**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Rafael Simões do Carmo

**Teoria de recursos para coerência sob a ação de
operações de translação temporal**

São Carlos

2019

Rafael Simões do Carmo

**Teoria de recursos para coerência sob a ação de
operações de translação temporal**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares
Pinto

Versão corrigida
(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Carmo, Rafael Simões do

Teoria de recursos para coerência sob a ação de operações de translação temporal / Rafael Simões do Carmo; orientador Diogo de Oliveira Soares Pinto - versão corrigida -- São Carlos, 2019.

96 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Referenciais quânticos. 2. Teoria de Recursos. 3. Assimetria local e global. 4. Coerência. 5. Emaranhamento. I. Soares Pinto, Diogo de Oliveira, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por se fazer presente nos detalhes mais pequenos do cotidiano. É deles que a vida é feita enquanto a gente faz os planos.

Aos meus pais, Amilton e Lia, por terem me ensinado pelo exemplo e pelo amor muito mais do que qualquer universidade poderia. Compartilhar esta existência com vocês e a minha irmã, Larissa, é um privilégio de fazer inveja às “criaturas aladas”. Uma benção que transcende quaisquer universos que possam existir.

Agradeço aos meus tios, Léia e Vilmar, por terem me acolhido como a um filho durante os quase dois anos em que nossos caminhos se cruzaram. Fiz um mestrado em amor ao próximo sob a orientação de vocês e o que eu aprendi jamais caberá em palavras.

Agradeço a Gi por ter visto verdade em minha confusão e por ter, pacientemente, me conduzido ao amor em tempos de falsa maturidade. Enquanto eu achava que era, mas não era, você sempre foi e me ensinou a ser. Amo-lhe por ambos os motivos e também na ausência de motivo algum.

Ao meu orientador, Diogo Soares Pinto, por ter me aceito em um mundo que para mim era tão novo que as coisas careciam de nome e para mencioná-las ele precisava apontar com o dedo. Se esses não foram totalmente “anos de solidão” foi porque encontrei em você um amigo que, como eu, gosta dos risos fáceis e das perguntas difíceis. Com você aprendi a contemplar equações como arte e descobri que ver ordem emergindo do caos é uma epifania compartilhada por cientistas e religiosos.

Ao meu companheiro de trabalho e amigo, Anderson Pini, por se desdobrar para me ajudar a realizar um sonho egoísta, mas ainda assim um sonho. Serei eternamente grato por todo o incentivo que me deu, às vezes com palavras e às vezes sem necessidade delas.

A todos os amigos acadêmicos que fiz nesses anos agradeço pelas conversas e discussões que sempre compreenderam mais mistérios entre o céu e a terra do que a Física poderia sonhar. Em especial, agradeço ao Caio, expoente máximo dessas discussões, pela parceria e auxílio de sempre.

Por fim, agradeço as duas USPs que hoje fazem parte da minha vida: a de Bauru e a de São Carlos. À primeira por permitir que eu conhecesse a segunda e a segunda por me fazer conhecer verdadeiramente a primeira. Estar em um estado de superposição entre funcionário e aluno fez de mim uma pessoa mais consciente e melhor.

“Se um dançarino desse saltos muito altos, poderíamos admirá-lo. Mas se ele tentasse dar a impressão de poder voar, o riso seria seu merecido castigo, mesmo se ele fosse capaz, na verdade, de saltar mais alto que qualquer outro dançarino. Saltos são atos de seres essencialmente terrestres, que respeitam a força gravitacional da Terra, pois que o salto é algo momentâneo. Mas o vôo nos faz lembrar os seres emancipados das condições telúricas, um privilégio reservado para as criaturas aladas...”

S. A. Kierkegaard

RESUMO

CARMO, R. S. **Teoria de recursos para coerência sob a ação de operações de translação temporal**. 2019. 96p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Pode-se dizer que a teoria de informação quântica tem se preocupado desde o início principalmente com o desenvolvimento de uma teoria quântica de um tipo de informação conhecido como *speakable*. Tal tipo está relacionado a informação que pode ser codificada em quaisquer graus de liberdade de um sistema, como ocorre com os bits na informação clássica. Entretanto, especialmente nos últimos anos, houve também muito progresso acerca de outro tipo de informação, conhecido como *unspeakable*. Esse, por sua vez, está relacionado à informação vinculada ao referencial de um sistema, como direções no espaço, por exemplo, que só pode ser codificada em graus de liberdade particulares. É justamente nesse último tipo que se concentra esta dissertação. Mais especificamente, investigaremos dentro da área de referenciais quânticos medidas informacionais que permitem quantificar o quão bem um sistema quântico pode atuar como referencial para outro sistema quântico. Partindo do ponto de vista panorâmico da teoria de recursos, abordaremos duas propostas para o problema; uma pela perspectiva da teoria de coerência e outra pela teoria de assimetria. Veremos que ambas são equivalentes para o caso de interesse aqui: referenciais de fase e tempo descritos pelo grupo $U(1)$ compacto. E então nos concentraremos em investigar com mais detalhes uma medida em especial conhecida como assimetria compartilhada. Estudaremos sua aplicabilidade no chamado mecanismo de Page-Wootters de relógio quântico partindo de alguns exemplos interessantes até os casos mais gerais, o que culminará com a enunciação de um teorema relacionando essa medida com a entropia relativa de emaranhamento.

Palavras-chave: Referenciais quânticos. Teoria de Recursos. Assimetria local e global. Coerência. Emaranhamento.

ABSTRACT

CARMO, R. S. **Resource theory for coherence under time-translation operations.** 2019. 96p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

One may say that quantum information theory originally concerned with developing a quantum theory for *speakable* information. Such a type is related to the information which can be encoded at any degree of freedom of a system, as it is with bits in classical information. However, specially in the last years, there has also been a great progress on developing a quantum theory for *unspeakable* information. This, in turn, is related to information linked to the system's reference frame, like the space directions, for example, that can be encoded in particular degrees of freedom. This is precisely the type of information that this dissertation focuses. More specifically, we will investigate, within the quantum reference frame theory, informational measures that allow the quantification of how well a quantum system can stand as a reference frame for other quantum system. Starting from the wide-ranging viewpoint of a resource theory, we will address two proposals for the problem: one from the perspective of coherence theory and other from the asymmetry theory. We are going to see that both approaches are equivalent for the case of interest here: phase and time reference frames described by the $U(1)$ compact group. Then we will focus on investigating further a particular measure known as shared asymmetry. We will study its applicability to the so-called Page-Wootters mechanism of quantum clock starting from some interesting examples to the most general cases, which will culminate with the enunciation of a theorem relating this measure with the relative entropy of entanglement.

Keywords: Quantum reference frames. Resource theory. Local and global asymmetry. Coherence. Entanglement.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Relação entre as operações que preservam incoerência, covariantes por defasagem e covariantes por translação e as respectivas medidas de coerência definidas para cada conjunto de operações. Ainda não se sabe se a inclusão das medidas *IP* nas *DC* é estrita, ou seja, não se sabe se a primeira é realmente diferente da segunda. 44
- Figura 2 – Classificação das medidas de coerência aqui definidas de acordo com as classes mais gerais associadas às operações livres. Tanto a medida de coerência interna, em azul, quanto a de coerência externa, em vermelho, consistem em uma ramificação da entropia relativa de coerência, em preto, restringindo as operações *IP* àquelas que são somente *TC*. Como resultado, temos que de uma medida de coerência *speakable* definimos duas medidas de coerência *unspeakable*. 49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	REFERENCIAIS QUÂNTICOS E REGRAS DE SUPERSELEÇÃO .	17
2.1	Introdução	17
2.2	Formalizando os conceitos: introdução matemática	20
2.2.1	A ausência de um referencial de fase	22
2.2.2	Breve exposição do caso geral	25
2.3	Descrição relacional de fase	28
2.3.1	Quantização de um referencial de fase	28
2.3.2	Modelo Page-Wootters	29
3	QUANTIFICANDO REFERENCIAIS QUÂNTICOS COMPARTILHA- DOS	33
3.1	Teoria de Recursos	33
3.2	Medidas de coerência	35
3.2.1	A abordagem BCP	35
3.2.2	Desdobramentos e críticas da abordagem BCP: distinguindo <i>speakeable</i> e <i>unspeakeable</i>	37
3.2.3	Coerência interna vs externa	45
3.3	Medidas de assimetria	50
3.3.1	Assimetria de Holevo	50
3.3.2	Assimetria local	53
3.3.3	Assimetria Compartilhada	55
3.4	Assimetria vs coerência <i>unspeakeable</i>	59
4	RESULTADOS	63
4.1	Assimetria compartilhada para exemplos mais gerais	63
4.1.1	Estados de máxima verossimilhança de mesma dimensão	63
4.1.2	Estados de máxima verossimilhança de dimensões diferentes	65
4.1.3	Estado de máxima verossimilhança <i>versus</i> q-bits com hiato	67
4.2	Assimetria compartilhada: uma análise por setor de carga do espaço de Hilbert	69
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	79
	REFERÊNCIAS	83

APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DE GRUPOS E MÉDIAS INVARIANTES 87

A.1 A medida de Haar 89

APÊNDICE B – ENTROPIA RELATIVA DE EMARANHAMENTO PARA UMA CLASSE DE ESTADOS MISTOS . . 93

1 INTRODUÇÃO

Sistemas físicos são sempre descritos com base em algum referencial que, em geral, constitui em um sistema clássico externo que aparece apenas como um parâmetro nas equações. Dois exemplos óbvios são os referenciais de orientação espacial e os de orientação temporal que, em mecânica quântica, na função de onda sob uma representação de posição, $\psi(\vec{x}, t)$, ficam subentendidos pelos parâmetros $\vec{x}$ e t . Entretanto, o que aconteceria se eliminássemos esses referenciais externos e tentássemos descrever estados quânticos de forma relacional, ou seja, utilizando um estado quântico como referencial para outro?

Respostas a essa pergunta têm sido dadas recentemente por uma subárea da informação quântica conhecida como referenciais quânticos. (1) Fazendo uso de técnicas mais modernas como teoria de recursos, (2) teoria de assimetria, (3) teoria de coerência (4, 5) e protocolos de comunicação quântica, (6) diversos trabalhos tem sido desenvolvidos com o objetivo de não somente contornar a dificuldade prática de se trabalhar com estados quânticos na ausência de um referencial externo adequado, como também de se investigar de maneira mais fundamental como a mecânica quântica poderia ser utilizada universalmente, sem a necessidade de referenciais externos privilegiados e sistemas clássicos. (7, 8)

Dentre os vários desdobramentos possíveis no tratamento quântico de referenciais, nos concentraremos nesta dissertação no estudo de medidas informacionais que permitem quantificar o quão bem um sistema serve como referencial para o outro. Com foco em referenciais de fase e, especialmente, de tempo, procuraremos, partindo do panorama de uma teoria de recursos, inicialmente explorar e conectar algumas propostas já presentes na literatura, para depois estender alguns resultados ligados a uma proposta em particular associada à uma medida informacional conhecida como *assimetria compartilhada*. (9, 10) Seguindo a linha de alguns trabalhos mais recentes, faremos uso dela para discutir o recurso por trás do funcionamento do chamado mecanismo de Page-Wootters de relógio quântico, (11, 12, 13, 14) no qual o tempo emerge por correlações entre subsistemas de um sistema global que conteria todo o universo.

No capítulo 2, faremos uma breve introdução ao estudo dos referenciais quânticos. Começaremos por dar uma visão panorâmica do estado geral da arte envolvendo suas diferentes vertentes e aplicações para depois discutirmos em mais detalhes o formalismo matemático utilizado no tratamento de referenciais em mecânica quântica. Esse formalismo, baseado na teoria de representações de grupos, será extremamente importante para os estudos que se seguirão. Restringiremos a discussão aos referenciais de fase e depois afunilaremos mais ainda para o tópico dos referenciais de fase internos, no qual introduziremos brevemente o mecanismo de Page-Wootters.

No capítulo 3, focaremos no nosso principal interesse que são as medidas informacionais que permitem quantificar referenciais quânticos compartilhados em sistemas bipartidos. Introduziremos a teoria de recursos como pano de fundo para a abordagem dos diferentes caminhos através dos quais pode-se definir essas medidas, a saber: teoria de coerência e teoria de assimetria. Discutiremos primeiramente a teoria de coerência e suas subdivisões, que são dependentes do contexto físico, dirigindo a abordagem para as definições que forem relevantes para a questão dos referenciais, para então mostrar como ela é aplicável ao mecanismo de Page-Wootters. Após isso, seguiremos um procedimento semelhante através da vertente da teoria de assimetria, explorando medidas que permitem quantificar recursos locais e globais referentes à ausência de referenciais locais e globais, culminando, novamente, com a aplicação desses conceitos ao mecanismo de Page-Wootters, com ênfase no recurso por trás desse mecanismo que permite a um sistema quântico R servir como um referencial para um sistema quântico S . Recurso esse que aqui é quantificado pela assimetria compartilhada. Em especial, discutiremos alguns exemplos interessantes desse cenário, os quais servirão de ponto de partida para os desdobramentos que faremos no capítulo seguinte. Ao final, compararemos as duas abordagens, coerência e assimetria, e mostraremos que são equivalentes dentro do contexto que as estamos utilizando; referenciais de fase, descritos matematicamente pelo grupo $U(1)$, porém são diferentes para contextos mais gerais como no caso de referenciais cartesianos que são descritos por grupos não-abelianos como o $SU(2)$.

Os principais resultados desta dissertação se concentrarão no capítulo 4. Tendo como base especialmente a penúltima seção do capítulo anterior, começaremos estendendo os exemplos que ali foram dados para casos mais gerais. Isso nos levará a encontrar um padrão na estrutura das matrizes densidades dos sistemas bipartidos que permitirá associar a assimetria compartilhada desses sistemas a um somatório de entropias relativas de emaranhamento de “estados internos” existentes nessa estrutura. Isso será enunciado como um teorema cuja prova será dada no apêndice B. Através desse teorema, reinterpretaremos alguns resultados prévios da literatura e estabeleceremos os limites superiores da assimetria compartilhada para estados gerais, o que por sua vez nos levará a um tipo específico de estado misto que satura essa medida, além dos estados maximamente emaranhados que já eram esperados devido a trabalhos anteriores. (14)

Por fim, no capítulo 5 concluiremos esta dissertação discutindo brevemente as possíveis perspectivas que esse trabalho possibilita tanto em termos da extensão e aplicação dos resultados aqui obtidos quanto de possíveis caminhos gerais que podem ser seguidos dentro da área de referências quânticas e outras áreas correlatas.

2 REFERENCIAIS QUÂNTICOS E REGRAS DE SUPERSELEÇÃO

Neste capítulo, introduziremos o que vem a ser um referencial quântico e qual a sua relação com as chamadas regras de superseleção. Não temos aqui a pretensão de adentrar em todas as ramificações que essa área possui, primeiro porque essa seria uma tarefa inviável devido à grande quantidade de artigos já publicados sobre o assunto, segundo porque isso extrapolaria em muito o que é necessário para cumprir os objetivos desta dissertação. Para o leitor interessado em conhecer um pouco mais, recomendamos a leitura do artigo de revisão na Ref. (1), pois boa parte do que descreveremos aqui se baseia nele. Nosso foco, entretanto, será apresentar uma visão panorâmica do assunto na seção 2.1, juntamente com as ferramentas matemáticas necessárias na seção 2.2, para depois adentrarmos em apenas uma ramificação na seção 2.3: internalização de referenciais de fase. Esse assunto será explorado com mais detalhes no próximo capítulo e depois trabalhado ao longo do restante da dissertação.

2.1 Introdução

Alice e Bob estão em naves espaciais separadas viajando pelo cosmos. Suponha que ambos não possuam acesso a estrelas fixas, o que significa dizer que não compartilham de um referencial cartesiano em comum. Se Alice puder se comunicar com Bob, como ela poderia descrever a ele uma determinada direção no espaço? Claramente, por meio de palavras, essa seria uma tarefa impossível, razão pela qual esse tipo de informação ficou conhecida como *unspeakable*.ⁱ (15)

Na história da teoria da informação quântica a maioria das pesquisas ficou concentrada no estudo do tipo de informação que hoje é conhecida como *speakable*. Por esse tipo, entende-se tudo aquilo que puder ser codificado em quaisquer graus de liberdade de um dado sistema físico, ou, utilizando uma definição mais literal do termo, tudo aquilo que é passível de ser posto em palavras. Um exemplo são os bits clássicos “0” e “1”, para os quais a maneira com que codificamos é totalmente indiferente com relação a informação que carregam. Por outro lado, o mesmo não pode ser dito sobre referenciais: para esses, a maneira como codificamos faz toda diferença. Seja com relação a tempo, direção, posição no espaço ou qualquer outro tipo, referenciais só podem ser codificados a partir de determinados graus de liberdade, de forma que, voltando a questão proposta inicialmente, se Alice quiser comunicar a Bob uma determinada direção do espaço, a única maneira é enviar a ele um sistema físico que aponte para aquela direção. Problemas desse

ⁱDo inglês, indizível. Manteremos esse termo e o termo *speakable* (dizível) em inglês para uma mais fácil associação com os artigos que tratam do tema na literatura.

tipo, envolvendo informação *unspeakable*, quando num contexto quântico, tem sido um ramo recente de estudos dentro teoria de informação quântica.

Sistemas de referência estão sempre presentes nas teorias físicas, ainda que implicitamente. Em informação quântica, mesmo quando estamos interessados em apenas codificar informação do tipo *speakeable* ainda necessitamos de referenciais em relação aos quais realizar as preparações e medições no sistema. Quando pensamos, por exemplo, na codificação do chamado q-bit, $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, em um sistema atômico de dois níveis, podemos controlar a fase relativa entre o estado fundamental e o excitado ligando um campo elétrico estático por um intervalo de tempo específico sobre o sistema. Porém, essa tarefa exigiria um relógio preciso além de um excelente alinhamento entre o campo e o momento de dipolo do átomo. Isso nos leva a concluir que a ausência de referenciais adequados impõe restrições ao tipo de sistemas que conseguimos preparar, o que dentro do formalismo quântico pode ser visto como uma forma de decoerência na qual o sistema está correlacionado a um referencial que não temos acesso. Dessa forma, técnicas já conhecidas para contornar o problema da decoerência, são também úteis aqui e, inclusive, vem sendo utilizadas nos últimos anos dentro de protocolos de informação quântica onde as partes não possuem um referencial em comum. Em particular, uma delas consiste na codificação q-bits nos chamados *subespaços livres de decoerência* (exemplos bastante interessantes podem ser vistos em (6)).

Matematicamente, a ausência de um referencial pode ser vista dentro do contexto das chamadas regras de superseleção. Enquanto uma regra de seleção proíbe o acoplamento de dois autoestados atômicos de um dado Hamiltoniano, ou seja $\langle\psi_1|H|\psi_2\rangle = 0$, o que, por consequência, torna impossível a produção de uma superposição desses autoestados, uma regra de superseleção, por sua vez, é uma extensão desse conceito para autoestados de um outro operador qualquer, $\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = 0$, proibindo assim a preparação de uma superposição dos mesmos. (16) Originalmente essas regras foram introduzidas como fundamentais no contexto da mecânica quântica não-relativística. O exemplo típico é a regra de superseleção com relação a carga elétrica que proíbe a preparação de estados quânticos com superposição de autoestados de carga. (17) Entretanto, como argumentaram Aharonov e Susskind, (18) a introdução axiomática dessas regras parte do princípio não físico de que existem operações absolutas sem qualquer dependência com um sistema de referência. Uma vez que um referencial seja introduzido, de um ponto de vista prático o problema pode ser contornado e a preparação de estados superpostos volta a ser possível. Ainda assim a possibilidade de regras de superseleção fundamentais permanece em aberto. Para os fins desta dissertação nos concentraremos na abordagem prática dessas regras como restrições que surgem devido à ausência de um referencial apropriado para a descrição do sistema.

A esta altura o leitor pode estar se perguntando aonde exatamente entra o termo

“quântico” nessa discussão sobre referenciais. Que eles sejam imprescindíveis na descrição de sistemas físicos é algo amplamente aceito, porém qual o interesse em tratá-los com o formalismo da mecânica quântica? Responderemos a essa pergunta a partir de alguns breves tópicos elencando as principais áreas nas quais esse tratamento tem se mostrado relevante e procurando sintetizar em que ele tem contribuído no desenvolvimento das mesmas.

- **Alinhamento de referenciais:** Aqui consiste a aplicação mais direta dos referenciais quânticos. Exemplos incluem alinhamento de giroscópios distantes, sincronização de relógios distantes e sincronização de referenciais de fase distantes. Cada um desses processos requer a utilização de comunicação quântica envolvendo estados assimétricos com relação a uma dada operação de simetria. Como exemplo, no caso de giroscópios precisamos de um estado que seja assimétrico com relação as rotações para que ele possa ser um bom referencial de direção a ser enviado para a outra parte afim de que ela realize o alinhamento com o seu referencial. Na literatura existem vários protocolos para a realização desse procedimento. (19, 20, 21)
- **Comunicação quântica:** Este tópico possui certa proximidade com o primeiro. A diferença está no fato de que aqui o interesse não é necessariamente a sincronização de referenciais, mas sim, de uma maneira mais geral, a transmissão de informação na ausência de um referencial em comum. Dentre os vários protocolos existentes destacamos o encontrado na Ref. (22) pela sua generalidade, incorporando como exemplos os principais casos tratados na literatura: referenciais de fase, cartesianos e direcionais. Se por um lado a ausência de um referencial compartilhado entre duas partes induz uma espécie de decoerência no canal de comunicação entre elas, por outro, a existência de um referencial em comum entre duas partes, mas que é desconhecido por terceiros, se torna um tipo de canal privado de comunicação em que a chave de criptografia é justamente a informação contida no referencial. Protocolos desse tipo podem ser vistos na Ref. (6)
- **Termodinâmica quântica:** Regras de superseleção impõem limitações no trabalho que pode ser extraído de sistemas quânticos. Análises disso com relação aos graus de liberdade do sistema que estão relacionados a referenciais externos e, por isso, não são acessíveis para a extração de trabalho, em contraste com aqueles que são internos e podem ser utilizados para extração de trabalho, foram feitas por vários artigos recentemente. (9, 23, 24, 25)
- **Mecânica quântica relacional:** A ideia de que todos os observáveis devem ser relacionais é herdada da Relatividade Geral que é uma teoria independente de referenciais. Espera-se que sua generalização quântica mantenha essa propriedade e, portanto, seja capaz de descrever todo o universo quanticamente, o que implica em

tratar referenciais como objetos quânticos. A essa abordagem da teoria quântica sem a utilização de referenciais clássicos externos dá-se o nome de relacional. (7) Dentro dela são feitos estudos com relação a internalização de referenciais cujo exemplo mais conhecido é o chamado mecanismo de Page-Wootters de relógio quântico. (11, 12)

Dentre todos esses tópicos, nosso foco será especialmente no último buscando compreender o conceito de referencial interno e o que está por trás de seu funcionamento, ou seja, o que faz com que um sistema quântico possa servir de referencial para outro sistema quântico. Como veremos, algumas propostas já foram desenvolvidas na literatura nesse sentido e culminaram com a definição de medidas informacionais para determinar o quão bem funciona um esquema “sistema *vs* referencial” em que ambos são quânticos e qual o recurso por trás desse funcionamento. Compararemos e investigaremos algumas dessas propostas visando em particular uma aplicação ao mecanismo de Page-Wootters acima citado, que será explicado mais adiante.

Na próxima seção, nos concentraremos em formalizar o tema através de uma introdução mais matemática a ele, fornecendo as principais ferramentas utilizadas no estudo do mesmo. Tais ferramentas, advindas da teoria de representação de grupos, serão essenciais para o desenvolvimento dos principais resultados desta dissertação.

2.2 Formalizando os conceitos: introdução matemática

Consideremos um estado quântico $|\psi(g)\rangle$ pertencente a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ definido com relação a um dado referencial. Existem dois tipos de transformações que podem ser feitas nesse estado. A primeira é a chamada *ativa* que consiste em mudar o sistema de forma que ele passe a possuir uma relação diferente com seu referencial e a segunda é a *passiva* que, por sua vez, implica em mudar o referencial em questão, de forma que o sistema permaneça o mesmo, mas passe a ser descrito por um novo referencial. Pensemos, por exemplo, na função de onda $\psi(x)$ em que a coordenada x diz respeito a posição da partícula em relação a um dado referencial cartesiano R . Na transformação ativa, muda-se o sistema e, portanto, a função de onda passará a ser $\psi'(x)$ em relação ao mesmo referencial R . Já na transformação passiva, o sistema não se altera, mas passa a ser descrito com relação a um novo referencial R' .

Ambas essas transformações em mecânica quântica são representadas por operadores unitários, que chamaremos aqui de maneira geral de $U_{g'}$, sendo g' a transformação em questão. Ao aplicarmos o operador ao estado inicial, teremos $U_{g'}|\psi(g)\rangle = |\psi(g'g)\rangle = |\psi(g'')\rangle$, ou seja, o estado é transformado pelo operador e o resultado é uma combinação de sua descrição inicial com a alteração imposta pelo operador, que resulta em uma nova descrição com relação ao referencial. Esses operadores possuem algumas propriedades interessantes:

- podem ser compostos, de forma que a combinação de dois operadores $U_g U_{g'}$ leva a um terceiro operador $U_{gg'} = U_{g''}$,
- essa combinação é sempre associativa, ou seja, $U_{g''g'} U_g = U_{g''} U_{g'g}$,
- sempre existe uma operação de transformação inversa $U_{g^{-1}}$ de forma que $U_{g^{-1}} U_g = \mathbb{1}$, em que $\mathbb{1}$ é a identidade.

Se além dessas propriedades os operadores unitários em questão também tiverem a propriedade de que exista apenas uma inversa para cada operador, o conjunto de todas as transformações forma o que em matemática conhece-se por grupo, que no caso denotaremos G , sendo $g \in G$ uma transformação abstrata pertencente ao grupo. Já o conjunto dos operadores em si que carregam essas transformações, $\{U_g\}$, constituem o que chamamos de representação do grupoⁱⁱ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se esse espaço de Hilbert for finito, ou se o grupo G for compacto,ⁱⁱⁱ temos que a representação unitária $\{U_g\}$ em geral é completamente redutível e, portanto, poderá ser decomposta em uma quantidade discreta de representações irredutíveis (irreps) da seguinte maneira

$$U_g = \bigoplus_{q \in Q} \bigoplus_{i=1}^{m_q} U_g^{q,i}, \quad (2.1)$$

em que Q é o conjunto das classes de equivalência das irreps contidas nessa decomposição, ou seja, irreps equivalentes estarão associadas a um mesmo q porém com índice i diferente, sendo m_q o número total de irreps equivalentes que chamamos de *multiplicidade*. Essa decomposição das representações $\{U_g\}$ permite que façamos uma decomposição do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ em subespaços ortogonais que carregam as irreps $U_g^{q,i}$ ^{iv}

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{q \in Q} \bigoplus_{i=1}^{m_q} \mathcal{H}_q^i. \quad (2.2)$$

Vale notar que os subespaços $\mathcal{H}_q^i$ são subespaços invariantes com relação à ação da representação unitária $\{U_g\}$, uma vez que $U_g |\psi\rangle = |\psi'\rangle, \forall |\psi\rangle, |\psi'\rangle \in \mathcal{H}_q^i$ e $\forall g \in G$. Em Física, subespaços que carregam irreps equivalentes, denotados somente por $\mathcal{H}_q$, são conhecidos como *setores de carga*. Há interesse especial numa decomposição em termos desses subespaços devido às regras de superseleção, pois, como veremos, a presença de tais regras impede que possamos preparar e medir sistemas que possuam uma superposição de estados pertencentes a diferentes setores de carga.

ⁱⁱMais detalhes desses e outros conceitos que serão usados aqui são dados no apêndice A.

