

**Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos**

Paulo Hisao Moriya

**Manipulação do pulso superradiante via
interações atômicas**

São Carlos

2012

Paulo Hisao Moriya

Manipulação do pulso superradiante via interações atômicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Versão Original

São Carlos

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moriya, Paulo Hisao
Manipulação do pulso superradiante via interações
atômicas / Paulo Hisao Moriya; orientador Miled
Hassan Youssef Moussa -- São Carlos, 2012.
81 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2012.

1. Óptica quântica. 2. Superradiância. 3. Átomos
interagentes. 4. Hamiltonianos não-lineares. I.
Moussa, Miled Hassan Youssef, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Paulo Hisao Moriya

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 28.02.2012

Comissão Julgadora

Prof(a). Dr(a). Miled Hassan Youssef Moussa

Instituição: IFSC/USP

Prof(a). Dr(a). Paulo Henrique Souto Ribeiro

Instituição: UFRJ

Prof(a). Dr(a). Fernando Luis Semião da Silva

Instituição: UFABC

*À meus pais, Humberto e Adriana,
exemplos de coragem e determinação.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa, pela orientação e contribuições diversas para meu crescimento pessoal e profissional.

À meus pais Humberto e Adriana e avós, Hideo, Tsuyano e Odete, pelos exemplos de luta e coragem na busca da realização de sonhos e também pelo carinho, apoio e amor em todos os momentos da vida.

À minhas irmãs Natália e Flávia, meu sobrinho Heytor, meus tios, Hélio e Patrícia, e minhas primas, Marina e Gabriela, sem os quais o significado da palavra família não teria sentido.

Em especial, à meus tios Takachi e Tokico e meus primos Henrique, Giovana, Luciana e Sal pelos conselhos e apoio sem os quais o caminho teria sido muito mais difícil.

À minha namorada Ana Carolina por todo o apoio e amor que foi necessário para terminar esse trabalho e à Louise pela alegria que só uma criança traz à nossas vidas.

À todos os meus amigos do IFSC pelos bons momentos.

Aos colegas Gentil, Mickel e Tiago Batalhão pela colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

Ao pessoal do Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC, do Serviço de Pós-graduação e do Serviço de Gráfica pelos esforços e dedicação sempre apresentados.

À Universidade de São Paulo e ao Instituto de Física de São Carlos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro.

RESUMO

MORIYA, P. H. *Manipulação do pulso superradiante via interações atômicas*. 2012. 90 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

O fenômeno da superradiância é caracterizado por um processo de ordenamento das transições dos dipolos atômicos em amostras excitadas, moderadamente densas, decorrente das correlações induzidas entre os átomos desenvolvidas pela radiação coerente emitida pelos próprios átomos. O processo superradiante que é iniciado a partir de uma total desordem em $t = 0$ atinge um ordenamento máximo em um tempo $\tau \propto N^{-1}$, gerando um pulso de radiação de intensidade seguindo a lei do *sech*² e com pico proporcional à N^2 , e em seguida os dipolos relaxam para um equilíbrio desordenado. Neste trabalho, tratamos a interação de dois modos de uma cavidade, ω_a e ω_b , e uma amplificação, com um sistema de N átomos de dois níveis, com frequência de transição atômica ω_0 de forma que interaja ressonantemente com ω_a e dispersivamente com ω_b , responsável pelo acoplamento entre os átomos. Para entendermos como a lei do *sech*² será afetada pela interação direta entre os átomos, utilizamos o método das perturbações via de pequenas rotações não-lineares para obtermos o hamiltoniano efetivo do sistema com uma forma mais explícita da interação dipolar entre os átomos. Por fim, após escrevermos a equação mestra do sistema, utilizamos a aproximação de campo médio e o método dos invariantes de Lewis-Riesenfeld para chegar aos principais aspectos deste fenômeno no sistema.

Palavras-chave: Óptica quântica. Superradiância. Átomos interagentes. Hamiltonianos não-lineares.

ABSTRACT

MORIYA, P. H. *Superradiance pulse manipulation via atomic interactions*. 2012. 90 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

The superradiant phenomena is characterized by atomic dipoles ordering process in excited samples moderately denses, that occurs due to the atomic induced correlations developed not directly but by the coherent radiation emitted by atoms themselves. The superradiant process evolves from a total disorder at $t = 0$, attain a maximum order in a time $\tau \propto N^{-1}$ creating a radiation pulse whose intensity follows the $sech^2$ law and its peak is proportional to N^2 , thereafter the dipoles relax to a disordered equilibrium state. In this essay, we deal with the interaction between two cavity modes ω_a and ω_b and a classical pump with a system of N two-level atoms, whose atomic transition frequencies ω_0 . We consider a resonant interaction between atoms and mode ω_a and a dispersive coupling of atoms with mode ω_b , which couple the atomic sample, and the classical pump. In order to obtain how $sech^2$ law changes, we use the method of nonlinear small rotations to obtain effective Hamiltonian, expliciting dipolar interaction between atoms. Finally, after write the effective master equation, we use the mean-field approximation and Lewis and Riesenfeld method to obtain the mean features of this phenomena to our system.

Keywords: Quantum optics. Superradiance. Interacting atoms. Nonlinear hamiltonians.

SUMÁRIO

1	Introdução	p. 13
2	O fenomeno superradiante para átomos interagentes	p. 19
2.1	Modelagem do problema	p. 19
2.2	O método das perturbações via pequenas rotações não-lineares	p. 22
2.3	Aproximação de campo médio	p. 38
2.4	O método dos invariantes de Lewis-Riesenfeld	p. 42
3	Resultados	p. 47
4	Conclusões	p. 51
5	Perspectivas futuras	p. 53
5.1	Ressonância Estocástica na Superradiância	p. 53
5.2	Detecção da Radiação Casimir via Superradiância	p. 54
5.3	Extensão dos Tratamento via Campo Médio: Para Além das Aproximações Utilizadas	p. 55
	REFERÊNCIAS	p. 57
	APÊNDICE A – Interação radiação-matéria	p. 61
A.1	Quantização do Campo Eletromagnético	p. 61
A.2	Aproximação de Dipolo Elétrico e a Interação $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$	p. 64

A.3 Hamiltoniano da Interação átomo-Campo p. 65

A.4 Aproximação de Onda Girante p. 67

APÊNDICE B – Teoria quântica do amortecimento p. 69

B.1 Operador densidade p. 69

B.2 A equação mestra p. 73

B.3 Equação mestra para o átomo de dois níveis p. 75

APÊNDICE C – O método das pequenas rotações não-lineares p. 79

C.1 Motivação para o método p. 79

C.2 As pequenas rotações não-lineares e os hamiltonianos efetivos p. 80

Introdução

Um átomo inicialmente em um de seus estados excitados fará a transição para o estado fundamental em decorrência de sua interação com as flutuações do vácuo do campo eletromagnético. Para chegar a esta afirmação é necessário voltar para o efervescente início do século XX, quando Max Planck¹, em 1900, apresentou ao mundo o conceito de *quantum*.

A partir deste trabalho, Albert Einstein² introduziu, em 1905, o *quantum* de luz, ou fóton, como uma partícula real do campo eletromagnético. Já em 1913, Niels Bohr³ caracterizou o átomo como um conjunto discreto de níveis de energia, cada um correspondendo a um estado atômico estacionário que não emite radiação.

O próximo importante passo foi dado por Einstein⁴, em 1917, que introduziu o conceito das transições espontânea e induzida, ou estimulada, para níveis atômicos discretos. Ao seu lado, tinha apenas sua intuição e o fato de que derivava facilmente a fórmula de Planck para espectros de radiação térmica.

Em 1927, após uma maior consolidação da mecânica quântica, Paul A. M. Dirac⁵ construiu uma teoria quântica da radiação que descreveu o campo eletromagnético como um ensemble de osciladores harmônicos e introduziu o conceito de operadores de criação e aniquilação de partículas, levando a uma prova rigorosa das hipóteses de Einstein.

Nos estágios iniciais do desenvolvimento da eletrodinâmica quântica, em 1930, Victor F. Weisskopf e Eugene P. Wigner⁶ consideraram que, em uma boa aproximação, um átomo de dois níveis excitado tem probabilidade de permanecer neste estado decaindo exponencialmente no tempo. Obtiveram, ainda, que o espectro emitido por este átomo é aproximadamente uma lorentziana centrada na frequência de transição atômica, tendo uma largura igual à taxa de decaimento espontâneo.

A teoria elaborada por Dirac, com a aproximação de Weisskopf-Wigner, pode ser aplicada a sistemas com muitos átomos, ou moléculas, preparados inicialmente no estado excitado de

uma transição eletrônica decaem pela emissão espontânea de luz, fenômeno conhecido como fluorescência. Para isto, é necessário considerar que os átomos interagem com o meio ambiente independentemente uns dos outros, com o campo de radiação, em outras palavras, a amostra deve ser diluída o suficiente para que os átomos não interajam. Neste caso, a emissão do sistema obedece uma lei exponencial, veja a linha tracejada da figura 1.1, com um tempo característico τ proporcional ao inverso da taxa de decaimento radioativo Γ do nível inicialmente excitado e o padrão de radiação da amostra atômica é essencialmente isotrópico. Em

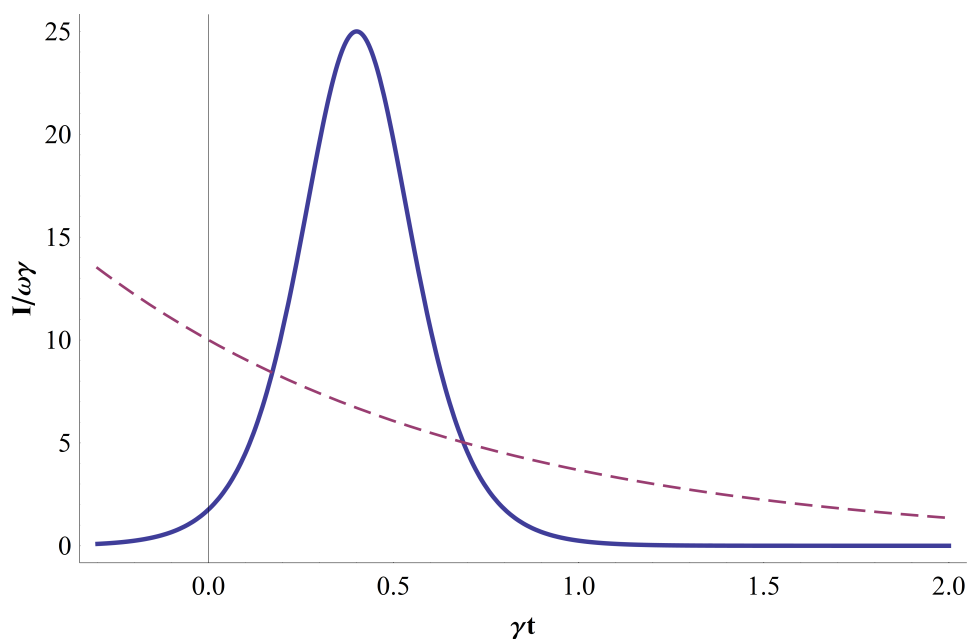


Figura 1.1—Representação qualitativa da intensidade irradiada para um sistema atômico.

1954, Robert H. Dicke⁷ foi o primeiro a reconhecer que os átomos decaindo espontaneamente independentemente um dos outros é apenas uma hipótese. Propondo um sistema composto por um ensemble de N átomos de dois níveis, confinados em um volume com dimensões menores que o comprimento de onda da radiação emitida, chegou a um resultado bem diferente do encontrado utilizando a aproximação de Weisskopf-Wigner, com a amostra atômica emitindo radiação de uma forma muito mais rápida e forte, em uma direção bem definida dependendo da geometria à qual o sistema é submetido.

Dicke mostrou que o tempo de decaimento, t_D , e a intensidade, $I(t)$, da radiação se tornam proporcionais ao inverso do número de átomos, ou seja ($\propto N^{-1}$), e ao quadrado desse número ($\propto N^2$), respectivamente. A interação entre os componentes da amostra ocorre via campo de radiação comum resultando em uma correlação entre os momentos de dipolo, que origina uma polarização óptica macroscópica proporcional ao número de átomos. Além disso, como foi mostrado por investigações subsequentes, o decaimento do pulso eletromagnético

não é mais exponencial, mas haverá um pico depois de certo retardo, t_D , obedecendo uma lei temporal regida por um termo de $\text{sech}^2(t - t_D)$ (veja a linha sólida da figura 1.1). Esse tipo de radiação espontânea ficou conhecida como superradiância.

Em 1973, o trabalho pioneiro de N. Skribanowitz, I. Herman, J. MacGillivray e M. Feld⁸, nos laboratório de espectroscopia do Massachusetts Institute of Technology (MIT), levou a superradiância de Dicke da hipótese para a realidade ao demonstrar a emissão superradiante em um gás de ácido fluorídrico (HF) à baixa pressão. Desde então, e com o advento do laser de corante* em 1966, que facilitou a excitação de uma coleção de átomos para um nível eletrônico bem definido em um curto período de tempo; a superradiância vem sendo observada em outros gases, assim como em sólidos, com emissão nos domínios óptico, infravermelho, infravermelho distante e microondas.

Apesar de apresentar um novo fenômeno físico, as limitações impostas pelo modelo de Dicke, de que os átomos devem estar confinados numa região com dimensões pequenas comparadas com o comprimento de onda da radiação emitida, não são realistas na região óptica do espectro e acabou por ser eliminada, em 1970, pelo trabalho de Joseph H. Eberly e Nicholas E. Rehler⁹⁻¹¹. Além disso, o modelo ignora as interações entre os átomos como, por exemplo, o acoplamento dipolar que causa deslocamentos e desdobramentos nas frequências atômicas (e.g., descolamento Coulomb, Lamb, Stark, entre outros), alterando assim as propriedades da amostra em estudo¹²⁻¹⁷.

A superradiância pertence à classe de fenômenos ópticos coerentes e cooperativos, onde a cooperação compreende a influência que um átomo, ou a radiação emitida por ele, tem sobre os outros átomos e o termo coerente se refere, não apenas ao campo eletromagnético, mas também ao sistema atômico. Isto por que o fenômeno superradiante só é efetivo se todas as interações possíveis (tais como colisões, ruídos térmicos, etc., além da própria interação com a radiação eletromagnética) não alteram a fase das funções de onda atômicas durante a emissão, ou seja, apresenta memória longa, criando um modo coletivo de todos os átomos. Nesse modo, um processo de ordenamento ocorre no sistema que pode ser definido pelo desenvolvimento de correlações entre os dipolos pertencentes a diferentes átomos num processo de phase-locking[†], que muito lembra as correlações entre spins em uma amostra ferromagnética.

Esse ordenamento evolui de uma total desordem no meio em $t = 0$. Quando a emissão começa, as flutuações quânticas do campo eletromagnético do vácuo agem em átomos independentes fazendo com que, eventualmente, apareçam correlações entre os dipolos através de

*Em trabalhos independentes do americano Peter P. Sorokin e do alemão Fritz P. Schäfer.

†Termo que se refere ao comportamento caótico individual afetando as ações ordenadas de um sistema coletivo.

um fenômeno similar à quebra de simetria. Dessa pequena descrição, fica claro que a superradiância apresenta tanto aspectos quânticos, já que se inicia a partir de ruídos do campo de vácuo, quanto clássicos, pois a emissão gerada pela radiação do conjunto ordenado de dipolos atômicos é análogo à emissão em fase de uma antena clássica, num contexto de muitos corpos envolvendo uma coleção de átomos de dois níveis e fótons.

Apesar da aparente simplicidade, o fenômeno superradiante é muito difícil de se analisar em detalhes, por envolver conceitos de eletrodinâmica quântica, de muitos corpos e da óptica não-linear. A radiação emitida propaga-se ao longo de um meio inicialmente invertido, apresentando aspectos de propagação e difração não-linear, dando origem a efeitos bem conhecidos no contexto de problemas de propagação de pulsos luminosos: devido à emissão estimulada inhomogênea e processos de reabsorção através da amostra, a radiação enfrenta processos que alteram sua estrutura e frequência que só podem ser entendidas por métodos numéricos resolvendo complicadas equações de evolução não-linear. Esses efeitos de propagação tendem a reduzir o arranjo das fortes correlações interatômicas que é o principal aspecto da superradiância, complicando consideravelmente a descrição do fenômeno.

Todas essas dificuldades são amenizadas em um modelo descrevendo o átomo como um sistema de dois níveis mas, mesmo assim, apresenta dificuldades de se analisar em detalhes. Esse tipo de representação para o átomo tomou a maior parte das atenções e apenas mais recentemente as atenções foram voltadas para os efeitos que podem ser observados na superradiância apenas se considerarmos a natureza de vários níveis de energia atômico. Assim, fica evidenciado outro tipo de dificuldade que vem do fato de que, na maioria dos casos, a emissão superradiante não envolve simplesmente dois níveis não degenerados, mas sim transições atômicas conectando subníveis degenerados. A superradiância então resulta da competição entre a emissão de componentes do campo tendo frequências ligeiramente diferentes ou polarizações desiguais. Essa competição leva a efeitos de batimentos luminosos (batimentos superradiantes), de flutuações de polarização ou até mesmo à extinção do fenômeno, resultado da interferência negativa entre os componentes da luz emitida nas transições degeneradas (subradiância ou superradiância limitada).

No caso mais simples, um experimento superradiante é realizado em um sistema atômico exibindo essencialmente uma estrutura eletrônica de três níveis: o nível inicial i , o excitado e e o estado fundamental f . Um feixe de laser pulsado, ressonante com a transição $i \rightarrow e$, excita todos os átomos (ou moléculas) no estado e , produzindo assim no tempo $t = 0$ uma inversão da população total na transição $e \rightarrow g$. A emissão superradiante subsequente que ocorre com frequência ω_0 dessa transição pode ser detectada diretamente, medindo o campo

irradiado com um detector, ou indiretamente, pelo monitoramento da transferência rápida de população irradiativa do nível e para o g . A emissão superradiante tem sido estudada desse modo nos domínios óptico, de infravermelho, de infravermelho distante e de ondas milimétricas.

A maioria dos artigos que abordam a superradiância pode ser enquadrada em duas categorias: aqueles que enfatizam os aspectos básicos (correlações atômicas, simetrias e flutuações em sistemas atômicos de dois níveis) e deixam de lado, ou subestimam, os aspectos de propagação, e aqueles que, por outro lado, tentam compreender por métodos numéricos a complexidade do problema real e necessariamente perdem uma parte da simplicidade do fenômeno básico. Muitas dessas abordagens têm sido tomadas para que seja possível obter uma descrição teórica da superradiância e todas elas resultam ou em uma equação mestra do sistema atômico, para a representação de Schrödinger, ou em um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, conhecidas como equações de Maxwell-Bloch, para a representação de Heisenberg. Além disso, muitas aproximações¹⁸ foram introduzidas para obter expressões analíticas fisicamente transparentes que descrevem, ao menos qualitativamente, as principais características do processo de emissão superradiante, tais como a aproximação de Born-Markov, de onda girante, de dipolo elétrico, hipótese de amostra de tamanho pequeno, regimes dispersivo e de cavidade ruim, etc.

No início da década de 1970, o foco do estudo do fenômeno superradiante, tanto teoricamente quanto experimentalmente, se voltou para a geometria e dimensão do confinamento dos átomos, assim como a distribuição dos átomos neste espaço. Alguns resultados teóricos^{19–21} foram obtidos via abordagens puramente quânticas da superfluorescência quanto utilizando aproximações semiclássicas²².

Uma abordagem diferente propõe um hamiltoniano de campo médio de partícula única^{23–26} como parte de uma equação mestra completa de um operador densidade reduzido de um corpo^{27,28}, no qual cada átomo emite independentemente, induzido por um campo efetivo comum criado pelas interações entre os momentos de dipolo atômico e o campo de radiação. Para processos que ocorrem em intervalos de tempo menores que o tempo de relaxação, esse hamiltoniano descreve a emissão superradiante no regime transiente, caso contrário o processo deve ser analisado por uma equação mestra. O hamiltoniano de partícula única é tomado como parte da evolução unitária da equação mestra completa do operador densidade reduzido de um corpo, sendo possível obter os estados exatos de partícula única para um átomo de dois níveis resolvendo a equação de Schrödinger dependente do tempo.

Neste trabalho, estudamos a superradiância em uma amostra de N átomos de dois níveis com frequência de transição atômica ω_0 ²⁹, acoplada a dois modos de uma cavidade, de

frequências ω_a e ω_b . A frequência atômica está nas vizinhanças do modo ω_a e relativamente distante do modo ω_b , a amostra interage ressonantemente com ω_a e dispersivamente com ω_b , responsável pelo acoplamento entre os átomos entre si. Os componentes do sistema estão ainda acoplados a dois reservatórios térmicos um para os átomos e outro comum a ambos os modos para levar em conta as perdas possíveis.

Nossa abordagem à dinâmica do problema consiste em obter, a partir do hamiltoniano total, uma equação mestra, pelos métodos usuais, para o sistema. Assumimos então os regimes dispersivo, para o modo ω_b , e de cavidade ruim, para o modo ω_a e, assim, obtivemos uma dinâmica efetiva, a partir do método das perturbações via pequenas rotações não-lineares³⁰, para os átomos. Por fim, utilizamos a aproximação de campo médio para obter um hamiltoniano não-linear de uma partícula²⁶ e, em seguida, o método dos invariantes de Lewis e Riesenfeld³¹ para obter as leis características do processo superradiante e como este pode ser modificado e/ou manipulado por nossa através da interação direta entre os átomos viabilizada pelo modo ω_b .

No próximo capítulo, apresentaremos com mais detalhes o sistema proposto, explicitando as técnicas que foram utilizadas para chegar às leis que regem o fenômeno superradiante. Já no capítulo 3, analisaremos os resultados obtidos e a possibilidade de manipulação da curva de intensidade da radiação emitida. No capítulo 4, faremos as conclusões deste trabalho e, por fim, explicitaremos quais as perspectivas futuras de trabalho nesta área.

