UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

“Análise de Simetrias nos grupos do tipo D_m usando conceitos de sistemas dinâmicos”

Márcio Magini

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciências “Física Básica”.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos

ou

São Carlos – São Paulo
1999

24/03/9918:33-meus documentos/declar-defesa

IFSC — SERVIÇO DE BIBLIOTECA E
INFORMAÇÃO

Magini, Marcio

Análise de simetria nos grupos do tipo D_m usando
conceitos de sistemas dinâmicos – São Carlos, 1999
< 79 > p.

Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física de São
Carlos, 1999.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo M. Hornos

1. Teoria de Grupo. 2. Sistemas Dinâmicos. I. Título

IFSC**UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO****Instituto de Física de São Carlos**

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
CEP 13560-250 - São Carlos - SP
Brasil

E-mail: wladerez@ifsc.usp.br

Fone (016) 273-9333
Fax (016) 272-2218

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
MÁRCIO MAGINI APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 22 DE MARÇO DE 1999.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos/IFSC-USP

Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano/IFSC-USP

Prof. Dr. Antonio Lima Santos/UFSCar

Este trabalho teve o
apoio financeiro da Capes.

Índice

Lista de Figuras e Tabelas	3
Resumo	4
Abstract	5
Introdução	7
1 Grupos Finitos	
1.1 Definições das estruturas algébricas.	11
1.2 Tabela de multiplicação	14
1.3 Subgrupos e Operações	16
2 Sistemas Dinâmicos	
2.1 Introdução	22
2.2 Mapas diferenciáveis e difeomorfismos.	23
2.3 Dinâmica elementar de difeomorfismo.	27
2.4 Fluxo e equações diferenciais	29
2.5 Conjuntos invariantes	31
3 Mapas equivariantes e simetrias	
3.1 Mapas equivariantes	35
3.2 Demonstração da Irredutibilidade Absoluta.	38

3.3 Atratores e Mapas.39

3.4 Mapas com simetria. 40

4 Análise de simetrias em atratores

4.1 Grupo D_3 e suas simetrias. 43

4.2 Grupo D_6 e suas simetrias. 48

4.3 Exemplos de outros grupos de simetria.53

Conclusões55

Bibliografia57

Figuras em Anexo59

Lista de Figuras

Figura 1.1: Projeção estereográfica do grupo D_6 14

Figura 1.2: Subgrupo de simetria, exemplo 10.18

Figura 2.1: Carta local da variedade M 24

Figura 2.2: Difeomorfismo24

Figura 2.3: Difeomorfismo25

Figura 2.4: Cilindro26

Figura 2.5: Esfera26

Figura 2.6: Definição de ponto fixo28

Figura 2.7: Plano tangente.30

Figura 2.8: Ponto não-errante32

Figura 2.9: Exemplo 2.5.234

Figura 4.1: Atuação do subgrupo $\{e, \sigma\}$ 44

Figura 4.2: Atuação do subgrupo $\{e, \sigma f_1\}$ e $\{e, f_1 \sigma\}$ 45

Figura 4.3: Atuação do subgrupo $\{e, f_1, f_1^3\}$ 45

Tabelas

Tabela 1.1: Tabela de multiplicação do grupo D_315

Tabela 1.2: Tabela de multiplicação do grupo de permutação S_3 . . .16

Tabela 1.2: Tabela de multiplicação do grupo D_619

Resumo

O entendimento de quebra espontânea de simetria é um problema importante para o estudo de fenômenos na evolução de sistemas abertos, tanto em física quanto em química, como também na biologia. Aqui estudamos um método a mais para este tipo de análise, usando conceitos de sistemas dinâmicos com simetria. O sistema dinâmico escolhido é discreto, isto é, realizado por iteração de um difeomorfismo equivariante sob a ação de um grupo compacto, neste caso um grupo finito do tipo D_m . Especificamente, investigamos o comportamento de atratores caóticos sob a variação dos parâmetros.

Abstract

The understanding of spontaneous symmetry breaking is an important problem in the study of phenomena in the evolution of open systems, in physics and chemistry as well as in biology. Here we study another method for this kind of analysis, using concepts from dynamical systems with symmetry. The chosen dynamical system is discrete, that is, realized by iteration of an equivariant diffeomorphism under the action of a compact group, in this case one of the finite groups of type D_m . Specifically, we investigate the behavior of chaotic attractors under variation of the parameters.

Introdução

O conceito de simetria tem sido exaustivamente estudado desde os primórdios da ciência. Inicialmente o conceito está ligado às idéias de geometria, em um segundo momento ele foi usado para um melhor entendimento de mecânica clássica. Nas últimas décadas esta idéia mudou, o conceito de simetria e de quebra de simetria envolve, por exemplo, o estudo das energias de um átomo e seus estados degenerados, até o estudo de física de altas energias, particularmente a classificação das partículas elementares.

Os trabalhos mais recentes sobre estes conceitos de simetria geraram uma grande surpresa na comunidade científica, as idéias de degenerescência foram aplicadas a sistemas biológicos. Em 1993 Collins e Stewart¹ propuseram uma forma matemática de análise de quebra de simetria usando conceitos de sistemas dinâmicos. Nessa oportunidade foi feita uma relação entre o “modo de andar dos insetos de seis patas” com um conjunto de seis osciladores acoplados em um hexágono, onde as equações diferenciais dos osciladores são dadas por:

$$\begin{aligned} dx_p/dt &= -4x_p + y_p + (x_p^2 + y_p^2)(Px_p - Qy_p) - \lambda(4(x_{p-1} + x_{p+1}) - 2(y_{p-1} + y_{p+1})), \\ dy_p/dt &= -x_p - 4y_p + (x_p^2 + y_p^2)(Px_p + Qy_p) - \lambda(2(x_{p-1} + x_{p+1}) - 4(y_{p-1} + y_{p+1})), \quad (1) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ e λ são parâmetros: λ afeta a força de acoplamento e $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ representam a não-linearidade dos osciladores. Note que as equações em (1) possuem uma simetria bem definida, são invariantes perante a ação do grupo compacto D_6 , através da troca de índice. Usando este fato foi feita a análise de simetria através do estudo dos subgrupos e depois fazendo uma comparação com os modos de vibração desses osciladores, onde existe uma correspondência direta entre estes. Na mesma época Hornos e Hornos² fizeram um estudo das relações entre grupos contínuos de Lie e a degenerescência do código genético. Foram estudados vários grupos que admitem a representação de dimensão 64, chegando-se ao grupo Sp_6 como aquele que melhor descreve o código genético. Posteriormente Braggion³ refez de forma mais elaborada este estudo, estabelecendo regras dessas quebras de simetria e abrindo caminho para o estudo do código genético das mitocôndrias. Ainda nessa linha de pesquisa Barbosa⁴ estudou o diagrama de pesos que explicava como era a atuação do grupo Sp_6 em um espaço tridimensional. Estes trabalhos mostraram a importância de se entender como se dá a quebra espontânea de simetria na natureza, assim como o caráter multidisciplinar da noção de simetria. O problema do modelo algébrico é a ausência de um sistema dinâmico que se adapte à simetria simplética e permita previsões quantitativas.

A conjugação entre simetrias e sistemas dinâmicos tem sido objeto de várias investigações. Em 1988 Chossat and Golubitsky⁶ fizeram de forma mais clara o estudo da quebra de simetria em sistemas dinâmicos, usando mapas equivariantes. Estes mapas são dados por:

$$f(z, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda) z + \gamma (z^*)^{m-1}, \quad (2)$$

onde

1986 - 1987
CENTRO DE PESQUISA E
INFORMAÇÃO

$$u = z z^* \quad e \quad v = (z^m + (z^*)^m) / 2$$

m é um inteiro diferente de zero α , β e γ são constantes e λ é o parâmetro que, quando variado reproduz a simetria total do grupo assim como, a simetria dos seus subgrupos. Este mapa é equivariante sob a ação do grupo D_m . Os geradores destes grupos são,

$$e = \text{identidade}, \quad f_1 = e^{2\pi i/m} z \quad e \quad \sigma = z^*. \quad (3)$$

A quebra de simetria nestes mapas acontece de forma espontânea somente com a variação do parâmetro λ . Conforme se dá o incremento deste parâmetro, obtém-se invariância em relação a um subgrupo, assim como a simetria total do grupo estudado. O estudo dessas simetrias é feito graficamente através das figuras dos atratores geradas pela iteração do mapa. É possível fazer esta análise usando soluções de equações diferenciais, como foi feito por Kroon and Stewart⁶ em 1994, onde também usaram o conceito de fluxo para determinar os subgrupos existentes em uma dada equação diferencial. Desta maneira eles produziram através da iteração destes fluxos, ou seja, das soluções das equações diferenciais, os atratores seguidos da análise de simetria.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 1, apresentamos alguns conceitos da teoria dos grupos dando ênfase a grupos finitos, que são nosso objeto de estudo. No capítulo 2, escrevemos sobre sistemas dinâmicos, conceitos básicos e os mais importantes para um melhor entendimento da dissertação, assim como o conceito de conjuntos invariantes encontrado nas referências citadas no final desta dissertação. No capítulo 3, explicamos o conceito de mapas equivariantes que é o passo básico de nossa pesquisa, assim como alguns conceitos de caos, envolvendo a idéia de atratores e mapas e sua relação com simetria. No capítulo 4, é feita a análise final de simetrias e como se dão as quebras, assim como surgimento dos subgrupos invariantes através da variação do

parâmetro λ , para os grupos do tipo D_m mais especificamente os grupos D_3 e D_6 . Por fim temos os gráficos que mostram as simetrias totais e os subgrupos existentes em cada uma destas.

Capítulo 1

Grupos Finitos.

Neste capítulo discutiremos alguns conceitos de grupos finitos que serão de importância para um melhor entendimento do trabalho de forma exemplificada e clara.

1.1 Definições das estruturas algébricas

Um conjunto G de elementos típicos a, b, c , etc... constitui-se em um grupo se neste está definida uma multiplicação com as propriedades abaixo listadas.

Definição 1.1.1 Fechamento: se a e b são elementos do grupo, então ab também é elemento do grupo.

Definição 1.1.2 Semi-grupo: a multiplicação é associativa, ou seja, $a.(b.c)=(a.b).c$. Isto define uma estrutura de semi-grupo em G .

