UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

FELIPE LORENZEN

Extensão dos *Be-ables* de Bell
e
Competição Atenuação $\times$ Amplificação

São Carlos

2009

FELIPE LORENZEN

Extensão dos *Be-ables* de Bell
e
Competição Atenuação $\times$ Amplificação

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física do Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa

São Carlos

2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Lorenzen, Felipe

Extensão dos be-ables de Bell e competição atenuação X amplificação./Felipe Lorenzen; orientador Miled H. Y. Moussa-- São Carlos, 2009.

67 p.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física - Área de concentração: Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Be-ables. 2. Sistemas quânticos abertos. 3. Equações mestras. .4. Equação estocástica de Itô. I. Título.

IFSC **UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO**
Instituto de Física de São Carlos

Caixa Postal 369
13560-970 São Carlos, SP
Av. Trabalhador São-carlense, 400
13566-590 - São Carlos, SP

Fone/Fax: (16) 3373. 9777
www.ifsc.usp.br
svposgrad@ifsc.usp.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Felipe Lorenzen

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
de São Carlos da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado em: 16/02/2009

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Instituição: IFSC/USP

Assinatura

Prof. Dr. José Fernando Fontanari

Instituição: IFSC/USP

Assinatura

Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida

Instituição: UCG

Assinatura

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Hans e Marcia (in memoriam), e ao meu irmão, Guilherme.

Agradecimentos

Agradeço ao prof. Miled pela ajuda, pela paciência e por todos os ensinamentos. Agradeço ao Mickel pela inestimável ajuda. Agradeço aos amigos Alexandre Cacheffo, Rita de Cássia dos Anjos e Vinícius Teibel Santana, por estarem sempre dispostos a ajudar e também pelas agradáveis conversas. Agradeço ao meu pai e ao meu irmão pelo fundamental apoio em todos os instantes. Agradeço à minha querida Camila, por me motivar nas horas difíceis. Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

LORENZEN, F. **Extensão dos *Be-ables* de Bell e Competição Atenuação $\times$ Amplificação**. 2009. 67 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

Na primeira parte deste trabalho empregamos a equação estocástica de Itô para obter uma interpretação generalizada de *be-ables*, que engloba dissipação, decoerência e a transição da dinâmica quântica para clássica. Ao escolher uma fonte de estocasticidade que leva à correção dissipativa da dinâmica hamiltoniana na forma de Lindblad, obtemos uma nova classe de trajetórias que incorpora às trajetórias de Bohm o termo difusivo presente na formulação de Nelson. Utilizando nossa formulação extendida dos *be-ables* identificamos o processo de decoerência e verificamos que este encontra-se em concordância com o formalismo quântico usual. Na segunda parte deste trabalho analisamos a dinâmica de um sistema quântico sob a competição de dois sistemas multimodais contra-atuantes: um atenuador ou reservatório térmico e um amplificador de Glauber. Mapeamos o comportamento dinâmico deste sistema, identificando diferentes regimes de parâmetros. Calculamos o processo de decoerência emergente da ação dos sistemas multimodais e discutimos aplicações para o nosso sistema. Na terceira parte deste trabalho, usamos a abordagem de campo médio para a obtenção da equação mestra que descreve o problema da superradiância sob a ação de flutuações térmicas do reservatório. Desejamos com isso explorar a possibilidade de se verificar o processo de ressonância estocástica no âmbito da superradiância.

Palavras-chave: *Be-ables*. Sistemas quânticos abertos. Equações mestras. Equação estocástica de Itô.

Abstract

LORENZEN, F. **Extended Bell's *Be-ables* and Atenuattion $\times$ Amplification Competition**. 2009. 67 p. Thesis (Master) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

In the first part of this work we employ the Itô stochastic Schrödinger equation to extend Bell's *be-able* interpretation of quantum mechanics to encompass dissipation, decoherence and quantum-to-classical transition through quantum trajectories. For a particular choice of the source of stochasticity, the one leading to a dissipative Lindblad type correction to the Hamiltonian dynamics, we verify that the diffusive term in Nelson's formalism is naturally incorporated into Bohm's one, rendering a unified Bohm-Nelson theory. Mainly, analyzing the interference between quantum trajectories, we clearly identify the decoherence time, as estimated from the usual quantum formalism. We also observe the quantum-to-classical transition through the convergence of the infinite possible quantum trajectories to their associated classical counterparts. In the second part of this work we analyze the dynamical behavior of a quantum system under the actions of two counteracting baths: the inevitable energy draining reservoir and, oppositely, an engineered Glauber's amplifier feeding the system excitation. We trace the system dynamics towards equilibrium to map its distinct behaviors following from the attenuation $\times$ amplification interplay. The decoherence process emerging from the action of both counteracting baths is also computed and, finally, applications of such an attenuation $\times$ amplification competition is discussed. Finally, in the third part of this work we employ the mean field approximation to derive the master equation describing the process of superradiant emission under the presence of thermal fluctuation. We envisage to explore the possibility of observe stochastic resonance within the superradiant process.

Keywords: *Be-ables*. Open quantum systems. Master equation. Itô stochastic equation.

Lista de Figuras

1	<i>Estado coerente dissipativo</i>	p. 22
2	<i>Estado coerente ideal</i>	p. 22
3	<i>Estado de número $1\rangle$</i>	p. 23
4	<i>Estado comprimido na posição com $\alpha_0 ^2 = 5$</i>	p. 26
5	<i>Estado comprimido no momento com $\alpha_0 ^2 = 5$</i>	p. 27
6	<i>Estado comprimido no momento com $\alpha_0 ^2 = 1$</i>	p. 27
7	<i>Estado de gato com $\alpha_0 ^2 = 5$</i>	p. 29
8	<i>Estado de gato com $\alpha_0 ^2 = 10$</i>	p. 29
9	<i>Decoerência do estado de gato com $\alpha_0 ^2 = 5$</i>	p. 29
10	<i>Decoerência do estado de gato com $\alpha_0 ^2 = 10$</i>	p. 29
11	<i>Transição quântico-clássico do estado de gato com $\alpha_0 ^2 = 5$</i>	p. 30
12	<i>Transição quântico-clássico do estado de gato com $\alpha_0 ^2 = 10$</i>	p. 30
13	<i>Regimes do processo atenuação $\times$ amplificação</i>	p. 38
14	$\Gamma_2 = 1/3$	p. 40
15	$\Gamma_2 = 0.9/2.1$	p. 40
16	$\Gamma_2 = 1/2$	p. 40
17	$\Gamma_2 = \Gamma_1$	p. 40
18	$\Gamma_2 = 1.01$	p. 40
19	<i>Acoplamentos estocásticos</i>	p. 45

Sumário

1	Introdução	p. 7
1.1	Interpretações Alternativas da Mecânica Quântica	p. 7
1.2	O Amplificador Quântico de Glauber	p. 9
1.2.1	Atenuadores e Amplificadores de Glauber	p. 9
1.3	Emissão Superradiante na Presença de Flutuações Térmicas	p. 11
2	Extensão da Interpretação dos <i>Be-ables</i> para a Análise de Decoerência via Trajetórias Quânticas	p. 13
2.1	<i>Be-ables</i> de Bell	p. 13
2.2	Dedução da Formulação de Bohm a Partir dos <i>Be-ables</i>	p. 14
2.3	Dedução da Formulação de Nelson a Partir dos <i>Be-ables</i>	p. 16
2.4	Extensão da Interpretação dos <i>Be-ables</i>	p. 17
3	Sistema Quântico sob a Ação de dois Banhos Contra-Atuantes: Um Modelo para a Competição Atenuação $\times$ Amplificação	p. 31
3.1	O Oscilador Harmônico Dissipativo sob a Ação do Amplificador de Glauber	p. 31
3.2	Funções de quase-probabilidade	p. 34
3.3	Função de Wigner	p. 36
3.4	Mapeamento dos Regimes Associados à Competição Atenuação $\times$ Amplificação	p. 37
3.5	Variâncias	p. 38
3.6	Função P de Glauber-Sudarshan	p. 39
3.7	Decoerência	p. 41
3.8	Possíveis aplicações: da Óptica Atômica à Econofísica	p. 43
3.8.1	Óptica Atômica	p. 44
3.8.2	Econofísica	p. 44
4	Emissão Superradiante na Presença de Flutuações Térmicas	p. 46

4.1	Equação Mestra Derivada da Aproximação de Campo Médio, na Presença de Flutuações Térmicas	p. 46
4.2	Perspectivas Futuras	p. 55
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	p. 56
	Referências	p. 58
	Apêndice A – Cálculo da Função Característica para o Amplificador de Glauber.	p. 61
	Apêndice B – Cálculo do operador densidade para um estado comprimido.	p. 65

1 *Introdução*

1.1 Interpretações Alternativas da Mecânica Quântica

Na física clássica o estado de uma partícula ou de um campo é unicamente definido pela posição da partícula $x(t)$ ou pela amplitude complexa do campo $\phi(x, t)$. Especificando-se o valor de uma das variáveis de estado em um certo instante de tempo as leis de Newton ou as equações de Maxwell descrevem o comportamento do sistema tratado em qualquer instante posterior de tempo.

Na formulação da teoria quântica as variáveis dinâmicas clássicas foram substituídas por operadores, que atuam em uma nova entidade, a função de onda $\psi(x, t)$. Assim, $\psi(x, t)$ representa uma nova noção de estado de um sistema físico, e coube a Max Born interpretar de maneira convincente seu papel na mecânica quântica. Born propôs que o módulo quadrado da função de onda $|\psi(x, t)|^2 dx$ represente a probabilidade de se medir a posição de um sistema entre x e $x + dx$. Este raciocínio pode ser estendido a medida de outros observáveis como o momento ou a energia.

Neste estágio do desenvolvimento da mecânica quântica parecia claro que alguns conceitos clássicos como a causalidade e a existência de trajetórias deveriam ser abandonados. Esta interpretação que rejeita uma visão do mundo microscópico em termos de conceitos clássicos e que não atribui propriedades específicas aos sistemas tratados (somente a possibilidade de observar suas propriedades é considerada) será chamada aqui de interpretação ortodoxa da mecânica quântica. Com a descoberta do princípio da incerteza de Heisenberg tornou-se evidente a incomensurabilidade de observáveis que não comutam (em um mesmo instante de tempo), sendo que tal incomensurabilidade foi levada um passo adiante nesta interpretação ortodoxa, onde a observação é quem define a realidade dos observáveis. Antes de se realizar uma medida qualquer observável possui apenas realidade potencial.

No entanto Louis de Broglie (1) criou as raízes de uma nova interpretação ao sugerir que, com a função de onda, esteja associado um ensemble de partículas idênticas com posições

diferentes e distribuídas no espaço de acordo com a regra de Born. Na nova visão de de Broglie a função de onda não somente determina a localização provável da partícula como também a influencia atuando como uma ‘onda-piloto’ que guia a partícula para regiões onde a função de onda é mais intensa.

As idéias de de Broglie não foram bem aceitas na comunidade científica e o próprio as abandonou até que em 1952 elas foram redescobertas e desenvolvidas por David Bohm (2,3). Em sua interpretação da mecânica quântica Bohm mostrou ser possível analisar as causas de eventos atômicos individuais ao desenvolver um modelo teórico que confere realidade aos processos de forma independente de sua observação. Na teoria de Bohm a dinâmica do sistema é descrita pela equação de Schrödinger (evolução da função de onda) e por uma outra equação que descreve a evolução da posição das partículas em termos de trajetórias.

Outra interpretação alternativa bem conhecida é a chamada interpretação estocástica de Nelson (4). Nesta interpretação as partículas quânticas também possuem posições bem definidas em qualquer instante de tempo, e a fim de se obter a evolução temporal de tais posições deve-se resolver uma equação estocástica de Langevin. Em ambas as interpretações, de Bohm e de Nelson, as partículas descrevem trajetórias no espaço da posição.

O fato de se associar valores precisos para entidades físicas independente da possibilidade de observação de tais entidades faz das abordagens causal de Bohm e estocástica de Nelson o que se denomina interpretações em termos de *be-ables*, conforme proposto por Bell em (5). O termo *be-able*, cunhado por Bell no trabalho citado, refere-se a qualquer propriedade física que exista independente de sua observação. Nas interpretações causal e estocástica os *beables* são as posições das partículas.

Generalizando as idéias de Bell, Vink (6) confere a todos os observáveis o status de *beable* introduzindo a suposição de que, em uma escala suficientemente pequena, todas as quantidades físicas assumem valores discretos. Dentro da abordagem de Vink é possível recuperar tanto a interpretação de Bohm quanto a interpretação de Nelson.

Neste trabalho iremos generalizar os resultados obtidos por J.C.Vink para o caso de sistemas cuja evolução temporal da função de onda é descrita por um equação estocástica de Itô. Desta maneira englobamos os fenômenos da dissipação, decoerência e transição quântico-clássico, às trajetórias quânticas. Para um escolha particular da fonte de estocasticidade, presente na equação de Itô, verificamos que o termo difusivo presente nas trajetórias de Nelson é naturalmente incorporado às trajetórias Bohmianas. Através da análise da interferência

entre trajetórias quânticas, nós claramente indentificamos o tempo de decoerência, conforme estimado a partir do formalismo quântico. Também observamos a transição quântico-clássico através da convergência das infinitas trajetórias quânticas possíveis à seus análogos clássicos.

1.2 O Amplificador Quântico de Glauber

Acompanhando os desenvolvimentos da década de 80, quando o problema da medida e outros aspectos fundamentais da mecânica quântica foram abordados, a teoria quântica de sistemas abertos foi recentemente estendida para englobar os mecanismos de amortecimento e difusão coletivos em redes não-ideais. Tal perspectiva foi largamente influenciada pela teoria quântica da informação e sua procura por mecanismos que pudessem evitar o processo da decoerência de estados. Mesmo que o estudo do processo coletivo de difusão encontre-se ainda no início (7), uma grande quantidade de resultados relativos ao fenômeno de amortecimento coletivo, em diferentes sistemas físicos, foram obtidos (8–13), englobando interessantes resultados como espaços livres de relaxação e decoerência (14). Em particular, esforços têm sido direcionados ao problema da transferência de estados através de uma rede constituída de canais quânticos não-ideais (15, 16).

Neste trabalho, revisitamos o problema de um único sistema quântico dissipativo a partir de uma perspectiva diferente e mais geral, analisando a competição entre processos quânticos de dissipação e de amplificação. Enquanto o processo clássico de amplificação é um recurso usual para se construir interações efetivas específicas, especialmente no contexto da óptica atômica (17–19), o seu análogo quântico tem recebido menos atenção desde que foi sugerido por Glauber (20). Certamente, as dificuldades associadas com a implementação prática de um amplificador quântico multimodal parecem desencorajar uma análise mais profunda deste assunto. O próprio Glauber, no entanto, aplicou seu modelo de amplificação quântica para analisar o comportamento da magnetização em intervalos de tempo curtos (21) e, junto de Haake, o da superfluorescência (22). Portanto, considerando um sistema acoplado a um reservatório (ou atenuador) e a um amplificador mapeamos os comportamentos distintos do sistema sob diferentes regimes de parâmetros.

1.2.1 Atenuadores e Amplificadores de Glauber

Em sua discussão de atenuadores e amplificadores quânticos, Glauber (20) apresentou um tratamento, baseado na função P de Glauber-Sudarshan (23), onde foi considerado um oscilador harmônico (OH) acoplado a um reservatório modelado por um grande número

de osciladores. Após obter a forma Gaussiana dispersiva da função de quase-probabilidade P e assumindo que o OH foi preparado em um estado coerente α_0 , a evolução tridimensional de $P(\alpha, t|\alpha_0, 0)$ é apresentada nas coordenadas do espaço de fase $Re\alpha \times Im\alpha$, onde as características essenciais de um sistema amortecido por um atenuador térmico são reveladas. Partindo de uma função delta, associada ao estado coerente puro α_0 , a função P evolui descontinuamente para uma Gaussiana cuja taxa de dispersão é controlada pela temperatura do atenuador. Com o aumento da dispersão, o valor médio da amplitude do estado atenuado traça uma espiral exponencial nos eixos $Re\alpha \times Im\alpha$, até entrar em equilíbrio com a excitação média do atenuador.

Na busca por um amplificador quântico, ou seja “um dispositivo que amplifica sinal em nível quântico”, a solução peculiar de Glauber foi considerar exatamente o hamiltoniano que descreve o OH amortecido, mas agora considerando um OH “invertido”, com energias cinética e potencial negativas. O operador de criação associado com tal oscilador cria quantas de energia negativa, enquanto o operador de aniquilação aumenta a energia deste OH “invertido”. Apesar do amplificador, assim como o atenuador, ser modelado por um conjunto muito grande de osciladores harmônicos, o hamiltoniano de interação assume a forma dos termos contra-girantes ao invés dos termos girantes usuais. Neste caso, partindo de um estado coerente α_0 , o valor médio da amplitude do estado amplificado descreve uma exponencial ascendente nos eixos $Re\alpha \times Im\alpha$, com a função P evoluindo descontinuamente para uma Gaussiana cuja taxa de dispersão é não nula mesmo quando $T = 0$ K, e é maior do que no modelo do atenuador, no regime assintótico.

Ao considerar um sistema sob a ação de ambos, um atenuador e um amplificador, devemos esperar uma diversidade de comportamentos para a função P , considerando que as intensidades com que o sistema se acopla ao atenuador e ao amplificador sejam constantes ou variáveis. Iremos analisar a dinâmica do sistema em direção ao equilíbrio a fim de mapear os comportamentos distintos emergentes da competição atenuação $\times$ dissipação. Tal abordagem, com seus correspondentes regimes de parâmetros, será obtida através da evolução temporal da excitação do sistema e da função P de Glauber-Sudarshan. A decoerência decorrente da ação de ambos, atenuador e amplificador, também será calculada e, finalmente, aplicações do regime de atenuação $\times$ dissipação serão discutidas.