O fenomeno superradiante para átomos interagentes

2.1 Modelagem do problema

Para estudar o fenômeno superradiante proposto em amostras de átomos interagentes adotamos um sistema composto por N átomos de dois níveis e dois modos de uma cavidade ω_a e ω_b . A frequência da transição atômica ω_0 é tomada de tal forma que esteja próxima do modo ω_a da cavidade com o qual interage ressonantemente e relativamente distante do modo ω_b , em uma interação dispersiva com este modo, do que resulta o acoplamento entre os átomos, veja as figuras 2.1. O sistema ainda está sujeito a um bombeio.

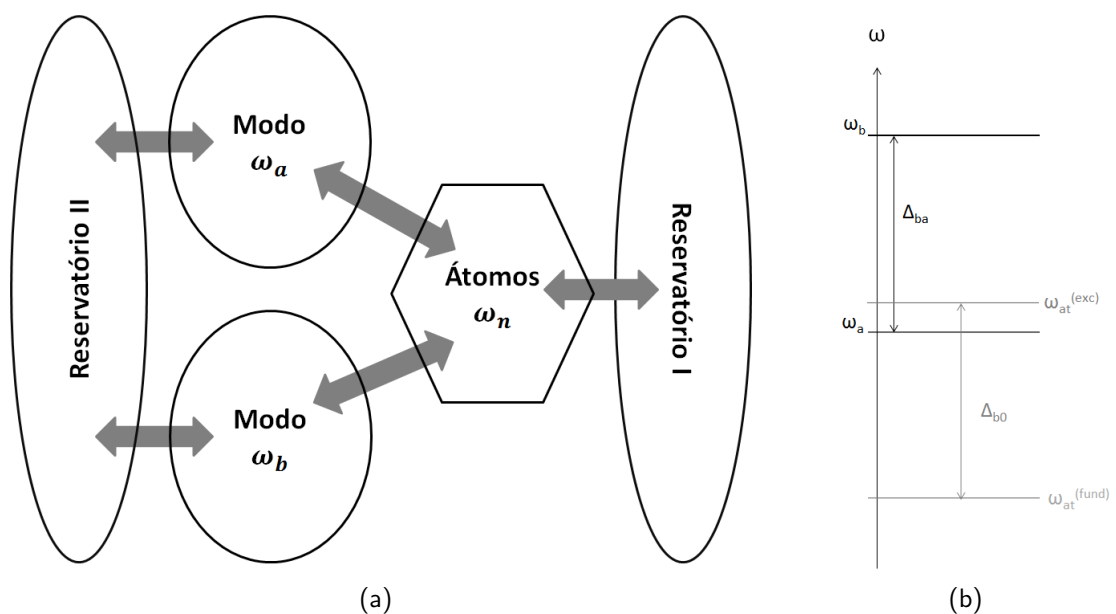


Figura 2.1—Representações esquemáticas do sistema abordado.

O hamiltoniano deste sistema, na representação de Schrödinger, é dado por (assumindo,

a partir daqui, que $\hbar = 1$)

$$H_{\text{sist}} = H_{\text{átomos}} + H_{\text{modos}} + V, \quad (2.1)$$

com V representando a interação entre os modos da cavidade, H_{modos} , e a amostra atômica, $H_{\text{átomos}}$, dada segundo o modelo de Jaynes-Cummings³² usual *. Cada um dos termos do lado direito de (2.1) pode ser expresso como

$$H_{\text{átomos}} = \omega_0 \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)}, \quad (2.2)$$

$$H_{\text{modos}} = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b, \quad (2.3)$$

$$V = g_a \sum_{n=1}^N \left(a \sigma_+^{(n)} + a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) + g_b \sum_{n=1}^N \left(b \sigma_+^{(n)} + b^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) + \kappa b^\dagger b \sum_{n=1}^N \left(\sigma_+^{(n)} + \sigma_-^{(n)} \right), \quad (2.4)$$

onde a (a^\dagger) e b (b^\dagger) são os operadores de destruição (criação) de fótons dos modos ω_a e ω_b da cavidade, respectivamente; g_a e g_b são as constantes de acoplamento dos átomos com os respectivos modos e κ é a intensidade do bombeio. Por fim, $\sigma_+^{(n)}$, $\sigma_-^{(n)}$ e $\sigma_z^{(n)}$ são os operadores associados ao n -ésimo átomo que possuem a forma das matrizes de Pauli, satisfazendo a álgebra do grupo $su(2)$.

Para levar em conta os mecanismos de dissipação, conectamos o sistema atômico e a cavidade a reservatórios térmicos, que geralmente são quaisquer sistemas físicos que possuem um número muito grande de graus de liberdade. Isso equivale a adicionar ao hamiltoniano do sistema, (2.1), os termos

$$H_{\text{diss}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Omega_k c_k^\dagger c_k + \tilde{\Omega}_k d_k^\dagger d_k \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ak} \left(a c_k^\dagger + a^\dagger c_k \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_{bk} \left(b c_k^\dagger + b^\dagger c_k \right) + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{nk} \left(\sigma_-^{(n)} d_k^\dagger + \sigma_+^{(n)} d_k \right), \quad (2.5)$$

que correspondem aos reservatórios térmicos compostos por osciladores harmônicos com frequências Ω_k e $\tilde{\Omega}_k$ em estados caóticos com operadores de aniquilação (criação) dados por c_k (c_k^\dagger) e d_k (d_k^\dagger), respectivamente; λ_{ak} , $\tilde{\lambda}_{bk}$ e Λ_{nk} são as constantes de acoplamento entre os modos ω_a e ω_b , o n -ésimo átomo, respectivamente, com o k -ésimo oscilador de seus

* (ver Apêndice A)

respectivos reservatórios. Assim, o hamiltoniano total do sistema é escrito como

$$H_{\text{tot}} = H_0 + V, \quad (2.6)$$

ou,

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_0 \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Omega_k c_k^\dagger c_k + \tilde{\Omega}_k d_k^\dagger d_k \right). \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} V = & \sum_{n=1}^N g_a \left(a \sigma_+^{(n)} + a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) + \sum_{n=1}^N g_b \left(b \sigma_+^{(n)} + b^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) \\ & + \kappa b^\dagger b \sum_{n=1}^N \left(\sigma_+^{(n)} + \sigma_-^{(n)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ak} \left(a c_k^\dagger + a^\dagger c_k \right) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_{bk} \left(b c_k^\dagger + b^\dagger c_k \right) + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{nk} \left(\sigma_-^{(n)} d_k^\dagger + \sigma_+^{(n)} d_k \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

O próximo passo é escrever a equação mestra do sistema completo, o que pode ser realizado o seguindo procedimento usual[†]. Ao efetuar os passos descritos acima, obtivemos a seguinte equação mestra, na representação de Schrödinger, para o sistema de átomos interagentes na cavidade acoplados aos respectivos reservatórios

$$\frac{d}{dt} \rho_{\text{sis}}(t) = -i \left[H_{\text{sis}}, \rho(t) \right] + \mathcal{L} \rho(t), \quad (2.9)$$

onde o primeiro termo do lado direito de (2.9), que contem o comutador de H_{sis} com $\rho(t)$, representa a evolução, livre de dissipação, da amostra, dos modos e suas interações e o termo restante

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rho(t) = & \bar{n}_a \Gamma_a \mathcal{L}[a^\dagger] \rho(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \mathcal{L}[a] \rho(t) + \bar{n}_b \Gamma_b \mathcal{L}[b^\dagger] \rho(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \mathcal{L}[b] \rho(t) \\ & + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, b] \rho(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[b, a^\dagger] \rho(t) + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b^\dagger, a] \rho(t) \\ & + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[a, b^\dagger] \rho(t) + \bar{\eta} \Gamma \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho(t) \\ & + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho(t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

dado pelo superoperador de Lindblad, que para um dado operador \mathcal{S} é representado por

$$\mathcal{L}[\mathcal{S}] \rho(t) \equiv 2\mathcal{S} \rho(t) \mathcal{S}^\dagger - \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} \rho(t) - \rho(t) \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}, \quad (2.11)$$

[†](descrito detalhadamente em B)

e para dois operadores \mathcal{S} e \mathcal{R} ,

$$\mathcal{L}[\mathcal{S}, \mathcal{R}]\rho(t) \equiv 2\mathcal{S}\rho(t)\mathcal{R} - \mathcal{R}\mathcal{S}\rho(t) - \rho(t)\mathcal{R}\mathcal{S}, \quad (2.12)$$

é responsável pelo efeito dissipativo ou evolução irreversível do mesmo. Já os termos Γ_a , Γ_b , Γ , Γ_{1ab} , Γ_{2ab} são as constantes de amortecimento dos modos da cavidade, do sistema atômico e os termos cruzados devido à existência de um reservatório comum aos modos (já que não fizemos nenhuma hipótese de que partes diferentes do reservatório comum não troquem informação), respectivamente. Por fim, \bar{n}_a , \bar{n}_b e $\bar{\eta}$ representam o número médio de *quanta* dos reservatórios nas frequências ω_a , ω_b e ω_n .

2.2 O método das perturbações via pequenas rotações não-lineares

Para prosseguir nossa abordagem ao fenômeno da superradiância em amostras de átomos interagentes, adotamos dois regimes de interação para a análise da evolução do sistema: o regime de interação dispersiva da amostra atômica com o modo ω_b e o regime de cavidade ruim para o modo ω_a . O regime dispersivo é adotado para evidenciar o acoplamento entre os átomos da amostra e o de cavidade ruim faz com que o respectivo modo da cavidade aja como um canal de relaxação comum para os átomos, facilitando assim a emissão espontânea.

Para ambos os casos, utilizamos o método das perturbações via pequenas rotações não-lineares^{30‡}, com o qual se pode obter a equação mestra efetiva do sistema, de forma perturbativa, via primeiros princípios e não por simples adição de termos fenomenológicos, incluindo de uma maneira sistemática todos as perdas em processos do sistema abordado. Primeiro, vamos analisar o regime de interação dispersivo³³, onde a dessintonia entre a frequência do modo ω_b e aquela dos átomos, $\Delta|\omega_0 - \omega_b|$, satisfazem a relação,

$$g_b\sqrt{\bar{n}_b + 1} \ll |\Delta| \ll \omega_b, \quad (2.13)$$

onde \bar{n}_b é o número médio de fótons do modo ω_b .

Primeiramente, reescrevemos o hamiltoniano do sistema, (2.1), de uma forma mais conveniente para a aplicação do método, introduzindo o operador

$$N_b = b^\dagger b + \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)}, \quad (2.14)$$

[‡]Ver o apêndice C

de forma a obtermos

$$\begin{aligned}\tilde{V}_b = & \omega_a a^\dagger a + \Delta \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)} + g_a \sum_{n=1}^N \left(a \sigma_+^{(n)} + a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) \\ & + g_b \sum_{n=1}^N \left(b \sigma_+^{(n)} + b^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) + \kappa b^\dagger b \sum_{n=1}^N \left(b \sigma_+^{(n)} + \sigma_-^{(n)} \right).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Em seguida, definimos o operador

$$U_b = \exp \left\{ \frac{g_b}{|\Delta|} \sum_{n=1}^N \left(b \sigma_+^{(n)} - b^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) + \frac{\kappa}{|\Delta|} b^\dagger b \sum_{n=1}^N \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \right\}, \quad (2.16)$$

através do qual realizamos a transformação unitária

$$\rho_b(t) = U_b \rho(t) U_b^\dagger, \quad (2.17)$$

retendo termos de ordem $\frac{g_b^2}{|\Delta|^2}$, leva ao hamiltoniano efetivo

$$\begin{aligned}H_{ef,b} = & U_b \tilde{V}_b U_b^\dagger = \omega_a a^\dagger a + \hat{\Delta}_b \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)} + g_a \sum_{n=1}^N \left(a \sigma_+^{(n)} + a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) \\ & + \hat{\Omega}_b \sum_{n,m=1}^N \left(\sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} \right),\end{aligned}\quad (2.18)$$

apresenta interações atômicas dipolares, representados pelos termos $\sigma_+ \sigma_-$ e seus hermitianos conjugados, além de deslocamentos Stark dependentes das excitações dos modos, representados pelos termos adicionais proporcionais a σ_z e definimos

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_b = & \Delta + \frac{g_b^2}{2|\Delta|} \left(2b^\dagger b + 1 \right) + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2}{|\Delta|} \left(b^\dagger b \right)^2 + 2g_a \frac{g_b}{|\Delta|} \left(ab^\dagger + a^\dagger b \right) \\ & + 2g_a \frac{\kappa}{|\Delta|} b^\dagger b \left(a^\dagger + a \right) + \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \left[b \left(b^\dagger b - \frac{1}{2} \right) + b^\dagger \left(b b^\dagger - \frac{1}{2} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\hat{\Omega}_b = \frac{g_b}{2|\Delta|} \left[g_b + \kappa \left(b + b^\dagger \right) \right], \quad (2.20)$$

A transformação unitária (2.16) também leva aos resultados

$$\bar{n}_a \Gamma_a U_b \left\{ \mathcal{L}[a^\dagger] \rho_{sis}(t) \right\} U_b^\dagger = \bar{n}_a \Gamma_a \mathcal{L}[a^\dagger] \rho_b(t), \quad (2.21)$$

$$(1 + \bar{n}_a) \Gamma_a U_b \left\{ \mathcal{L}[a] \rho_{sis}(t) \right\} U_b^\dagger = (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \mathcal{L}[a] \rho_b(t), \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
\bar{n}_b \Gamma_b U_b \left\{ \mathcal{L}[b^\dagger] \rho_{sis}(t) \right\} U_b^\dagger &= \bar{n}_b \Gamma_b \sum_{n,m=1}^N \left\{ \mathcal{L}[b^\dagger] \rho_b(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \left(\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, b] \rho_b(t) \right. \right. \\
&+ \mathcal{L}[b^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{\kappa}{|\Delta|} \left(\mathcal{L}[b^\dagger \sigma_+^{(n)}, b] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_-^{(n)}, b] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L}[b^\dagger, b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b^\dagger, b \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{g_b^2}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L}[b^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L}[b^\dagger, b \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{\kappa^2}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L} \left[b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2, b \right] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L} \left[b^\dagger, b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2 \right] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_+^{(n)}, b \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_+^{(n)}, b \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) \\
&- \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_-^{(n)}, b \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_-^{(n)}, b \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{g_b \kappa}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L}[(b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L} \left[\sigma_+^{(m)} \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right), b \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[b^\dagger, \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \sigma_-^{(m)} \right] \rho_b(t) \\
&+ \mathcal{L} \left[b^\dagger, (b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)} \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[\sigma_+^{(n)}, \left(b \sigma_-^{(m)} - b \sigma_+^{(m)} \right) \right] \rho_b(t) \\
&\left. + \mathcal{L} \left[\left(b^\dagger \sigma_+^{(n)} - b^\dagger \sigma_-^{(n)} \right), \sigma_-^{(m)} \right] \rho_b(t) \right\}, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + \bar{n}_b) \Gamma_b U_b \left\{ \mathcal{L}[b] \rho_{sis}(t) \right\} U_b^\dagger &= (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \sum_{n,m=1}^N \left\{ \mathcal{L}[b] \rho_b(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) \right. \right. \\
&+ \mathcal{L}[b, \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{\kappa}{|\Delta|} \left(\mathcal{L}[b \sigma_-^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b \sigma_+^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L}[b, b^\dagger \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b, b^\dagger \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{g_b^2}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L}[b \sigma_z^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L}[b, b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{\kappa^2}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L} \left[b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2, b^\dagger \right] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L} \left[b, b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2 \right] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b \sigma_-^{(n)}, b^\dagger \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b \sigma_-^{(n)}, b^\dagger \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) \\
&- \mathcal{L}[b \sigma_+^{(n)}, b^\dagger \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b \sigma_+^{(n)}, b^\dagger \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) \left. \right) + \frac{g_b \kappa}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L}[(b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) \right. \\
&+ \mathcal{L} \left[\left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \sigma_+^{(m)}, b^\dagger \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[b, \sigma_+^{(m)} \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \right] \rho_b(t) \\
&+ \mathcal{L} \left[b, (b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)} \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[\sigma_-^{(n)}, \left(b^\dagger \sigma_+^{(m)} - b^\dagger \sigma_-^{(m)} \right) \right] \rho_b(t) \\
&\left. + \mathcal{L} \left[\left(b \sigma_-^{(n)} - b \sigma_+^{(n)} \right), \sigma_+^{(m)} \right] \rho_b(t) \right\}, \tag{2.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{n}_b \Gamma_{1ab} U_b \left\{ \mathcal{L}[a^\dagger, b] \rho_{sis}(t) U_b^\dagger \right\} &= \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \sum_{n=1}^N \left\{ \mathcal{L}[a^\dagger, b] \rho_b(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \mathcal{L}[a^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right. \\
&+ \frac{\kappa}{|\Delta|} \left(\mathcal{L}[a^\dagger, b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) - \mathcal{L}[a^\dagger, b \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \right) + \frac{g_b^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L}[a^\dagger, b \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\kappa^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L} \left[a^\dagger, b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2 \right] \rho_b(t) + \frac{\kappa g_b}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L} [a^\dagger, (b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) \right. \\
& \left. + \mathcal{L} [a^\dagger, (\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}) b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right) \Bigg\}, \tag{2.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} U_b \Big\{ \mathcal{L} [b, a^\dagger] \rho_{sis}(t) \Big\} U_b^\dagger + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \sum_{n=1}^N \Big\{ \mathcal{L} [b, a^\dagger] \rho_b(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \mathcal{L} [\sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) \\
+ \frac{\kappa}{|\Delta|} \left(\mathcal{L} [b \sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) - \mathcal{L} [b \sigma_+^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) \right) + \frac{g_b^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L} [b \sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) \\
+ \frac{\kappa^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L} \left[b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2, a^\dagger \right] \rho_b(t) + \frac{\kappa g_b}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L} [(b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) \right. \\
\left. + \mathcal{L} [(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}) b \sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) \right) \Big\}, \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{n}_a \Gamma_{2ab} U_b \Big\{ \mathcal{L} [b^\dagger, a] \rho_{sis}(t) \Big\} U_b^\dagger = \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \sum_{n=1}^N \Big\{ \mathcal{L} [b^\dagger, a] \rho_b(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \mathcal{L} [\sigma_+^{(n)}, a] \rho_b(t) \\
+ \frac{\kappa}{|\Delta|} \left(\mathcal{L} [b^\dagger \sigma_+^{(n)}, a] \rho_b(t) - \mathcal{L} [b^\dagger \sigma_-^{(n)}, a] \rho_b(t) \right) + \frac{g_b^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L} [b^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_b(t) \\
+ \frac{\kappa^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L} \left[b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2, a \right] \rho_b(t) + \frac{\kappa g_b}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L} [(b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_b(t) \right. \\
\left. + \mathcal{L} [(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}) b^\dagger \sigma_+^{(n)}, a] \rho_b(t) \right) \Big\}, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} U_b \Big\{ \mathcal{L} [a, b^\dagger] \rho_{sis}(t) \Big\} U_b^\dagger = (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \sum_{n=1}^N \Big\{ \mathcal{L} [a, b^\dagger] \rho_b(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \mathcal{L} [a, \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \\
+ \frac{\kappa}{|\Delta|} \left(\mathcal{L} [a, b^\dagger \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) - \mathcal{L} [a, b^\dagger \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right) + \frac{g_b^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L} [a, b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) \\
+ \frac{\kappa^2}{2|\Delta|^2} \mathcal{L} \left[a, b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2 \right] \rho_b(t) + \frac{\kappa g_b}{2|\Delta|^2} \left(\mathcal{L} [a, (b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) \right. \\
\left. + \mathcal{L} [a, (\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}) b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right) \Big\}, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=1}^N \bar{\eta} \Gamma U_b \Big\{ \mathcal{L} [\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_{sis}(t) \Big\} U_b^\dagger = \sum_{n,m,p=1}^N \bar{\eta} \Gamma \left(\mathcal{L} [\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) + 2 \frac{g_b}{|\Delta|} \left[b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} \right. \right. \\
\left. \left. + \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b \sigma_z^{(m)} \right] + 2 \frac{\kappa}{|\Delta|} \left[b^\dagger b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} + \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_z^{(m)} \right] + 2 \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \right. \\
\left. \left[b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b \sigma_z^{(m)} + \sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} - b^\dagger b \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} - b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_+^{(m)} \rho_b(t) \sigma_-^{(n)} \sigma_z^{(p)} - \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b b \sigma_+^{(m)} - \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b b^\dagger \sigma_-^{(m)} \Big] + 2 \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \\
& \left[(b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} + \sigma_+^{(m)} \rho_b(t) (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \right] - \left\{ \frac{g_b}{|\Delta|} \left[b \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)} \right. \right. \\
& + \sigma_-^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)} \Big] + \frac{\kappa}{|\Delta|} \left[\sigma_-^{(m)} b^\dagger b \sigma_z^{(n)} + b^\dagger b \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)} \right] + \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \left[b \sigma_z^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_+^{(n)} \right. \\
& - b b \sigma_+^{(m)} \sigma_+^{(n)} - b b^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger b \sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(n)} \Big] \\
& \left. + \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \left[\sigma_-^{(m)} (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) + (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \sigma_+^{(m)} \right], \rho_b(t) \right\}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=1}^N (1 + \bar{\eta}) \Gamma U_b \left\{ \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_{sis}(t) \right\} U_b^\dagger &= \sum_{n,m,p=1}^N (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) \right. \\
& + 2 \frac{g_b}{|\Delta|} \left[b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} + \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} \right] + 2 \frac{\kappa}{|\Delta|} \left[b^\dagger b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\
& + \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_z^{(m)} \Big] + 2 \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \left[b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} + \sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\
& - b^\dagger b \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} - b b \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} + \sigma_-^{(m)} \rho_b(t) \sigma_+^{(n)} \sigma_z^{(p)} - \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(m)} \\
& - \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_+^{(m)} \Big] + 2 \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \left[(b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\
& + \sigma_-^{(m)} \rho_b(t) (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \Big] - \left\{ \frac{g_b}{|\Delta|} \left[b^\dagger \sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(m)} b \sigma_z^{(n)} \right] + \frac{\kappa}{|\Delta|} \left[\sigma_+^{(m)} b b^\dagger \sigma_z^{(n)} \right. \right. \\
& + b b^\dagger \sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} \Big] + \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \left[b^\dagger \sigma_z^{(m)} b \sigma_z^{(n)} + \sigma_+^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_-^{(n)} - b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_-^{(n)} - b^\dagger b^\dagger \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} \right. \\
& + \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b b^\dagger \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b b \sigma_+^{(n)} \Big] + 2 \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \left[\sigma_+^{(m)} (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \right. \\
& \left. + (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \sigma_-^{(m)} \right], \rho_b(t) \Big\}, \quad (2.30)
\end{aligned}$$