ⁱⁱⁱUma definição do conceito de compacidade dependeria de alguns conceitos de topologia que estão além dos propósitos desta dissertação. Entretanto, intuitivamente pode-se pensar sobre compacidade como uma generalização dos conceitos limitado e fechado dos espaços euclidianos. Para uma definição precisa veja a Ref. (26)

^{iv}Uma definição rigorosa desse tipo de decomposição envolve o teorema de Peter-Weyl. O leitor interessado pode consultar a Ref. (26) Aqui seguiremos um tratamento semelhante ao da Ref. (27)

Antes de passarmos para um exemplo mais concreto da aplicação desses conceitos, é necessária uma breve descrição de como essas decomposições de espaços se aplicam ao caso de sistemas compostos, que são a grande maioria dos casos de interesse físico. Quando estamos descrevendo sistemas pertencentes a um produto tensorial de diferentes espaços de Hilbert, como $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, se U_g^1 e U_g^2 são representações unitárias de G em $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente, temos que $U_g^1 \otimes U_g^2$ é uma representação unitária do espaço total conhecida como *representação de produto tensorial*. (28) Uma vez que tanto o espaço $\mathcal{H}_1$ quanto $\mathcal{H}_2$ sejam espaços de Hilbert finitos, ou que G seja um grupo compacto, temos que a representação $U_g^1 \otimes U_g^2$ também será completamente redutível e, portanto, poderá ser decomposta em um determinado número de irreps. Assim, as decomposições anteriores feitas tanto para a representação $\{U_g\}$, como para o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ valem da mesma maneira para $U_g^1 \otimes U_g^2$ e $\mathcal{H}_{tot}$.

A teoria de grupos e, mais ainda, a teoria de representação de grupos, fornecem o ferramental que precisamos para tratar de referenciais quânticos. Através dele, regras de superseleção são descritas a partir da ação de grupos sobre o espaço de Hilbert. A ausência de um referencial de fase, por exemplo, é descrita através da ação do $U(1)$ compacto, o grupo formado pelo conjunto dos números reais, módulo 2π , com a operação de adição.^v Tal ação pode ser vista como uma translação em uma dimensão por um valor $\phi \in U(1)$ de um dado sistema pertencente ao espaço de Hilbert, o que leva esse grupo a muitas vezes ser chamado de *grupo das translações*. Veremos isso mais concretamente a seguir.

2.2.1 A ausência de um referencial de fase

Consideremos duas partes, Alice e Bob, cada qual no seu laboratório onde descrevem K modos ópticos a partir de seu referencial de fase, um laser de alta intensidade por exemplo. Suponhamos que os dois referenciais estejam relacionados por um ângulo ϕ . Seja $|n_1, \dots, n_k\rangle$ a base de Fock para o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^K$ descrevendo K modos, com n_i sendo o número de fótons no modo i e N_i o operador número neste modo. Alice pode fazer uma transformação ativa em seu sistema a partir de um Hamiltoniano proporcional a $N_{tot} = \sum_{i=1}^K N_i$, que é o operador número do total de fótons. Essa transformação é feita a partir de um operador unitário $U(\phi) = e^{i\phi N_{tot}}$ ^{vi} que constitui em uma representação unitária do grupo $U(1)$ e avança o sistema por um ângulo ϕ . Como transformações ativas e passivas possuem representações equivalentes e ϕ é a diferença entre os referenciais das duas partes, Bob descreve um estado $|\psi\rangle$ preparado por Alice através da seguinte transformação passiva

$$U(\phi) |\psi\rangle = e^{i\phi N_{tot}} |\psi\rangle. \quad (2.3)$$

^vDaqui em diante chamaremos esse grupo apenas de $U(1)$ por simplicidade, porém sempre estaremos nos referindo a sua forma compacta.

^{vi}Em toda esta dissertação consideraremos $\hbar = 1$.

Como exemplo, suponhamos que Alice prepare um estado superposto de um único modo, do tipo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle). \quad (2.4)$$

Bob descreverá esse mesmo estado sob o ponto de vista do seu referencial como

$$\begin{aligned} U(\phi) |\psi\rangle &= e^{i\phi N_{tot}} \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + e^{i\phi} |1\rangle + e^{i2\phi} |2\rangle). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por outro lado, note que, se Alice preparar um estado de dois modos do tipo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (2.6)$$

esse estado será descrito da mesma forma por Bob a menos de uma fase global, que para todos os efeitos é inobservável. Isso acontece devido ao fato de que a Eq. (2.6) é um autoestado do operador N_{tot} , o que, por consequência, faz dele um estado invariante sob a ação do operador unitário $U(\phi)$ e, por isso, independente de referenciais de fase. Analisando pelo ponto de vista da teoria de representações, o conjunto de todos esses autoestados associados a um mesmo autovalor n formam justamente o que chamamos de setor de carga. Isso nos permite decompor o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^K$ em termos desses setores:

$$\mathcal{H}^K = \bigoplus_n \mathcal{H}_n. \quad (2.7)$$

Uma vez que estados $|\psi_n\rangle$ pertencentes aos subespaços $\mathcal{H}_n$ são invariantes a menos de uma fase global em relação a ação do operador unitário $U(\phi)$, podemos descrever a ação desse operador sob um estado qualquer $|\psi\rangle$ como

$$U(\phi) |\psi\rangle = \sum_n e^{in\phi} \Pi_n |\psi\rangle \quad (2.8)$$

$$= \sum_n \sum_{n=n_1+\dots+n_k} \bigotimes_i^k \Pi_{n_i} e^{in_i\phi} |\psi\rangle. \quad (2.9)$$

Consideremos agora a situação em que o ângulo ϕ que relaciona o referencial de fase de Alice com o de Bob é desconhecido, porém fixo ^{vii}. Nesse caso, como Bob poderia descrever um estado preparado por Alice? A única possibilidade para ele passa a ser realizar uma média no estado de Alice com relação a todos os valores possíveis de ϕ , o que resultará em um estado misto

$$\mathcal{G}[|\psi\rangle \langle\psi|] \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} U(\phi) |\psi\rangle \langle\psi| U^\dagger(\phi). \quad (2.10)$$

^{vii}Só trataremos nesta dissertação de referenciais fixos.

Usando a Eq. (2.8) podemos escrever

$$\mathcal{G}[|\psi\rangle\langle\psi|] = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \sum_{n,n'} e^{in\phi} \Pi_n |\phi\rangle\langle\phi| \Pi_{n'} e^{-in'\phi} \quad (2.11)$$

$$= \sum_{n,n'} \Pi_n |\phi\rangle\langle\phi| \Pi_{n'} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(n-n')\phi} \right) \quad (2.12)$$

$$= \sum_n \Pi_n |\phi\rangle\langle\phi| \Pi_n, \quad (2.13)$$

em que $\Pi_n = \sum_{n=n_1+n_2+\dots+n_k} \bigotimes_i^k \Pi_{n_i}$. Dessa forma, podemos expressar a operação $\mathcal{G}$ em um operador densidade arbitrário, podendo ser um estado puro ou misto, como

$$\mathcal{G}[\rho] = \sum_n \Pi_n \rho \Pi_n. \quad (2.14)$$

Essa operação remove todas as coerências^{viii} que o estado possa ter entre setores de carga n . A consequência disso é justamente o que entendemos por regra de superseleção. (1) Uma vez que Bob receba um estado preparado sob o referencial de fase de Alice que ele desconhece, a alternativa que resta é realizar a operação de média para eliminar do sistema os graus de liberdade associados a esse referencial, descrevendo-o assim de uma maneira independente de referenciais. É nesse sentido que a ausência de um referencial apropriado é vista como um tipo de decoerência. O resultado sempre será um estado invariante por mudança de fase, definido por $[\mathcal{G}[\rho], U(\phi)] = 0, \forall \phi$. Esse estado consiste em uma matriz densidade bloco-diagonal com relação ao número total de fótons, na qual cada bloco está associado a um setor de carga.

Consideremos agora o mesmo contexto para operações. ^{ix} Supondo novamente que o ângulo ϕ que relaciona o referencial de Alice com o de Bob seja conhecido, como Bob pode descrever a partir do seu referencial uma operação unitária V realizada por Alice? Sendo σ o estado de um sistema sob o referencial de Bob, ele precisa primeiro transformar esse estado para o referencial de Alice para depois realizar a operação unitária V e então transformar de volta o resultado para seu referencial. Isso é feito da seguinte forma

$$U(\phi) V U^\dagger(\phi) \sigma U(\phi) V U^\dagger(\phi). \quad (2.15)$$

Portanto, a descrição da operação V realizada por Alice, sob o referencial de Bob, consiste em $V_\phi = U(\phi) V U^\dagger(\phi)$. Se, no entanto, a fase ϕ for desconhecida por Bob, a alternativa é realizar uma média com relação a todas as fases na Eq. (2.15)

$$\tilde{\mathcal{V}}[\sigma] \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} U(\phi) V U^\dagger(\phi) \sigma U(\phi) V U^\dagger(\phi). \quad (2.16)$$

^{viii}Coerência aqui é entendida como todos os termos fora da diagonal principal do operador densidade na base de autoestados do Hamiltoniano.

^{ix}Nos restringiremos aqui apenas às operações unitárias uma vez que os casos de operações mais gerais e medições não trazem muitas novidades ao contexto que vamos abordar.

Porém, se o estado preparado por Alice for do tipo invariante, ou seja, $\mathcal{G}[\sigma] = \sigma$, temos que a média acima se resume a

$$\tilde{\mathcal{V}}[\sigma] = \mathcal{G}[V\sigma V^\dagger] \quad (2.17)$$

cujo resultado é novamente uma matriz densidade bloco-diagonal. A diferença entre o primeiro e o segundo caso está na não necessidade de se transformar o estado inicial σ no segundo, já que ele já é invariante.

Essa última análise completa as restrições impostas por uma regra de superseleção nesse contexto. Bob, desconhecendo o referencial de Alice, não só é incapaz de preparar um estado que exiba superposição entre autoestados de diferentes setores de carga (ou, olhando para o operador densidade, com coerências entre diferentes setores) com relação ao referencial dela, como também não pode realizar uma operação unitária que leva um estado de um setor a outro. Retomando os exemplos dados, com relação ao desconhecido referencial de Alice não é possível para Bob preparar um estado do tipo $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ e nem realizar uma operações do tipo $\mathcal{E} : |0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Bob permanece restrito a operações e estados G -invariantes, justamente por serem independentes de referenciais. Assim, ações do tipo preparar um estado como $(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ e realizar uma operação como $\mathcal{E} : |01\rangle \rightarrow |10\rangle$ ainda são possíveis. Vale notar que, com relação a seu próprio referencial de fase, Bob ainda pode preparar qualquer estado e realizar qualquer operação. A regra de superseleção com relação ao número de fótons nesse contexto não é, portanto, equivalente a uma lei de conservação do número de fótons.

Vejamos agora apenas um breve introdução ao que seria uma generalização do exemplo dado aqui, ou seja, como são descritas as restrições impostas por uma regra de superseleção com relação a qualquer grupo finito ou de Lie compacto.^x

2.2.2 Breve exposição do caso geral

Sejam novamente Alice e Bob, cada qual em seu laboratório realizando experimentos de acordo com seus referenciais. Desta vez, estes referenciais serão descritos pela ação de um grupo G , finito ou compacto, de forma que $g \in G$ é um elemento de grupo que relaciona os dois referenciais (como era ϕ no exemplo anterior). Supondo que esse elemento seja desconhecido, para cada estado ρ que Alice preparar, Bob o descreve a partir da operação de média citada anteriormente, que aqui porém, no caso geral, terá a seguinte forma^{xi}

$$\mathcal{G}[\rho] \equiv \int_G dg \, U_g \rho U_g^\dagger, \quad (2.18)$$

^xConsideraremos aqui apenas esses grupos por possuírem uma única medida de Haar invariante (ver Apêndice A) e também porque as representações unitárias deles são completamente redutíveis.

^{xi}Adotaremos aqui a notação utilizada para o caso de grupos de Lie, entretanto as técnicas continuam válidas para grupos finitos, bastando que se substitua a integração por $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g \rho U_g^\dagger$.

em que U_g é uma representação unitária de g no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e dg é a medida de Haar invariante (ver Apêndice A). Essa operação, nesse contexto mais geral, é conhecida como *G-twirling*, sendo os estados invariantes com relação a ela chamados de *G-invariantes*. De forma semelhante, as operações unitárias feitas por Alice, quando descritas por Bob ficarão

$$\tilde{\mathcal{V}}[\rho] = \int_G dg U_g V U_g^\dagger \rho U_g V U_g^\dagger \quad (2.19)$$

$$= \int_G dg U_g \mathcal{V}_g[U_q^\dagger \rho U_g] U_g^\dagger \quad (2.20)$$

$$= \int_G dg \mathcal{U}_q \circ \mathcal{V}_g \circ \mathcal{U}_{g^{-1}}[\rho], \quad (2.21)$$

sendo $\mathcal{V}[\cdot] = V(\cdot)V^\dagger$ e $\mathcal{U}[\cdot] = U(\cdot)U^\dagger$. Com essa notação podemos definir as chamadas operações *G*-invariantes como aquelas que satisfazem

$$[\tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{U}_g] = 0, \quad \forall g \in G. \quad (2.22)$$

O ponto mais interessante deste caso geral se dá na decomposição do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Como vimos anteriormente, a representação unitária $\{U_g\}$ permite que escrevamos $\mathcal{H}$ em termos de seus setores de carga $\mathcal{H}_q$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_q \mathcal{H}_q, \quad (2.23)$$

em que cada um deles carrega representações não equivalentes U_q de G . Conforme a Eq. (2.2), dentro de cada setor, temos irreps que são equivalentes entre si, isso nos permite fazer uma nova decomposição, desta vez em cada $\mathcal{H}_q$

$$\mathcal{H}_q = \mathcal{M}_q \otimes \mathcal{N}_q, \quad (2.24)$$

sendo $\mathcal{M}_q$ um subespaço que carrega uma irrep U_q e $\mathcal{N}_q$ um subespaço que carrega uma representação trivial de G . Esses subespaços são *virtuais*, (29) uma vez que não descrevem estados físicos individualmente. Na literatura, são muitas vezes chamados de *espaço de gauge* e *espaço de multiplicidade* ou *espaço de cor* e *espaço de sabor*, respectivamente.

No caso anterior como o grupo em questão era o $U(1)$ que, por ser abeliano^{xii}, possui irreps unidimensionais, esse tipo de decomposição se faz desnecessária uma vez que os subespaços $\mathcal{M}_q$ são todos triviais. Porém, em casos de grupos não-abelianos como o $SU(2)$,^{xiii} nos quais isso não acontece, fazer essa separação entre subespaços é importante pois a operação $\mathcal{G}$ atuará de forma diferente em cada um deles, não podendo mais ser

^{xii}Grupos abelianos, também chamados de grupos comutativos, são aqueles em que todos os elementos comutam com todos os elementos com relação a operação do grupo.

^{xiii}Grupo formado por todas as matrizes complexas unitárias de dimensão 2 com determinante igual a 1.

escrita de maneira simplificada apenas como a Eq. (2.14). Para esses casos, a atuação de $\mathcal{G}$ num estado qualquer ρ será descrita por

$$\mathcal{G}[\rho] = \sum_q (\mathcal{D}_{\mathcal{M}_q} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{N}_q}) [\Pi_q \rho \Pi_q] \quad (2.25)$$

em que Π_q são os projetores nos setores de carga $\mathcal{H}_q$,^{xiv} $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ é um operador que preserva o traço e mapeia cada estado de $\mathcal{H}$ para o subespaço $\mathcal{M}$ resultando na identidade vezes uma constante e $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ é um mapa identidade para o espaço $\mathcal{N}$. A demonstração desse resultado não será dada aqui, mas pode ser encontrado na Ref. (1). Uma forma mais prática de expressar a operação dada na Eq. (2.25) é^{xv}

$$\mathcal{G}[\rho] = \sum_q p_q \frac{\Pi_{\mathcal{M}_q}}{\dim \mathcal{M}_q} \otimes \rho_{\mathcal{N}_q}, \quad (2.26)$$

em que $\rho_{\mathcal{N}_q} \equiv \frac{1}{p_q} \text{Tr}_{\mathcal{M}_q} (\Pi_{\mathcal{H}_q} \rho \Pi_{\mathcal{H}_q})$ é o operador densidade reduzido no espaço $\mathcal{N}_q$ e $p_q \equiv \text{Tr}(\Pi_{\mathcal{H}_q} \rho \Pi_{\mathcal{H}_q})$ é a probabilidade do sistema estar no setor de carga $\mathcal{H}_q$.

Como podemos ver pelo mapa, o subsistema virtual pertencente a $\mathcal{M}$ será *cheio de decoerência* já que o mapa que leva um estado em $\mathcal{H}$ para ele destrói todas as coerências, resultando em um estado múltiplo da identidade. Já o subsistema virtual pertencente a $\mathcal{N}$ será *livre de decoerência* pois $\mathcal{G}$ atua sobre ele como um operador identidade.^{xvi} Assim, é justamente nesse último que se concentram os protocolos de comunicação quântica na ausência de um referencial compartilhado. Se utilizando do fato de que esses subsistemas são preservados durante a operação $G - twirling$, pode-se codificar neles a informação que se deseja transmitir.^{xvii} Por outro lado, se o desejo é uma comunicação privada entre duas ou mais partes que compartilhem um mesmo referencial de forma que as mensagens não possam ser interceptadas por outrém, utiliza-se os subsistemas virtuais pertencentes à $\mathcal{M}$ uma vez que eles perderão toda a coerência sob a ação de $\mathcal{G}$, impedindo assim o acesso à informação que estiver lá contida.

Há ainda um outro aspecto do subespaço $\mathcal{N}$ que é utilizado (ao menos quando descritos por grupos finitos ou compactos): guardar quantidades relacionais entre subsistemas. Seja um sistema composto ρ_{SR} pertencente a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$,

^{xiv} Aqui porém, mesmo que se trate de um espaço de Hilbert composto, por exemplo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, não podemos escrever esse projetor como $\Pi_n = \sum_{n=n_1+\dots+n_k} \bigotimes_i^k \Pi_{n_i}$, pois o acoplamento das representações irredutíveis de cada subespaço $\mathcal{H}_i$ não necessariamente se dará por soma, vide Ref. (22)

^{xv} Vide Refs. (30, 22)

^{xvi} Em inglês as expressões usadas na literatura para esses subsistemas são respectivamente *decoherence-full subsystems* e *decoherence-free subsystems*. Decoerência aqui é entendida como a perda das coerências do sistema que estão relacionadas a um referencial desconhecido, conforme dito anteriormente.

^{xvii} Em princípio, ainda é possível utilizar o subespaço virtual $\mathcal{M}_q$ para a transmissão de informação clássica, ou seja, bits. Porém, q-bits só poderão ser transmitidos usando o subespaço $\mathcal{N}_q$.

são os subsistemas virtuais pertencentes a $\mathcal{N}$ que guardam informação sobre a relação entre um estado $\rho_S \in \mathcal{H}_S$ e outro $\rho_R \in \mathcal{H}_R$, em que ρ_R atua como referencial para ρ_S . Na área de referenciais quânticos essa abordagem é conhecida como *descrição relacional* ou *internalização de referenciais*. É nela que nos concentraremos daqui em diante, tendo com foco o grupo $U(1)$, para o qual, como dissemos, os subespaços $\mathcal{M}$ são triviais e podem ser desconsiderados.

2.3 Descrição relacional de fase

2.3.1 Quantização de um referencial de fase

Voltemos ao caso de sistemas descritos por uma base Fock e que se transformam pela ação de um operador que é uma representação unitária do grupo $U(1)$. Se não houver uma regra de superseleção com relação a esse grupo, podemos preparar estados como

$$|\psi_0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (2.27)$$

$$|\psi_\pi\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (2.28)$$

e distingui-los tanto um em relação ao outro quanto os dois em relação a uma mistura incoerente $I/2 = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)/2$ através de uma medição na base $\{|\psi_0\rangle, |\psi_\pi\rangle\}$.

Se há porém uma regra de superseleção para o $U(1)$, como no caso em que esses estados foram preparados em relação a um referencial desconhecido, isso significa que não somos capazes de distingui-los e, por consequência, também não podemos preparar estados semelhantes. Assim, nos é impossível preparar um estado que exiba superposição entre diferentes autoestados do operador número N_t com relação ao referencial desconhecido. Porém, como vimos, podemos preparar superposições entre pares de estados quando esses pares, enquanto sistema composto, correspondam a um autoestado de N_t , por exemplo: $|01\rangle + |10\rangle/\sqrt{2}$.

Consideremos então, além de nosso sistema original dado pelas Eqs. (2.27) e (2.28), que denotaremos S , um outro sistema, que denotaremos por R , idêntico ao S

$$|\chi_{0(\pi)}\rangle = (|n-1\rangle_R \pm |n\rangle_R)/\sqrt{2}, \quad (2.29)$$

com $n \geq 1$. Podemos então definir estados com base nesse par de forma que tenham fases relativas 0 e π respectivamente, assim

$$|\Psi_0\rangle_{RS} = (|\chi_0\rangle_R |\psi_0\rangle_S - |\chi_\pi\rangle_R |\psi_\pi\rangle_S)/\sqrt{2}, \quad (2.30)$$

$$|\Psi_\pi\rangle_{RS} = (|\chi_0\rangle_R |\psi_\pi\rangle_S - |\chi_\pi\rangle_R |\psi_0\rangle_S)/\sqrt{2}. \quad (2.31)$$

Esses estados também podem ser expressos como

$$|\Psi_0\rangle_{RS} = (|n\rangle_R |0\rangle_S + |n-1\rangle_R |1\rangle_S)/\sqrt{2}, \quad (2.32)$$

$$|\Psi_\pi\rangle_{RS} = (|n\rangle_R |0\rangle_S - |n-1\rangle_R |1\rangle_S)/\sqrt{2}. \quad (2.33)$$

Dessa forma, podemos agora fazer distinção entre os dois estados e entre qualquer um deles e uma mistura estatística $(|n+1\rangle\langle n+1| \otimes |0\rangle\langle 0| + |n\rangle\langle n| \otimes |1\rangle\langle 1|)/2$ a partir de uma medição na base $\{|\Psi_0\rangle, |\Psi_\pi\rangle\}$. Esse tipo de protocolo que de maneira geral pode ser escrito como um mapa

$$\sum_{m=0}^{m_{\text{máx}}} c_m |m\rangle \rightarrow \sum_{m=0}^{m_{\text{máx}}} c_m |n-m\rangle_R |m\rangle_S, \quad (2.34)$$

em que $m_{\text{máx}}$ é o número total de fótons, nada mais é do que a internalização ou, em outras palavras, uma quantização de um referencial de fase. Uma vez que não possuímos um referencial externo adequado podemos utilizar um sistema como referencial para outro, realizando assim uma descrição relacional de um para com o outro. Matematicamente, como pode ser visto pelo mapa, isso consiste em uma expansão do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S$ para um espaço $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$, de forma que o estado final seja G -invariante. Esse conceito é essencial para compreendermos o mecanismo de Page-Wootters.

2.3.2 Modelo Page-Wootters

Há todo um prelúdio sobre a história da questão do tempo na mecânica quântica que caberia antes de introduzirmos propriamente o mecanismo de Page-Wootters, porém como nosso objetivo aqui é estudar apenas a estrutura em si do mesmo sob a perspectiva de referenciais quânticos, não vamos nos ater nessas questões históricas. O leitor interessado pode consultar as Refs. (13, 31) que possuem uma excelente material sobre o assunto.

Em 1983, Don Page e William Wootters (11) propuseram que dada a possibilidade da existência de uma regra de superseleção fundamental para o tempo, no sentido de que todo o universo poderia ser descrito como um sistema fechado e estacionário, a razão pela qual observamos evolução temporal no mundo seria devido a correlações entre subsistemas onde um atuaria como um referencial de tempo para o outro de maneira relacional. Essa perspectiva consiste em uma internalização do referencial no sistema a partir de uma extensão do espaço de Hilbert de $\mathcal{H}_S$ para $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$, sendo $\mathcal{H}_R$ o espaço do referencial que no caso atuará como um relógio, porém em princípio consiste em um tipo de referencial de fase e, portanto, é descrito pela ação do grupo $U(1)$ sobre o espaço a partir de uma representação unitária.

Uma vez que o tempo é considerado um parâmetro inacessível no modelo de Page-Wootters, temos uma simetria global em relação a ele de forma que o Hamiltoniano total

$H = H_S \otimes \mathbf{1}_R + \mathbf{1}_S \otimes H_R$, sendo $\mathbf{1}_\alpha$ o operador identidade nos sistemas $\alpha = S, R$, satisfaz

$$H |\psi\rangle_{SR} = 0, \quad (2.35)$$

em que $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. Essa mesma equação quando escrita no formalismo do operador densidade é dada por

$$[H, \rho_{SR}] = 0, \quad (2.36)$$

em que $\rho_{SR} \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. Esse formato para o operador densidade é consequência do estado ρ_{SR} ser invariante sobre translações temporais. A partir da Eq. (2.35), tem-se que, para $U_t = e^{iHt}$, $U_t \rho_{SR} U_t^\dagger = \rho_{SR}$, o que implica que $[U_t, \rho_{SR}] = 0$. Sendo $e^{iHt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} H^k$, em virtude da comutação de U_t com ρ_{SR} , segue-se que $[H, \rho_{SR}] = 0$.

Conforme vimos anteriormente, a ausência de um referencial adequado nos obriga a descrever nossos estados a partir de uma média com relação a todos os parâmetros possíveis que o referencial poderia nos oferecer, tornando assim o sistema resultante simétrico e, por consequência, independente de qualquer referencial. No caso aqui, essa média será uma média temporal que, sendo descrita também pelo grupo $U(1)$, permite que utilizemos a versão do G – *twirling* dada na Eq. (2.10), já com medida de Haar dada por $\frac{d\phi}{2\pi}$, porém estendida para o caso de um composto bipartido. Assim,

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} U^S(\phi) \otimes U^R(\phi) \rho_{SR} U^{S\dagger}(\phi) \otimes U^{R\dagger}(\phi), \quad (2.37)$$

com $U_\phi^\alpha = \{e^{i\phi H^\alpha}; \phi \in [0, 2\pi]\}$, $\alpha = S, R$. Como consequência, fisicamente internalizamos o referencial como parte do sistema total $S + R$, o que possibilita que descrevamos o sistema de interesse S em termos dos estados do sistema referencial de tempo R que servirão como os “ponteiros do relógio”. Para construirmos esses estados, partimos de um estado inicial $|\psi_R(0)\rangle$ associado ao elemento identidade do grupo $U(1)$ que no caso é o elemento zero. A partir da representação $U_R(\phi) = e^{-iH_R\phi}$ podemos gerar os demais estados aplicando $U_R(\phi)$ ao estado inicial, dado que $U_R(\phi) |\psi_R(\phi')\rangle = |\psi_R(\phi + \phi')\rangle$, $\forall \phi, \phi' \in U(1)$. A única restrição é que a base gerada dessa maneira seja ortonormal, ou seja, $\langle \psi_R(\phi') | \psi_R(\phi + \phi') \rangle = \delta(\phi - (\phi + \phi'))$, pois dessa forma podemos distinguir os estados perfeitamente.