1.3 Emissão Superradiante na Presença de Flutuações Térmicas

O fenômeno da superradiância consiste na emissão espontânea e coletiva de um pulso eletromagnético cuja origem se dá numa amostra composta por N átomos. Tal fenômeno foi previsto teoricamente por Dicke (24) e comprovado experimentalmente por Skribanowitz (25). Na emissão superradiante, uma amostra de átomos que se encontra em um estado inicial excitado decai para o estado fundamental através da emissão de um pulso eletromagnético. Tal emissão ocorre de maneira espontânea e em um tempo proporcional ao número de átomos, $\tau_c \propto N^{-1}$ tal que a intensidade da emissão é proporcional a N^2 . O pulso superradiante ocorre devido às correlações induzidas entre transições de momento de dipolo dos átomos que interagem entre si, não diretamente, mas através da radiação coerente emitida por eles e também através da flutuação do vácuo.

Enquanto que a energia total irradiada por N átomos é $N\hbar\omega_0$, onde ω_0 representa a frequência de transição atômica, a intensidade de energia irradiada é $N\hbar\omega_0/\tau_c \propto N^2$; este resultado está em contradição com caso da emissão espontânea de um sistema incoerente quando a intensidade da energia irradiada é $N\hbar\omega_0/T_1$, onde T_1 é o tempo de decaimento espontâneo de uma única partícula, que não depende de N .

As correlações entre momentos de dipolo ocorrem somente se o tempo de duração do processo de emissão, τ_c , for muito menor que os tempos de relaxação T_1 e T_2 (onde T_2 é o tempo de relaxação dos momentos de dipolo atômicos). Sendo assim a emissão superradiante é um processo transiente de emissão espontânea no qual o ordenamento dos dipolos atômicos evoluem de um estado de desordem total em $t = 0$, atingem um estado de ordenamento máximo no tempo característico t_0 , e depois atingem um estado de equilíbrio onde os dipolos estão desordenados. Inicialmente, os átomos emitem incoerentemente e somente gradualmente as correlações entre os átomos vão tornando-se mais significantes até que o máximo é atingido quando as populações do estado fundamental e excitado tornam-se iguais.

Existem várias abordagens do problema da emissão superradiante, sendo que todas elas chegam a uma equação mestra para o sistema atômico (representação de Schrödinger) ou a um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, as equações de Maxwell-Bloch (representação de Heisenberg).

Neste trabalho, inspirado pelas idéias apresentadas em (26), vamos fazer uma abordagem de campo médio do problema da superradiância. No entanto, ao invés de partir da

equação de Schrödinger para obter uma equação mestra, vamos partir da equação estocástica de Itô para a seguir obter uma equação mestra que contenha dois operadores Liouvillianos, um deles descrevendo o fenômeno da superradiância em si e o outro descrevendo flutuações térmicas do vácuo, desejamos então observar qual o efeito que estas flutuações térmicas podem induzir no pulso superradiante. É sabido que a presença de ruído em sistemas dinâmicos não lineares pode dar origem a um fenômeno conhecido como ressonância estocástica (RE). A RE é um fenômeno em que a resposta de um sistema dinâmico não linear, a um agente externo, é aumentada na presença de um ruído. Seguindo as idéias de (26), onde o fenômeno da superradiância é descrito através de uma equação mestra não-linear, desejamos observar a RE quando a amostra de átomos é bombeada por um campo magnético oscilante externo.

2 *Extensão da Interpretação dos Be-ables para a Análise de Decoerência via Trajetórias Quânticas*

2.1 *Be-ables de Bell*

A interpretação em termos de *be-ables* nos diz que em um instante de tempo t o estado de um sistema é determinado pela função de onda $|\psi(t)\rangle$ e por $n(t)$ que são elementos de realidade física chamados por Bell de *be-ables*. Na generalização da interpretação dos *be-ables*, proposta por Vink, os $n(t)$ correspondem aos autovalores de qualquer observável, por exemplo, a posição $x(t)$ de uma partícula.

A fim de ilustrar a interpretação dos beables consideramos a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

A probabilidade de se encontrar o sistema em um autoestado $|o_m\rangle$ do observável $\mathbf{O} |o_m\rangle = n |o_m\rangle$ é

$$P_m(t) = |\langle o_m | \psi(t) \rangle|^2. \quad (2.2)$$

Se derivarmos a equação (2.2) com relação ao tempo e usarmos a equação de Schrödinger, chegamos na equação de continuidade

$$\hbar \frac{\partial P_m(t)}{\partial t} = \sum_n J_{mn}, \quad (2.3)$$

com

$$J_{mn} = 2Im \{ \langle \psi(t) | o_m \rangle \langle o_m | H | o_n \rangle \langle o_n | \psi(t) \rangle \}. \quad (2.4)$$

Na interpretação de Bell, a cada instante de tempo o beable $n(t)$ possui um valor definido,

mesmo que não sejamos capazes de observá-lo (medi-lo), daí a denominação beable. Bell considerou que a taxa de transição entre diferentes estados dos beables seja governada pela equação mestra

$$\frac{\partial P_m(t)}{\partial t} = \sum_n (T_{mn}P_n - T_{nm}P_m), \quad (2.5)$$

onde T_{mn} representa a taxa de transição do estado n para o estado m .

Igualando as equações (2.3) e (2.5) chegamos em

$$J_{mn}/\hbar = T_{mn}P_n - T_{nm}P_m, \quad (2.6)$$

que apresenta como possível solução

$$T_{mn} = \begin{cases} J_{mn}/\hbar P_n & , \quad J_{nm} \geq 0, \\ 0 & , \quad J_{nm} \leq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

A partir da solução acima vamos mostrar, a seguir, como é possível recuperar a interpretação de Bohm da mecânica quântica supondo a posição como beable.

2.2 Dedução da Formulação de Bohm a Partir dos Beables

A suposição fundamental feita por Vink, que possibilita a extensão da interpretação dos beables a qualquer observável é que, em escalas suficientemente pequenas, todas as quantidades físicas assumem valores discretos. Assim, é possível usar a interpretação dos beables para encontrar trajetórias para quantidades como a posição, o momento, o spin, etc.

Seguindo esta suposição podemos recuperar a interpretação de Bohm ao restringir a posição da partícula em uma dimensão aos sítios de uma rede onde $x = \varepsilon n$, com $n = 1, \dots, N$ e ε a distância da rede. A forma da equação de Schrödinger neste espaço discretizado (obtida através da forma mais simples para a discretização do Laplaciano $\partial^2 \delta(x - y) \rightarrow [\delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1} - 2\delta_{n,m}]/\varepsilon^2$) é

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H\psi(x, t) = \frac{-\hbar^2}{2M\varepsilon^2} [\psi(x + \varepsilon, t) + \psi(x - \varepsilon, t) - 2\psi(x, t)]. \quad (2.8)$$

Escrevendo a equação (2.4) para autoestados do operador posição $\mathbf{x}$ obtemos a expressão

$$J_{mn} = 2Im \{ \psi^*(\varepsilon m, t) H_{mn} \psi(\varepsilon n, t) \}. \quad (2.9)$$

Substituindo nosso hamiltoniano discretizado na equação acima obtemos

$$J_{mn} = -\frac{\hbar^2}{M\varepsilon^2} \text{Im} \left\{ \psi^*(\varepsilon n + \varepsilon, t) \psi(\varepsilon n, t) \delta_{n,m-1} + \psi^*(\varepsilon n - \varepsilon, t) \psi(\varepsilon n, t) \delta_{n,m+1} \right\}. \quad (2.10)$$

Seguindo o formalismo de Vink escrevemos a função de onda na forma polar $\psi(x, t) = R(x, t) e^{iS(x, t)/\hbar}$ e expandimos até primeira ordem em ε (estamos considerando o parâmetro da rede suficientemente pequeno para que a expansão seja válida) para obter

$$\psi(x + \varepsilon, t) = \psi(x, t) + \varepsilon \left\{ [R(x, t)]' + \frac{i}{\hbar} R(x, t) [S(x, t)]' \right\} e^{iS(x, t)/\hbar}, \quad (2.11)$$

onde definimos a derivada $[F(x = \varepsilon n, t)]' = [F(x + \varepsilon, t) - F(x, t)]/\varepsilon$. Através da expressão acima verifica-se que

$$J_{mn} = \frac{1}{M\varepsilon} \left\{ [S(\varepsilon n)]' P_n \delta_{n,m-1} - [S(\varepsilon n)]' P_n \delta_{n,m+1} \right\}. \quad (2.12)$$

Para obter a posição da partícula entre os instantes de tempo t e $t + dt$ usamos

$$x(t) \simeq x(t - dt) + \langle (\varepsilon m - \varepsilon n) \rangle, \quad (2.13)$$

com o valor médio do salto, que aparece na equação (2.13), dado por

$$\langle (\varepsilon m - \varepsilon n) \rangle = \varepsilon \sum_m (m - n) T_{mn} dt. \quad (2.14)$$

Substituindo J_{mn} dado por (2.12) na solução (2.7), obtemos

$$T_{mn} = \begin{cases} \{ [S(\varepsilon n)]' / M\varepsilon \} \delta_{n,m-1} & , \quad [S(\varepsilon n)]' \geq 0, \\ \{ -[S(\varepsilon n)]' / M\varepsilon \} \delta_{n,m+1} & , \quad [S(\varepsilon n)]' \leq 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

que resulta, escolhendo movimento para frente, em

$$\begin{aligned} \langle (\varepsilon m - \varepsilon n) \rangle &= \varepsilon \sum_m (m - n) \{ [S(\varepsilon n)]' / M\varepsilon \} \delta_{n,m-1} dt \\ &= [S(\varepsilon n)]' / M. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Finalmente, usando a equação (2.13), podemos calcular a posição da partícula,

$$x(t) \simeq x(t - dt) + [S(\varepsilon n)]' dt / M, \quad (2.17)$$

que no limite do contínuo, ou seja, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (2.17), resulta na bem conhecida

equação obtida por Bohm

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{M} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}, \quad (2.18)$$

que pode ser resolvida para obter $x(t)$. A expressão (2.18) é uma equação diferencial de primeira ordem e sendo assim precisamos de uma condição inicial (a posição inicial da partícula) para determinar sua solução. Conhecendo essa solução e a condição inicial, podemos construir um gráfico mostrando a evolução da posição x em função do tempo t . É claro que para cada escolha diferente da posição inicial encontra-se uma trajetória diferente. Na interpretação de Bohm devemos escolher um ensemble de condições iniciais, que nos levarão a um ensemble de trajetórias, estas trajetórias irão manter uma densidade consistente com a densidade de probabilidade quântica $|\psi(x, t)|^2$, desde que as condições iniciais estejam distribuídas de acordo com $|\psi(x, 0)|^2$.

2.3 Dedução da Formulação de Nelson a Partir dos Be-ables

A fim de obter a interpretação estocástica de Nelson, a partir da interpretação dos be-ables, adicionamos à solução (2.7) uma solução da equação homogênea

$$0 = T_{nm}^0 P_m - T_{mn}^0 P_n, \quad (2.19)$$

que compreende uma Gaussiana do tipo

$$T_{mn}^0 \propto \exp \left[- \left(m - n - \frac{2\sigma \ln(P_m/P_n)}{(m-n)} \right)^2 / 4\sigma \right]. \quad (2.20)$$

Para a largura σ suficientemente pequena podemos aproximar $(\ln P_n - \ln P_m) / (\varepsilon n - \varepsilon m)$ por $2[R(\varepsilon n)]' / R(\varepsilon n)$. Agora precisamos levar em conta, no cálculo da trajetória, a dispersão $\langle (\varepsilon m - \varepsilon n - \langle \varepsilon m - \varepsilon n \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ que aparece devido a largura finita da Gaussiana. Nesse caso a equação (2.13) é substituída por

$$x(t) \simeq x(t + dt) + \langle (\varepsilon m - \varepsilon n) \rangle + \frac{1}{2} \langle (\varepsilon m - \varepsilon n - \langle \varepsilon m - \varepsilon n \rangle)^2 \rangle^{1/2} d\eta. \quad (2.21)$$

O ruído $d\eta$ que aparece no lado direito da equação (2.21) descreve as flutuações introduzidas pela Gaussiana, com $\langle d\eta^2 \rangle = 2dt$. Seguindo o mesmo procedimento que foi adotado

para calcular as trajetórias bohmianas, chegamos em

$$dx = \left[\frac{1}{M} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + (\alpha \sigma \varepsilon^2) \frac{1}{2R(x, t)} \frac{\partial R(x, t)}{\partial x} \right] dt + \frac{1}{2} (\alpha \sigma \varepsilon^2)^{1/2} d\eta. \quad (2.22)$$

A equação (2.22) coincide com a equação de Nelson quando $\alpha \sigma \varepsilon^2 = 4\nu$ onde ν é um coeficiente de difusão proporcional a $\hbar$.

2.4 Extensão da Interpretação dos *Be-ables*

Em nossa abordagem generalizada da interpretação dos beables consideramos, em substituição à equação de Schrödinger, a equação diferencial estocástica de Itô

$$d|\psi\rangle = (Cdt + \mathbf{O} \cdot d\mathbf{\Lambda}) |\psi\rangle, \quad (2.23)$$

onde C é um operador, $\mathbf{O} \equiv \{O_i\}$ um conjunto de operadores e $\mathbf{\Lambda} \equiv \{\Lambda_i\}$ descreve um processo de Wiener real satisfazendo $\overline{d\Lambda_i} = 0$ e $\overline{d\Lambda_i d\Lambda_j} = \delta_{ij} \gamma dt$ com γ uma constante real. O processo descrito pela equação (2.23) gera no instante de tempo t um ensemble de vetores de estado $|\psi_{\mathbf{\Lambda}}(t)\rangle$, onde $\mathbf{\Lambda}$ representa uma realização particular do processo de Wiener. Podemos mostrar que o processo descrito por (2.23) não conserva a norma. De fato, usando o cálculo de Itô obtemos

$$\begin{aligned} d\|\psi\|^2 &= \langle \psi | d\psi \rangle + \langle d\psi | \psi \rangle + \overline{\langle d\psi | d\psi \rangle}, \\ &= \langle \psi | (\mathbf{O} + \mathbf{O}^\dagger) |\psi\rangle \cdot d\mathbf{\Lambda} + \langle \psi | (C + C^\dagger) |\psi\rangle dt + \langle \psi | \mathbf{O}^\dagger \cdot \mathbf{O} |\psi\rangle \overline{d\mathbf{\Lambda}^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Impondo a condição $\overline{d\|\psi\|^2} = 0$, em (2.24) chegamos em

$$(C + C^\dagger) dt = -\mathbf{O}^\dagger \cdot \mathbf{O} \overline{d\mathbf{\Lambda}^2}, \quad (2.25)$$

onde usamos que $\overline{d\Lambda_i} = 0$. Se levarmos em conta a condição imposta acima na equação (2.23), com $-iH/\hbar$ sendo a parte anti-hermitiana de C chegamos em

$$d|\psi\rangle = \left(-\frac{i}{\hbar} H dt + \mathbf{O} \cdot d\mathbf{\Lambda} - \frac{1}{2} \mathbf{O}^\dagger \cdot \mathbf{O} \overline{d\mathbf{\Lambda}^2} \right) |\psi\rangle. \quad (2.26)$$

A fim de obter a equação de evolução do operador densidade basta lembrar que $\rho = \overline{|\psi\rangle} \langle \psi|$, e usar novamente o cálculo de Itô para chegar em

$$d\rho(t) = d\overline{|\psi\rangle} \langle \psi| = \overline{|\psi\rangle} \langle d\psi| + \overline{d\psi} \langle \psi| + \overline{d\psi} \langle d\psi|. \quad (2.27)$$

Usando a equação (2.26) no cálculo de $d\rho$ chegamos na seguinte equação de evolução para o operador densidade

$$d\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] dt - \frac{1}{2} \{ \mathbf{O}^\dagger \cdot \mathbf{O}, \rho(t) \} \overline{d\Lambda^2} + \mathbf{O}\rho(t) \mathbf{O}^\dagger \overline{d\Lambda^2}. \quad (2.28)$$

Considerando o processo de Wiener Λ especificado acima obtemos

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] dt - \frac{1}{2} \gamma \{ \mathbf{O}^\dagger \cdot \mathbf{O}, \rho(t) \} + \gamma \mathbf{O}\rho(t) \mathbf{O}^\dagger, \quad (2.29)$$

que representa a forma de Lindblad para o gerador de um semigrupo dinâmico quântico. Cabe notar que na referência (27) foi apresentada uma interpretação em termos de beables, para a equação (2.29), no caso específico em que o conjunto de operadores $\mathbf{O}$ representa o localizador do modelo de Ghirardi, Pearle e Rimini (28). Para este caso a equação diferencial para a posição das partículas é a mesma que aquela obtida por Bohm (equação (2.18)), mas agora a função de onda evolui, obviamente, de acordo com uma equação estocástica. Neste trabalho vamos analisar o caso em que $\mathbf{O} = a$ e $\mathbf{O}^\dagger = a^\dagger$, onde a ($a^\dagger$) representa o operador de destruição (criação) de fótons. Levando em conta tal escolha na equação (2.29) chegamos em

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] dt + \frac{\gamma}{2} [2a\rho(t) a^\dagger - a^\dagger a \rho(t) - \rho(t) a^\dagger a], \quad (2.30)$$

que representa a evolução dissipativa de um sistema acoplado a um reservatório térmico que se encontra à temperatura zero.

Para obter uma interpretação em termos de beables para a equação (2.30) vamos seguir os mesmos passos já delineados aqui nas seções anteriores, mas agora ao invés de trabalhar com a equação de Schrödinger vamos trabalhar com a equação mestra (2.30).