e a equação mestra efetiva para o sistema no regime de interação dispersiva

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \rho_b(t) &= -i \left[H_{ef,b}, \rho_b(t) \right] + \mathcal{L} \rho_b(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \tilde{\mathcal{L}}_1^{(b)} \rho_b(t) + \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(b)} \rho_b(t) \\
& + \frac{\kappa}{|\Delta|} \tilde{\mathcal{L}}_3^{(b)} \rho_b(t) + \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_4^{(b)} \rho_b(t) + \frac{g_b \kappa}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_5^{(b)} \rho_b(t), \quad (2.31)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \rho_b(t) &= \bar{n}_a \Gamma_a \mathcal{L}[a^\dagger] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \mathcal{L}[a] \rho_b(t) + \bar{n}_b \Gamma_b \mathcal{L}[b^\dagger] \rho_b(t) \\
& + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \mathcal{L}[b] \rho_b(t) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, b] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[b, a^\dagger] \rho_b(t) \\
& + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b^\dagger, a] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[a, b^\dagger] \rho_b(t)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n,m=1}^N \Gamma \left\{ \bar{\eta} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) + (1 + \bar{\eta}) \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) \right\}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_1^{(b)} \rho_b(t) = & \sum_{n,m=1}^N \left\{ \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, b] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) \right. \right. \\ & + \left. \mathcal{L}[b, \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \right) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a, \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \\ & + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, a] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) + \bar{\eta} \Gamma \left[4b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\ & + 4\sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b \sigma_z^{(m)} - \left. \left\{ 2b \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)} + 2\sigma_-^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right] + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left[4b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\ & \left. + 4\sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} - \left\{ 2b \sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} + 2\sigma_+^{(m)} b \sigma_z^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right] \right\}, \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(b)} \rho_b(t) = & \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L}[b^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b^\dagger, b \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) \right) \right. \\ & + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L}[b \sigma_z^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b, b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) \right) \\ & + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, b \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a, b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_b(t) \\ & + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b \sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) + \bar{\eta} \Gamma \left[8b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b \sigma_z^{(m)} + 2\sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\ & - 2b^\dagger b \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} - 2b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} + 2\sigma_+^{(m)} \rho_b(t) \sigma_-^{(n)} \sigma_z^{(p)} - 2\sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b b \sigma_+^{(m)} \\ & - 2\sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b b^\dagger \sigma_-^{(m)} - \left. \left\{ 4b \sigma_z^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_+^{(n)} - b b \sigma_+^{(m)} \sigma_+^{(n)} - b b^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger b \sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right] + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left[8b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} \right. \\ & + 2\sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} - 2b b \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} - 2b b^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} + 2\sigma_-^{(m)} \rho_b(t) \sigma_+^{(n)} \sigma_z^{(p)} \\ & - 2\sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_+^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(m)} - \left. \left\{ 4b^\dagger \sigma_z^{(m)} b \sigma_z^{(n)} + \sigma_+^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} \right. \right. \\ & \left. \left. - b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_-^{(n)} - b^\dagger b \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b b^\dagger \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b b \sigma_+^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right] \right\}. \quad (2.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_3^{(b)} \rho_b(t) = & \sum_{n,m=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \bar{n}_b \Gamma_b \left[\mathcal{L}[b^\dagger \sigma_+^{(n)}, b] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_-^{(n)}, b] \rho_b(t) \right] + \frac{1}{2} (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \right. \\ & \left[\mathcal{L}[b^\dagger, b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b^\dagger, b \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \right] + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[a^\dagger, b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) - \mathcal{L}[a^\dagger, b \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \right) \\ & + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[b \sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) - \mathcal{L}[b \sigma_+^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) \right) + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[b^\dagger \sigma_+^{(n)}, a] \rho_b(t) \right. \\ & - \left. \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_-^{(n)}, a] \rho_b(t) \right) \mathcal{L} \left[b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2, a \right] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[a, b^\dagger \sigma_+^{(n)}] \rho_b(t) \right. \\ & \left. - \mathcal{L}[a, b^\dagger \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right) + \bar{\eta} \Gamma \left(2 \left[b^\dagger b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} + \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_z^{(m)} \right] - \left\{ \sigma_-^{(m)} b^\dagger b \sigma_z^{(n)} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b^\dagger b \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)}, \rho_b(t) \Big\} + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left(2 \left[b^\dagger b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} + \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_z^{(m)} \right] \right. \\
& \left. - \left\{ b^\dagger \sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(m)} b \sigma_z^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right), \tag{2.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_4^{(b)} \rho_b(t) = & \sum_{n,m=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L} \left[b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2, b \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[b^\dagger, b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2 \right] \rho_b(t) \right. \right. \\
& + \mathcal{L} \left[b^\dagger \sigma_+^{(n)}, b \sigma_-^{(m)} \right] \rho_b(t) - \mathcal{L} \left[b^\dagger \sigma_+^{(n)}, b \sigma_+^{(m)} \right] \rho_b(t) - \mathcal{L} \left[b^\dagger \sigma_-^{(n)}, b \sigma_-^{(m)} \right] \rho_b(t) \\
& + \mathcal{L} \left[b^\dagger \sigma_-^{(n)}, b \sigma_+^{(m)} \right] \rho_b(t) \Big) + \frac{1}{2} (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L} \left[b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2, b^\dagger \right] \rho_b(t) \right. \\
& + \mathcal{L} \left[b, b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2 \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[b \sigma_-^{(n)}, b^\dagger \sigma_+^{(m)} \right] \rho_b(t) - \mathcal{L} \left[b \sigma_-^{(n)}, b^\dagger \sigma_+^{(m)} \right] \rho_b(t) \\
& - \mathcal{L} \left[b \sigma_+^{(n)}, b^\dagger \sigma_+^{(m)} \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[b \sigma_+^{(n)}, b^\dagger \sigma_-^{(m)} \right] \rho_b(t) \Big) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L} \left[a^\dagger, b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2 \right] \rho_b(t) \\
& + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L} \left[b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2, a^\dagger \right] \rho_b(t) + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L} \left[b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2, a^\dagger \right] \rho_b(t) \\
& + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L} \left[a, b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2 \right] \rho_b(t) + \bar{\eta} \Gamma \left(\left[(b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} \right. \right. \\
& + \sigma_+^{(m)} \rho_b(t) (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \Big] - \left\{ \sigma_-^{(m)} (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \right. \\
& + (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \sigma_+^{(m)}, \rho_b(t) \Big\} + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left(\left[(b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} \right. \right. \\
& + \sigma_-^{(m)} \rho_b(t) (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \Big] - \left\{ \sigma_+^{(m)} (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \right. \\
& \left. \left. + (b^\dagger b)^2 \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \sigma_-^{(m)}, \rho_b(t) \right\} \right) \Big\}, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_5^{(b)} \rho_b(t) = & \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L} \left[(b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)}, b \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[\sigma_+^{(m)} \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right), b \right] \rho_b(t) \right. \right. \\
& + \mathcal{L} \left[b^\dagger, \left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \sigma_-^{(m)} \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[b^\dagger, (b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)} \right] \rho_b(t) \\
& + \mathcal{L} \left[\sigma_+^{(n)}, \left(b \sigma_-^{(m)} - b \sigma_+^{(m)} \right) \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[\left(b^\dagger \sigma_+^{(n)} - b^\dagger \sigma_-^{(n)} \right), \sigma_-^{(m)} \right] \rho_b(t) \Big) \\
& + \frac{1}{2} (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L} \left[(b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)}, b^\dagger \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[\left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)} \right) \sigma_+^{(m)}, b^\dagger \right] \rho_b(t) \right. \\
& + \mathcal{L} \left[b, \sigma_+^{(m)} \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right) \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[b, (b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)} \right] \rho_b(t) \\
& \left. \left. + \mathcal{L} \left[\sigma_-^{(n)}, \left(b^\dagger \sigma_+^{(m)} - b^\dagger \sigma_-^{(m)} \right) \right] \rho_b(t) + \mathcal{L} \left[\left(b \sigma_-^{(n)} - b \sigma_+^{(n)} \right), \sigma_+^{(m)} \right] \rho_b(t) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[a^\dagger, (b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[a^\dagger, (\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}) b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right) \\
& + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[(b - b^\dagger) b \sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) + \mathcal{L}[(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}) b \sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) \right) \\
& + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[(b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_b(t) + \mathcal{L}[(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}) b^\dagger \sigma_+^{(n)}, a] \rho_b(t) \right) \\
& + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[a, (b^\dagger - b) b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + \mathcal{L}[a, (\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}) b \sigma_-^{(n)}] \rho_b(t) \right) \\
& \frac{1}{2} \bar{\eta} \Gamma \left(2(b + b^\dagger) \sigma_z^{(n)} \sigma_+^{(m)} \rho_b(t) \sigma_-^{(p)} - 2(b^\dagger b b^\dagger + b b^\dagger b) \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\
& \left. - 2b^\dagger \sigma_-^{(n)} (2b^\dagger b + 1) \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} + 4b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_z^{(m)} - \left\{ \sigma_-^{(n)} (b + b^\dagger) \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(p)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sigma_-^{(m)} (b^\dagger b b^\dagger + b b^\dagger b) \sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger \sigma_-^{(n)} (2b^\dagger b + 1) + b^\dagger b \sigma_z^{(m)} 2b^\dagger \sigma_z^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right) \\
& + \frac{1}{2} (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left(2(b + b^\dagger) \sigma_z^{(n)} \sigma_-^{(m)} \rho_b(t) \sigma_+^{(p)} - 2(b^\dagger b b^\dagger + b b^\dagger b) \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\
& \left. - 2b \sigma_+^{(n)} (2b^\dagger b + 1) \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} + 4b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b b^\dagger \sigma_z^{(m)} - \left\{ \sigma_+^{(n)} (b + b^\dagger) \sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(p)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sigma_+^{(m)} (b^\dagger b b^\dagger + b b^\dagger b) \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b \sigma_+^{(n)} (2b^\dagger b + 1) + b b^\dagger \sigma_z^{(m)} 2b \sigma_z^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right) \Bigg\}, \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Para o regime de cavidade ruim do modo ω_a , a taxa de perda deste modo, Γ_a , deve satisfazer a relação

$$g_a \ll \Gamma_a, \Gamma. \quad (2.38)$$

Definindo um novo operador unitário

$$U_a = \exp \left\{ \frac{g_a}{\Gamma_a} \sum_{n=1}^N \left(a \sigma_+^{(n)} - a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) \right\}, \quad (2.39)$$

seguimos novamente os passos expostos acima (quando da utilização de operador U_b) para a realização da transformação unitária

$$\rho_a(t) = U_a \rho_b(t) U_a^\dagger, \quad (2.40)$$

que retendo termos de ordem $\frac{g_a^2}{\Gamma_a^2}$, leva ao hamiltoniano efetivo

$$\begin{aligned}
H_{ef,a} & = U_a H_{ef,b} U_a^\dagger = \omega_a a^\dagger a + \tilde{\Delta}_a \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)} + \tilde{g}_a \sum_{n=1}^N \left(a \sigma_+^{(n)} + a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right) \\
& + \hat{\Omega}_a \sum_{n,m=1}^N \left(\sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(n)} \right), \quad (2.41)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_a &= \Delta + \omega_a + \frac{g_b^2}{2|\Delta|} (2b^\dagger b + 1) + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2}{|\Delta|} (b^\dagger b)^2 + 2g_a \frac{g_b}{|\Delta|} (ab^\dagger + a^\dagger b) \\ &+ 2g_a \frac{\kappa}{|\Delta|} b^\dagger b (a^\dagger + a) + \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \left[b \left(b^\dagger b - \frac{1}{2} \right) + b^\dagger \left(b b^\dagger - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &\frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right) (2a^\dagger a + 1),\end{aligned}\quad (2.42)$$

$$\hat{\Omega}_a = \frac{g_b}{2|\Delta|} \left[g_b + \kappa (b + b^\dagger) \right] + \frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \quad (2.43)$$

$$\tilde{g}_a = g_a \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \quad (2.44)$$

onde vemos novamente termos de deslocamento Stark dependentes do número de excitações dos modos e interações atômicas dipolares entre os componentes da amostra; e aos resultados

$$\begin{aligned}\bar{n}_a \Gamma_a U_a \left\{ \mathcal{L}[a^\dagger] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger &= \bar{n}_a \Gamma_a \left\{ \mathcal{L}[a^\dagger] \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \sum_{n=1}^N \left(\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, a] \rho_a(t) + \mathcal{L}[a^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) \right) \right. \\ &\left. + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \sum_{n=1}^N \left(\mathcal{L}[a^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_a(t) + \mathcal{L}[a^\dagger, a \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) \right) \right\},\end{aligned}\quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}(1 + \bar{n}_a) \Gamma_a U_a \left\{ \mathcal{L}[a] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger &= (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \left\{ \mathcal{L}[a] \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \sum_{n=1}^N \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_a(t) \right. \right. \\ &\left. \left. + \mathcal{L}[a, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) \right) + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \sum_{n=1}^N \left(\mathcal{L}[a \sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_a(t) + \mathcal{L}[a, a^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) \right. \right. \\ &\left. \left. + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_a(t) \right) \right\},\end{aligned}\quad (2.46)$$

$$\bar{n}_b \Gamma_b U_a \left\{ \mathcal{L}[b^\dagger] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = \bar{n}_b \Gamma_b \mathcal{L}[b^\dagger] \rho_a(t), \quad (2.47)$$

$$(1 + \bar{n}_b) \Gamma_b U_a \left\{ \mathcal{L}[b] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \mathcal{L}[b] \rho_a(t), \quad (2.48)$$

$$\bar{n}_b \Gamma_{1ab} U_a \left\{ \mathcal{L}[a^\dagger, b] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \left\{ \mathcal{L}[a^\dagger, b] \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, b] \rho_a(t) \right\}$$

$$+ \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[a^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_a(t) \Big\}, \quad (2.49)$$

$$(1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} U_a \left\{ \mathcal{L}[b, a^\dagger] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \left\{ \mathcal{L}[a, b^\dagger] \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, b^\dagger] \rho_a(t) \right. \\ \left. + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[a \sigma_z^{(n)}, b^\dagger] \rho_a(t) \right\}, \quad (2.50)$$

$$\bar{n}_a \Gamma_{2ab} U_a \left\{ \mathcal{L}[b^\dagger, a] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \left\{ \mathcal{L}[b^\dagger, a] \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[b^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) \right. \\ \left. + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[b^\dagger, a \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) \right\}, \quad (2.51)$$

$$(1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} U_a \left\{ \mathcal{L}[b, a^\dagger] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \left\{ \mathcal{L}[b, a^\dagger] \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[b, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) \right. \\ \left. + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[b, a^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) \right\}, \quad (2.52)$$

$$\sum_{n,m=1}^N \bar{\eta} \Gamma U_a \left\{ \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = \sum_{n,m,p=1}^N \bar{\eta} \Gamma \left(\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \right. \\ \left[4a^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} + 4\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) a \sigma_z^{(m)} \right] + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \left[8a^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) a \sigma_z^{(m)} + 2\sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\ \left. - 2a^\dagger a \sigma_+^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} - 2a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} + 2\sigma_+^{(m)} \rho_a(t) \sigma_-^{(n)} \sigma_z^{(p)} - 2\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) a a \sigma_+^{(m)} \right. \\ \left. - 2\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) a a^\dagger \sigma_-^{(m)} \right] - \left\{ \frac{g_a}{\Gamma_a} \left[2a \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)} + 2\sigma_-^{(m)} a^\dagger \sigma_z^{(n)} \right] + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \left[4a \sigma_z^{(m)} a^\dagger \sigma_z^{(n)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_-^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_+^{(n)} - a a \sigma_+^{(m)} \sigma_+^{(n)} - a a^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} - \sigma_-^{(m)} a^\dagger a \sigma_+^{(n)} \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_-^{(m)} a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right], \rho_a(t) \right\}, \quad (2.53)$$

$$\sum_{n,m=1}^N (1 + \bar{\eta}) \Gamma U_a \left\{ \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger = \sum_{n,m,p=1}^N (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) \right. \\ \left. + \frac{g_a}{\Gamma_a} \left[4a \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} + 4\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger \sigma_z^{(m)} \right] + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \left[8a \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger \sigma_z^{(m)} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} - 2a a \sigma_+^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} - 2a a^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} + 2\sigma_-^{(m)} \rho_a(t) \sigma_+^{(n)} \sigma_z^{(p)} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - 2\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger a \sigma_+^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(m)} \Big] - \left\{ \frac{g_a}{\Gamma_a} \left[2a\sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} + 2\sigma_+^{(m)} a\sigma_z^{(n)} \right] \right. \\
& + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \left[4a^\dagger \sigma_z^{(m)} a \sigma_z^{(n)} + \sigma_+^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_-^{(n)} - a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_-^{(n)} - a^\dagger a \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} \right. \\
& \left. \left. - \sigma_+^{(m)} a a^\dagger \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} a a \sigma_+^{(n)} \right], \rho_a(t) \right\} \Big), \tag{2.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g_b}{|\Delta|} U_a \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_1^{(b)} \rho_b(t) \right\} U_a^\dagger &= \frac{g_b}{|\Delta|} \sum_{n,m=1}^N \left\{ \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, b] \rho_a(t) + \mathcal{L}[b^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) \right) \right. \\
& + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, b^\dagger] \rho_a(t) + \mathcal{L}[b, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) \right) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) \\
& + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, a] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_a(t) \\
& + \bar{\eta} \Gamma \left[4b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} + 4\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) b \sigma_z^{(m)} - \left\{ 2b\sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)} + 2\sigma_-^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] \\
& + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left[4b\sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} + 4\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} - \left\{ 2b\sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\sigma_+^{(m)} b\sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] \Big\} + \frac{g_a g_b}{\Gamma_a |\Delta|} \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ 2\bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L}[a^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_a(t) + \mathcal{L}[b^\dagger, a\sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) \right) \right. \\
& + 2(1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L}[a\sigma_z^{(n)}, b^\dagger] \rho_a(t) + \mathcal{L}[b, a^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) \right) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \left(2\mathcal{L}[a^\dagger, a\sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) \right. \\
& + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) \Big) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \left(2\mathcal{L}[a, a^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_a(t) \right) \\
& + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \left(2\mathcal{L}[a^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) \right) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \left(2\mathcal{L}[a\sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_a(t) \right. \\
& + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_a(t) \Big) + 2\bar{\eta} \Gamma \left[2b^\dagger a \sigma_+^{(n)} \rho_2(t) \sigma_-^{(m)} - 2b^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_2(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\
& + 2b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_2(t) a \sigma_z^{(m)} + 2a^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_2(t) b \sigma_z^{(m)} - 2\sigma_+^{(n)} \rho_2(t) a \sigma_+^{(m)} - 2\sigma_+^{(n)} \rho_2(t) a^\dagger \sigma_-^{(m)} \\
& - \left\{ -ba\sigma_+^{(m)} \sigma_+^{(n)} - ba^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} + b\sigma_z^{(m)} a^\dagger \sigma_+^{(n)} + a\sigma_z^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger a \sigma_+^{(n)} \right. \\
& \left. - \sigma_-^{(m)} b^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \Big] + 2(1 + \bar{\eta}) \Gamma \left[2ba^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_2(t) \sigma_+^{(m)} - 2ba\sigma_+^{(n)} \rho_2(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\
& + 2b\sigma_z^{(n)} \rho_2(t) a^\dagger \sigma_z^{(m)} + 2a\sigma_z^{(n)} \rho_2(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)} \rho_2(t) a^\dagger \sigma_-^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)} \rho_2(t) a \sigma_+^{(m)} \\
& - \left\{ -b^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_-^{(n)} - b^\dagger a \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + b^\dagger \sigma_z^{(m)} a \sigma_-^{(n)} + a^\dagger \sigma_z^{(m)} b \sigma_z^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right. \\
& \left. - \sigma_+^{(m)} b a \sigma_+^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \Big] \Big\}, \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g_b^2}{|\Delta|^2} U_a \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_2^{(b)} \rho_a(t) \right\} U_a^\dagger &= \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L}[b^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b^\dagger, b\sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) \right) \right. \\
& + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_b(t) \Big) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L}[b\sigma_z^{(n)}, b^\dagger] \rho_b(t) + \mathcal{L}[b, b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) \right. \\
& \left. + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_b(t) \right) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, b\sigma_z^{(n)}] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a, b^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_b(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_b(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b \sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_b(t) + \bar{\eta} \Gamma \left[8b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b \sigma_z^{(m)} \right. \\
& + 2\sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} - 2b^\dagger b \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} - 2b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_-^{(m)} + 2\sigma_+^{(m)} \rho_b(t) \sigma_-^{(n)} \sigma_z^{(p)} \\
& - 2\sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b b \sigma_+^{(m)} - 2\sigma_+^{(n)} \rho_b(t) b b^\dagger \sigma_-^{(m)} - \left\{ 4b \sigma_z^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_+^{(n)} - b b \sigma_+^{(m)} \sigma_+^{(n)} \right. \\
& - b b^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger b \sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(n)}, \rho_b(t) \left. \right\} + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \\
& \left[8b \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} + 2\sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} - 2b b \sigma_+^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} - 2b b^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_b(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\
& + 2\sigma_-^{(m)} \rho_b(t) \sigma_+^{(n)} \sigma_z^{(p)} - 2\sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b \sigma_+^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)} \rho_b(t) b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(m)} - \left\{ 4b^\dagger \sigma_z^{(m)} b \sigma_z^{(n)} \right. \\
& + \sigma_+^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_-^{(n)} - b^\dagger b^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_-^{(n)} - b^\dagger b \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b b^\dagger \sigma_-^{(n)} \\
& \left. \left. - \sigma_+^{(m)} b b \sigma_+^{(n)}, \rho_b(t) \right\} \right]. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

