Sólitons do modelo de Bullough-Dodd e suas generalizações pela inclusão de campos de matéria

Paulo Eduardo Gonçalves de Assis

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências: Física Básica.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira

São Carlos

2007

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

IFSC - SBI
CLASS.....
CUTTER.....
TOMBO.....

Assis, Paulo Eduardo Gonçalves de
"Sólitons do modelo de Bullough-Dodd e suas generalizações pela inclusão de campos de matéria"

Paulo Eduardo Gonçalves de Assis – São Carlos, 2007

Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2007 Página: 98
Área: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Luis Agostinho Ferreira

1. Teoria de campos; 2. Modelos exatamente integráveis; 3. Solitons.

I. Título

UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Caixa Postal 369
13560-970 São Carlos, SP
Av. Trabalhador São-carlense, 400,
13560-970 São Carlos, SP

Fone/Fax 16 3373 9777
www.if.sc.usp.br
wladerez@ifsc.usp.br

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ***PAULO EDUARDO GONÇALVES DE ASSIS*** *APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 29/01/2007.*

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira (Orientador e Presidente) - IFSC/USP

Prof. Dr. Marco Aurélio Cattacin Kneipp (UFSC)

Prof. Dr. Roland Köberle (IFSC/USP)

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

The study of the soliton as a stable particle-like state of nonlinear systems has so caught the imagination of physicists and mathematicians of all descriptions that it can genuinely claim to be one of the few interdisciplinary subjects of modern day mathematical physics. It may be that the topic of solitons will pass through this wide spectrum of subjects leaving their content unchanged, with only a shift in emphasis! Only time will tell.

Robert Dodd.

Figura 1: Foto que captura o belo e poderoso espectáculo da natureza conhecido como *Morning Glory*, característico do Golfo da Capentária, na região norte da Austrália. Raras, as enormes nuvens, que podem se extender por mais de 1000 km de comprimento e atingir 3 km de altitude, ocorrem com mais freqüência na primavera e podem conter uma energia equivalente a muitas armas nucleares. Neste fenômeno natural uma onda solitária de pressão viaja numa camada de inversão térmica produzindo sólitons atmosféricos. Aspectos matemáticos dos sólitons serão objeto de estudo deste trabalho.

A todos aqueles com quem fui de alguma forma ausente
e aos queridos ausentes.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à vida pelas oportunidades que me permitiram esta realização, seja obra de Deus ou do acaso. Em seguida, mas não menos importante, um enorme obrigado a meus pais, pessoas maravilhosas e muito amadas que fizeram o melhor pelos filhos; a meus queridos irmãos e demais familiares pelo apoio. Aos - felizmente muitos e bons - amigos, desde os mais antigos aos mais recentes, pela vida compartilhada. Aos professores que se empenharam em nosso crescimento, aos mestres que me orientaram com dedicação e carinho.

Estes nunca serão esquecidos. Um sincero abraço a todos!

Por fim, demonstro aqui meus apreço e gratidão pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, que apóia a pesquisa científica no Estado e financiou este projeto.

Resumo

Neste trabalho foram realizados estudos sobre soluções solitônicas de modelos não-lineares, simetrias, correntes conservadas e estruturas responsáveis pelo aparecimento dessas soluções especiais. Nesse sentido, recorremos aos sistemas exatamente integráveis que, além de suas aplicações diretas em sistemas físicos, constituem um excelente laboratório para testarmos idéias.

Nossas atenções se concentraram nos modelos de Toda de um modo geral, mas mais especificamente no chamado modelo de *Bullough-Dodd*, também conhecido como *Zhiber-Mikhailov-Shabat*. Estudamos uma representação de curvatura nula baseada na álgebra de Kac-Moody afim $A_2^{(2)}$ com o objetivo de calcular os sólitons do modelo. A abordagem escolhida para obter os sólitons se baseia numa combinação dos método de *dressing* e de Hirota. Tal formulação, que fornece uma prescrição para a construção de sólitons associados a uma dada teoria, já está bem estabelecida, havendo permitido anteriormente o estudo de uma vasta classe de teorias entre elas os modelos de sine-Gordon e de KdV, cuja estrutura se baseia na álgebra $su(2)$. No entanto, a álgebra $A_2^{(2)}$ é especial por ser do tipo *twisted*, e isso torna os resultados obtidos relevantes ao validar a metodologia para qualquer álgebra de Kac-Moody afim.