Consideremos um modelo ilustrativo simples, baseado em q-bits, dado pelo seguinte Hamiltoniano

$$H = \sigma_z^R \otimes \mathbf{1}^S + \mathbf{1}^R \otimes \sigma_z^S, \quad (2.38)$$

em que σ_z^α é o operador de Pauli na direção $\hat{z}$, dado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

escrita na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Nesse modelo, adota-se o estado $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ como simbolizando a marcação “12 horas” e o estado $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ como simbolizando

“6 horas”, separados, portanto, por uma fase π , o que nos garante distinguibilidade. Com isso a evolução dos estados é dada por

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z} |+\rangle = |-\rangle \quad (2.40)$$

e

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z} |-\rangle = |+\rangle, \quad (2.41)$$

a menos de uma fase global. Associando esse sistema relógio R a um sistema de interesse S também dado por um q-bit na mesma base, eliminamos o tempo enquanto parâmetro externo do sistema composto $S + R$ através da operação dada na Eq. (2.37) e então a dinâmica de S passa a ser descrita através de R , conforme as associações que fizemos entre os estados de R e as marcações de um relógio. ^{xviii}

Em geral, porém, esse modelo apresenta uma certa incerteza nas marcações de R , no sentido de que para um dado estado de S podemos ter probabilidades não nulas tanto em relação a $|+\rangle$, quanto $|-\rangle$, o que não nos permite associar precisamente 12 ou 6 horas ao estado de S . Essa incerteza irá variar dependendo do sistema composto utilizado, podendo chegar a zerar para alguns casos específicos. Surge então a questão: como podemos mensurar o quão bem o sistema R serve de referencial para o sistema S ? Esse será justamente o foco do próximo capítulo no qual apresentaremos propostas de medidas de informação que procuram responder a essa pergunta com foco em referenciais de dimensão limitada.

^{xviii}Os desdobramentos disso que permitem recuperar a dinâmica da equação de Schrödinger para o sistema S e também mensurar o alinhamento dos sistemas S e R através do formalismo das probabilidades condicionais não será abordado nesta dissertação. O leitor interessado pode consultar a Ref. (32)

3 QUANTIFICANDO REFERENCIAIS QUÂNTICOS COMPARTILHADOS

O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir algumas medidas que permitem quantificar referenciais quânticos em sistemas bipartidos, ou seja, mensurar o quão bem um subsistema pode se comportar como referencial para outro subsistema. Para todas elas, utilizaremos a abordagem da chamada teoria quântica de recursos, que será apresentada logo na primeira seção, devido à possibilidade de uma visão panorâmica que essa teoria nos trás. Com o foco em referenciais de fase e desses especialmente aqueles que funcionam como relógios, apresentaremos aqui duas medidas informacionais que permitem realizar nosso objetivo: coerência interna (14) (seção 3.2.3) e assimetria compartilhada (9) (seção 3.3.3). Veremos que essas duas medidas são equivalentes quando consideramos referenciais de fase descritos a partir da assimetria com relação ao grupo $U(1)$ e procuraremos aplicá-las ao mecanismo de Page-Wootters, conforme foi feito em alguns trabalhos. De maneira complementar, discutiremos também outras medidas de coerência e assimetria e as caracterizaremos como quantificadores de recursos locais e globais de acordo com as restrições físicas apresentadas pelo contexto que estivermos considerando. Veremos a partir dessa discussão que, de maneira geral, medidas de coerência do tipo *unspeakable* são equivalentes a medidas de assimetria quando o grupo considerado é o $U(1)$, constituindo, portanto, em um subconjunto das medidas de assimetria. Tudo isso funcionará como um prelúdio para o próximo capítulo que tratará de explorar a assimetria compartilhada com o objetivo de estender os resultados obtidos pelos trabalhos anteriores e possibilitar uma reinterpretação dos conceitos que neles foram discutidos.

3.1 Teoria de Recursos

O conceito de recurso vem da economia e está atrelado a ideia de escassez. Considera-se como recursos elementos que não são obtidos facilmente, mas que uma vez sob nossa posse, nos permitem realizar procedimentos que antes nos eram proibidos. Combustíveis fósseis e metais preciosos estão entre os principais exemplos de materiais escassos no nosso mundo atual e ao mesmo tempo necessários para uma série de coisas que nos são importantes. Entretanto, exemplos mais simples e ilustrativos podem ser dados no intuito de uma conexão mais direta com a física quântica que é obviamente o nosso foco aqui. (2) Vejamos: suponha que você esteja acampando em uma floresta cuja temperatura ambiente é de cerca de 30 graus Celsius e tenha levado apenas o mais necessário: roupas, mantimentos e uma barraca. A princípio, fogo é algo que poderia ser produzido apenas com os recursos naturais que estão à sua disposição, como pedras e madeira. Isso faz dele algo não escasso, pois pode ser livremente obtido nesse contexto. O mesmo, porém, não pode ser dito a respeito do gelo. Não há maneira de obtê-lo a partir de recursos naturais em uma floresta à

temperatura mencionada. Entretanto, uma vez que você o possua (porque o levou em um isopor ou qualquer coisa do tipo), pode utilizá-lo como recurso para gelar os mantimentos; tarefa a qual, cedo ou tarde, necessariamente esgotará o recurso.

Traçando um paralelo com a teoria quântica, o exemplo mais direto onde essa abordagem pode ser vista é em teoria de emaranhamento. Numa situação em que dois laboratórios, A e B , estejam separados por uma dada distância e restritos a apenas operações locais e comunicação clássica,ⁱ um estado emaranhado, compartilhado por A e B , é um recurso pois pode ser utilizado como um canal emaranhado para a realização do teletransporte quântico, que consiste em uma operação não local. Dessa forma, consome-se um recurso que não poderia ser produzido por ambas as partes nessas condições para realizar um procedimento que em princípio era proibido.

De uma maneira um pouco mais formal, pode-se definir a estrutura básica de uma teoria quântica de recursos, QRT,ⁱⁱ da seguinte forma.

Definição 1 (Teoria quântica de recursos). *Seja $\mathcal{O}$ um mapa CPTPⁱⁱⁱ dado por $\mathcal{O} : \mathcal{H}_{in} \rightarrow \mathcal{H}_{out}$, de forma que $\mathcal{O}(\mathcal{H}_{in}, \mathcal{H}_{out}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_{in}, \mathcal{H}_{out})$, sendo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores limitados que atuam no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Seja também $\mathcal{F}$ o mapa induzido $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathcal{H})$, de forma que $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sendo $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores limitados positivo semi-definidos com traço igual a um. A tupla $\mathcal{R} = (\mathcal{F}, \mathcal{O})$ é chamada teoria quântica de recursos (QRT) se:*

- 1 . Para qualquer espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, o conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{H}) = \mathcal{O}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ contém a identidade.
- 2 . Para quaisquer três espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ e $\mathcal{H}_C$, se $\Phi \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ e $\Theta \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C)$, então $\Theta \circ \Phi \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_C)$.

Nela, o conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ corresponde ao conjunto dos chamados *estados livres*, que são os estados que temos acesso em um dado contexto físico, enquanto que $\mathcal{O}(\mathcal{H}_{in}, \mathcal{H}_{out})$ é o conjunto das *operações livres*, ou seja, as operações que podemos realizar livremente dentro desse mesmo contexto. Dessa forma, a primeira condição apenas atesta o fato de que a operação identidade é sempre livre, independentemente do contexto, o que é bastante razoável já que ela não altera em nada o estado. Já a segunda diz que uma operação composta do tipo $\Theta \circ \Phi$ só é livre se as operações que a constituem, no caso Θ e Φ , forem também livres. Essa última é especialmente importante porque por consequência

ⁱNa literatura esse contexto é conhecido como LOCC, (33, 34) sigla em inglês para *local operations and classical communications*. Para uma revisão de teoria de emaranhamento ver a Ref. (35)

ⁱⁱDo inglês: *quantum resource theory*.

ⁱⁱⁱSigla para *Completely positive trace-preserving*, que em português significa: completamente positivo que preserva o traço. Uma introdução a esses conceitos pode ser vista na Ref. (36)

dela temos a chamada *regra de ouro* da teoria de recursos que devido a sua importância colocaremos aqui em destaque.

- Se $\Phi \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_{in}, \mathcal{H}_{out})$ e $\rho \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{in})$, então temos que $\Phi(\rho) \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_{out})$.

Em outras palavras: operações livres sempre converterão estados livres em estados livres. Isso justifica o fato de estados pertencentes a $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{F}(\mathcal{H})$ serem chamados de *estados recurso*, pois a partir dos meios que temos disponíveis (operações livres e estados livres) não podemos produzi-los. Porém, uma vez em posse de um estado desse tipo, podemos superar as restrições físicas que nos limitam às operações que chamamos de livres e então executar operações que, em princípio, seriam proibidas. Isso pode ser escrito da seguinte maneira: para um estado $\sigma \notin \mathcal{F}(\mathcal{H}_B)$, ou seja um estado recurso, podem existir mapas $\Phi \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ (livre) e $\Theta \notin \mathcal{O}(\mathcal{H}_A)$ (proibido) de forma que $\Phi(\rho \otimes \sigma) = \Theta(\rho)$, $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$.^{iv}

Um dos muitos pontos interessantes dessa abordagem para fenômenos da teoria quântica é seu foco nas operações livres enquanto reflexo das capacidades experimentais que temos em uma dada situação e nos estados recurso enquanto maneiras de superar tais limitações. (37) Uma vez que tal teoria nos dá uma visão panorâmica que pode ser aplicada a várias áreas diferentes, ao identificarmos um dado fenômeno quântico que se enquadre nas principais características de uma QRT isso nos permite explorá-lo a partir das aplicações e ferramentas que são comuns a todas as QRTs. No que diz respeito aos referenciais quânticos de fase, temos duas teorias que, sob a perspectiva da teoria quântica de recursos, nos permitem descrever a situação física onde não temos acesso a um dado referencial em comum, são elas: teoria de coerência e teoria de assimetria. Mostraremos que, no que diz respeito ao nosso problema em particular, quantificar o quão bem um subsistema quântico serve como referencial para outro, ambas nos dão medidas informacionais que permitem realizar tal tarefa. Começaremos explorando o ponto de vista da teoria de coerência.

3.2 Medidas de coerência

3.2.1 A abordagem BCP

Muito se tem discutido nos anos recentes sobre o papel da coerência, aqui entendida como os termos fora da diagonal do operador densidade, como recurso para realização de diversas operações. Das várias propostas de medidas de coerência que surgiram na literatura, bastante atenção foi dada à chamada abordagem BCP, cujo nome vem dos sobrenomes de seus autores; Baumgratz, Cramer e Plenio. (4) Seja pela sua simplicidade ou pioneirismo, fato é que tal abordagem deu origem a uma verdadeira árvore de ramificações

^{iv}Para uma revisão completa de todas as características e tipos de teorias de recurso veja a Ref. (2)

possíveis, muitas das quais podem ser conferidas na Ref. (38) As medidas que iremos apresentar aqui podem ser vistas como algumas dessas ramificações.

Começamos então pela definição de medida de coerência dada na Ref. (4) Qualquer função C é dita ser uma medida de coerência se satisfizer as seguintes condições:

- (C1) $C(\tau) = 0, \forall \tau \in \mathcal{I}$, sendo $\mathcal{I}$ o conjunto do estados chamados *incoerentes*, termo pelo qual nos referimos aos estados diagonais em uma dada base ortonormal $|i\rangle$.
- (C1') $C(\tau) = 0$, se e somente se $\tau \in \mathcal{I}$. Esta é uma condição mais forte que a anterior, pois requer que a função somente zere se o estado for diagonal.
- (C2a) Monotonicidade sob operações que preservam incoerência: sejam operações do tipo $\Lambda(\rho) = \sum_n K_n \rho K_n^\dagger$ em que $\{K_n \tau K_n^\dagger = \tau', \forall \tau, \tau' \in \mathcal{I}\}$ e $\sum_n K_n^\dagger K_n = \mathbb{1}$, denotadas incoerentes, temos que $C(\rho) \geq C(\Lambda(\rho))$.
- (C2b) Monotonicidade sob medições seletivas na média, também conhecida como monotonicidade forte: seguindo a definição anterior teremos que: $C(\rho) \geq \sum_n p_n C(\rho_n)$, em que $\rho_n = K_n \rho K_n^\dagger / p_n$ e $p_n = \text{Tr}(K_n \rho K_n^\dagger)$.
- (C3) Convexidade: $\sum_n p_n C(\rho_n) \geq C(\sum_n p_n \rho_n)$, em que $\sum_n p_n = 1$.

Das medidas informacionais que corroboram com essas restrições, um dos principais exemplos propostos também na Ref. (4) vem da medida de entropia relativa quântica, $S(\rho \parallel \sigma) = \text{Tr}(\rho \log \rho) - \text{Tr}(\rho \log \sigma)$, sendo S a *entropia de von Neumann* dada por

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_x \lambda_x \log \lambda_x, \quad (3.1)$$

na qual λ_x são os autovalores de ρ .^v Tal medida, quando utilizada com o intuito de mensurar coerência é chamada de *entropia relativa de coerência* e constitui em uma entropia relativa de um estado ρ com sua versão diagonal ρ^{diag} . Isso nos permite escrevê-la de uma maneira mais simplificada,

$$\begin{aligned} S(\rho \parallel \rho^{diag}) &= \text{Tr}(\rho \log \rho) - \text{Tr}(\rho \log \rho^{diag}) \\ &= -S(\rho) - \text{Tr}(\sum_i P_i \rho \log \rho^{diag}) \\ &= -S(\rho) - \text{Tr}(\sum_i P_i \rho P_i \log \rho^{diag}) \\ &= -S(\rho) - \text{Tr}(\rho^{diag} \log \rho^{diag}) \\ &= -S(\rho) + S(\rho^{diag}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que $\sum_{i=0}^{d-1} P_i = \mathbb{1}$, no qual d é a dimensão do espaço de Hilbert e $P_i = |i\rangle \langle i|$, sendo que da primeira para segunda equação inserimos $\mathbb{1}$ no traço e da segunda para a terceira

^vPara mais informações acerca da definição e das propriedades dessa entropia consultar Ref. (36)

equação usamos a propriedade cíclica do traço e a propriedade de idempotência dos projetores ($P_i^2 = P_i$), o que nos permitiu escrever $P_i \rho P_i$. Podemos então definir a entropia relativa de coerência de uma maneira mais prática por

$$C_r(\rho) = S(\Delta(\rho)) - S(\rho), \quad (3.3)$$

na qual Δ é uma operação conhecida como *defasagem completa*^{vi} que destrói todas as coerências de um dado estado,

$$\Delta(\rho) = \sum_{i=0}^{d-1} P_i \rho P_i. \quad (3.4)$$

Pela Eq. (3.3) é fácil ver que as condições (C1) e (C1') são trivialmente satisfeitas. Já com relação a (C2a) e (C3), ambas são satisfeitas pelas propriedades de qualquer medida de entropia relativa como podemos ver na Ref. (36). O mesmo acontece para a condição (C2b), porém a demonstração é menos direta. O leitor interessado pode conferir no artigo original da proposta BCP, Ref. (4).

Ainda que essa seja uma definição eficiente de medida de coerência, existem alguns pontos que foram deixados de lado e que críticos, dentre eles especialmente os autores das Refs. (5, 38), posteriormente exploraram no intuito de enriquecer a discussão e propor diferentes desdobramentos dessa mesma medida, a depender da situação física em questão. Abordaremos alguns desses pontos a seguir.

3.2.2 Desdobramentos e críticas da abordagem BCP: distinguindo *speakeable* e *unspeakeable*

A primeira das críticas que podem ser feitas à abordagem BCP diz respeito à falta de motivação física para a restrição feita às operações. Não está claro em qual contexto físico teríamos acesso apenas as operações incoerentes como operações livres para que, dessa forma, uma medida como a entropia relativa de coerência constituísse na quantificação de um recurso. Podemos sim, imaginar uma situação onde a preparação de estados coerentes seja difícil devido ao desafio de se isolar o sistema do ambiente para assim evitar a decoerência que o mesmo exerce sobre ele, porém isso não significa que todo o conjunto de operações incoerentes seria facilmente implementável nessa situação. Em geral, apenas um subconjunto dessas é necessário.

Para uma abordagem mais completa, expandiremos aqui a análise feita por BCP com base em três tipos de operações como operações livres: *covariantes por translação* (TC), *covariantes por defasagem* (DC) e *que preservam incoerência* (IP)^{vii, viii} focando

^{vi}Em inglês é chamada de *fully dephasing*.

^{vii}Em inglês os termos são, respectivamente, *translationally-covariant*, *dephasing-covariant* e *incoherence-preserving*.

^{viii}As operações incoerentes definidas pela abordagem BCP constituem um subconjunto das operações que preservam incoerência. Uma das principais diferenças é que para o primeiro tipo temos $\mathcal{I}_{in} = \mathcal{I}_{out}$.

especialmente nas versões unitárias dessas operações. As medidas de coerência associadas a primeira quantificam o que é chamado de *coerência unspeakable*, devido à sua relação direta com teoria de assimetria (como veremos posteriormente neste capítulo) que lida justamente com informação do tipo *unspeakable*, a qual só pode ser codificada em graus de liberdade específicos do sistema. Já as duas últimas estão associadas à chamada *coerência speakable* pois nos permitem definir medidas de coerência utilizadas para codificar informação do tipo *speakable*, as quais não fazem diferença entre graus de liberdade. Um exemplo simples que permite diferenciar ambas consiste em considerarmos uma operação $\mathcal{E}$ que leve um estado $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ para $(|0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$. Se a informação codificada nesses estados é do tipo *unspeakable*, essa operação não será livre, $\mathcal{E} \notin \mathcal{O}(\mathcal{H}_{in}, \mathcal{H}_{out})$, uma vez que, como para esse caso os graus de liberdade são importantes, ao realizarmos esse mapa possivelmente estaríamos levando um estado livre para um estado recurso ou ainda aumentando a quantidade de recurso que um dado estado possui. Portanto, uma medida desse tipo de informação não será monotônica com relação a $\mathcal{E}$. Por outro lado, se a informação codificada nesses estados é *speakable*, então essa operação será livre, $\mathcal{E} \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_{in}, \mathcal{H}_{out})$, e uma medida que quantifique esse tipo de informação será monotônica com relação a $\mathcal{E}$. Esses conceitos ficarão mais claros a medida que desenvolvermos mais as particularidades de cada tipo.

Primeiramente, vale fazer aqui alguns comentários mais detalhados a respeito do que consideramos como estados incoerentes e, portanto, livres. Coerência, definida como os termos fora da diagonal principal da matriz densidade de um estado, obviamente é um conceito que depende da base escolhida para expandir o espaço de Hilbert. Essa base estará associada a uma decomposição preferida do espaço de Hilbert em subespaços compostos pelos autoestados de um dado observável de interesse que aqui chamaremos de L , ou seja, $\mathcal{H} = \oplus_l \mathcal{H}_l$, sendo l os autovalores de L . Tal decomposição nesses subespaços, em geral reflete as restrições físicas que o sistema possui em um dado contexto, porém pode também ser devido puramente a um exercício matemático como nas decomposições em termos dos setores de carga que mostramos no capítulo anterior. Para exemplificar, seja um estado do tipo $|\psi\rangle = |l, l_1\rangle + |l, l_2\rangle$, em que l_1 e l_2 são os índices de degenerescência de l . Se não tivermos acesso a observáveis que nos permitam diferenciar $|l, l_1\rangle$ de $|l, l_2\rangle$, para todos os efeitos, $|\psi\rangle$ é tido como um estado incoerente mesmo possuindo coerência dentro dos autoestados de L . Esse é um caso que está além da abordagem BCP porque abrange subespaços preferidos não triviais, $\dim \mathcal{H}_l \geq 1$, como consequência da degenerescência de l . Isso faz com que os estados incoerentes sejam estados bloco-diagonais, descritos de maneira geral por $\rho = \sum_l p_l \Pi_l$, sendo Π_l um projetor nos subespaços $\mathcal{H}_l$. Entretanto, nos casos que serão do nosso interesse aqui, consideraremos sistemas bipartidos descritos pelo observável L_{tot} que será o gerador das translações coletivas e independentes entre si no sistema, de forma a atuar como L_1 no subsistema 1 e L_2 no subsistema 2 realizando translações em termos de x_1 e x_2 , respectivamente, ambos pertencentes a $\mathbb{R}$. Assim, consideraremos como subespaços

preferidos para o sistema total os subespaços $\{\mathcal{H}_{l_1} \otimes \mathcal{H}_{l_2}\}_{l_1, l_2}$ que são formados pela junção dos autoestados dos operadores L_1 e L_2 . Em outras palavras, utilizando a decomposição em setores de carga apresentada no capítulo anterior temos que, sendo $\mathcal{H}_1 = \oplus_{l_1} \mathcal{H}_{l_1}$ e $\mathcal{H}_2 = \oplus_{l_2} \mathcal{H}_{l_2}$, nossos subespaços preferidos serão $\oplus_{l_1, l_2} \mathcal{H}_{l_1} \otimes \mathcal{H}_{l_2} = \{\mathcal{H}_{l_1} \otimes \mathcal{H}_{l_2}\}_{l_1, l_2}$. Para exemplificar, considere os Hamiltonianos $H_1 = \sigma_z^1 \otimes \mathbb{1}_2$ e $H_2 = \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_z^2$, cujos operadores unitários são respectivamente $U_1 = e^{it_1 \sigma_z^1 \otimes \mathbb{1}_2}$ e $U_2 = e^{it_2 \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_z^2}$, $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,^{ix} atuando sobre um sistema bipartido de q-bits, como $\rho_{12} = |++\rangle \langle ++|$ em que $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, tal que $\rho_{12} \in \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Decompondo os espaços de Hilbert nos setores de carga, teremos $\mathcal{H}_\alpha = \oplus_{E_\alpha=0}^1 \mathcal{H}_{E_\alpha} = \{|0\rangle\}_{E_\alpha=0} \oplus \{|1\rangle\}_{E_\alpha=1}$ sendo $\alpha = 1, 2$ e E os autovalores do Hamiltoniano que constituem nas energias do sistema. Consequentemente, nossos subespaços preferidos do espaço total $\mathcal{H}_{12}$ serão $\oplus_{E_1, E_2} \mathcal{H}_{E_1} \otimes \mathcal{H}_{E_2} = \{|00\rangle\}_{E_1=0, E_2=0} \oplus \{|01\rangle\}_{E_1=0, E_2=1} \oplus \{|10\rangle\}_{E_1=1, E_2=0} \oplus \{|11\rangle\}_{E_1=1, E_2=1}$, portanto todos com dimensão igual a um (triviais). Perceba que se considerarmos um operador que atue da mesma forma sobre cada subsistema do sistema composto ρ_{12} , nossos subespaços preferidos serão outros e possivelmente terão dimensão superior a um.^x Voltando ao caso geral de um operador hermitiano qualquer L_{tot} , ao escolhermos a base $\{|l_1\rangle |l_2\rangle\}$, teremos que os estados que definiremos como estados incoerentes serão os diagonais nessa base, portanto,

$$\rho = \Delta(\rho) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} (\Pi_{l_1} \otimes \Pi_{l_2}) \rho (\Pi_{l_1} \otimes \Pi_{l_2}), \quad (3.5)$$

em que $\Pi_{l_1} = |l_1\rangle \langle l_1|$ e $\Pi_{l_2} = |l_2\rangle \langle l_2|$, será nossa classe mais geral de estados livres. Por consequência, no nosso contexto teremos apenas subespaços preferidos triviais e nossas definições das classes de operações refletirão essa mesma restrição,^{xi} o que implica que, não somente as operações que preservam incoerência levarão estados diagonais para estados diagonais, como também, operações covariantes por translação e operações covariantes por defasagem serão definidas considerando translações e defasagens independentes para cada subsistema. Esse é um ponto importante e que vale a pena ser destacado pois, em geral, essas duas últimas operações são definidas com base em um operador total que atua da mesma maneira em cada subsistema. As razões pelas quais optamos por uma definição diferente ficarão mais claras na próxima seção.

^{ix}Utilizamos aqui a notação $\mathbb{R}^2$ em virtude do par ordenado (t_1, t_2) ser um elemento do grupo formado pelo produto direto de dois grupos do tipo $(\mathbb{R}, +)$, ou seja conjunto dos reais com a operação soma que pode ser visto como $U(1) \times U(1)$. Dessa forma, a representação unitária do mesmo será $U_{\{H_\alpha, t_\alpha\}} = \bigotimes_{\alpha=1}^2 e^{-it_\alpha H_\alpha}$ o que permite que realizemos translações independentes em cada subsistema. Mais informações podem ser obtidas na Ref. (26)

^xConsidere, por exemplo, o unitário $U_{tot} = e^{it(\sigma_z^1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \sigma_z^2)}$. A ação dele sobre o espaço $\mathcal{H}_{12}$ induz a seguinte decomposição em setores de carga $\oplus_{E_{tot}=0}^2 \mathcal{H}_{E_{tot}} = \{|00\rangle\}_{E_{tot}=0} \oplus \{|01\rangle, |10\rangle\}_{E_{tot}=1} \oplus \{|11\rangle\}_{E_{tot}=2}$, na qual podemos ver que $\dim\{\mathcal{H}_{E=1}\} = 2$.

^{xi}Para uma abordagem mais geral tanto considerando subespaços preferidos não-triviais quanto explorando também aspectos como dilatação livre e medidas dentro de uma teoria de recursos de coerência, consultar a Ref. (5)

Para caracterizarmos coerência em sistemas bipartidos sob a ação de um operador como L_{tot} que atua de forma independente em cada subsistema, consideraremos as representações unitárias do grupo das translações coletivas geradas por ele,

$$U_{L_{tot}} \equiv e^{-ix_1 L_1 \otimes \mathbb{1}} e^{-ix_2 \mathbb{1} \otimes L_2}, \quad (3.6)$$

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Para tornar as descrições mais simples, podemos escrever esse operador unitário na forma de um superoperador da seguinte maneira

$$\mathcal{U}_{tot} = U_{L_{tot}}(\cdot)U_{L_{tot}}^\dagger \quad (3.7)$$

$$= e^{-ix_1 L_1 \otimes \mathbb{1}} e^{-ix_2 \mathbb{1} \otimes L_2}(\cdot) e^{ix_1 L_1 \otimes \mathbb{1}} e^{ix_2 \mathbb{1} \otimes L_2}. \quad (3.8)$$

Começamos então definindo aquelas que estão associadas a coerência *unspeakable*: operações covariantes por translação.

Definição 2 (Operações covariantes por translação). *Dizemos que uma operação $\mathcal{E}$ é covariante por translação referente ao observável L_{tot} se*

$$\mathcal{U}_{tot} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ \mathcal{U}_{tot}, \quad (3.9)$$

ou de forma equivalente

$$\mathcal{U}_{tot} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{U}_{tot}^\dagger = \mathcal{E}. \quad (3.10)$$

As operações unitárias que respeitam essa descrição serão aquelas para as quais teremos

$$U_{L_{tot}} V(\cdot) V^\dagger U_{L_{tot}}^\dagger = V U_{L_{tot}}(\cdot) U_{L_{tot}}^\dagger V^\dagger, \quad (3.11)$$

o que implica

$$U_{L_{tot}} V = e^{i\phi(x_1)} e^{i\phi(x_2)} V U_{L_{tot}}, \quad (3.12)$$

$$V^\dagger U_{L_{tot}}^\dagger = e^{-i\phi(x_1)} e^{-i\phi(x_2)} U_{L_{tot}}^\dagger V^\dagger, \quad (3.13)$$

para fases $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ quaisquer. Tirando o traço dos dois lados vemos que, considerando espaços de Hilbert finitos, essa condição só se manterá se e somente se $e^{i\phi(x_1)} e^{i\phi(x_2)} = 1$, portanto,

$$[U_{L_{tot}}, V] = 0. \quad (3.14)$$

Tal condição só é satisfeita para V diagonal na base de L_{tot} , portanto, operações unitárias covariantes por translação necessariamente serão diagonais na base $\{|l_1\rangle |l_2\rangle\}$. Seja $\{\mathcal{H}_{l_{tot}}\}_{l_{tot}} = \{\mathcal{H}_{l_1} \otimes \mathcal{H}_{l_2}\}_{l_1, l_2}$ o conjunto dos autoespaços de L_{tot} , $\Pi_{l_1, l_2} = \Pi_{l_1} \otimes \Pi_{l_2}$ os projetores nesse subespaço e $\{V_{l_1, l_2}\}_{l_1, l_2}$ um conjunto de unitários arbitrários que agem dentro desses subespaços, podemos escrever V como

$$V = \sum_{l_1, l_2} V_{l_1, l_2} \Pi_{l_1, l_2}. \quad (3.15)$$

A principal característica desse tipo de operador é que além de preservar estados incoerentes, ele não permite permutações entre diferentes subespaços $\mathcal{H}_{l_{tot}}$. O mesmo não poderá ser dito sobre os unitários das próximas classes de operações que são as relacionadas com coerência *speackable*.