e a equação mestra efetiva para o sistema no regime de cavidade ruim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \rho_a(t) = & -i \left[H_{ef,a}, \rho_a(t) \right] + \mathcal{L} \rho_a(t) + \frac{g_b}{|\Delta|} \tilde{\mathcal{L}}_1^{(b)} \rho_a(t) + \frac{\kappa}{|\Delta|} \tilde{\mathcal{L}}_3^{(b)} \rho_a(t) + \frac{g_a}{\Gamma_a} \tilde{\mathcal{L}}_1^{(a)} \rho_a(t) \\
& + \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(b)} \rho_a(t) + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(a)} \rho_a(t) + \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_4^{(b)} \rho_b(t) + \frac{g_b \kappa}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_5^{(b)} \rho_b(t), \tag{2.57}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \rho_a(t) = & \bar{n}_a \Gamma_a \mathcal{L}[a^\dagger] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \mathcal{L}[a] \rho_a(t) + \bar{n}_b \Gamma_b \mathcal{L}[b^\dagger] \rho_a(t) \\
& + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \mathcal{L}[b] \rho_a(t) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, b] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[b, a^\dagger] \rho_a(t) \\
& + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b^\dagger, a] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[a, b^\dagger] \rho_a(t) \\
& + \sum_{n,m=1}^N \Gamma \left\{ \bar{\eta} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) + (1 + \bar{\eta}) \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_a(t) \right\}, \tag{2.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_1^{(b)} \rho_a(t) = & \sum_{n,m=1}^N \left\{ \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, b] \rho_a(t) + \mathcal{L}[b^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) \right) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, b^\dagger] \rho_a(t) \right. \right. \\
& + \left. \mathcal{L}[b, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) \right) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) \\
& + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, a] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_a(t) + \bar{\eta} \Gamma \left[4b^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\
& + 4\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) b \sigma_z^{(m)} - \left\{ 2b \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)} + 2\sigma_-^{(m)} b^\dagger \sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \left. \right] + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left[4b \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\
& + 4\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) b^\dagger \sigma_z^{(m)} - \left. \left. \left\{ 2b \sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} + 2\sigma_+^{(m)} b \sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] \right\}, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_2^{(b)} \rho_a(t) = \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \bar{n}_b \Gamma_b \left(\mathcal{L}[b^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_a(t) + \mathcal{L}[b^\dagger, b \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \bar{n}_b)\Gamma_b \left(\mathcal{L}[b\sigma_z^{(n)}, b^\dagger]\rho_a(t) + \mathcal{L}[b, b^\dagger\sigma_z^{(n)}]\rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \right) \\
& + \bar{n}_b\Gamma_{1ab}\mathcal{L}[a^\dagger, b\sigma_z^{(n)}]\rho_a(t) + (1 + \bar{n}_b)\Gamma_{1ab}\mathcal{L}[a, b^\dagger\sigma_z^{(n)}]\rho_a(t) + \bar{n}_a\Gamma_{2ab}\mathcal{L}[b^\dagger\sigma_z^{(n)}, a]\rho_a(t) \\
& + (1 + \bar{n}_a)\Gamma_{2ab}\mathcal{L}[b\sigma_z^{(n)}, a^\dagger]\rho_a(t) + \bar{\eta}\Gamma \left[8b^\dagger\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)b\sigma_z^{(m)} + 2\sigma_+^{(p)}\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} \right. \\
& - 2b^\dagger b\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} - 2b^\dagger b^\dagger\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} + 2\sigma_+^{(m)}\rho_a(t)\sigma_-^{(n)}\sigma_z^{(p)} - 2\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)bb\sigma_+^{(m)} \\
& - 2\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)bb^\dagger\sigma_-^{(m)} - \left. \left\{ 4b\sigma_z^{(m)}b^\dagger\sigma_z^{(n)} + \sigma_-^{(m)}\sigma_z^{(p)}\sigma_+^{(n)} - bb\sigma_+^{(m)}\sigma_+^{(n)} - bb^\dagger\sigma_-^{(m)}\sigma_+^{(n)} \right. \right. \\
& + \left. \left. \sigma_-^{(m)}\sigma_+^{(p)}\sigma_z^{(n)} - \sigma_-^{(m)}b^\dagger b\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)}b^\dagger b^\dagger\sigma_-^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] + (1 + \bar{\eta})\Gamma \left[8b\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger\sigma_z^{(m)} \right. \\
& + 2\sigma_-^{(p)}\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} - 2bb\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} - 2bb^\dagger\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} + 2\sigma_-^{(m)}\rho_a(t)\sigma_+^{(n)}\sigma_z^{(p)} \\
& - 2\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger b\sigma_+^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger b^\dagger\sigma_-^{(m)} - \left. \left\{ 4b^\dagger\sigma_z^{(m)}b\sigma_z^{(n)} + \sigma_+^{(m)}\sigma_z^{(p)}\sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(m)}\sigma_-^{(p)}\sigma_z^{(n)} \right. \right. \\
& \left. \left. - b^\dagger b^\dagger\sigma_-^{(m)}\sigma_-^{(n)} - b^\dagger b\sigma_+^{(m)}\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)}bb^\dagger\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)}bb\sigma_+^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] \Big\}. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_3^{(b)}\rho_a(t) & = \sum_{n,m=1}^N \left\{ \frac{1}{2}\bar{n}_b\Gamma_b \left[\mathcal{L}[b^\dagger\sigma_+^{(n)}, b]\rho_a(t) - \mathcal{L}[b^\dagger\sigma_-^{(n)}, b]\rho_a(t) \right] + \frac{1}{2}(1 + \bar{n}_b)\Gamma_b \right. \\
& \left[\mathcal{L}[b^\dagger, b\sigma_-^{(n)}]\rho_a(t) - \mathcal{L}[b^\dagger, b\sigma_+^{(n)}]\rho_a(t) \right] + \bar{n}_b\Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[a^\dagger, b\sigma_-^{(n)}]\rho_a(t) - \mathcal{L}[a^\dagger, b\sigma_+^{(n)}]\rho_a(t) \right) \\
& + (1 + \bar{n}_b)\Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[b\sigma_-^{(n)}, a^\dagger]\rho_a(t) - \mathcal{L}[b\sigma_+^{(n)}, a^\dagger]\rho_a(t) \right) + \bar{n}_a\Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[b^\dagger\sigma_+^{(n)}, a]\rho_a(t) \right. \\
& - \left. \mathcal{L}[b^\dagger\sigma_-^{(n)}, a]\rho_a(t) \right) \mathcal{L} \left[b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)} \right)^2, a \right] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a)\Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[a, b^\dagger\sigma_+^{(n)}]\rho_a(t) \right. \\
& - \left. \mathcal{L}[a, b^\dagger\sigma_-^{(n)}]\rho_a(t) \right) + \bar{\eta}\Gamma \left(2 \left[b^\dagger b\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} + \sigma_+^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger b\sigma_z^{(m)} \right] - \left\{ \sigma_-^{(m)}b^\dagger b\sigma_z^{(n)} \right. \right. \\
& + \left. \left. b^\dagger b\sigma_z^{(m)}\sigma_+^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right) + (1 + \bar{\eta})\Gamma \left(2 \left[b^\dagger b\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} + \sigma_+^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger b\sigma_z^{(m)} \right] \right. \\
& \left. - \left\{ b^\dagger\sigma_z^{(m)}\sigma_-^{(n)} + \sigma_+^{(m)}b\sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right), \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_4^{(b)}\rho_a(t) & = \sum_{n,m=1}^N \left\{ \frac{1}{2}\bar{n}_b\Gamma_b \left(\mathcal{L} \left[b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2, b \right] \rho_a(t) + \mathcal{L} \left[b^\dagger, b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2 \right] \rho_a(t) \right. \right. \\
& + \mathcal{L}[b^\dagger\sigma_+^{(n)}, b\sigma_-^{(m)}]\rho_a(t) - \mathcal{L}[b^\dagger\sigma_+^{(n)}, b\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) - \mathcal{L}[b^\dagger\sigma_-^{(n)}, b\sigma_-^{(m)}]\rho_a(t) \\
& + \left. \mathcal{L}[b^\dagger\sigma_-^{(n)}, b\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \right) + \frac{1}{2}(1 + \bar{n}_b)\Gamma_b \left(\mathcal{L} \left[b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2, b^\dagger \right] \rho_a(t) \right. \\
& + \mathcal{L} \left[b, b^\dagger \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2 \right] \rho_a(t) + \mathcal{L}[b\sigma_-^{(n)}, b^\dagger\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) - \mathcal{L}[b\sigma_-^{(n)}, b^\dagger\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \\
& - \left. \mathcal{L}[b\sigma_+^{(n)}, b^\dagger\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) + \mathcal{L}[b\sigma_+^{(n)}, b^\dagger\sigma_-^{(m)}]\rho_a(t) \right) + \bar{n}_b\Gamma_{1ab} \mathcal{L} \left[a^\dagger, b \left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} \right)^2 \right] \rho_a(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \bar{n}_b)\Gamma_{1ab}\mathcal{L}\left[b\left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}\right)^2, a^\dagger\right]\rho_a(t) + \bar{n}_a\Gamma_{2ab} + (1 + \bar{n}_a)\Gamma_{2ab} \\
& \mathcal{L}\left[a, b^\dagger\left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}\right)^2\right]\rho_a(t) + \bar{\eta}\Gamma\left(\left[(b^\dagger b)^2\left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}\right)\rho_a(t)\sigma_-^{(m)}\right.\right. \\
& \left. + \sigma_+^{(m)}\rho_a(t)(b^\dagger b)^2\left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}\right)\right] - \left\{\sigma_-^{(m)}(b^\dagger b)^2\left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}\right)\right. \\
& \left. + (b^\dagger b)^2\left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}\right)\sigma_+^{(m)}, \rho_a(t)\right\} + (1 + \bar{\eta})\Gamma\left(\left[(b^\dagger b)^2\left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}\right)\rho_a(t)\sigma_+^{(m)}\right.\right. \\
& \left. + \sigma_-^{(m)}\rho_a(t)(b^\dagger b)^2\left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}\right)\right] - \left\{\sigma_+^{(m)}(b^\dagger b)^2\left(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}\right)\right. \\
& \left. + (b^\dagger b)^2\left(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)}\right)\sigma_-^{(m)}, \rho_a(t)\right\} \left. \right\}, \tag{2.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_5^{(b)}\rho_a(t) = & \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \frac{1}{2}\bar{n}_b\Gamma_b \left(\mathcal{L}[(b^\dagger - b)b^\dagger\sigma_z^{(n)}, b]\rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_+^{(m)}(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}), b]\rho_a(t) \right. \right. \\
& + \mathcal{L}\left[b^\dagger, (\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)})\sigma_-^{(m)}\right]\rho_a(t) + \mathcal{L}\left[b^\dagger, (b - b^\dagger)b\sigma_z^{(n)}\right]\rho_a(t) \\
& + \mathcal{L}\left[\sigma_+^{(n)}, (b\sigma_-^{(m)} - b\sigma_+^{(m)})\right]\rho_a(t) + \mathcal{L}\left[(b^\dagger\sigma_+^{(n)} - b^\dagger\sigma_-^{(n)}), \sigma_-^{(m)}\right]\rho_a(t) \left. \right) \\
& + \frac{1}{2}(1 + \bar{n}_b)\Gamma_b \left(\mathcal{L}[(b - b^\dagger)b\sigma_z^{(n)}, b^\dagger]\rho_a(t) + \mathcal{L}\left[(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)})\sigma_+^{(m)}, b^\dagger\right]\rho_a(t) \right. \\
& + \mathcal{L}\left[b, \sigma_+^{(m)}(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)})\right]\rho_a(t) + \mathcal{L}\left[b, (b^\dagger - b)b^\dagger\sigma_z^{(n)}\right]\rho_a(t) \\
& + \mathcal{L}\left[\sigma_-^{(n)}, (b^\dagger\sigma_+^{(m)} - b^\dagger\sigma_-^{(m)})\right]\rho_a(t) + \mathcal{L}\left[(b\sigma_-^{(n)} - b\sigma_+^{(n)}), \sigma_+^{(m)}\right]\rho_a(t) \left. \right) \\
& + \bar{n}_b\Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[a^\dagger, (b - b^\dagger)b\sigma_z^{(n)}]\rho_a(t) + \mathcal{L}[a^\dagger, (\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)})b\sigma_-^{(n)}]\rho_a(t) \right) \\
& + (1 + \bar{n}_b)\Gamma_{1ab} \left(\mathcal{L}[(b - b^\dagger)b\sigma_z^{(n)}, a^\dagger]\rho_a(t) + \mathcal{L}[(\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(n)})b\sigma_-^{(n)}, a^\dagger]\rho_a(t) \right) \\
& + \bar{n}_a\Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[(b^\dagger - b)b^\dagger\sigma_z^{(n)}, a]\rho_a(t) + \mathcal{L}[(\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)})b^\dagger\sigma_+^{(n)}, a]\rho_a(t) \right) \\
& + (1 + \bar{n}_a)\Gamma_{2ab} \left(\mathcal{L}[a, (b^\dagger - b)b^\dagger\sigma_z^{(n)}]\rho_a(t) + \mathcal{L}[a, (\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)})b\sigma_-^{(n)}]\rho_a(t) \right) \\
& \frac{1}{2}\bar{\eta}\Gamma \left(2(b + b^\dagger)\sigma_z^{(n)}\sigma_+^{(m)}\rho_a(t)\sigma_-^{(p)} - 2(b^\dagger bb^\dagger + bb^\dagger b)\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} \right. \\
& - 2b^\dagger\sigma_-^{(n)}(2b^\dagger b + 1)\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} + 4b^\dagger\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger b\sigma_z^{(m)} - \left\{ \sigma_-^{(n)}(b + b^\dagger)\sigma_z^{(m)}\sigma_+^{(p)} \right. \\
& \left. - \sigma_-^{(m)}(b^\dagger bb^\dagger + bb^\dagger b)\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)}b^\dagger\sigma_-^{(n)}(2b^\dagger b + 1) + b^\dagger b\sigma_z^{(m)}2b^\dagger\sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \left. \right) \\
& + \frac{1}{2}(1 + \bar{\eta})\Gamma \left(2(b + b^\dagger)\sigma_z^{(n)}\sigma_-^{(m)}\rho_a(t)\sigma_+^{(p)} - 2(b^\dagger bb^\dagger + bb^\dagger b)\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} \right. \\
& \left. - 2b\sigma_+^{(n)}(2b^\dagger b + 1)\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} + 4b\sigma_z^{(n)}\rho_a(t)bb^\dagger\sigma_z^{(m)} - \left\{ \sigma_+^{(n)}(b + b^\dagger)\sigma_z^{(m)}\sigma_-^{(p)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$- \sigma_+^{(m)}(b^\dagger b b^\dagger + b b^\dagger b) \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} b \sigma_+^{(n)} (2b^\dagger b + 1) + b b^\dagger \sigma_z^{(m)} 2b \sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \left. \right\} \Bigg), \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_1^{(a)} \rho_a(t) = & \sum_{n,m=1}^N \left\{ \bar{n}_a \Gamma_a \left(\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, a] \rho_a(t) + \mathcal{L}[a^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) \right) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \left(\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, a^\dagger] \rho_a(t) \right. \right. \\ & + \mathcal{L}[a, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) \Big) + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, b] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, b^\dagger] \rho_a(t) \\ & + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b^\dagger, \sigma_-^{(n)}] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b, \sigma_+^{(n)}] \rho_a(t) + \bar{\eta} \Gamma \left[4a^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\ & + 4\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) a \sigma_z^{(m)} - \left. \left\{ 2a \sigma_z^{(m)} \sigma_+^{(n)} + 2\sigma_-^{(m)} a^\dagger \sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left[4a \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} \right. \\ & \left. \left. + 4\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger \sigma_z^{(m)} - \left\{ 2a \sigma_z^{(m)} \sigma_-^{(n)} + 2\sigma_+^{(m)} a \sigma_z^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] \right\}, \quad (2.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(a)} \rho_a(t) = & \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \bar{n}_a \Gamma_a \left(\mathcal{L}[a^\dagger \sigma_z^{(n)}, a] \rho_a(t) + \mathcal{L}[a^\dagger, a \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_a(t) \right) \right. \\ & + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \left(\mathcal{L}[a \sigma_z^{(n)}, a^\dagger] \rho_a(t) + \mathcal{L}[a, a^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) + \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_a(t) \right) \\ & + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a^\dagger \sigma_z^{(n)}, b] \rho_a(t) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \mathcal{L}[a \sigma_z^{(n)}, b^\dagger] \rho_a(t) + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b^\dagger, a \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) \\ & + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \mathcal{L}[b, a^\dagger \sigma_z^{(n)}] \rho_a(t) + \bar{\eta} \Gamma \left[8a^\dagger \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) a \sigma_z^{(m)} + 2\sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} \right. \\ & - 2a^\dagger a \sigma_+^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} - 2a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_a(t) \sigma_-^{(m)} + 2\sigma_+^{(m)} \rho_a(t) \sigma_-^{(n)} \sigma_z^{(p)} - 2\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) a a \sigma_+^{(m)} \\ & - 2\sigma_+^{(n)} \rho_a(t) a a^\dagger \sigma_-^{(m)} - \left. \left\{ 4a \sigma_z^{(m)} a^\dagger \sigma_z^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_+^{(n)} - a a \sigma_+^{(m)} \sigma_+^{(n)} - a a^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} \right. \right. \\ & + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(p)} \sigma_z^{(n)} - \sigma_-^{(m)} a^\dagger a \sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(m)} a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(n)}, \rho_a(t) \left. \right\} \right] + (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left[8a \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger \sigma_z^{(m)} \right. \\ & + 2\sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} - 2a a \sigma_+^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} - 2a a^\dagger \sigma_-^{(n)} \rho_a(t) \sigma_+^{(m)} + 2\sigma_-^{(m)} \rho_a(t) \sigma_+^{(n)} \sigma_z^{(p)} \\ & - 2\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger a \sigma_+^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)} \rho_a(t) a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(m)} - \left. \left\{ 4a^\dagger \sigma_z^{(m)} a \sigma_z^{(n)} + \sigma_+^{(m)} \sigma_z^{(p)} \sigma_-^{(n)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(p)} \sigma_z^{(n)} - a^\dagger a^\dagger \sigma_-^{(m)} \sigma_-^{(n)} - a^\dagger a \sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)} a a^\dagger \sigma_-^{(n)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sigma_+^{(m)} a a \sigma_+^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] \Bigg\}. \quad (2.65) \end{aligned}$$

Utilizando a aproximação de ondas girantes, pela qual eliminamos (através de uma média temporal numa escala de tempo adequada) termos fortemente oscilantes, simplificamos o operador densidade como obtido para a forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_a(t) = & -i \left[H_{ef,a}, \rho_a(t) \right] + \mathcal{L} \rho_a(t) + \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(b)} \rho_a(t) + \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(a)} \rho_a(t) \\ & + \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \tilde{\mathcal{L}}_4^{(b)} \rho_a(t), \quad (2.66) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\rho_a(t) &= \bar{n}_a\Gamma_a\mathcal{L}[a^\dagger]\rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a)\Gamma_a\mathcal{L}[a]\rho_a(t) + \bar{n}_b\Gamma_b\mathcal{L}[b^\dagger]\rho_a(t) \\
&+ (1 + \bar{n}_b)\Gamma_b\mathcal{L}[b]\rho_a(t) + \sum_{n,m=1}^N \Gamma \left\{ \bar{\eta}\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}]\rho_a(t) \right. \\
&\left. + (1 + \bar{\eta})\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \right\}, \tag{2.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_2^{(b)}\rho_a(t) &= \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \bar{n}_b\Gamma_b\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}]\rho_a(t) + (1 + \bar{n}_b)\Gamma_b\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \right\} \\
&+ \bar{\eta}\Gamma \left[-2b^\dagger b\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} - 2\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)bb^\dagger\sigma_-^{(m)} - \left\{ -bb^\dagger\sigma_-^{(m)}\sigma_+^{(n)} \right. \right. \\
&- \left. \left. \sigma_-^{(m)}b^\dagger b\sigma_+^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] - 2(1 + \bar{\eta})\Gamma \left[2bb^\dagger\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} + 2\sigma_-^{(m)}\rho_a(t)\sigma_+^{(n)}\sigma_z^{(p)} \right. \\
&- 2\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger b\sigma_+^{(m)} - \sigma_-^{(n)}\rho_a(t)b^\dagger b^\dagger\sigma_-^{(m)} - \left\{ -b^\dagger b\sigma_+^{(m)}\sigma_-^{(n)} \right. \\
&- \left. \left. \sigma_+^{(m)}bb^\dagger\sigma_-^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right]. \tag{2.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_4^{(b)}\rho_a(t) &= \sum_{n,m=1}^N \left\{ \frac{1}{2}\bar{n}_b\Gamma_b \left(\mathcal{L}[b^\dagger\sigma_+^{(n)}, b\sigma_-^{(m)}]\rho_a(t) + \mathcal{L}[b^\dagger\sigma_-^{(n)}, b\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}(1 + \bar{n}_b)\Gamma_b \left(\mathcal{L}[b\sigma_-^{(n)}, b^\dagger\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) - \mathcal{L}[b\sigma_-^{(n)}, b^\dagger\sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \right) \right\}, \tag{2.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_2^{(a)}\rho_a(t) &= \sum_{n,m,p=1}^N \left\{ \bar{n}_a\Gamma_a\mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}]\rho_a(t) + (1 + \bar{n}_a)\Gamma_a\mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}]\rho_a(t) \right. \\
&+ \bar{\eta}\Gamma \left[-2a^\dagger a\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)\sigma_-^{(m)} - 2\sigma_+^{(n)}\rho_a(t)aa^\dagger\sigma_-^{(m)} - \left\{ -aa^\dagger\sigma_-^{(m)}\sigma_+^{(n)} \right. \right. \\
&- \left. \left. \sigma_-^{(m)}a^\dagger a\sigma_+^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right] + (1 + \bar{\eta})\Gamma \left[-2aa^\dagger\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)\sigma_+^{(m)} - 2\sigma_-^{(n)}\rho_a(t)a^\dagger a\sigma_+^{(m)} \right. \\
&- \left. \left\{ -a^\dagger a\sigma_+^{(m)}\sigma_-^{(n)} - \sigma_+^{(m)}aa^\dagger\sigma_-^{(n)}, \rho_a(t) \right\} \right]. \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Em seguida, lembrando que estamos considerando os regimes de cavidade ruim para o modo ω_a e de interação dispersiva do modo ω_b com a amostra, é natural considerar que ambos os modos permaneçam em seus estados de partida. Logo, assumindo que o modo ω_a esteja inicialmente no vácuo e o modo ω_b em um estado coerente, isto é,

$$\rho_a(0) = |0_a\rangle\langle 0_a|, \quad \rho_b(0) = |\beta\rangle\langle\beta|, \tag{2.71}$$

segue-se que

$$H_{ef} = Tr_{a,b} \left\{ H_{ef,a} \right\} = \bar{\Omega} \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)} + \bar{\chi} \sum_{n \neq m} \left(\sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)} \right) + \bar{\chi} \mathbb{1}, \quad (2.72)$$