Exemplo 1.1.1 *O conjunto P dos números pares é um semi-grupo com relação às operações de multiplicação e de adição.*

Definição 1.1.3 Monóide: a estrutura mónioide é definida em G se o conjunto ou grupo contém um elemento e , chamado de identidade, tal que $a.e = e.a = a$.

Exemplo 1.1.2 *O conjunto dos números reais forma um monóide com relação à operação de adição com o zero como elemento neutro e com relação à operação de multiplicação com a unidade como elemento identidade.*

Definição 1.1.4 Grupo: a estrutura de Grupo é definida em G se, e somente se existir uma “multiplicação” e esta definir em G uma estrutura monóide para qualquer que seja a existir um b tal que $ab = ba = e$, então b é chamado de inverso de a e é denotado por $b = a^{-1}$.

Exemplo 1.1.3 *O conjunto dos números reais forma um grupo em relação à adição (o inverso de x sendo $-x$) e esse mesmo conjunto sem o elemento zero forma um grupo com relação à multiplicação (o inverso de x sendo $1/x$).*

Definição 1.1.5 Grupo Abelian: dois elementos distintos de um conjunto comutam quando $ab = ba$. Se todos os elementos do grupo comutam entre si, este grupo é dito *abeliano* ou comutativo.

Definição 1.1.6 Geradores de um grupo são os elementos que a partir deles pode-se gerar todos os outros elementos do grupo. Em outras palavras, todos os elementos de um grupo podem ser representados como uma “multiplicação” de seus geradores.

O conhecimento dos geradores facilita muito a manipulação dos elementos do grupo, principalmente quando trabalhamos com alguma representação.

Definição 1.1.7 Grupo Finito: é um grupo que tem um número finito de elementos; estes serão os grupos de nosso interesse neste trabalho.

Exemplo 1.1.4 *O conjunto dos números complexos da forma $e^{2\pi im/n}$, polígonos regulares no plano complexo, com $m=0,1,...,n-1$ e $n \neq 0$ (inteiro) forma um grupo Abelian com relação à multiplicação (a identidade sendo dada por $m = 0$).*

Esse grupo será estudado em nosso trabalho. Os exemplos que veremos a seguir estudam e mostram como se comporta a estrutura deste grupo.

Definição 1.1.8 Ordem de um grupo: é o número total de seus elementos.

Exemplo 1.15 O grupo C_{3v} é o grupo de simetria existente num triângulo equilátero e é formado por seis elementos, ou seja, o grupo tem ordem 6.

Definição 1.1.9 Ordem de um elemento, a ordem n de um elemento é tal que dado um elemento a de ordem n , então $a^n = e$.

Definição 1.1.10 Anel, seja A um conjunto onde estão definidas duas operações: adição (+) e multiplicação ($\bullet$). A é um anel em relação a essas duas operações se, e somente se:

1. A for um grupo abeliano para a adição;
2. A for um semi-grupo para a multiplicação;
3. Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$

$$a+b = b+a$$

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

$$a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c,$$

$$(b+c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a,$$

isto é, se eles satisfazem a propriedade distributiva.

Definição 1.1.11 Um anel K com elemento unidade 1, diferente de zero, é um corpo se, e somente se :

$$\forall a \in K - \{0\}, \exists a' / a \cdot a' = a' \cdot a = 1,$$

isto é, se existir o elemento inverso.

A definição de corpo é necessária, pois devemos entender bem o que é um espaço e um sub-espaço vetorial .

Como um exemplo de grupo tomemos o D_6 , onde os geradores são e = identidade, $f_1 = e^{2\pi i/6}z$ e $\sigma = z^*$. Este grupo gera no plano complexo a seguinte figura, chamada de *projeção estereográfica* , onde o ponto inicial está em $z = 2 + 2i$:

Figura 1.1 - Projeção estereográfica do grupo D_6

Esta projeção mostra onde levam todas as operações de simetria existentes em um dado grupo. O grupo D_6 , assim como seus subgrupos, são objetos de estudo neste trabalho, sob o ponto de vista de “quebra dinâmica de simetria”.

Todos os grupos do tipo D_m consistem em todas as simetrias “*m-agonais*” no plano, e estas simetrias são geradas por $R_m = e^{2\pi i/m}z$ e $k(z) = z^*$, que é uma reflexão.

1.2 Tabela de Multiplicação

A partir da tabela de multiplicação de um grupo pode-se determinar todos os subgrupos e todas as operações de simetria que envolvem os elementos do grupo. A seguir temos o exemplo de uma tabela de multiplicação, assim como um exemplo geral de geradores e como eles formam o grupo.

Tomaremos como exemplo o grupo D_3 , que é de nosso interesse estudá-lo. Os geradores do D_3 são os seguintes: e = identidade, $f_1 = e^{2\pi i/3} z$ e $\sigma = z^*$, onde z é um número complexo; o restante dos elementos são: $f_1^2 = e^{4\pi i/3} z$, $\sigma f_1 = e^{-2\pi i/3} z^*$, $f_1 \sigma = e^{2\pi i/3} z^*$. Assim sendo, a tabela de multiplicação deste grupo fica :

	e	f_1	f_1^2	σ	σf_1	$f_1 \sigma$
E	e	f_1	f_1^2	σ	σf_1	$f_1 \sigma$
f_1	f_1	f_1^2	e	$f_1 \sigma$	σ	σf_1
f_1^2	f_1^2	e	f_1	σf_1	$f_1 \sigma$	σ
σ	σ	σf_1	$f_1 \sigma$	e	f_1	f_1^2
σf_1	σf_1	$f_1 \sigma$	σ	f_1^2	e	f_1
$f_1 \sigma$	$f_1 \sigma$	σ	σf_1	f_1	f_1^2	e

Tabela 1.1 : Tabela de multiplicação do grupo D_3

Através desta tabela fica fácil determinar os subgrupos existentes em cada grupo. Esta tabela pode ter seu grupo de permutação isomorfo, que no futuro será de nosso interesse entendê-lo, como no caso do S_{p_6} . A tabela de multiplicação do grupo S_3 , que é isomorfo ao D_3 , e possui os seguintes elementos $\{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, tendo em vista estes elementos podemos então construir uma tabela do D_3 , na representação de

um grupo de permutação, onde a correspondência dos elementos é a seguinte, $e =$ dentidade , $f_1 = (123)$ e $\sigma = (12)$; $f_1^2 = (132)$, $\sigma f_1 = (23)$, $f_1 \sigma = (13)$. Logo a tabela fica;

	<u>e</u>	<u>(123)</u>	<u>(132)</u>	<u>(12)</u>	<u>(23)</u>	<u>(13)</u>
<u>e</u>	e	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
<u>(123)</u>	(123)	(132)	e	(13)	(12)	(23)
<u>(132)</u>	(132)	e	(123)	(23)	(13)	(12)
<u>(12)</u>	(12)	(23)	(13)	e	(123)	(132)
<u>(23)</u>	(23)	(13)	(12)	(132)	e	(123)
<u>(13)</u>	(13)	(12)	(23)	(123)	(132)	e

Tabela 1.2 – Tabela de multiplicação do S_3

Este grupo é isomorfo ao grupo D_3 .

1.3 Subgrupos e Operações

Dada a tabela de “multiplicação” de um grupo, devemos procurar nela os subconjuntos de elementos que obedecem as regras de multiplicação que foram mostradas anteriormente.

Definição 1.3.1 Um subgrupo G_s de um grupo G é um subconjunto dos elementos de G tal que também é, por si próprio, um grupo em relação às mesmas regras usadas para definir G . Escrevemos $G \supset G_s$, como um relação de quebra de simetria. Em geral podemos ter uma cadeia formada por subgrupos:

$$G \supset G_s \supset G_s' \dots$$

Pode – se mostrar que a ordem de um subgrupo é um divisor da ordem do grupo, e é dada da mesma maneira que no grupo, pelo seu número de elementos.

Exemplo 1.3.1 No caso do D_3 temos os seguintes subgrupos:

I – Subgrupos do tipo $Z_2 \rightarrow \{e, \sigma\}, \{e, \sigma f_1\}, \{e, f_1 \sigma\}$, pois qualquer multiplicação entre os elementos de cada um desses grupos tem como resultado o mesmo elemento ou a identidade

II – Subgrupo do tipo $C_3 \rightarrow \{e, f_1, f_1^2\}$

Outra definição importante, é a de subgrupo isotrópico, que veremos a seguir.

Definição 1.3.2 Seja Γ um grupo que atua no $\mathbf{R}^n$, como mostrado na projeção estereográfica. Denominamos de subgrupo isotrópico Σ_x de Γ em um ponto qualquer x , como o subgrupo que satisfaz a seguinte sentença:

$$\Sigma_x = \{ \gamma \in \Gamma / \gamma x = x \}. \quad (1.1)$$

Exemplo 1.3.2 Consideremos a ação do grupo D_3 atuando em C como visto anteriormente. Seja z_r um elemento da reta real, como o elemento σ leva o ponto no plano complexo em seu complexo conjugado, então temos $\sigma z_r = \bar{z}_r$; segue-se que o subgrupo isotrópico de z_r é dado por $\Sigma_{z_r} = \{e, \sigma\}$

Exemplo 1.3.3 Seja $z_0 = re^{i\pi/3}$ o elemento do plano complexo. Consideremos a ação de $f_1 \sigma \in D_3$. Então temos,

$$f_1 \sigma (re^{i\pi/3}) = f_1(re^{-i\pi/3}) = re^{2\pi i/3} e^{-i\pi/3} = re^{i\pi/3}.$$

Logo z_0 tem o subgrupo $\{e, f_1 \sigma\}$ como subgrupo isotrópico.

Definição 1.3.3 As idéias acima se generalizam para o caso em que nós temos um subconjunto A do $\mathbf{R}^n$,

$$\Sigma_A = \{ \gamma \in \Gamma / \gamma A = A \}. \quad (1.2)$$

Esse subgrupo é denominado grupo de simetrias de A . Note ainda que se A consiste em um ponto, Σ_A é justamente o subgrupo isotrópico daquele ponto.

Exemplo 1.3.4 Dado o subconjunto $A = \{z \in \mathbb{C} / z = re^{i\pi/3}\}$, o seu subgrupo de simetria é dado por, $\Sigma_A = \{e, f_1\sigma\}$.