Do ponto de vista físico, uma possível restrição experimental que nos leve às operações covariantes por translação, de maneira geral, emerge em situações onde não temos acesso à um dado referencial de fase adequado sob o qual definir as translações. Como vimos no capítulo anterior, se duas partes em laboratórios distantes, como Alice e Bob, não possuem um referencial em comum, uma não pode preparar estados com relação ao referencial da outra e, portanto, estão restritos a estados invariantes por translação. No caso de uma terceira parte, Charlie, produzir um estado bipartido ρ_{AB} sob um referencial que Alice e Bob não conhecem e distribuir um subsistema para cada um dos dois, ambos terão, além da restrição global já imposta pela ausência de um referencial em comum entre eles, uma restrição local na manipulação do estado ρ_{AB} , uma vez que só podem utilizar operações locais. Da mesma forma que associamos à restrição global uma regra de superseleção global, associaremos agora à restrição local uma regra de superseleção local, ambas neste caso com relação ao grupo das translações em uma direção. Por consequência dessa regra de superseleção local, não é possível para as partes distinguir ρ_{AB} de um estado produto $\rho_A \otimes \rho_B$, uma vez que para Alice $\rho'_A = e^{-ix_AL_A}(\rho_A)e^{ix_AL_A}$ e para Bob $\rho'_B = e^{-ix_BL_B}(\rho_B)e^{ix_BL_B}$, portanto, $\mathcal{U}_{tot}(\rho_{AB}) = \rho'_A \otimes \rho'_B$, $\forall (x_A, x_B) \in \mathbb{R}^2$, que é um estado incoerente e por isso, nesse contexto, livre. O mesmo pode ser dito sobre as operações livres, sendo $\mathcal{U}_\alpha = e^{-ix_\alpha L_\alpha}(\cdot)e^{ix_\alpha L_\alpha}$, em que $\alpha = A, B$: para Alice $\mathcal{E}_A = \mathcal{U}_A \circ \mathcal{E}_A \circ \mathcal{U}_A^\dagger$, para Bob $\mathcal{E}_B = \mathcal{U}_B \circ \mathcal{E}_B \circ \mathcal{U}_B^\dagger$, portanto, $\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{U}_{tot} \circ \mathcal{E}_{AB} \circ \mathcal{U}_{tot}^\dagger$. Esse é um exemplo físico mais direto do caso específico que estamos tratando no qual as translações são independentes.

Definição 3 (Operações covariantes por defasagem). *Dizemos que uma operação $\mathcal{E}$ é covariante por defasagem referente ao observável L_{tot} se*

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{D}_{tot} = \mathcal{D}_{tot} \circ \mathcal{E}, \quad (3.16)$$

em que

$$\mathcal{D}_{tot} = \mathcal{D}_{L_1} \otimes \mathcal{D}_{L_1}, \quad (3.17)$$

sendo

$$\mathcal{D}_{L_\alpha}(\cdot) = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2x_0} \int_{-x_0}^{x_0} dx e^{-ixL_\alpha}(\cdot)e^{ixL_\alpha}, \quad (3.18)$$

para $\alpha = 1, 2$, a operação de defasagem nos subsistemas, que elimina todas as coerências que o mesmo possua na base $\{|l_\alpha\rangle\}$. Dessa forma, podemos identificar $\mathcal{D}_{tot}$ com o que chamamos de defasagem completa na eq. 3.4, o que nos permite reescrever a definição em 3.16 como

$$\mathcal{E} \circ \Delta = \Delta \circ \mathcal{E}. \quad (3.19)$$

Essa equivalência entre $\mathcal{D}_{tot}$ e Δ só acontece porque as defasagens em $\mathcal{H}_{l_1}$ e $\mathcal{H}_{l_2}$ são independentes. Se tivéssemos uma mesma defasagem em ambos os subsistemas, o resultado seria um estado bloco-diagonal que, portanto, preserva ainda algumas coerências. Usaremos essa versão mais geral de defasagem quando retomarmos o mecanismo de Page-Wootters.

Restringindo-nos novamente às operações unitárias, temos que as covariantes por defasagem estendem as covariantes por translação por permitirem permutações entre subespaços preferidos unidimensionais $\{\mathcal{H}_{l_{tot}}\}_{l_{tot}}$ distintos. Seja $\mathcal{V} = V(\cdot)V^\dagger$ uma operação unitária covariante por defasagem e $\{|l_{tot}\rangle\}_{l_{tot}}$ o conjunto dos estados puros incoerentes, temos que

$$\mathcal{V}(|l_{tot}\rangle\langle l_{tot}|) = |\pi(l_{tot})\rangle\langle \pi(l_{tot})|, \quad (3.20)$$

sendo π uma permutação sob os estados que compõe o conjunto $\{|l_{tot}\rangle\}_{l_{tot}}$, ou seja, é uma permutação entre estados de um mesmo subespaço invariante (ou setor de carga). Assim, o operador unitário V que compõe essa operação é dado por

$$V = \sum_{l_{tot}} e^{i\theta_{l_{tot}}} |\pi(l_{tot})\rangle\langle l_{tot}| \quad (3.21)$$

$$= \sum_{l_1, l_2} e^{i\theta_{l_1}} e^{i\theta_{l_2}} |\pi(l_1), \pi(l_2)\rangle\langle l_1, l_2|, \quad (3.22)$$

em que basta que uma permutação seja feita em $\{l_1\}_{l_1}$ ou $\{l_2\}_{l_2}$ para que mudemos de subespaço em $\{l_{tot}\}_{l_{tot}}$.

Definição 4 (Operações que preservam incoerência). *Dizemos que uma operação $\mathcal{E}$ preserva incoerência se*

$$\rho \in \mathcal{I}_{in} \Rightarrow \mathcal{E}(\rho) \in \mathcal{I}_{out}, \quad (3.23)$$

sendo $\mathcal{I}_{in}$ o conjunto dos estados incoerentes de entrada e $\mathcal{I}_{out}$ o conjunto dos estados incoerentes de saída, ou seja, podemos ter subespaços preferidos diferentes entre entrada e saída.

Podemos também caracterizar essas operações com relação ao mapa de defasagem que definimos a pouco, assim, operações que preservam incoerência podem ser definidas como aquelas em que

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{D}_{tot} = \mathcal{D}_{tot} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_{tot}. \quad (3.24)$$

Se nos restringirmos então às operações unitárias, temos que as que são covariantes por defasagem são as mesmas que preservam incoerência. A distinção entre uma classe e outra só aparece quando consideramos operações mais gerais. Vejamos, por exemplo, a seguinte operação

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho_{12}) &= |00\rangle\langle 00| \text{Tr}(|++\rangle\langle ++| \rho_{1,2}) + |01\rangle\langle 01| \text{Tr}(|-+\rangle\langle -+| \rho_{1,2}) \\ &+ |10\rangle\langle 10| \text{Tr}(|+-\rangle\langle +-| \rho_{1,2}) + |11\rangle\langle 11| \text{Tr}(|--\rangle\langle --| \rho_{1,2}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$\mathcal{E}$ preserva incoerência, porém não pode ser considerada uma operação covariante por defasagem, uma vez que, apesar de $\mathcal{D}_{tot} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}$, temos que $\mathcal{E} \circ \mathcal{D}_{tot} \neq \mathcal{E}$, sendo que nesse caso L_α da Eq. (3.18) é igual a σ_z .

Vale para as operações que são covariantes por defasagem a mesma ressalva que fizemos com relação às que preservam incoerência: ambas ainda carecem de um contexto físico onde seriam relevantes como operações livres. Não se sabe ainda em que contexto deveríamos ser capazes de realizar apenas esses tipos de operações para que quantificadores de coerência associados a elas, como o modelo BCP, constituam em medidas de um tipo de recurso. Isso levou alguns (como na já citada Ref. (5)) a sugerirem que talvez o recurso que potencializa a manipulação de informação do tipo *speakable* seja decorrente de outra propriedade dos estados quânticos que não a coerência. Por hora essa permanece sendo uma questão em aberto.

Com base nessas definições de operações podemos agora generalizar o modelo de medida de coerência BCP apenas atualizando as condições (C2a) e (C2b) onde substituímos as operações incoerentes pelas que aqui definimos. Denotando as operações covariantes por translação por TC , as covariantes por defasagem por DC e as que preservam incoerência por IP , teremos então o seguinte resultado expresso pela figura 1.

Proposição 1.

$$TC \subset DC \subset IP.^{xii} \quad (3.26)$$

Portanto, qualquer medida de coerência IP é também uma medida de coerência DC que é também uma medida de coerência TC . Entretanto, nem toda medida TC é uma medida DC .

Demonstração: É fácil ver que as operações DC são também operações que IP . Uma vez que, sendo ρ_{12} um estado bipartido incoerente, temos

$$\mathcal{E}(\rho_{12}) = \mathcal{E}(\mathcal{D}_{tot}(\rho_{12})) = \mathcal{D}_{tot}(\mathcal{E}(\rho_{12})). \quad (3.27)$$

O mesmo pode ser demonstrado com relação as operações TC apenas substituindo $\mathcal{D}_{tot}$ por $\mathcal{U}_{tot}$ na equação acima. Para mostrar que TC é um subconjunto de DC , primeiramente basta notar através da própria definição das operações, respectivamente nas Eqs. (3.9) e (3.16), que integrando a primeira com relação a x , usando a Eq. (3.18), obtemos a segunda. Com isso, poderíamos pensar que ambas as classes são equivalentes, entretanto como podemos ver pelos unitários definidos nas Eqs. (3.15) e (3.20), existem operações que são TC , mas não são DC . Portanto, concluímos que a Eq. (3.26) é verdadeira, restando agora demonstrar a segunda parte da proposição (nem toda medida TC é DC). O que ela atesta, em outras palavras, é que toda medida que é monotônica com relação as operações IP também o será com relação às operações DC e todas as medidas que são monotônicas

^{xii}Essa relação é válida independente da escolha de subespaços preferidos.

com relação às operações DC também o serão com relação às operações TC , porém nem toda medida monotônica com relação às operações TC é também monotônica com relação às operações DC . A primeira parte dessa afirmação é consequência direta da Eq. (3.26), já para demonstrar a segunda parte precisaríamos exemplificar com medidas que são TC , porém não DC , o que faremos nas próximas seções. É ainda uma questão em aberto se existem medidas de coerência DC que não sejam IP . A medida de coerência BCP, por exemplo, pode ser enquadrada em ambas por ser IP e, consequentemente, também pode ser vista como uma medida de coerência TC a depender do contexto físico em que for utilizada (como mostraremos na 3.3.2).

Figura 1 – Relação entre as operações que preservam incoerência, covariantes por defasagem e covariantes por translação e as respectivas medidas de coerência definidas para cada conjunto de operações. Ainda não se sabe se a inclusão das medidas IP nas DC é estrita, ou seja, não se sabe se a primeira é realmente diferente da segunda.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com relação à divisão entre medidas de coerência do tipo *speakeable* e *unspeakeable*, considerando que o cerne da questão está ligado às operações que temos acesso livremente num dado cenário físico, ainda que as operações IP e DC envolvam também TC , temos que a restrição física só poderá estar vinculada a um único tipo de operação livre. Portanto, mesmo que todas as medidas de coerência IP e DC sejam também TC , apenas as consideraremos como quantificadores de informação *unspeakeable* quando forem utilizadas num cenário físico em que somente a classe de operações covariantes por translação seja possível. Assim, medidas do tipo IP podem ser utilizadas como quantificadores tanto de informação *speakeable* quanto *unspeakeable* a depender da contexto. Por outro lado, medidas de coerência que se enquadrem apenas naquelas do tipo TC serão sempre medidas de coerência do tipo *unspeakeable*.

Uma vez que IP é nossa classe mais geral de operações, como mostra o lado esquerdo da figura 1, se as restringirmos ao subconjunto de operações TC , poderemos a partir de uma medida de coerência *speakeable* definir novas medidas, desta vez monotônicas

apenas com relação às operações TC e, portanto, do tipo *unspeakable*. Em suma, para cada medida de coerência *speakeable* podemos sempre definir medidas de coerência *unspeakable* restringindo as operações ao subconjunto TC , tudo depende de quais são as restrições físicas que queremos modelar e quais os recursos que queremos quantificar. É o que faremos na próxima seção partindo da medida de entropia relativa de coerência e direcionando nosso foco para o mecanismo de Page-Wootters sob a ótica da teoria de recursos. Dessa abordagem, emergirão duas medidas de coerência *unspeakable*.

3.2.3 Coerência interna vs externa

Conforme feito na Ref. (14), consideremos como protótipo para nossa análise do mecanismo de Page-Wootters um sistema de dois q-bits Bell-diagonais,

$$\rho_{SR} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_{SR} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^S \otimes \sigma_i^R \right), \text{ xiii} \quad (3.28)$$

em que o parâmetro $c_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_i)$, tal que $-1 \leq c_i \leq 1$. Escrito na base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, podemos visualizar ρ como a seguinte forma matricial

$$\rho_{SR} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+c_3 & 0 & 0 & c_1-c_2 \\ 0 & 1-c_3 & c_1+c_2 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & 1-c_3 & 0 \\ c_1-c_2 & 0 & 0 & 1+c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

O Hamiltoniano do sistema será o mesmo que utilizamos quando introduzimos o mecanismo no capítulo anterior,

$$H = \sigma_z^R \otimes \mathbb{1}^S + \mathbb{1}^R \otimes \sigma_z^S, \quad (3.30)$$

já a média global, ou *G-twirling* global, Eq. (2.37), escreveremos aqui na forma de uma operação de defasagem global para mantermos a notação utilizada dentro da teoria de recursos de coerência,

$$\mathcal{D}(\rho_{SR}) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iHt} \rho_{SR} e^{iHt} dt. \quad (3.31)$$

Note, entretanto, que para todos os efeitos a operação é a mesma, cumprindo a função de eliminar do estado os graus de liberdade associados a um referencial externo de tempo. Aplicando essa operação a matriz densidade acima, considerando $T = \frac{\pi}{2}$, teremos

$$\mathcal{D}(\rho_{SR}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c_3 & c_1+c_2 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & 1-c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Como podemos ver, o resultado da ação de $\mathcal{D}(\cdot)$, visualmente, é eliminar do sistema as coerências que se encontram fora da estrutura bloco-diagonal da matriz densidade, ou

^{xiii}Sendo que $\sigma^1 = \sigma^x$, $\sigma^2 = \sigma^y$ e $\sigma^3 = \sigma^z$.

seja, aquelas que não pertencem aos autoestados de H e, por isso, são assimétricas com relação ao tempo. A essas coerências dá-se o nome de *coerências externas*. (39, 14) No contexto em que se está sujeito a uma regra de superseleção global, tais coerências não podem ser produzidas, uma vez que os estados livres são aquelas globalmente simétricos com relação a um possível referencial externo de tempo. Entretanto, sendo essa uma restrição experimental e não fundamental, estados com coerência externa são considerados como recursos, uma vez que através deles podemos obter alguma informação a respeito do parâmetro t do relógio sob o qual o estado foi preparado. (39) Dessa forma, uma questão importante é: como quantificamos esse recurso?

Várias são as propostas de medidas informacionais que nos permitem quantificar coerência externa, aqui, porém, focaremos naquela oriunda da entropia relativa de coerência que chamamos de medida de coerência BCP, Eq. (3.3). Partindo de sua forma mais geral temos,

$$C_r(\rho_{SR}) = \mathcal{S}(\Delta(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\rho_{SR}). \quad (3.33)$$

Podemos ver que operação de defasagem completa é o que faz com que essa medida compute todas as coerências existentes no sistema ρ_{SR} . Porém, sendo o nosso objetivo quantificar apenas a contribuição das coerências externas, basta que troquemos a defasagem completa pela defasagem global $\mathcal{D}$ para que assim desconsideremos as coerências dentro da estrutura bloco-diagonal. Dessa forma, podemos definir,

$$C_r^{ext}(\rho_{SR}) = \mathcal{S}(\mathcal{D}(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\rho_{SR}), \quad (3.34)$$

como uma medida de coerência externa decorrente da abordagem BCP. Assim como $C_r(\cdot)$ essa medida é também uma de entropia relativa e, por isso, herda contração sob a ação de mapas CPTP, convexidade conjunta e monotonicidade sob medidas seletivas, o que faz com que ela satisfaça todas as condições básicas para uma medida de coerência. Contudo, uma vez que fizemos uma restrição às coerências que são contabilizadas, resta saber: seria essa medida monotônica sob a ação de todas as operações IP ? A resposta é não. A ação de uma regra de superseleção global faz com que tenhamos como operações livres apenas aquelas que são covariantes por translações globais, ou seja, para as quais na Eq. (3.9) temos $U = e^{-i(\sigma_z^R \otimes \mathbf{1}^S + \mathbf{1}^R \otimes \sigma_z^S)t}$ e $\mathcal{U}_{tot} = U(\cdot)U^\dagger$.^{xiv} Focando nos operadores unitários, isso significa que eles serão sempre bloco-diagonais e, portanto, incapazes de gerar coerência externa. Se operadores unitários, como os considerados livres no contexto das operações DC e IP , fossem permitidos, o resultado é que seríamos capazes de gerar um estado recurso a partir de um estado livre. Como exemplo, consideremos um operador como o da Eq. 3.21,

$$V = |10\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 01| + |00\rangle \langle 10| + |01\rangle \langle 11|, \quad (3.35)$$

^{xiv}Neste caso, estados bloco-diagonais podem ser vistos como estados incoerentes e os subespaços preferidos passam a ser $\{\mathcal{H}_{l_{tot}}\}_{l_{tot}}$, em que l_{tot} são os autovalores de $L_{tot} = \sigma_z^R \otimes \mathbf{1}^S + \mathbf{1}^R \otimes \sigma_z^S$ e, portanto, $\dim \mathcal{H}_{l_{tot}} \geq 1$.

que em notação matricial, fazendo uso da mesma base utilizada na Eq. 3.29, é escrito como

$$V = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Apesar da operação $\mathcal{V} = V(\cdot)V^\dagger$ ser uma operação que preserva a diagonal do sistema, e portanto leva estados incoerentes a estados incoerentes, $\mathcal{V}(\Delta(\rho_{SR})) = \Delta(\rho_{SR})$, ela é capaz de gerar coerência externa a partir de um estado bloco-diagonal. Aplicando-a ao estado $\mathcal{D}(\rho_{SR})$ teremos,

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}(\rho_{SR})) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 + c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Consequentemente, C_r^{ext} de fato não é monotônica com relação às operações IP . Porém, seria ela monotônica com relação às operações TC , neste caso, covariantes por translações globais? Intuitivamente é possível ver que sim, uma vez que essas operações são justamente aquelas consideradas livres no contexto de uma regra de superseleção global e, conforme a regra de ouro das teorias de recursos, operações livres sempre levarão estados livres para estados livres. De qualquer forma, na próxima seção daremos uma demonstração mais direta disso ao relacionarmos medidas de coerência com medidas de assimetria.

Voltemos agora nossa atenção para o recurso por trás do funcionamento do mecanismo de Page-Wootters que é o nosso foco principal nesta dissertação. Conforme vimos anteriormente, esse mecanismo consiste na interiorização de um tipo de referencial de fase, de forma que, mesmo na ausência de um referencial externo para tempo, possamos descrever um sistema de interesse S através de um sistema relógio R . A questão agora é: como medir o quão bem o sistema R serve como referencial para o sistema S ? Como estamos sob a ação de uma regra de superseleção global, certamente as coerências externas não tem papel algum para a descrição em termos de referenciais internos, já que estamos restritos apenas a estados bloco-diagonais. Restam-nos então as chamadas *coerências internas* (39, 14) que consistem nos termos fora da diagonal, mas dentro da estrutura bloco-diagonal da matriz densidade. Tendo como base novamente a entropia relativa de coerência, a medida de informação que naturalmente surge para quantificarmos esse tipo de coerência consiste em

$$C_r(\mathcal{D}(\rho_{SR})) = \mathcal{S}(\Delta(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\mathcal{D}(\rho_{SR})), \quad (3.38)$$

sendo que $\Delta(\mathcal{D}(\rho_{SR})) = \Delta(\rho_{SR})$. Contudo, para melhor analisarmos essa medida enquanto quantificadora de um recurso, precisamos definir em que contexto estados bloco-diagonais

são, de fato, um recurso, afinal no contexto de uma regra de superseleção global esses são estados livres. A resposta está no exemplo que demos anteriormente envolvendo Alice, Bob e Charlie. Se além da regra de superseleção global, que emerge do fato de Alice e Bob não compartilharem um mesmo referencial entre si e nem com Charlie, tivermos também uma regra de superseleção local, o que significa dizer que para um estado bipartido ρ_{AB} preparado sob o referencial de Charlie, Alice e Bob terão acesso cada um à apenas um subsistema desse estado, ainda que haja comunicação clássica entre eles, ambos não serão capazes de distinguir ρ_{AB} de $\rho_A \otimes \rho_B$, nem ρ_A e ρ_B de $\Delta(\rho_A)$ e $\Delta(\rho_B)$, respectivamente. Dessa forma, nossos estados livres serão justamente os estados diagonais. Porém, uma vez que Charlie envie para Alice e Bob, um sistema bipartido com coerência interna, como o ρ_{SR} , sendo, por exemplo, a parte S para Alice e a parte R para Bob, tal sistema pode servir como um referencial compartilhado entre eles e, portanto, um recurso que pode ser consumido para então permitir que Alice e Bob tenham acesso ao estado ρ_{AB} . Um contexto mais simples e mais diretamente relacionado ao mecanismo de Page-Wootters seria o seguinte: dado que Alice e Bob não compartilham um mesmo referencial, se Bob envia a Alice um dado sistema ρ_S , ela não será capaz de distingui-lo de um estado $\Delta(\rho_S)$, porém se ele envia esse sistema juntamente com um referencial internalizado, ρ_R , ou seja, envia um sistema bipartido ρ_{SR} , Alice será capaz de acessar a informação contida em ρ_S a partir de sua relação com ρ_R , sendo que quanto maior a coerência interna entre eles, mais fidedigno será esse acesso.

Partindo então desse cenário, as operações livres seriam aquelas que definimos anteriormente como TC , em que as translações são independentes, já que as demais operações envolvem operadores não diagonais e, portanto, inacessíveis. Assim, $C_r(\mathcal{D}(\cdot))$ deve ser monotônica com relação a essas operações. As demais propriedades que uma medida de coerência tem que ter, a exemplo da medida de coerência externa, já são satisfeitas uma vez que a medida de coerência interna também é no fundo uma entropia relativa. No entanto, apenas para confirmar que essa medida não é monotônica com relação às operações IP , vamos supor por um momento que uma operação IP do tipo $\mathcal{V} = V(\cdot)V^\dagger$, com operador unitário dado novamente pela Eq. (3.35), seja possível. Ainda que neste caso, diferentemente do anterior, esse tipo de operação não seja capaz de gerar recurso a partir de um estado livre, uma vez que agora estados livres são estados diagonais e isso, portanto, implicaria em gerar coerência a partir de um estado incoerente (o que é proibido pela própria definição de operação IP), temos que $C_r(\mathcal{D}(\cdot))$ não será monotônica com relação às IP pois tais operações seriam capazes de aumentar a coerência interna de um dado estado recurso. Ao aplicarmos $\mathcal{V}$ em ρ_{SR} , por exemplo, temos que

$$\mathcal{V}(\rho_{SR}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 + c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 - c_2 & 0 \\ 0 & c_1 - c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Em comparação a Eq. (3.29), a diferença é que trocamos as coerências internas pelas externas. Assim, caso tenhamos $c_1 = -c_2$, o resultado de tal operação será justamente um aumento na coerência interna do estado, afinal, se antes da operação tínhamos necessariamente $C_r(\mathcal{D}(\rho_{SR})) = 0$, agora teremos $C_r(\mathcal{D}(\mathcal{V}(\rho_{SR}))) > 0$, para $|c_1| > 0$. Isso nos permite então classificar $C_r(\mathcal{D}(\cdot))$ como uma medida de coerência do tipo *unspeakable*. Assim como no caso da medida de coerência externa, deixaremos a demonstração da monotonicidade de $C_r(\mathcal{D}(\cdot))$ com relação às operações *TC* para ser apresentada mais diretamente na próxima seção. Com isso, temos duas medidas resultantes da abordagem BCP a partir da restrição das operações *IP* para aquelas que são somente *TC* e, como tal, capazes de quantificar informação do tipo *unspeakable*, conforme dissemos no final da seção anterior. A figura abaixo ilustra a relação entre elas.

Figura 2 – Classificação das medidas de coerência aqui definidas de acordo com as classes mais gerais associadas às operações livres. Tanto a medida de coerência interna, em azul, quanto a de coerência externa, em vermelho, consistem em uma ramificação da entropia relativa de coerência, em preto, restringindo as operações *IP* àquelas que são somente *TC*. Como resultado, temos que de uma medida de coerência *speakable* definimos duas medidas de coerência *unspeakable*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Levando-se em conta que $C_r(\rho_{SR})$ quantifica a coerência total de um dado estado ρ_{SR} , enquanto que $C_r^{ext}(\rho_{SR})$ e $C_r(\mathcal{D}(\rho_{SR}))$ quantificam a coerência externa e a interna desse mesmo estado, respectivamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 2. *A entropia relativa de coerência, sendo uma medida de coerência total, pode ser escrita em termos das medidas de coerência externa e interna, de forma que,*

$$C_r(\rho_{SR}) = C_r^{ext}(\rho_{SR}) + C_r(\mathcal{D}(\rho_{SR})). \quad (3.40)$$

Demonstração: usando a definição de C_r dada na Eq. (3.33), podemos aplicá-la a

um estado $\mathcal{D}(\rho_{SR})$. Assim, obteremos

$$\begin{aligned}
 C_r(\mathcal{D}(\rho_{SR})) &= \mathcal{S}(\Delta(\mathcal{D}(\rho_{SR}))) - \mathcal{S}(\mathcal{D}(\rho_{SR})) \\
 &= \mathcal{S}(\Delta(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\mathcal{D}(\rho_{SR})) \\
 &= \mathcal{S}(\Delta(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\mathcal{D}(\rho_{SR})) + \mathcal{S}(\rho_{SR}) - \mathcal{S}(\rho_{SR}) \\
 &= C_r(\rho_{SR}) - C_r^{ext}(\rho_{SR}),
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

em que na segunda linha usamos que $\Delta(\rho_{SR})$ é invariante sob a ação de $\mathcal{D}$.

Como notado na Ref. (14), há um exemplo interessante com relação ao mecanismo de Page-Wootters que merece destaque. Aplicando a medida coerência interna aos estados de Bell $|\Psi^+\rangle$ e $|\Phi^+\rangle$, temos que: $C_r(\mathcal{D}(|\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|)) = 1$ e $C_r(\mathcal{D}(|\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|)) = 0$, constituindo, respectivamente, no melhor e no pior caso para o mecanismo. Isso mostra claramente que o emaranhamento não é em si um recurso necessário e nem suficiente para que o mecanismo funcione. O recurso necessário é justamente a coerência interna do estado. Entretanto, posteriormente veremos que é possível mostrar que no conceito de coerência interna ainda há um lugar para um tipo de emaranhamento que faz-se necessário.