é o hamiltoniano efetivo do sistema de átomos interagentes no regime de interação dispersiva para o modo ω_b e de cavidade ruim para o modo ω_a onde

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} = & \Delta + \omega_a + \frac{g_b^2}{2|\Delta|} \left(2|\beta|^2 + 1 \right) + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2}{|\Delta|} |\beta|^4 \\ & + \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \Re\{\beta\} \left(|\beta|^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\bar{\chi} = \frac{g_b^2}{|\Delta|} + 2 \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \Re\{\beta\} + 2 \frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \quad (2.74)$$

A equação mestra para a amostra atômica dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_N(t) = & -i \left[H_{ef}, \rho_N(t) \right] + \bar{\gamma} \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_N(t) \\ & + \bar{\kappa} \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_N(t), \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & \bar{\eta} \Gamma \left(1 - |\beta|^2 \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} - \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \right) + \bar{n}_b \Gamma_b \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} + \bar{n}_a \Gamma_a \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} + \bar{n}_b |\beta|^2 \Gamma_b \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \\ & + \bar{n}_b \Gamma_{1ab} \frac{g_a}{\Gamma_a} \frac{g_b}{|\Delta|} + \bar{n}_a \Gamma_{2ab} \frac{g_a}{\Gamma_a} \frac{g_b}{|\Delta|}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} = & (1 + \bar{\eta}) \Gamma \left(1 - \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} - \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \right) + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_b \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} + (1 + \bar{n}_b) |\beta|^2 \Gamma_b \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} \\ & + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_a \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} + (1 + \bar{n}_b) \Gamma_{1ab} \frac{g_a}{\Gamma_a} \frac{g_b}{|\Delta|} + (1 + \bar{n}_a) \Gamma_{2ab} \frac{g_a}{\Gamma_a} \frac{g_b}{|\Delta|}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.3 Aproximação de campo médio

Para chegar às grandezas de interesse do sistema superradiante, utilizamos o formalismo da aproximação de campo médio conforme desenvolvido por Mizrahi²⁴⁻²⁶, formalismo este que tem o mérito de simplificar o tratamento analítico do fenômeno e evidenciar suas principais

características. Veremos abaixo que o mesmo ocorre para o caso em questão da amostra de átomos interagentes. Primeiramente, vamos obter o operador densidade para p átomos ($p < N$), para isto utilizamos um traço parcial em $\rho_N(t)$, para eliminar os graus de liberdade dos $(N - p)$ átomos restantes,

$$\rho_p(t) = Tr_{p+1,\dots,N}\{\rho_N(t)\}, \quad (2.78)$$

assim, obtemos

$$\begin{aligned} Tr_{p+1,\dots,N}\left\{[H_{ef}, \rho_N(t)]\right\}x &= \bar{\Omega} \sum_{n=1}^p [\sigma_z^{(n)}, \rho_p(t)] + \bar{\chi} \sum_{(n \neq m)=1}^p [\sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)}, \rho_p(t)] \\ &+ 2\bar{\chi} \left[\sum_{n=1}^p \sigma_+^{(n)}, Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{m=p+1}^N \sigma_-^{(m)} \rho_N(t) \right\} \right] \\ &+ 2\bar{\chi} \left[\sum_{n=1}^p \sigma_-^{(n)}, Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{m=p+1}^N \sigma_+^{(m)} \rho_N(t) \right\} \right], \end{aligned} \quad (2.79)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_N(t) \right\} &= \bar{\gamma} \sum_{n,m=1}^p \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_p(t) \\ &+ \bar{\gamma} \left[\sum_{n=1}^p \sigma_+^{(n)}, Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{m=p+1}^N \rho_N(t) \sigma_-^{(m)} \right\} \right] \\ &+ \bar{\gamma} \left[Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{m=p+1}^N \sigma_+^{(m)} \rho_N(t) \right\}, \sum_{n=1}^p \sigma_-^{(n)} \right], \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_N(t) \right\} &= \bar{\kappa} \sum_{n,m=1}^p \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_p(t) \\ &+ \bar{\kappa} \left[\sum_{n=1}^p \sigma_-^{(n)}, Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{m=p+1}^N \rho_N(t) \sigma_+^{(m)} \right\} \right] \\ &+ \bar{\kappa} \left[Tr_{p+1,\dots,N} \left\{ \sum_{m=p+1}^N \sigma_-^{(m)} \rho_N(t) \right\}, \sum_{n=1}^p \sigma_+^{(n)} \right], \end{aligned} \quad (2.81)$$

Supondo que todos os átomos são idênticos, podemos reescrever as equações (2.79), (2.80) e (2.81)

$$Tr_{p+1,\dots,N}\left\{[H_{ef}, \rho_N(t)]\right\} = \bar{\Omega} \sum_{n=1}^p [\sigma_z^{(n)}, \rho_p(t)] + \frac{1}{2}\bar{\chi} \sum_{(n \neq m)=1}^p [\sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)}, \rho_p(t)]$$

$$\begin{aligned}
& + (N-p)\bar{\chi} \sum_{n=1}^p \left[\sigma_+^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \sigma_-^{(p+1)} \rho_{p+1}(t) \right\} \right] \\
& + (N-p)\bar{\chi} \sum_{n=1}^p \left[\sigma_-^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \sigma_+^{(p+1)} \rho_{p+1}(t) \right\} \right], \quad (2.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} Tr_{p+1, \dots, N} \left\{ \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_N(t) \right\} &= \bar{\gamma} \sum_{n,m=1}^p \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_p(t) + (N-p)\bar{\gamma} \\
& \sum_{n=1}^p \left(\left[\sigma_+^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \rho_{p+1}(t) \sigma_-^{(p+1)} \right\} \right] + \left[Tr_{p+1} \left\{ \sigma_+^{(p+1)} \rho_{p+1}(t) \right\}, \sigma_-^{(n)} \right] \right), \quad (2.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa} Tr_{p+1, \dots, N} \left\{ \sum_{n,m=1}^N \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_N(t) \right\} &= \bar{\kappa} \sum_{n,m=1}^p \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_p(t) + (N-p)\bar{\kappa} \\
& \sum_{n=1}^p \left(\left[\sigma_-^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \rho_{p+1}(t) \sigma_+^{(p+1)} \right\} \right] + \left[Tr_{p+1} \left\{ \sigma_-^{(p+1)} \rho_{p+1}(t) \right\}, \sigma_+^{(n)} \right] \right), \quad (2.84)
\end{aligned}$$

com a equação mestra para o operador densidade de p átomos ($p < N$) da amostra atômica,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \rho_p(t) &= -i\bar{\Omega} \sum_{n=1}^p \left[\sigma_z^{(n)}, \rho_p(t) \right] - i\frac{1}{2}\bar{\chi} \sum_{(n \neq m)=1}^p \left[\sigma_+^{(m)} \sigma_-^{(n)} + \sigma_-^{(m)} \sigma_+^{(n)}, \rho_p(t) \right] \\
& - i(N-p)\bar{\chi} \sum_{n=1}^p \left[\sigma_+^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \sigma_-^{(p+1)} \rho_{p+1}(t) \right\} \right] \\
& - i(N-p)\bar{\chi} \sum_{n=1}^p \left[\sigma_-^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \sigma_+^{(p+1)} \rho_{p+1}(t) \right\} \right] \\
& + (N-p)(\bar{\gamma} - \bar{\kappa}) \sum_{n=1}^p \left(\left[\sigma_+^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \sigma_-^{(p+1)} \rho_{p+1}(t) \right\} \right] \right. \\
& \left. - \left[\sigma_-^{(n)}, Tr_{p+1} \left\{ \rho_{p+1}(t) \sigma_+^{(p+1)} \right\} \right] \right) \\
& + \sum_{n,m=1}^p \left\{ \bar{\gamma} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_p(t) + \bar{\kappa} \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_p(t) \right\}. \quad (2.85)
\end{aligned}$$

Considerando agora o operador densidade reduzido de um único átomo da amostra, isto é, $p = 1$, obtemos a equação mestra efetiva de um corpo segundo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \rho_1(t) &= -i\bar{\Omega} \left[\sigma_z^{(1)}, \rho_1(t) \right] - i\bar{\chi}(N-1) \left[\sigma_+^{(1)}, Tr_2 \left\{ \sigma_-^{(2)} \rho_2(t) \right\} \right] \\
& - i\bar{\chi}(N-1) \left[\sigma_-^{(1)}, Tr_2 \left\{ \sigma_+^{(2)} \rho_2(t) \right\} \right] + (N-1)(\bar{\gamma} - \bar{\kappa}) \left(\left[\sigma_+^{(1)}, Tr_2 \left\{ \sigma_-^{(2)} \rho_2(t) \right\} \right] \right.
\end{aligned}$$

$$- \left[\sigma_-^{(1)}, Tr_2 \left\{ \rho_2(t) \sigma_+^{(2)} \right\} \right] + \bar{\gamma} \mathcal{L}[\sigma_+^{(1)}] \rho_1(t) + \bar{\kappa} \mathcal{L}[\sigma_-^{(1)}] \rho_1(t), \quad (2.86)$$

Desprezando as correlações entre os átomos, o operador densidade de dois corpos pode ser fatorado com um produto direto de operadores de um corpo

$$\rho_2(t) = \rho_1^{(1)}(t) \otimes \rho_1^{(2)}(t), \quad (2.87)$$

resultado em

$$\begin{aligned} Tr_2 \left\{ \sigma_{\pm}^{(2)} \rho_2(t) \right\} &= Tr_2 \left\{ \sigma_{\pm}^{(2)} \rho_1^{(1)}(t) \rho_1^{(2)}(t) \right\} \\ &= \rho_1^{(1)}(t) Tr_2 \left\{ \sigma_{\pm}^{(2)} \rho_1^{(2)}(t) \right\} \\ &\equiv \rho_1^{(1)}(t) \langle \sigma_{\pm}^{(2)} \rangle = \rho_1(t) \langle \sigma_{\pm} \rangle. \end{aligned} \quad (2.88)$$

reescrevemos a equação (2.86), suprimindo a identificação dos átomos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_1(t) &= -i \bar{\Omega} [\sigma_z, \rho_1(t)] - i(N-1) \bar{\chi} \left[\sigma_+ \langle \sigma_- \rangle + \sigma_- \langle \sigma_+ \rangle, \rho_1(t) \right] + (N-1) \\ &\quad (\bar{\gamma} - \bar{\kappa}) \left[\sigma_+ \langle \sigma_- \rangle - \sigma_- \langle \sigma_+ \rangle, \rho_1(t) \right] + \bar{\gamma} \mathcal{L}[\sigma_+^{(1)}] \rho_1(t) + \bar{\kappa} \mathcal{L}[\sigma_-^{(1)}] \rho_1(t), \end{aligned} \quad (2.89)$$

Substituindo agora os operadores de criação e destruição, $\sigma_+^{(n)}$ e $\sigma_-^{(n)}$, pelos operadores $\sigma_x^{(n)}$, $\sigma_y^{(n)}$ e $\sigma_z^{(n)}$, através das relações

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm i \sigma_y), \quad (2.90)$$

$$\langle \sigma_{\pm} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \sigma_x \rangle \pm i \langle \sigma_y \rangle), \quad (2.91)$$

obtemos a equação mestra de um átomo, em aproximação de campo médio:

$$\frac{d}{dt} \rho_1(t) = -i \left[H_{SR}, \rho_1(t) \right] + \bar{\gamma} \mathcal{L}[\sigma_+^{(n)}, \sigma_-^{(m)}] \rho_1(t) + \bar{\kappa} \mathcal{L}[\sigma_-^{(n)}, \sigma_+^{(m)}] \rho_1(t), \quad (2.92)$$

onde

$$\tilde{H}_{SR} = \bar{\Omega} \sigma_z + \frac{1}{2} (N-1) \left[(2\bar{\chi} \langle \sigma_x \rangle - \bar{\Lambda} \langle \sigma_y \rangle) \sigma_x + (\bar{\Lambda} \langle \sigma_x \rangle + 2\bar{\chi} \langle \sigma_y \rangle) \sigma_y \right], \quad (2.93)$$

o que representa o hamiltoniano de campo médio de um átomo do sistema, não-linear, que descreve a emissão superradiante de um pulso coerente. Os termos restantes de (2.89) são responsáveis pelos efeitos dissipativos, podendo ser desconsiderado para processos que ocorrem em intervalos de tempo muito menores que os tempos de relaxação da superradiância.

Definindo

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} = & \Delta + \omega_a + \frac{g_b^2}{2|\Delta|} (2|\beta|^2 + 1) + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2}{|\Delta|} |\beta|^4 \\ & + \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \Re\{\beta\} \left(|\beta|^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\bar{\chi} = \frac{g_b^2}{|\Delta|} + 2 \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \Re\{\beta\} + 2 \frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} = & \Gamma \left(1 - |\beta|^2 \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} - \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \right) + \Gamma_b \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} + \Gamma_a \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \\ & + |\beta|^2 \Gamma_b \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} + \left(\Gamma_{1ab} + \Gamma_{2ab} \right) \frac{g_a}{\Gamma_a} \frac{g_b}{|\Delta|}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

2.4 O método dos invariantes de Lewis-Riesenfeld

Para resolver a equação de Schrödinger, dependente do tempo relativa, ao hamiltoniano (2.93),

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H_{SR} |\psi(t)\rangle, \quad (2.97)$$

utilizamos o método de diagonalização por invariantes, conforme desenvolvido por Lewis e Riesenfeld³¹. O invariante de um operador $I(t)$ é definido por

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{\partial}{\partial t} I(t) + \frac{1}{i} [I(t), H] = 0. \quad (2.98)$$

Segundo o teorema de Lewis e Riesenfeld, uma solução da equação de Schrödinger constitui-se de um autoestado do invariante hermitiano $I(t)$ multiplicado por um fator de fase dependente do tempo. Quanto a $I(t)$, Lewis e Riesenfeld asseguram que se este admite um conjunto completo de autoestados $|m, t\rangle$, os correspondentes autovalores λ , que constituem funções reais, são independentes do tempo tal que

$$I(t)|m, t\rangle = \lambda_m |m, t\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.99)$$

Obtém-se, então que as soluções da equação (2.97) se descrevem da forma

$$|\Psi_m(t)\rangle = e^{i\Phi_m(t)} |m, t\rangle, \quad (2.100)$$

onde a fase de Lewis e Riesenfeld satisfaz a relação

$$\Phi_m(t) = \int_0^t \langle +, t' | i \frac{\partial}{\partial t'} - H | +, t' \rangle dt'. \quad (2.101)$$

Introduzindo o invariante, $I(t)$,

$$I(t) = \langle \sigma_x \rangle \sigma_x + \langle \sigma_y \rangle \sigma_y + \langle \sigma_z \rangle \sigma_z, \quad (2.102)$$

a partir da relação (2.98) obtemos um conjunto de equações diferenciais acopladas para os valores médios dos operadores atômicos

$$\langle \dot{\sigma}_x \rangle = -\bar{\Omega} \langle \sigma_y \rangle + (N-1) \langle \sigma_z \rangle \left[2\bar{\chi} \langle \sigma_x \rangle + \bar{\Lambda} \langle \sigma_y \rangle \right], \quad (2.103)$$

$$\langle \dot{\sigma}_y \rangle = \bar{\Omega} \langle \sigma_x \rangle - (N-1) \langle \sigma_z \rangle \left[2\bar{\chi} \langle \sigma_x \rangle - \bar{\Lambda} \langle \sigma_y \rangle \right], \quad (2.104)$$

$$\langle \dot{\sigma}_z \rangle = -(N-1) \bar{\chi} \left[\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 \right]. \quad (2.105)$$

Tomando como constante de movimento

$$\langle I(t) \rangle = \langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 = R^2, \quad (2.106)$$

onde R define o raio da esfera de Bloch e introduzindo as variáveis angulares, dependentes do tempo, $(\theta(t))$ e $(\varphi(t))$, tal que

$$\langle \sigma_x \rangle = R \text{sen}(\theta(t)) \cos(\varphi(t)), \quad (2.107)$$

$$\langle \sigma_y \rangle = R \text{sen}(\theta(t)) \text{sen}(\varphi(t)), \quad (2.108)$$

$$\langle \sigma_z \rangle = R \cos(\theta(t)), \quad (2.109)$$

obtemos, assumindo que $R = \frac{1}{2}$ e $N \gg 1$, o sistema de equações angulares

$$\dot{\theta}(t) = \frac{N}{2} \bar{\chi} \text{sen}(\theta(t)), \quad (2.110)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \bar{\Omega} - N \bar{\Lambda} \cos(\theta(t)). \quad (2.111)$$

A solução sistema de equações angulares é dada por

$$\cos(\theta(t)) = -\tanh\left(\frac{t-t_0}{\tau_c}\right), \quad (2.112)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + 2\bar{\Omega}t - 2\frac{\bar{\chi}}{\Lambda} \ln\left\{\frac{\text{sen}(\theta(t))}{\text{sen}(\theta_0)}\right\}, \quad (2.113)$$

e

$$\text{sen}(\theta(t)) = \text{sech}\left(\frac{t-t_0}{\tau_c}\right), \quad (2.114)$$

onde definimos o tempo de retardo, t_0 , e o tempo de emissão característico da amostra atômica segundo

$$t_0 = \tau_c \ln\left\{\cotan\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right\}, \quad \text{e} \quad \tau_c = \frac{2}{\Lambda N}. \quad (2.115)$$

Nos trabalhos de Agarwal²⁸ e Leonardi²⁷ demonstra-se a seguinte relação entre estes tempos característicos:

$$t_0 \sim \tau_c \ln(N), \quad (2.116)$$

do que decorre o ângulo $\theta_0 \sim 2/N$ descreve a posição inicial do vetor de Bloch, cuja evolução descreve uma trajetória na superfície da esfera de Bloch. Em $\theta_0 = 0$, o sistema está no estado metaestável e descreve um ponto de equilíbrio instável onde todos os átomos estão no estado excitado, com momento dipolo nulo. Contudo, as flutuações do campo eletromagnético induzem flutuações nos dipolos atômicos, o que é suficiente para iniciar o processo de emissão espontânea do processo superradiante. Em $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, o pico de radiação emitida é atingido e o processo transiente termina quando $\theta_0 = \pi$, que é uma posição de equilíbrio normal do vetor de Bloch. Olhando agora para a solução da equação de Schrödinger (2.97), os autoestados que diagonalizam o invariante são

$$|+, t\rangle = \left| \theta(t), \varphi(t) \right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right) \\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right) e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

$$|-, t\rangle = \left| \pi - \theta(t), \varphi(t) + \pi \right\rangle = \begin{pmatrix} \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right) \\ -\cos\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right) e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix}, \quad (2.118)$$

com autovalores $+1$ e -1 , respectivamente. Vamos concentrar as atenções no autoestado $|+, t\rangle$ (para o outro autoestado, os passos a seguir são similares) para o qual a energia média

de um átomo, é dada por

$$\begin{aligned}
 \epsilon(t) &= \langle \Psi(t) | H_{SR} | \Psi(t) \rangle \\
 &= \bar{\Omega} \cos(\theta(t)) + \frac{N}{2} \bar{\chi} \sin^2(\theta(t)) \\
 &= -\frac{1}{2} \bar{\Omega} \tanh\left(\frac{t-t_0}{\tau_c}\right) + \frac{N}{2} \bar{\chi} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t-t_0}{\tau_c}\right), \tag{2.119}
 \end{aligned}$$

e, por fim, a intensidade da radiação emitida $\mathcal{I}(t)$ pelo sistema de átomos interagentes é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}(t) &= -N \frac{d}{dt} \epsilon(t) \\
 &= \frac{N^2}{2} \bar{\Lambda} \bar{\Omega} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t-t_0}{\tau_c}\right) \left[1 + 2N \frac{\bar{\chi}}{\bar{\Omega}} \tanh\left(\frac{t-t_0}{\tau_c}\right) \right]. \tag{2.120}
 \end{aligned}$$

Na próxima seção, vamos analisar detalhadamente o resultado obtido.