Sendo $P_m(t) = \langle \varphi_m | \rho(t) | \varphi_m \rangle = \rho_{mm}(t)$ a densidade de probabilidade de medir o sistema no autoestado $|\varphi_m\rangle$ de uma quantidade satisfazendo $\Phi |\varphi_m\rangle = m |\varphi_m\rangle$, a equação de continuidade na representação Φ fica dada por

$$\hbar d_t P_m(t) = \sum_n J_{mn}. \quad (2.31)$$

A fim de obter a expressão correta de J_{mn} , vamos calcular a derivada temporal que aparece no lado esquerdo da equação acima

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \varphi_m | \rho(t) | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_m | \frac{d\rho(t)}{dt} | \varphi_m \rangle. \quad (2.32)$$

Substituindo a expressão (2.30) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m | \left\{ -\frac{i}{\hbar} [H \rho(t) - \rho(t) H] dt \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2} [2a\rho(t) a^\dagger - a^\dagger a \rho(t) - \rho(t) a^\dagger a] | \varphi_m \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

que através da inserção das relações de completeza leva à relação

$$\begin{aligned} \sum_n \left\{ -\frac{i}{\hbar} [\langle \varphi_m | H | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \rho(t) | \varphi_m \rangle - \langle \varphi_m | \rho(t) | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | H | \varphi_m \rangle] dt \right. \\ \left. + \hbar \frac{\gamma}{2} \sum_l [2 \langle \varphi_m | a | \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | \rho(t) | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a^\dagger | \varphi_m \rangle \right. \\ \left. - \langle \varphi_m | a^\dagger | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a | \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | \rho(t) | \varphi_m \rangle \right. \\ \left. - \langle \varphi_m | \rho(t) | \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | a^\dagger | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a | \varphi_m \rangle] \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comparando a equação acima com (2.31) chegamos, por fim, na expressão de J_{mn}

$$\begin{aligned} J_{mn} = 2Im \{ \langle \varphi_m | H | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \rho(t) | \varphi_m \rangle \} \\ + \hbar \frac{\gamma}{2} \sum_l \{ 2 \langle \varphi_m | a | \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | \rho(t) | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a^\dagger | \varphi_m \rangle \\ - \langle \varphi_m | a^\dagger | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a | \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | \rho(t) | \varphi_m \rangle \\ - \langle \varphi_m | \rho(t) | \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | a^\dagger | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a | \varphi_m \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

que agora contém três termos adicionais que seguem dos elementos estocásticos da equação (2.23). Seguindo os passos de Bell, supomos que a transição entre estados do operador Φ seja dada pela equação mestra

$$\partial_t P_m(t) = \sum_n (T_{mn} P_n - T_{nm} P_m), \quad (2.36)$$

onde $T_{nm} dt$ é a probabilidade de transição que governa saltos do estado φ_m para φ_n . Igualando (2.31) com (2.36) obtemos

$$J_{mn}/\hbar = T_{mn} P_n - T_{nm} P_m. \quad (2.37)$$

O lado direito da equação (2.37) é uma quantidade real, já que envolve apenas a taxa de transição T e a probabilidade P . No entanto, na equação (2.35) o elemento de matriz J_{nm} é uma quantidade complexa, devido a presença dos elementos fora da diagonal $\rho_{\alpha\beta}$ para

$\alpha \neq \beta$, e assim a solução particular de Bell (2.7) não se aplica a este caso. Uma nova solução particular da equação (2.37), para J_{mn} complexo obtido através de (2.35), é dada por

$$T_{mn} = \begin{cases} (J_{mn} + J_{mn}^*)/2\hbar P_n & , \quad J_{mn} \geq 0, \\ 0 & , \quad J_{mn} \leq 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Na abordagem de Vink, onde todos os graus de liberdade devem ser discretos e finitos, a posição é restrita aos sítios de uma rede, que no caso unidimensional torna-se $x = n\varepsilon$, com n sendo um inteiro e ε o espaçamento característico da rede. No limite do contínuo $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos expandir a função de onda na representação de posição, que se escreve na forma polar como $\psi(x, t) = R(x, t) e^{iS(x, t)/\hbar}$ (com a escolha $|\varphi_m\rangle = |x_m\rangle$ onde $\mathbf{x}|x_m\rangle = x_m|x_m\rangle$):

$$\psi(x_m \pm \varepsilon, t) \simeq \psi(x_m, t) \pm \varepsilon \left\{ [R(x_m, t)]' + \frac{i}{\hbar} R(x_m, t) [S(x_m, t)]' \right\} e^{iS(x_m, t)/\hbar}, \quad (2.39)$$

onde definimos novamente a derivada $[F(x, t)]' = [F(x + \varepsilon, t) - F(x, t)]/\varepsilon$. Para o caso particular do OH, governado pelo hamiltoniano discretizado

$$H_{mn} = (-\hbar^2/2M\varepsilon^2)(\delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1} - 2\delta_{n,m}) + (M\omega^2 x_n^2/2)\delta_{n,m}, \quad (2.40)$$

considerando o caso particular de um estado puro $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, com as escolhas já especificadas $\mathbf{O} = a$ e $|\varphi_n\rangle = |x_n\rangle$, a equação (2.35) escreve-se como (mantendo apenas termos até ordem zero em ε)

$$\begin{aligned} Re(J_{mn}) &= \frac{\hbar}{M\varepsilon} \{ [S(\varepsilon n)]' P_n \delta_{n+1,m} - [S(\varepsilon n)]' P_n \delta_{n-1,m} \} \\ &+ \frac{\gamma\hbar^2}{2M\omega\varepsilon^2} \{ [\rho^R(x_{m+1}, x_n; t) - \rho^R(x_m, x_n; t)] \delta_{n-1,n} \\ &- [\rho^R(x_{n+1}, x_m; t) - \rho^R(x_n, x_m; t)] \delta_{n+1,m} \}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Note que quando $\gamma = 0$ recuperamos o caso já analisado (equação (2.12)). Para calcular os termos do tipo $\langle\varphi_n|a|\varphi_m\rangle = a_{nm}$ e $\langle\varphi_n|a^\dagger|\varphi_m\rangle = (\langle\varphi_m|a|\varphi_n\rangle)^\dagger = (a_{mn})^*$ usamos a definição do operador de aniquilação em termos dos operadores posição e momento, que no espaço discretizado é dada por

$$a_{nm} = \frac{1}{(2\hbar M\omega)^{1/2}} \left[M\omega x_m \delta_{n,m} + \hbar \left(\frac{\delta_{n+1,m} - \delta_{n,m}}{a} \right) \right], \quad (2.42)$$

onde as deltas de Kronecker $\delta_{n\pm 1,m}$ representam movimento para frente ou para trás e $\delta_{n,m}$ representa a ausência de transição. Para obter as trajetórias quânticas vamos calcular, no

intervalo de tempo dt e até primeira ordem em ε , a posição do sistema $x(t) \simeq x(t - dt) + \varepsilon \sum_m (m - n) T_{mn} dt$. Usando a solução (2.38) com J_{mn} dado por (2.41), obtemos

$$x(t) \simeq x(t - dt) + \varepsilon \sum_m (m - n) \left\{ \frac{1}{M\varepsilon} [S(\varepsilon n)]' \delta_{n+1,m} - \frac{\gamma\hbar}{2M\omega\varepsilon^2} \frac{1}{P_n} [\rho^R(x_{n+1}, x_m; t) - \rho^R(x_n, x_m; t)] \delta_{n+1,m} \right\} dt. \quad (2.43)$$

Expandindo $\rho^R(x_{n+1}, x_{n+1}; t)$ e $\rho^R(x_n, x_{n+1}; t)$ até primeira ordem em ε , tal que

$$\begin{aligned} \rho^R(x_{n+1}, x_{n+1}; t) &= \langle x_{n+1} | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | x_{n+1} \rangle = \psi^*(x_{n+1}, t) \psi(x_{n+1}, t) \\ &= R^2(x_n, t) + 2\varepsilon R(x_n, t) [R(x_n, t)]', \\ \rho^R(x_n, x_{n+1}; t) &= \langle x_n | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | x_{n+1} \rangle = \psi^*(x_n, t) \psi(x_{n+1}, t) \\ &= R^2(x_n, t) + \varepsilon R(x_n, t) [R(x_n, t)]', \end{aligned} \quad (2.44)$$

chegamos, no limite do contínuo, na equação de movimento

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{M} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \frac{\gamma\hbar}{2M\omega} \frac{1}{R(x, t)} \frac{\partial R(x, t)}{\partial x}, \quad (2.45)$$

que também pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\hbar}{M} \left\{ \frac{Im[\partial_x \rho(x, x'; t)]}{Re \rho(x, x'; t)} \Big|_{x'=x} + \frac{\gamma}{2\omega} \frac{Re[\partial_x \rho(x, x'; t)]}{Re \rho(x, x'; t)} \Big|_{x'=x} \right\}, \quad (2.46)$$

onde a fonte de dissipação-flutuação contém a dinâmica estocástica de Nelson, e a sua ausência ($\gamma = 0$) reduz à dinâmica causal de Bohm.

Estado Coerente. Considerando que o OH seja preparado em um estado coerente $|\alpha_0\rangle$, a equação mestra (2.30) leva à solução $\alpha(x, t) = R(x, t) e^{iS(x, t)/\hbar}$, para a representação de posição do estado coerente, onde

$$\begin{aligned} R(x, t) &= \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{M\omega}{2\hbar} x^2 + \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} \alpha_R(t) x - \alpha_R^2(t) \right], \\ S(x, t) &= \hbar \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} \alpha_I(t) x - \alpha_R(t) \alpha_I(t), \end{aligned} \quad (2.47)$$

com $\alpha_R(t)$ e $\alpha_I(t)$ representando as partes real e imaginária de $\alpha(t) = \alpha_0 e^{(i\omega t - \gamma t/2)}$.

A equação de movimento associada a este estado

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}} \left[\omega\alpha_I(t) + \frac{\gamma}{2}\alpha_R(t) \right] - \frac{\gamma}{2}x, \quad (2.48)$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\gamma t/2} \left\{ x(0) \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{M}} (1 - \cos(\omega t)) \left(\frac{\gamma\alpha_0^I}{2\omega} - \alpha_0^R \right) \right. \\ \left. + \left[\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{M}} \sin(\omega t) \left(\alpha_0^I + \frac{\gamma\alpha_0^R}{2\omega} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

leva às trajetórias $x(t) \times \gamma t$ mostradas na Fig. 1 para $\hbar = 1$ e massa $M = 1$, $|\alpha_0|^2 = 5$, e $\omega/\gamma = 10$.

Figura 1 – Estado coerente dissipativo

Figura 2 – Estado coerente ideal

Como esperado, o ensemble de trajetórias associadas com as diferentes posições iniciais distribuídas de acordo com $|\alpha(x,0)|^2$, estão sujeitas a dissipação que as conduz ao vácuo, diferentemente do que acontece no caso em que $\gamma = 0$. De fato, na Fig. 2 está mostrado o comportamento de um oscilador ideal preparado em um estado coerente $|\alpha_0\rangle$, com os mesmos parâmetros que na Fig. 1. Apesar da amplitude de oscilação das trajetórias permanecer inalterada, observamos a mesma evolução em fase das trajetórias da Fig. 1. Esta evolução em fase corrobora a propriedade bem conhecida (para um reservatório à $T = 0$ K) que um sistema dissipativo preparado em um estado coerente permanece puro apesar de perder excitação (20, 30), i.e., $\alpha(t) = \alpha_0 e^{(i\omega t - \gamma t/2)}$.

Estado de Número. Embora a Mecânica Bohmiana não associe movimento a um sistema quântico em um estado estacionário (29), a versão dissipativa deduzida aqui revela

de forma inequívoca a evolução de um OH preparado em um estado de Fock $|1\rangle$ em direção ao estado de vácuo. A representação de posição do estado $|n\rangle$ é

$$\Psi_n(x, t) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{\beta^2 x^2}{2}\right) H_n(\beta x) \exp\left(-\frac{i E_n t}{\hbar}\right) \quad (2.50)$$

onde $\beta = \sqrt{M\omega/\hbar}$ e $H_n(\beta x)$ representa o polinômio de Hermite de ordem n . Usando a equação (2.45) chegamos em

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma}{2} \left(-x + \frac{\hbar}{M\omega} \frac{1}{x}\right). \quad (2.51)$$

Nota-se que neste caso $S(x, t) = -E_n t$ cuja derivada com relação a x é nula, e não existem, portanto, trajetórias associadas a este estado se $\gamma = 0$. Na Fig. 3 estão mostradas as trajetórias, associadas a equação acima, distribuídas de acordo com $|\Psi_1(x, 0)|^2$. Estas trajetórias convergem, como esperado, para ambas as densidades de probabilidades máximas dada pela mecânica quântica, cujos valores são $x = \pm 1$, para a escolha de parâmetros feita acima.

Figura 3 – Estado de número $|1\rangle$

Estados Comprimidos. Considerando que o OH seja preparado em um estado comprimido deslocado $|\xi, \alpha\rangle = S(\xi) D(\alpha) |0\rangle$, vamos calcular $\rho(x, x', t)$ e então usar a equação (2.46) para obter as trajetórias associadas a este estado. A fim de obter $\rho(t)$ vamos calcular primeiro a função característica de um OH, acoplado a um reservatório à $T = 0$ K, preparado no estado $|\xi, \alpha\rangle = S(\xi) D(\alpha) |0\rangle$. Neste caso a função característica escreve-se como (com

ajuda do desenvolvimento mostrado no apêndice A)

$$\chi(\eta, \eta^*, t) = \chi(\eta, \eta^*, 0) \big|_{\eta \rightarrow \eta(t)}, \quad (2.52)$$

e precisamos calcular $\chi(\eta, \eta^*, 0)$. Usando a definição da função característica temos que

$$\chi(\eta, \eta^*, 0) = Tr \left\{ \rho(0) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\}, \quad (2.53)$$

com $\rho(0) = |\xi, \alpha\rangle \langle \xi, \alpha|$, o que nos leva à expressão

$$\begin{aligned} \chi(\eta, \eta^*, t) = \exp \big\{ & \eta e^{-\gamma t/2} e^{i\omega t} (\alpha^* \cosh r - \alpha e^{-i\theta} \sinh r) \\ & - \eta^* e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega t} (\alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\theta} \sinh r) \\ & - \eta^* \eta e^{-\gamma t} \sinh^2 r - e^{-\gamma t} \frac{\eta^2 e^{i(2\omega t - \theta)} + (\eta^*)^2 e^{-i(2\omega t - \theta)}}{4} \sinh(2r) \big\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para obter $\rho(x, x'; t)$ vamos usar as seguintes relações

$$\begin{aligned} P(\beta, \beta^*, t) &= \int d^2 \eta e^{\beta \eta^* - \beta^* \eta} \chi(\eta, \eta^*, t), \\ \rho(t) &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \beta |\beta\rangle \langle \beta| P(\beta, \beta^*, t), \end{aligned} \quad (2.55)$$

que nos permitem escrever

$$\rho(x, x'; t) = \frac{1}{\pi^2} \int \int d^2 \beta d^2 \eta \langle x | \beta \rangle \langle \beta | x' \rangle e^{\beta \eta^* - \beta^* \eta} \chi(\eta, \eta^*, t) P(\beta, \beta^*, t). \quad (2.56)$$

Substituindo a expressão abaixo

$$\begin{aligned} \beta(x) \beta(x') &= \sqrt{\frac{M\omega}{\pi\hbar}} \exp \left\{ -\frac{M\omega}{2\hbar} (x^2 + x'^2) + \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (\beta x + \beta^* x') \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\beta^2 + \beta^{*2}) - |\beta|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

na equação acima e resolvendo primeiro a integral em β e a seguir a integral em η chegamos

em (apêndice B)

$$\begin{aligned} \rho(x, x'; t) = & \sqrt{\frac{M\omega}{\pi\hbar a_1}} \exp \left\{ -\frac{M\omega}{4\hbar} (x - x')^2 [1 + e^{-\gamma t} (2 \sinh^2 r + \sinh(2r) \cos(2\omega t - \theta))] \right. \\ & - \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} e^{-\gamma t/2} (x - x') [(\alpha^* e^{i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t}) \cosh r + (\alpha^* e^{-i(\omega t - \theta)} - \alpha e^{i(\omega t - \theta)}) \sinh r] \\ & \left. + \frac{g^2(x, x'; t)}{2f(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - e^{-\gamma t} \sinh(2r) \cos(2\omega t - \theta) + 2e^{-\gamma t} \sinh^2 r, \\ g(x, x'; t) &= -\sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} [(x - x') e^{-\gamma t} \sinh(2r) \sin(2\omega t - \theta) + i(x + x')] \\ &+ i e^{-\gamma t/2} [(\alpha^* e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t}) \cosh r - (\alpha^* e^{-i(\omega t - \theta)} + \alpha e^{i(\omega t - \theta)}) \sinh r]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Derivando a expressão obtida para $\rho(x, x'; t)$ e separando as partes real e imaginária, chegamos, finalmente, na equação que nos dará as trajetórias

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \frac{\hbar}{M} \left\{ -\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} e^{-\gamma t/2} [\alpha_1(t) \cosh r - \alpha_2(t, \theta) \sinh r] \right. \\ & - \frac{1}{f} \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} e^{-\gamma t} \sinh(2r) \sin(2\omega t - \theta) \left[-\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} x + 2e^{-\gamma t/2} \alpha_3(t) \cosh r \right. \\ & \left. \left. - 2e^{-\gamma t/2} \alpha_4(t, \theta) \sinh r \right] \right\} + \frac{\hbar}{M} \frac{\gamma}{\omega} \frac{1}{f} \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left\{ -\sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} x + e^{-\gamma t/2} \alpha_5(t) \cosh r \right. \\ & \left. - e^{-\gamma t/2} \alpha_6(t, \theta) \sinh r \right\}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) &= \alpha_R \sin(\omega t) - \alpha_I \cos(\omega t), \\
\alpha_2(t, \theta) &= \alpha_R \sin(\omega t - \theta) + \alpha_I \cos(\omega t - \theta), \\
\alpha_3(t) &= \alpha_R \cos(\omega t) + \alpha_I \sin(\omega t), \\
\alpha_4(t, \theta) &= \alpha_R \cos(\omega t - \theta) - \alpha_I \sin(\omega t - \theta), \\
\alpha_5(t) &= \alpha_R \cos(\omega t) + \alpha_I \sin(\omega t), \\
\alpha_6(t, \theta) &= \alpha_R \cos(\omega t - \theta) - \alpha_I \sin(\omega t + \theta).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

A equação acima foi resolvida, numericamente, através do método Runge-Kutta de quarta ordem. Nas Figs. 4 e 5 apresentamos as trajetórias associadas a estados comprimidos na posição e no momento, com $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente. Como no caso em que $r = 0$ (estado coerente), consideramos aqui $\hbar = M = 1$ e $|\alpha_0|^2 = 5$, com exceção da razão $\omega/\gamma = 40$.