Exemplo 1.3.5 Dado o subconjunto $A = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) = 0\}$, neste caso o subgrupo de simetria é dado por $\Sigma_A = \{e, \sigma\}$.

No gráfico abaixo mostramos o exemplo 1.3.5.

Figura 1.2 – Subgrupos de simetria, exemplo 10

Definição 1.3.4 Dado um subgrupo Σ de Γ atuando em $\mathbb{C}$ (ou em um espaço vetorial qualquer), denominamos de subespaço dos pontos fixos de Σ e denotamos $\text{Fix}(\Sigma)$ ao conjunto

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{z \in \mathbb{C} : \sigma z = z, \forall \sigma \in \Sigma\}. \quad (1.3)$$

Exemplo 1.3.6 Dado $\Sigma = \{e, \sigma\}$, então o subespaço dos pontos fixos de Σ são dados por;

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$$

Exemplo 1.3.7 A reta na figura 1.2, do subgrupo de simetria $\{e, f_1\sigma\}$, é um subespaço de pontos fixos.

A definição (1.3.4) associa a cada subconjunto do plano complexo um subgrupo de simetria, enquanto que na definição (1.3.5) associa a cada subgrupo um subconjunto

do plano complexo. Tendo em vista estas duas definições fica mais fácil de compreender o que é a simetria de um subconjunto.

Definição 1.3.5 Subgrupo Σ de Γ é dito invariante se:

$$a\Sigma a^{-1} = \Sigma \quad \forall a \in \Gamma, \quad (1.4)$$

isto é,

$$a\Sigma_i a^{-1} \in \Sigma \quad \forall a \in \Gamma \quad \forall \Sigma_i \in \Gamma.$$

Exemplo 13 Dada a tabela de multiplicação do grupo D_6 abaixo,

	e	f_1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	σ	σf_1	σf_1^2	σf_1^3	$f_1\sigma$	$f_1^2\sigma$
e	e	f_1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	σ	σf_1	σf_1^2	σf_1^3	$f_1\sigma$	$f_1^2\sigma$
f_1	f_1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	e	$f_1\sigma$	σ	σf_1	σf_1^2	$f_1^2\sigma$	σf_1^3
f_1^2	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	e	f_1	$f_1^2\sigma$	$f_1\sigma$	σ	σf_1	σf_1^3	σf_1^2
f_1^3	f_1^3	f_1^4	f_1^5	e	f_1	f_1^2	σf_1^3	$f_1^2\sigma$	$f_1\sigma$	σ	σf_1^2	σf_1
f_1^4	f_1^4	f_1^5	e	f_1	f_1^2	f_1^3	σf_1^2	σf_1^3	σf_1	$f_1\sigma$	$f_1^2\sigma$	σ
f_1^5	f_1^5	e	f_1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	σf_1	σf_1^2	σf_1^3	$f_1^2\sigma$	σ	$f_1\sigma$
σ	σ	σf_1	σf_1^2	σf_1^3	$f_1\sigma$	$f_1^2\sigma$	e	f_1	f_1^2	f_1^3	f_1^5	f_1^4
σf_1	σf_1	σf_1^2	σf_1^3	$f_1^2\sigma$	$f_1\sigma$	σ	f_1^5	e	f_1	f_1^2	f_1^4	f_1^3
σf_1^2	σf_1^2	σf_1^3	$f_1^2\sigma$	$f_1\sigma$	σ	σf_1	f_1^4	f_1^5	e	f_1	f_1^3	f_1^2
σf_1^3	σf_1^3	$f_1^2\sigma$	$f_1\sigma$	σ	σf_1	σf_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	e	f_1^2	f_1
$f_1\sigma$	$f_1\sigma$	σ	σf_1	σf_1^2	σf_1^3	$f_1^2\sigma$	f_1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	e	f_1^5
$f_1^2\sigma$	$f_1^2\sigma$	$f_1\sigma$	σ	σf_1	σf_1^2	σf_1^3	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	f_1	e

Tabela 1.2 – Tabela de multiplicação do Grupo D_6

então temos o subgrupo $\{e, f_1^3\}$ como subgrupo invariante, segundo a tabela.

Um fato importante é que todo subgrupo de um grupo abeliano é um subgrupo invariante. Usando esta definição podemos classificar os grupos em:

- Grupo simples é aquele que não contém subgrupos invariantes;
- Grupo semi – simples é aquele que não contém subgrupos invariantes abelianos.

Definição 1.3.6 Sejam Γ e Γ' dois grupos e que exista um aplicação inversível entre eles.

Esta aplicação é denominada isomorfismo.

Definição 1.3.7 Uma aplicação $\alpha: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ onde existe a seguinte propriedade:

$$\alpha(a) = a' \text{ e } \alpha(b) = b'$$

$$ab = c \text{ e } a'b' = c'$$

e isso implicar que

$$\alpha(c) = c'$$

esta aplicação preserva a multiplicação e estes grupos são ditos homomorfos.

Exemplo 1.3.9 $C_{3v} \rightarrow S_2$:

$$\{e, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = C_{3v}$$

considere $Z_2 = \{e, \sigma\}$, e dada uma aplicação α que tem a seguinte propriedade:

$$\alpha(e) = e ; \alpha(C_3) = e ; \alpha(C_3^2) = e,$$

$$\alpha(\sigma_1) = \sigma ; \alpha(\sigma_2) = \sigma ; \alpha(\sigma_3) = \sigma,$$

$$\alpha(C_3 \cdot \sigma_1) = \alpha(C_3) \alpha(\sigma_1) = e \sigma = \sigma,$$

então temos

$$C_3 \cdot \sigma_1 = \sigma_2 \text{ e } \alpha(\sigma_2) = \sigma.$$

Definição 1.3.8 Um elemento b de um grupo G é dito ser conjugado a um outro a de G se pudermos encontrar um elemento u de G , tal que, $b = u a u^{-1}$; esta operação é denominada de conjugação.

Definição 1.3.9 Produto direto: sejam dois grupos arbitrários G e G' . Formemos um conjunto contendo todos os pares (a, a') , $a \in G$, $a' \in G'$, nessa ordem, o qual denotaremos por $G \times G'$. Esse conjunto, munido de uma regra de multiplicação entre os seus elementos (pares), dada por

$$(a, a') \cdot (b, b') = (a \cdot b, a' \cdot b'). \quad (1.5)$$

forma um grupo. Dizemos que ele é produto direto entre G e G' .

Duas outras definições importantes são a de espaço e sub-espaço vetorial.

Definição 1.3.10 Espaço vetorial: V é um espaço vetorial sobre o corpo comutativo K se, e somente se:

1. V for um grupo abeliano para a operação de adição entre os seus elementos (“vetores”)

2. Existir uma operação de $K \bullet V$ em V , tal que:

$$(a) \quad \forall a, b \in K, \forall v \in V \rightarrow (a+b) \bullet v = a \bullet v + b \bullet v ;$$

$$(b) \quad \forall a \in K, \forall v, w \in V \rightarrow a \bullet (v+w) = a \bullet v + a \bullet w ;$$

$$(c) \quad \forall a, b \in K, \forall v \in V \rightarrow (a \bullet b) \bullet v = a \bullet (b \bullet v) ;$$

$$(d) \quad \forall v \in V \rightarrow 1 \bullet v = v, 1 \in K$$

Definição 1.3.11 Sub-espaço: seja V um espaço vetorial sobre o corpo K . Um sub-espaço vetorial de V é um subconjunto W de V que é um espaço vetorial sobre K com a mesma operação definida em V .

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos

Nosso interesse aqui é mostrar conceitos de sistemas dinâmicos relacionados com teoria de grupos e com quebra de simetria.

2.1 Introdução

Entendemos por sistema dinâmico todo sistema que varia no tempo. Existem dois tipos de sistemas dinâmicos, os que a variável tempo muda de forma discreta, ou seja, $t \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, e os que a variável tempo muda de forma contínua, ou seja, t é real.

Um sistema dinâmico discreto pode ser representado como uma função de iteração do tipo:

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (2.1)$$

Quando t é contínuo, o sistema dinâmico é descrito por uma equação diferencial:

$$dx/dt = X(x). \quad (2.2)$$

Em (2.1) e (2.2), x representa a variável de estado do sistema e nos dá o valor do *estado* ou *espaço de fase*. Algumas vezes o espaço de fase é Euclidiano ou um subconjunto

deste, mas este pode ser não euclidiano como um círculo ou uma esfera, ou alguma outra *variedade diferenciável*.

2.2 Mapas Diferenciáveis e Difeomorfismos

A função f na equação (2.1) está sujeita a certas restrições relacionadas com a inversibilidade e diferenciabilidade. O domínio dessas funções pode ser um espaço não euclidiano, como já mencionado anteriormente. Devido a este fato se faz necessário definirmos o que é uma *variedade diferenciável*.

Uma aplicação diferenciável definida num conjunto aberto com imagens no $\mathbf{R}^n$ é facilmente descrita por uma família de funções

$$y_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

que levam um ponto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ do $\mathbf{R}^n$ no ponto $(y_1 \dots y_m)$ do $\mathbf{R}^m$, impondo-se que y_i seja diferenciável em relação a todas as variáveis $x_1, \dots, x_n$ e que existam também as derivadas de ordem superior (uma ordem r qualquer), obtem-se então uma aplicação diferenciável de classe C^r .

O difeomorfismo entre abertos do $\mathbf{R}^n$ tem ainda o requisito de inversibilidade e diferenciabilidade da função inversa.

No caso em que os conjuntos não são euclidianos, isto é, são apenas espaços topológicos, onde a única noção existente é a de “conjunto aberto”, precisamos de uma estrutura extra para podermos estabelecer a idéia de diferenciabilidade.