Resultados

A intensidade do pulso superradiante para o sistema de átomos interagentes, obtido na seção anterior, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t) &= -N \frac{d}{dt} \epsilon(t) \\ &= \frac{N^2}{2} \overline{\Lambda \Omega} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t - t_0}{\tau_c} \right) \left[1 + 2N \frac{\overline{\chi}}{\overline{\Omega}} \tanh \left(\frac{t - t_0}{\tau_c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os parâmetros

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \Delta + \omega_a + \frac{g_b^2}{2|\Delta|} (2|\beta|^2 + 1) + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2}{|\Delta|} |\beta|^4 \\ &\quad + \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \Re\{\beta\} \left(|\beta|^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\overline{\chi} = \frac{g_b^2}{|\Delta|} + 2 \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \Re\{\beta\} + 2 \frac{g_a^2}{\Gamma_a} \left(1 + \frac{\omega_a - \Delta}{\Gamma_a} \right), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda} &= \Gamma \left(1 - |\beta|^2 \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} - \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \right) + \Gamma_b \frac{g_b^2}{|\Delta|^2} + \Gamma_a \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} \\ &\quad + |\beta|^2 \Gamma_b \frac{\kappa^2}{|\Delta|^2} + \left(\Gamma_{1ab} + \Gamma_{2ab} \right) \frac{g_a}{\Gamma_a} \frac{g_b}{|\Delta|}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

decorrem das grandezas atômicas, dos modos quânticos e clássico da cavidade e do acoplamento entre os mesmos.

O resultado acima, (3.1) tem a mesma estrutura do resultado obtido por Mizrahi^{23,24,26}, veja a figura 3.1 (onde $\omega_0 = 1.0$, $\Gamma = 0.0000001$, $N = 10$ e todos os outros parâmetros

nulos.),

$$\mathcal{I}(t) = \frac{N^2}{4} \omega_0 \Gamma \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t - t_0}{\tau_c} \right) \left[1 + 2N \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \tanh \left(\frac{t - t_0}{\tau_c} \right) \right], \quad (3.5)$$

no qual

$$\Delta\omega = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega_0} + 1 \right) \left| \frac{\omega_c}{\omega_0} - 1 \right| \right] \quad (3.6)$$

é um deslocamento de frequência dinâmico²⁸, representado pelo pequeno e típico deslocamento de frequência atômica induzido pela interação pela interação da amostra com o reservatório, desconsiderando no presente estudo. Da comparação das intensidades obtidas verifica-se que

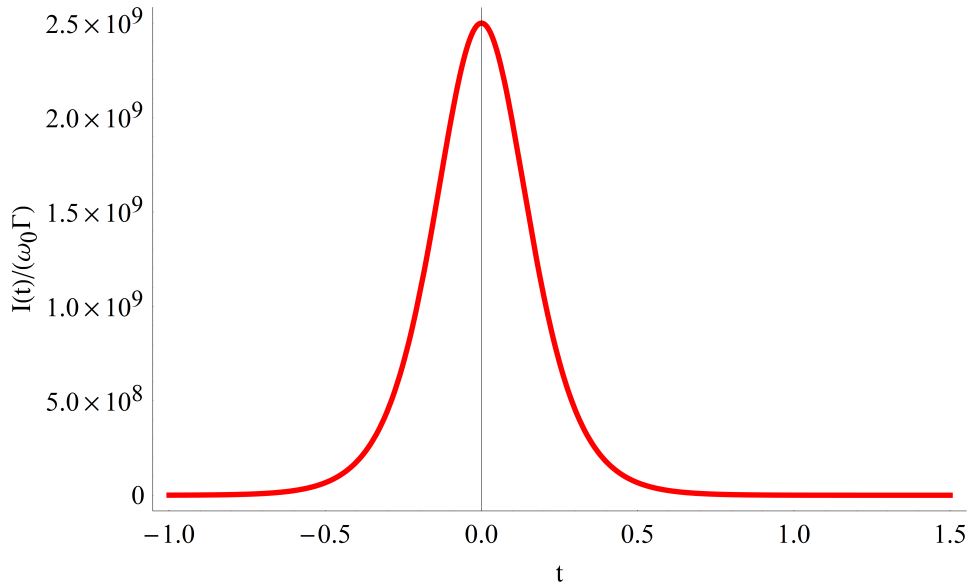


Figura 3.1–Intensidade (3.5) em função do tempo, em unidades de Γ .

a interação entre os átomos da amostra mediada tanto pelo modo ω_b como pelo processo de amplificação dos átomos pode ser utilizada para a manipulação do pulso superradiante. De fato, os parâmetros da interação atômica definem tanto a amplitude como a largura do pulso irradiado. O perfil do pulso, definido pela função sech^2 é multiplicado pelo produto $\bar{\Omega}\bar{\Lambda}$, no qual $\bar{\Omega} \simeq \omega_0$ e

$$\bar{\Lambda} \simeq \Gamma + \frac{g_a^2}{\Gamma_a} + |\beta|^2 \Gamma_b \frac{\kappa^2}{|\Delta|}, \quad (3.7)$$

além do termo

$$1 + 2N \frac{\bar{\chi}}{\bar{\Omega}} \tanh \left(\frac{t - t_0}{\tau_c} \right), \quad (3.8)$$

proporcional à razão $\bar{\chi}/\bar{\Omega}$, em que

$$\bar{\chi} \simeq \omega_b \frac{g_a^2}{\Gamma_a^2} + 2 \frac{g_b \kappa}{|\Delta|} \Re\{\beta\}. \quad (3.9)$$

Portanto, os termos $\bar{\Lambda}$ e $\bar{\chi}$ acarretam ganhos significativos na intensidade do pulso irradiado obtido por Mizrahi.

Podemos facilmente ajustar os parâmetros do sistema - tanto aqueles decorrentes do acoplamento dispersivo da amostra com o modo ω_a no regime de cavidade ruim (g_a, Γ_a), como aqueles associados ao acoplamento dispersivo da amostra com o modo ω_b ($g_b, \Delta, \kappa, \Gamma_b$) - de forma a obter $\bar{\Lambda} \gg \Gamma$ e $\bar{\chi}/\bar{\Omega} \gg \Delta\omega/\omega_0$.

De fato, para os parâmetros típicos associados aos regimes de interação considerados, temos

$$g_a, g_b \sim 10^5 \text{ Hz}, \quad \Gamma_a, g_b \Gamma_b \sim 10^7 \text{ Hz}, \quad \Delta \sim 10^6 \text{ Hz}. \quad (3.10)$$

$$10^{10} \text{ Hz}, \quad \omega_a, \omega_b, \omega_0 \sim 10^{10} \text{ Hz}, \quad |\beta| \sim 10. \quad (3.11)$$

Já o parâmetro referente a intensidade do bombeio, κ , contribuirá à intensidade do pulso superradiante se $\kappa \sim 10^7$ Hz, caso contrário, apenas o modo ω_a , sob o regime de cavidade ruim, contribuirá para a emissão superradiante da amostra atômica.

Logo, para $\Gamma \sim 10^2$ Hz, temos $\bar{\Lambda} \simeq 10\Gamma$ e

$$\frac{\bar{\chi}}{\bar{\Omega}} \approx 10^{-3} \gg \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 10^{-16}. \quad (3.12)$$

Vale ressaltar que enquanto ambas as interações, ressonante e dispersiva, desempenham igual parte para a obtenção do parâmetro $\bar{\Lambda} \approx 10\Gamma$, o acoplamento dispersivo é mais significativo que o ressonante para a obtenção da razão $\bar{\chi}/\bar{\Omega} \approx 10^{-3}$, ou seja, o acoplamento dipolar entre os átomos torna-se importante para a manipulação do pulso superradiante. Devemos observar também que este mesmo acoplamento não é menos importante que aquele ressonante, para a manipulação do parâmetro $\bar{\Lambda}$ e, portanto, para a manipulação da largura do pulso superradiante.

Nota-se, também, que o tempo de emissão característica $\tau_c \propto \bar{\Lambda}^{-1}$ assim como o tempo de retardo t_0 são afetados, fazendo com que tanto o início quanto a duração do processo superradiante para a amostra de átomos interagentes sejam afetados. Observando a figura 3.2 (onde $\omega_0 = \omega_a = 1.0$, $\omega_b = 0.999998$, $g_a = g_b = 10^{-5}\omega_0$, $\Gamma_a = \kappa = 10^{-3}\omega_0$, $\Gamma = \Gamma_{1ab} = \Gamma_{2ab} = \Gamma_b = 10^{-7}\omega_0$, $N = 10$ e $\beta = 10^{-9}\omega_0$), vemos que o pico superradiante se torna

três vezes maior e a duração do processo se torna dez vezes menor. Com isso, vemos que há possibilidade, dependendo dos parâmetros escolhidos para os modos da cavidade, amostra atômica e bombeio clássico, de manipular o processo superradiante.

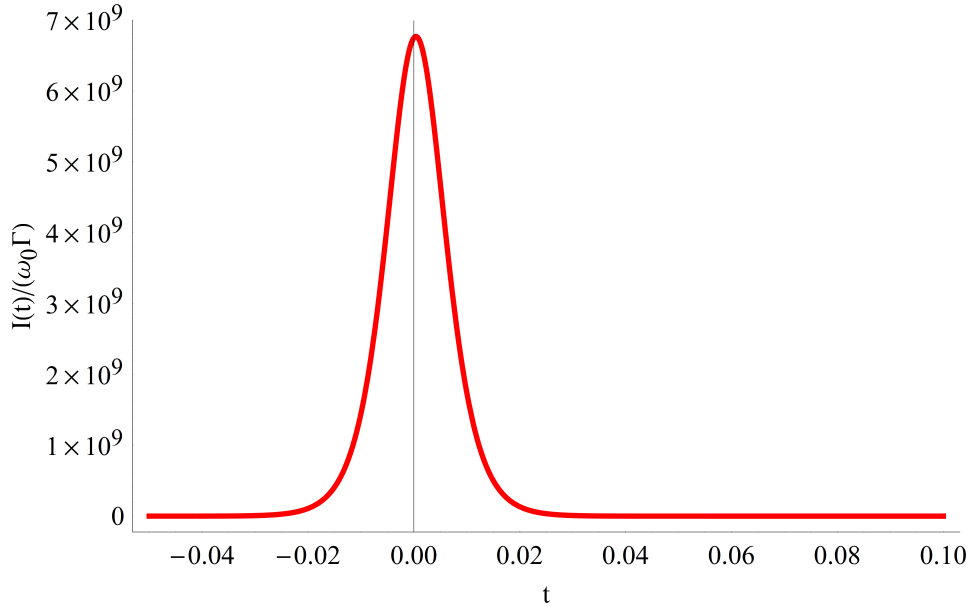


Figura 3.2—Intensidade (3.5) versus tempo, em unidades de Γ , para o sistema em estudo.

Por fim, vale salientar que a intensidade do acoplamento dipolo-dipolo entre os átomos da amostra, proporcional a $g_b \kappa / |\Delta|$, deveu-se à concorrência entre ambos os campos, o modo quântico e o campo clássico ambos de frequência ω_b . Tivéssemos apenas o modo quântico ω_b , teríamos o acoplamento efetivo $g_b^2 / |\Delta|$ ao invés de $g_b \kappa / |\Delta| \simeq 10^3 g_b^2 / |\Delta|$.

Conclusões

Em uma análise puramente analítica, a expressão obtida para a intensidade do pulso de radiação, dada pela equação (3.1), emitida pelo sistema de átomos interagentes acoplados a um modo ressonante, ω_a , outro dispersivo, ω_b , e um campo clássico de uma cavidade com as frequências de transição atômica, podemos ver uma clara alteração tanto no pico de intensidade quanto na duração do pulso superradiante na lei temporal do sech^2 que rege o problema da superradiância.

Verificamos nosso resultado também tentando reproduzir resultados anteriores, como por exemplo, um sistema de N átomos idênticos interagindo apenas com seu reservatório, cuja intensidade é dada por (3.5). Neste limite, verificamos que, a menos dos deslocamentos, do tipo Stark e Lamb, das frequências de transição atômica que foram desprezadas em nossos cálculos, o resultado obtido por este trabalho concorda com resultados anteriores. Vemos também que é possível derivar, via as correções perturbativas, o termo adicional obtido proporcional a $N^3 \tanh(\Gamma t) \text{sech}^2(\Gamma t)$, que era oriundo exclusivamente destes deslocamentos.

Tais modificações feitas na intensidade do pulso superradiante puderam ser comprovadas novamente ao analisarmos, no capítulo anterior, os gráficos obtidos por simulações feitas computacionalmente com o estudo detalhado de todos os parâmetros pertinentes ao sistema, tanto da cavidade quanto da amostra atômica. Isso se deve principalmente ao acoplamento entre os átomos e a interação destes com os modos da cavidade nos regimes de interação dispersiva e de cavidade ruim, os quais foram adotados para nosso problema.

Com esse resultado, fica evidente também que o processo superradiante pode ser manipulado, dependendo apenas dos parâmetros da cavidade ($\omega_a, g_a, \Gamma_a, \omega_b, g_b, \kappa, \Gamma_b$) e dos átomos e do acoplamento entre eles, de forma que o pico de intensidade possa ser amplificado ou atenuado e a duração podendo ser prolongada ou diminuída.

Perspectivas futuras

Para continuar este trabalho, pretendemos explorar outros aspectos da superradiância em amostras de átomos interagentes, como por exemplo, realizar um estudo detalhado das características da radiação emitida neste contexto e naquele, convencional, em que os átomos da amostra não interagem entre si. Mais especificamente, pretendemos considerar a superradiância enquanto recurso para a preparação de estados não-clássicos do campo eletromagnético. Devemos para isso estudar as estatísticas de contagem de fótons em experimentos de interferometria, de forma a caracterizar a natureza da luz irradiada³⁴.

Além da caracterização do campo irradiado, pretendemos também analisar detalhadamente a correlação desenvolvida entre os átomos da amostra durante o processo de superradiância. Podemos para isso calcular o hamiltoniano de duas partículas e através deste analisar as possíveis correlações dentro do contexto mais geral recentemente introduzido pela teoria da informação quântica. A saber, podemos, por exemplo, calculando a *concurrency*³⁵, analisar o grau de emaranhamento entre estes átomos, e através da *discórdia*³⁵ verificar a ocorrência de correlações de natureza quântica na ausência de emaranhamento entre as partículas.

5.1 Ressonância Estocástica na Superradiância

É também parte dos nossos propósitos a derivação de uma equação mestra mais geral que aquelas obtidas²⁶ (quando desconsiderando a interação dipolo-dipolo induzida entre os átomos da amostra). Pretendemos partir da equação estocástica de Itô³⁶, ao invés da equação de Schrödinger²⁶, para a dedução de uma equação mestra que contenha dois operadores de Liouville. Um desses operadores responsável, naturalmente, pelo fenômeno da superradiância, e o outro por flutuações térmicas do vácuo. Desejamos analisar o efeito dessas flutuações sobre o pulso superradiante.

É sabido que a presença de ruídos em sistemas dinâmicos não-lineares pode levar ao

fenômeno da ressonância estocástica, na qual a resposta do sistema a um agente externo é amplificada pela ação do ruído. Submetendo a amostra atômica a um processo de amplificação linear, desejamos portanto analisar a possibilidade de amplificação deste sinal através da injeção de ruídos decorrentes das flutuações térmicas do sistema. Sabemos²⁶ como se comporta a amostra atômica quando submetida a um processo de amplificação capaz de re-excitar a amostra tão logo um pulso superradiante seja emitido: temos uma sucessão de pulsos, todos com as mesmas características (intensidade e variância), irradiados durante todo o período de duração do bombeio externo. Portanto, a caracterização do fenômeno da ressonância estocástica seria facilmente observado através de um gradual aumento na intensidade dos pulsos catalisado pela ação das flutuações térmicas injetadas sobre a amostra atômica.

5.2 Detecção da Radiação Casimir via Superradiância

Conforme descrito acima, devemos investigar a possibilidade de utilização da superradiância enquanto processo de preparação de estados não-clássicos da luz. Outra sugestão de utilização da superradiância foi aventada como possibilidade de detecção da viscosidade do vácuo³⁷, ou seja, da fraca conversão da energia mecânica de um dos espelhos de uma cavidade em energia eletromagnética. Este fenômeno, viabilizado pela flutuação do vácuo quântico e conhecido como efeito Casimir dinâmico, tem motivado interessantes propostas para a sua detecção que desafiam, no entanto, o excepcional avanço tecnológico que presenciamos nas últimas décadas no campo da interação radiação-matéria. Na proposta inicialmente desenhada^{37,38}, considera-se que uma amostra de átomos de dois níveis seja enviada através de uma cavidade. Estes átomos são previamente excitados de forma que sua transição para o estado fundamental seja viabilizada por dipolo magnético. Na cavidade, a fraca radiação Casimir gerada através do movimento de um de seus espelhos e mantida pelo seu alto fator de qualidade, seria então responsável por acionar o pulso superradiante num intervalo de tempo significativamente mais curto que aquele da transição atômica.

Notamos que a proposta^{37,38} difere fundamentalmente da abordagem feita por outros autores²⁹, na qual, uma cavidade de baixo fator de qualidade desempenha o papel de meio ambiente necessário ao desdobramento da superradiância. Diferentemente, o alto fator de qualidade da cavidade, deixa à radiação Casimir o papel de gatilho do pulso superradiante.

Pretendemos desenvolver um estudo teórico que leve em conta todos os ingredientes contemplados pela proposta; ou seja, desde a geração dos fótons através do movimento de um dos espelhos da cavidade de alto fator de qualidade, a eventual interação destes fótons

com os átomos da amostra inicialmente excitada e, por fim, a possível efetivação do pulso superradiante. Para isso devemos novamente empregar a aproximação de campo médio que tem se mostrado eficaz nos estudos até aqui realizados.

5.3 Extensão dos Tratamento via Campo Médio: Para Além das Aproximações Utilizadas

É também objetivo da continuação deste projeto desenvolver um tratamento mais abrangente da superradiância, na tentativa de superar as aproximações convencionalmente utilizadas, tais como a aproximação de Born-Markov, a aproximação das ondas girantes, a asserção de amostras de pequenos tamanhos (comparados ao comprimento de onda da radiação emitida), e, por fim, no âmbito da aproximação decampo médio, a desconsideração de correlações estatísticas entre os átomos da amostra²⁶. Esta desconsideração assegura que o operador densidade reduzido de dois corpos (ρ_2) pode ser fatorado como o produto direto de dois operadores de um corpo (ρ_1), tal que $\rho_2 = \rho_1 \otimes \rho_1$.

Pretendemos analisar as possibilidades de se desenvolver um estudo mais aprofundado do fenômeno, procurando, por exemplo, superar a aproximação de ondas girantes, segundo tratamentos teóricos que vem sendo desenvolvidos em nosso grupo, nos quais consideramos a possibilidade de acoplamento forte entre sistema e reservatório (considerados enquanto osciladores harmônicos acoplados através de suas posições). Neste caso, a aproximação das ondas girantes não se aplica, e devemos recorrer a outras técnicas para o tratamento analítico do problema. Mais importante que a aproximação de ondas girantes, é possível superar a aproximação da ausência de correlações estatísticas entre as partículas da amostra e analisar os efeitos destas correlações sobre as características do pulso irradiado.

REFERÊNCIAS

- 1 PLANCK, M. Elementary quanta of matter and electricity. *Annalen der Physik*, v. 4, n. 3, p. 564–566, 1901.
- 2 EINSTEIN, A. Generation and conversion of light with regard to a heuristic point of view. *Annalen der Physik*, v. 17, n. 6, p. 132–148, 1905.
- 3 BOHR, N. On the constitution of atoms and molecules. *Philosophical Magazine*, v. 26, n. 151, p. 1–25, 1913.
- 4 EINSTEIN, A. On the quantum theory of radiation. *Physikalische Zeitschrift*, v. 18, p. 121–128, 1917.
- 5 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 114, n. 767, p. 243–265, 1927.
- 6 WEISSKOPF, V.; WIGNER, E. Calculation of the natural width of line based on the diracsch's theory of light. *Zeitschrift fur Physik*, v. 63, n. 1-2, p. 54–73, 1930.
- 7 DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical Review*, v. 93, n. 1, p. 99–110, 1954.
- 8 SKRIBANOWITZ, N.; HERMAN, I. P.; MACGILLI, J. C.; FELD, M. S. Observation of dicke superradiance in optically pumped hf gas. *Physical Review Letters*, New York, v. 30, n. 8, p. 309–312, 1973.
- 9 EBERLY, J. H.; REHLER, N. E. Dynamics of superradiant emission. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 29, n. 3, p. 142–143, 1969.
- 10 EBERLY, J. H.; REHLER, N. E. Superradiant intensity fluctuations. *Physical Review A*, New York, v. 2, n. 4, p. 1607–1610, 1970.
- 11 REHLER, N. E.; EBERLY, J. H. Superradiance. *Physical Review A*, New York, v. 3, n. 5, p. 1735–1751, 1971.

- 12 FRIEDBERG, R.; HARTMANN, S. R.; MANASSAH, J. T. Limited superradiant damping of small samples. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 40, n. 5, p. 365–366, 1972.
- 13 FRIEDBERG, R.; HARTMANN, S. R.; MANASSAH, J. T. Frequency shifts in emission and absorption by resonant systems of two-level atoms. *Physics Reports*, v. 7, n. 3, p. 101 – 179, 1973.
- 14 FRIEDBERG, R.; HARTMANN, S. R. Superradiant stability in specially shaped small samples. *Optics Communications*, Amsterdam, v. 10, n. 4, p. 298–301, 1974.
- 15 FRIEDBERG, R.; HARTMANN, S. R. Temporal evolution of superradiance in a small sphere. *Physical Review A*, New York, v. 10, n. 5, p. 1728–1739, 1974.
- 16 FRIEDBERG, R.; HARTMANN, S. R. Superradiant lifetime - definitions and relation to absorption length. *Physical Review A*, New York, v. 13, n. 1, p. 495–496, 1976.
- 17 FRIEDBERG, R.; COFFEY, B. Single-mode superfluorescence theory compared with experiment. *Physical Review A*, New York, v. 13, n. 4, p. 1645–1647, 1976.
- 18 GROSS, M.; HAROCHE, S. Superradiance - an essay on the theory of collective spontaneous emission. *Physics Reports*, v. 93, n. 5, p. 301–396, 1982.
- 19 EBERLY, J. H. Beats and inhomogeneous broadening in superradiant fluorescence. *Lettere al Nuovo Cimento*, v. 1, n. 5, p. 182–184, 1971.
- 20 AGARWAL, G. S. Master-equation approach to spontaneous emission 3: many-body aspects of emission from 2-level atoms and effect of inhomogeneous broadening. *Physical Review A*, New York, v. 4, n. 5, p. 1791–1801, 1971.
- 21 BONIFACIO, R.; LUGIATO, L. A. Cooperative radiation processes in 2-level systems: superfluorescence. *Physical Review A*, New York, v. 11, n. 5, p. 1507–1521, 1975.
- 22 HAAKE, F.; HAUS, J.; KING, H.; SCHRÖDER, G.; GLAUBER, R. Delay-time statistics and inhomogeneous line broadening in superfluorescence. *Physical Review Letters*, New York, v. 45, p. 558–561, 1980.
- 23 MIZRAHI, S. S. The geometrical phase - an approach through the use of invariants. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 138, n. 9, p. 465–468, 1989.
- 24 MIZRAHI, S. S. May the atomic superradiant emission be described by a single-particle mean-field hamiltonian. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 144, n. 6-7, p. 282–286, 1990.
- 25 GONCALVES, A. E.; MIZRAHI, S. S.; PIMENTEL, B. M. Deviation from the sech² superradiant emission law in a 2-level atomic system. *Physical Review A*, Woodbury, v. 42, n. 5, p. 3129–3131, 1990.