Figura 4 – Estado comprimido na posição com $|\alpha_0|^2 = 5$

Como visto em ambas as figuras, a distribuição inicial das posições, dada por $\rho(x, 0)$, são distintas dependendo se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, sendo comprimidas no primeiro caso e alargadas no segundo, se comparadas com a distribuição inicial de um estado coerente ($r = 0$). Um aspecto crucial em ambas as figuras é a eliminação das oscilações em fase mostradas nas

Figura 5 – Estado comprimido no momento com $|\alpha_0|^2 = 5$

Figs. 1 e 2, em torno do tempo de decoerência de ambos os estados, dado por (7)

$$\tau_D = \frac{1}{4 \sinh^2 r}, \quad (2.62)$$

que resulta em $\tau_D \simeq 0.2$ para $r = 1$. Tal fato vai de acordo com a observação acerca da

Figura 6 – Estado comprimido no momento com $|\alpha_0|^2 = 1$

Fig. 1, de que a evolução em fase do ensemble de trajetórias é uma assinatura (para um reservatório no zero absoluto) da evolução dissipativa de um estado coerente. Mostramos na Fig. 6 as trajetórias associadas a um estado coerente com compressão no momento, com os mesmos parâmetros das figuras anteriores, com exceção da excitação que agora é $|\alpha_0|^2 = 1$,

o que resulta em posições iniciais contemplando valores negativos. Fica claro aqui também a eliminação das oscilações em fase em torno do tempo de decoerência.

Estado do Tipo Gato de Schrödinger. Um OH preparado em uma superposição de dois estados coerentes de mesma excitação $N(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$, é levado, através da evolução dissipativa governada pela equação (2.30), a uma mistura estatística descrita na representação de posição por

$$\rho(x, x'; t) = |N(t)|^2 \sum_{i,j=1}^2 \exp -2|\alpha|^2 (e^{-\gamma t} - 1) (1 - \delta_{ij}) \langle x | (-1)^i \alpha(t) \rangle \langle (-1)^j \alpha(t) | x' \rangle. \quad (2.63)$$

A equação de movimento associada a este estado misto, é obtida através da equação (2.46), já que a equação (2.45) é válida somente para estados puros. Substituindo (2.63) em (2.46) chegamos na equação

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{M}} \frac{[\alpha_I(t) \sinh(A) + f(t) \alpha_R(t) \sin(B)]}{\cosh(A) + f(t) \cos(B)} \\ & + \frac{\hbar}{M\omega} \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\cosh(A) + f(t) \cos(B)} \left\{ \frac{-M\omega x}{\hbar} \cosh(A) + \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} \alpha_R(t) \sinh(A) \right. \\ & \left. - f(t) \left[\frac{M\omega x}{\hbar} \cos(B) - \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} \alpha_I(t) \sin(B) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

com $A = \sqrt{\frac{8M\omega}{\hbar}} x \alpha_R(t)$ e $B = \sqrt{\frac{8M\omega}{\hbar}} x \alpha_I(t)$. A equação de movimento acima foi resolvida numericamente através do método Runge-Kutta de quarta ordem. As soluções $x(t) \times \gamma t$ são mostradas nas figuras Figs. 7 e 8 para $|\alpha_0|^2 = 5$ e 10, respectivamente. Novamente consideramos valores unitários para $\hbar$ e M , com $\omega/\gamma = 10^2$. Nas figuras 9 e 10 restringimos a uma escala de tempo em que $\gamma t \ll 1$ para evidenciar que o tempo de decoerência $\gamma\tau_D = (2|\alpha_0|^2)^{-1}$ do estado do tipo “gato de Schrödinger”, calculado através do formalismo quântico (36), é confirmado pelo comportamento das trajetórias. De fato, é exatamente para valores de $\gamma\tau_D$ próximos de 0.1 e 0.05 que observamos a eliminação da interferência entre as trajetórias responsável por desviá-las entre si. Além disso, é para estes valores do tempo que ambos os ensembles de trajetórias (com valores de posição positivos e negativos), começam a se distanciar um do outro. Finalmente, nas Figs. 11 e 12 mostramos o comportamento das trajetórias em um intervalo de tempo um pouco maior que nas figuras anteriores, para evidenciar a transição quântico-clássico na medida em que os reservatórios levam o estado puro inicial para uma mistura estatística. De fato, em ambas as figuras todas as trajetórias

geradas da distribuição $|\psi(x, 0)|^2$ das posições iniciais convergem para seus dois análogos clássicos.

Figura 7 – Estado de gato com $|\alpha_0|^2 = 5$

Figura 8 – Estado de gato com $|\alpha_0|^2 = 10$

Figura 9 – Decoerência do estado de gato com $|\alpha_0|^2 = 5$

Figura 10 – Decoerência do estado de gato com $|\alpha_0|^2 = 10$

Figura 11 – Transição quântico-clássico
do estado de gato com
 $|\alpha_0|^2 = 5$

Figura 12 – Transição quântico-clássico
do estado de gato com
 $|\alpha_0|^2 = 10$

3 *Sistema Quântico sob a Ação de dois Banhos Contra-Atuantes: Um Modelo para a Competição Atenuação $\times$ Amplificação*

3.1 O Oscilador Harmônico Dissipativo sob a Ação do Amplificador de Glauber

Neste capítulo iremos tratar um sistema, constituído de um OH quântico, que está sujeito às ações simultâneas de um atenuador e de um amplificador quânticos. O hamiltoniano que governa a evolução deste sistema é dado por $H = H_{HO} + H_{att+amp} + H_I$, onde

$$H_{HO} = \hbar\omega a^\dagger a, \quad (3.1)$$

descreve um OH de frequência ω , com $a^\dagger$ (a) sendo o operador de criação (destruição) associado. O hamiltoniano

$$H_{att+amp} = \sum_{m=1}^2 \sum_k \hbar\omega_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk}, \quad (3.2)$$

engloba tanto o atenuador ($m = 1$), quanto o amplificador ($m = 2$), com $b_{mk}^\dagger$ (b_{mk}) sendo o operador de criação (destruição) associado ao modo ω_{mk} . Finalmente, o termo de interação

$$H_I = \sum_k \left[\hbar\lambda_{1k} \left(ab_{1k}^\dagger + a^\dagger b_{1k} \right) + \hbar\lambda_{2k} \left(e^{i2\nu t} ab_{2k} + e^{-i2\nu t} a^\dagger b_{2k}^\dagger \right) \right], \quad (3.3)$$

descreve os acoplamentos do sistema com os modos do atenuador e do amplificador, com intensidades λ_{1k} e λ_{2k} , dado pelos termos girantes e contra-girantes, respectivamente.

Enfatizamos aqui que não foi necessário fazer uso de um OH invertido para obter a dinâmica de amplificação do modelo original de Glauber (20). Afinal, nosso OH amortecido

deve ser o mesmo que o amplificado. Para contornar este problema, lidando com o oscilador não invertido mesmo para o processo de amplificação, nós apenas introduzimos as fases $e^{\pm 2i\nu t}$ no acoplamento do sistema com o amplificador. De fato, sob escolha apropriada de ν , a fenomenologia associada ao hamiltoniano original do amplificador de Glauber (20)

$$-\hbar\omega a^\dagger a + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \hbar\lambda_k \left(ab_k + a^\dagger b_k^\dagger \right), \quad (3.4)$$

resulta ser exatamente igual aquela decorrente da nossa versão

$$\hbar\omega a^\dagger a + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \hbar\lambda_k \left(e^{i2\nu t} ab_k + e^{-i2\nu t} a^\dagger b_k^\dagger \right). \quad (3.5)$$

Sob a transformação

$$U(t) = \exp \left[-i\nu t \left(a^\dagger a + \sum_{m=1}^2 \sum_k b_{mk}^\dagger b_{mk} \right) \right], \quad (3.6)$$

podemos escrever nosso hamiltoniano como $H = H_0 + H_I$, com os termos de interação agora independentes do tempo, dados por

$$\begin{aligned} H_0 &= \hbar\varpi a^\dagger a + \sum_{m=1}^2 \sum_k \hbar\varpi_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk}, \\ H_I &= \sum_k \hbar\lambda_{1k} \left(ab_{1k}^\dagger + a^\dagger b_{1k} \right) + \hbar\lambda_{2k} \left(ab_{2k} + a^\dagger b_{2k}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\varpi = \omega - \nu$ e $\varpi_{mk} = \omega_{mk} - \nu$. A fim de obter a equação mestra do sistema descrito pelo hamiltoniano H vamos considerar algumas aproximações. A primeira delas é assumir que os acoplamentos do OH com ambos, o atenuador e o amplificador, sejam fracos o suficiente para podermos realizar uma expansão perturbativa nestes parâmetros. Vamos também assumir que o atenuador e o amplificador sejam markovianos, de maneira que possamos fatorizar o operador densidade do sistema global como $\rho_S(t) \otimes \rho_{att}(0) \otimes \rho_{amp}(0)$. Realizando tais aproximações e traçando nas variáveis do atenuador e do amplificador chegamos na equação mestra (na representação de interação)

$$\frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_{att,amp} \left[V(t), [V(t'), \rho_S^I(t) \otimes \rho_{att}^I(0) \otimes \rho_{amp}^I(0)] \right], \quad (3.8)$$

onde $V(t)$ é obtido passando H_I para a representação de interação, isto é, fazendo a transformação $V(t) = U^\dagger(t) H_I U(t)$ com $U(t) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t \right)$, que pode ser escrito como

$U(t) = U_0(t) \otimes U_{att}(t) \otimes U_{amp}(t)$, onde $U_0(t) = e^{-i\varpi ta^\dagger a}$, $U_{att}(t) = \exp\left(-it \sum_k \varpi_{1k} b_{1k}^\dagger b_{1k}\right)$ e $U_{amp}(t) = \exp\left(-it \sum_k \varpi_{2k} b_{2k}^\dagger b_{2k}\right)$. Logo

$$V(t) = \hbar \left\{ U_0^\dagger(t) a^\dagger U_0(t) \left[\Gamma_1(t) + \Gamma_2^\dagger(t) \right] + U_0(t)^\dagger a U_0(t) \left[\Gamma_1^\dagger(t) + \Gamma_2(t) \right] \right\}, \quad (3.9)$$

onde definimos os operadores

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= \sum_k \lambda_{k1} U_B^\dagger(t) b_{k1} U_B(t) = \sum_k \lambda_{k1} b_{k1} \exp[-i(\varpi_{k1} - \varpi)t], \\ \Gamma_2(t) &= \sum_k \lambda_{k2} U_B^\dagger(t) b_{k2} U_B(t) = \sum_k \lambda_{k2} b_{k2} \exp[-i(\varpi_{k2} + \varpi)t]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se o atenuador e o amplificador encontram-se no estado térmico temos que $\langle b_{mk} b_{m'k'} \rangle = \langle b_{mk}^\dagger b_{m'k'}^\dagger \rangle = 0$, para qualquer $m, m' = 1, 2$. Precisamos agora calcular as integrais que aparecem na equação (3.8). Tais integrais são do tipo $\int_0^t dt' \langle \Gamma_m^\dagger(t) \Gamma_m(t') \rangle$, onde $\Gamma_m(t) = \sum_k \lambda_{mk} \exp(-i\Omega_{mk}t) b_{mk}$ com $\Omega_{mk} = \varpi_{mk} + (-1)^m \varpi$. Antes de calcular tais integrais vamos realizar outra aproximação, ao considerar que as frequências do atenuador e do amplificador estejam muito próximas uma das outras de maneira a podermos substituir as somatórias em k , que aparecem na definição de $\Gamma_1(t)$ e $\Gamma_2(t)$, por integrais em ω_m com $\sigma_m(\omega_m)$ sendo as densidades de estados dos sistemas multimodais. A excitação média do k -ésimo modo associado ao atenuador ou ao amplificador é definida através da relação $\langle b_m^\dagger(\omega_m) b_{m'}(\omega_{m'}) \rangle = \delta_{mm'} \mathbf{N}_m(\omega_m) \delta(\omega_m - \omega_{m'})$. Finalmente, dentro da suposição usual de que $\lambda_m(\omega_m)$, $\sigma_m(\omega_m)$ e $\mathbf{N}_m(\omega_m)$ são funções suaves, que variam lentamente com ω_m , obtemos

$$\int_0^t dt' \langle \Gamma_1^\dagger(t) \Gamma_1(t') \rangle = \int_0^t dt' \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \lambda_1^2(\omega_1) \sigma_1(\omega_1) \mathbf{N}_1(\omega_1) \exp[-i(\varpi_1 - \varpi)(t - t')]. \quad (3.11)$$

Fazendo as transformações de variáveis $\tau = t - t'$ e $\varepsilon = \varpi_1 - \varpi = \omega_1 - \omega$, chegamos em

$$\begin{aligned} &\int_0^t d\tau \int_{-\omega}^\infty \frac{d\varepsilon}{2\pi} \sigma_1(\varepsilon + \omega) \lambda_1^2(\varepsilon + \omega) \mathbf{N}_1(\varepsilon + \omega) e^{-i\varepsilon\tau} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_1(\omega) \lambda_1^2(\omega) \mathbf{N}_1(\omega). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Analogamente, para o atenuador fazemos as transformações $\tau = t - t'$ e $\varepsilon = \varpi_2 + \varpi =$

$\omega_2 + \omega - 2\nu$, tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_{\omega-2\nu}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} \sigma_2(\varepsilon - \omega + 2\nu) \lambda_2^2(\varepsilon - \omega + 2\nu) N_2(\varepsilon - \omega + 2\nu) e^{-i\varepsilon\tau} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} \sigma_2(0) \lambda_2^2(0) N_2(0), & \text{para } \omega - 2\nu \simeq 0, \\ 0, & \text{para } \omega - 2\nu \gg 0, \\ \frac{1}{2} \sigma_2(2\nu - \omega) \lambda_2^2(2\nu - \omega) N_2(2\nu - \omega), & \text{para } \omega - 2\nu \ll 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vemos que a escolha $\nu = \omega$ leva à forma $\int_0^t d\tau \langle \Gamma_2^\dagger(t) \Gamma_2(t - \tau) \rangle = \frac{1}{2} \sigma_2(\omega) \lambda_2^2(\omega) N_2(\omega)$ para as correlações do amplificador, idêntica àquelas obtidas por Glauber ao considerar o oscilador invertido. Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.8) e voltando para a representação de Schrödinger, chegamos finalmente na equação mestra

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & \frac{i}{\hbar} [\rho(t), H_{HO}] + \frac{1}{2} \{ [\Gamma_1(N_1 + 1) + \Gamma_2 N_2] [2a\rho(t) a^\dagger - \rho(t) a^\dagger a - a^\dagger a \rho(t)] \\ & + [\Gamma_1 N_1 + \Gamma_2(N_2 + 1)] [2a^\dagger \rho(t) a - \rho(t) a a^\dagger - a a^\dagger \rho(t)] \}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde as taxas de atenuação e amplificação são dadas por $\Gamma_m = \gamma_m(\omega) = \sigma_m(\omega) \lambda_m^2(\omega)$.

3.2 Funções de quase-probabilidade

Partindo da equação mestra obtida na seção anterior, chegamos na equação de evolução da função característica normal ordenada $\chi(\eta, \eta^*, t) = \text{Tr} \{ \rho(t) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \}$, tal que

$$\frac{d\chi(\eta, \eta^*, t)}{dt} = \Phi \left[\frac{1}{2} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^* \frac{\partial}{\partial \eta^*} \right) + \mathcal{N} |\eta|^2 \right] \chi(\eta, \eta^*, t), \quad (3.15)$$

onde definimos a taxa efetiva de transferência $\Phi = \Gamma_1 - \Gamma_2$ e, através da quantidade $\Lambda = \Gamma_1 N_1 + \Gamma_2(N_2 + 1)$, definimos o número médio efetivo de fótons térmicos $\mathcal{N} = \Lambda / \Phi$. Vamos obter agora a solução da equação (3.15) supondo que o OH tenha sido preparado no estado inicial do tipo $|\Psi\rangle = \sum_{m=0}^M c_m |\beta^m\rangle$ (conforme desenvolvimento apresentado no apêndice A)

$$\begin{aligned} \chi(\eta, \eta^*, t) = & \sum_{m,n=0}^M c_m c_n^* \langle \beta^n | \beta^m \rangle \\ & \times \exp \left[\left(\eta \beta^{n*} e^{-i\omega t} - \eta^* \beta^m e^{i\omega t} \right) e^{-\Phi t/2} - \mathcal{N} |\eta|^2 (1 - e^{-\Phi t}) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mais adiante vamos fazer uso da solução obtida acima, para descrever os regimes de competição de dissipação $\times$ amplificação. Partindo de $\chi(\eta, \eta^*, t)$, obtemos a função P de Glauber-Sudarshan calculando uma transformada de Fourier bidimensional

$$\begin{aligned} P(\alpha, \alpha^*, t) &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta \exp(\alpha\eta^* - \alpha^*\eta) \chi(\eta, \eta^*, t) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m,n=0}^M c_m c_n^* \langle \beta^n | \beta^m \rangle \times \int d^2\eta \exp \left[\eta^* (\alpha - \beta^m e^{i\omega t - \Phi t/2}) \right. \\ &\quad \left. - \eta (\alpha^* - \beta^{n*} e^{-i\omega t - \Phi t/2}) - \mathcal{N} |\eta|^2 (1 - e^{-\Phi t}) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A integral que aparece acima é do tipo $\int d^2\eta \exp(A\eta^* - B\eta - C\eta\eta^*)$, cuja solução para A e B complexos e $C \geq 0$ (que representa o nosso caso) é $(\pi/c) \exp(-AB/C)$. Temos então que a função P de Glauber-Sudarshan é dada por

$$\begin{aligned} P(\alpha, \alpha^*, t) &= \frac{1}{\pi \mathcal{D}(t)} \sum_{m,n=0}^M c_m c_n^* \langle \beta^n | \beta^m \rangle \\ &\times \exp \left[- \frac{(\alpha - \beta^m e^{i\omega t - \Phi t/2}) (\alpha - \beta^n e^{i\omega t - \Phi t/2})^*}{\mathcal{D}(t)} \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde definimos a função $\mathcal{D} = \mathcal{N}(1 - e^{-\Phi t})$ que representa a taxa efetiva de dispersão. Notamos que esta dispersão só é nula, para $t \neq 0$, no caso em que $N_1 = \Gamma_2 = 0$. Diferentemente do que acontece com a evolução de um sistema acoplado a um atenuador, que se encontra à temperatura zero, a presença do amplificador proíbe uma evolução coerente mesmo quando ambos, o atenuador e o amplificador, estão à temperatura zero.

