 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$	$-\frac{3 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)}{2} - \frac{(VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (TYR_{0,-1,1/2}) (UAC)$	$(ALA_{-1/2,-1,0}) (GCA)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$	$-(MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)$	$-\frac{(LEU_{0,-1/2,-1}) (CUG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$	$\frac{(TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)}{2} - \frac{(HIS_{0,0,-1/2}) (CAC)}{4} - \frac{3 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)}{4}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)$	$-\frac{(TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$\frac{(ARG_{0,1/2,0}) (AGG)}{2} + \frac{(ASN_{0,1/2,0}) (AAC)}{20} - \frac{(LEU_{0,1/2,0}) (UUA)}{2}$ $+ \frac{(ASP_{0,1/2,0}) (GAU)}{5}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ALA_{1/2,-1,0}) (GCG)$	$-(CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$	$-\frac{(LEU_{0,1/2,-1}) (CUA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$	$\frac{(ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$	$-\frac{(SER_{1/2,0,-1}) (UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$	$-\frac{(SER_{-1/2,0,-1}) (UCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$	$-\frac{(VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)}{2} - \frac{3 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (SER_{1/2,0,1}) (UCC)$	$-\frac{(HIS_{0,0,1/2}) (CAU)}{4} - \frac{3 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)}{4} + \frac{(ILE_{0,0,1/2}) (AUA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (HIS_{0,0,1/2}) (CAU)$	$-\frac{7 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)}{2} + \frac{3 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)}{4}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)$	$7 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU) - 7 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$	$\frac{(TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)$	$-7 (TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$	$(ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$	$\frac{3 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)}{2} + \frac{(VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)$	$-7 (TERM_{0,0,-1/2}) (UGA) - \frac{5 (HIS_{0,0,-1/2}) (CAC)}{2} - \frac{7 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$	$\frac{4 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)}{5} - \frac{(SER_{-1/2,0,0}) (AGU)}{2} + \frac{(LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)}{20}$

Tabela B1. Continuação

$\mathcal{L}_{-3}^5 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)$	$\frac{3 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)}{4} - \frac{3 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)}{4}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (LEU_{0,1/2,1}) (CUU)$	$\frac{3 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)}{2} + \frac{(PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$	$-\frac{3 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)}{2} - \frac{(VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$	$\frac{3 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)}{2} + \frac{(VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)$	$7 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA) - 7 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$-\frac{(LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)}{2} - \frac{3 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)}{5} - \frac{3 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)}{20}$ $+ \frac{(ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (HIS_{0,0,-1/2}) (CAC)$	$-\frac{7 (SER_{-1/2,0,-1}) (UCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$	$-\frac{2 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)}{5} - \frac{(SER_{-1/2,0,0}) (AGU)}{2} - \frac{3 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)}{20}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$	$-\frac{(LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)}{2} + \frac{(ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)}{5} + \frac{(ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)}{20}$ $+ \frac{(ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)$	$-\frac{(LEU_{0,1/2,-1}) (CUA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$	$\frac{(ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$	$-\frac{(SER_{-1/2,0,-1}) (UCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ILE_{1,0,1/2}) (AUC)$	$-\frac{(SER_{1/2,0,0}) (AGC)}{2} - \frac{3 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)}{20} - \frac{2 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)}{5}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)$	$-\frac{(TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)}{2} - \frac{3 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$	$\frac{(ARG_{-1,1/2,0}) (CGU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$	$\frac{(ARG_{-1,1/2,0}) (CGU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$	$-\frac{3 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)}{2} - \frac{(VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$\frac{(ARG_{0,1/2,0}) (AGG)}{2} - \frac{3 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)}{20} - \frac{(LEU_{0,1/2,0}) (UUA)}{2}$ $-\frac{3 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)}{5}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (SER_{-1/2,0,1}) (UCU)$	$\frac{(ILE_{-1,0,1/2}) (AUU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$(PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (LEU_{0,-1/2,1}) (CUC)$	$\frac{3 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)}{2} + \frac{(PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$	$-\frac{(LEU_{0,-1/2,-1}) (CUG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$	$\frac{3 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)}{4} - \frac{3 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)}{4}$
$\mathcal{L}_{-3}^5 (ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$	$-(CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$

Tabela B2. A ação de um típico operador de $Sp(6)$, $\mathcal{L}_3^5$.