As soluções solitônicas construídas foram tratadas no caso em que o campo de Bullough-Dodd é real ou complexo. Determinamos propriedades como massa e carga topológica, que nesse último caso é não-trivial. Além da solução de 1-sóliton, obtivemos também a solução de 2-sólitons e estudamos sua interação através do cálculo do atraso (*time delay*) introduzido em sua trajetória durante a colisão.

Finalmente, construimos algumas generalizações pelo acoplamento de campos de matéria aos campos iniciais do modelo BD de forma a preservar a integrabilidade do sistema. Esses novos modelos constituem um trabalho original, no qual suas soluções são calculadas e algumas de suas características são analisadas. Sob determinadas condições, os modelos construídos fornecem ainda um mecanismo de confinamento para os novos campos.

Abstract

In this work we study solitonic solutions to nonlinear models, symmetries, conserved currents and the mathematical structure responsible for such solutions. With this aim in mind, we make use of exactly integrable systems because they provide an excellent framework to test ideas, besides its immediate applications.

We focused our attention on Toda models in general, and more specifically on the so called *Bullough-Dodd* model, also known as *Zhiber-Mikhailov-Shabat*. We studied a zero curvature representation based on the underlying affine Kac-Moody algebra $A_2^{(2)}$ in order to calculate the solitons of this model. The approach chosen to obtain these solitons is based on a hybrid which combines the *dressing* and the Hirota methods. This formulation, which supplies us with a prescription to construct solitons, is well established. It has previously allowed the study of a wide class of theories, among which we find the sine-Gordon and the KdV models, whose underlying algebra is the $su(2)$. Nonetheless, the $A_2^{(2)}$ is a special algebra for being of the twisted kind, and this makes our results relevant as it validates the employed techniques to any affine Kac-Moody algebra.

The solitonic solutions constructed were considered in the cases where the Bullough-Dodd field is real or complex. They allow us to determine properties such as mass and topological charge. Besides the one-soliton solution, we also obtain the two-solitons solution and we study their interaction through the time delay introduced in their trajectories during the collision.

We finally built some generalizations by coupling matter fields to the original BD fields in such a way that integrability is preserved. These new models constitute an original work, where the solutions are calculated and some of their features are explored. Under certain conditions the models we made present a confinement mechanism for the new fields.

Sumário

1 Conceitos Preliminares **1**

1 Introdução 1

2 Sólitons 4

3 Álgebras de Lie 5

3.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie 5

3.2 Matrizes de Cartan e Diagramas de Dynkin 9

3.3 Teoria de Representação das Álgebras de Lie 10

3.4 Álgebras de Kac-Moody Afins 12

3.5 Operadores de Vértice 15

2 Integrabilidade **20**

1 Quantidades Conservadas 20

1.1 Curvatura Nula 21

2 Modelos Integráveis 25

2.1 Modelos de Toda 25

2.2 Modelos de Toda acoplados a campos de matéria (MCAT) . . . 29

3 Construção de sólitons 34

3.1 Método de dressing 36

3 Estudo do modelo de Bullough-Dodd **40**

1 A álgebra do modelo BD: $A_2^{(2)}$ 40

2 Construção dos sólitons do modelo 52

3 Sólitons de Bullough-Dodd 59

3.1 Solução de 1-sóliton de BD 59

3.2 Solução de 2-sólitons de BD 62

4 A inclusão de novos campos de matéria 66

4.1 Modelo $MBD3$ 66
4.2 Modelo $MBD6$ 73
4.3 Caso não-abeliano: NA-MBD 78

4 Conclusões **81**

5 Apêndice A **83**
1 Modelos de Toda como teorias de WZNW 83

6 Apêndice B **87**
1 Os sólitons do modelo $\hat{so}(8)$ 87
1.1 Modelo CAT-$\hat{so}(8)$ 88
1.2 Modelo MCAT-$\hat{so}(8)$ 91

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1 Introdução

Apenas uma fração restrita das equações que governam fenômenos físicos são lineares, apresentando características importantes como o *princípio da superposição*. Para se trabalhar com os sistemas não-lineares, um dos métodos mais populares é a chamada *teoria de perturbação*, mas ela pode somente ser empregada em situações de acoplamento fraco. Daí surgem a necessidade de se estudar soluções analíticas das equações não lineares e a conseqüente relevância das chamadas soluções *solitônicas*.