Na próxima seção, nos concentraremos em abordar quantificadores de referenciais pelo ponto de vista de uma teoria de recursos de assimetria. Como veremos, tal abordagem não só é de fato equivalente a apresentada aqui para o caso dos referenciais de fase descritos pelo grupo $U(1)$, como também estende a análise para casos mais gerais, além de proporcionar maior compreensão física a respeito do tema.

3.3 Medidas de assimetria

3.3.1 Assimetria de Holevo

No capítulo 2 apresentamos algumas ferramentas da teoria de grupos que permitem tratar a questão dos referenciais quânticos. Vimos que, na ausência de um referencial descrito por um grupo G , em comum entre duas partes, Alice e Bob, um sistema ρ_A preparado por Alice será para o referencial de Bob equivalente a um sistema simétrico com relação a esse mesmo grupo, portanto, sendo ρ'_A o estado de Alice descrito pelo referencial de Bob, teremos $\rho'_A = \mathcal{G}(\rho_A)$, em que $\mathcal{G}$ é a média global dada pela Eq. (2.18). Se adotarmos o ponto de vista de uma teoria de recursos nesse contexto, podemos identificar estados simétricos como ρ'_A com os estados livres, uma vez que eles independem de referenciais e por isso podem ser preparados livremente por ambas as partes e utilizados para comunicação entre elas sem que haja perda de informação. Isso nos leva a crer que, por outro lado, estados que sejam assimétricos com relação a G possam constituir em um tipo de recurso. Pensemos por exemplo no caso de uma bússola. O que faz dela um bom referencial para indicar direção é justamente o fato de ser assimétrica com relação às rotações, já que, por mais que a giremos, seu ponteiro sempre apontará para o norte magnético da Terra. Se o

ponteiro, porém, acompanhasse nosso giro, a bússola obviamente não teria utilidade como referencial. De maneira análoga, um estado assimétrico ρ_A preparado por Alice, pode não servir perfeitamente para codificar informação *speakeable* a ser enviada a Bob (uma vez que, como visto na seção 2.2.2, ele sofrerá um tipo de decoerência), porém, pode servir para codificar informação do tipo *unspeakeable* referente a orientação do referencial de Alice. Para quantificar esse tipo de informação faz-se necessária uma medida de assimetria.

Definição 5. Uma função $f : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser um monótono de assimetria se satisfizer as seguintes condições:

- (i) $f(\cdot) \geq 0$;
- (ii) $f(\rho) = 0$ se e somente se ρ for simétrico ($\rho = \mathcal{G}(\rho)$);
- (iii) monotonicidade sob operações G -invariantes.

Uma das primeiras e principais propostas que procurou quantificar a assimetria como um recurso no contexto de uma regra de superseleção global é a chamada assimetria de Holevo, introduzida por Vaccaro *et al.* na Ref. (9)^{xv} Essa medida é dada por

$$A_G(\rho) \equiv \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho)) - \mathcal{S}(\rho). \quad (3.42)$$

Olhando para as condições impostas pela definição podemos ver que as duas primeiras condições são diretamente satisfeitas pelas próprias propriedades da entropia de von Neumann. Para terceira, utilizaremos a prova dada na Ref. (9) A operação G -invariante mais geral que se pode ter é aquela que leva um estado inicial ρ a um dos N estados abaixo

$$\rho_i = \frac{\mathcal{E}_i(\rho)}{p_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.43)$$

em que $U_g \mathcal{E}_i(\rho) U_g^\dagger = \mathcal{E}_i(U_g \rho U_g^\dagger)$, $\forall g \in G$ e $p_i = \text{Tr}(\mathcal{E}_i(\rho))$. Note que essa operação inclui a possibilidade de adicionar subsistemas ao estado de interesse, realizar operações unitárias e medições no sistema composto pelo estado e os subsistemas adicionados. O objetivo é mostrar que

$$A_G(\rho) \geq \sum_i p_i A_G(\rho_i), \quad (3.44)$$

ou seja,

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho)) - \mathcal{S}(\rho) \geq \sum_i p_i (\mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_i)) - \mathcal{S}(\rho_i)), \quad (3.45)$$

que podemos rearranjar como

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho)) - \sum_i p_i \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_i)) \geq \mathcal{S}(\rho) - \sum_i p_i \mathcal{S}(\rho_i). \quad (3.46)$$

^{xv}Um resultado bastante semelhante foi obtido e bastante explorado no contexto de referenciais quânticos na Ref. (30)

Observe que como as operações $\mathcal{E}_i$ são G -invariantes podemos permutá-las com a operação $\mathcal{G}$. Denotando a variação média na entropia sob a ação de $\mathcal{E}$ por

$$\Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\rho) = \mathcal{S}(\rho) - \sum_i p_i \mathcal{S}(\rho_i), \quad (3.47)$$

podemos reescrever a relação que queremos demonstrar,

$$\Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\mathcal{G}(\rho)) \geq \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\rho). \quad (3.48)$$

Faremos uso agora de três fatos:

- (i) para qualquer operação $\mathcal{E}(\cdot)$, a quantidade $\Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\cdot)$ é côncava, (40) ou seja, $\Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\sum_i p_i \rho_i) \geq \sum_i p_i \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\rho_i)$;
- (ii) a operação de média produz uma mistura convexa: $\mathcal{G}(\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g \rho U_g^\dagger$;
- (iii) $\Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(U_g \rho U_g^\dagger) = \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\rho)$ devido a $\mathcal{E}$ ser G -invariante e U_g ser unitário.

Unindo esses três fatos,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\mathcal{G}(\rho)) &= \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g \rho U_g^\dagger\right) \\ &\geq \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(U_g \rho U_g^\dagger) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\rho) \\ &= \Delta\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\rho). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Com isso, completamos a demonstração da Eq. (3.48).

A esse ponto é fácil perceber que a assimetria de Holevo é uma medida equivalente a que chamamos de coerência externa para quando G corresponde ao grupo $U(1)$. Basta notar que a operação de média global $\mathcal{G}$, na Eq. (2.37), é igual a operação de defasagem global na Eq. (3.31) que definimos no contexto de uma teoria de recursos de coerência, conforme havíamos dito anteriormente. Assim, temos que,

$$A_G(\rho) = C_r^{ext}(\rho). \quad (3.50)$$

Além disso, as operações G -invariantes que aqui definimos correspondem às operações covariantes por translações globais. Consequentemente, a demonstração da monotonicidade de A_G com relação às operações G -invariantes, que fizemos acima, constitui numa demonstração, desta vez mais direta, da monotonicidade de C_r^{ext} com relação às operações covariantes por translações globais.

3.3.2 Assimetria local

Tendo em mente especificamente sistemas bipartidos é possível também definir uma medida de assimetria com relação a uma regra de superseleção local, de forma que todas as assimetrias do sistema com relação a um grupo G (não somente as globais como no caso anterior) sejam computadas. Essa assimetria foi definida, também na Ref. (9), como assimetria local e é dada por

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}(\rho_{SR}) = \mathcal{S}(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\rho_{SR}), \quad (3.51)$$

em que $\mathcal{G}_{G \otimes G}$ é uma média local que atua como,

$$\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR}) = \int_{g \in G} \int_{g' \in G} d\mu(g) d\mu(g') \mathcal{U}_{g,g'}^{SR}(\rho_{SR}), \forall g, g' \in G, \quad (3.52)$$

sendo $\mathcal{U}_{g,g'}^{SR}(\cdot) = U_g^S \otimes U_{g'}^R(\cdot) U_g^{S\dagger} \otimes U_{g'}^{R\dagger}$ representações unitárias de G . Também ela, assim como a medida anterior, satisfaz as condições da definição 5, entretanto, com algumas alterações devido a seu caráter local. As condições (i) e (ii) são, de novo, automaticamente satisfeitas devido a entropia de von Neumann, porém na (ii) temos que um estado considerado simétrico será agora aquele que for simétrico localmente, ou seja, $\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR}) = \rho_{SR}$. Já para a condição (iii), a monotonicidade deverá ser com relação às operações localmente G -invariantes em um contexto onde são permitidas apenas comunicação clássica e operações locais (LOCC). Como essas são um subconjunto das operações G -invariantes locais separáveis, (9) faremos a demonstração com base nelas. Isso significa que na Eq. (3.43) as operações serão do tipo

$$\{\mathcal{E}_{S,i} \otimes \mathcal{E}_{R,j} : i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, \}, \quad (3.53)$$

em que

$$U_g^S \otimes U_{g'}^R(\mathcal{E}_{S,i} \otimes \mathcal{E}_{R,j}) U_g^{S\dagger} \otimes U_{g'}^{R\dagger}. \quad (3.54)$$

Queremos então mostrar que

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}(\rho_{SR}) \geq \sum_{i,j} p_{i,j} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}(\rho_{SR_{i,j}}), \quad (3.55)$$

na qual

$$\rho_{SR_{i,j}} = \frac{1}{p_{i,j}} (\mathcal{E}_{S,i} \otimes \mathcal{E}_{R,j})(\rho_{SR}), \quad (3.56)$$

$$p_{i,j} = \text{tr}((\mathcal{E}_{S,i} \otimes \mathcal{E}_{R,j})\rho_{SR}), \quad (3.57)$$

ou de maneira equivalente, como na Eq. (3.45),

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\rho_{SR}) \geq \sum_{i,j} p_{i,j} (\mathcal{S}(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR_{i,j}})) - \mathcal{S}(\rho_{SR_{i,j}})). \quad (3.58)$$

Daqui em diante todos os argumentos usados para a Eq. (3.45) podem ser usados para a Eq. (3.58) e, portanto, tem-se que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}$ não aumenta sob a ação de operações G -invariantes separáveis.

Para o caso em que G é o grupo $U(1)$ podemos, utilizando a Eq. (2.10), escrever a atuação da operação de média local $\mathcal{G}_{G \otimes G}$ sobre $\rho_{SR} \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$, em que $\mathcal{H}_S = \oplus_n \mathcal{H}_n$ e $\mathcal{H}_R = \oplus_m \mathcal{H}_m$, da seguinte forma

$$\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} U^S(\phi) \otimes U^R(\phi') \rho_{SR} U^{S\dagger}(\phi) \otimes U^{R\dagger}(\phi') \quad (3.59)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \sum_{n,n'} \sum_{m,m'} e^{in\phi} e^{im\phi'} \Pi_n^S \otimes \Pi_m^R \rho_{SR} \Pi_{n'}^S \otimes \Pi_{m'}^R e^{-in'\phi} e^{-im'\phi'} \\ = \sum_{n,n'} \sum_{m,m'} \Pi_n^S \otimes \Pi_m^R \rho_{SR} \Pi_{n'}^S \otimes \Pi_{m'}^R \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(n-n')\phi} \right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{i(m-m')\phi'} \right) \quad (3.60)$$

$$= \sum_{n,m} \Pi_n^S \otimes \Pi_m^R \rho_{SR} \Pi_n^S \otimes \Pi_m^R \quad (3.61)$$

$$= \Delta(\rho_{SR}), \quad (3.61)$$

sendo Δ justamente o operador de defasagem completa enquanto que os operadores Π_n e Π_m são projetores nos setores de carga $\mathcal{H}_n$ e $\mathcal{H}_m$, respectivamente. Isso significa que para $G = U(1)$ e sistemas bipartidos temos que a assimetria local é igual a entropia relativa de coerência,

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}(\rho_{SR}) = C_r(\rho_{SR}), \quad (3.62)$$

o que faz com que a demonstração que acabamos de dar com relação a monotonicidade de $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}$ sob a ação de operações locais G -invariantes separáveis seja equivalente a demonstrar a monotonicidade de C_r com relação a operações covariantes por translação, conforme dissemos na sessão anterior que faríamos.

O interessante da medida de assimetria local é que ela evidencia a capacidade de entropia relativa de coerência, enquanto medida monotônica com relação às operações IP e, portanto, um subconjunto das medidas TC , de atuar como medida *unspeakable* no contexto de uma regra de superseleção local. Isso torna todas as assimetrias do sistema e, por consequência, todas as coerências do sistema na base dos autovetores dos Hamiltonianos locais, recursos que podem ser explorados para vencer as limitações físicas impostas pela regra de superseleção. Como exatamente tal recurso poderia ser explorado nesse contexto é algo deixado em aberto na Ref. (9) Esta, entretanto, é uma questão que está além daquela que fizemos na sessão anterior com relação ao caráter de teoria de recursos que uma medida de coerência *speakeable* teria. Como tudo depende das operações livres que emergem da situação física que estamos modelando, pode-se não se saber ainda em qual situação física operações IP seriam operações livres, contudo, sabe-se que operações TC , da maneira como as definimos enquanto covariantes por translações independentes, serão livres quando estivermos sob a ação de uma regra de superseleção local. Tal fato torna

mais simples explorar o potencial da assimetria local enquanto quantificadora de recursos, sem mencionar a sua aplicabilidade a casos mais amplos como para referenciais cartesianos em que considera-se $G = SU(2)$.

3.3.3 Assimetria Compartilhada

Chegamos na medida que será o foco de nosso trabalho nesta dissertação: assimetria compartilhada. Apresentada também por *Vaccaro et. all* na Ref. (9), essa medida consiste em um quantificador do quão assimétrico um subsistema é com relação ao outro dentro de um estado bipartido, o que de um ponto de vista mais físico permite que avaliemos o quão bem um subsistema serve como referencial para outro subsistema. Define-se essa medida por,

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \mathcal{S}(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_{SR})). \quad (3.63)$$

Podemos ver que os graus de liberdade quantificados pela assimetria de Holevo não tem papel aqui uma vez que $\mathcal{G}_{G \otimes G}(\mathcal{G}(\rho_{SR})) = \mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})$, ou seja todo estado simétrico localmente sempre será simétrico globalmente. O recurso quantificado por essa medida é conhecido na literatura como *referencial compartilhado*^{xvi} e é utilizado justamente quando duas partes em laboratórios diferentes não possuem um mesmo referencial e, portanto, estão sobre uma regra de superseleção global que, entretanto, também é local do ponto de vista que as partes estão limitadas a preparação de estados locais. Um exemplo interessante dessa restrição é um estado do tipo $|+\rangle_A |+\rangle_B$, conhecido como *refbit* no contexto de referenciais compartilhados, (41) que, mesmo sendo um estado produto, na ausência de um referencial em comum entre Alice e Bob não pode ser produzido. Sendo esse exatamente o mesmo caso que citamos como motivação para a definição de coerência interna como quantificadora de um recurso local, já é possível perceber que para o contexto de referenciais de fase, ou de tempo, em que $G = U(1)$, assimetria compartilhada e coerência interna são equivalentes. De fato, usando o resultado da Eq. (3.61), temos que

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = C_r(\mathcal{D}(\rho_{SR})). \quad (3.64)$$

Resta confirmar se $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}$ satisfaz as condições impostas pela definição 5. Novamente aqui as duas primeiras condições são automaticamente satisfeitas, sendo que para a segunda delas temos que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = 0$ se e somente se $\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR}) = \rho_{SR}$, ou seja, se o estado for localmente simétrico, o que do ponto de vista da teoria de coerência significa diagonal numa dada base com relação a qual se está analisando a simetria. A condição de monotonicidade, a exemplo do caso da assimetria local, também será com relação a operações G -invariantes locais. Portanto, vale aqui a mesma demonstração que demos lá. A única diferença é que neste caso consideramos $\rho_{SR} = \mathcal{G}(\rho_{SR})$ para chegarmos a Eq. (3.58), o que é uma condição em que não há perda de generalidade já que, como argumentamos, as assimetrias do estado

^{xvi}Do inglês *shared reference frame*.

quantificas pela assimetria de Holevo, que para $G = U(1)$ podemos considerar como as coerências externas, não tem papel no cálculo de $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}$. Dessa forma, considerando a Eq. (3.64), temos assim uma confirmação da monotonicidade de $C_r(\mathcal{D})$ com relação as operações TC e, consequentemente, de sua classificação como quantificador de coerência *unspeakable*.

Recentemente essa medida foi explorada na Ref. (10), ^{xvii} no caso de estados produto, para quantificar dentro do contexto do mecanismo de Page-Wootters o quão bem um subsistema R serve como sistema relógio para um subsistema S . Um resultado importante dessa aplicação foi a definição de limites superiores para a assimetria compartilhada. Dessa forma pode-se saber para qual valor teremos o melhor caso possível de referencial interno, o que significa dizer a maior assimetria possível entre os subsistemas S e R . Reproduziremos aqui esse resultado. Primeiramente, para $\rho_{SR} = \rho_S \otimes \rho_R$, podemos reescrever a equação da assimetria compartilhada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) &= \mathcal{S}(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) - \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_{SR})) \\ &= \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_S) \otimes \mathcal{G}(\rho_R)) - \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_{SR})) \\ &= [\mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_S)) + \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_R)) - \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_{SR}))] - [\mathcal{S}(\rho_S) + \mathcal{S}(\rho_R) - \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_{SR}))] \\ &= A_G(\rho_S) + A_G(\rho_R) - A_G(\rho_{SR}) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Esse resultado será importante para a demonstração do lema a seguir.

Lema 1. *A assimetria compartilhada satisfaz os seguintes limites:*

$$0 \leq \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \leq \min\{A_G(\rho_S), A_G(\rho_R)\}. \quad (3.66)$$

Demonstração: a primeira desigualdade é consequência direta da própria definição da medida, já para a segunda utilizaremos a propriedade de que monótonos de Holevo, como A_G (5) não aumentam sob a ação do traço parcial, (42) portanto

$$A_G(\rho_S \otimes \rho_R) \geq A_G(\rho_\alpha), \alpha = S, R. \quad (3.67)$$

Para mostrar a igualdade escolheremos um estado normalizado em R num autoespaço de dimensão suficientemente grande em comparação a S , ou seja, para $\rho_R \propto \Pi_n$, com $n \approx k$, sendo $\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R) = \sum_k \Pi_k(\rho_S \otimes \rho_R)\Pi_k$, $\Pi_k = \sum_{m+n=k} \Pi_m^S \otimes \Pi_n^R$, teremos

$$A_G(\rho_S \otimes \rho_R) \approx \mathcal{S}(\rho_S) + \mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_R)) - \mathcal{S}(\rho_S) - \mathcal{S}(\rho_R) = A_G(\rho_R), \quad (3.68)$$

em que, devido a condição estabelecida com relação à dimensão de R , usamos que $\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R) \propto \Pi_m \rho_S \Pi_m \otimes \sum_n \Pi_n \rho_R \Pi_n$ e o fato da entropia ser aditiva. Unindo todas essas considerações e usando a Eq. (3.65)

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = A_G(\rho_S) + A_G(\rho_R) - A_G(\rho_{SR}) = A_G(\rho_S). \quad (3.69)$$

^{xvii}Na verdade, a medida definida nesse trabalho foi chamada de assimetria mútua, porém demonstrou-se que ela é equivalente a assimetria compartilhada para o caso de estados produto.

Com base na definição desse limite superior, a Ref. (10) apresenta três exemplos de sistemas $S + R$ e calcula as assimetria compartilhadas desses sistemas pra comparar com o que seria o limite superior esperado pelo lema 1. Apresentaremos esses exemplos a seguir pois, no que se segue, trabalharemos na extensão deles para casos mais gerais, o que nos levará à uma análise mais profunda da assimetria compartilhada para o grupo $U(1)$.

- (i) Modelo de q-bits: Sejam ambos, sistema S e sistema relógio R , dados por um q-bit $\rho_\alpha = |+\rangle\langle+|$, em que $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, sendo assimétricos em relação a representação unitária $U_\theta^\alpha = \{e^{i\theta\sigma_z^\alpha}; \theta \in [0, 2\pi]\}$, $\alpha = S, R$. Um observador externo sob a ação de uma regra de superseleção global cuja simetria é representada por $U_\theta = \{e^{i\theta\sigma_z}; \theta \in [0, 2\pi]\}$, com $\sigma_z = \sigma_z^S \otimes \mathbf{1}_R + \mathbf{1}_S \otimes \sigma_z^R$, terá acesso apenas aos graus de liberdade do sistema total $\rho_S \otimes \rho_R$ independentes de referenciais, ou seja, para ele

$$\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta U_\theta(\rho_S \otimes \rho_R)U_\theta^\dagger. \quad (3.70)$$

O resultado, escrito na forma matricial na base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, terá o formato bloco-diagonal

$$\mathcal{G}[\rho_S \otimes \rho_R] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Calculando a assimetria compartilhada desse estado, usando que a entropia de von Neumann é dada por $\mathcal{S}(\rho) = -\sum_x \lambda_x \log \lambda_x$, sendo λ_x os autovalores de ρ , teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_S \otimes \rho_R) &= \log 4 + \frac{2}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \log \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

Comparando com o valor máximo para esse sistema com base no lema 1, $A_G(\rho_S) = A_G(\rho_R) = 1$, vemos que $\rho_S \otimes \rho_R$ não satura esse limite, porém evidencia o funcionamento do mecanismo de Page-Wootters para descrição do tempo em um universo de dois q-bits, conforme proposto na Ref. (12)

- (ii) Localização de alta referência: fisicamente espera-se que quanto maior a dimensão do sistema referencial R melhor ele orientará o sistema de interesse S . (1) Podemos ver isso considerando que o sistema S seja dado pelo q-bit $|\psi_S\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ enquanto que o sistema relógio R seja dado por um q-dit em superposição uniforme, também conhecido como estado de máxima verossimilhança,

$$|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{d-1} |m\rangle, \quad (3.73)$$

com Hamiltoniano $H_R = \sum_{m=0}^{d-1} m |m\rangle\langle m|$ no qual $J_z |m\rangle = m |m\rangle$. Escrevendo o resultado de $\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R)$ na forma matricial usando a base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle, |02\rangle, \dots\}$,

$|20\rangle, \dots, |d-1, d-1\rangle\}$,^{xviii} de forma que tenhamos sempre juntos os rótulos que somados dão um mesmo total (por exemplo, $|01\rangle$ e $|10\rangle$ ficam em sequência por ambos somarem 1), teremos

$$\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R) = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Calculando a assimetria compartilhada nesse caso, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_S \otimes \rho_R) &= \log 2d + \frac{2}{2d} \log \frac{1}{2d} + \frac{2(d-1)}{2d} \log \frac{2}{2d} \\ &= 1 - \frac{1}{d}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

ou seja, para $d \rightarrow \infty$ temos que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_S \otimes \rho_R) \rightarrow 1 = A_G(\rho_S)$. Portanto, para esse caso, considerando a dimensão de R grande, temos um sistema que tende a saturar o limite superior sendo, consequentemente, o melhor possível.

- (iii) Alta ordem de coerência: desta vez, mantendo o estado do relógio como o q-dit de superposição uniforme da Eq. (3.73), utilizaremos como sistema um estado assimétrico do tipo

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |d-1\rangle), \quad (3.76)$$

ou seja, com ordem de coerência $d-1$, sendo que por ordem de coerência k de um estado $\rho = \sum_{m,n} \rho_{m,n} |m\rangle \langle n|$ entendemos a norma-1 da soma dos elementos fora da diagonal com $k = m - n$. Estados como o da Eq. (3.76) também são conhecidos como estados com um hiato em seu espectro.^{xix} Simetrizando globalmente o sistema composto $\rho_S \otimes \rho_R$ de acordo com o ponto de vista de um observador externo, teremos

$$\mathcal{G}(\rho_S \otimes \rho_R) = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

^{xviii}Essa base será utilizada em todas as matrizes densidade que aparecerem daqui em diante na dissertação.

^{xix}Em inglês o termo utilizado é *gap*. (43)

Calculando a assimetria compartilhada desse estado,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_S \otimes \rho_R) &= \log 2d + \frac{2(d-1)}{2d} \log \frac{1}{2d} + \frac{2}{2d} \log \frac{2}{2d} \\ &= \frac{1}{d},\end{aligned}\tag{3.78}$$

vemos que a situação aqui é oposta a anterior: se fizermos $d \rightarrow \infty$ teremos que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_S \otimes \rho_R) \rightarrow 0$, que é o limite inferior. Esse portanto, considerando a dimensão de R grande, tenderá a ser o pior caso possível, o que é curioso uma vez que mesmo utilizando o que seria o sistema relógio ideal, temos que o mecanismo de Page-Wootters não funcionará.

3.4 Assimetria vs coerência *unspeakable*

As medidas apresentadas neste capítulo ilustram bem a relação de equivalência existente entre coerência *unspeakable* e assimetria para o grupo $U(1)$. Focamos no caso da coerência relativa a base formada pelo produto tensorial dos autoespaços dos operadores Hamiltonianos H_S e H_R ^{xx} o que consiste simplesmente na assimetria relativa ao grupo das translações independentes geradas em conjunto por esses Hamiltonianos, portanto, $U_{SR} = e^{-it_S H_S \otimes \mathbf{1}_R} e^{-it_R \mathbf{1}_S \otimes H_R}$, $\forall (t_S, t_R) \in \mathbb{R}^2$. Entretanto, o mesmo pode ser feito com relação à qualquer outra base referente ao autoespaço de um operador L qualquer (para o caso bipartido aqui utilizado consideraríamos L_S e L_R), como descrevemos na seção 3.2.2. Isso foi bastante explorado na Ref. (5), porém sem a consideração que aqui fizemos de distinguir regras de superseleção globais de locais para assim permitir a definição de coerência interna e externa.

Da mesma forma que na Eq. (3.40) mostramos que a entropia relativa de coerência pode ser escrita em termos das coerências internas e externas do sistema, para sistemas bipartidos e grupo $U(1)$, usando as Eqs. (3.50), (3.62) e (3.64), temos o mesmo resultado para teoria de assimetria,

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}(\rho_{SR}) = \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) + A_G(\rho_{SR}).\tag{3.79}$$

Cada uma dessas quantidades pode ser vista como recurso a depender da restrição física a qual o sistema está sujeito. Na tabela abaixo é possível ver um resumo desses recursos separados pelas restrições na forma de regras de superseleção global e local, para as quais as operações livres são aquelas TC , covariantes por translações globais e covariantes por translações locais, respectivamente.

^{xx}Ou seja, sendo $\mathcal{H}_S = \oplus_{E_S} \mathcal{H}_{E_S}$ e $\mathcal{H}_R = \oplus_{E_R} \mathcal{H}_{E_R}$, teremos os autoespaços $\{\mathcal{H}_{E_S} \otimes \mathcal{H}_{E_R}\}_{E_S, E_R} = \oplus_{E_S, E_R} \mathcal{H}_{E_S} \otimes \mathcal{H}_{E_R}$ como subespaços preferidos.

Tabela 1 – Recursos em teoria de medidas de coerência e de assimetria separados de acordo com as regras de superseleção.

Regra de superseleção	Recursos	
	Teoria de Coerência	Teoria de Assimetria
Global	C_r^{ext}	A_G
Local	$C_r, C_r(\mathcal{D})$	$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(lo)}, \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Essas considerações permitem caracterizar quantificadores de coerência *unspeakable* como um caso especial dos quantificadores de assimetria. Note, porém, que a teoria de recursos de assimetria é mais geral que a de coerência. Um exemplo disso pode ser visto no caso de grupos não-abelianos ^{xxi} para os quais a operação de média local é dada pela Eq. (2.25) e não mais pela Eq. (2.14). Esse fato em si já nos mostra que não será possível relacionar as medidas de coerência com as de assimetria como fizemos anteriormente. Para ilustrar a diferença, consideremos o grupo $SU(2)$ e o estado $\rho_{SR} = |++\rangle \langle ++|$. Calculando a média global a partir da Eq. (2.26), teremos

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = p_{j=1} \left(\frac{1}{3} \Pi_{j=1} \right) + p_{j=0} |\psi^-\rangle \langle \psi^-|, \quad (3.80)$$

em que $p_j = \text{Tr}(\rho_{SR} \Pi_j)$, $|\psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ é o estado singleto e $\Pi_{j=1} = |1, 1\rangle \langle 1, 1| + |1, 0\rangle \langle 1, 0| + |1, -1\rangle \langle 1, -1|$ é uma projeção nos estados que constituem o tripleto

$$|1, 1\rangle = |00\rangle, \quad (3.81)$$

$$|1, 0\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}, \quad (3.82)$$

$$|1, -1\rangle = |11\rangle. \quad (3.83)$$

Ambos, singleto e tripleto, são irreps do $SU(2)$ que aparece quando decompomos o produto tensorial de duas representações spin- $\frac{1}{2}$ (também conhecida como dubleto) em uma soma direta de representações irredutíveis, ou seja, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\otimes 2} = 0 \oplus 1$. ^{xxii} Como partimos de um estado que, neste caso, nos dá $p_{j=1} = 1$ e $p_{j=0} = 0$, computando esses valores na Eq. (3.80) chegaremos ao seguinte resultado

$$\mathcal{G}[\rho_S \otimes \rho_R] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

^{xxi} Grupos para os quais existe ao menos um par de elementos pertencentes ao grupo que não comutam entre si.