$\mathcal{L}_3^5 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$	$\frac{(VAL_{1/2,-1/2,-1/2})(GUG)}{2} + \frac{3(GLY_{1/2,-1/2,-1/2})(GGG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (LEU_{0,1/2,1}) (CUU)$	$\frac{(PRO_{1/2,1/2,1/2})(CCC)}{2} + \frac{3(THR_{1/2,1/2,1/2})(ACC)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$	$-\frac{(SER_{1/2,0,-1})(UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)$	$\frac{(LEU_{0,-1/2,-1})(CUG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$	$\frac{(LEU_{0,-1/2,-1})(CUG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$	$\frac{(LEU_{0,-1/2,0})(UUG)}{2} - \frac{(ASN_{0,-1/2,0})(AAU)}{20} + \frac{(ARG_{0,-1/2,0})(AGA)}{2}$ $-\frac{(ASP_{0,-1/2,0})(GAC)}{5}$
$\mathcal{L}_3^5 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$	$\frac{(LEU_{0,1/2,0})(UUA)}{2} + \frac{(ARG_{0,1/2,0})(AGG)}{2} - \frac{(ASN_{0,1/2,0})(AAC)}{20}$ $-\frac{(ASP_{0,1/2,0})(GAU)}{5}$
$\mathcal{L}_3^5 (TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$	$(ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$
$\mathcal{L}_3^5 (LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$	$\frac{3(GLY_{1/2,1/2,-1/2})(GGC)}{2} + \frac{(VAL_{1/2,1/2,-1/2})(GUC)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)$	$\frac{7(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{2} + \frac{5(HIS_{0,0,-1/2})(CAC)}{2} - 7(TERM_{0,0,-1/2})(UGA)$
$\mathcal{L}_3^5 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$	$\frac{3(GLY_{1/2,1/2,-1/2})(GGC)}{2} + \frac{(VAL_{1/2,1/2,-1/2})(GUC)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)$	$-7(VAL_{1/2,-1/2,-1/2})(GUG) + 7(GLY_{1/2,-1/2,-1/2})(GGG)$
$\mathcal{L}_3^5 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$(ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$
$\mathcal{L}_3^5 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$(PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$
$\mathcal{L}_3^5 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)$	$-(TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$
$\mathcal{L}_3^5 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$	$\frac{(LEU_{0,1/2,-1})(CUA)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)$	$-14(TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$
$\mathcal{L}_3^5 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)$	$\frac{3(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{2} - \frac{(TERM_{0,0,-1/2})(UGA)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$	$\frac{3(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{4} + \frac{(HIS_{0,0,-1/2})(CAC)}{4} + \frac{(TERM_{0,0,-1/2})(UGA)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$	$(TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$
$\mathcal{L}_3^5 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$	$\frac{(VAL_{1/2,-1/2,-1/2})(GUG)}{2} + \frac{3(GLY_{1/2,-1/2,-1/2})(GGG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$	$\frac{2(GLU_{1/2,0,0})(GAG)}{5} + \frac{3(LYS_{1/2,0,0})(AAA)}{20} + \frac{(SER_{1/2,0,0})(AGC)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (LEU_{0,-1/2,1}) (CUC)$	$\frac{(PRO_{1/2,-1/2,1/2})(CCG)}{2} + \frac{3(THR_{1/2,-1/2,1/2})(ACG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)$	$\frac{(LEU_{0,1/2,-1})(CUA)}{2}$