Entretanto, tais soluções existem somente para sistemas que apresentam elevado grau de simetria. Como as simetrias que permitem obter soluções exatas para uma dada equação não-linear desempenham um papel de grande importância e como constituem um dos objetos de estudo neste trabalho, nós discutimos os conceitos relacionados às álgebras de Lie e seus laços com o tema de interesse, que são as equações diferenciais não-lineares [1].

Os sólitons são soluções especiais de equações diferenciais não-lineares com interessantes propriedades que lhes conferem um aspecto de partícula. Todavia, a não-linearidade introduz também um empecilho prático: obter soluções exatas não é uma tarefa simples. De fato, muitas das soluções solitônicas não podem ser obtidas por métodos perturbativos.

A teoria dos sólitons desenvolveu-se muito nas últimas décadas e hoje dispomos de conhecimento suficiente para compreender que as simetrias responsáveis pelo aparecimento de tais soluções estão escondidas, no sentido em que não podem ser associadas a uma invariância da ação que define o sistema.

As simetrias escondidas manifestam-se de maneira algébrica. Quando um modelo apresentar uma infinidade de quantidades conservadas, então ele será exatamente integrável. No caso de interesse estas quantidades decorrem do fato de podermos expressar as equações de movimento do sistema como uma representação em termos de potenciais que vivem numa certa álgebra. A construção algébrica que permite a integrabilidade é a chamada *condição de curvatura nula.* Por ser invariante sob transformações de calibre, ela possibilita relacionar soluções simples a outras pouco triviais.

Apesar de parecer um trabalho de caráter matemático apenas, os modelos integráveis não-lineares permitem testar idéias muito atuais em Física, como confinamento e a própria teoria quântica dos sólitons. Em muitos casos, fornecem modelos realistas para fenômenos bastante interessantes em matéria condensada, mecânica estatística e em física de altas energias.

O siginificado físico das soluções clássicas auxiliam também na compreensão das interações fundamentais da natureza, especialmente aspectos não-perturbativos das teorias quânticas, de modo que o estudo dos sólitons tem se mostrado frutífero no entendimento das teorias de gauge não-abelianas. Mais recentemente, têm sido usados para descrever o acoplamento em teorias supersimétricas de Yang-Mills em $3+1$ dimensões, por exemplo.

Este projeto dá continuidade à formulação da teoria de sólitons iniciada por Saveliev, Olive e Underwood [2], e seguida por Ferreira, Gervais e Sanchez-Guillen [3]. A metodologia em questão já se mostrou adequada e levou a resultados bem sucedidos para álgebras de Kac-Moody mais simples, como $su(2)$, relacionada ao conhecido modelo de sine-Gordon, e ainda $su(3)$. Entretanto, não se tem conhecimento de um estudo semelhante para a álgebra com *twist* $A_2^{(2)}$, associada ao modelo de Bullough-Dodd (BD) [4, 5], com a inclusão de campos de matéria. Por esse motivo, este modelo foi escolhido para ser estudado.

À primeira vista, a abordagem deste modelo poderia ser justificada pelas suas aplicações em Física, Engenharia ou outras áreas. Porém, por mais interessantes que sejam os contextos em que ele aparece, não é essa razão de seu estudo, mas, sim, o desejo de compreender como sua rica, e já bem conhecida, estrutura permite levar à integrabilidade do modelo.

O texto se divide em quatro capítulos. O primeiro traz, além destas con-

siderações sobre a motivação do projeto, uma breve discussão sobre os sólitons e os aspectos algébricos relevantes para a compreensão do trabalho. Em seguida, há um capítulo que se aprofunda na integrabilidade dos modelos de Toda, que têm o modelo de BD como um caso especial, visando à construção de soluções solitônicas. Já no terceiro apresentamos o estudo do modelo de Bullough-Dodd através das técnicas discutidas até então. Nele determinamos os geradores álgebra $A_2^{(2)}$ e mostramos como esta se relaciona com $\hat{so}(8)$ e $su(3)$. O conhecimento desta estrutura algébrica permite construir na seqüência uma representação de curvatura nula equivalente à equação de Bullough-Dodd, que é então resolvida. Ainda no mesmo capítulo, temos o restante do trabalho orginal: a construção e solução de modelos exatamente integráveis em que campos de Dirac são introduzidos convenientemente. Finalmente, apresentamos no quarto capítulo as discussões finais sobre o projeto desenvolvido.