Dizemos então que M é uma variedade diferenciável de dimensão n se para qualquer ponto p de M existir uma vizinhança M_p aberta que possa ser associada a uma vizinhança U_p do $\mathbb{R}^n$ conforme o diagrama abaixo,

Figura 2.1 – Carta local da variedade M

A aplicação Φ que leva o contorno de p em um aberto do $\mathbb{R}^n$ é denominada carta local da variedade ou um sistema local de coordenadas, a exigência da inversibilidade de Φ se faz necessária. Temos que levar em conta a possibilidade de termos dois conjuntos abertos M_p e M_p' correspondentes a dois sistemas de coordenadas Φ e Φ' como mostrado abaixo,

Figura 2.2 - Difeomorfismo

Nessa situação a aplicação $\Phi^{-1} \bullet \Phi'$ efetua uma mudança de coordenadas e vamos exigir que esta (sendo uma aplicação do aberto do $\mathbf{R}^n$) mudança seja um difeomorfismo de

Figura 2.3 - Difeomorfismo

classe C^r e dizemos que a estrutura diferenciável da variedade é de classe C^r . Um conjunto de abertos que recobre inteiramente a variedade é denominado *atlas*. Consideremos duas variedades, M e M' de mesma dimensão e mesma classe, seja $\Psi: M \rightarrow M'$ uma aplicação. Dizemos que Ψ é um difeomorfismo de classe C^p se a aplicação Π que é dada pela seguinte composição $\Pi = \Phi' \bullet \Psi \bullet \Phi^{-1}$, que é uma aplicação de abertos do $\mathbf{R}^n$, for um difeomorfismo de classe C^p . Note que é necessária a inversibilidade também. O conceito de difeomorfismo tem grande importância pois os mapas que são gerados obedecem a estes princípios mostrados anteriormente, os mapas com que trabalharemos são do tipo (2.1), e são difeomorfismos.

Em (2.3) podemos aplicar o conceito de derivada. Esta definição é um difeomorfismo se a matriz das derivadas parciais,

$$D\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = ([\partial g_i / \partial x_j]_{i,j=1}^n)^n \quad (2.4)$$

é não singular em cada $x \in M$. Por exemplo, $\Psi(x, y) = (\exp(y), \exp(x))^T$ no $M = \mathbf{R}^2$ e $M' = \{(x, y) \mid x, y > 0\}$ é um difeomorfismo pois $\text{Det}(D\Psi(x, y)) = -\exp(x+y) \neq 0$ p/ cada $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Agora vemos alguns exemplos de variedade diferenciáveis:

Figura 2.4 - Cilindro

Figura 2.5 - Esfera

As coordenadas podem ser quaisquer desde que não se tenha equivalência de pontos, ou seja, todo par de coordenadas (θ, ϕ) na esfera deve ter um e somente um ponto equivalente no plano (θ, ϕ) .

2.3 Dinâmica elementar de difeomorfismo

Considerando M como sendo uma variedade diferenciável e supondo que $f: M \rightarrow M$ seja um difeomorfismo. Para cada $x \in M$, a iteração (2.1) gera uma sequência de pontos, esta sequência nós chamamos de órbita ou trajetória de x , denotando f^m como a composição de f com ela mesmo m vezes podemos escrever a órbita de x como sendo dada por $\{f^m(x) \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, f^m é a composição de f com ele mesmo m vezes, desde que f é um difeomorfismo e f^{-1} existe, e $f^{-m} = (f^{-1})^m$. Finalmente, podemos definir uma identidade de M , $f^0 = \text{id}_M$. A seguir apresentaremos algumas definições importantes, que além de servirem para melhor compreensão de sistemas dinâmicos, farão ligação direta com o fenômeno da quebra de simetria em grupos finitos.

Definição 2.3.1 Um ponto $x^* \in M$ é chamado *ponto fixo* de f , se $f^m(x^*) = x^*$ para todo $m \in \mathbb{Z}$

Definição 2.3.2 Um ponto $x^* \in M$ é um *ponto periódico* de f , se $f^q(x^*) = x^*$, para algum inteiro $q \geq 1$.

Note que as duas definições podem ser confundidas, esquematicamente falando. O que ocorre em (2.3.1) pode ser representado da seguinte maneira :

$$\{x^*, f^1(x^*), f^2(x^*), \dots, f^m(x^*)\} = \{x^*, x^*, x^*, \dots, x^*\} \quad (2.5)$$

Já em (2.3.2), o que ocorre é o seguinte :

$$\{x^*, f^1(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{q-1}(x^*), f^q(x^*)\} = \{x^*, f^1(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{q-1}(x^*), x^*\} \quad (2.6)$$

A respeito dessa segunda definição, dizemos que q é o *período da órbita* do ponto x^* .

Note ainda que um ponto fixo é um ponto periódico de período igual a um, e um ponto periódico de f com período q é um ponto fixo de f^q . Além do mais, se x^* é um ponto

periódico de período q para f , então todos os outros pontos da órbita de x^* também são pontos periódicos. Para entender melhor, dado $f^q(x^*) = x^*$ então $f(f^q(x^*)) = f(x^*) = f^q(f(x^*))$ e $f(x^*)$ também é um ponto periódico de período q e assim sucessivamente $f^2(x^*)$, . . . $f^{q-1}(x^*)$.

Definição 2.3.3 Um ponto fixo, x^* , é dito ser *estável* se, para cada vizinhança N de x^* , existe um vizinhança $N' \subseteq N$ de x^* tal que se $x \in N'$ então $f^m(x) \in N$ para todo $m > 0$. Em outras palavras, se o ponto fixo tem uma vizinhança e quando iterado não sai dessa vizinhança de x^* , este é dito ser estável, esquematicamente falando temos :

Figura 2.6 – Definição de ponto fixo estável

Ainda, se um ponto x^* é estável e $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = x^*$, quando $m \rightarrow \infty$, para todo x em alguma vizinhança de x^* , então o ponto é dito ser *assintoticamente estável*. Este conceito é de fundamental importância, pois para entendermos a maneira com que é feita as figuras dos atratores e posteriormente entender a simetria neles existente, precisamos saber de onde começar a iteração. Neste caso o conceito de estabilidade se faz necessário.

Os pontos fixos que não são assintoticamente estáveis são chamados de pontos neutramente estáveis. Quando são contrários ao senso da definição (2.3.3), são ditos não estáveis.

2.4 Fluxo e equações diferenciais

O problema de iteração (2.1) para o difeomorfismo $f: M \rightarrow M$ dado um $x_0 \in M$ é equivalente ao estudo do conjunto de funções $\{f^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, pois conceitos como órbita envolvem iteração destas funções. Este conjunto tem a seguinte propriedade:

$$f^0 = \text{id}_M. \quad (2.7)$$

Nesta seção nós consideraremos as ações de funções em uma variedade M , tal que estas ações são chamadas de *fluxos* no M . Estas ações podem ser campos vetoriais ou até mesmo simples transformações de coordenadas. A importância deste conceito vem das equações diferenciais, pois toda solução de uma equação diferencial é um fluxo, mas nem todo fluxo é solução de uma equação diferencial. Como exemplo temos o caso de um conjunto de seis osciladores acoplados em um hexágono, que tem como solução um fluxo de forma interessante (ref. [1]).

Definição 2.4.1 Um *fluxo* é uma função continuamente diferenciável $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, a restrição $\varphi(t, \bullet) = \varphi_t(\bullet)$ satisfaz,

$$(a) \quad \varphi_0 = \text{id}_M, \quad (2.8.a)$$

$$(b) \quad \varphi_t \bullet \varphi_s = \varphi_{t+s}. \quad (2.8.b)$$

Observe que (2.8.a e b) implica que $(\varphi_t)^{-1}$ existe e é dada por φ_{-t} . Desde que $\varphi \in C^1$, então $\varphi_t: M \rightarrow M$ é um difeomorfismo para cada $t \in \mathbb{R}$. Nós definimos que a *órbita* ou *trajetória* de φ através de x por ser $\{\varphi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ orientado no crescimento de t , e só

existe uma única trajetória φ passando através de cada ponto $x \in M$. Se $\varphi_t(x^*) = x^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então x^* é dito ser um *ponto fixo*.

Definição 2.4.2 Uma *órbita fechada* de um fluxo é uma trajetória, γ , a qual não é um ponto fixo mas é tal que $\varphi_\tau(x) = x$ para algum $x \in \gamma$ e $\tau \neq 0$.

Se $\varphi_\tau(x) = x$, a órbita retorna para x depois de um tempo τ . Se T é o último tempo positivo para que isto ocorra, x é um ponto periódico com período T . Nós definimos *vetor campo*, X , de um fluxo φ por

$$X(x) = (d\varphi_t/dt)(x)_{t=0} = \lim\{(\varphi(\varepsilon, x) - \varphi(0, x))/\varepsilon\}, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

Para cada $x \in M$, $\varphi_t(x)$ define uma curva no M passando através de x , onde o vetor $X(x)$ é direcionado ao longo da tangente desta curva, onde $X(x) \notin M$. Para cada $x \in M$, o conjunto, TM_x , de todos os vetores tangentes a M em x é chamado de *espaço tangente*.

Figura 2.7 – Plano tangente.

A reta tangente a está no conjunto TM_x e todas as outras retas tangentes no mesmo ponto também fazem parte deste conjunto.

As propriedades dos *fluxos* são as mesmas quando comparadas aos mapas, onde a principal diferença é o fato do *fluxo* ser uma solução de uma equação diferencial.

2.5 Conjuntos invariantes

Algumas vezes a órbita de um ponto sobre o difeomorfismo f permanece em uma região particular do espaço de fases para todo $m \in \mathbb{Z}$. Um conjunto $\Delta \subseteq M$ é dito ser *invariante* através do difeomorfismo f , se $f^m(x) \in \Delta$ para cada $x \in \Delta$ e todo $m \in \mathbb{Z}$, ou seja :

$$f^m(x) \in \Delta, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

Conjuntos invariantes são ditos *positivamente* (*negativamente*) *invariantes* se as órbitas de seus elementos permanecem entre eles para $m \in \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^-$). A órbita de qualquer ponto é um conjunto invariante, assim como os pontos fixos, ciclos e as órbitas fechadas são todos conjuntos invariantes.

Definição 2.5.1 Um ponto x é um ponto não-errante para o difeomorfismo f se para toda vizinhança W de x , vai existir algum $m > 0$ tal que $f^m(W) \cap W$ é não vazia.

O conjunto dos pontos não-errantes para f é chamado de conjunto não-errante e é denotado por $\Omega(f)$. Podemos ver que os pontos fixos e as órbitas periódicas encontram-se em Ω .