Se o OH é preparado em um estado coerente $|\Psi\rangle = |\beta\rangle$, a função P reduz-se a

$$P(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{1}{\pi \mathcal{D}(t)} \exp \left[- \frac{|\alpha - \beta e^{i\omega t - \Phi t/2}|^2}{\mathcal{D}(t)} \right]. \quad (3.19)$$

Da solução acima é possível obter os dois casos extremos analisados por Glauber em Ref. (20):

i) quando o OH acopla-se apenas ao atenuador ($\Gamma_2 = 0$), o que leva a

$$P_{(\Gamma_2=0)}(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{1}{\pi D(t)} \exp \left[- \frac{|\alpha - \beta e^{i\omega t - \Gamma_1 t/2}|^2}{D(t)} \right], \quad (3.20)$$

com dispersão $D(t) = N_1 (1 - e^{-\Gamma_1 t})$, ii) quando o OH acopla-se apenas ao amplificador

($\Gamma_1 = 0$), o que leva a

$$P_{(\Gamma_1 \rightarrow 0)}(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{1}{\pi \tilde{D}(t)} \exp \left[-\frac{|\alpha - \beta e^{i\omega t + \Gamma_2 t/2}|^2}{\tilde{D}(t)} \right], \quad (3.21)$$

com $\tilde{D}(t) = (N_2 + 1)(e^{\Gamma_2 t} - 1)$. Como já foi notado por Galuber (20), ao propor seu modelo com o oscilador invertido, o processo de difusão associado ao amplificador é finito mesmo à temperatura zero, diferente daquele vindo do atenuador que é nulo se $N_1 = 0$. Como será mostrado mais abaixo, esta propriedade tem consequências importantes na coerência de fase de um OH preparado em um estado de superposição.

3.3 Função de Wigner

Vamos agora calcular a função de Wigner W que será usada mais adiante para estimar a decoerência de estados de um OH sujeito aos processos de atenuação e amplificação. Como exemplo vamos escolher o caso em que o OH é preparado em um estado do tipo gato de Schrödinger $|\Psi_{SC}\rangle = \mathcal{C}(|\beta\rangle + |-\beta\rangle)$ (com $\mathcal{C}$ representando o fator de normalização do estado). Para calcular a função de Wigner, utilizamos novamente a função característica (3.16), de forma a obter

$$\begin{aligned} W(\zeta, \zeta^*, t) &= \frac{1}{\pi^2} \int \exp(\eta^* \zeta - \eta \zeta^*) \chi(\eta, \eta^*, t) e^{-|\eta|^2/2} d^2\eta \\ &= \sum_{m,n=0}^M c_m c_n^* \langle \beta^n | \beta^m \rangle \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta \exp \{ [\eta (\beta^{n*} e^{-i\omega t} - \zeta^*) - \eta^* (\beta^m e^{i\omega t} - \zeta)] e^{-\Phi t/2} \\ &\quad - |\eta|^2 [\mathcal{N}(1 - e^{-\Phi t}) + 1/2] \}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Temos, novamente, uma integral do tipo $\int d^2\eta \exp(A\eta^* - B\eta - C\eta\eta^*)$ a ser resolvida, neste caso com $A = (\zeta - \beta^m e^{i\omega t})$, $B = (\zeta - \beta^n e^{i\omega t - \Phi t})^*$ e $C = [\mathcal{N}(1 - e^{-\Phi t}) + 1/2]$. Usando novamente que $\int d^2\eta \exp(A\eta^* - B\eta - C\eta\eta^*) = (\pi/c) \exp(-AB/C)$, obtemos a função de Wigner para o estado $|\Psi_{SC}\rangle$, na forma

$$W(\zeta, \zeta^*, t) = \frac{2|\mathcal{C}|}{\pi \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{m,n=0}^1 \langle \beta^n | \beta^m \rangle \exp \left[-\frac{2(\zeta - \beta^m e^{i\omega t - \Phi t})}{\tilde{\mathcal{D}}} \right], \quad (3.23)$$

com $\tilde{\mathcal{D}} = 2\mathcal{N}(1 - e^{-\Phi t}) + 1$.

3.4 Mapeamento dos Regimes Associados à Competição Atenuação $\times$ Amplificação

Partindo da função característica $\chi(\eta, \eta^*, t)$, podemos obter a evolução temporal da excitação média do sistema calculando

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial (-\eta^*)} \chi(\eta, \eta^*, t) \right|_{\eta=\eta^*=0} \\ &= \sum_{m,n=0}^M \chi_m \chi_n^* \langle \beta^n | \beta^m \rangle \left[\beta^m (\beta^n)^* e^{-\Phi t} + \mathcal{N} (1 - e^{-\Phi t}) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Do resultado acima vemos que a dinâmica do processo de dissipação-amplificação é governada essencialmente pelos parâmetros Φ e $\mathcal{N}$. Para simplificar nossa análise dos comportamentos associados ao processo atenuação $\times$ amplificação, vamos assumir, sem perda de generalidade, que o OH esteja no estado inicial coerente $|\Psi\rangle = |\beta\rangle$. Tal escolha simplifica a equação (3.24) para $\langle a^\dagger a \rangle_t = |\beta|^2 e^{-\Phi t} + \mathcal{N} (1 - e^{-\Phi t})$. Com esta suposição plotamos na Fig. 13 a excitação $\langle a^\dagger a \rangle_t$ contra $\Gamma_1 t$, fixando $|\beta|^2 = 1.0$ e $N_1 = N_2 = 0.1$. Quando $\Gamma_2 < \Gamma_1$ a difusão aumenta até atingir seu valor assintótico $\mathcal{D} = \mathcal{N}$, e podemos observar três comportamentos distintos para a excitação média, dependendo da relação entre o parâmetro $\mathcal{N}$ e a intensidade $|\beta|^2$ do estado inicial:

- Para $\mathcal{N} < |\beta|^2$ a ação do atenuador supera àquela do amplificador e a excitação decai exponencialmente até atingir o valor $\mathcal{N} = 0.7$, obtido para $\Gamma_2 = 1/3$ (em unidades Γ_1), como indicado pela linha sólida grossa na Fig. 13.
- Para $\mathcal{N} = |\beta|^2$, que se obtém fixando $\Gamma_2 = (1 - N_1) / (2 + N_2) = 0.9/2.1$, o atenuador e o amplificador competem em igualdade, e a excitação permanece constante como mostrado pela linha sólida na Fig. 13.
- Para $\mathcal{N} > |\beta|^2$ o amplificador supera o atenuador (apesar da desigualdade $\Gamma_2 < \Gamma_1$), e a excitação aumenta exponencialmente até atingir o valor assintótico $\mathcal{N} = 1.3$, obtido para $\Gamma_2 = 1/2$, como indicado pela linha tracejada-pontilhada.

Existem dois outros regimes, que seguem das duas outras possíveis relações entre Γ_2 e Γ_1 , e que também estão mostrados na Fig. 13:

- Para $\Gamma_2 = \Gamma_1$ temos a difusão linear $\mathcal{D} = \Lambda t$ (obtida tomando-se o limite $\Phi \rightarrow 0$ na expressão para $\mathcal{D}$) e um limiar distinguindo os comportamentos exponenciais limitados,

definidos quando $\Gamma_2 < \Gamma_1$, do crescimento exponencial ilimitado para $\Gamma_2 > \Gamma_1$. A linha tracejada ilustra a evolução linear da excitação dada por $\langle a^\dagger a \rangle_t = |\beta|^2 + \Lambda t$ (obtida tomando-se o limite $\Phi \rightarrow 0$ na expressão (3.24)).

- Finalmente, como já foi dito acima, se $\Gamma_2 > \Gamma_1$ o amplificador supera totalmente o atenuador e tanto a excitação como a taxa de difusão seguem o comportamento exponencial ilimitado, como indicado pela linha pontilhada obtida no caso em que $\Gamma_2 = 1.01$.

Figura 13 – Regimes do processo atenuação $\times$ amplificação

3.5 Variâncias

Calculando as variâncias das quadraturas do oscilador, usando a função característica (3.16), obtemos para ambas as quadraturas ($\ell = 1, 2$)

$$[\Delta X_\ell(t)]^2 = \frac{\hbar}{4} [1 + \mathcal{D}(t)], \quad (3.25)$$

o que mostra que a incerteza mínima ocorre na ausência do processo de difusão. A difusão só é nula no caso $\mathcal{N} = 0$, implicando que o amplificador deve ser desligado ($\Gamma_2 = 0$) de maneira que $\mathcal{D} = \Gamma_1 N_1$, e consequentemente, devemos considerar o atenuador à temperatura zero. Em qualquer outro caso a taxa de difusão aumenta proporcionalmente à excitação

$\langle a^\dagger a \rangle_t$, proibindo, como concluído por Glauber (20), a viabilidade de um *laser gain tube* como proposto por N. Herbert (31) para clonar estados de superposição para, por exemplo, a realização de comunicação superluminal.

3.6 Função P de Glauber-Sudarshan

A função $P(\alpha, \alpha^*, t)$ aparecendo em (3.19), associada ao OH preparado no estado coerente $|\beta\rangle$, fornece um cenário complementar dos diferentes regimes associados ao processo dissipação $\times$ amplificação. De fato, preparando estados coerentes $|\beta\rangle$, no instante de tempo $t = 0$, partimos da função P em forma da delta $\delta^{(2)}(\alpha - \beta)$. Em $t > 0$, a delta de Dirac transforma-se em uma Gaussiana, cuja dispersão $\mathcal{D}(t)$ aumenta quer o atenuador e o amplificador estejam, ambos, à temperatura zero ou não.

Nas figuras abaixo plotamos, no plano $Re(\alpha) \times Im(\alpha)$, a evolução temporal da projeção do valor máximo da função P . As curvas de 14 até 18 correspondem exatamente às aquelas da Fig. 13, com o mesmo regime de parâmetros, com exceção de $\Gamma_1 t$ que nas figuras a seguir varia entre 0 e 20.

- Para o caso $\Gamma_2 < \Gamma_1$, podemos observar das Figs. 14, 15 e 16 que a projeção da função P decai como uma espiral exponencial até a origem seguindo o caminho determinado por $\alpha(t) = \beta e^{i\omega t - \Phi t/2}$. Assintoticamente, a função P atinge o valor $(\pi\mathcal{N})^{-1} e^{-(|\alpha|^2/\mathcal{N})}$, a partir do qual podemos calcular as excitações do sistema usando: $\langle a^\dagger a \rangle = Tr(\rho a^\dagger a)$ onde $\rho = \int P(\alpha, \alpha^*, t) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$, o que nos leva a obter os valores $\mathcal{N} = 0.7, 1.0$, e 1.3 , dependendo da escolha $\Gamma_2 = 1/3, 0.9/2.1$, e $1/2$, respectivamente. Evidentemente, o fato da projeção da função P espiralar em direção à origem não implica uma diminuição na excitação do sistema.
- No caso em que $\Gamma_2 = \Gamma_1$ temos a distribuição $P = (\pi\Lambda t)^{-1} \exp - \left(|\alpha - \beta e^{i\omega t}|^2 / \Lambda t \right)$ cuja projeção mantém-se em um círculo de raio β , como mostrado na Fig 17. Este caso corresponde ao crescimento linear da excitação ilustrado na Fig. 13.
- Finalmente, para $\Gamma_2 > \Gamma_1$ obtemos, como mostrado na Fig. 18, uma função P cuja projeção segue um crescimento contínuo seguindo uma espiral ascendente.

Figura 14 – $\Gamma_2 = 1/3$

Figura 15 – $\Gamma_2 = 0.9/2.1$

Figura 16 – $\Gamma_2 = 1/2$

Figura 17 – $\Gamma_2 = \Gamma_1$

Figura 18 – $\Gamma_2 = 1.01$

3.7 Decoerência

Partindo da função de Wigner (3.22), obtida quando o OH é preparado em um estado do tipo gato de Schrödinger $|\Psi_{SC}\rangle = \mathcal{N}(|\beta\rangle + |-\beta\rangle)$, vamos agora calcular o tempo de decoerência utilizando o formalismo apresentado na Ref. (7). Este formalismo se aplica sempre que existe uma difusão diferente de zero, fato este que dificulta a obtenção do tempo de decoerência a partir da evolução do operador densidade. Quando temos difusão concomitantemente ao decaimento dos termos de interferência, devemos considerar ambos independentemente, estimando o tempo de difusão τ_{diff} e o tempo de decaimento dos termos de interferência da função de Wigner τ_{int} . O tempo de decoerência é obtido, então, usando a fórmula

$$\frac{1}{\tau_D} = \frac{1}{\tau_{diff}} + \frac{1}{\tau_{int}}, \quad (3.26)$$

com o tempo de difusão τ_{diff} , que mostra a tendência de difusão do estado, definido como

$$\frac{1}{\tau_{diff}} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{D}}(t) \right|_{t=0}, \quad (3.27)$$

Note que no caso em que $\tau_{diff} = 0$ devemos eliminar esta quantidade da definição do tempo de decoerência em (3.26). Para definir o tempo τ_{int} , primeiro decompomos a função de Wigner em seus elementos diagonais e não-diagonais como $W(\zeta, \zeta^*, t) = \sum_{m,n=0}^1 W_{m,n}(\zeta, \zeta^*, t)$, assim,

no caso de interesse, temos

$$W_{m,n}(\zeta, \zeta^*, t) = \frac{2|\mathcal{C}|}{\pi \tilde{\mathcal{D}}} \langle \beta^n | \beta^m \rangle \exp \left[\frac{-[\zeta - \beta^m(t)][\zeta - \beta^n(t)]^*}{\tilde{\mathcal{D}}} \right], \quad (3.28)$$

onde $\beta(t) = \beta e^{i\omega t - \Phi t}$. Dos elementos diagonais e não-diagonais da função de Wigner definimos a razão

$$\begin{aligned} \Xi_{m,n}(t) &\equiv \frac{W_{m,m}(\zeta, \zeta^*, t) W_{n,n}(\zeta, \zeta^*, t)}{W_{m,n}(\zeta, \zeta^*, t) W_{n,m}(\zeta, \zeta^*, t)} \\ &= \exp(|\beta^n(0) - \beta^m(0)|^2) \exp \left[\frac{-2|\beta^m(t) - \beta^n(t)|^2}{\tilde{\mathcal{D}}(t)} \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

que fornece uma medida do decaimento da interferência através da função temporal

$$\begin{aligned} \wp_{m,n}(t) &\equiv \frac{\Xi_{m,n}(0)}{\Xi_{m,n}(t)} \\ &= \exp(-|\beta^n(0) - \beta^m(0)|^2) \exp(-|\beta^m(0) - \beta^n(0)|^2) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{2|\beta^m(t) - \beta^n(t)|^2}{\tilde{\mathcal{D}}(t)}\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

A função $\wp_{m,n}(t)$ definida acima, é igual a unidade em $t = 0$, e decai para $t > 0$. Definimos o tempo de interação τ_{int} , a partir de $\wp_{m,n}(t)$, generalizando a relação $\wp_{m,n}(\tau_D) = e^{-1}$, usada para calcular o tempo de decoerência, no caso de reservatório à temperatura zero (32), para

$$\wp_{m,n}(\tau_{int}) = \exp\left[-\frac{4}{\tilde{\mathcal{D}}(\tau_{int})}\right], \quad (3.31)$$

que corresponde a uma medida do decaimento dos termos de interferência da função de Wigner deduzindo sua difusão, comum a todos os elementos diagonais e não diagonais em (3.28). Este procedimento é equivalente a uma análise do decaimento da interferência em um referencial onde os termos da diagonal não evoluem. Da definição (3.27) calculamos o tempo de difusão para o estado do tipo “gato de Schrödinger”

$$\frac{1}{\tau_{diff}} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{D}}(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} 2\frac{\Lambda}{\Phi}(1 - e^{-\Phi t}) + 1 \right|_{t=0} = 2\Lambda.$$

O tempo para a eliminação dos termos de coerência de fase é obtido usando (3.31)

$$\wp_{m,n}(\tau_{int}) = \exp\left[-\frac{4}{2\mathcal{N}(1 - e^{-\Phi\tau_{int}}) + 1}\right], \quad (3.32)$$

e a equação (3.30)

$$\begin{aligned} \wp_{m,n}(\tau_{int}) &= \exp(-|\beta^n(0) - \beta^m(0)|^2) \exp(-|\beta^m(0) - \beta^n(0)|^2) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{2|\beta^m(\tau_{int}) - \beta^n(\tau_{int})|^2}{\tilde{\mathcal{D}}(\tau_{int})}\right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

substituindo a expressão para $\wp_{m,n}(\tau_{int})$ obtida em (3.33) na expressão (3.32), notando que $\beta(\tau_{int}) = \beta e^{i\omega\tau_{int} - \Phi\tau_{int}}$, e igualando os argumentos das exponenciais chegamos em

$$-2|\beta^m(0) - \beta^n(0)|^2 + \frac{2|\beta^m - \beta^n|^2 e^{-\Phi\tau_{int}}}{2\mathcal{N}(1 - e^{-\Phi\tau_{int}}) + 1} = -\frac{4}{2\mathcal{N}(1 - e^{-\Phi\tau_{int}}) + 1}, \quad (3.34)$$

no regime de acomplamento fraco, podemos expandir as exponenciais $e^{\Phi\tau_{int}}$ até primeira ordem em Φ , para obter da expressão acima o valor de τ_{int} , que resulta em

$$\tau_{int} = \frac{2}{|\beta^m(0) - \beta^n(0)|^2 (2\Lambda + \Phi)}. \quad (3.35)$$

Para o estado $|\Psi_{SC}\rangle$ temos que $|\beta^m(0) - \beta^n(0)|^2 = 4|\beta|^2$, de forma que o tempo de decoerência definido em (3.26) torna-se

$$\frac{1}{\tau_D} = 2\Lambda + 2|\beta|^2 (2\Lambda + \Phi), \quad (3.36)$$

que pode ser reescrito como

$$\tau_D = \frac{1}{2|\beta|^2 (2\Lambda + \Phi) + 2\Lambda} = \frac{1}{2|\beta|^2 [\Lambda + (1 + N_1)\Gamma_1 + N_2\Gamma_2] + 2\Lambda}. \quad (3.37)$$

No caso em que $\Gamma_2 = 0$ e $N_1 = 0$ a expressão acima para o tempo de decoerência reduz-se ao resultado bem conhecido $\tau_D = (2|\beta|^2\Gamma_1)^{-1}$. Se $\Gamma_2 = 0$ e $N_1 \neq 0$ o tempo de decoerência, dado por $\tau_D = [2|\beta|^2\Gamma_1(2N_1 + 1) + 2N_1]^{-1}$, recupera o resultado obtido em (32). Se $\Gamma_2 \neq 0$ e $N_1 = N_2 = 0$, temos que $\Lambda = \Gamma_2$ e o tempo de decoerência, dado por $\tau_D = [2|\beta|^2(\Gamma_2 + \Gamma_1) + 2\Gamma_2]^{-1}$, mostra novamente que o amplificador introduz ruído no sistema mesmo quando se encontra à temperatura zero.