^{xxii} Para uma revisão da teoria de representação do $SU(2)$ aplicada a mecânica quântica ver a Ref. (44) ou mesmo a Ref. (1) para algo mais sucinto e sob uma visão de teoria de representações mais explícita.

Podemos observar que, em comparação a Eq. (3.71), os termos bloco-diagonais agora foram afetados pela média global em relação ao $SU(2)$ o que nos mostra que o recurso por trás da assimetria de estados para grupos diferentes do $U(1)$ não possui uma correspondência direta com a existência de coerência entre subespaços preferidos.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, começaremos por fazer uma generalização dos três exemplos considerados na Ref. (13) para a análise da assimetria compartilhada.ⁱ Essa generalização constituirá no cálculo dos casos: (i) estados de máxima verossimilhança de mesma dimensão, (ii) estados de máxima verossimilhança de dimensões diferentes e (iii) estado de máxima verossimilhança *versus* q-bit de superposição uniforme e com hiato variável, ou seja, em que os intervalos entre os autoestados do sistema superposto (como, por exemplo, $|\psi_S\rangle = \frac{|0\rangle + |d-1\rangle}{\sqrt{2}}$ em que o hiato é de $d - 2$ autoestados) varia. Em seguida, apresentaremos o principal resultado desta dissertação que consiste num teorema que relaciona a assimetria compartilhada de um dado estado ρ_{SR} com a entropia relativa de emaranhamento dos setores de carga normalizados desse mesmo estado, o que chamaremos de “emaranhamento interno” ou “estados internos” emaranhados do sistema ρ_{SR} . Esse resultado nos permitirá propor uma interpretação da variação no valor da assimetria compartilhada dos resultados anteriores. Seguindo a mesma linha de raciocínio proporemos também uma possível reinterpretação da coerência interna enquanto recurso para o mecanismo de Page-Wootters e para a extração de trabalho em termodinâmica quântica.

4.1 Assimetria compartilhada para exemplos mais gerais

Nos três casos que apresentaremos aqui faremos uso das simetrias que surgem na estrutura bloco-diagonal das matrizes densidade dos estados ρ_{SR} após a aplicação da operação *G-twirling* $\mathcal{G}$ para $G = U(1)$. Como veremos, essas simetrias tornam o cálculo da assimetria compartilhada muito mais fácil e nos ajudam a visualizar melhor as implicações da variação da dimensão dos sistemas ou do intervalo entre seus autoestados. Vale ressaltar que apesar de trabalharmos com exemplos com superposição uniforme, as estruturas bloco-diagonais das matrizes densidade que exibiremos se mantêm as mesmas para casos não uniformes, variando apenas os coeficientes que constituem os blocos.

4.1.1 Estados de máxima verossimilhança de mesma dimensão

Consideraremos aqui sistema e referencial num mesmo estado de máxima verossimilhança, ou seja, teremos um sistema de d níveis de energia correlacionado a um relógio com d possíveis marcações de tempo. Seja então o sistema S dado por $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_S=0}^{d-1} |m_S\rangle$ e o referencial R por $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$ cujos Hamiltonianos são dados respectivamente por $H_S = \sum_{m_S=0}^{d-1} m_S |m_S\rangle \langle m_S|$ e $H_R = \sum_{m_R=0}^{d-1} m_R |m_R\rangle \langle m_R|$, no qual $J_z |m\rangle = m |m\rangle$.

ⁱComo para estados produto (que será o caso tratado na primeira seção) ela é equivalente a assimetria mútua, optaremos por manter o nome assimetria compartilhada pois essa medida em especial será a que exploraremos na segunda seção.

Aplicando a operação $\mathcal{G}$ nesse estado e escrevendo o resultado como matriz densidade, teremos

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{d^2} \begin{bmatrix} A_1 & & & & & \\ & A_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_d & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_2 \\ & & & & & & A_1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

em que $\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta U_\theta(\rho_{SR})U_\theta^\dagger$ com $U_\theta = \{e^{i\theta H_{SR}}; \theta \in [0, 2\pi]\}$, sendo $H_{SR} = H_S \otimes \mathbb{1}_R + \mathbb{1}_S \otimes H_R$, e A_n é uma matriz quadrada de dimensão n que possui todas as entradas iguais a um.ⁱⁱ Todas as entradas que não aparecem são consideradas como nulas.ⁱⁱⁱ Como podemos ver, $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ possui uma única matriz A_n de dimensão $n = d$ enquanto todas as demais, de dimensão 1 a $d - 1$, aparecem com multiplicidade 2. Levando isso em consideração e fazendo uso da propriedade que matrizes desse tipo tem de que seus autovalores serão sempre n com multiplicidade 1 e 0 com multiplicidade $n - 1$, podemos facilmente escrever a entropia de von Neumann do estado $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ como

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}(\rho_{SR})) = - \sum_{x=1}^d \lambda_x \log \lambda_x = -2 \sum_{x=1}^{d-1} \frac{x}{d^2} \log \frac{x}{d^2} - \frac{1}{d} \log \frac{1}{d} \quad (4.2)$$

Lembrando que assimetria compartilhada é dada em sua forma mais geral por:

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = S(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) - S(\mathcal{G}(\rho_{SR})) \quad (4.3)$$

resta-nos calcular o primeiro termo do lado direito. Uma vez que já foi mostrado que $\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR}) = \Delta(\rho_{SR})$, Eq. (3.61), o resultado torna-se, trivialmente, o estado maximamente misto $\mathbb{1}_{d^2}/d^2$ (sendo $\mathbb{1}_{d^2}$ a matriz densidade de dimensão d^2) e, portanto, sua entropia da von Neumann é $\log d^2$. Substituindo então esses resultados na 4.3 teremos

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \log d^2 + 2 \sum_{x=1}^{d-1} \frac{x}{d^2} \log \frac{x}{d^2} - \frac{1}{d} \log \frac{1}{d} \quad (4.4)$$

que pode ser reescrita de forma mais conveniente como

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \frac{2}{d^2} \sum_{x=1}^{d-1} x \log x + \frac{1}{d} \log d. \quad (4.5)$$

Se considerarmos $d \rightarrow \infty$, o somatório pode ser aproximado por uma integral e o último termo vai a zero, assim

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \approx \frac{2}{d^2} \int_1^{d-1} x \log x \, dx. \quad (4.6)$$

ⁱⁱA título de comparação, a 3.74 só possui duas matrizes A_1 e todas as outras são A_2 . Daqui em diante utilizaremos essa notação em termos dos A_n por simplicidade uma vez que estaremos trabalhando com matrizes de dimensões muito grandes.

ⁱⁱⁱEssa mesma consideração será usada daqui em diante em toda a dissertação.

Resolvendo essa integral ficamos com

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \approx \log d. \quad (4.7)$$

Esse é precisamente o limite superior da assimetria compartilhada para esse sistema, já que $0 \leq \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \leq \min\{\mathcal{A}_G(\rho_S), \mathcal{A}_G(\rho_R)\}$ e, neste caso, $\mathcal{A}_G(\rho_R) = \mathcal{A}_G(\rho_S) = \log d$. Portanto, para um estado produto formado por sistema S e referencial R ambos sendo estados de máxima verossimilhança de mesma dimensão e considerando que essa dimensão tenda ao infinito saturaremos o limite superior. Tal resultado, como dito anteriormente, já era esperado uma vez que resultados anteriores na literatura já apontavam que quanto maior a dimensão do sistema referencial R mais a orientação do sistema S com relação a ele é otimizada. (1)

4.1.2 Estados de máxima verossimilhança de dimensões diferentes

Para analisar o caso onde sistema S e referencial R são ambos descritos por estados de máxima verossimilhança, mas com dimensões diferentes, vamos construir os padrões de $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ em ordem decrescente de dimensão total, mantendo a dimensão de R . Começaremos pelo caso onde a dimensão de S é $d - 2$ e a de R é $d - 1$, depois diminuiremos a dimensão de S para observar as mudanças na matriz densidade e dessa forma identificar o padrão geral que nos possibilitará calcular a assimetria compartilhada.

Seja $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{m_S=0}^{d-2} |m_S\rangle$ e $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$, mantendo a mesma notação da seção anterior, o cálculo de $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ nos dará

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{d(d-1)} \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & \\ & A_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A_{d-1} & & & \\ & & & & A_{d-1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_1 \\ & & & & & & & A_2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Já para $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{d-2}} \sum_{m_S=0}^{d-3} |m_S\rangle$ e $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$, teremos

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{d(d-2)} \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & & \\ & A_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & A_{d-2} & & & & \\ & & & & A_{d-2} & & & \\ & & & & & A_{d-2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & A_2 \\ & & & & & & & & A_1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Podemos observar que aqui já parece surgir um padrão. Vamos também analisar pelo outro lado do espectro, ou seja, das dimensões menores para as maiores do sistema S . Seja $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$, temos

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_2 & \\ & & & & A_1 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

sendo $d-1$ matrizes A_2 . Para $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$ e $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{3d} \begin{bmatrix} A_1 & & & & & \\ & A_2 & & & & \\ & & A_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & A_3 & \\ & & & & & A_2 \\ & & & & & & A_1 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

sendo $d-2$ matrizes A_3 . Com base em todos os exemplos mostrados até aqui, pode-se observar o seguinte padrão geral nas matrizes A_n que formam os blocos da matriz densidade do sistema $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ e as dimensões do mesmo:

- Se $\dim(\rho_{SR}) = d \times 2$, então teremos $d-1$ matrizes A_2 .
- Se $\dim(\rho_{SR}) = d \times 3$, então teremos $d-2$ matrizes A_3 .
- $\vdots$

- Se $\dim(\rho_{SR}) = d \times (d - 2)$, então teremos 3 matrizes A_{d-2} .
- Se $\dim(\rho_{SR}) = d \times (d - 1)$, então teremos 2 matrizes A_{d-1} .
- Se $\dim(\rho_{SR}) = d \times d$, então teremos uma matriz A_d .

Todas as outras matrizes em cada caso aparecerão em pares.

Usando essas informações juntamente com as da seção anterior podemos escrever a entropia de von Neumann de $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ de uma forma geral como

$$S(\mathcal{G}(\rho_{SR})) = -\frac{1}{d_S d_R} \left[2 \sum_{x_S=1}^{d_S-1} x_S \log \left(\frac{x_S}{d_R d_S} \right) + (d_R - d_S + 1) d_S \log \left(\frac{1}{d_R} \right) \right], \quad (4.12)$$

onde d_S é a dimensão de ρ_S e d_R a dimensão de ρ_R .

Substituindo na Eq. (4.12) na equação da assimetria compartilhada, Eq. (4.3), e sabendo que $S(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) = \Delta(\rho_{SR}) = \log d_S d_R$, com algumas simplificações, chegaremos a seguinte equação geral para assimetria compartilhada de sistemas de máxima verossimilhança de diferentes dimensões

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \frac{2}{d_S d_R} \sum_{x_S=1}^{d_S-1} x_S \log x_S - \frac{d_S - 1}{d_R} \log d_S + \log d_S. \quad (4.13)$$

Cabe destacar que esse resultado é válido para sistemas sem hiato. O limite superior neste caso será $\log d_S$ sendo $d_S \leq d_R$, uma vez que $\mathcal{A}_G(\rho_S) = \log d_S$ e $\mathcal{A}_G(\rho_R) = \log d_R$. Para $d_R \rightarrow \infty$, é fácil ver que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)} = \log d_S$. Portanto, também para dimensões diferentes, se o estado de verossimilhança do referencial R tender a infinito o limite superior da assimetria compartilhada será atingido, o que, novamente, já era esperado segundo os resultados prévios da literatura.

4.1.3 Estado de máxima verossimilhança *versus* q-bits com hiato

Chegamos ao caso mais interessante. Conforme descrevemos no capítulo anterior, foi mostrado na Ref. (10) que para um sistema ρ_{SR} onde referencial R é um estado de máxima verossimilhança, $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$, e o sistema S é um estado de alta ordem de coerência do tipo $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |d-1\rangle)$, temos que se a dimensão R tender a infinito a assimetria compartilhada de ρ_{SR} tenderá a zero, constituindo no pior caso possível. Por outro lado se S for um q-bit do tipo $|\psi_S\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ e R for mantido o mesmo, como vimos, temos que tender a dimensão de R ao infinito levará ao valor máximo para a medida, sendo o melhor caso possível. Nosso intuito aqui é conectar as assimetrias compartilhadas do pior e do melhor caso variando a dimensão do hiato no sistema S para então escrevê-la de uma maneira geral considerando um S com hiato de dimensão d_h qualquer. Para

isso, começaremos construindo a matriz densidade de $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ para o pior caso e então diminuiremos a dimensão do hiato até chegarmos ao q-bit sem hiato, sempre mantendo o mesmo R .

Seja então $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$ o referencial R e $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |d-1\rangle)$ o sistema S , mantendo a mesma notação, teremos que a matriz densidade do estado $\mathcal{G}(\rho_{SR})$ será

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_1 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Já para um sistema S com hiato de dimensão uma unidade menor, $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |d-2\rangle)$, teremos

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_2 & & \\ & & & A_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_1 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Novamente, aqui já podemos começar a ver um padrão. Vamos então analisar o extremo oposto, seja $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, teremos (como já visto)

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_2 & \\ & & & & A_1 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

sendo $d-1$ matrizes A_2 . Por fim para $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |2\rangle)$

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} A_1 & & & & & \\ & A_1 & & & & \\ & & A_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & A_2 & \\ & & & & & A_1 \\ & & & & & & A_1 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

sendo $d-2$ matrizes A_2 . Podemos observar que o número de matrizes A_2 depende claramente da dimensão do hiato no q-bit, variando de 1 a $d-1$ matrizes para, respectivamente,

dimensão de $d - 2$ a zero do hiato. Com isso é possível calcular $S(\mathcal{G}(\rho_{RS}))$ para o caso mais geral de hiato de dimensão d_h relacionando-o com um número n_m de matrizes A_2 . Seja $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_R=0}^{d-1} |m_R\rangle$ e $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |d - n_m\rangle)$, teremos que

$$S(\mathcal{G}(\rho_{RS})) = \log 2d - \frac{n_m}{d} \quad (4.18)$$

Por consequência, sabendo que $S(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) = \log 2d$, a assimetria compartilhada, Eq. (4.3), será

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \frac{n_m}{d}, \quad (4.19)$$

Aplicando essa equação aos casos extremos ficamos com

- Para $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |d - 1\rangle)$, teremos que $n_m = 1$ e $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \frac{1}{d}$. Portanto, se $d \rightarrow \infty$, $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \rightarrow 0$.
- Para $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, teremos que $n_m = d - 1$ e $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = 1 - \frac{1}{d}$. Portanto, se $d \rightarrow \infty$, $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \rightarrow 1$ (que é o limite superior desse sistema).

Isso conecta então os dois exemplos extremos apresentados na Ref. (10) e nos permite visualizar a clara dependência da assimetria compartilhada com relação aos blocos da estrutura bloco-diagonal da matriz densidade do estado ρ_{SR} . Tendo isso em mente, na próxima seção vamos nos ater a investigar mais profundamente a estrutura de cada um desses blocos, procurando compreender o que há neles que, por fim, constitui no recurso quantificado pela assimetria compartilhada que faz com que um sistema possa atuar como referencial para outro. Tais blocos serão associados com estados que chamaremos de “estados internos” do sistema ρ_{SR} .

4.2 Assimetria compartilhada: uma análise por setor de carga do espaço de Hilbert

Como vimos no capítulo 2, a ação unitária de qualquer grupo de Lie compacto no espaço de Hilbert nos permite decompô-lo numa soma direta dos chamados setores de carga, que carregam representações inequivalentes do grupo. No caso do grupo $U(1)$ esses setores não precisam ser novamente decompostos nos chamados subespaços virtuais de *gauge* e de multiplicidade, pois uma vez que as representações irredutíveis desse grupo são unidimensionais o subespaço de *gauge* será trivial e pode ser desconsiderado. Dessa forma, na nossa análise por setor de carga $\mathcal{H}_M^{\text{iv}}$ do espaço de Hilbert total $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R = \bigoplus_{M=m_S+m_R} \mathcal{H}_M$ podemos nos ater a formulação mais simples das médias global (Eq. (2.14)), sendo que aqui como estamos interessados em um sistema bipartido, temos

^{iv}Trocamos a notação de n (vide capítulo 2) para M porque, enquanto antes queríamos descrever um referencial de fase em termos do número de fótons, agora estamos interessados em um sistema relógio que será descrito fisicamente pelos autoestados do momento angular total J_z , conforme fizemos no capítulo anterior. Vale reforçar que ambos os casos são semelhantes e descritos pelo grupo $U(1)$.

$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \sum_M \Pi_M \rho_{SR} \Pi_M$, em que $\Pi_M = \sum_{M=m_S+m_R} \Pi_{m_S} \otimes \Pi_{m_R}$ e local (Eq. (3.60)) que utilizamos nos capítulos 2 e 3, respectivamente, para mostrar a equivalência entre as medidas assimetria compartilhada e coerência interna. Substituindo-as na equação da assimetria compartilhada, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) &= \mathcal{S} \left(\sum_{m_S, m_R} (\Pi_{m_S} \otimes \Pi_{m_R}) \rho_{SR} (\Pi_{m_S} \otimes \Pi_{m_R}) \right) \\ &- \mathcal{S} \left(\sum_M \sum_{\substack{(m_{S_1}+m_{R_1}), \\ (m_{S_2}+m_{R_2})=M}} (\Pi_{m_{S_1}} \otimes \Pi_{m_{R_1}}) \rho_{SR} (\Pi_{m_{S_2}} \otimes \Pi_{m_{R_2}}) \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como queremos estudar o caso mais geral possível, consideraremos tanto o estado do sistema S quanto o do referencial R dados por um Hamiltoniano do tipo $H = \sum_{m=0}^{d-1} m |m\rangle \langle m|$, de forma que, expandindo o estado global ρ_{SR} na mesma base do Hamiltoniano obteremos

$$\rho_{SR} = \sum_{m_{S_1}, m_{R_1}, m_{S_2}, m_{R_2}=0}^{d-1} c_{m_{S_1}, m_{R_1}, m_{S_2}, m_{R_2}} |m_{S_1}, m_{R_1}\rangle \langle m_{S_2}, m_{R_2}|. \quad (4.21)$$

Substituindo essa forma do estado na equação anterior e aplicando as projeções, ficaremos com

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) &= \mathcal{S} \left(\sum_{m_{S_1}, m_{R_1}} c_{m_{S_1}, m_{R_1}} |m_{S_1}, m_{R_1}\rangle \langle m_{S_1}, m_{R_1}| \right) \\ &- \mathcal{S} \left(\sum_M \sum_{\substack{(m_{S_1}+m_{R_1}), \\ (m_{S_2}+m_{R_2})=M}} c_{m_{S_1}, m_{R_1}, m_{S_2}, m_{R_2}} |m_{S_1}, m_{R_1}\rangle \langle m_{S_2}, m_{R_2}| \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Podemos ver que enquanto o argumento da segunda entropia de von Neumann está escrito em termos do setor de carga $\mathcal{H}_M$, como desejamos, o da primeira está escrito em termos dos setores de carga locais $\mathcal{H}_{m_S}$ e $\mathcal{H}_{m_R}$, dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_R$, respectivamente. Como todo estado simétrico localmente é também simétrico globalmente, ao menos quando $G = U(1)$, ou seja $\mathcal{G}_G(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) = \mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR}) \rightarrow \mathcal{D}(\Delta(\rho_{SR})) = \Delta(\rho_{SR})$ (pois a operação de defasagem completa, Δ , torna o sistema um estado diagonal enquanto que a operação de defasagem global $\mathcal{D}$, torna o sistema um estado bloco diagonal, ambos numa mesma base), podemos projetar o argumento da primeira entropia em termos dos setores de carga $\mathcal{H}_M$. Isso nos levará a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) &= \mathcal{S} \left(\sum_M \sum_{m_{S_1}+m_{R_1}=M} c_{m_{S_1}, m_{R_1}} |m_{S_1}, m_{R_1}\rangle \langle m_{S_1}, m_{R_1}| \right) \\ &- \mathcal{S} \left(\sum_M \sum_{\substack{(m_{S_1}+m_{R_1}), \\ (m_{S_2}+m_{R_2})=M}} c_{m_{S_1}, m_{R_1}, m_{S_2}, m_{R_2}} |m_{S_1}, m_{R_1}\rangle \langle m_{S_2}, m_{R_2}| \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Usando que a soma de m_S e m_R sempre deve ser igual a M , faremos a seguinte mudança de rótulo nos estados acima: $|m_S, m_R\rangle \rightarrow |m_S, M - m_S\rangle$, o que consequentemente nos levará a alterar também o somatório que acopla os índices m . Com essas alterações, denotemos

$$\rho_M^{un^v} \equiv \sum_{m_{S_1}, m_{S_2}=0}^M c_{m_{S_1}, m_{S_2}} |m_{S_1}, M - m_{S_1}\rangle \langle m_{S_2}, M - m_{S_2}| \quad (4.24)$$

e

$$\rho_M^{un'} \equiv \sum_{m_{S_1}=0}^M c_{m_{S_1}} |m_{S_1}, M - m_{S_1}\rangle \langle m_{S_1}, M - m_{S_1}| \quad (4.25)$$

É fácil ver que esses são estados não normalizados, uma vez que só o sistema ρ_{SR} é normalizado, mas não seus setores de carga. Entretanto, podemos normalizar esses estados multiplicando ambos por $\frac{\text{Tr}(\rho_M^{un})}{\text{Tr}(\rho_M^{un'})}$, uma vez que $\text{Tr}(\rho_M^{un}) = \text{Tr}(\rho_M^{un'})$. Fazendo isso e substituindo na Eq. (4.23), teremos

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \mathcal{S} \left(\sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un}) \rho'_M \right) - \mathcal{S} \left(\sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un}) \rho_M \right) \quad (4.26)$$

em que $\rho'_M \equiv \frac{\rho_M^{un'}}{\text{Tr}(\rho_M^{un})}$ e $\rho_M \equiv \frac{\rho_M^{un}}{\text{Tr}(\rho_M^{un})}$. Usando agora a propriedade da entropia de von Neumann de que $\mathcal{S}(\sum_i p_i \rho_i) = H(p_i) + \sum_i p_i \mathcal{S}(\rho_i)$, (36) podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un}) (\mathcal{S}(\rho'_M) - \mathcal{S}(\rho_M)) \quad (4.27)$$

$$= \sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un}) \left(\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)M}(\rho_M) \right) \quad (4.28)$$

sendo que da primeira para a segunda equação usamos que $\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho'_M) = \rho'_M$ e $\mathcal{G}_G(\rho_M) = \rho_M$.

Chegamos aqui ao ponto em que queríamos. Escrevendo a assimetria compartilhada do sistema ρ_{SR} como um somatório das assimetrias compartilhadas de seus estados internos ρ_M pertencentes aos setores de carga $\mathcal{H}_M$, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema. *Seja a assimetria compartilhada para $G = U(1)$ dada por (4.28), teremos que:*

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)M}(\rho_M) = E_R(\rho_M) \quad (4.29)$$

em que $E_R(\rho) = \min_{\sigma \in SEP} \mathcal{S}(\rho \parallel \sigma)$, sendo SEP o conjunto de todos os estados separáveis, é a Entropia Relativa de Emaranhamento. Portanto,

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un}) (E_R(\rho_M)) \quad (4.30)$$

^vO índice superior un é do termo em inglês *unnormalized* que significa não normalizado.

Demonstração: Um conhecido resultado na área da informação quântica, em especial nos estudos de quantificadores de emaranhamento, é o chamado Teorema de Vedral-Plenio. (45) Tal teorema demonstra que, a entropia relativa de emaranhamento de qualquer estado bipartido puro $\rho = \sum_{n_1, n_2} \sqrt{c_{n_1} c_{n_2}} |\phi_{n_1}, \psi_{n_1}\rangle \langle \phi_{n_2}, \psi_{n_2}|$ é igual a entropia de reduzida de von Neumann do mesmo estado, dada por $E(\rho) = -\sum_n p_n \ln p_n$. Para fazer essa demonstração, Vedral e Plenio provam que o estado separável mais próximo de ρ que minimiza a entropia relativa é justamente a sua versão diagonal, ou seja, $\rho' = \sum_n c_n |\phi_n, \psi_n\rangle \langle \phi_n, \psi_n|$. Utilizando algumas versões estendidas desse teorema, duas delas demonstradas no Apêndice B, é possível mostrar que para algumas classes de estados mistos, incluindo o tipo $\rho = \sum_{n_1, n_2=0}^N c_{n_1, n_2} |n_1; N - n_1\rangle \langle n_2; N - n_2|$, o estado separável mais próximo é o estado diagonal $\rho' = \sum_{n_1=0}^N c_{n_1} |n_1; N - n_1\rangle \langle n_1; N - n_1|$. Como esse é o caso de ρ_M e ρ'_M isso comprova assim a Eq. (4.29) e por consequência a Eq. (4.30).

A esse emaranhamento daremos o nome de emaranhamento interno, uma vez que consiste em um emaranhamento dos estados $\rho_M \in \mathcal{H}_M$ que chamamos de estados internos do sistema ρ_{SR} . O curioso desse resultado é que esse tipo de emaranhamento pode aparecer mesmo que o estado ρ_{SR} em si seja separável. Para exemplificar, vejamos o estado Bell-Diagonal de dois q-bits da Eq. (3.29), para $c_3 = 0$ e após a aplicação da média global (ou *G-twirling* global)

$$\mathcal{G}(\rho_{SR}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Como a Ref. (14) demonstra, esse é um estado separável. Entretanto, ao calcularmos a assimetria compartilhada (ou coerência interna) dele a partir da Eq. (4.30), teremos

$$\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = \frac{1 + c_1 + c_2}{4} \log(1 - c_1 - c_2) + \frac{1 - c_1 - c_2}{4} \log(1 - c_1 - c_2), \quad (4.32)$$

ou seja, a assimetria compartilhada é não-nula e dada justamente pelo único termo com entropia relativa de emaranhamento diferente de zero, que no caso é o termo correspondente ao estado ρ_M do setor de carga $M = 1$, visualizado na matriz densidade acima como o bloco central a menos de uma constante de normalização.

A partir do teorema podemos agora revisitar alguns resultados prévios da literatura interpretando-os sob a ótica do conceito de emaranhamento interno:

- **Emaranhamento e o mecanismo de Page-Wootters:** Como vimos no capítulo 3, apesar de por muito tempo ter-se propagado a ideia de que o recurso responsável pelo funcionamento do mecanismo de Page-Wootters seria o emaranhamento, recentemente (14) mostrou-se que tal recurso não é necessário e nem suficiente para o mecanismo

funcionar, ao menos quando levamos em consideração o estado físico ρ_{SR} e não o vetor físico $|SR\rangle$. Entretanto, uma vez que também foi mostrado (10) que o conceito de coerência interna é equivalente ao de assimetria compartilhada no caso de dois q-btis (para $G = U(1)$), sendo essa última uma medida mais geral aplicável a q-dtis, utilizando o teorema podemos ver que, ao menos matematicamente, um tipo de emaranhamento interno presente nos estados ρ_{MSR} continua sendo fundamental para o mecanismo pois é equivalente aos conceitos de assimetria compartilhada e coerência interna do estado físico ρ_{SR} .