Exemplo 2.5.1 Consideremos o círculo S_1 e o mapa que associa a cada ponto z de S_1 o ponto $g(z)$, onde esta aplicação consiste em uma rotação de um ângulo θ , isto é,

$$g(z) = e^{i\theta}z.$$

Ou, através do gráfico no plano complexo, temos

Figura 2.8 – Ponto não-errante

Quando θ é da forma $\pi (n_1/n_2)$ com n_1 e n_2 inteiros, todos os pontos do círculo são periódicos. Quando a rotação é irracional o ponto não é mais periódico mas retorna a uma região arbitrariamente próxima do ponto inicial, tanto quanto se queira, depois de sucessivas transformações, desde que se escolha um conjunto onde este ponto está e este englobe o ponto inicial. Temos então um ponto não-errante.

Definição 2.5.2 Um ponto $y \in M$ é dito ser um ponto limite α da trajetória de f através de x se tem haver sequência $m_i \rightarrow -\infty$ tal que:

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} f^{m_i}(x) = y, \quad (2.11)$$

O conjunto de todos os pontos limites do tipo α de x é conhecido como conjunto dos pontos limites α de x e é denotado por $L_\alpha(x)$. Analogamente, quando $m_i \rightarrow \infty$ o ponto é dito do tipo ω . Estes conjuntos são invariantes sobre f .

Uma outra propriedade importante das funções f é a seguinte:

$$f^I \bullet f^J = f^{I+J} \quad (2.12)$$

Quando y satisfaz a definição (2.5.2) então:

$$z = f^m(y) = f^m(\lim_{i \rightarrow \infty} f^{m_i}(x)), \quad i \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Como a equação acima é uma composição de funções, ou seja, $f(g) = f \bullet g$, então podemos ainda escrevê-la da forma,

$$f^m(\text{Lim } f^{m_i}(x)) = \text{Lim } f^{m_i+m}(x) = z, i \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Quer dizer que z e y pertencem ao mesmo conjunto limite de x . Todas as definições anteriores servem para o conceito de *fluxo*. Tomemos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.5.2 Achar $L_\alpha(x)$ e $L_\omega(x)$ para (a) $x = 0$; (b) $x \neq 0$, quando φ é um fluxo no $\mathbb{R}^2$ induzido por,

$$dr/dt = r(r-1), \quad d\theta/dt = 1, \quad (2.15)$$

onde (r, θ) são coordenadas do plano polar.

Observação: como foi dito anteriormente este exemplo será construído através de um *fluxo*, onde as regras de limite se aplicam da mesma forma que nos mapas equivariantes.

Solução: φ tem uma única órbita fechada γ dada por $r(t) = 1$, com período $T = 2\pi$, e um ponto fixo instável na origem, como mostra a figura seguinte, onde o ponto $r(0) = 0.666$.

(a) $x = 0$,

$\varphi_t(0) = 0$ para todo t ; por isso

$$L_\alpha(x) = L_\omega(x) = \{0\} \quad (2.16)$$

(b) $x \neq 0$

temos um $y = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) \in \gamma$ e tomemos t_i por ser a sequência de $t > 0$. Como a órbita de x cruzando a linha radial vindo de 0 através de y . Então $\text{Lim } \varphi_{t_i}(x) = y$ ($i \rightarrow \infty$) e y é um ponto limite ω de x . Este argumento é válido para qualquer $y \in \gamma$ e qualquer $x \neq 0$.

Desta maneira, $L_\omega(x) = \gamma$ para qualquer $x \neq 0$. Devido a este fato pode-se perceber que

$$L_\alpha(x) = \{0\}, \quad |x| < 1,$$

$$L_\alpha(x) = \gamma, \quad |x| = 1.$$

Figura 2.9 – Exemplo 2.5.2.

Com estes conceitos agora podemos entender o que são mapas equivariantes, onde posteriormente faremos a relação com a quebra de simetria, assim como interpretar de forma correta os resultados.

Capítulo 3

Mapas equivariantes e simetrias

Este capítulo vem mostrar o que são mapas equivariantes e como estes são importantes na formação das figuras dos atratores, que é o objeto de nosso estudo para entender melhor como ocorre a quebra de simetria em um dado grupo finito.

3.1 Mapas equivariantes

As definições a seguir estão relacionadas com o conceito de mapa estudado no capítulo anterior, logicamente estes mapas obedecem a todas as definições citadas anteriormente.

Definição 3.1.1 Mapa equivariante – um mapa $f : V \rightarrow V$ é dito ser equivariante em relação a um grupo Γ atuando em V se,

$$f(\gamma v) = \gamma f(v), \forall \gamma \in \Gamma \quad (3.1)$$

Em outras palavras, dizemos que o mapa comuta com a ação de um elemento do grupo. Como um exemplo de um mapa equivariante, tomemos os mapas do grupo D_m atuando no $\mathbf{R}^2 \approx \mathbf{C}$, que tem como geradores $R_m(z) = e^{2\pi i/m} z$ e $\sigma(z) = z^*$. Este mapa é dado por:

$$f(z, \lambda) = p(u, v, \lambda) z + q(u, v, \lambda) (z^*)^{m-1}, \quad (3.2)$$

onde :

$$u = z z^* \quad e \quad v = (z^m + (z^*)^m) / 2. \quad (3.3)$$

Esta é a forma do mapa que proporciona uma determinação do valor do parâmetro mais precisa. Para exemplificar a definição anterior vamos usar o mapa (3.2) em uma forma mais específica. Esta forma foi a forma usada para analisar a simetria dos atratores gerados por estes mapas neste presente trabalho.

Exemplo 3.1.1 Consideremos o mapa (3.2) onde, para mostrarmos que sua equivariância:

Proposição 1 No mapa (3.2) u e v são invariantes perante a ação de σ ,

$$1a) \quad \sigma(u) = u, \text{ pois } u = z z^* \text{ logo } \sigma(z z^*) = z^* z = z z^*$$

$$1b) \quad \sigma(v) = v, \text{ pois } v = (z^m + (z^*)^m) / 2 \text{ logo } \sigma((z^m + (z^*)^m) / 2) = ((z^*)^m + z^m) / 2 = v,$$

$$\text{note que } \sigma \text{ atua de maneira diferente em } v, (\sigma(z)^m + (\sigma(z^*)^m) / 2 = v$$

ainda mais, o mapa (3.2) é equivariante perante a ação de σ , como se segue:

$$\sigma f(z, \lambda) = f(\sigma(z), \lambda). \quad (3.4)$$

Como p e q são funções que só dependem de u , v e um parâmetro real λ , então estas funções são invariantes perante a ação de σ . A equação (3.4) com a ação fica,

$$\sigma(p(u, v, \lambda) z + q(u, v, \lambda) (z^*)^{m-1}) = p(u, v, \lambda) \sigma(z) + q(u, v, \lambda) (\sigma(z^*))^{m-1},$$

$$p(u, v, \lambda) z^* + q(u, v, \lambda) \sigma((z^*)^m) \sigma(z^{*(-1)}) = p(u, v, \lambda) z^* + q(u, v, \lambda) (z)^{m-1},$$

$$p(u, v, \lambda) z^* + q(u, v, \lambda) \sigma((z^*)^m) \sigma(z^{*(-1)}) = p(u, v, \lambda) z^* + q(u, v, \lambda) (z)^{m-1}.$$

É fácil ver que igualdade é satisfeita quando fazemos $z = re^{i\theta}$, pois $\sigma(re^{-i\theta})^m \sigma(re^{-i\theta})^{-1}$ é

$$\text{igual, } \sigma(re^{-i\theta})^m \sigma(re^{i\theta}) = re^{i\theta m} \cdot re^{-i\theta} = (re^{i\theta})^{m-1} = (z)^{m-1}.$$

Proposição 2 No mapa (3.2) u e v são invariantes perante a ação do gerador R_m como mostrado a seguir. Para isso faremos $z = e^{i\theta}$,

$$2a) \quad R_m(u) = u, \text{ com } u = zz^* \text{ pois } R_m(zz^*) = e^{2\pi i/m} e^{-2\pi i/m} zz^* = zz^*$$

$$2b) \quad R_m(v) = v, \text{ com } v = (z^m + (z^*)^m) / 2 \text{ pois } R_m(z^m + (z^*)^m) / 2 = ((e^{2\pi i/m} z)^m + (e^{-2\pi i/m} z^*)^m) / 2 = v$$

então p e q são invariantes perante a ação de R_m .

E o mapa (3.2) é equivariante perante a ação do gerador R_m como segue,

$$R_m f(z, \lambda) = f(R_m(z), \lambda), \quad (3.4)$$

$$e^{2\pi i/m} \cdot f(z, \lambda) = p(e^{2\pi i/m} z) \cdot e^{2\pi i/m} z + q(e^{2\pi i/m} z) [(e^{2\pi i/m} z)^*]^{m-1},$$

$$e^{2\pi i/m} \cdot [p(u, v, \lambda) z + q(u, v, \lambda) z^{m-1}] = p \cdot e^{2\pi i/m} z + q [(e^{2\pi i/m} z)^*]^{m-1},$$

$$e^{2\pi i/m} \cdot [p(u, v, \lambda) z + q(u, v, \lambda) z^{m-1}] = p \cdot e^{2\pi i/m} z + q \cdot e^{2\pi i/m} ((z^*)^m)^{m-1},$$

$$e^{2\pi i/m} \cdot [p(u, v, \lambda) z + q(u, v, \lambda) (z^*)^{m-1}] = e^{2\pi i/m} p(u, v, \lambda) z + e^{2\pi i/m} q(u, v, \lambda) (z^*)^{m-1}.$$

e a igualdade está satisfeita.

No nosso caso as funções p e q tem a forma:

$$p(u, v, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda).$$

$$q(u, v, \lambda) = \gamma, \quad \text{onde } \alpha, \beta \text{ e } \gamma \text{ são números quaisquer fixos e } \lambda \text{ é o parâmetro.}$$

Logo o mapa é dado por:

$$f(z, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda) z + \gamma (z^*)^{m-1} \quad (3.5)$$

Estas demonstrações são importantes para verificar que a figura do atrator gerada pela iteração do mapa possui todas as propriedades citadas anteriormente. O conceito de ponto fixo e de equivariância, assim como o conceito de conjunto dos pontos limites, fazem parte da construção do mapa e fazem com que este reproduza a simetria total do grupo.