3.8 Possíveis aplicações: da Óptica Atômica à Eco-nofísica

Existe um grande número de sistemas que são governados pela ação conjunta de amplificadores e atenuadores, tanto dentro quanto fora do domínio da física. Dentro da física, o acomplamento inevitável de um sistema quântico com o meio ambiente impõe a existência de uma taxa Γ_1 diferente de zero que representa ingrediente essencial para a explicação do processo de decoerência. Assim, diferentemente da taxa de amplificação Γ_2 , Γ_1 é sempre parte de uma evolução quântica realista. No entanto, apesar de não ser inevitável como o processo de dissipação, processos de amplificação são ingredientes familiares para o controle de evoluções coerentes. Em óptica atômica, a manipulação de estados eletrônicos é feita através de campos clássicos de amplificação associados a campos quânticos de radiação ou vibração; inversamente, a manipulação de campos de radiação ou vibracionais é obtida através de suas interações com átomos bombeados (37,38). Aqui estamos discutindo o papel que o amplificador multimodal poderia desempenhar na interação átomo-campo. Como dito

acima, o amplificador pode ser útil em esquemas de engenharia de reservatórios.

Fora da física, o esquema de atenuação $\times$ amplificação apresentado acima pode ser aplicado em uma grande variedade de processos, desde modelos evolucionários (33) até econofísica (34). De fato, a maioria dos sistemas biológicos, assim como o mercado de capitais, são regidos por mecanismos de ganhos e perdas, convenientemente descrito por uma equação mestra. Outro ingrediente essencial, principalmente na descrição do mercado de capitais, é a estocasticidade. Neste contexto, nossa equação mestra (2.36) será empregada para descrever a evolução de sistemas quânticos estocasticamente acoplados a ambos, atenuador e amplificador.

3.8.1 Óptica Atômica

Seguindo o raciocínio da Ref. (35), onde um átomo de dois níveis interage com um modo da cavidade sob as simultâneas ações dos processos de amplificação linear e paramétrica, parece ser interessante analisar a interação do sistema átomo-campo quando o modo da cavidade encontra-se acoplado a um atenuador e a um amplificador quânticos. Notamos que o bem conhecido limiar entre os comportamentos da excitação de um modo em uma cavidade ideal sob ação de um regime de amplificação paramétrica também se encontra presente na análise feita em nosso sistema quando acoplado a um atenuador e a um amplificador quânticos. No caso do modo parametricamente amplificado o parâmetro efetivo que comanda os comportamentos distintos da excitação (i.e., que faz o papel da taxa Γ_2/Γ_1 no caso do regime de amplificação $\times$ dissipação) é dado pela razão entre a amplitude do campo de amplificação e a dessintonia entre este e o modo da cavidade.

No caso em que o átomo interage com o modo na cavidade sob a competição atenuação $\times$ amplificação, devemos adicionar o sistema atômico $H = \hbar\omega_0 S_z$ ao hamiltoniano livre H_0 , onde S_z descreve um único átomo de dois níveis σ_z , por exemplo, ou mesmo uma amostra destes átomos $\sum_i \sigma_z^{(i)}$. Ao termo de interação devemos adicionar o processo ressonante $\hbar g (aS_+ + a^\dagger S_-)$ ou o dispersivo $\hbar (g^2/\Delta) a^\dagger a S_z$, onde g é a frequência de Rabi, $\delta = |\omega - \omega_0|$ é a dissonância entre o átomo e o campo, e $S_\pm = \sum_i \sigma_\pm^{(i)}$ são os operadores atômicos coletivos de levantamento e abaixamento.

3.8.2 Econofísica

A fim de se introduzir acoplamentos estocásticos $\tilde{\Gamma}_m$ do OH com o atenuador e o amplificador, consideramos $\tilde{\Gamma}_m = \Gamma_m + \mathfrak{s}_m \Delta_m$ sendo $\mathfrak{s}_m$ a intensidade do parâmetro de

flutuação Δ_m que é obtido tomando-se amostras de uma distribuição apropriada. Na Fig. 19 mostramos a excitação média $\langle a^\dagger a \rangle_t$ contra $\Gamma_1 t$, considerando $\mathfrak{s}_m = 10^{-2}$, e Δ_m para ($m = 1, 2$) tomados a partir de uma distribuição uniforme. Consideramos na Fig. 19 os mesmos parâmetros que aqueles da Fig. 13, fixando $|\beta|^2 = 1.0$ e $N_1 = N_2 = 0.1$, obtemos os três comportamentos distintos que seguem da escolha $\Gamma_2 < \Gamma_1$. Evidentemente, em um modelo realista de mercado, os valores $\tilde{\Gamma}_m$ devem ser fornecidos por um sistema de equações acopladas cujos parâmetros sejam continuamente atualizadas por agentes externos.

Figura 19 – Acoplamentos estocásticos

4 *Emissão Superradiante na Presença de Flutuações Térmicas*

4.1 Equação Mestra Derivada da Aproximação de Campo Médio, na Presença de Flutuações Térmicas

Neste capítulo vamos tratar da emissão superradiante na presença de flutuações térmicas. Para isto vamos partir da equação estocástica de Itô

$$|d\psi\rangle = (C dt + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{B}) |\psi\rangle, \quad (4.1)$$

e calcular a evolução temporal do operador densidade $\rho(t) = \overline{|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|}$. Vamos usar o cálculo de Itô para escrever (vamos considerar $\hbar = 1$)

$$d\rho(t) = -i[H, \rho(t)]dt + \sum_{i,j} \left[-\frac{1}{2} \left(\rho(t) A_j^\dagger A_i + A_i^\dagger A_j \rho(t) \right) \overline{dB_i dB_j} + A_i \rho(t) A_j^\dagger \overline{dB_i dB_j} \right], \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{A} \equiv \{A_i\}$ é um conjunto de operadores e $\mathbf{B} \equiv \{B_i\}$ um processo de Wiener. Vamos considerar, neste trabalho, o sistema descrito pelo hamiltoniano

$$H = H_S + H_R + H_I \quad (4.3)$$

onde H_S representa o hamiltoniano do sistema, H_R o do reservatório térmico e H_I o de interação entre ambos, dados por

$$\begin{aligned} H_S &= \omega_0 S_0, \\ H_R &= \sum_m \omega_m b_m^\dagger b_m, \\ H_I &= \sum_m k_m S_- b_m^\dagger + k_m^* S_+ b_m, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde os operadores

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{i=1}^N s_+(i), \\ S_- &= (S_+)^\dagger, \\ S_0 &= \sum_{i=1}^N s_0(i), \end{aligned} \quad (4.5)$$

satisfazem a álgebra $SU(2)$.

O processo de Wiener que aparece na equação (4.2) é dado por $\overline{dB_i dB_j} = \lambda \delta_{i,j} dt$, onde λ é o parâmetro que irá descrever as flutuações térmicas. Com isso em mãos podemos reescrever a equação (4.2) como

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H, \rho(t)] - \frac{\lambda}{2} [\rho(t) A^\dagger A + A^\dagger A \rho(t)] + \lambda A \rho(t) A^\dagger. \quad (4.6)$$

A fim de obter a equação mestra que descreve o nosso sistema passamos à descrição da equação acima na representação de interação. Para isto fazemos a transformação

$$\rho^I(t) = U^\dagger(t) \rho(t) U(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \rho(t) e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (4.7)$$

onde $H_0 = H_S + H_R$, de forma que

$$\frac{d\rho^I(t)}{dt} = e^{iH_0 t/\hbar} \frac{d\rho(t)}{dt} e^{-iH_0 t/\hbar} + i[H_0, \rho^I(t)]. \quad (4.8)$$

Na representação de interação a equação (4.6) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^I(t)}{dt} &= -i[V(t), \rho^I(t)] - \frac{\lambda}{2} \{\rho^I(t), U^\dagger(t) A^\dagger U(t) U^\dagger(t) A U(t)\} \\ &\quad + \lambda U^\dagger(t) A U(t) \rho^I(t) U^\dagger(t) A^\dagger U(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Integrando esta equação obtemos

$$\begin{aligned}\rho^I(t) &= \rho^I(0) - i \int_0^t dt' [V(t'), \rho^I(t')] \\ &- \frac{\lambda}{2} \int_0^t dt' \{ \rho^I(t'), U^\dagger(t') A^\dagger U(t') U^\dagger(t') A U(t') \} \\ &+ \lambda \int_0^t dt' U^\dagger(t') A U(t') \rho^I(t') U^\dagger(t') A^\dagger U(t')\end{aligned}\quad (4.10)$$

que será, mais tarde, substituída na equação (4.9).

Vamos agora realizar uma série de aproximações que nos permitem chegar na equação mestra de interesse. Primeiramente tomamos o traço nas variáveis do reservatório

$$\rho_N^I(t) = \text{Tr}_R \rho^I(t). \quad (4.11)$$

Em seguida consideramos que em $t = 0$ o sistema e o reservatório estão desacoplados, acoplando-se subitamente em $t = 0^+$, tal que

$$\rho^I(0) = \rho_N^I(0) \otimes \rho_R^I(0). \quad (4.12)$$

Vamos considerar ainda que se trata de um reservatório markoviano, de forma que

$$\rho_R(t) = \rho_R(0), \quad (4.13)$$

e conseqüentemente

$$\rho^I(t) = \rho_N^I(t) \otimes \rho_R^I(0). \quad (4.14)$$

Seguindo os procedimentos acima, chegamos em

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_N^I(t)}{dt} &= - \int_0^t dt' \text{Tr}_R [V(t), [V(t'), \rho^I(t')]] - \frac{\lambda}{2} \text{Tr}_R \{ \rho^I(0), U^\dagger(t) A^\dagger U(t) U^\dagger(t) A U(t) \} \\ &+ \lambda \text{Tr}_R U^\dagger(t) A U(t) \rho^I(0) U^\dagger(t) A^\dagger U(t),\end{aligned}\quad (4.15)$$

onde usamos

$$\text{Tr}_R [V(t), \rho^I(0)] = 0, \quad (4.16)$$

e desprezamos os termos de ordem λ^2 . Vamos agora voltar para a representação de Schrödin-

ger, fazendo a transformação $\rho(t) = U(t) \rho^I(t) U^\dagger(t)$ que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_N(t)}{dt} = & -i[H_S, \rho_N(t)] - U(t) \int_0^t dt' Tr_R [V(t), [V(t'), \rho^I(t')]] U^\dagger(t) \\ & - \frac{\lambda}{2} U(t) Tr_R \{ \rho^I(0), U^\dagger(t) A^\dagger U(t) U^\dagger(t) A U(t) \} U^\dagger(t) \\ & + \lambda U(t) Tr_R [U^\dagger(t) A U(t) \rho^I(0) U^\dagger(t) A^\dagger U(t)] U^\dagger(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $\rho_N(t)$ representa o operador densidade do sistema de N átomos de dois níveis na representação de Schrödinger,

$$V(t) = \sum_m (k_m S_- b_m^\dagger e^{-i(2\omega_0 - \omega_m)t/\hbar} + k_m^* S_+ b_m e^{i(2\omega_0 - \omega_m)t/\hbar}). \quad (4.18)$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} U(t) \int_0^t dt' Tr_R [V(t), [V(t'), \rho^I(t')]] U^\dagger(t) = \\ - (\xi_{12} [S_-, S_+ \rho_N] + \xi_{21} [S_+, S_- \rho_N] + h.c), \end{aligned} \quad (4.19)$$

com

$$\begin{aligned} \xi_{12} &= \int_0^\infty dt' \exp \{ -i\omega_0(t - t') \} Tr_R [F_+(t - t') F_- \rho_R(0)] \\ \xi_{12} &= \int_0^\infty dt' \exp \{ i\omega_0(t - t') \} Tr_R [F_-(t - t') F_+ \rho_R(0)], \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned} F_+ &= \sum_m k_m b_m^\dagger, \\ F_- &= (F_+)^\dagger. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A equação (4.17) torna-se então

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_N(t)}{dt} = & -i[H_S, \rho_N(t)] - (\xi_{12} [S_-, S_+ \rho_N] + \xi_{21} [S_+, S_- \rho_N] + h.c) \\ & - \frac{\lambda}{2} U(t) Tr_R \{ \rho^I(0), U^\dagger(t) A^\dagger U(t) U^\dagger(t) A U(t) \} U^\dagger(t) \\ & + \lambda U(t) Tr_R [U^\dagger(t) A U(t) \rho^I(0) U^\dagger(t) A^\dagger U(t)] U^\dagger(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Seguindo os passos da Ref. (26) o operador densidade para p átomos ($p < N$), é obtido calculando o traço sobre os estados das partículas restantes

$$\rho_p = Tr_{p+1, \dots, N} \rho_N, \quad (4.23)$$

o que nos permite escrever a equação (4.22) como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_N(t)}{dt} = & -iTr_{p+1,\dots,N} [H_S, \rho_N(t)] - Tr_{p+1,\dots,N} (\xi_{12} [S_-, S_+ \rho_N] + \xi_{21} [S_+, S_- \rho_N] + h.c) \\ & - Tr_{p+1,\dots,N} \frac{\lambda}{2} U(t) Tr_R \{ \rho^I(0), U^\dagger(t) A^\dagger U(t) U^\dagger(t) A U(t) \} U^\dagger(t) \\ & + Tr_{p+1,\dots,N} \lambda U(t) Tr_R [U^\dagger(t) A U(t) \rho^I(0) U^\dagger(t) A^\dagger U(t)] U^\dagger(t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4.24) nos leva a

$$\begin{aligned} Tr_{p+1,\dots,N} [H_S, \rho_N(t)] = & \omega_0 Tr_{p+1,\dots,N} \left[\sum_{i=1}^p s_0(i) \rho_N(t) + \sum_{i=p+1}^N s_0(i) \rho_N(t) \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^p \rho_N(t) s_0(i) - \sum_{i=p+1}^N \rho_N(t) s_0(i) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

mas $Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i=1}^p s_0(i) \rho_N(t) = \sum_{i=1}^p s_0(i) \rho_p(t)$. Nos resta calcular

$$Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i=p+1}^N s_0(i) \rho_N(t) = Tr_{p+1} s_0(p+1) \rho_N(t) \dots Tr_N s_0(N) \rho_N(t). \quad (4.26)$$

A fim de calcular o traço acima vamos calcular o traço sob um dos $N - p$ átomos de dois níveis, digamos o j -ésimo átomo

$$Tr_j [s_0(j) \rho_1(t) \dots \rho_{j-1}(t) \rho_j(t) \rho_{j+1}(t) \dots \rho_N(t)], \quad (4.27)$$

mas

$$\begin{aligned} Tr_j [s_0(j) \rho_j(t)] &= \langle e | s_0(j) | e \rangle + \langle g | s_0(j) | g \rangle \\ &= \langle e | (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) | e \rangle + \langle g | (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) | g \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Assim obtemos

$$Tr_{p+1,\dots,N} [H_S, \rho_N(t)] = \sum_{i=1}^p [\omega_0 s_0(i), \rho_p(t)]. \quad (4.29)$$