- **Trabalho extraído da coerência interna:** Foi mostrado (39) que dado um sistema N -partido com subsistemas não interagentes do tipo:

$$\hat{\rho} = \sum_{\mathbf{E}, \mathbf{E}'} \rho_{\mathbf{E}, \mathbf{E}'} |\mathbf{E}\rangle \langle \mathbf{E}'|, \quad (4.33)$$

em que $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_N)$ e $|\mathbf{E}\rangle = |E_1, E_2, \dots, E_N\rangle$, sendo a energia total $\mathcal{E}_{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^N E_i$, o trabalho que pode ser extraído da coerência interna do sistema, ou seja os termos com mesma energia total $\mathcal{E}_{\mathbf{E}}$, é igual a

$$\begin{aligned} W_{coh} &= \inf_{\alpha} [F_{\alpha}(\mathcal{D}(\hat{\rho})) - F_{\alpha}(\Delta(\hat{\rho}))] \\ &\leq F(\mathcal{D}(\hat{\rho})) - F(\Delta(\hat{\rho})) \\ &= k_B T [S(\Delta(\hat{\rho})) - S(\mathcal{D}(\hat{\rho}))] \end{aligned} \quad (4.34)$$

em que $F(\rho) = \langle E(\rho) \rangle - k_B T S(\rho)$ é a energia livre de Helmholtz, $F_{\alpha}(\rho) = k_B T S_{\alpha}(\rho \| \gamma) - k_B T \log Z$ é a energia livre de Helmholtz generalizada a partir de $S_{\alpha}(\rho \| \gamma)$, a divergência de Rényi (46), $\mathcal{D}(\hat{\rho}) = \sum_{\mathcal{E}} \hat{\Pi}_{\mathcal{E}} \hat{\rho} \hat{\Pi}_{\mathcal{E}}$ e $\hat{\Pi}_{\mathcal{E}} = \sum_{\mathbf{E}: \mathcal{E}_{\mathbf{E}} = \mathcal{E}} \hat{\Pi}_{\mathbf{E}}$ é o projetor no autoespaço de energia total $\mathcal{E}$, que corresponde ao setor de carga da ação do grupo $U(1)$ visto como um grupo de translação temporal.^{vi} Conforme percebido na Ref. (14), trazendo esse mecanismo para o contexto onde $\hat{\rho}$ é um sistema bipartido de q-bits podemos quantificar a cota superior do trabalho extraído usando a medida de coerência interna, assim:

$$W(\rho) \leq k_B T C_r(\mathcal{D}(\hat{\rho})) \quad (4.35)$$

É possível ainda estender essa relação para casos onde $\hat{\rho}$ é um sistema bipartido de q-dits. Fazendo uso da notação da assimetria compartilhada e aplicando o teorema, ficaremos com

$$W(\rho) \leq k_B T \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\hat{\rho}) = k_B T \left[\sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un}) E_R(\rho_M) \right] \quad (4.36)$$

O que nos mostra que extrair trabalho de coerência interna, ao menos para sistemas bipartidos, está relacionado a ideia de extrair trabalho do que chamamos de emaranhamento interno.

^{vi}A operação $\mathcal{D}$ é exatamente a mesma que definimos na Eq. 2.14 para sistemas multipartidos na base de Fock.

- **Assimetria compartilhada de estados com hiato:** Conforme mostramos na primeira seção deste capítulo, um caso interessante da assimetria compartilhada é quando a calculamos usando sistema bipartido do tipo: estado de máxima verossimilhança *versus* q-bits com hiato. O valor da medida varia de zero até a saturação de acordo com a variação da dimensão do hiato, de $d - 2$ a zero, respectivamente, conforme $d \rightarrow \infty$. Argumentamos que a razão pela qual isso acontece está ligada ao número de blocos da matriz densidade, porém sem a princípio compreendermos bem o que estaria por trás disso. Em posse agora do teorema, podemos fazer uma interpretação desse caso em relação a entropia relativa de emaranhamento dos estados ρ_M dos setores de carga. Se pensarmos nos casos extremos $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_S=0}^{d-1} |m_S\rangle$ e $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |d-1\rangle)$ em que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \rightarrow 0$ e $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m_S=0}^{d-1} |m_S\rangle$ e $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ em que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \rightarrow 1$, o primeiro tem apenas um ρ_M emaranhado (maximamente, nesse caso) e o restante são todos estados separáveis, já o segundo tem $d - 1$ estados emaranhados (também maximamente) e apenas dois estados separáveis. Isto nos leva a crer que o número de estados emaranhados ρ_M que ρ_{SR} possui, em relação ao número total de estados ρ_M , está diretamente ligado ao valor da assimetria compartilhada de ρ_{SR} .

Além dessas interpretações, podemos também utilizar o resultado dado na Eq. (4.30) do teorema para estender um importante resultado da Ref. (10) que vimos no capítulo 3: a determinação de limites superiores para a assimetria mútua de estados ρ_{SR} separáveis. Recapitulando, o lema 2 da Ref. citada diz que a assimetria mútua desses estados sempre satisfará os seguintes limites

$$0 \leq \mathcal{A}(S : R) \leq \min\{A_G(\rho_S), A_G(\rho_R)\} \quad (4.37)$$

Uma vez que a assimetria mútua e a assimetria compartilhada são equivalentes para estados produto, esses limites também são válidos para a assimetria compartilhada desses estados. Usando o teorema, porém, podemos mostrar que limites semelhantes são válidos também para a assimetria compartilhada considerando estados gerais bipartidos, incluindo dessa forma estados mistos, emaranhados e mistos emaranhados, o que nos permitirá encontrar novos estados que saturam o limite além daqueles apresentados na primeira seção deste capítulo. Esse resultado enunciaremos na forma de um lema.

Lema. *A assimetria compartilhada de um estado ρ_{SR} qualquer, para $G = U(1)$, satisfará os seguintes limites*

$$0 \leq \mathcal{A}_{G \otimes G}^{sh}(\rho_{SR}) \leq \min\{\log(\dim \mathcal{H}_S), \log(\dim \mathcal{H}_R)\} \quad (4.38)$$

Demonstração: O limite inferior é trivial, pois uma vez que a assimetria compartilhada é dada por uma combinação linear positiva de entropias relativas de emaranhamento,

como tais entropias são sempre maiores ou iguais a zero, por consequência o mesmo pode ser dito a respeito da assimetria compartilhada (além do que, já havia sido demonstrado na Ref. (9)). Já para o limite superior, separaremos em dois casos, o trivial e o não-trivial. Começemos maximizando a assimetria compartilhada

$$\begin{aligned} \max\{\mathcal{A}_{G \otimes G}^{sh}(\rho_{SR})\} &= \mathcal{S}(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_{SR})) - \min\{\mathcal{S}(\mathcal{G}_G(\rho_{SR}))\} \\ &= \max\left\{\sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un})(E_R(\rho_M))\right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

i) **Caso trivial.**

Podemos ver que qualquer estado ρ_{SR} puro e maximamente emaranhado que seja invariante sob a ação de $\mathcal{G}$ maximizará $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{sh}$, uma vez que o último termo a direita da equação acima será zero. Como resultado, obteremos $\log(\dim \mathcal{H}_S) = \log(\dim \mathcal{H}_R)$, o que é concordante com o lema. Esse já era um resultado esperado, uma vez que, trabalhando com a coerência interna na análise do mecanismo de Page-Wootters, na Ref. (14) já havia sido demonstrado que, no caso de sistemas Bell-diagonais de dois q-bits, o estado $|\psi^+\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$, que é um estado maximamente emaranhando invariante com relação a $\mathcal{G}$, consiste no melhor caso possível. Além disso, estados maximamente emaranhados já haviam sido apontados pela Ref. (1) como o melhor caso possível de referenciais internos.

ii) **Caso não-trivial.**

Para os demais casos, nos concentraremos nas implicações do teorema. Nota-se, em primeiro lugar, que o valor máximo de $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{sh}$ estará necessariamente ligado a valores máximos de E_R . Isso restringe nossa gama de possíveis ρ_{SR} que saturam o limite superior aqueles que possuem ρ_M maximamente emaranhados. Dentre esses, aqueles em que $\dim \mathcal{H}_S = \dim \mathcal{H}_R$, já constituem o caso trivial. Resta agora analisar os casos em que as dimensões do sistema S e do referencial R são diferentes, para esses casos consideraremos $\dim \mathcal{H}_S \leq \dim \mathcal{H}_R$. Isso significa que visualizando ρ_{SR} como matriz densidade teremos uma matriz bloco diagonal com todas as entradas iguais a um, cuja constante de normalização é equivalente a dimensão de seu espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{SR}$ e com o bloco de maior dimensão tendo sua dimensão igual a dimensão do menor espaço de Hilbert, no caso $\mathcal{H}_S$, na comparação entre o espaço do sistema S e do referencial R . Vários exemplos disso podem ser vistos nas primeiras seções deste capítulo, com especial destaque para a subseção 4.1.2, porém, de forma mais

concreta, observe o sistema abaixo (equivalente ao da Eq. (4.8))

$$\rho_{SR} = \frac{1}{d(d-1)} \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & \\ & A_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A_{d-1} & & & \\ & & & & A_{d-1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_2 \\ & & & & & & & A_1 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Veja que de todas as matrizes que constituem os blocos aquela que tem maior dimensão, A_{d-1} , tem dimensão equivalente ao espaço de Hilbert do sistema $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{d-2}} \sum_{m_S=0}^{d-3} |m_S\rangle$, justamente por $\dim \mathcal{H}_S \leq \dim \mathcal{H}_R$. Tendo isso em mente, podemos reescrever a 4.39 da seguinte forma

$$\max\{\mathcal{A}_{G \otimes G}^{sh}(\rho_{SR})\} = \max\left\{\sum_M \text{Tr}(\rho_M^{un}) \mathcal{S}(\mathcal{G}_{G \otimes G}(\rho_M))\right\} \quad (4.41)$$

$$= \frac{1}{\dim \mathcal{H}_{SR}} \max\left\{\sum_M \dim \mathcal{H}_M \log(\dim \mathcal{H}_M)\right\} \quad (4.42)$$

Para maximizarmos a Eq. (4.42), basta lembrar que, de forma semelhante a essa equação, a entropia de von Neumann de um estado qualquer pode ser escrita como $\mathcal{S}(\rho) = \sum_{\lambda_x} \lambda_x \log \lambda_x$ e seu valor máximo é atingido justamente quando temos um estado com todos os autovalores λ_x iguais. Portanto,

$$\max\{\mathcal{A}_{G \otimes G}^{sh}(\rho_{SR})\} = \frac{n_M \dim \mathcal{H}_M}{\dim \mathcal{H}_{SR}} \log(\dim \mathcal{H}_M) \quad (4.43)$$

$$= \log(\dim \mathcal{H}_M) \quad (4.44)$$

em que da primeira para a segunda equação usamos que $\dim \mathcal{H}_{SR} = n_M \dim \mathcal{H}_M$, sendo n_M o número de setores de carga (blocos na matriz densidade). Por fim, como todos os blocos tem mesma dimensão, sua dimensão deverá ser igual a de $\mathcal{H}_S$, portanto

$$\max\{\mathcal{A}_{G \otimes G}^{sh}(\rho_{SR})\} = \log(\dim \mathcal{H}_S) \quad (4.45)$$

como queríamos demonstrar.

Aproveitando a Eq. (4.40) do lema para exemplificar o caso não trivial, temos que $\dim \mathcal{H}_S = d-1$ e $\dim \mathcal{H}_R = d$. Assim, para essas dimensões $\rho_{SR_{ideal}}$ saturará a assimetria

compartilhada se tiver o seguinte formato

$$\rho_{SR_{ideal}} = \frac{1}{2(d-1)} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{d-1} & & \\ & & & & A_{d-1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Vamos supor que $d = 4$. Nesse caso, temos que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR_{ideal}}) = \log d - 1 = \log 3 \approx 1.1$. Já para a Eq. (4.40), calculando a assimetria compartilhada com base na Eq. (4.13), temos que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) = 1/3 + (1/2) \log 3 \approx 0.9$. Como esperado então, $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR_{ideal}}) > \mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR})$.

O interessante desse último caso consiste justamente na determinação de estados ρ_{SR} mistos que saturam a assimetria compartilhada e, por isso, constituem em casos ideais para o funcionamento do mecanismo de Page-Wootters. Chamamos de não-triviais não somente por não serem tão simples de se encontrar, ao contrário do primeiro caso, mas também porque constituem num resultado novo que pode ser explorado em trabalhos futuros não somente dentro do contexto de Page-Wootters como também na área de referenciais quânticos em geral.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação investigamos sob a perspectiva de uma teoria de recursos as possíveis medidas informacionais que permitem quantificar referencias quânticos compartilhados. Tendo como foco o grupo $U(1)$ e sistemas bipartidos, nos concentramos em mostrar a equivalência entre as propostas advindas da teoria de coerência e da teoria de assimetria nesse regime explorando um caso em particular que tem recebido bastante atenção nos últimos tempos: o mecanismo de Page-Wootters. Com ênfase na medida assimetria compartilhada definida na Ref. (9), seguimos o caminho dos exemplos apresentados na Ref. (10) e estendemos a análise ali feita para casos mais gerais, o que nos levou a propor um teorema que relaciona a medida de assimetria compartilhada com uma soma de entropias relativas de emaranhamento do que chamamos de estados internos, pertencentes aos setores de carga do espaço de Hilbert associados a ação do grupo $U(1)$. Com isso, reinterpretemos alguns resultados já presentes na literatura e definimos limites superiores para assimetria compartilhada de estados bipartidos quaisquer, o que em si constituiu em mais uma extensão de um resultado da Ref. (10) onde limites superiores foram definidos somente para o caso de estados produto. Esse último resultado, por sua vez, permitiu que encontrássemos um tipo específico de estado misto que satura a assimetria compartilhada consistindo em um referencial ideal, algo que só havia sido mostrado para sistemas com dimensão muito alta ou que constituem em um estado maximamente emaranhado.

Com base neste trabalho e, em especial, nos resultados obtidos, várias perspectivas para futuras investigações surgiram. Enunciaremos a seguir algumas das principais delas que acreditamos que poderiam ser exploradas fazendo uso de propostas e modelos apresentados por outros artigos da área de referenciais quânticos e da informação quântica de uma maneira geral.

- **Utilização de estados que saturam a assimetria compartilhada para protocolos de comunicação quântica:** Na Ref. (22) é apresentado um protocolo de comunicação quântica na ausência de referencias compartilhados em que Alice codifica a mensagem que quer enviar a Bob a partir de uma operação do tipo $\mathcal{E} = \mathcal{G}(\rho_{SR})$, sendo que a mensagem é dada pelo sistema S , um q-bit, enquanto que o sistema R constitui em uma amostra limitada do referencial de Alice. Bob, ao receber o estado resultante, realiza um procedimento de decodificação para recuperar o sistema e, por consequência, a mensagem original, porém os resultados desse protocolo mostram que isso só pode ser feito com a seguinte probabilidade $p = \frac{1}{\text{tamanho de } R}$, sendo que o efeito do processo de decodificação pode ser visto como $(1 - p)\mathcal{I} + p\mathcal{G}$, em que $\mathcal{I}$ é um mapa identidade. Em outras palavras, o grau de fidelidade com que Bob consegue recuperar a mensagem original depende do tamanho do referencial

utilizado por Alice na codificação. Isso condiz com os resultados apresentados no início da capítulo 3, onde vimos que quanto maior a dimensão do sistema referencial, maior é o valor da assimetria compartilhada (quando não há *gap*). Entretanto, uma vez que encontramos estados que saturam essa medida, é possível que a utilização deles em um protocolo desse tipo seja capaz de aumentar, se não até saturar, o grau de fidelidade com que o processo de decodificação é realizado. Além disso, uma vez que os autores da Ref. (22) se concentraram apenas em estados onde o sistema S é um q-bit, seria interessante estender essa análise para sistemas do tipo q-dit.

- **Extensão da medida assimetria compartilhada para o caso de sistemas multipartidos:** Todos os resultados aqui apresentados se aplicam ao caso de sistemas bipartidos. Entretanto, uma questão natural que surge é a possibilidade de extensão da medida para o caso de sistemas multipartidos e simetrias de calibre ⁱ. Com o objetivo de contornar a complexidade de um sistema desse tipo, um caminho possível seria utilizar técnicas da teoria de calibre para regular graus de liberdade que sejam redundantes. Com isso, é possível que $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}$ possa ser vista como uma medida do grau de correlação entre o sistema e um campo de calibre, conforme proposto na Ref. (10). De fato, alguns trabalhos já tem utilizado teoria de calibre para descrever processos e referenciais quânticos, como por exemplo as Refs. (47, 48)
- **Estudo das operações proibidas que podem ser ativadas a partir do recurso quantificado pela assimetria compartilhada:** Como dissemos quando apresentamos uma visão geral das teorias de recursos no capítulo 3, um dos pontos interessantes que é bastante característico dessa abordagem é que, uma vez que se tenha acesso a um estado que num dado contexto físico possa ser visto como um recurso, podemos utilizá-lo para realizar operações que em princípio seriam proibidas pelo contexto. O exemplo mais comum é a utilização de estados emaranhados compartilhados entre duas partes distantes numa situação em que estão limitadas a operações locais e comunicação clássica (LOCC) como recurso para a realização de comunicação quântica. Pensando de maneira análoga sobre o recurso quantificado por $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}$ no contexto de uma regra de superseleção local, podemos nos perguntar: qual a operação proibida que se torna possível ao consumirmos durante o processo um estado quântico ρ_{SR} para o qual $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}(\rho_{SR}) \geq 0$? Um exemplo interessante que pode lançar uma luz na questão é a utilização de *refbits* (ver a Ref. (41)) como unidades de referencial quântico compartilhado para protocolos de ativação de emaranhamento. Estados desse tipo são recursos no mesmo contexto em que estados com assimetria compartilhada maior que zero também são, ou seja, sob a ação de uma regra de superseleção local. Porém, para a ativação de emaranhamento nesse contexto, *refbits* são tão úteis quanto os chamados *ebits* (pares de Bell) e,

ⁱDo inglês *gauge symmetries*.

portanto, se fôssemos quantificar o recurso desses estados teríamos que construir uma medida que retornasse o mesmo valor para ambos. De fato, essa medida já existe e é conhecida como *Superselection induced variance* (SIV). (49, 50) Porém, isso não acontece quando aplicamos a assimetria compartilhada a esses estados: para *refbits* o resultado é $1/2$ e para *ebits* é 1. Isso nos mostra que, embora $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}$ seja um quantificador de recursos no mesmo contexto em que *refbits* e *ebits* são recursos, o recurso quantificado por $\mathcal{A}_{G \otimes G}^{(sh)}$ não é exatamente o mesmo que o quantificado por SIV. Seria, portanto, interessante investigar qual é esse recurso e quais operações ele nos habilita a fazer.

- **Investigação das propriedades dos estados emaranhados tipo B.1ⁱⁱ:** Apesar de bastante semelhantes aos estados correlacionados de Schmidtⁱⁱⁱ, os estados mistos emaranhados que apresentamos aqui tem o diferencial de poderem também ser classificados como estados de Werner. (51) Pode-se então, aproveitando as propriedades dos estados de Werner, investigar questões como a destilação desses estados, incluindo a possibilidade deles serem não-destiláveis, tipo conhecido como *estados emaranhados ligados*.^{iv}

ⁱⁱEstados do tipo: $\rho = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1, n_2} |n_1, N - n_1\rangle \langle n_2, N - n_2|$ (ver Apêndice B).

ⁱⁱⁱEstados do tipo: $\rho = \sum_{m, n} a_{m, n} |m, m\rangle \langle n, n|$.

^{iv}Em inglês: *bound entangled states*.

REFERÊNCIAS

- 1 BARTLETT, S. D.; RUDOLPH, T.; SPEKKENS, R. W. Reference frames, superselection rules, and quantum information. **Reviews of Modern Physics**, v. 79, p. 555–609, Apr. 2007. Doi: 10.1103/RevModPhys.79.555.
- 2 CHITAMBAR, E.; GOUR, G. Quantum resource theories. **Reviews of Modern Physics**, v. 91, p. 025001, Apr. 2019. Doi: 10.1103/RevModPhys.91.025001.
- 3 MARVIAN, I. **Symmetry, asymmetry and quantum information**. 2012. 237 p. Tese (Doutorado) — University of Waterloo, Waterloo, 2012.
- 4 BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying coherence. **Physical Review Letters**, v. 113, p. 140401, Sept. 2014. Doi: 10.1103/PhysRevLett.113.140401.
- 5 MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W. How to quantify coherence: distinguishing speakable and unspeakable notions. **Physical Review A**, v. 94, p. 052324, Nov. 2016. Doi: 10.1103/PhysRevA.94.052324.
- 6 KITAEV, A.; MAYERS, D.; PRESKILL, J. Superselection rules and quantum protocols. **Physical Review A**, v. 69, p. 052326, May 2004. Doi: 10.1103/PhysRevA.69.052326.
- 7 GAMBINI, R.; PULLIN, J. **The Montevideo interpretation of quantum mechanics**: a short review. 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1502.03410.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2018.
- 8 POULIN, D. Toy model for a relational formulation of quantum theory. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 45, p. 1189, July 2006. Doi: 10.1007/s10773-006-9052-0.
- 9 VACCARO, J. A.; ANSELM, F.; WISEMAN, H. M.; JACOBS, K. Tradeoff between extractable mechanical work, accessible entanglement, and ability to act as a reference system, under arbitrary superselection rules. **Physical Review A**, v. 77, p. 032114, Mar. 2008. Doi: 10.1103/PhysRevA.77.032114.
- 10 MARTINELLI, T.; SOARES-PINTO, D. O. Quantifying quantum reference frames in composed systems: local, global, and mutual asymmetries. **Physical Review A**, v. 99, p. 042124, Apr. 2019. Doi: 10.1103/PhysRevA.99.042124.
- 11 PAGE, D. N.; WOOTTERS, W. K. Evolution without evolution: dynamics described by stationary observables. **Physical Review D**, v. 27, p. 2885–2892, June 1983. Doi: 10.1103/PhysRevD.27.2885.
- 12 WOOTTERS, W. K. “Time” replaced by quantum correlations. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 23, p. 701–711, Aug. 1984.
- 13 MARTINELLI, T. **Evolução sem evolução**: assimetria e a emergência do tempo na teoria quântica. 2017. 94 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

- 14 MENDES, L. R.; SOARES-PINTO, D. O. **Time as a consequence of internal coherence**. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1806.09669.pdf>>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- 15 PERES, A.; SCUDO, F. P. **Unspeakable quantum information**. 2002. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0201017.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 16 GIULUNI, D. **Superselection rules**. 2009. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0710.1516.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 17 WICK, G. C.; WIGHTMAN, A. S.; WIGNER, E. P. Superselection rule for charge. **Physical Review D**, v. 1, p. 3267–3269, June 1970. Doi: 10.1103/PhysRevD.1.3267.
- 18 AHARONOV, Y.; SUSSKIND, L. Charge superselection rule. **Physical Review**, v. 155, p. 1428–1431, Mar. 1967. Doi: 10.1103/PhysRev.155.1428.
- 19 PERES, A.; SCUDO, P. F. Transmission of a cartesian frame by a quantum system. **Physical Review Letters**, v. 87, p. 167901, Sept. 2001. Doi 10.1103/PhysRevLett.87.167901.
- 20 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum metrology. **Physical Review Letters**, v. 96, p. 010401, Jan. 2006. Doi: 10.1103/PhysRevLett.96.010401.
- 21 MASSAR, S.; POPESCU, S. Optimal extraction of information from finite quantum ensembles. **Physical Review Letters**, v. 74, p. 1259–1263, Feb. 1995. Doi: 10.1103/PhysRevLett.74.1259.
- 22 BARTLETT, S. D.; RUDOLPH, T.; SPEKKENS, R. W.; TURNER, P. S. Quantum communication using a bounded-size quantum reference frame. **New Journal of Physics**, v. 11, n. 6, p. 063013, June 2009. Doi: 10.1088/1367-2630/11/6/063013.
- 23 LOSTAGLIO, M.; JENNINGS, D.; RUDOLPH, T. Description of quantum coherence in thermodynamic processes requires constraints beyond free energy. **Nature Communications**, v. 6, Mar. 2015. Doi: 10.1038/ncomms7383.
- 24 JANZING, D. Quantum thermodynamics with missing reference frames: decompositions of free energy into non-increasing components. **Journal of Statistical Physics**, v. 125, p. 761–776, Nov. 2006. Doi: 10.1007/s10955-006-9220-x.
- 25 KWON, H.; JEONG, H.; JENNINGS, D.; YADIN, B.; KIM, M. S. Clock–work trade-off relation for coherence in quantum thermodynamics. **Physical Review Letters**, v. 120, p. 150602, Apr. 2018. Doi: 10.1103/PhysRevLett.120.150602.
- 26 BARATA, J. C. A. **Notas de aula**. 2019. Versão de 10 de fevereiro de 2019. Disponível em: <<http://denebola.if.usp.br>>. Acesso em: 15 fev. 2019.
- 27 CHIRIBELLA, G. **Optimal estimation of quantum signals in the presence of symmetry**. 2006. Tese (Doutorado) — Dipartimento di Fisica A.Volta, Università Degli Studi di Pavia, Pavia, 2006.
- 28 JEEVANJEE, N. **An introduction to tensors and group theory for physicists**. Boston: Birkhäuser, 2011. ISBN 978-0-8176-4714-8.

- 29 ZANARDI, P. Virtual quantum subsystems. **Physical Review Letters**, v. 87, p. 077901, July 2001. Doi: 10.1103/PhysRevLett.87.077901.
- 30 GOUR, G.; MARVIAN, I.; SPEKKENS, R. W. Measuring the quality of a quantum reference frame: the relative entropy of frameness. **Physical Review A**, v. 80, p. 012307, July 2009. Doi: 10.1103/PhysRevA.80.012307.
- 31 PASHBY, T. **Time and the foundations of quantum mechanics**. 2014. Tese (Doutorado) — University of Pittsburgh, Pittsburgh, 2014.
- 32 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum time. **Physical Review D**, v. 92, p. 045033, Aug. 2015. Doi: 10.1103/PhysRevD.92.045033.
- 33 CHITAMBAR, E.; LEUNG, D.; MANČINSKA, L.; OZOLS, M.; WINTER, A. Everything you always wanted to know about LOCC (but were afraid to ask). **Communications in Mathematical Physics**, v. 328, p. 303, May 2014. Doi: 10.1007/s00220-014-1953-9.
- 34 BRANDÃO, G. F.; CHRISTANDL, M.; HARROW, W. A.; WALTER, M. **The mathematics of entanglement**. 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1604.01790.pdf>>. Acesso em: 10 sept. 2019.
- 35 HORODECKI, R.; HORODECKI, P.; HORODECKI, M.; HORODECKI, K. Quantum entanglement. **Reviews of Modern Physics**, v. 81, p. 865–942, June 2009. Doi: 10.1103/RevModPhys.81.865.
- 36 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information**: 10th anniversary edition. 10th. ed. New York: Cambridge University Press, 2011. ISBN 1107002176, 9781107002173.
- 37 HALPERN, N. Y. **Toward physical realizations of thermodynamic resource theories**. 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1509.03873.pdf>>. Acesso em: 10 sept. 2019.
- 38 STRELTSOV, A.; ADESSO, G.; PLENIO, M. B. Colloquium: quantum coherence as a resource. **Reviews of Modern Physics**, v. 89, p. 041003, Oct. 2017. Doi: 10.1103/RevModPhys.89.041003.
- 39 KWON, H.; JEONG, H.; JENNINGS, D.; YADIN, B.; KIM, M. S. Clock–work trade-off relation for coherence in quantum thermodynamics. **Physical Review Letters**, v. 120, p. 150602, Apr. 2018. Doi: 10.1103/PhysRevLett.120.150602.
- 40 JACOBS, K. A bound on the mutual information, and properties of entropy reduction, for quantum channels with inefficient measurements. **Journal of Mathematical Physics**, v. 47, p. 012102, Jan. 2006. Doi: 10.1063/1.2158433.
- 41 ENK, S. J. van. Quantifying the resource of sharing a reference frame. **Physical Review A**, v. 71, p. 032339, Mar. 2005. Doi: 10.1103/PhysRevA.71.032339.
- 42 SCHUMACHER, B.; WESTMORELAND, M.; WOOTTERS, W. K. Limitation on the amount of accessible information in a quantum channel. **Physical Review Letters**, v. 76, p. 3452–3455, Apr. 1996. Doi: 10.1103/PhysRevLett.76.3452.