3.2 Demonstração da Irredutibilidade Absoluta

Definição 3.2.1 Irredutibilidade absoluta: nós supomos que Γ atua absolutamente irredutível no $\mathbb{R}^n$, isto é, que somente mapas lineares no $\mathbb{R}^n$ que comutam com Γ são múltiplos escalares da identidade.

A seguir vamos exemplificar esta definição.

Exemplo 3.2.1 Tomemos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e D_m com os elementos $(e, \sigma, R_m = e^{2\pi i/m} z)$.

Sabemos que

$$\sigma F(z, \lambda) = F(\sigma(z, \lambda)), \quad (3.7)$$

$$R_m F(z, \lambda) = F(R_m(z, \lambda)),$$

ou seja, que F é equivariante. Agora temos que F atua da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \alpha x + \beta y = F_x, \\ y &\rightarrow \gamma x + \delta y = F_y. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O mapa deve obedecer (3.6), então

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &\rightarrow F(x, -y) \rightarrow (\alpha x + \beta y, -\gamma x - \delta y), \\ F(x, y) &\rightarrow \sigma(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \rightarrow (\alpha x - \beta y, \gamma x - \delta y), \end{aligned} \quad (3.9)$$

Essas duas operações devem levar ao mesmo resultado, condição de equivariância (3.1),

logo isso implica que $\beta = 0$ e $\gamma = 0$.

A atuação do mapa, após a determinação dessas duas constantes fica,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \alpha x = F_x, \\ y &\rightarrow \delta y = F_y, \end{aligned} \quad (3.10)$$

Fica faltando ainda determinar as duas outras constantes,

$$e^{2\pi i/m} z = (\cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m))(x + iy),$$

$$e^{2\pi i/m} z = (x \cos(2\pi/m) - y \sin(2\pi/m), x \sin(2\pi/m) + y \cos(2\pi/m)). \quad (3.8)$$

Logo a atuação $f_1 = e^{2\pi i/m} z$ fica:

$$f_1(x, y) \rightarrow F(x \cos(2\pi/m) - y \sin(2\pi/m), x \sin(2\pi/m) + y \cos(2\pi/m)) \rightarrow (\alpha x \cos(2\pi/m) - \alpha y \sin(2\pi/m), \delta x \sin(2\pi/m) + \delta y \cos(2\pi/m)),$$

$$F(x, y) \rightarrow f_1(\alpha x, \delta y) \rightarrow (\alpha x \cos(2\pi/m) - \delta y \sin(2\pi/m), \alpha x \sin(2\pi/m) + \delta y \cos(2\pi/m)).$$

Sabemos que $F(f_1(x, y)) = f_1 F(x, y)$, logo $\alpha = \delta$, o que nos dá como resultado:

$$x \rightarrow \alpha x = F_x,$$

$$y \rightarrow \alpha y = F_y. \quad (3.9)$$

Provamos que se um mapa atua linearmente e comuta com Γ , então este é um múltiplo escalar da identidade.

3.3 Atratores e mapas

Dado $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um mapa e A um conjunto invariante com respeito à atuação de f . Existem três propriedades de f e A quando estes tratam de um programa que itera f com a finalidade de obtenção de A :

$$\text{I) } f(A) = A$$

$$\text{II) } A \text{ tem uma órbita densa } T = \{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

III) A é um **atrator** se para todo $x \in A$, existir uma vizinhança aberta U de x tal que, $\omega(x) \subset A$, onde $\omega(x)$ denota o *conjunto ponto limite* ω de x .

O programa que temos em mente é como se segue: escolha um ponto inicial x e trace o gráfico das iterações de f até a imagem ficar estável na tela, o que significa que o

atrator foi gerado. Se a imagem do atrator puder ser reproduzida substituindo o ponto inicial por um ponto qualquer do primeiro atrator gerado pela primeira iteração, isso significa que a propriedade (I) é satisfeita. Quando são feitas as iterações aparecerão trajetórias fechadas, estas trajetórias são as órbitas, propriedade (II). Repetindo o mesmo para um diferente ponto inicial, o que determina uma forma assintótica para A , nós abstraímos a idéia que o conjunto A não depende da condição inicial x desde que x é próximo o suficiente para graficar A .

Proposição 3.3.1 Façamos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ser contínuo e seja $\rho(A)$ o atrator conjugado a A , isto é, o atrator obtido perante a atuação de um elemento ρ do grupo finito em A .

Assumimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ ser um subconjunto fechado e que f e A satisfazem I-III e que,

$$\text{IV) } A \cap \rho(A) \neq \emptyset \text{ então } \rho(A) = A$$

Esta proposição sugere que quando dois atratores conjugados, $\rho(A)$ e A colidem, para um determinado valor do parâmetro, eles podem dar origem a um único atrator com uma simetria contendo $\rho(A)$, portanto, não é surpresa que a colisão de dois atratores produza um atrator de grande simetria.

É possível perceber nos atratores que eles são composições com menor simetria, todo atrator neste trabalho pode ser construído a partir da identidade, ou seja, a partir da “colisão” entre atratores de menor simetria.

3.4 Mapas com simetria

A equação logística ímpar é um interessante exemplo de análise de simetria via atratores.

Exemplo 3.4.1 Equação Logística: tomemos o grupo Z_2 atuando no R onde este é dado por $Z_2 = \{1, \rho\}$, onde os elementos 1 e ρ , são respectivamente a identidade e uma operação de reflexão ($\rho x = -x$). Os mapas equivariantes Z_2 são justamente as funções ímpares. Vamos considerar, como um exemplo, a equação logística ímpar:

$$f(x, \lambda) = \lambda x^3 - x. \quad (3.10)$$

O mapa é equivariante, definição (3.1), $\rho(f(x, \lambda)) = f(\rho(x, \lambda))$, esta prova é trivial.

O nosso interesse é analisar a “dinâmica assintótica” com o incremento de λ . Em outras palavras, queremos analisar a quebra espontânea de simetria com a variação do parâmetro λ . Quando $\lambda < 1$, o ponto fixo $x = 0$ é estável, ou seja, dado um ponto próximo de zero este, depois de iterado, vai a zero. Em $\lambda = 1$ o ponto fixo perde a estabilidade e bifurca em dois pontos produzindo dois pontos conjugados fixos, não-nulos e estáveis. Estes pontos fixos, com o incremento de λ , caminham para duas “cascatas” periódicas resultando em um par de atratores conjugados A_+ e A_- , o atrator e a simetria Z_2 aparece na figura 3.1, em anexo, o valor de λ para que ocorra esta transição é $\lambda_c = 3\sqrt{3}/2$, ou seja, a “dupla casacata” se dá neste valor. Os atratores mostrados na figura são para x positivo (em azul) e x negativo (em verde). O gráfico é construído a partir da iteração em λ e em x do mapa (3.10).

As simetrias estudadas neste mapa anterior não são muito simples de se observar, graficamente falando. A simetria do tipo Z_2 gera na figura uma duplicação de pontos com o incremento de λ . Como o gráfico foi iterado aproximadamente 1000 vezes para cada valor de λ , temos que estes dois pontos consistem em dois pontos fixos. É válido salientar que o gráfico começa com um valor máximo de $\lambda = 2.8$, ou seja, o

incremento de simetria se dá com a diminuição do parâmetro. Nos outros casos a serem estudados neste presente trabalho, as simetrias acontecerão com o aumento do valor do parâmetro.

A parte mais interessante da análise desses mapas é como se dá esta quebra de simetria. Nos mapas estudados este fato ocorre apenas com a variação de um parâmetro.

As classes que veremos adiante possuem em geral a seguinte estrutura. Suponha que estamos mapeando um grupo finito. No início das iterações para um dado valor do parâmetro temos um *ponto fixo Γ -invariante* que perde a estabilidade com a variação do parâmetro, este ponto vai para novos pontos estáveis ou para órbitas de dois pontos periódicos.

Capítulo 4

Análise de simetria em atratores

Este é o capítulo mais importante desta dissertação; aqui nós exploraremos todos os conceitos citados anteriormente e veremos como ocorrem as quebras de simetrias nos atratores geradas pelos mapas dos grupos finitos do tipo D_m .

4.1 Grupo D_3 e suas simetrias

Vamos fazer a análise das simetrias contidas no grupo D_3 . Neste caso só faremos a análise com relação ao incremento λ . É possível fazer um estudo dos subgrupos através das operações de simetria deste sobre um atrator qualquer. Para a nossa análise tomemos o mapa (3.4) com $m = 3$. Então este fica da forma:

$$f(z, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda) z + \gamma (z^*)^2, \quad (4.1)$$

onde

$$u = z z^* \quad \text{e} \quad v = (z^3 + (z^*)^3) / 2.$$

Este mapa iterado nos dá a simetria e as sub-simetrias existentes no grupo finito D_3 .

Antes de fazermos esta análise é interessante estudar o grupo D_3 e seus subgrupos.

Os geradores do grupo são, e = identidade, σ = reflexão e $f_1 = e^{2\pi i/3}z$. Usando a tabela (1.1) podemos determinar os subgrupos.

Segundo a tabela (1.1) os subgrupos são os seguintes:

Subgrupos do tipo Z_2 :

$$\{ e, \sigma \}, \{ e, \sigma f_1 \} \text{ e } \{ e, f_1 \sigma \}.$$
(4.2)

Subgrupo do tipo C_3 :

$$\{ e, f_1, f_1^2 \}.$$
(4.3)

Nosso interesse é entender como cada subgrupo atua no plano complexo com o incremento de λ , pois os atratores são traçados no plano complexo. A seguir veremos como isso se dá, fazendo a análise gráfica de cada subgrupo e como este atua no plano complexo para um dado ponto inicial z conhecido.

SUBGRUPO $\rightarrow \{ e, \sigma \}$:

Figura 4.1 – Atuação do subgrupo $\{ e, \sigma \}$.

SUBGRUPO $\rightarrow \{ e, \sigma f_1 \}$ e $\{ e, f_1 \sigma \}$:

Figura 4.2 – Atuação do subgrupo $\{ e, \sigma f_1 \}$ e $\{ e, f_1 \sigma \}$.

SUBGRUPO $\rightarrow \{ e, f_1, f_1^2 \}$:

Figura 4.3 – Atuação do subgrupo $\{ e, f_1, f_1^3 \}$.