Figura 1.1: Colisão entre sólitons que se deslocam em mesmo sentido e velocidades diferentes.

2 Sólitons

Antes de dar início à discussão dos assuntos relevantes para este projeto de pesquisa, é conveniente um pequeno esforço para que um conceito tão fundamental e recorrente no texto esteja claro: o sóliton.

Os sólitons surgiram no contexto da hidrodinâmica, sendo relatados pela primeira vez por John Scott Russel em 1834 sob a forma de uma onda solitária em um canal que percorria longas distâncias sem se dissipar. Tal onda foi modelada posteriormente por Korteweg e de Vries. Todavia, seu significado como um importante estado estável de sistemas não-lineares só foi notado na década de 1960. Zabusky e Kruskal, ao perceberem que quando uma ou mais ondas de KdV colidem elas não se destrõem, cunharam o termo sóliton, evidenciando seu caráter particular.

Com a generalização do conceito veio a dificuldade em definí-lo apropriadamente [6]. Mesmo não sendo um consenso, será considerado um sóliton uma solução de uma equação de movimento que: **(I)** se propaga com velocidade constante mantendo sua forma; **(II)** não dissipa energia durante a propagação; **(III)** cujo único resultado de um espalhamento por outra solução desse tipo seja um deslocamento relativo à posição em que estaria caso não tivesse ocorrido a interação.

O fato de que tais soluções sejam possíveis para um sistema não-linear causa surpresa, e é decorrência de uma competição entre os caráteres dispersivo e não-linear que podem estar presentes na equação de movimento.

A princípio pode passar despercebido mas a estabilidade dos sólitons é notável. Mesmo após interagirem eles mantém suas características e isso mostra que o espaço de fase deve ser muito restito; de fato, existe uma infinidade de cargas conservadas que impedem sua descaracterização de cada um dos infinitos graus de liberdade que um campo possui.

Uma outra característica importante é que uma composição de soluções não é em geral uma solução, já que o *princípio da superposição* se limita a sistemas lineares. Os sólitons inclusive se beneficiam desse fato pois isso implica na existência de uma interação entre as soluções. Deveras, espera-se que eles possam auxiliar na compreensão dos setores de acoplamento forte na física de partículas.

3 Álgebras de Lie

Com as pretensões já apresentadas em mente, dá-se início ao estudo da estrutura fundamental dos grupos e das álgebras de Lie, que será necessária para o trabalho em questão. No entanto, a abordagem se atém às idéias principais com o intuito de situar o leitor, a quem se recomenda consultar a literatura especializada [7, 8] caso julgue necessário.

3.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

A teoria de grupos é a área da Matemática que aborda simetrias, e tendo em vista que em Física estas são ferramentas extremamente importantes, é de se esperar que seu estudo seja muito frutífero, especialmente neste ramo de pesquisa. De maneira sucinta, grupos podem ser definidos como elementos de um conjunto que satisfazem certas propriedades definidoras, das quais seguem inúmeros resultados importantes.

Seja g um elemento do grupo G. Então , temos:

- fechamento: $g \circ g' \in G \Longleftrightarrow g, g' \in G$.
- associatividade: $(g \circ g') \circ g'' = g \circ (g' \circ g'')$.
- existência e unicidade do elemento identidade, e: $g \circ e = e \circ g = g$.
- existência e unicidade do elemento inverso, g^{-1}: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

É possível classificar os grupos em discretos ou contínuos, sendo que apenas estes últimos serão de nosso interesse. Estes grupos podem ser parametrizados por um conjunto de variáveis, $g = g(x_1, x_2, ..., x_m)$, e através da combinação de elementos percebe-se que

$$g(x)g(x') = g(x'') \quad \Rightarrow \quad x'' = F(x, x'). \tag{1.1}$$

Ademais,

$$g(x)g(x') = e = g(x')g(x) \quad \Rightarrow \quad x' = f(x). \tag{1.2}$$

Um grupo G recebe a designação *Grupo de Lie* quando as funções $F(x, x')$ e $f(x)$ discutidas acima forem funções analíticas e os elementos g de G constituirem

um espaço analítico localmente isomórfico ao $\mathbb{R}^N$ (*manifold*). Por este motivo, podemos aproximar as vizinhanças de um ponto qualquer de um grupo de Lie G por um espaço euclideano tangente a G naquele ponto. Note, porém, que tal linearização local ocasiona uma perda das propriedades globais do grupo, mas permite que um ponto p seja caracterizado por uma combinação de campos tangentes a p:

$$V_p = V_p^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.3}$$

cujos coeficientes são funções diferenciáveis das coordenadas.