- 43 NARASIMHACHAR, V. **Quantum resource theories for thermodynamics, reference frames, and uncertainty**. 2016. Tese (Doutorado) — University of Calgary, Calgary, 2016.
- 44 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley, 1991. v. 2. ISBN 9780471164333.
- 45 VEDRAL, V.; PLENIO, M. B. Entanglement measures and purification procedures. **Physical Review A**, v. 57, p. 1619–1633, Mar. 1998. Doi: 10.1103/PhysRevA.57.1619.
- 46 BRANDÃO, F.; HORODECKI, M.; NG, N.; OPPENHEIM, J.; WEHNER, S. The second laws of quantum thermodynamics. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 112, n. 11, p. 3275–3279, 2015.
- 47 HAEGEMAN, J.; ACOLEYEN, K. V.; SCHUCH, N.; CIRAC, J. I.; VERSTRAETE, F. Gauging quantum states: from global to local symmetries in many-body systems. **Physical Review X**, v. 5, p. 011024, Feb. 2015. Doi: 10.1103/PhysRevX.5.011024.
- 48 CIRSTOIU, C.; JENNINGS, D. **Global and local gauge symmetries beyond Lagrangian formulations**. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1707.09826.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 49 SCHUCH, N.; VERSTRAETE, F.; CIRAC, J. I. Nonlocal resources in the presence of superselection rules. **Physical Review Letters**, v. 92, p. 087904, Feb. 2004. Doi: 10.1103/PhysRevLett.92.087904.
- 50 _____. Quantum entanglement theory in the presence of superselection rules. **Physical Review A**, v. 70, p. 042310, Oct. 2004. Doi: 10.1103/PhysRevA.70.042310.
- 51 WERNER, R. F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. **Physical Review A**, v. 40, p. 4277–4281, Oct. 1989. Doi: 10.1103/PhysRevA.40.4277.
- 52 WU, S.; ZHANG, Y. **Calculating the relative entropy of entanglement**. 2000. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0004018.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 53 CHEN, Y.-X.; YANG, D. The relative entropy of entanglement of Schmidt correlated states and distillation. **Quantum Information Processing**, v. 1, p. 389–395, 2002. Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1023469830754>.

APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DE GRUPOS E MÉDIAS INVARIANTES

Apresentaremos aqui uma síntese dos principais conceitos de teoria de representação de grupos utilizados ao longo desta dissertação. Todos os conceitos que serão aqui definidos podem ser encontrados de forma mais detalhada nas Refs. (26, 27, 28), especialmente na Ref. (26)

Uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V é um mapa que a cada elemento $g \in G$ associa um operador linear inversível $\Pi(g) : V \rightarrow V$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $\Pi(g)\Pi(h) = \Pi(gh)$, $\forall g, h \in G$;
2. $\Pi(e) = \mathbf{1}$, sendo e o elemento identidade de G e $\mathbf{1}$ o operador identidade que atua em V ;
3. $\Pi(g^{-1}) = \Pi(g)^{-1}$, $\forall g \in G$.

Definição 1. Duas representações Π_1 e Π_2 de um mesmo grupo G , agindo em espaços vetoriais V_1 e V_2 , respectivamente, são ditas ser representações equivalentes se existir um operador linear inversível $U : V_1 \rightarrow V_2$, tal que $U\Pi_1(g) = \Pi_2(g)U$, $\forall g \in G$.

Definição 2. Um subespaço W de V é dito ser um subespaço invariante pela representação Π do grupo G em V se $\Pi(g)w \in W$, $\forall w \in W$ e $\forall g \in G$, ou seja, $\Pi(G)W \subset W$.

Definição 3. Seja W um subespaço invariante por Π . A representação $\Pi(g)$ é chamada irreduzível em W se os únicos subespaços invariantes forem os triviais ($\{0\}$ e o próprio W). Chamaremos essas representações de irreps.

Uma representação que não é irreduzível é dita ser redutível. Dessas, temos aquelas ditas *totalmente redutíveis* que constituem em representações Π de G não somente redutíveis em V , mas que também podem ser escritas como uma soma direta dos subespaços invariantes por $\Pi : V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Nesse caso, $\Pi(g)$ pode ser escrita em uma base conveniente na forma de blocos,

$$\Pi(g) = \begin{bmatrix} \pi_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \pi_k(g) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$\forall g \in G$, em que cada $\pi_i(g)$ é uma representação de G atuando no espaço invariante V_i de Π . Assim, podemos escrever $\Pi = \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_k$.

Uma situação importante é aquela em que Π é totalmente redutível e cada π_i é irredutível. Nesse caso, dizemos que Π é uma representação *completamente redutível*. É o que acontece para grupos finitos e grupos de Lie compactos num espaço de Hilbert. Abaixo, isso será enunciado através de um teorema para o qual será omitida a demonstração.ⁱ

Teorema 1. *Seja G um grupo finito ou de Lie compacto e seja $U_g^{ii} \in G$ uma representação unitária de G num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, qualquer representação U_g é irredutível ou completamente redutível.*

Agora, enunciaremos dois lemas algébricos de grande importância na teoria de representação de grupos: os lemas de Schur. A demonstração de ambos também será omitidaⁱⁱⁱ. O primeiro diz respeito aos operadores que comutam com duas irreps equivalentes.

Lema 1. *Sejam U_g e V_g duas irreps equivalentes atuando nos espaços de Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, respectivamente. Então, qualquer operador linear inversível $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ de forma que $AU_g = V_gA, \forall g \in G$, tem a forma $A = \lambda T$, sendo $\lambda \in \mathbb{C}$ uma constante e $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ um isomorfismo que conecta as duas irreps.*

Já o segundo trata do caso em que as irreps são não equivalentes.

Lema 2. *Sejam U_g e V_g duas irreps não equivalentes. Então, o único operador $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, tal que $AU_g = V_gA, \forall g \in G$, é o operador nulo $A = 0$.*

Como consequência desses dois lemas podemos escrever uma representação U_g do grupo G atuando no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ como uma soma direta de um número de irreps, equivalentes e não equivalentes, em que cada uma atua em um espaço diferente,

$$U_g = \bigoplus_{q \in Q} \bigoplus_{i=1}^{m_q} U_g^{q,i}, \quad (\text{A.2})$$

sendo Q o conjunto de classes de equivalência de irreps contidas na decomposição de U_g e m_q o número de irreps equivalentes pertencentes a uma mesma classe, o qual chamamos de *multiplicidade*.

Um caso particularmente importante para esta dissertação é o das representações irredutíveis do grupo $U(1)$ em um espaço complexo. Uma vez que esse é um grupo abeliano, ou seja, é um grupo comutativo, de forma que $hg = gh, \forall g, h \in G$, temos que o seguinte corolário se aplica a ele.

ⁱVeja na Ref. (26)

ⁱⁱAqui, por motivo de simplicidade, fizemos uma ligeira mudança na notação: o elemento de grupo g aparece como subíndice da representação em vez de aparecer como argumento da mesma (na forma $U(g)$). Essa notação será mantida em toda a dissertação quando nos referirmos a representações unitárias.

ⁱⁱⁱVeja também na Ref. (26)

Corolário 1. *Seja G um grupo abeliano, as representações irredutíveis complexas de dimensão finita são unidimensionais.*

Demonstração: Como G é abeliano temos que para sua representação Π vale $\Pi(h)\Pi(g) = \Pi(g)\Pi(h)$. Assim, sendo Π uma irrep complexa de dimensão finita sabemos pelo lema 1 que $\Pi(h) = \lambda(h)\mathbf{1}$. Isso significa dizer que $\Pi(h)$ pode ser visto como um mapa linear que multiplica qualquer vetor v pertencente ao espaço complexo V por um escalar: $\Pi(h)v = \lambda(h)v$. Portanto, todo subespaço unidimensional de V é invariante com relação a Π . Como Π é irredutível, a dimensão de V só pode ser igual a um.

A.1 A medida de Haar

Seja G um grupo finito e seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função que associa um número complexo a cada elemento g do grupo. Podemos definir a média de f em G por

$$\mu(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g), \quad (\text{A.3})$$

em que $|G|$ é o número de elementos de G . Note que essa média foi normalizada de forma que se $f(g) = 1, \forall g \in G$, então $\mu(f) = 1$, e também que ela é positiva pois, se $f \geq 0$, então $\mu(f) \geq 0$. Além disso, se $f \geq 0$ e $\mu(f) = 0$, então $f(g) = 0, \forall g \in G$.

Seja agora h um elemento qualquer, porém fixo, de G . Podemos com ele definir as seguintes funções: $f_h^e(g) = f(hg)$, $f_h^d(g) = f(gh)$ e $f^i(g) = f(g^{-1})$. Se ao aplicarmos a Eq. A.3 nelas encontrarmos que

$$\mu(f_h^e) = \mu(f_h^d) = \mu(f^i) = \mu(f), \quad (\text{A.4})$$

dizemos que a média $\mu(f)$ é invariante por multiplicação à direita e à esquerda por elementos de G e pela inversão do argumento de f .

Grupos finitos não são os únicos a possuir médias invariantes positivas. Vejamos por exemplo o caso do grupo $U(1)$, enquanto grupo do círculo unitário, que corresponde também ao caso do grupo $SO(2)$ por serem isomórficos. Para eles podemos definir,

$$\mu(f) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} f(\phi), \quad (\text{A.5})$$

caso a integral seja finita. Pode-se verificar facilmente que as propriedades de invariância observadas no caso de grupos finitos também valem aqui, incluindo a normalização e a positividade. Por outro lado, para o grupo $(\mathbb{R}, +)$,^{iv} que também pode ser visto como um grupo $U(1)$, porém não-compacto, podemos definir,

$$\mu(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x), \quad (\text{A.6})$$

^{iv}Notação que significa: conjunto dos números reais com a operação de adição

caso a integral seja finita. Como pode-se ver, também aqui essa média é positiva, invariante por translações, $f(x) \rightarrow f(x + y)$ e pela troca do argumento de f por seu inverso $f(x) \rightarrow f(-x)$. Entretanto, em virtude do grupo ser não compacto, a média não pode ser normalizada.

Daqui já podemos inferir que uma possível condição para que o grupo possua uma medida invariante positiva como no caso dos grupos finitos é a compacidade. De fato, essa resposta parcial foi a encontrada por Haar ^v em 1932. O teorema de Haar afirma que se G é um grupo compacto, então existe uma medida de integração $d\mu(g)$ em G , denominada *medida de Haar*, tal que se a média

$$\mu(f) = \int_G f(g) d\mu(g) \quad (\text{A.7})$$

é finita, então tem-se que é invariante à esquerda e à direita pela ação de qualquer elemento $h \in G$ e também pela inversão do argumento de f . Ou seja,

$$\int_G f(g) d\mu(g) = \int_G f(hg) d\mu(g) = \int_G f(gh) d\mu(g) = \int_G f(g^{-1}) d\mu(g). \quad (\text{A.8})$$

Além disso, a média é normalizada: $\int_G d\mu(g) = 1$ e positiva: se $f \geq 0$, então $\int_G f(g) d\mu(g) \geq 0$.

Uma extensão parcial desse teorema pode ser feita para grupos localmente compactos (como $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_+, \cdot)$). Se G é localmente compacto existem medidas invariantes positivas de integração à esquerda, $d\mu^e(g)$, e à direita, $d\mu^d(g)$, em G tais que

$$\int_G f(g) d\mu^e(g) = \int_G f(hg) d\mu^e(g) = \int_G f(g^{-1}) d\mu^e(g) \quad (\text{A.9})$$

e

$$\int_G f(g) d\mu^d(g) = \int_G f(gh) d\mu^d(g) = \int_G f(g^{-1}) d\mu^d(g), \quad (\text{A.10})$$

para qualquer $h \in G$. Nesse caso, não necessariamente as medidas à esquerda e à direita coincidem e nem sempre podem ser normalizadas.

Utilizamos esse conceito de média invariante em Física quando queremos tornar um dado estado $|\psi_S\rangle \in \mathcal{H}_S$ invariante sob a ação unitária de um grupo G no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_S$. Em especial, no caso da presente dissertação, essa técnica é explorada no contexto de referenciais quânticos em que simetrizar um estado com relação a um grupo G , responsável por descrever um dado referencial, significa tornar esse estado independente desse referencial. Sendo a representação unitária de G em $\mathcal{H}_S$ dada por U_g^S , podemos definir a média de grupo uniforme para estados como

$$\int_G d\mu(g) U_g^S |\psi_S\rangle. \quad (\text{A.11})$$

^vAlfréd Haar (1885-1933).

Entretanto, tal operação possui a desvantagem de não preservar o traço. Para corrigir isso, podemos defini-la de maneira mais conveniente a partir dos operadores densidade. Nesse caso, a média ficará

$$\int_G d\mu(g) U_g^S |\psi_S\rangle \langle \psi_S| U_g^{S\dagger}, \quad (\text{A.12})$$

em que a função f que associa um número complexo para cada elemento g do grupo G é dada aqui pelo elemento de matriz da representação U_g^S . Na Ref. (8) a primeira média é chamada de *média “coerente” de grupos* e a segunda de *média “estatística” de grupos*.^{vi} Mais informações sobre ambas podem ser encontradas nessa referência.

^{vi}Em inglês: “*coherent*” *group average* e “*statistical*” *group average*, respectivamente. Optamos por deixar as aspas para sermos fiéis a nomenclatura do autor.

APÊNDICE B – ENTROPIA RELATIVA DE EMARANHAMENTO PARA UMA CLASSE DE ESTADOS MISTOS

Neste apêndice demonstraremos que para um dado estado misto do tipo

$$\rho = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N c_{n_1, n_2} |n_1, N - n_1\rangle \langle n_2, N - n_2|, \quad (\text{B.1})$$

o estado separável que minimiza a entropia relativa, $E_R(\rho)$, será:

$$\sigma^* = \sum_{n_1=0}^N c_{n_1} |n_1, N - n_1\rangle \langle n_1, N - n_1|. \quad (\text{B.2})$$

Dessa forma, $E_R(\rho) = \mathcal{S}(\sigma) - \mathcal{S}(\rho)$, em que $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \ln \rho$ é a entropia de von Neumann. Essa demonstração segue diretamente a feita em (52) para estados mistos do tipo $\sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2} |\phi_{n_1}, \psi_{n_1}\rangle \langle \phi_{n_2}, \psi_{n_2}|$.

Como já temos um palpite para o estado separável que minimiza a entropia relativa de (B.1), seguindo o teorema de Vedral-Plenio (45), precisamos mostrar que o gradiente $\frac{d}{dx} \mathcal{S}(\rho \parallel (1-x)\sigma^* + x\sigma) |_{x=0}$ para todo $\sigma \in \text{SEP}$, em que SEP é o conjunto de todos os estados não emaranhados, é não negativo. Se isso não acontecer para um dado σ^* isso significa que ele não é um mínimo da função $f(x, \sigma) = \mathcal{S}(\rho \parallel (1-x)\sigma^* + x\sigma)$ e, portanto, o palpite estará errado.

Usando a identidade $\ln A = \int_0^\infty [(At - 1)/(A + t)] dt / (1 + t^2)$, podemos escrever o gradiente como

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0, \sigma) = 1 - \int_0^\infty \text{Tr}[(\sigma^* + t)^{-1} \rho (\sigma^* + t)^{-1} \sigma] dt. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.1) e (B.2) em $(\sigma^* + t)^{-1} \rho (\sigma^* + t)^{-1}$, teremos:

$$\begin{aligned} (\sigma^* + t)^{-1} \rho (\sigma^* + t)^{-1} &= \left(\sum_{n_1} c_{n_1, n_1} |n_1, N - n_1\rangle \langle n_1, N - n_1| + t \right)^{-1} \\ &\times \sum_{n_2, n_3} c_{n_2, n_3} |n_2, N - n_2\rangle \langle n_3, N - n_3| \\ &\times \left(\sum_{n_4} c_{n_4, n_4} |n_4, N - n_4\rangle \langle n_4, N - n_4| + t \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} (c_{n_1, n_1} + t)^{-1} c_{n_2, n_3} (c_{n_4, n_4} + t)^{-1} \\ &\times |n_1, N - n_1\rangle \langle n_1, N - n_1| |n_2, N - n_2\rangle \\ &\times \langle n_3, N - n_3| |n_4, N - n_4\rangle \langle n_4, N - n_4|. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Nas duas últimas linhas nota-se que os dois brakets gerarão duas deltas de Dirac, δ_{n_1, n_2} e δ_{n_3, n_4} , portanto para que a equação seja diferente de 0 faremos $n_1 = n_2 = n$ e $n_3 = n_4 = n'$,

$$(\sigma^* + t)^{-1} \rho (\sigma^* + t)^{-1} = \sum_{n, n'} (c_{n, n} + t)^{-1} c_{n, n'} (c_{n', n'} + t)^{-1} |n, N - n\rangle \langle n', N - n'| \quad (\text{B.6})$$

Seja $g(n, n') \equiv c_{n,n'} \int_0^\infty (c_{n,n} + t)^{-1} (c_{n',n'} + t)^{-1} dt$, obviamente $g(n, n) = 1$ e para $n \neq n'$,

$$g(n, n') = c_{n,n'} \frac{\log c_{n,n} - \log c_{n',n'}}{c_{n,n} - c_{n',n'}}. \quad (\text{B.7})$$

Mostraremos agora que $|g(n, n')| \leq 1$. Como o teorema de Vedral-Plenio provou que

$$0 \leq \sqrt{c_{n,n} c_{n',n'}} \frac{\log c_{n,n} - \log c_{n',n'}}{c_{n,n} - c_{n',n'}} \leq 1, \quad (\text{B.8})$$

só precisamos provar que $|c_{n,n'}| \leq \sqrt{c_{n,n} c_{n',n'}}$. Para tanto, seja $|\psi\rangle = a|n, N-n\rangle + b|n', N-n'\rangle$, em que $a, b \in \mathbb{C}$, teremos

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0, \quad (\text{B.9})$$

$$(\langle n, N-n | a^* + \langle n', N-n' | b^*) \left(\sum_{n,n'=0}^N c_{n,n'} |n, N-n\rangle \langle n', N-n'| \right) (a|n, N-n\rangle + b|n', N-n'\rangle) \geq 0, \quad (\text{B.10})$$

$$|a|^2 c_{n,n} + |b|^2 c_{n',n'} + a^* b c_{n,n'} + a b^* c_{n',n} \geq 0. \quad (\text{B.11})$$

Essa última desigualdade pode ser escrita como uma matriz densidade,

$$\begin{bmatrix} |a|^2 c_{n,n} - \lambda & a^* b c_{n,n'} \\ a b^* c_{n',n} & |b|^2 c_{n',n'} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Diagonalizando-a e considerando que $\lambda \geq 0$, teremos

$$(|a|^2 c_{n,n} + |b|^2 c_{n',n'})^2 \geq (\sqrt{\Delta})^2, \quad (\text{B.13})$$

em que $\Delta = (|a|^2 c_{n,n} - |b|^2 c_{n',n'})^2 + 4|ab|^2 |c_{n,n'}|^2$. Após algumas simplificações pode-se mostrar que

$$\sqrt{c_{n,n} c_{n',n'}} \geq |c_{n,n'}|, \quad (\text{B.14})$$

como queríamos demonstrar. Portanto, $|g(n, n')| \leq 1$.

Seja agora $\sigma \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha| \otimes |\beta\rangle \langle \beta|$, sendo que $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^N a_n |n\rangle$ e $|\beta\rangle = \sum_{n=0}^N b_n |N-n\rangle$ são vetores normalizados. Assim, voltando a Eq. (B.3), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}(0, \sigma) - 1 &= -\text{Tr} \left[\sum_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6} g(n_1, n_2) |n_1, N-n_1\rangle \langle n_2, N-n_2| \right. \\ &\quad \times \left. a_{n_3} \overline{a_{n_5}} b_{n_4} \overline{b_{n_6}} |n_3\rangle \langle n_5| \otimes |N-n_4\rangle \langle N-n_6| \right] \\ &= -\sum_{n_1, n_2} g(n_1, n_2) a_{n_2} b_{n_2} \overline{a_{n_1}} \overline{b_{n_1}}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Portanto, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\delta f}{\delta x}(0, \sigma) - 1 \right| &\leq \sum_{n_1, n_2} |g(n_1, n_2)| |a_{n_2}| |b_{n_2}| |\overline{a_{n_1}}| |\overline{b_{n_1}}| \\
&\leq \sum_{n_1, n_2} |a_{n_2}| |b_{n_2}| |\overline{a_{n_1}}| |\overline{b_{n_1}}| \\
&= \left(\sum_n |a_n| |b_n| \right)^2 \leq \sum_n |a_n|^2 |b_n|^2 = 1,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

chegamos a

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0, |\alpha, \beta\rangle \langle \alpha, \beta|) \geq 0. \tag{B.17}$$

Como todo estado não emaranhado pode ser escrito como $\sigma = \sum_i r_i |\alpha^i, \beta^i\rangle \langle \alpha^i, \beta^i|$, temos que

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0, \sigma) = \sum_i r_i \frac{\delta f}{\delta x}(0, |\alpha^i, \beta^i\rangle \langle \alpha^i, \beta^i|) \geq 0. \tag{B.18}$$

Assim, demonstramos que, de fato, o gradiente $\frac{d}{dx} \mathcal{S}(\rho \parallel (1-x)\sigma^* + x\sigma) \big|_{x=0}$ é não negativo, o que indica que σ^* é o estado separável que minimiza a entropia relativa. Para confirmar, resta apenas mostrar que $\mathcal{S}(\rho \parallel \sigma) \geq \mathcal{S}(\rho \parallel \sigma^*)$, $\forall \sigma \in \text{SEP}$. A prova será feita por contradição: suponha que $\mathcal{S}(\rho \parallel \sigma) < \mathcal{S}(\rho \parallel \sigma^*)$, para algum $\sigma \in \text{SEP}$, então, para $0 < x \leq 1$,

$$\begin{aligned}
f(x, \sigma) = \mathcal{S}(\rho \parallel (1-x)\sigma^* + x\sigma) &\leq (1-x)\mathcal{S}(\rho \parallel \sigma^*) + x\mathcal{S}(\rho \parallel \sigma) \\
&= (1-x)f(0, \sigma) + xf(1, \sigma),
\end{aligned} \tag{B.19}$$

assim,

$$\begin{aligned}
f(x, \sigma) &\leq f(0, \sigma) - xf(0, \sigma) + xf(1, \sigma) \\
f(x, \sigma) - f(0, \sigma) &\leq x(f(1, \sigma) - f(0, \sigma)) \\
\frac{f(x, \sigma) - f(0, \sigma)}{x} &\leq f(1, \sigma) - f(0, \sigma) < 0.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Isso contradiz o fato de que $\frac{\delta f}{\delta x}(0, \sigma) > 0$ no limite de $x \rightarrow 0$. Portanto, $\mathcal{S}(\rho \parallel \sigma) \geq \mathcal{S}(\rho \parallel \sigma^*)$ como queríamos demonstrar e $\sigma^* = \sum_{n=0}^k c_{n,n} |n, N-n\rangle \langle n, N-n|$ minimiza a entropia relativa.

Outra maneira de chegar a esse mesmo resultado é pelo teorema de Vedral -Plenio estendido (53). Antes de enunciá-lo, porém, vamos reescrever o estado dado na Eq. (B.1) de uma forma mais conveniente para o que queremos mostrar.

Lema 3. Para um estado misto do tipo $\rho = \sum_{n_1, n_2=0}^N c_{n_1, n_2} |n_1; N-n_1\rangle \langle n_2; N-n_2|$ existe um conjunto de estados puros $\{p_k, |\phi_k\rangle\}$ que compõe ρ , em que $|\phi_k\rangle = \sum_{n_1} \sqrt{c_{n_1, n_1}} e^{i\theta_{n_1}^k} |n_1, N-n_1\rangle$.

Demonstração: se ρ pode ser realizado pelo conjunto $\{p_k, |\phi_k\rangle\}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K p_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k| &= \sum_{n_1, n_2} \sqrt{c_{n_1, n_1} c_{n_2, n_2}} \sum_k p_k e^{i(\theta_{n_1}^k - \theta_{n_2}^k)} |n_1, N - n_1\rangle \langle n_2, N - n_2| \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^N c_{n_1, n_2} |n_1; N - n_1\rangle \langle n_2; N - n_2|. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Ou seja,

$$\sum_{k=0}^K p_k e^{i(\theta_{n_1}^k - \theta_{n_2}^k)} = \frac{c_{n_1, n_2}}{\sqrt{c_{n_1, n_1} c_{n_2, n_2}}}. \quad (\text{B.22})$$

Sendo $K > N$ (e, de fato, K pode ser tão grande quanto se queira), temos infinitas soluções para a equação acima, o que completa a demonstração. Passemos agora para o teorema.

Teorema 2. *Se ρ_i tem o mesmo $\sigma^* \in \text{SEP}$ que minimiza $\mathcal{S}(\rho_i \parallel \sigma^*)$ para todos os ρ_i 's de $\rho = \sum_i p_i \rho_i$, então σ^* também minimiza ρ .*

Demonstração:

$$\mathcal{S}(\rho \parallel \sigma) = -\mathcal{S}(\rho) - \text{Tr}(\rho \log \sigma) = -\mathcal{S}(\rho) - \sum_i \text{Tr}(\rho_i \log \sigma), \quad (\text{B.23})$$

minimizando o último termo

$$-\text{Tr}(\rho_i \log \sigma^*) = \inf_{\sigma \in \text{SEP}} (-\text{Tr}(\rho_i \log \sigma)) \leq -\text{Tr}(\rho_i \log \sigma). \quad (\text{B.24})$$

Portanto, σ^* é ótimo para ρ . Como consequência desse teorema temos o seguinte corolário:

Corolário 1. *Para estados correlacionados de Schmidt $\rho = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2} |n_1, n_1\rangle \langle n_2, n_2|$ a Entropia Relativa de Emaranhamento é dado por $E_R(\rho) = \mathcal{S}(\rho \parallel \sigma^*)$, sendo $\sigma^* = \sum_{n_1} a_{n_1, n_1} |n_1, n_1\rangle \langle n_1, n_1|$.*

Nosso resultado pode entrar como um novo corolário:

Corolário 2. *Para estados do tipo $\rho = \sum_{n_1, n_2}^N c_{n_1, n_2} |n_1, N - n_1\rangle \langle n_2, N - n_2|$, a Entropia Relativa de Emaranhamento é dado por $E_R(\rho) = \mathcal{S}(\rho \parallel \sigma^*)$, sendo $\sigma^* = \sum_{n_1}^N c_{n_1, n_1} |n_1, N - n_1\rangle \langle n_1, N - n_1|$.*