Agora vamos calcular o traço sob os termos que multiplicam ξ_{12} e ξ_{21}

$$\begin{aligned}
Tr_{p+1,\dots,N} [S_-, S_+ \rho_N(t)] &= Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i,j=1}^N [s_-(i) s_+(j) \rho_N(t) - s_+(j) \rho_N(t) s_-(i)] \\
&= Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{i,j=1}^p + \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^N + \sum_{i=p+1}^N \sum_{j=1}^p + \sum_{i,j=p+1}^N \right\} s_-(i) s_+(j) \rho_N(t) \\
&\quad - Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{i,j=1}^p + \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^N + \sum_{i=p+1}^N \sum_{j=1}^p + \sum_{i,j=p+1}^N \right\} s_+(j) \rho_N(t) s_-(i).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Vemos que os termos onde as somas em i e j vão de 1 até p resultam em

$$Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i,j=1}^p s_-(i) s_+(j) \rho_N(t) - s_+(j) \rho_N(t) s_-(i) = \sum_{i,j=1}^p [s_-(i), s_+(j) \rho_p(t)] \tag{4.31}$$

enquanto que os termos em que somente as somas em i vão de 1 até p resultam em

$$\begin{aligned}
&Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^N [s_-(i) s_+(j) \rho_N(t) - s_+(j) \rho_N(t) s_-(i)] \\
&= \sum_{i=1}^p s_-(i) Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{j=p+1}^N s_+(j) \rho_N(t) - Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{j=p+1}^N s_+(j) \rho_N(t) \sum_{i=1}^p s_-(i) \\
&= \left[\sum_{i=1}^p s_-(i), Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{j=p+1}^N s_+(j) \rho_N(t) \right],
\end{aligned} \tag{4.32}$$

e os termos em que somente as somas em j vão de 1 até p resultam em

$$\begin{aligned}
&Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{j=1}^p \sum_{i=p+1}^N [s_-(i) s_+(j) \rho_N(t) - s_+(j) \rho_N(t) s_-(i)] \\
&= Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i=p+1}^N \left[s_-(i) \sum_{j=1}^p s_+(j) \rho_N(t) - \sum_{j=1}^p s_+(j) \rho_N(t) s_-(i) \right] \\
&= \sum_{j=1}^p s_+(j) Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i=p+1}^N [s_-(i), \rho_N(t)] = 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Restam ainda os termos onde as somas em i e j vão de $p+1$ até N que resultam em

$$\begin{aligned}
&Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i,j=p+1}^N [s_-(i) s_+(j) \rho_N(t) - s_+(j) \rho_N(t) s_-(i)] \\
&= Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{i,j=p+1}^N [s_-(i), s_+(j) \rho_N(t)] = 0,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde usamos a propriedade $Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$ para mostrar que o traço que aparece em (4.34) é nulo. Resta agora calcular o traço que aparece em (4.32)

$$\begin{aligned} Tr_{p+1,\dots,N} \sum_{j=p+1}^N s_+(j) \rho_N(t) &= Tr_{p+1,\dots,N} [s_+(p+1) \rho_N(t) + \dots + s_+(N) \rho_N(t)] \\ &= Tr_{p+1} s_+(p+1) Tr_{p+2,\dots,N} \rho_N(t) + \dots + Tr_N s_+(N) Tr_{p+1,\dots,N-1} \rho_N(t). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Supondo que todos os átomos são idênticos, obtemos

$$\begin{aligned} Tr_{p+1} s_+(p+1) Tr_{p+2,\dots,N} \rho_N(t) + \dots + Tr_N s_+(N) Tr_{p+1,\dots,N-1} \rho_N(t) \\ = (N-p) Tr_{p+1} s_+(p+1) \rho_{p+1}(t), \end{aligned} \quad (4.36)$$

tal que

$$\begin{aligned} Tr_{p+1,\dots,N} [S_-, S_+ \rho_N(t)] &= \sum_{i,j=1}^p [s_-(i), s_+(j) \rho_p(t)] \\ &+ (N-p) \left[\sum_{i=1}^p s_-(i), Tr_{p+1} s_+(p+1) \rho_{p+1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para obter $Tr_{p+1,\dots,N} [S_+, S_- \rho_N]$ basta fazer as substituições $s_-(i) \rightarrow s_+(i)$, $s_+(j) \rightarrow s_-(j)$ e $s_+(p+1) \rightarrow s_-(p+1)$ em (4.37), de forma a obtermos

$$\begin{aligned} Tr_{p+1,\dots,N} [S_+, S_- \rho_N] &= \sum_{i,j=1}^p [s_+(i), s_-(j) \rho_p(t)] \\ &+ (N-p) \left[\sum_{i=1}^p s_+(i), Tr_{p+1} s_-(p+1) \rho_{p+1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Substituindo (4.29), (4.37) e (4.38) em (4.24) obtemos, por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_p(t)}{dt} = & -i\omega_0 \left[\sum_{i=1}^p s_0(i), \rho_p(t) \right] - \left\{ \xi_{12} \left(\sum_{i,j=1}^p [s_-(i), s_+(j) \rho_p(t)] \right. \right. \\
& \left. \left. + (N-p) \left[\sum_{i=1}^p s_-(i), Tr_{p+1} s_+(p+1) \rho_{p+1}(t) \right] \right) \right. \\
& \left. + \xi_{21} \left(\sum_{i,j=1}^p [s_+(i), s_-(j) \rho_p(t)] + (N-p) \left[\sum_{i=1}^p s_+(i), Tr_{p+1} s_-(p+1) \rho_{p+1}(t) \right] \right) + h.c \right\} \\
& - Tr_{p+1, \dots, N} \frac{\lambda}{2} U(t) Tr_R \{ \rho^I(0), U^\dagger(t) A^\dagger U(t) U^\dagger(t) A U(t) \} U^\dagger(t) \\
& + Tr_{p+1, \dots, N} \lambda U(t) Tr_R [U^\dagger(t) A U(t) \rho^I(0) U^\dagger(t) A^\dagger U(t)] U^\dagger(t).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Neste ponto especificamos a escolha do operador A de forma a representar flutuações estocásticas associadas ao reservatório térmico

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^p s_-(i), \\
A^\dagger &= \sum_{i=1}^p s_+(i),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

assim a equação (4.39) torna-se

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_p(t)}{dt} = & -i\omega_0 \left[\sum_{i=1}^p s_0(i), \rho_p(t) \right] - \left\{ \xi_{12} \left(\sum_{i,j=1}^p [s_-(i), s_+(j) \rho_p(t)] \right. \right. \\
& \left. \left. + (N-p) \left[\sum_{i=1}^p s_-(i), Tr_{p+1} s_+(p+1) \rho_{p+1}(t) \right] \right) \right. \\
& \left. + \xi_{21} \left(\sum_{i,j=1}^p [s_+(i), s_-(j) \rho_p(t)] + (N-p) \left[\sum_{i=1}^p s_+(i), Tr_{p+1} s_-(p+1) \rho_{p+1}(t) \right] \right) + h.c \right\} \\
& - \frac{\lambda}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^p ([\rho_p(0) s_+(j), s_-(i)] - [s_-(i) \rho_p(0), s_+(j)]) \right. \\
& \quad + (N-p) \left[Tr_{p+1} \rho_{p+1}(0) s_+(p+1), \sum_{i=1}^p s_-(i) \right] \\
& \quad \left. - (N-p) \left[Tr_{p+1} s_-(p+1) \rho_{p+1}(0), \sum_{j=1}^p s_+(j) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Se $p = 1$, a equação mestra acima simplifica-se na forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_1(t)}{dt} = & -i\omega_0 [s_0, \rho_1(t)] - \{\xi_{12} ([s_-, s_+ \rho_1(t)] + (N-1) [s_-, Tr_2 s_+ (2) \rho_2(t)]) \\
& + \xi_{21} ([s_+, s_- \rho_1(t)] + (N-1) [s_+, Tr_2 s_- (2) \rho_2(t)]) + h.c\} \\
& -i [H_0(\rho_1), \rho_1(0)] - \frac{\lambda}{2} \{([\rho_1(0) s_+, s_-] - [s_- \rho_1(0), s_+]) \\
& + (N-1) ([Tr_2 \rho_2(0) s_+ (2), s_-] - [Tr_2 s_- (2) \rho_2(0), s_+])\}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Desprezando as correlações estatísticas entre os átomos, o operador densidade para dois corpos pode ser fatorado como o produto de dois operadores densidade para um corpo $\rho_2 = \rho_1 \otimes \rho_1$. Levando em conta este fato na equação acima obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_1(t)}{dt} = & -i [H_{SR}(\rho_1), \rho_1(t)] - \frac{\gamma}{2} \{\bar{n} [s_- s_+ \rho_1(t) + \rho_1(t) s_- s_+ - 2s_+ \rho_1(t) s_-] \\
& (\bar{n} + 1) [s_+ s_- \rho_1(t) + \rho_1(t) s_+ s_- - 2s_- \rho_1(t) s_+]\} \\
& -i [H_0(\rho_1), \rho_1(0)] - \frac{\lambda}{2} [s_+ s_- \rho_1(0) + \rho_1(0) s_+ s_- - 2s_- \rho_1(0) s_+],
\end{aligned} \tag{4.43}$$

onde

$$\gamma = \pi g(\omega_0) |k(\omega_0)|^2 (\langle b_{\omega_0}^\dagger b_{\omega_0} \rangle - \langle b_{\omega_0}^\dagger b_{\omega_0} \rangle), \tag{4.44}$$

e $\bar{n}$ representa o número de quanta à temperatura T do reservatório. As somas sobre os modos discretos m foram transformadas em uma integral sobre um espectro contínuo de frequências, com $g(\omega)$ sendo a densidade de frequências. Os hamiltonianos que aparecem nos comutadores da equação mestra (4.43) são operadores efetivos dados por

$$H_{SR}(\rho_1) = \varpi s_z + (N-1) [(2\Delta\omega \langle s_x \rangle - \gamma \langle s_y \rangle) s_x + (2\Delta\omega \langle s_y \rangle + \gamma \langle s_x \rangle) s_y], \tag{4.45}$$

e

$$H_0 = (N-1) \lambda (\langle s_x \rangle s_y - \langle s_y \rangle s_x) \tag{4.46}$$

com

$$\varpi = \omega_0 + \Delta\omega_{21} + \Delta\omega_{12},$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_{21} - \Delta\omega_{12},$$

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{12} &= \frac{1}{2}\mathcal{P} \int_0^\infty g(\omega) |k(\omega)|^2 \langle b_\omega b_\omega^\dagger \rangle \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega}, \\ \Delta\omega_{21} &= \frac{1}{2}\mathcal{P} \int_0^\infty g(\omega) |k(\omega)|^2 \langle b_\omega^\dagger b_\omega \rangle \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega},\end{aligned}\tag{4.47}$$

onde $\mathcal{P}$ denota o valor principal de Cauchy.

4.2 Perspectivas Futuras

O próximo passo a ser dado neste trabalho será considerar a aplicação de um campo magnético oscilante no sistema que acarretará na adição de um termo do tipo $\beta [\cos(\omega t) s_x + \sin(\omega t) s_y]$ ao hamiltoniano H_{SR} , onde β é um parâmetro que controla a intensidade do campo externo. Neste contexto iremos calcular a energia média, $\varepsilon(t) = \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle$, de um átomo e comparar este resultado com os resultados obtidos por (26). Esperamos que a presença do Liouvilliano adicional em nossa equação mestra nos leve a observar uma amplificação do pulso superradiante. Neste caso poderemos associar esta possível amplificação ao fenômeno da ressonância estocástica.

5 *Conclusões e Perspectivas Futuras*

Na primeira parte deste trabalho propomos uma extensão da interpretação dos be-ables, devida a Bell, no contexto das generalizações desta teoria apresentadas por Vink (6) e Santos e Escobar (27). Em nossa abordagem é possível visualizar, através de trajetórias quânticas, os fenômenos da dissipação, decoerência e transição da dinâmica quântica para a clássica.

Para isto ao invés de usar a equação de Schrödinger como ponto de partida, consideramos uma equação estocástica de Itô, que para uma escolha particular da fonte de estocasticidade - aquela que resulta em uma correção do tipo Lindblad à dinâmica hamiltoniana - nos leva a uma nova classe de trajetórias que agora contém o termo difusivo presente antes apenas na interpretação de Nelson. Evidentemente, outras escolhas envolvendo a fonte de estocasticidade, não contempladas neste trabalho, podem fornecer novas classes de trajetórias ainda mais gerais do que aquelas consideradas aqui; por exemplo, trajetórias que englobem efeitos de temperatura.

Utilizando nossa nova classe de trajetórias fomos capazes de observar a perda de interferência quântica no entorno do tempo de decoerência calculado através do formalismo quântico usual. Também observamos a convergência de todas as trajetórias à seus análogos clássicos na medida em que o operador densidade inicialmente puro de um sistema é levado a uma mistura estatística. Assim, todas as propriedades quânticas relacionadas à transição micro-macroscópica são incorporadas em nossa versão estendida dos be-ables de Bell. Também observamos que nosso desenvolvimento pode fornecer *insights* interessantes na análise de outros fenômenos quânticos, relacionados a sistemas abertos, que não foram tratados aqui, como tunelamento dissipativo e morte súbita de emaranhamento.

Na segunda parte deste trabalho analisamos o comportamento de um OH sob a ação de um reservatório ou atenuador e de um amplificador de Glauber. Após derivar a equação mestra, calculamos a função característica e a função P de Glauber-Sudarshan associadas a

um estado geral de um OH a fim de mapear as dinâmicas distintas da excitação do OH. Basicamente, estes comportamentos distintos seguem da *taxa efetiva de transferência* $\Phi = \Gamma_1 - \Gamma_2$ e do *número médio efetivo de fótons térmicos* $\mathcal{N} = \Lambda/\Phi$ associados à competição atenuação $\times$ amplificação. Uma propriedade crucial do nosso sistema é o ruído injetado pelo amplificador mesmo quando este se encontra no zero absoluto. Este fato já notado por Glauber ao introduzir seu modelo de amplificador, foi atribuído à amplificação das flutuações de ponto zero ou, de maneira equivalente, à emissão espontânea de quanta do amplificador. Evidentemente, como foi mostrado, o inevitável mecanismo de dispersão presente no amplificador desempenha papel fundamental - sem considerar a ação do atenuador - na decoerência de um estado de superposição de um OH.

Também discutimos a aplicação do amplificador em óptica atômica e econofísica. No primeiro caso o amplificador pode fornecer ingredientes adicionais que podem ser úteis ao programa de engenharia de reservatórios. No segundo caso, discutimos a aplicação do nosso sistema à simulação de comportamentos semelhantes àqueles apresentados pelas bolsas de valores, ao considerar acoplamentos estocásticos entre o OH com o atenuador e amplificador. De fato, um mecanismo essencial à simulação do mercado de capitais é a competição entre a atenuação e a amplificação. Visando, contudo um modelo mais realista, os valores dos acoplamentos estocásticos podem ser determinados por um sistema de equações acopladas cujas soluções estão, de alguma forma, relacionadas às tendências do mercado, sendo continuamente atualizados e inseridos na equação mestra por nós deduzida.

Na terceira parte deste trabalho iniciamos o estudo de um sistema superradiante na presença de flutuações térmicas do reservatório. Tendo em vista o fenômeno da ressonância estocástica desejamos analisar os possíveis efeitos que o ruído térmico, introduzido em nossa equação mestra, possa ter na intensidade do pulso superradiante emitido pela amostra de átomos em questão.

Desejamos ainda utilizar a equação de Itô para estudar um gás de partículas quânticas interagentes que na presença de flutuações térmicas sofreriam uma transição de fase ou nucleação. Devemos, para isto, partir de um gás de N partículas contidas num recipiente, separando-as em dois diferentes grupos: aquele cuja nucleação desejamos acompanhar, contendo, digamos M partículas centrais, e aquele das demais $N-M$ partículas periféricas, cujo efeito sobre o primeiro grupo deve ser tratado através de uma teoria de campo médio no contexto de equações de evolução do operador densidade reduzido associado às partículas centrais.

Referências

- [1] DE BROGLIE, L. *Tentative d'interprétation causale et non-linéaire de la mécanique ondulatoire*. Paris: Gauthier-Villars, 1956.
- [2] BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden" variables. I. *Physical Review*, v. 85, n. 2, p. 166-179, 1952.
- [3] BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden" variables. II. *Physical Review*, v. 85, n. 2, p. 180-193, 1952.
- [4] NELSON, E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. *Physical Review*, v.150, n. 4, p. 1079-1085, 1966.
- [5] BELL, J.S. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge: Cambridge University, 1987.
- [6] VINK, J. C. Quantum mechanics in terms of discrete beables. *Physical Review A*, v. 48, n. 3, p. 1808-1818, 1993.
- [7] DE PONTE, M. A.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Temperature effects on a network of dissipative quantum harmonic oscillators: collective damping and diffusion processes. *Annals of Physics*, 2008. No prelo.
- [8] DE PONTE, M. A.; DE OLIVEIRA, M. C.; MOUSSA, M. H. Y. Decoherence in strongly coupled quantum oscillators. *Annals of Physics*, v. 317, n.1, p. 72-106, 2005.
- [9] DE PONTE, M. A.; DE OLIVEIRA, M. C.; MOUSSA, M. H. Y. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. I. Symmetric network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022324, 2004.
- [10] DE PONTE, M. A.; DE OLIVEIRA, M. C.; MOUSSA, M. H. Y. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. II. Central-oscillator network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022325, 2004.
- [11] DE PONTE, M. A.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Networks of dissipative quantum harmonic oscillators: a general treatment. *Physical Review A*, v. 76, n. 3, p. 032101-1 - 032101-10, 2007.
- [12] FICEK, Z.; TANAS, R. Entangled states and collective nonclassical effects in two-atom systems. *Physics Reports*, v. 372, n.5, p. 369-443, 2002.
- [13] BURKARD, G.; BRITO, F. Nonadditivity of decoherence rates in superconducting qubits. *Physical Review B*, v. 72, n.5, p. 054528, 2005.

- [14] DE PONTE, M. A.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Relaxation- and decoherence-free subspaces in networks of weakly and strongly coupled resonators. *Annals of Physics*, v. 322, n. 9, p. 2077-2084, 2007.
- [15] PLENIO, M. B.; SEMIAO, F. L. High efficiency transfer of quantum information and multiparticle entanglement generation in translation-invariant quantum chains. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 73, 2005.
- [16] BURGARTH D.; BOSE S. Perfect quantum state transfer with randomly coupled quantum chains. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 135, 2005.
- [17] PRADO, F. O. et al. Bilinear and quadratic Hamiltonians in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 73, n. 4, p. 043803, 2006.
- [18] SERRA, R. M. et al. Frequency up- and down-conversions in two-mode cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, v. 71, n. 4, p. 045802, 2005.
- [19] VILLAS-BOAS, C. J.; MOUSSA, M. H. Y. One-step generation of high-quality squeezed and EPR states in cavity QED. *European Physical Journal D*, v. 32, n.1, p. 147-151, 2005
- [20] GLAUBER, R. J. *Quantum theory of optical coherence: selected papers and lectures*. Berlin: Wiley-VCH, 2007.
- [21] GLAUBER, R. J. Time dependent statistics of Ising model. *Journal of Mathematical Physics*, v. 4, n. 2, p. 294-307 , 1963.
- [22] GLAUBER, R. J.; HAAKE, F. Initiation of superfluorescence. *Physics Letters A*, v. 68, n. 1, p. 29-32, 1978.
- [23] SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Physical Review Letters*, v. 10, n. , p. 277- , 1963.
- [24] DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical Review*, v.99, n.1, p. 99-110, 1954.
- [25] SKRIBANOWITZ, N. et al. Observation of Dicke superradiance in optically pumped HF gas. *Physical Review Letters*, v. 30, n.8, p. 309-312, 1973.
- [26] MIZRAHI, S. S.; MEWES, M. A. Pulsed Superradiant Emission from a Magnetic Dipole System. *International Journal of Modern Physics B*, v. 7, n. 12, p. 2353-2365, 1993.
- [27] SANTOS L. F.; ESCOBAR C. O. A beable interpretation of the continuous spontaneous localization model. 1999. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9810019> Acesso em: 10 janeiro 2009.
- [28] GHIRARDI, G. C.; PEARLE, P.; RIMINI, A. Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles. *Physical Review A*, v. 42, n. 1, p. 78-89, 1990.