Vejamos que a composição de dois campos, V e W, sobre um função qualquer f:

$$W(V(f)) = W^j\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + W^jV^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i} \tag{1.4}$$

não apresenta a mesma forma que um campo (1.3) de modo que o operador WV não é um campo. Contudo, consideremos o comutador dos operadores V e W:

$$[V,W] = \left(V^i\frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.5}$$

Este, sim, é um campo e por isso pode-se afirmar que o conjunto desses campos vetoriais é fechado sobre a operação de comutação, formando o que se chama de *Álgebra de Lie*. A operação $[V,W]$, conhecida por *parênteses de Lie*, é anti-simétrica, bilinear e satisfaz a *identidade de Jacobi*:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \tag{1.6}$$

onde x,y e z são ditos elementos pertencentes à álgebra de Lie.

Como visto, a um grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie, mas falta compreender melhor como a álgebra de Lie está relacionada à sua estrutura de grupo. Para isso, efetua-se uma *translação pela esquerda*[1], $g'' = gg'$, levando o elemento g' em g'', sendo que g' é parametrizado por x_i', $(i = 1,2,...,dim\ G')$, enquanto g'' é parametrizado por x_i'', $(i = 1,2,...,dim\ G'')$, que são funções analíticas de x_i'. Este mapeamento de G' em G'' induz um mapeamento entre os espaços tangentes:

[1] Os argumentos apresentados poderiam ser usados no caso de uma translação pela direita, e o resultado seria o mesmo.

$$W_{g''}f \equiv V^i_{g'}\frac{\partial}{\partial x'^i}f(x'') = V^i_{g'}\frac{\partial x''^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x''^i}f \tag{1.7}$$

Assim, dado $V_{g'}$ no espaço tangente $T_{g'}G$, temos associado um campo tangente $W_{g''}$ em $T_{g''}G$. No caso em que tais campos coincidem, temos o que se chama *campo vetorial invariante pela esquerda* em G. Mostra-se ainda que o comutador de dois campos invariantes também é invariante, e com isso, um campo invariante pela esquerda é completamente determinado por seu valor em um ponto particular de G, a identidade.

Existe um número igual à dimensão de G de campos linearmente independentes, T_a, $(a = 1, 2, ..., dim\ G)$, que formam uma base para o plano tangente e satisfazem uma relação que independe do ponto e caracteriza a álgebra:

$$[T_a, T_b] = f^c_{ab}T_c \tag{1.8}$$

Comumente, refere-se aos elementos T como *geradores* da álgebra, enquanto os fatores f são chamados de *constantes de estrutura*, fornecendo toda a informação da álgebra.

As *álgebras de Lie simples* são aquelas que não possuem uma subálgebra (não trivial) abeliana invariante, isto é, não existe uma subálgebra $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ tal que $[\mathcal{H}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{H}$. Já as *álgebras de Lie semi-simples*, no caso de serem compactas, são uma soma direta de álgebras simples que comutam entre si e, a grosso modo, seu estudo constitui uma generalização da álgebra de *momentum angular*.