As simetrias aqui citadas são observadas mais facilmente com a atuação do elemento do grupo em um dos atratores geradores. Nossa atenção agora se volta para o incremento de simetria com a variação do parâmetro.

Agora faremos a análise dos atratores gerados pela iteração do mapa (4.1), lembrando que para cada simetria do tipo D_3 gerada, os subgrupos são obtidos somente a partir da variação do parâmetro λ . Como as figuras são grandes, estes se encontrarão em anexo `a dissertação; os respectivos comentários serão feitos adiante. Todos os gráficos são feitos com o mesmo número de iterações.

Os parâmetros do mapa (4.1) assumem os seguintes valores $\alpha = -1$, $\beta = 0.1$ e $\gamma = -0.8$, com o número de iterações constante e igual a 40000, e o ponto inicial $z = 0.3141 + 0.3141i$.

Também temos que saber como identificar como ocorrem as bifurcações ou ganhos de simetria. Nós dizemos que f sofre uma bifurcação do tipo incremento de simetria em $\lambda = \lambda_0$ se:

- (i) $\Sigma_\lambda = \Sigma_1$ para $\lambda < \lambda_0$
- (ii) $\Sigma_\lambda = \Sigma_2$ para $\lambda > \lambda_0$, e
- (iii) $\Sigma_2 \supset \Sigma_1$

Onde Σ_λ é o subgrupo de simetria do atrator, definição (1.3.4).

Os gráficos são traçados dois a dois para efeito de comparação, onde o último anterior é traçado no gráfico seguinte.

Iniciamos a variação do parâmetro λ no valor 1.30000 até o valor 1.52000, para os valores de α , β e γ mencionados anteriormente.

A órbita que está descrita na figura (4.1) para o valor inicial de λ (em verde) bem como para um valor subsequente $\lambda = 1.38000$ (em azul). Em ambos os casos temos órbitas bem definidas e periódicas, apresentando como diferença o seus tamanhos. O incremento de λ dá maior complexidade à órbita, mas não altera sua topologia. Note também a preservação da simetria: nos dois casos temos invariância por reflexão ao longo do eixo que forma um ângulo de 60° com a horizontal. Na figura (4.2) traçamos o gráfico para outro valor de $\lambda = 1.39090$ (em azul). Esta figura possui o gráfico anterior (em verde). A mesma simetria reflexional é preservada para este valor de λ , mas note que

a órbita agora apresenta intersecções, o que já se caracteriza como uma mudança da topologia da figura, nos dando uma impressão inicial de mudança ou quebra de simetria. Além do mais, a medida em que o tamanho das órbitas aumenta, anuncia-se a tendência a junção ou colisão entre estas órbitas.

A figura (4.3) exhibe uma estrutura ainda mais complexa para $\lambda = 1.41000$. A junção das órbitas ocorre, as órbitas se tornam indistinguíveis formando um único atrator com a simetria reflexional ainda preservada, o que pode ser visto nas figuras (4.4) e (4.5). É possível ver as órbitas caóticas para os valores de $\lambda = 1.48000$ e 1.51000 , figura (4.6).

É importante frisar que estes gráficos são iterados com a mesma quantidade de pontos. A única alteração é o parâmetro λ , que sofre um aumento e este gera os diferentes gráficos.

Temos que ter uma atenção especial, o gráfico para $\lambda = 1.51000$ (em vermelho), pois os incrementos de simetria não alteram mais a órbita e sim a simetria, este é o nosso principal atrator, pois a partir das operações de simetria sobre este, ou seja, dos elementos do grupo, é possível gerar três atratores que para um determinado valor de λ colidem em um único atrator, que possui a simetria total D_3 .

A figura (4.7) mostra o aumento de simetria do atrator com o acréscimo do valor de λ ou reciprocamente falando, a quebra espontânea de simetria com a variação do parâmetro. Um novo eixo de simetria aparece na figura, a situação aqui exibida é típica: dois atratores conjugados (um dos quais é mostrado em verde) por uma operação de simetria do grupo, mais especificamente uma rotação de 120° , colidindo em único atrator em $\lambda = 1.51935$, é possível gerar dois atratores distintos com a rotação do atrator em verde, que colidem no atrator em azul para um determinado valor de λ .

Na figura (4.8) vemos a recuperação da simetria total para $\lambda = 1.52000$, neste caso os três atratores, gerados por rotações de 120° no atrator em $\lambda = 1.51000$, antes conjugados pelas transformações do grupo se fundem em um único atrator com simetria D_3 (em azul).

Ainda é possível gerar “diferentes apresentações” do grupo D_3 . Basta variarmos os parâmetros α , β e γ . As figuras (4.9) e (4.10), mostram mais claramente o que está sendo dito. Na figura (4.9) os parâmetros assumem os valores $\alpha = 2$, $\beta = -0.2$ e $\gamma = 1$ e ainda com o valor de $\lambda = -1.75$, já na figura (4.10) $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\gamma = 0.1$, e ainda é gerada a simetria D_3 . Note a preservação das rotações e dos eixos reflexionais. Isto ocorre com o valor de $\lambda = -2.38$.

4.2 Grupo D_6 e suas simetrias

A seguir estudaremos o grupo D_6 . Neste, além da análise do incremento de simetria com a variação do parâmetro λ , faremos a análise dos subgrupos atuando nos atratores em um determinado valor de λ . O que ocorre é que quando este é variado nós obtemos uma junção dos atratores de todos os subgrupos e podemos identificá-los através das operações de simetria em um atrator qualquer.

O grupo D_6 possui 12 elementos, que são dados da seguinte forma:

$$e = \text{identidade}, f_1 = e^{2\pi i/6} z, f_1^2 = e^{4\pi i/6} z, f_1^3 = e^{6\pi i/6} z, f_1^4 = e^{8\pi i/6} z, f_1^5 = e^{10\pi i/6} z,$$

$$\sigma = \text{reflexão}, \sigma f_1 = e^{-2\pi i/6} z^*, \sigma f_1^2 = e^{-4\pi i/6} z^*, \sigma f_1^3 = e^{-6\pi i/6} z^*,$$

$$f_1 \sigma = e^{2\pi i/6} z^* \text{ e } f_1^2 \sigma = e^{4\pi i/6} z^*.$$

Onde os subgrupos podem ser identificados conforme a tabela (1.2), usando o mesmo critério para identificar os subgrupo do grupo D_3 . No total temos 12 subgrupos que se

dividem em 7 subgrupos do tipo Z_2 , com um único eixo de simetria, 1 subgrupo do tipo C_3 com três eixos de simetria, 3 subgrupos do tipo D_2 e 1 subgrupo do tipo C_6 . Estes subgrupo podem ser identificados fazendo as operações de simetria sobre um dado atrator.

Abaixo temos os subgrupos:

Subgrupos do tipo Z_2 :

$$\{ e, \sigma \}, \{ e, \sigma f_1 \}, \{ e, f_1 \sigma \}, \{ e, f_1^2 \sigma \}, \{ e, f_1^3 \}, \{ e, \sigma f_1^3 \}, \{ e, \sigma f_1^2 \}. \quad (4.4)$$

Subgrupo do tipo C_3 :

$$\{ e, f_1^2, f_1^4 \}. \quad (4.5)$$

Subgrupos do tipo D_2 :

$$\{ e, f_1^3, \sigma, \sigma f_1^3 \}, \{ e, \sigma f_1, f_1^3, f_1^2 \sigma \} \text{ e } \{ e, f_1 \sigma, f_1^3, \sigma f_1^2 \}. \quad (4.6)$$

Subgrupo do tipo C_6 :

$$\{ e, f_1, f_1^2, f_1^3, f_1^4, f_1^5 \}. \quad (4.7)$$

Conhecidos os subgrupos vamos estudar os atratores gerados e nestes, tentar encontrar os subgrupos aqui citados. Agora o mapa (4.1) está na forma:

$$f(z, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda) z + \gamma (z^*)^5, \quad (4.8)$$

onde

$$u = z z^* \quad \text{e} \quad v = (z^6 + (z^*)^6) / 2.$$

O critério de análise gráfica é o mesmo usado anteriormente. Fixamos os parâmetros que agora assumem os seguintes valores: $\alpha = 5$, $\beta = 2$ e $\gamma = 1$; o número de iterações é igual a 60000, e o ponto inicial $z = 0.321 + 0.321i$.

Para o intervalo $-2.4500 < \lambda < -2.56800$, todas as simetrias vistas são do tipo Z_2 , como o grupo D_6 é um grupo de maior simetria fazendo com que nosso interesse seja maior em

relação aos seus subgrupos, já que este é de maior ordem, possuindo assim uma simetria mais complexa.

Devido a este fato concentramos nossa atenção no intervalo de $\lambda = -2.56800$ até o valor que reproduz a simetria do grupo $\lambda = -2.58500$.

Na figura (4.11) podemos observar um incremento de simetria do atrator inicial de λ , o atrator em verde possui um único eixo de simetria que faz um ângulo de 30° com a horizontal. Para $\lambda = -2.58125$ temos o incremento. Note que agora temos dois eixos de simetria reflexional: o eixo inicial (atrator em verde) e um novo eixo que faz um ângulo de 60° com o eixo inicial de simetria. A simetria do atrator em azul é o resultado da colisão entre duas simetrias: do atrator em verde e deste mesmo atrator sob a atuação de um elemento do grupo, no caso o elemento $f_1^2\sigma$, ou seja, uma rotação de 180° .

Na figura (4.12) ainda temos o incremento de simetria em $\lambda = -2.58131$, onde este atrator possui quatro eixos de simetria reflexional. Este atrator (em azul) é invariante perante a ação do subgrupo $\{e, f_1^3, \sigma, \sigma f_1^3\}$. Este subgrupo é chamado de subgrupo de Klein, onde cada elemento quadrado dá como resultado a identidade. Nesta mesma figura é possível notar que a partir de uma rotação de 60° no atrator em verde geram-se dois atratores distintos que colidem em um único atrator (em azul) para $\lambda = -2.58131$. Na figura (4.13) temos a simetria total recuperada, o atrator em azul ($\lambda = -2.58500$) é invariante perante a atuação de todos os elementos do grupo D_6 .