Tabela B2 Continuação

$\mathcal{L}_3^5 (PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$	$(MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$
$\mathcal{L}_3^5 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)$	$7 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC) - 7 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$
$\mathcal{L}_3^5 (HIS_{0,0,-1/2}) (CAC)$	$-\frac{7 (SER_{1/2,0,-1}) (UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (ALA_{-1/2,-1,0}) (GCA)$	$(CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$
$\mathcal{L}_3^5 (TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$	$\frac{(SER_{1/2,0,-1}) (UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)$	$-\frac{3 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)}{4} + \frac{3 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)}{4}$
$\mathcal{L}_3^5 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$(ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$
$\mathcal{L}_3^5 (ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)$	$3 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA) + (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_3^5 (ARG_{-1,1/2,0}) (CGU)$	$(VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU) + 3 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)$
$\mathcal{L}_3^5 (ILE_{-1,0,1/2}) (AUU)$	$\frac{3 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)}{10} + \frac{4 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)}{5} + (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$
$\mathcal{L}_3^5 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$	$(ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$
$\mathcal{L}_3^5 (SER_{-1/2,0,1}) (UCU)$	$\frac{(ILE_{0,0,1/2}) (AUA)}{2} + \frac{(HIS_{0,0,1/2}) (CAU)}{4} + \frac{3 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)}{4}$
$\mathcal{L}_3^5 (HIS_{0,0,1/2}) (CAU)$	$\frac{3 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)}{4} - \frac{7 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$	$(CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$
$\mathcal{L}_3^5 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$	$\frac{3 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)}{4} - \frac{3 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)}{4}$
$\mathcal{L}_3^5 (TYR_{0,-1,1/2}) (UAC)$	$(ALA_{1/2,-1,0}) (GCG)$
$\mathcal{L}_3^5 (SER_{1/2,0,1}) (UCC)$	$(ILE_{1,0,1/2}) (AUC)$
$\mathcal{L}_3^5 (TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$	$(SER_{-1/2,0,-1}) (UCA)$
$\mathcal{L}_3^5 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$	$\frac{4 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)}{5} + \frac{(LYS_{1/2,0,0}) (AAA)}{20} - \frac{(SER_{1/2,0,0}) (AGC)}{2}$
$\mathcal{L}_3^5 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$(ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$
$\mathcal{L}_3^5 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$	$\frac{(LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)}{2} + \frac{3 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)}{20} + \frac{(ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)}{2}$ $+ \frac{3 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)}{5}$
$\mathcal{L}_3^5 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$	$\frac{(LEU_{0,1/2,0}) (UUA)}{2} + \frac{(ARG_{0,1/2,0}) (AGG)}{2} + \frac{3 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)}{20}$ $+ \frac{3 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)}{5}$

Tabela B3. A ação de um típico operador de $Sp(6)$, $\mathcal{L}_{-1}^5$.

$\mathcal{L}_{-1}^5 (ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$	$-\frac{(VAL_{-1/2,1/2,-1/2})(GUU)}{2} + \frac{3(GLY_{-1/2,1/2,-1/2})(GGU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$	$\frac{(ALA_{1/2,-1,0})(GCG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)$	$-7 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA) - 7 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ARG_{-1,1/2,0}) (CGU)$	$-(TERM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ILE_{1,0,1/2}) (AUC)$	$-(ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ILE_{0,0,1/2}) (AUA)$	$-(ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)$	$-7 (CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (SER_{1/2,0,1}) (UCC)$	$-\frac{3(THR_{1/2,-1/2,1/2})(ACG)}{2} + \frac{(PRO_{1/2,-1/2,1/2})(CCG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (LEU_{0,1/2,1}) (CUU)$	$\frac{(HIS_{0,0,1/2})(CAU)}{4} - \frac{3(GLN_{0,0,1/2})(CAA)}{4} + \frac{(TRP_{0,0,1/2})(UGG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$	$-\frac{(VAL_{-1/2,-1/2,-1/2})(GUA)}{2} + \frac{3(GLY_{-1/2,-1/2,-1/2})(GGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (SER_{-1/2,0,1}) (UCU)$	$-\frac{3(THR_{-1/2,-1/2,1/2})(ACA)}{2} + \frac{(PRO_{-1/2,-1/2,1/2})(CCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$	$\frac{3(LYS_{-1/2,0,0})(AAG)}{20} - \frac{(PHE_{-1/2,0,0})(UUC)}{2} - \frac{3(GLU_{-1/2,0,0})(GAA)}{5} + \frac{(SER_{-1/2,0,0})(AGU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (HIS_{0,0,1/2}) (CAU)$	$\frac{3(ASN_{0,-1/2,0})(AAU)}{4} - \frac{7(LEU_{0,-1/2,0})(UUG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)$	$\frac{3(VAL_{1/2,-1/2,-1/2})(GUG)}{4} + \frac{3(GLY_{1/2,-1/2,-1/2})(GGG)}{4}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$	$\frac{(SER_{-1/2,0,-1})(UCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$	$\frac{(MET_{0,0,-1/2})(AUG)}{2} + \frac{3(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (LEU_{0,-1/2,1}) (CUC)$	$\frac{(TYR_{0,-1,1/2})(UAC)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (SER_{1/2,0,0}) (AGC)$	$\frac{(VAL_{1/2,-1/2,-1/2})(GUG)}{2} - \frac{3(GLY_{1/2,-1/2,-1/2})(GGG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$	$\frac{(LEU_{0,1/2,-1})(CUA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$	$-(TERM_{1,0,-1/2}) (UAG)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)$	$-7 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG) - \frac{7(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{2} + \frac{5(HIS_{0,0,-1/2})(CAC)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)$	$\frac{3(VAL_{-1/2,-1/2,-1/2})(GUA)}{4} + \frac{3(GLY_{-1/2,-1/2,-1/2})(GGA)}{4}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$	$-\frac{(ASN_{0,-1/2,0})(AAU)}{20} + \frac{(LEU_{0,-1/2,0})(UUG)}{2} + \frac{4(ASP_{0,-1/2,0})(GAC)}{5}$

Tabela B3. Continuação.