Definida uma álgebra semi-simples $\mathcal{G}$, chama-se de *subálgebra de Cartan* (CSA) de $\mathcal{G}$ a subálgebra maximal de $\mathcal{G}$ tal que seus geradores comutam entre si. Denota-se *rank* da álgebra $\mathcal{G}$ a dimensão da subálgebra de Cartan de $\mathcal{G}$, e a base dessa subálgebra é dada por H_i, $(i = 1, ..., r = rank\ \mathcal{G})$:

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{1.9}$$

O complemento da subálgebra de Cartan em $\mathcal{G}$ constituem os chamados operadores *step*, E_α, que diagonalizam simultaneamente os geradores da CSA com respeito à ação adjunta:

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha. \tag{1.10}$$

Chamam-se *raízes da álgebra* os autovalores acima, onde α_i $(i = 1, ..., r)$ denotam as componentes da raiz α, que vive num espaço de dimensão r. O espaço vetorial das raízes pode ser dividido por hiperplanos perpendiculares às raízes em regiões chamadas *câmaras de Weyl* (WC). Pela regularidade do sistema de raízes todas as câmaras de Weyl têm a mesma forma e são equivalentes, de modo que podemos escolher uma delas e considerá-la como uma *câmara de Weyl fundamental* (FWC). Sendo x um vetor qualquer dentro de FWC, dizemos que a raiz α é positiva se $x \cdot \alpha > 0$ e negativa se $x \cdot \alpha < 0$.

O espaço das raízes, por sua vez, pode ser gerado pelas r *raízes simples*, α_a, que são aquelas que não podem ser expressas como combinação linear de raízes positivas. Por outro lado, uma raiz qualquer da álgebra pode então ser escrita como combinação linear das raízes simples:

$$\alpha = \sum_{a=1}^{r} m_a^{\alpha} \alpha_a \tag{1.11}$$

Juntos, os geradores da subálgebra de Cartan (CSA) mais os operadores *step* formam uma possível base para gerar uma álgebra de Lie.

Os operadores nas relações (1.9) e (1.10) encontram-se expressos na chamada *base de Weyl-Cartan*, útil por suas propriedades de ortonormalidade com respeito ao traço de um par de geradores. No entanto, para propósitos algébricos é mais conveniente introduzir uma base na qual as constantes de estrutura sejam todas números inteiros, a *base de Chevalley*, em que se subsituem os geradores da CSA pela combinação:

$$H_a \equiv \frac{2\alpha_a \cdot H}{{\alpha_a}^2} \tag{1.12}$$

Se a álgebra for simplesmente laçada, isto é , se todas as raízes tiverem o mesmo comprimento, pode-se convencionar ${\alpha_a}^2 = 2$ por simplicidade, implicando nas seguintes relações:

$$[H_a, H_b] = 0 \tag{1.13}$$

$$[H_a, E_\alpha] = \alpha_a \cdot \alpha \ E_\alpha \tag{1.14}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H \tag{1.15}$$

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIO INFORMACAC

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}, \quad se\ \alpha+\beta\ for\ raiz \tag{1.16}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0, \quad se\ \alpha+\beta\ nao\ for\ raiz \tag{1.17}$$

onde $N_{\alpha\beta}$ são constantes de proporcionalidade a serem determinadas consistentemente. Note ainda que para se determinar as relações de comutação entre os elementos da álgebra é necessário o conhecimento do produto escalar entre as diferente raízes.

3.2 Matrizes de Cartan e Diagramas de Dynkin

Uma maneira muito usada de codificar as informações de um sistema de raízes simples é através de seus produtos escalares e isto se dá sob a forma de uma matriz $n \times n$, a *matriz de Cartan*, definida pelos elementos

$$K_{ab} = \frac{2\alpha_a \cdot \alpha_b}{{\alpha_b}^2}, \tag{1.18}$$

com $a, b = 1, ..., rank\ \mathcal{G}$. Algumas propriedades dessa matriz são :

- $K_{ab}K_{ba} = 4\cos^2\theta = mn, \quad$ com $m, n \in \mathbb{Z}$
  A matriz fornece o ângulo entre duas raízes simples.

- $\frac{K_{ab}}{K_{ba}} = \frac{{\alpha_a}^2}{{\alpha_b}^2}$
  K fornece a razão de comprimentos de quaisquer duas raízes.

- $K_{ab} = K_{ba} \Longleftrightarrow {\alpha_a}^2 = {\alpha_b}^2$
  A matriz apenas é simétrica quando todas as raízes tiverem o mesmo comprimento.

- $K_{ab} = K_{ba} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_a \cdot \alpha_b = 0$
  A matriz de Cartan de uma álgebra de Lie que não é simples tem necessariamente uma forma diagonal.

- $K_{aa} = 2$ Os elementos da diagonal não fornecem novas informações.