- 26 MIZRAHI, S. S.; MEWES, M. A. Pulsed superradiant emission from a magnetic dipole system. *International Journal of Modern Physics B*, v. 7, n. 12, p. 2353–2365, 1993.
- 27 LEONARDI, C.; PERSICO, F.; VETRI, G. Dicke model and the theory of driven and spontaneous emission. *La Rivista del Nuovo Cimento*, v. 9, n. 4, p. 1–85, 1986.
- 28 AGARWAL, G. S. *Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches*. Berlin: Springer-Verlag, 1974 (Springer tracts in modern physics, v., 70).
- 29 TEMNOV, V. V.; WOGGON, U. Superradiance and subradiance in an inhomogeneously broadened ensemble of two-level systems coupled to a low-q cavity. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 95, n. 24, p. 1–4, 2005.
- 30 KLIMOV, A. B.; SANCHEZ-SOTO, L. L. Method of small rotations and effective hamiltonians in nonlinear quantum optics. *Physical Review A*, Woodbury, v. 61, n. 6, p. 063802, 2000.
- 31 LEWIS, H. R.; RIESENFELD, W. B. An exact quantum theory of time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of Mathematical Physics*, New York, v. 10, n. 8, p. 1458–1473, 1969.
- 32 JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.
- 33 HOLLAND, M. J.; WALLS, D. F.; ZOLLER, P. Quantum nondemolition measurements of photon number by atomic beam deflection. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 67, p. 1716–1719, 1991.
- 34 KNIGHT, P. L.; ALLEN, L. *Concepts of quantum optics*. Oxford: Pergamon Press, 1983.
- 35 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 80, n. 10, p. 2245–2248, 1998.
- 36 GHIRARDI, G. C.; PEARLE, P.; RIMINI, A. Markov-processes in hilbert-space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles. *Physical Review A*, Woodbury, v. 42, n. 1, p. 78–89, 1990.
- 37 ONOFRIO, R. On casimir forces in a parallel plane geometry. In: WORKSHOP ON QUANTUM FIELD THEORY UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL CONDITIONS, 6., 2003, Norman, Oklahoma. *Proceedings...* Princeton: Rinton Press, 2004. p. 17–22.

38 KIM, W. J.; BROWNELL, J. H.; ONOFRIO, R. Detectability of dissipative motion in quantum vacuum via superradiance. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 96, n. 20, p. 200402, 2006.

39 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

40 LOUISELL, W. H. *Quantum statistical properties of radiation*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 1990.

41 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. Boston: Addison-Wesley, 2010.

Interação radiação-matéria

A.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Consideramos aqui a interação de uma partícula carregada com carga q e massa m colocada em um campo de radiação, caracterizado pelos campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Partindo então da descrição do campo eletromagnético e utilizando a força de Lorentz deduzimos o Hamiltoniano de interação átomo-campo.

Os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ satisfazem as equações de Maxwell (quando não há fontes presentes)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (\text{A.4})$$

sendo $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ (c é a velocidade da luz no vácuo, ϵ_0 e μ_0 são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética, respectivamente).

A equação (A.1) pode ser satisfeita se escrevermos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.5})$$

e (A.4) será satisfeita se tivermos

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla U, \quad (\text{A.6})$$

sendo \mathbf{A} e U os potenciais vetor e escalar, respectivamente. Eles constituem o que é chamado de gauge, que descreve o campo eletromagnético.

Um dado campo eletromagnético pode ser descrito por um número infinito de gauges, os quais são equivalentes uma vez que as equações de Maxwell são invariantes quanto ao gauge adotado. Se conhecermos um gauge $\{\mathbf{A}, U\}$ que produza os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, todos os gauges equivalentes $\{\mathbf{A}', U'\}$ poderão ser encontrados a partir das fórmulas de transformação de gauge:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.7})$$

$$U'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.8})$$

sendo $\chi(\mathbf{r}, t)$ uma função escalar. Visto que as equações de Maxwell são invariantes quanto ao gauge adotado, é fácil demonstrar que, quando não há fontes presentes e trabalhando no gauge de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$U = 0, \quad (\text{A.10})$$

as equações (A.5) e (A.6) juntamente com (A.2), conduzem à seguinte equação de onda para o potencial vetor

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}, \quad (\text{A.11})$$

onde usamos a relação $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

A fim de discretizar os modos de propagação do campo, vamos inseri-lo em uma cavidade cúbica de aresta L , tomando as condições de contorno periódicas (ao final dos cálculos basta fazer $L \rightarrow \infty$ para se obter o campo livre). Esta expansão em série de Fourier será realizada em termos de um conjunto discreto de funções (modos normais) ortogonais $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$, isto é,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} c_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}), \quad (\text{A.12})$$

onde os c_k são coeficientes que, quando da quantização do campo, tornar-se-ão operadores que satisfazem regras de comutação específicas.

Substituindo (A.12) em (A.11) obtemos que cada modo \mathbf{k} satisfaz as equações

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \pm \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{u}_k(\mathbf{r}), \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} c_k(t) = \pm \omega_k^2 c_k(t), \quad (\text{A.14})$$

com ω_k representando a frequência de cada modo do campo eletromagnético. Das condições

de contorno temos que o campo eletromagnético deve ser limitado. Como as soluções de (A.13) e (A.14) com sinal positivo divergem, ficaremos apenas com as de sinal negativo, cujas soluções podem ser dadas por, respectivamente,

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = L^{-\frac{3}{2}} \hat{\epsilon}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{A.15})$$

$$c_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + b_k e^{i\omega_k t}. \quad (\text{A.16})$$

Em (A.15), $\hat{\epsilon}_k$ é o vetor polarização, e pode-se verificar que $\mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{-k}(\mathbf{r})$. Substituindo (A.16) na equação (A.12), obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} \left[a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + b_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \right], \quad (\text{A.17})$$

Como $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ deve ser real e, assim, $a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) = b_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r})$, podemos reescrevê-la como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} \left[a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \right]. \quad (\text{A.18})$$

Logo, de (A.5) e (A.6) temos que

$$\mathbf{B} = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} \left[a_k \nabla \times \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \nabla \times \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \right], \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{E} = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} i\omega_k \left[a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \right]. \quad (\text{A.20})$$

A energia do campo eletromagnético é dada por:

$$H_{campo} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2 \right) d^3 r. \quad (\text{A.21})$$

Com a ajuda de (A.18), podemos mostrar que $a_{-k} = a_k^\dagger$ e considerando-os operadores cuja relação de comutação são

$$\left[a_k, a_k \right] = \left[a_k^\dagger, a_k^\dagger \right] = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\left[a_k, a_k^\dagger \right] = a_k a_k^\dagger - a_k^\dagger a_k = 1, \quad (\text{A.23})$$

assim, podemos, utilizando (A.19) e (A.20), reescrever o Hamiltoniano do campo eletromagnético como

$$H_{campo} = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.24})$$

Os operadores a e a^\dagger denotam os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, do modo do campo com vetor de onda k .

A.2 Aproximação de Dipolo Elétrico e a Interação $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$

Um elétron de carga e e massa m interagindo com um campo eletromagnético externo é descrito pelo hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + eU(\mathbf{r}, t) + V(r), \quad (\text{A.25})$$

onde \mathbf{p} é o operador momentum canônico ($\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$), $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $U(\mathbf{r}, t)$ são os potenciais vetor e escalar do campo externo, respectivamente, e $V(r)$ é o potencial eletrostático.

Vamos examinar o caso de um elétron ligado por um potencial $V(r)$ à um núcleo localizado em \mathbf{r}_0 . O átomo se encontra totalmente imerso em uma onda eletromagnética plana descrita pelo potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$ que é uma função do tipo $q(t)\mathbf{u}(\mathbf{r}')$, com $\mathbf{u}(\mathbf{r}') = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}$. Neste caso, como estamos analisando a interação de um elétron a uma distância \mathbf{r} do centro atômico (cuja posição é \mathbf{r}_0) de modo que $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$, podemos fazer uso da aproximação de dipolo, que consiste em tomar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$, o que nos permite escrever o potencial vetor como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t) &\propto q(t)\mathbf{u}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = q(t)e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})} \\ &= q(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} [1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots] \simeq q(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Esta aproximação é justificada no regime óptico, uma vez que neste regime o comprimento de onda do fóton é muito maior que a dimensão do átomo, ou seja,

$$\bar{\lambda}_{\text{fóton}} = 2\frac{\pi}{|\mathbf{k}|} \gg r_{\text{atômico}} \quad (\text{A.27})$$

($\bar{\lambda}_{\text{fóton}} \sim 10^3 \text{Å}$ e $r_{\text{atômico}} \sim 1 \text{Å}$). Em regimes de microondas, essa aproximação é ainda mais satisfatória, já que neste caso o comprimento de onda da radiação é da ordem de centímetros.

A equação de Schrödinger será modificada em

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right]^2 + V(r) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.28})$$

sendo $\psi(\mathbf{r}, t)$ uma auto-função do Hamiltoniano H .

Para simplificar (A.28) definimos uma nova função de onda $\phi(\mathbf{r}, t)$, tal que

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}\right] \phi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.29})$$

Ao substituírmos (A.29) em (A.28), obteremos

$$i\hbar\left[\frac{ie}{\hbar}\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}\phi(\mathbf{r}, t) + \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)\right] \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\right) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}\right) \left[\frac{p^2}{2m} + V(r)\right] \phi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.30})$$

Cancelando as exponenciais e usando (A.6) esta equação toma a simples forma

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\phi}(\mathbf{r}, t) &= \left[\frac{p^2}{2m} + V(r) - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)\right] \phi(\mathbf{r}, t) \\ &= [H_0 + H_{int}] \phi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad (\text{A.32})$$

e

$$H_{int} = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad (\text{A.33})$$

A.3 Hamiltoniano da Interação átomo-Campo

Podemos descrever a interação de um campo de radiação \mathbf{E} com um átomo de um elétron pelo Hamiltoniano em aproximação de dipolo

$$H = H_{el} + H_{campo} - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad (\text{A.34})$$

com a energia do campo livre H_{campo} dada por (A.24) em termos dos operadores de criação e destruição. Podemos expressar H_{el} em termos dos operadores atômicos

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (\text{A.35})$$

onde $|i\rangle$ representa um conjunto completo de auto-estados da energia, ou seja, $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$.

Portanto podemos escrever H_{el} como

$$H_{el} = \sum_{i,j} |i\rangle\langle i| H_{el} |j\rangle\langle j| = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i E_i \sigma_{ii}. \quad (\text{A.36})$$

Podemos também expressar \mathbf{er} em termos dos operadores de transição do átomo

$$\mathbf{er} = \sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|\mathbf{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \mu_{ij}\sigma_{ij}, \quad (\text{A.37})$$

onde $\mu_{ij} = e\langle i|\mathbf{r}|j\rangle$ é o elemento da matriz transição de dipolo elétrico. De(A.15) e (A.20) temos que para um átomo na origem

$$\mathbf{E} = \sum_k \hat{\epsilon}_k \epsilon_k (a_k + a_k^\dagger), \quad (\text{A.38})$$

onde

$$\epsilon_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \epsilon_0 L^3. \quad (\text{A.39})$$

Agora, substituindo (A.24), (A.36) e (A.37) em (A.34), obtemos, omitindo a energia do ponto zero,

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_i E_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_k g_k^{ij} \sigma_{ij} (a_k + a_k^\dagger), \quad (\text{A.40})$$

onde

$$g_k^{ij} = -\frac{\mu_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_k \epsilon_k}{\hbar}, \quad (\text{A.41})$$

é chamado fator de acoplamento. Vamos tratar o caso de um átomo de dois níveis $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ (estados fundamental e excitado, respectivamente). Para $\mu_{ge} = \mu_{eg}$, podemos escrever o fator de acoplamento como

$$g_k = g_k^{ge} = g_k^{eg}. \quad (\text{A.42})$$

Com isso, reescrevemos o hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H = & \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \left(E_g \sigma_{gg} + E_e \sigma_{ee} \right) \\ & + \hbar \sum_k g_k \left(\sigma_{ge} + \sigma_{eg} \right) \left(a_k + a_k^\dagger \right). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Agora, vamos modificar o segundo termo do lado direito de (A.43). Faremos isso somando à expressão o termo

$$E_g \frac{\sigma_{ee}}{2} - E_g \frac{\sigma_{ee}}{2} + E_e \frac{\sigma_{gg}}{2} - E_e \frac{\sigma_{gg}}{2}, \quad (\text{A.44})$$

resultando em

$$\begin{aligned}
E_g \sigma_{gg} + E_e \sigma_{ee} &= \frac{1}{2} (E_e - E_g) \sigma_{ee} - \frac{1}{2} (E_e - E_g) \sigma_{gg} \\
&+ \frac{1}{2} E_g (\sigma_{gg} + \sigma_{ee}) + \frac{1}{2} E_e (\sigma_{gg} + \sigma_{ee}) \\
&= \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \frac{1}{2} (E_e + E_g), \tag{A.45}
\end{aligned}$$

onde usamos $(E_e - E_g) = \hbar \omega_0$ e o fato de $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ ser um conjunto completo de auto-estados da energia, ou seja, $\sigma_{gg} + \sigma_{ee} = 1$.

Podemos alterar a notação para os conhecidos operadores de levantamento e abaixamento, definidos por

$$\sigma_z = \sigma_{ee} - \sigma_{gg} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \tag{A.46}$$

$$\sigma_+ = \sigma_{eg} = |e\rangle\langle g|, \tag{A.47}$$

$$\sigma_- = \sigma_{ge} = |g\rangle\langle e|, \tag{A.48}$$

onde σ_+ , σ_- e σ_z também satisfazem a álgebra de spin-1/2 das matrizes de Pauli, ou seja,

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z, \tag{A.49}$$

$$[\sigma_z, \sigma_{\pm}] = \pm 2\sigma_{\pm}, \tag{A.50}$$

que na notação matricial, são dados por

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.51}$$

Ao usarmos (A.45), ignorando o termo da energia constante $\frac{(E_e + E_g)}{2}$, podemos reescrever o hamiltoniano (A.43) como

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \sum_k \hbar g_k (\sigma_+ + \sigma_-) (a_k + a_k^\dagger). \tag{A.52}$$

A.4 Aproximação de Onda Girante

Agora, vamos tomar um único modo do campo, e reescrever o hamiltoniano (A.52) da seguinte forma

$$H = H_0 + V, \tag{A.53}$$

onde

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z, \quad (\text{A.54})$$

$$V = \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger). \quad (\text{A.55})$$

Na representação de interação, com $U_0 = e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}$,

$$H_I = U_0^\dagger H U_0 - H_0 = U_0^\dagger V U_0 = V_I. \quad (\text{A.56})$$

Da expansão de Baker-Hausdorff

$$e^{\xi\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-\xi\mathbf{A}} = \mathbf{B} + \xi[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{\xi^2}{2!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \frac{\xi^3}{3!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]] + \dots \quad (\text{A.57})$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são operadores que não comutam entre si, obtemos que

$$V_I = \hbar g(a\sigma_+ e^{i\Delta t} + a\sigma_- e^{-i\Omega t} + h.c.), \quad (\text{A.58})$$

com $\Delta \equiv \omega_0 - \omega$ e $\Omega \equiv \omega_0 + \omega$.

Quando $\omega_0 \approx \omega$, ou seja, próximo da ressonância, temos que $\Delta \ll \Omega$. Portanto, (A.58) o segundo termo do lado direito oscila muito rapidamente no tempo, quando comparado com o primeiro. Devemos então desprezar os termos que contém $e^{\pm i\Omega t}$, desde que tenhamos também $\frac{g\langle a \rangle}{\Omega} \ll 1$. Assim, o hamiltoniano de interação para um átomo de dois níveis na representação de interação e na aproximação de onda girante é

$$H_I = V_I = \hbar g(a\sigma_+ e^{i\Delta t} + a^\dagger\sigma_- e^{-i\Delta t}). \quad (\text{A.59})$$

Voltando para representação de Schrödinger, obtemos o hamiltoniano para o caso de um campo com um único modo em ressonância com a transição atômica

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-). \quad (\text{A.60})$$

que é conhecido como o modelo de Jaynes-Cummings.

Teoria quântica do amortecimento

B.1 Operador densidade

Um sistema físico quântico pode ser representado por um vetor de estado $|\psi\rangle$, o qual contém toda a informação sobre o mesmo, que foi previamente preparado e caracterizado. Entretanto, em muitas situações o vetor de estado do sistema não pode ser determinado exatamente, e a informação a respeito do mesmo é representada por uma distribuição de probabilidades, ou seja, podemos simplesmente dizer que o sistema tem probabilidade P_i , ($0 \leq P_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} P_i = 1$ onde \mathcal{N} é o número de sistemas no ensemble), de ser descrito por um estado $|\psi^{(i)}\rangle$.

O sistema que se encontra em um estado puro $|\psi\rangle$ tem sua evolução temporal descrita pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde H é o hamiltoniano do sistema.

Para obtermos informação do sistema associada a um observável A basta calcular o seu valor esperado,

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad (\text{B.2})$$

e seus momentos de ordem mais alta ($n \geq 2$)

$$\langle A^n \rangle = \langle \psi | A^n | \psi \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Quando o sistema não pode ser representado por um único vetor de estado, dizemos que este se encontra em uma mistura estatística de estados, ou seja, tem probabilidade P_1 de estar no estado $|\psi_1\rangle$, P_2 de estar no estado $|\psi_2\rangle$, P_3 de estar no estado $|\psi_3\rangle$, e assim por diante.

No entanto, é importante observarmos que mistura estatística de estados é diferente de um estado de superposição (que é um estado puro).

Por exemplo, sejam dois sistemas idênticos preparados inicialmente de formas diferentes, S_1 e S_2 , onde S_1 é caracterizado por um estado puro e normalizado $|\psi\rangle = a|\psi_a\rangle + b|\psi_b\rangle$, ($|a|^2 + |b|^2 = 1$), e o sistema S_2 se encontra em uma mistura estatística de estados, com probabilidade $P_a = |a|^2$ de ser encontrado no estado $|\psi_a\rangle$ e $P_b = |b|^2$ de ser encontrado no estado $|\psi_b\rangle$. Sejam $|\psi_a\rangle$ e $|\psi_b\rangle$ autoestados do observável O , ou seja, $O|\psi_a\rangle = o_a\psi_a\rangle$ e $O|\psi_b\rangle = o_b\psi_b\rangle$, teremos como possíveis resultados de uma medida deste observável em S_1 e S_2 os autovalores o_a com probabilidade $|a|^2$ e o_b com probabilidade $|b|^2$ para ambos os sistemas. Embora os resultados pareçam ser idênticos, estes dois sistemas podem ser distinguidos fazendo as medidas de interferência entre os estados $|\psi_a\rangle$ e $|\psi_b\rangle$, o que será observado no sistema S_1 , que é um estado superposto, e não será observado no sistema S_2 , que é uma mistura estatística de estados.

Para obtermos o valor esperado de um observável A em um sistema representado por uma mistura estatística de estados, tomamos a média de A em um ensemble³⁹, onde $\langle A \rangle = \langle \psi^{(i)} | A | \psi^{(i)} \rangle$, de maneira que

$$\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle \psi^{(i)} | A | \psi^{(i)} \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Escolhendo uma base de estados do sistema, ortogonal e completa, $\sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| = 1$, $\langle\phi_j|\phi_j\rangle = \delta_{i,j}$ é fácil verificar que (B.4), pode ser reescrita como

$$\langle A \rangle = \sum_j \langle\phi_j| \sum_i P_i |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| A |\phi_j\rangle \quad (\text{B.5})$$

e podemos definir o operador densidade do sistema como

$$\rho = \sum_i P_i |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}|. \quad (\text{B.6})$$

Uma vez definido o operador densidade, podemos calcular o valor esperado de um observável A , substituindo (B.6) em (B.5) e obtemos a seguinte expressão

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A). \quad (\text{B.7})$$

O operador densidade ρ representa a descrição mais geral de um sistema quântico, pois ele tanto pode descrever misturas estatísticas ou estados puros. O operador densidade puro é representado por $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ (um elemento do ensemble).