$\mathcal{L}_{-1}^5 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$-\frac{(ALA_{1/2,-1,0})(GCG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$	$\frac{(SER_{1/2,0,-1})(UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ILE_{-1,0,1/2}) (AUU)$	$-(ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$-\frac{(GLU_{1/2,0,0})(GAG)}{5} - \frac{(SER_{1/2,0,0})(AGC)}{2} + \frac{(PHE_{1/2,0,0})(UUU)}{2}$ $+ \frac{(LYS_{1/2,0,0})(AAA)}{20}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$\frac{3(ASN_{0,-1/2,0})(AAU)}{20} + \frac{(LEU_{0,-1/2,0})(UUG)}{2} - \frac{2(ASP_{0,-1/2,0})(GAC)}{5}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$	$-\frac{2(ASP_{0,1/2,0})(GAU)}{5} + \frac{3(ASN_{0,1/2,0})(AAC)}{20} + \frac{(LEU_{0,1/2,0})(UUA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)$	$-\frac{(SER_{-1/2,0,-1})(UCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)$	$-\frac{(SER_{1/2,0,-1})(UCG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$	$-(TERM_{0,0,-1/2}) (UGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$	$\frac{(MET_{0,0,-1/2})(AUG)}{2} - \frac{3(GLN_{0,0,-1/2})(CAG)}{4} + \frac{(HIS_{0,0,-1/2})(CAC)}{4}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$	$\frac{(LEU_{0,-1/2,-1})(CUG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$	$\frac{(LEU_{0,-1/2,-1})(CUG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$	$\frac{(CYS_{0,-1,-1/2})(UGC)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$	$\frac{(LYS_{-1/2,0,0})(AAG)}{20} + \frac{(PHE_{-1/2,0,0})(UUC)}{2} - \frac{(GLU_{-1/2,0,0})(GAA)}{5}$ $-\frac{(SER_{-1/2,0,0})(AGU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$	$-\frac{(VAL_{1/2,-1/2,-1/2})(GUG)}{2} + \frac{3(GLY_{1/2,-1/2,-1/2})(GGG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$	$\frac{(ALA_{-1/2,-1,0})(GCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)$	$-7 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG) - 7 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$	$-\frac{(VAL_{1/2,1/2,-1/2})(GUC)}{2} + \frac{3(GLY_{1/2,1/2,-1/2})(GGC)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$	$-\frac{(ALA_{-1/2,-1,0})(GCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (SER_{-1/2,0,0}) (AGU)$	$\frac{(VAL_{-1/2,-1/2,-1/2})(GUA)}{2} - \frac{3(GLY_{-1/2,-1/2,-1/2})(GGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$-\frac{3(GLU_{1/2,0,0})(GAG)}{5} + \frac{(SER_{1/2,0,0})(AGC)}{2} - \frac{(PHE_{1/2,0,0})(UUU)}{2}$ $+ \frac{3(LYS_{1/2,0,0})(AAA)}{20}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)$	$\frac{(CYS_{0,-1,-1/2})(UGC)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^5 (HIS_{0,0,-1/2}) (CAC)$	$-\frac{7(LEU_{0,-1/2,-1})(CUG)}{2}$

Tabela B4. A ação de um típico operador de $sp(4)$, $\mathcal{L}_{-1}^3$.	
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$	$- (GLU_{1/2,0,0}) (GAG) + \frac{(PHe_{1/2,0,0})(UUU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (GLU_{1/2,0,0}) (GAG)$	$\frac{3(ASP_{0,-1/2,0})(GAC)}{2} - \frac{5(ARG_{0,-1/2,0})(AGA)}{4}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$	$- (TeRM_{-1,0,-1/2}) (UAA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA)$	$-\frac{5(ARG_{-1,-1/2,0})(CGA)}{4}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (Ile_{1,0,1/2}) (AUC)$	$(PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)$	$- (LYS_{-1/2,0,0}) (AAG)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (LeU_{0,1/2,-1}) (CUA)$	$- (SeR_{-1/2,0,-1}) (UCA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$- (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (TeRM_{0,0,-1/2}) (UGA)$	$(VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$	$(CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$	$\frac{(ALA_{1/2,-1,0})(GCG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$	$- (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (SeR_{1/2,0,1}) (UCC)$	$(LeU_{0,-1/2,1}) (CUC)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)$	$-\frac{5(ALA_{-1/2,-1,0})(GCA)}{4}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (TeRM_{1,0,-1/2}) (UAG)$	$(VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)$	$- (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$	$\frac{(ALA_{-1/2,-1,0})(GCA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (LeU_{0,1/2,1}) (CUU)$	$- (SeR_{-1/2,0,1}) (UCU)$