- [29] HOLLAND, P. R. *The quantum theory of motion*. Cambridge: Cambridge University, 1993.
- [30] MOUSSA, M. H. Y.; MIZRAHI, S. S.; CALDEIRA, A. O. Quantum coherence in a dissipative-driven system and the optical Stern-Gerlach experiment. *Physics Letters A*, v. 221, n. 3-4, p. 145-152, 1996.
- [31] HERBERT, N. Flash - a superluminal communicator based upon a new kind of quantum measurement. *Foundations of Physics*, v. 12, n. 12, p. 1171-1129, 1982.
- [32] DE PONTE, M. A.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Storing quantum states in bosonic dissipative networks. *Journal of Physics B - Atomic Molecular and Optical Physics*, v. 41, n. 21, p. 215506, 2008.
- [33] FERREIRA, C. P.; FONTANARI, J. F. Nonequilibrium phase transitions in a model for the origin of life. *Physical Review E*, v. 65, n. 2, p. 1-10, 2002.
- [34] STANLEY, E. H.; MANTEGNA, R. N. An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance. Cambridge: Cambridge University, 1999.
- [35] VILLAS-BOAS, C. J. et al. Preparation and control of a cavity-field state through an atom-driven-field interaction: Towards long-lived mesoscopic states. *Physical Review A*, V. 68, n. 5, p. 053808, 2003.
- [36] WALLS D. F.; MILBURN, G. J. Effect of dissipation in quantum coherence. *Physical Review A*, v. 31, n. 4, p. 2403-2408, 1985.
- [37] WIEMAN, C. E.; PRITCHARD, D. E.; WINELAND, D. J. Atom cooling, trapping, and quantum manipulation, *Review of Modern Physics*, v. 71, n.2, p. 253-262, 1999.
- [38] RAIMOND, J. M.; BRUNE, M; HAROCHE, S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Review of Modern Physics*, v. 73, n. 3, p. 565-582, 2001.

Apêndice A – Cálculo da Função Característica para o Amplificador de Glauber.

Partindo da equação mestra abaixo

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho(t), H_{HO}] + \frac{1}{2} \{ [\Gamma_1 (N_1 + 1) + \Gamma_2 N_2] [2a\rho(t) a^\dagger - \rho(t) a^\dagger a - a^\dagger a \rho(t)] \\ + [\Gamma_1 N_1 + \Gamma_2 (N_2 + 1)] [2a^\dagger \rho(t) a - \rho(t) a a^\dagger - a a^\dagger \rho(t)] \} , \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

usamos a representação de estados coerentes introduzida independentemente por Glauber e Sudarshan

$$\rho = \int P(\alpha, \alpha^*, t) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (\text{A.2})$$

para obter uma versão c-number associada à equação (A.1). Usando as relações

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle ,$$

$$\langle \alpha | a^\dagger = \langle \alpha | \alpha^* , \quad (\text{A.3})$$

$$a^\dagger |\alpha\rangle = \left(\alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) |\alpha\rangle ,$$

chegamos em

$$\frac{dP(\alpha, \alpha^*, t)}{dt} = \left[\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (i\varpi + \Phi) + \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (-i\varpi + \Phi) + 2\Phi + \Lambda \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] P(\alpha, \alpha^*, t) , \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\Phi = \Gamma_1 - \Gamma_2, \quad (\text{A.5})$$

$$\Lambda = \Gamma_1 N_1 + \Gamma_2 (N_2 + 1) .$$

Podemos associar à equação (A.4) a função característica normal ordenada $\chi(\eta, \eta^*, t)$ através da relação

$$\chi(\eta, \eta^*, t) = \int e^{\eta\alpha^* - \eta^*\alpha} P(\alpha, \alpha^*, t) d^2\alpha, \quad (\text{A.6})$$

que nos leva a

$$\frac{d\chi(\eta, \eta^*, t)}{dt} = - \left[\left(\frac{\Phi}{2} - i\varpi \right) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\Phi}{2} + i\varpi \right) \eta^* \frac{\partial}{\partial \eta^*} + *|\eta|^2 \right] \chi(\eta, \eta^*, t). \quad (\text{A.7})$$

A fim de obter a solução da equação acima vamos supor que a função característica possa ser escrita como o produto de duas funções

$$\chi(\eta, \eta^*, t) = \varphi(\eta, \eta^*, t) \psi(\eta, \eta^*, t), \quad (\text{A.8})$$

sendo que $\varphi(\eta, \eta^*, t)$ é uma Gaussiana do tipo

$$\varphi(\eta, \eta^*, t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\eta|^2 R(t) - \eta Q^*(t) + \eta^* Q(t) \right\}. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.8) em (A.7) com $\varphi(\eta, \eta^*, t)$ dado por (A.9) chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\eta, \eta^*, t)}{dt} = & - \left\{ |\eta|^2 \left[-\frac{1}{2} \frac{dR(t)}{dt} - \frac{\Phi}{2} R(t) + \Lambda \right] + \eta \left[-\frac{dQ^*(t)}{dt} - Q^*(t) \left(\frac{\Phi}{2} - i\varpi \right) \right] \right. \\ & \left. + \eta^* \left[\frac{dQ(t)}{dt} + Q(t) \left(\frac{\Phi}{2} + i\varpi \right) \right] + \left[\left(\frac{\Phi}{2} - i\varpi \right) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\Phi}{2} + i\varpi \right) \eta^* \frac{\partial}{\partial \eta^*} \right] \right\} \psi(\eta, \eta^*, t). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Impondo que os termos que multiplicam η , η^* e $|\eta|^2$ anulem-se, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dR(t)}{dt} + \frac{\Phi}{2} R(t) - \Lambda &= 0, \\ \frac{dQ^*(t)}{dt} + Q^*(t) \left(\frac{\Phi}{2} - i\varpi \right) &= 0, \\ \frac{dQ(t)}{dt} + Q(t) \left(\frac{\Phi}{2} + i\varpi \right) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e a equação (A.10) reduz-se a

$$\frac{d\psi(\eta, \eta^*, t)}{dt} = - \left[\left(\frac{\Phi}{2} - i\varpi \right) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\Phi}{2} + i\varpi \right) \eta^* \frac{\partial}{\partial \eta^*} \right] \psi(\eta, \eta^*, t). \quad (\text{A.12})$$

As equações (A.11), (A.11) e (A.11) são equações do tipo

$$\frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) = b(t), \quad (\text{A.13})$$

cuja solução é

$$y(t) = \exp\left(-\int_0^t a(t') dt'\right) \left[y(0) + \int_0^t \exp\left(\int_0^\tau a(t') dt'\right) b(\tau) d\tau\right]. \quad (\text{A.14})$$

Assim vemos que

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left(-\int_0^t \Phi(t') dt'\right) \left[R(0) + \int_0^t \exp\left(\int_0^\tau \Phi(t') dt'\right) 2\Lambda(\tau) d\tau\right], \\ Q(t) &= Q(0) \exp\left\{-\int_0^t \left[\frac{\Phi(t')}{2} - i\varpi(t')\right] dt'\right\}, \\ Q^*(t) &= Q^*(0) \exp\left\{-\int_0^t \left[\frac{\Phi(t')}{2} + i\varpi(t')\right] dt'\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A fim de resolver (A.12), vamos supor que η dependa implicitamente do tempo, ou seja, $\psi(\eta, \eta^*, t) = \psi(\eta(t), \eta^*(t))$. Levando em conta esta condição a equação (A.12) escreve-se como

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t)}{dt} + \left(\frac{\Phi}{2} - i\varpi\right) \eta(t) &= 0, \\ \frac{d\eta^*(t)}{dt} + \left(\frac{\Phi}{2} + i\varpi\right) \eta^*(t) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \eta(0) \exp\left\{-\int_0^t \left[\frac{\Phi(\tau)}{2} - i\varpi(\tau)\right] d\tau\right\}, \\ \eta^*(t) &= \eta^*(0) \exp\left\{-\int_0^t \left[\frac{\Phi(\tau)}{2} + i\varpi(\tau)\right] d\tau\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Voltando ao Ansatz:

$$\chi(\eta, \eta^*, t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\eta|^2 R(t) - \eta Q^*(t) + \eta^* Q(t)\right\} \psi(\eta, \eta^*, 0)|_{\eta \rightarrow \eta(t)}, \quad (\text{A.18})$$

e tomando (A.18) em $t = 0$ obtemos

$$\chi(\eta, \eta^*, 0) = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\eta|^2 R(0) - \eta Q^*(0) + \eta^* Q(0)\right\} \psi(\eta, \eta^*, 0)|_{\eta \rightarrow \eta(t)}. \quad (\text{A.19})$$

Isolando $\psi(\eta, \eta^*, 0)|_{\eta \rightarrow \eta(t)}$ na equação acima e substituindo na equação (A.18) chegamos em

$$\chi(\eta, \eta^*, t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\eta|^2 \bar{R}(t) + \eta \bar{Q}^*(t) - \eta^* \bar{Q}(t)\right\} \chi(\eta, \eta^*, 0)|_{\eta \rightarrow \eta(t)}, \quad (\text{A.20})$$

com

$$\begin{aligned}
\bar{R}(t) &= R(t) - \left| \exp \left\{ - \int_0^t \left[\frac{\Phi(\tau)}{2} + i\varpi(\tau) \right] d\tau \right\} \right|^2 R(0), \\
\bar{Q}(t) &= Q(t) - \exp \left\{ - \int_0^t \left[\frac{\Phi(\tau)}{2} - i\varpi(\tau) \right] d\tau \right\} Q(0), \\
\bar{Q}^*(t) &= Q^*(t) - \exp \left\{ - \int_0^t \left[\frac{\Phi(\tau)}{2} + i\varpi(\tau) \right] d\tau \right\} Q(0).
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Supondo que o OH tenha sido preparado no estado $|\Psi(t=0)\rangle = \sum_{m=0}^M \chi_m |\beta^m\rangle$ temos que

$$\begin{aligned}
\chi(\eta, \eta^*, 0)|_{\eta \rightarrow \eta(t)} &= Tr \left\{ \rho(0) e^{\eta(t)a^\dagger} e^{-\eta(t)^*a} \right\} \\
&= \sum_{m,n=0}^M \chi_m \chi_n^* Tr \left\{ |\beta^m\rangle \langle \beta^n| \left(1 + \eta(t) a^\dagger + \frac{1}{2} \eta(t)^2 a^{\dagger 2} + \dots \right) e^{-\eta(t)^*a} \right\} \\
&= \sum_{m,n=0}^M \chi_m \chi_n^* Tr \left\{ e^{\eta(t)(\beta^n)^*} |\beta^m\rangle \langle \beta^n| \left(1 - \eta^*(t) a + \frac{1}{2} \eta^*(t)^2 a^2 + \dots \right) \right\} \\
&= \sum_{m,n=0}^M \chi_m \chi_n^* \exp [\eta(t) (\beta^n)^* - \eta^*(t) \beta^m],
\end{aligned} \tag{A.22}$$

o que leva a

$$\begin{aligned}
\chi(\eta, \eta^*, t) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\eta|^2 \bar{R}(t) + \eta \bar{Q}(t) - \eta^* \bar{Q}^*(t) \right\} \\
&\times \sum_{m,n=0}^M \chi_m \chi_n^* \langle \beta^n | \beta^m \rangle \exp [\eta(t) (\beta^n)^* - \eta^*(t) \beta^m].
\end{aligned} \tag{A.23}$$

No caso em que Φ e ϖ são independentes do tempo

$$\bar{R}(t) = 2 \frac{\Lambda}{\Phi} (1 - e^{-\Phi t}), \bar{Q}(t) = 0, \bar{Q}^*(t) = 0, \tag{A.24}$$

e a função característica torna-se

$$\begin{aligned}
\chi(\eta, \eta^*, t) &= \sum_{m,n=0}^M \chi_m \chi_n^* \langle \beta^n | \beta^m \rangle \exp \left[-|\eta|^2 \frac{\Lambda}{\Phi} (1 - e^{-\Phi t}) \right. \\
&\quad \left. + (\eta e^{i\varpi t} \beta^{n*} - \eta^* e^{-i\varpi t} \beta^m) e^{-\Phi t/2} \right].
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Apêndice B – Cálculo do operador densidade para um estado comprimido.

Aqui vamos considerar um OH que se acopla a um reservatório térmico à $T = 0$ K. A função característica deste sistema é dada pela equação (A.20) com $\bar{R}(t) = \bar{Q}(t) = \bar{Q}^*(t) = 0$, dado que neste caso temos que $\Phi = \Gamma_1 \equiv \gamma$ e $\Lambda = 0$. Assim, para obter $\chi(\eta, \eta^*, t)$ basta calcular $\chi(\eta, \eta^*, 0)$ e fazer $\eta \rightarrow \eta(t)$. Considerando que o OH tenha sido preparado no estado comprimido $|\Psi(t=0)\rangle = |\xi, \alpha\rangle$, precisamos calcular

$$\chi(\eta, \eta^*, 0)|_{\eta \rightarrow \eta(t)} = Tr \left\{ \rho(0) e^{\eta(t)a^\dagger} e^{-\eta(t)^*a} \right\}, \quad (\text{B.1})$$

com $\rho(0) = |\xi, \alpha\rangle \langle \alpha, \xi|$. Isto nos leva à expressão

$$\begin{aligned} \chi(\eta, \eta^*, t) = \exp \left\{ \eta(t) (\alpha^* \cosh r - \alpha e^{-i\theta} \sinh r) - \eta^*(t) (\alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\theta} \sinh r) \right. \\ \left. - \eta^* \eta e^{-\gamma t} \sinh^2 r - e^{-\gamma t} \frac{\eta^2 e^{i(2\omega t - \theta)} + (\eta^*)^2 e^{-i(2\omega t - \theta)}}{4} \sinh(2r) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde $\eta(t) = \eta e^{i\omega t - \gamma t/2}$. Com ajuda das relações

$$\begin{aligned} P(\beta, \beta^*, t) &= \int d^2\eta e^{\beta\eta^* - \beta^*\eta} \chi(\eta, \eta^*, t), \\ \rho(t) &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta |\beta\rangle \langle \beta| P(\beta, \beta^*, t), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

escrevemos o operador densidade para o estado comprimido. Vemos que para obter $\rho(t)$ precisamos calcular duas integrais. Vamos calcular, primeiramente, a integral em β . A fim de facilitar este cálculo, vamos projetar $\rho(t)$ na posição, o que nos permite escrever

$$\rho(x, x'; t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta \chi(\eta, \eta^*, t) \int d^2\beta \beta(x) \beta^*(x') \exp[\beta_R(\eta^* - \eta) + i\beta_I(\eta^* + \eta)], \quad (\text{B.4})$$

onde $\rho(x, x', t) \equiv \langle x | \rho(t) | x' \rangle$. Temos ainda que

$$\begin{aligned} \beta(x) \beta^*(x') &= \sqrt{\frac{M\omega}{\pi\hbar}} \exp \left\{ -\frac{M\omega}{2\hbar} (x^2 + x'^2) + \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (\beta x + \beta^* x') - \left(\frac{\beta^2 + \beta^{*2}}{2} \right) - |\beta|^2 \right\}, \\ &= \sqrt{\frac{M\omega}{\pi\hbar}} \exp \left\{ -2\beta_R^2 + \beta_R \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (x + x') + i\beta_I \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (x - x') - \frac{M\omega}{2\hbar} (x^2 + x'^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo a expressão acima naquela para $\rho(t)$ obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \rho(x, x'; t) &= \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{M\omega}{\pi\hbar}} \exp \left\{ -\frac{M\omega}{2\hbar} (x^2 + x'^2) \right\} \int d^2\eta \chi(\eta, \eta^*, t) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_R \exp \left\{ -2\beta_R^2 + \beta_R \left[\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (x + x') + (\eta^* - \eta) \right] \right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_I \exp \left\{ i\beta_I \left[\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (x - x') + (\eta^* + \eta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

que é simplificado através das relações

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ux^2 + vx] = \sqrt{\frac{\pi}{u}} \exp\left(\frac{v^2}{4u}\right), \quad (\text{B.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\{ikx\} = \pi \delta(x), \quad (\text{B.8})$$

para a forma

$$\begin{aligned} \rho(x, x'; t) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \exp \left\{ -\frac{M\omega}{2\hbar} (x^2 + x'^2) \right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_I \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_R \chi(\eta, \eta^*, t) \exp \left\{ \frac{1}{8} \left[\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (x + x') - 2i\eta_I \right]^2 \right\} \delta \left[\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} (x - x') + 2\eta_R \right], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

resta-nos substituir a função característica na equação acima e calcular as integrais em η_R e em η_I . Para calcular a integral em η_R vamos usar a propriedade $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx =$

$f(x_0)$. A fim de calcular a integral em η_I , escrevemos $\rho(x, x', t)$ como

$$\begin{aligned} \rho(x, x'; t) = & \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \exp \left\{ -\frac{M\omega}{4\hbar} (x - x')^2 [1 + e^{-\gamma t} (2 \sinh^2 r + \sinh(2r) \cos(2\omega t - \theta))] \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} e^{-\gamma t/2} (x - x') [(\alpha^* e^{i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t}) \cosh r + (\alpha^* e^{-i(\omega t - \theta)} - \alpha e^{i(\omega t - \theta)}) \sinh r] \right\} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_I \exp \left(-\frac{1}{2} \eta_I^2 a_1 + \eta_I a_2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde definimos

$$\begin{aligned} a_1 = & 1 - e^{-\gamma t} \sinh(2r) \cos(2\omega t - \theta) + 2e^{-\gamma t} \sinh^2 r, \\ a_2 = & -\sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} (x - x') e^{-\gamma t} \sinh(2r) \sin(2\omega t - \theta) r - i\sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} (x + x') \\ & + i e^{-\gamma t/2} [(\alpha^* e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t}) \cosh r - (\alpha^* e^{-i(\omega t - \theta)} + \alpha e^{i(\omega t - \theta)}) \sinh r]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Usando, novamente, o resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ux^2 + vx] = \sqrt{\frac{\pi}{u}} \exp\left(\frac{v^2}{4u}\right), \quad (\text{B.12})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \rho(x, x', t) = & \sqrt{\frac{M\omega}{\pi\hbar a_1}} \exp \left\{ -\frac{M\omega}{4\hbar} (x - x')^2 [1 + e^{-\gamma t} (2 \sinh^2 r + \sinh(2r) \cos(2\omega t - \theta))] \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} e^{-\gamma t/2} (x - x') [(\alpha^* e^{i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t}) \cosh r + (\alpha^* e^{-i(\omega t - \theta)} - \alpha e^{i(\omega t - \theta)}) \sinh r] + \frac{a_2^2}{2a_1} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

No caso em que $r = 0$ a expressão acima recupera aquela do estado coerente.