Algumas propriedades do operador densidade podem ser facilmente verificadas

1. O operador densidade é positivamente definido: seus elementos diagonais são reais e não-negativos ($\langle \phi_i | \rho | \phi_i \rangle \geq 0, \forall | \phi_i \rangle$);
2. O operador densidade é hermitiano: $\rho = \rho^\dagger$;
3. $\text{Tr} \rho = 1$, onde $\text{Tr} \rho = \sum_j \langle \phi_j | \rho | \phi_j \rangle$, que representa a condição de estados normalizados, ou seja, $\langle \psi^{(i)} | \psi^{(i)} \rangle = 1$ uma vez que $\sum_i P_i = 1$;
4. $\text{Tr} \rho^2 \leq 1$, para demonstrar essa propriedade, primeiramente escrevemos o operador densidade em uma base diagonal,

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_k \rho_{kk} | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \\ &= \sum_k p_{kk} | \phi_k \rangle \langle \phi_k |, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\begin{aligned} p_k &= \langle \phi_k | \rho | \phi_k \rangle \\ &= \sum_i P_i \langle \phi_k | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | \phi_k \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

sendo $0 \leq p_k \leq 1$ e

$$\begin{aligned} \sum_k p_k &= \sum_k \sum_i P_i \langle \phi_k | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | \phi_k \rangle \\ &= \sum_i P_i = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Desta maneira podemos escrever

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho^2 &= \sum_j \langle \phi_j | \rho^2 | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{j,k,k'} p_k p_{k'} \langle \phi_j | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle \langle \phi_{k'} | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{k,k'} p_k p_{k'} \delta_{kk'} \langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle \\ &= \sum_k p_k^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde $\text{Tr} \rho^2$ será igual a 1 se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, que é um estado puro. Esta relação permite medir a pureza do sistema, visto que para $\text{Tr} \rho^2 < 1$ temos uma mistura estatística e para $\text{Tr} \rho^2 = 1$ um estado puro.

A evolução temporal do operador densidade é descrita pela equação de Liouville-von Neumann, que pode ser obtida a partir da equação de Schrödinger,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho], \quad (\text{B.12})$$

onde H é o operador hamiltoniano do sistema.

Nas seções subsequentes, o operador densidade descreverá um sistema constituído por dois subsistemas: \mathcal{S} , que pode ser um átomo de dois níveis, em cujas propriedades físicas estamos interessados, que interage com um reservatório de radiação \mathcal{R} . Consideraremos que, inicialmente, os dois subsistemas estão desacoplados, desta forma podemos escrever o operador densidade deste conjunto como

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{SR}} &= \rho_{\mathcal{S}}(0) \otimes \rho_{\mathcal{R}}(0) \\ &\equiv \rho_{\mathcal{S}}(0)\rho_{\mathcal{R}}(0). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

e o operador hamiltoniano que descreve este sistema composto como

$$H_{\mathcal{S}+\mathcal{R}} = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{R}} + H_{\mathcal{SR}}, \quad (\text{B.14})$$

onde $H_{\mathcal{SR}}$ representa a interação entre os subsistemas \mathcal{S} e \mathcal{R} .

Uma vez calculada a evolução temporal do operador densidade $\rho_{\mathcal{SR}}(t)$, a informação sobre o subsistema \mathcal{S} estará contida no operador densidade reduzido $\rho_{\mathcal{S}}(t)$, que é obtido calculando o traço do operador $\rho_{\mathcal{SR}}(t)$ em relação às variáveis do reservatório \mathcal{R} , ou seja,

$$\rho_{\mathcal{S}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{R}}\rho_{\mathcal{SR}}(t), \quad (\text{B.15})$$

desta forma, podemos obter o valor esperado de um operador C do subsistema \mathcal{S} em um dado instante de tempo t a partir de (B.7) e (B.15)

$$\begin{aligned} \langle C \rangle &= \text{Tr}_{\mathcal{S}}(\rho_{\mathcal{S}}(t)C) \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{S}}[\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\rho_{\mathcal{SR}}(t)C)]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Na próxima seção deduziremos a equação mestra que rege a dinâmica (evolução temporal) do operador densidade do sistema conjunto $\mathcal{S}+\mathcal{R}$.

B.2 A equação mestra

Sistemas físicos não são isolados, ou seja, mesmo quando estudamos um simples átomo de dois níveis não levamos em consideração que ele interage com o meio que o circunda (que pode ser representado por um reservatório \mathcal{R}) de maneira dissipativa. Os sistemas físicos isolados são uma idealização que não leva em consideração o resto do universo, que torna os processos irreversíveis.

O reservatório que simula "o resto do universo", por sua vez, tem uma quantidade enorme de graus de liberdade, sendo assim, presume-se que seja pouco afetado pelo subsistema \mathcal{S} (cujas propriedades estamos interessados em estudar).

A equação mestra descreve a dinâmica do sistema \mathcal{S} sob influência do reservatório. De agora em diante usaremos $\hbar = 1$ para simplificar a notação.

Sejam

$$H_0 = H_S + H_{\mathcal{R}}, \quad (\text{B.17})$$

o hamiltoniano de \mathcal{S} e \mathcal{R} sem interação, e

$$U_0(t) = e^{-iH_0 t}, \quad (\text{B.18})$$

o operador evolução temporal. Na representação de interação, o operador densidade e o hamiltoniano de interação são descritos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \rho_{S\mathcal{R}}^I(t) &= U_0^\dagger \rho_{S\mathcal{R}}(0) U_0(t) \\ &\equiv \rho_I(t), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} H_{S\mathcal{R}}^I(t) &= U_0^\dagger H_{S\mathcal{R}} U_0(t) \\ &\equiv H_I(t), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

e a equação de Liouville-von Neumann na representação de interação^{40,41} é dada por (B.12). Integrando formalmente esta equação, obtemos

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t \left[H_I(t'), \rho_I(t') \right] dt', \quad (\text{B.21})$$

e de maneira análoga

$$\rho_I(t') = \rho_I(0) - i \int_0^{t'} \left[H_I(t''), \rho_I(t'') \right] dt''. \quad (\text{B.22})$$

Substituindo a equação (B.22) em (B.21) temos

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t [H_I(t'), \rho_I(0)] dt' - \int_0^t \int_0^{t'} [H_I(t'), [H_I(t''), \rho_I(t'')]] dt'' dt', \quad (\text{B.23})$$

e derivando a equação (B.23) com relação ao tempo, temos a equação de movimento para o operador densidade na representação de interação dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_I(t) = -i [H_I(t), \rho_I(0)] - \int_0^t [H_I(t), [H_I(t'), \rho_I(t')]] dt', \quad (\text{B.24})$$

que é equivalente à equação de Liouville-von Neumann (B.12), pois nenhuma aproximação foi feita.

Para obtermos a dinâmica do subsistema \mathcal{S} , calculamos o traço sobre os graus de liberdade do reservatório na equação (B.23)

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho_I(t) \right\} &= \frac{\partial}{\partial t} \rho_{SI}(t) \\ &= -i \text{Tr}_{\mathcal{R}} [H_I(t), \rho_I(0)] - \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} [H_I(t), [H_I(t'), \rho_I(t')]] dt', \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

onde $\rho_{SI}(t)$ é o operador densidade reduzido na representação de interação.

A equação (B.25) é chamada equação mestra do subsistema \mathcal{S} na representação de interação. Agora iremos supor que o reservatório \mathcal{R} não sofre mudança de seu estado inicial durante a interação²⁸ e o operador densidade $\rho_I(t)$ pode ser escrito como

$$\rho_I(t) = \rho_{\mathcal{R}}(0) \rho_{SI}(t). \quad (\text{B.26})$$

Inserindo (B.26) em (B.25), o primeiro termo do lado direito reescreve-se como

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{R}} [H_I, \rho_I(0)] &= \text{Tr}_{\mathcal{R}} [H_I, \rho_{\mathcal{R}}(0) \rho_{SI}(0)] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{R}} [\langle H_I \rangle_{\mathcal{R}}, \rho_{SI}(0)]. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

e o restante do (B.25)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{SI}(t) = -i [\langle H_I \rangle_{\mathcal{R}}, \rho_{SI}(0)] - \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} [H_I(t), [H_I(t'), \rho_I(t')]] dt'. \quad (\text{B.28})$$

Para voltarmos à representação de Schrödinger, utilizamos a seguinte transformação unitária

$$\rho_S = U_0(t) \rho_{SI}(t) U_0^\dagger(t), \quad (\text{B.29})$$

com $U_0(t) = e^{-iH_S t}$. Derivando a equação (B.29) em relação ao tempo obtemos a equação

mestra na representação de Schrödinger escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_S(t) &= -i \left[H_0, \rho_S(t) \right] dt + U_0(t) \frac{\partial}{\partial t} \rho_{SI}(t) U_0^\dagger(t), \\ &= -i \left[H_0, \rho_S(t) \right] dt - i U_0(t) \left[\langle H_I \rangle_{\mathcal{R}}, \rho_{SI}(0) \right] U_0^\dagger(t) \\ &\quad - \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left(U_0(t) \left[H_I(t), \left[H_I(t'), \rho_I(t') \right] \right] U_0^\dagger(t) \right) dt'. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Equações mestras podem ser calculadas para sistemas atômicos, modos quantizados e outros sistemas físicos. Na seção seguinte calcularemos a equação mestra para o átomo de dois níveis utilizando o formalismo apresentado aqui.

B.3 Equação mestra para o átomo de dois níveis

Seguindo a notação da seção anterior, o hamiltoniano de um sistema interagindo com um reservatório é dado por

$$\begin{aligned} H_{S+\mathcal{R}} &= H_0 + V = H_S + H_{\mathcal{R}} + H_{S\mathcal{R}} \\ &= \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \left(g_k b_k \sigma_+ + g_k^* b_k^\dagger \sigma_- \right), \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

onde o hamiltoniano H_S descreve o átomo de dois níveis, $H_{\mathcal{R}}$ o reservatório e $H_{S\mathcal{R}}$ a interação entre ambos, dada pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings usual (A.60). Os operadores σ_+ , σ_- e σ_z são pseudo-operadores de spin de Pauli (que satisfazem as relações de comutação da álgebra do grupo $su(2)$ (ver (A.49) e (A.50)), e b_k e b_k^\dagger (bosônicos), são ditos, operadores de destruição e criação de um fóton, respectivamente, no campo de energia $\hbar\omega_k$, cujas relações de comutação são

$$\left[b_k, b_{k'}^\dagger \right] = \delta_{k,k'}, \quad (\text{B.32})$$

$$\left[b_k, b_{k'} \right] = 0, \quad (\text{B.33})$$

$$\left[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger \right] = 0. \quad (\text{B.34})$$

O operador evolução temporal do sistema livre é dado por

$$\begin{aligned} U_0(t) &= e^{-iH_0 t} \\ &= \exp \left\{ -i \frac{\omega_0}{2} \sigma_z t - i \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k t \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

assim, o termo de interação átomo-reservatório, na representação de interação será dado por

$$\begin{aligned} H_I(t) &= U_0^\dagger H_{SR} U_0 \\ &= \sum_k \left(g_k b_k \sigma_+ e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} + g_k^* b_k^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Se substituirmos (B.36) em (B.25), utilizando a condição (B.26), obtemos a equação mestra para o operador densidade reduzido desse sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{SI}(t) &= -i \sum_k \left(g_k e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} \langle b_k \rangle_{\mathcal{R}} [\sigma_+, \rho_{SI}(0)] + g_k^* e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \langle b_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\sigma_-, \rho_{SI}(0)] \right) \\ &\quad - \sum_{k,k'} \left\{ \int_0^t \left(g_k g_{k'} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k b_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} [\sigma_+, \sigma_+ \rho_{SI}(t')] \right) dt' \right. \\ &\quad + \int_0^t \left(g_k g_{k'} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_{k'} b_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \sigma_+, \sigma_+] \right) dt' \\ &\quad + \int_0^t \left(g_k^* g_{k'}^* e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k^\dagger b_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\sigma_-, \sigma_- \rho_{SI}(t')] \right) dt' \\ &\quad + \int_0^t \left(g_k^\dagger g_{k'}^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_{k'}^\dagger b_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \sigma_-, \sigma_-] \right) dt' \\ &\quad + \int_0^t \left(g_k g_{k'}^\dagger e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k b_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} [\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t')] \right) dt' \\ &\quad + \int_0^t \left(g_k^\dagger g_{k'} e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_{k'}^\dagger b_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \sigma_+, \sigma_-] \right) dt' \\ &\quad + \int_0^t \left(g_k^\dagger g_{k'} e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} [\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t')] \right) dt' \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(g_k g_{k'}^\dagger e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_{k'}^\dagger b_k \rangle_{\mathcal{R}} [\rho_{SI}(t') \sigma_-, \sigma_+] \right) dt' \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Se consideramos um reservatório térmico, o operador densidade pode ser representado por

$$\rho_{\mathcal{R}} = \prod_k \left(1 - \exp \left\{ -\frac{\omega_k}{k_B T} \right\} \right) \exp \left\{ -\frac{\omega_k b_k^\dagger b_k}{k_B T} \right\} \quad (\text{B.38})$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta da radiação. Com essa definição, teremos que

$$\langle b_k^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = \langle b_k \rangle_{\mathcal{R}} = 0, \quad (\text{B.39})$$

$$\langle b_k^\dagger b_{k'}^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = \langle b_k b_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} = 0, \quad (\text{B.40})$$

$$\langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} = \langle n_k \rangle_{\mathcal{R}} \delta_{k,k'} = \bar{n}_k \delta_{k,k'}, \quad (\text{B.41})$$

$$\langle b_k b_{k'} \rangle_{\mathcal{R}} = \langle 1 + n_k \rangle_{\mathcal{R}} \delta_{k,k'} = (1 + \bar{n}_k) \delta_{k,k'}, \quad (\text{B.42})$$

sendo $\bar{n}_k = \left(e^{-\frac{\omega_k}{k_B T}} - 1 \right)^{-1}$ o número médio de fótons térmicos com frequência ω_k . Substituindo esses valores médios em (B.37), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{SI}(t) = & - \sum_k |g_k|^2 \left\{ \int_0^t \left(e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} (1 + \bar{n}_k) [\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t')] \right) dt' \right. \\ & + \int_0^t \left(e^{-i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} (1 + \bar{n}_k) [\rho_{SI}(t') \sigma_+, \sigma_-] \right) dt' \\ & + \int_0^t \left(e^{-i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \bar{n}_k [\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t')] \right) dt' \\ & \left. + \int_0^t \left(e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \bar{n}_k [\rho_{SI}(t') \sigma_-, \sigma_+] \right) dt' \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Assumiremos que os modos do campo estão pouco espaçados, de maneira que variam de forma aproximadamente contínua, e substituímos os somatórios em k por integrais

$$\sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} (1 + \bar{n}_k) \rightarrow \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 e^{i(\omega_0 - \omega')(t-t')} (1 + \bar{n}(\omega')) d\omega', \quad (\text{B.44})$$

$$\sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \bar{n}_k \rightarrow \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 e^{i(\omega_0 - \omega')(t-t')} \bar{n}(\omega') d\omega', \quad (\text{B.45})$$

onde $\mathcal{D}(\omega')$ é uma função distribuição de frequências do reservatório.

Agora, vamos utilizar da aproximação de Markov, onde assumimos que o tempo de correlação do reservatório τ_c é muito pequeno comparado com o tempo de observação t . Nesta escala de observação, o sistema perde toda sua memória do seu passado. Assim, podemos estender o limite superior das integrais para ∞ e substituir $\rho_{SI}(t')$ por $\rho_{SI}(t)$, assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{SI}(t) = & - \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega') |g(\omega')|^2 \left\{ (1 + \bar{n}(\omega')) [\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t)] \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \right. \\ & + (1 + \bar{n}(\omega')) [\rho_{SI}(t) \sigma_+, \sigma_-] \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\ & + \bar{n}(\omega') [\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t)] \int_0^\infty e^{-i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \\ & \left. + \bar{n}(\omega') [\rho_{SI}(t) \sigma_-, \sigma_+] \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau \right\} d\omega' \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

se utilizamos o resultado

$$\int_0^{\infty} e^{\pm i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau = \pi\delta(\omega_0 - \omega') \pm i\mathcal{P}\frac{1}{(\omega_0 - \omega')} \\ \approx \pi\delta(\omega_0 - \omega'), \quad (\text{B.47})$$

onde \mathcal{P} é o valor principal de Cauchy, obtemos a equação mestra para o átomo de dois níveis

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{SI}(t) = -\frac{\Gamma}{2}\left\{ \left(1 + \bar{n}(\omega_0)\right) \left(\left[\sigma_+, \sigma_- \rho_{SI}(t)\right] + \left[\rho_{SI}(t)\sigma_+, \sigma_-\right] \right) \right. \\ \left. + \bar{n}(\omega_0) \left(\left[\sigma_-, \sigma_+ \rho_{SI}(t)\right] + \left[\rho_{SI}(t)\sigma_-, \sigma_+\right] \right) \right\} \\ = \frac{\Gamma}{2}\left\{ \bar{n}(\omega_0)\mathcal{L}\left[\sigma_+\right]\rho_{SI}(t) + \left(1 + \bar{n}(\omega_0)\right)\mathcal{L}\left[\sigma_-\right]\rho_{SI}(t) \right\} \quad (\text{B.48})$$

onde $\Gamma \equiv 2\pi\mathcal{D}(\omega_0)|g(\omega_0)|^2$ é a constante de amortecimento à semelhança de Wigner-Weisskopf e

$$\mathcal{L}\left[\sigma_{\pm}\right]\rho_{SI}(t) = 2\sigma_{\pm}\rho_{SI}(t)\sigma_{\mp} - \rho_{SI}(t)\sigma_{\mp}\sigma_{\pm} - \sigma_{\mp}\sigma_{\pm}\rho_{SI}(t) \quad (\text{B.49})$$

é o superoperador liouvilliano.

O método das pequenas rotações não-lineares

Hamiltonianos efetivos são frequentemente empregados em Óptica Quântica, principalmente em processos multi-fótons e efeitos ópticos não-lineares, explicitando, via teorias perturbativas, as principais realizações do sistema em estudo.

C.1 Motivação para o método

Para introduzir os conceitos físicos do método, tomaremos com um exemplo simples: uma partícula de spin j em um campo magnético. Neste caso, o hamiltoniano é dado por

$$H = \omega S_z + g(S_+ + S_-), \quad (\text{C.1})$$

onde g é a constante de acoplamento entre a partícula e o campo magnético e os operadores S_z , S_+ e S_- constituem uma representação $(2j+1)$ -dimensional da álgebra $su(2)$, obedecendo as relações de comutação (A.49) e (A.50). Na base usual de momento angular $|j, m\rangle$ ($m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$), o operador S_z é diagonal, enquanto a ação dos operadores tipo escada, S_{\pm} , são não-diagonais

$$S_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (\text{C.2})$$

$$S_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (\text{C.3})$$

O hamiltoniano (C.1) é um hamiltoniano linear e admite uma solução exata. Para nossos propósitos, uma maneira muito conveniente de achar a solução é aplicar uma transformação unitária

$$U = \exp[\alpha(S_+ - S_-)], \quad (\text{C.4})$$

onde α é um parâmetro complexo a ser ajustado em função dos parâmetros do sistema. Utilizando a relação de Baker-Hausdorff (A.57), obtemos o hamiltoniano transformado será dado por

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= UHU^\dagger \\ &= \left[\omega \cos(2\alpha) + 2g \sin(2\alpha) \right] S_z + \frac{1}{2} \left[2g \cos(2\alpha) - \omega \sin(2\alpha) \right] (S_+ + S_-),\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

O próximo passo é escolher o parâmetro α de forma a cancelar os termos não-diagonais que aparecem em (C.5), para o exemplo escolhido

$$\tan(2\alpha) = \frac{2g}{\omega}, \quad (\text{C.6})$$

o que nos leva à

$$H_{efet} = \omega \sqrt{1 + \frac{4g^2}{\omega^2}} S_z. \quad (\text{C.7})$$

Como esse hamiltoniano efetivo é diagonal na base de momento angular, a dinâmica do problema é completamente descrita. A chave para a observação do propósito do método das pequenas rotações não-lineares, é que quando $\omega \ll g$, podemos aproximar a equação (C.6) por $\alpha \approx \frac{g}{\omega}$, resultando no hamiltoniano efetivo

$$H_{efet} \approx \left(\omega + 2\frac{g^2}{\omega} \right) S_z, \quad (\text{C.8})$$

que coincide com a solução exata depois de expandir (C.7) em séries de $\frac{g^2}{\omega^2}$.

C.2 As pequenas rotações não-lineares e os hamiltonianos efetivos

Levando em conta o exemplo anterior, vamos considerar o caso geral de um sistema descrito por um hamiltoniano não-linear, que admita algumas integrais de movimento*, N_j , e que a componente de interação possa ser escrita do seguinte modo

$$H_{int} = \Delta X_z + g(X_+ + X_-), \quad (\text{C.9})$$

*Se $[H, A] = 0$, então A é uma constante de movimento.

onde g é uma constante de acoplamento, Δ é um parâmetro que representa usualmente a dessintonia entre as frequências de diferentes subsistemas e os operadores X_{\pm} e X_z mantêm a relação de comutação (A.22)

$$[X_z, X_{\pm}] = \pm X_{\pm}, \quad (\text{C.10})$$

mas a (A.23) é modificada da seguinte forma

$$[X_+, X_-] = P(X_z, N_j) \quad (\text{C.11})$$

com $P(X_z, N_j)$ é uma função polinomial arbitrária do operador diagonal X_z com coeficientes que podem depender das integrais de movimento N_j . Essa é a origem do nome de deformações polinomiais da álgebra $su(2)$.

Vamos supor que por alguma razão física (depedendo do sistema considerado), a condição

$$\Delta \ll g \quad (\text{C.12})$$

seja satisfeita. Então, fica claro que (C.9) é quase diagonal na base que diagonaliza X_z .

De fato, uma análise em teoria de perturbação imediatamente mostra que em correções de primeira ordem introduzidas na parte não-diagonal, $g(X_+ + X_-)$, aos autovalores de X_z desaparecerem e alguns de segunda ordem são proporcionais à $\frac{g}{\Delta} \ll 1$.

Como na seção anterior, vamos aplicar a seguinte transformação unitária à (C.9) (que, de fato, é uma pequena rotação não-linear)

$$U = \exp \left[\frac{g}{\Delta} (X_+ - X_-) \right], \quad (\text{C.13})$$

de modo que

$$H_{int,efet} = U H_{int} U^\dagger. \quad (\text{C.14})$$

Mantendo termos até a ordem $\frac{g^2}{\Delta^2}$, teremos

$$H_{int,efet} = \Delta X_z + \frac{g^2}{\Delta} P(X_z, N_j). \quad (\text{C.15})$$

um hamiltoniano efetivo que é diagonal na base de autoestados do operador X_z . Com essa aproximação, o problema da evolução do sistema é completamente resolvido e temos um hamiltoniano expresso em um forma operacional.