Tabela B4. Continuação.

$\mathcal{L}_{-1}^3 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$(TRP_{0,0,1/2}) (UGG) - (Ile_{0,0,1/2}) (AUA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (SeR_{1/2,0,-1}) (UCG)$	$(LeU_{0,-1/2,-1}) (CUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$	$-2 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$	$- (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$	$-\frac{(ARG_{-1,1/2,0})(CGU)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (Ile_{0,0,1/2}) (AUA)$	$(PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$	$-\frac{3(GLU_{-1/2,0,0})(GAA)}{2} - \frac{5(PHe_{-1/2,0,0})(UUC)}{4}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (PHe_{1/2,0,0}) (UUU)$	$- (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC) - \frac{(ARG_{0,-1/2,0})(AGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$	$- (TeRM_{0,0,-1/2}) (UGA) + (MeT_{0,0,-1/2}) (AUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (LeU_{0,1/2,0}) (UUA)$	$- (SeR_{-1/2,0,0}) (AGU)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$	$(TYR_{0,-1,1/2}) (UAC)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (SeR_{1/2,0,0}) (AGC)$	$(LeU_{0,-1/2,0}) (UUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$- (GLN_{0,0,1/2}) (CAA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (MeT_{0,0,-1/2}) (AUG)$	$- (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (GLN_{0,0,-1/2}) (CAG)$	$-2 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$	$- (Ile_{-1,0,1/2}) (AUU)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (PHe_{-1/2,0,0}) (UUC)$	$-\frac{(ARG_{-1,-1/2,0})(CGA)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (LYS_{1/2,0,0}) (AAA)$	$(ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ALA_{1/2,1,0}) (GCC)$	$- (ASP_{0,1/2,0}) (GAU) - \frac{(ARG_{0,1/2,0})(AGG)}{2}$
$\mathcal{L}_{-1}^3 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$	$- (GLU_{-1/2,0,0}) (GAA) + \frac{(PHe_{-1/2,0,0})(UUC)}{2}$

Tabela B5. A ação não nula do gerador $\mathcal{L}_{-1}^1$.

$\mathcal{L}_{-1}^1 (CYS_{0,1,-1/2}) (UGU)$	$2 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (GLY_{1/2,1/2,-1/2}) (GGC)$	$2 (GLY_{1/2,-1/2,-1/2}) (GGG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (GLY_{-1/2,1/2,-1/2}) (GGU)$	$2 (GLY_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (TYR_{0,1,1/2}) (UAU)$	$2 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (LEU_{0,1/2,-1}) (CUA)$	$2 (LEU_{0,-1/2,-1}) (CUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (ARG_{1,1/2,0}) (CGC)$	$2 (ARG_{1,-1/2,0}) (CGG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$	$2 (ALA_{1/2,-1,0}) (GCG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (TRP_{0,0,1/2}) (UGG)$	$2 (TYR_{0,-1,1/2}) (UAC)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (ARG_{0,1/2,0}) (AGG)$	$2 (ARG_{0,-1/2,0}) (AGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (VAL_{1/2,1/2,-1/2}) (GUC)$	$2 (VAL_{1/2,-1/2,-1/2}) (GUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (LEU_{0,1/2,1}) (CUU)$	$2 (LEU_{0,-1/2,1}) (CUC)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (PRO_{1/2,1/2,1/2}) (CCC)$	$2 (PRO_{1/2,-1/2,1/2}) (CCG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (LEU_{0,1/2,0}) (UUA)$	$2 (LEU_{0,-1/2,0}) (UUG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (ALA_{1/2,-1,0}) (GCC)$	$2 (PHE_{1/2,0,0}) (UUU)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (VAL_{-1/2,1/2,-1/2}) (GUU)$	$2 (VAL_{-1/2,-1/2,-1/2}) (GUA)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (THR_{1/2,1/2,1/2}) (ACC)$	$2 (THR_{1/2,-1/2,1/2}) (ACG)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (ALA_{-1/2,1,0}) (GCU)$	$2 (PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (ARG_{-1,1/2,0}) (CGU)$	$2 (ARG_{-1,-1/2,0}) (CGA)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (MET_{0,0,-1/2}) (AUG)$	$2 (CYS_{0,-1,-1/2}) (UGC)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (ASP_{0,1/2,0}) (GAU)$	$2 (ASP_{0,-1/2,0}) (GAC)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (PRO_{-1/2,1/2,1/2}) (CCU)$	$2 (PRO_{-1/2,-1/2,1/2}) (CCA)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (PHE_{-1/2,0,0}) (UUC)$	$2 (ALA_{-1/2,-1,0}) (GCA)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (THR_{-1/2,1/2,1/2}) (ACU)$	$2 (THR_{-1/2,-1/2,1/2}) (ACA)$
$\mathcal{L}_{-1}^1 (ASN_{0,1/2,0}) (AAC)$	$2 (ASN_{0,-1/2,0}) (AAU)$