Agora faremos a análise de como o elemento do grupo atua no ponto inicial provocando a formação de atratores com diferentes simetrias, assim como identificar as cadeias resultantes através da colisão destes atratores via incremento de λ .

Consideremos que para um $\lambda < \lambda_0$, condição citada na seção (4.1), exista um atrator A_λ com simetria Σ e suponha que $\rho \in \Gamma \sim \Sigma$, ou seja, ρ é um elemento do grupo. Então $\rho(A_\lambda)$ é também um atrator que nós chamaremos de atrator conjugado. Suponha que quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, A_λ e $\rho(A_\lambda)$ sofram uma junção em λ_0 . O atrator resultante tem simetrias que incluem o grupo gerado por ρ e Σ , com isso é possível ver como se dá a colisão entre atratores, os gráficos de 14-17, mostram justamente a atuação do elemento do grupo no ponto inicial.

Na figura (4.14) vemos a atuação dos seguintes elementos do grupo no atrator inicial (em verde),

$$f_1, f_1^2, f_1^3, f_1^4, f_1^5,$$

que são rotações de 60° neste atrator. O valor de λ para cada atrator $\lambda = -2.56800$. Note que os atratores são distintos; cada atrator tem um eixo de simetria reflexional bem definido. Quando o valor de λ aumenta temos uma junção destes atratores, dando a simetria total do atrator, onde estes seis atratores colidem em um único atrator para $\lambda = -2.585$, como mostrado no figura (4.13).

Agora analisaremos os subgrupos, através das operações de simetria geradas por estes.

Na figura (4.15) temos quatro atratores, cada um com um eixo de simetria bem definido. Estes atratores são gerados a partir das operações de simetria do subgrupo de Klein, citado anteriormente. Note que para $\lambda = -2.58131$, ocorre a junção destes quatro atratores em um único atrator com a simetria do subgrupo que os gerou, figura (4.12). Na figura (4.16) analisamos o atrator no valor $\lambda = -2.58125$ e atuamos neste os elementos do subgrupo de Klein. Neste caso o atrator já possuía uma simetria maior do que a simetria do atrator anterior, o que nos mostra que uma colisão de atratores ocorre para

este valor de λ , note que colisão também pode ser interpretado como uma indistinção de atratores, estes gráficos possuem três simetrias, uma simetria de reflexão, uma simetria de rotação e uma de reflexão e rotação.

Na figura (4.17) ocorre a simetria do subgrupo de Klein e a colisão entre os atratores referentes `a identidade (em verde) e `a reflexão. Os outros dois gráficos não foram traçados pois a colisão entre estes já tinha ocorrido. Portanto, nada de novo poderia surgir, já que a indistinção entre os atratores ocorreria.

Através desta análise já é possível determinar uma cadeia de subgrupos a partir destas operações analisadas nos atratores. A cadeia é dada por:

$$D_6 \supset K \supset Z_2 \supset e, \quad (4.9)$$

onde K é o subgrupo de Klein, reproduzido na figura (4.17).

Ainda a simetria total é gerada através das operações de simetria no gráfico 4.17, onde o valor de λ para a colisão dos atratores tendo como resultado o atrator com a simetria total do grupo D_6 é $\lambda = -2.585$, e como esperado, a cadeia formada é dada pela equação (4.9).

É visível como se dá a quebra espontânea de simetria com a variação do parâmetro λ e também como ocorrem as simetrias, que se unem em um único atrator apenas com variação deste parâmetro. Note a diferença entre estes conceitos. Um conceito envolve incremento de simetria, já o outro diferentes simetrias para um mesmo atrator. O curioso é a colisão entre os atratores para a variação dos valores do parâmetro, Como mostrado anteriormente, o grupo D_3 apresenta a mesma peculiaridade. Por ser um grupo de simetria mais baixa a análise se faria unicamente em subgrupos do tipo Z_2 , o que não mostra tão claramente quanto o grupo D_6 e seus subgrupos, pois estes possuem grandes simetrias.

Ainda com este mapa é possível formar grupos de maior simetria, a seguir veremos três exemplos de grupos com maior simetria.

4.3 Exemplos de outros grupos de simetria

Aqui veremos mais três exemplos de simetria total na mesma função de iteração.

Para $m = 5, 7$ e 12 , os respectivos mapas são,

$m = 5$:

$$f(z, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda) z + \gamma (z^*)^4, \quad (4.10)$$

onde

$$u = z z^* \quad e \quad v = (z^5 + (z^*)^5) / 2,$$

com as constantes $\alpha = -1$, $\beta = 0.1$ e $\gamma = -0.8$ e o parâmetro $\lambda = -1.3$;

$m = 7$:

$$f(z, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda) z + \gamma (z^*)^6, \quad (4.11)$$

onde

$$u = z z^* \quad e \quad v = (z^7 + (z^*)^7) / 2,$$

com as constantes $\alpha = 1$, $\beta = 0.04$ e $\gamma = 0.1$ e o parâmetro $\lambda = -2.065$;

$m = 12$:

$$f(z, \lambda) = (\alpha u + \beta v + \lambda) z + \gamma (z^*)^{11}, \quad (4.12)$$

onde

$$u = z z^* \quad e \quad v = (z^{12} + (z^*)^{12}) / 2,$$

com as constantes $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $\gamma = -0.4$ e o parâmetro $\lambda = -2.6$.

As figuras (4.18), (4.19) e (4.20) representam respectivamente a iteração dos mapas anteriores com o número de iterações fixo, 60000, e com o mesmo ponto inicial $z = 0.321 + 0.321i$, e as respectivas simetrias D_5 , D_7 e D_{12} .

Conclusões

Neste trabalho investigamos as propriedades de uma classe de mapas gerados por difeomorfismos no plano complexo. A característica fundamental desses mapas é a equivariância em relação à ação do grupo D_m no plano complexo. Devido a este fato temos que os atratores gerados por estes mapas conservam a simetria do grupo para um dado valor dos parâmetros. Mostramos, seguindo Chossat e Golubitsky⁵, que a simetria dos atratores nem sempre coincide com a simetria do difeomorfismo, mas é função dos parâmetros que definem o mapa. Em varias circunstâncias a simetria é quebrada “espontaneamente” pela modificação desses parâmetros, conservando a simetria residual de um subgrupo, como mostrado nas figuras em anexo.

Verificamos que mudanças subsequentes nos parâmetros reduzem ainda mais a simetria, caracterizando um processo de quebra de simetria, gerando uma cadeia de subgrupos. Especificamente no caso do grupo D_6 , para um determinado valor de parâmetros, a quebra se dá de acordo com a cadeia

$$D_6 \supset K \supset Z_2 \supset e,$$

onde K é o grupo de Klein de ordem 4, $\{e, f_1^3, \sigma, \sigma f_1^3\}$ e os demais são, no caso, do tipo Z_2 , $\{e, \sigma\}, \{e, f_1^3\}, \{e, \sigma f_1^3\}$. O resultado é compatível com a maximalidade do grupo de

Klein. Esperava-se uma quebra na segunda cadeia maximal em que D_6 quebra em C_6 mas esta não foi observada.

Em princípio o método empregado aqui pode ser generalizado para um grupo finito qualquer G , desde que se construa os mapas obedecendo o princípio da equivariância. Nossa atenção se voltará para o estudo do grupo de Weyl $Sp(6)$ que está associado ao Modelo Algébrico do Código Genético (ref.[2]), tendo como objetivo a construção de um sistema dinâmico que implemente a quebra espontânea de simetria deste modelo.

Bibliografia

- [1] J. J. Collins e I. Stewart [1993] “Hexapodal Gaits and Coupled Nonlinear Oscillator Models”, *Biological Cybernetics* **68**, 287-298.
- [2] J. E. M. Hornos e Y. M. M. Hornos [1993] “Algebraic Model for The Evolution of Genetic Code”, *Physical Review Letters* vol.71, N 26.
- [3] L Braggion e J. E. M. Hornos [1998] “Procura por Simetrias de Lie na Evolução do Código Genético”, *Dissertação de Mestrado*, ICMSC – USP.
- [4] M. S. Barbosa e J. E. M. Hornos [1996] “Construção da Representação Simplética Irredutível para o Modelo Algébrico do Código Genético”, *Dissertação de Mestrado*, IFSC-USP.
- [5] P. Chossat e M. Golubitsky [1998] “Symmetry-Increasing Bifurcation of Chaotic Attractors”, *Physica D* **32**, 423-436.
- [6] M. Kroon e I. Stewart [1995] “Detecting The Symmetry of Attractors for Six Oscillators Coupled in a Ring”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* vol. 5, No. 1, 205-229.
- [7] E. Barany, M. Dellnitz e M. Golubitsky [1993] “Detecting the Symmetry of Attractors”, *Physica D* **67**, 66-78.

- [8] J. Patera, R. T. Sharp e P. Winternitz [1978] “Polynomial Irreducible Tensors for Point Groups”, *Journal of Mathematical Physics* **19**, No. 11, 2362-2376.
- [9] P. Chossat e M. Golubitsky [1988] “Iterate Maps with Symmetry”, *SIAM J. MATH. ANAL.*, Vol. **19**, No 6, 1259-1270.
- [10] G. Gaeta [1990] “Bifurcation and Symmetry Breaking”, *Physics Reports(Review of Physics Letters)* **189**, No 1, 1-87. North-Holland.
- [11] D. K. Arrowsmith e C. M. Place “ An Introduction to Dynamical Systems”, *Cambridge University Press, Australia*, cap. 1-2, (1991).
- [12] M. Tinkham “Group Theory and Quantum Mechanics”, *McGraw-Hill Book Company*, New York, 1964.
- [13] B. G. Wybourne *Classical Groups for Physicists* John Wiley, 1974
- [14] Jin-Quan Chen *Group Representation Theory for Physicists* World Scientific, 1989
- [15] M. Hamermesh[1989] “Group Theory And It’s Apliplication to Physical Problems”, *Dover Books, New York*.

Figura 3.1

Figura 4.1

Figura 4.2

Figura 4.3

Figura 4.4

Figura 4.5

Figura 4.6

Figura 4.7

Figura 4.8

Figura 4.9

Figura 4.10

Figura 4.11

Figura 4.12

Figura 4.13

Figura 4.14

Figura 4.15

FIGURA 4.16

Figura 4.17

Figura 4.18

Figura 4.19

Figura 4.20