Bibliografia

- [1] A.V.Shubnikov and V.A.Koptsik. *Symetry—in science and art*. Plenum Press, 1974.
- [2] A. O. Barut and R. Raczk. *Theory of Group Representations and Applications*. World Scientific, 1986.
- [3] B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, and S. M. Watt. *Maple V – Language Reference Manual*. Springer-Verlag, 1992.
- [4] Jin-Quan Chen. *Group Representation Theory for Physicists*. World Scientific, 1989.
- [5] E.Chacon and M.Moshinsky. Basis of irreps of the chain of lie algebras $sp(6) \supset sp(4) \oplus su(2) \supset su(2) \oplus su(2) \oplus su(2)$. Private communication, 1995.
- [6] E.P.Wigner. *Group theory and its application to quantum mechanics*. Academic Press Inc., 1959.
- [7] F.H.Crick. The origin of the genetic code. *J.Mol.Biol*, 38:367, 1968.
- [8] S.Brener F.H.Crick, L.Barnett and R.J.Watts-Tobin. General nature of the genetic code for proteins. *Nature.*, 192:1227, 1961.
- [9] M. Gell-man and Y. Ne’eman. *The Eightfold Way*. Benjamin, 1963.
- [10] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1981.
- [11] Greiner and Muller. *Quantum Mechanics Symmetries*. Springer, 1994.

- [12] M. Hamermesh. *Group Theory and its Application to Physical Problems*. Addison-Wesley, 1962.
- [13] J. E. M. Hornos and Y. M. M. Hornos. Algebraic model for the evolution of the genetic code. *Phys. Rev. Lett.*, 71(26):4401, 1993.
- [14] J. E. M. Hornos, Y. M. M. Hornos, and M. Forger. Global aspects in the algebraic approach to the genetic code. in preparation.
- [15] Vincent Icke. *The force of symmetry*. Cambridge, 1995.
- [16] Y.M.M.Hornos J.E.M.Hornos and M.Forger. Amino acids and codon assignments in the algebraic approach to the genetic code. To be published.
- [17] J.J.Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1985.
- [18] L.Braggion. A procura por simetrias no código genético. Master's thesis, IFSC-USP.
- [19] W. G. McKay and J. Patera. *Tables of dimensions, indices and branching rules for representations of simple Lie algebras*, volume 69 of *Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 1981.
- [20] M.Forger. Invariants polinomials and molien functions. To be published.
- [21] M. Moshinsky. The harmonic oscillator and supermultiplet theory. *Nucl.Phys.*, (31):384, 1962.
- [22] M. Moshinsky. Wigner coefficients for the $su(3)$ group and some applications. *Rev.Modern Physics*, 34(4):813, 1962.
- [23] Schwinger. On angular momentum. In L.C.Biedenharn and H.Van Dam, editors, *Theory of Angular Momentum*, page 229. Academic Press, 1965.
- [24] Ian Stewart and Martin Golubitsky. *Fearful Symmetry*. Penguin Books, 1993.
- [25] T.H.Jukes. Evolution of the amino acid code: Inferences from mitochondrial codes. *J.Mol.Evol.*, 22:219, 1983.

[26] H. Weyl. *Symmetry*. Princeton, 1952.

[27] B. G. Wybourne. *Classical Group for Physicists*. John Wiley, 1974.