A partir da matriz de Cartan de dimensão n se constrói o que se conhece por *diagrama de Dynkin*, que consiste de uma representação gráfica em que há n pontos, e dois pontos a e b quaisquer são ligados por $K_{ab}K_{ba}$ linhas; se o número de linhas ligando

dois pontos exceder 1 coloca-se uma seta apontando para o ponto correspondente à raiz que tiver o menor comprimento. Dessa maneira, K_{ab} pode ser reconstruído a partir do diagrama de Dynkin e vice-versa.

As matrizes de Cartan $K_{n\times n}$ fornecem uma maneira de se construir álgebras de Lie. Com essa finalidade é introduzido um conjunto de $3n$ geradores, $\{h_i, e_i^+, e_i^-\}$, que representam respectivamente os geradores da subálgebra de Cartan, os operadores step de grau positivo e os de grau negativo, e satisfazem as relações de comutação:

$$[h_i, h_j] = 0 \qquad [e_i^+, e_j^-] = h_i\delta_{ij} \qquad [h_i, e_j^\pm] = \pm e_j K_{ji} \tag{1.19}$$

Finalmente, deve-se também impôr as *relações de Serre*, que estão relacionadas à estrutura da cadeia de raízes:

$$(ad\ e_i^\pm)^{1-K_{ji}} e_j^\pm = 0, \tag{1.20}$$

sendo que *ad* indica *ação adjunta.*

Os demais elementos são obtidos tomando-se o comutador destes $3n$ geradores tantas vezes quanto for necessário. É nesse sentido que tais elementos são considerados geradores da álgebra, mas não uma base.

3.3 Teoria de Representação das Álgebras de Lie

As relações entre os geradores de uma álgebra foram discutidas até agora de maneira geral e sem fazer referência a uma realização para eles. Entretanto, é necessário em certas situações abandonar a representação abstrata e expressar os elementos da álgebra num espaço vetorial.

Qualquer conjunto de operadores $\{T_a\}$ atuando num espaço vetorial V será considerado uma representação de uma álgebra de Lie nesse espaço se for possível definir uma operação entre quaisquer dois desses operadores , $T_a \circ T_b$, que reproduza as relações de comutação da álgebra em questão .

Uma possibilidade é escolher a base do espaço de representação como sendo autoestados dos geradores da CSA:

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle \tag{1.21}$$

Denotam-se *pesos da álgebra* os r vetores acima $\{\mu_1, ..., \mu_r\}$, que geram um espaço r-dimensional.

É bem sabido ainda que para cada raiz α de uma dada álgebra, os elementos $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, \frac{2\alpha \cdot H}{\alpha^2}\}$ formam uma subálgebra isomorfa a $su(2)$. Daí se extrai uma condição a ser obedecida pelos pesos:

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \in \mathbb{Z} \tag{1.22}$$

Como se observa que duas raízes α e β satisfazem $\frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}$, diz-se que toda raiz é um peso, embora nem todo peso seja uma raiz. E dentre os pesos, chamam-se *pesos fundamentais* aqueles λ tais que

$$\frac{2\alpha_a \cdot \lambda_b}{\alpha_a^2} = \delta_{ab} \tag{1.23}$$

No entanto, após a escolha dos estados que definirão a representação, é necessário saber que a atuação dos operadores step sobre um desses estados gera um novo estado:

$$|\mu'\rangle = E_\alpha |\mu\rangle \tag{1.24}$$

que tem peso $\mu + \alpha$, ou seja, os pesos diferem por uma soma de raízes.

Existe um estado, chamado de *estado de peso máximo*, tal que:

$$E_\alpha |\lambda\rangle = 0 \tag{1.25}$$

Todos os estados da base podem ser obtidos a partir deste estado de peso máximo pela atuação de steps com raízes negativas. É um resultado conhecido que existe uma única representação irredutível de uma álgebra de Lie compacta com estados de peso máximo $|\lambda\rangle$ para cada λ. Logo, representações irredutíveis podem ser rotuladas por seu peso máximo, D^λ.

Uma *representação fundamental* é aquela em que o peso máximo é um peso fundamental. Logo, o número de representações fundamentais de uma álgebra de Lie compacta semi-simples é igual ao seu rank. Denota-se ainda *representação adjunta* aquela em que o peso máximo é a maior raiz positiva.

3.4 Álgebras de Kac-Moody Afins

A matriz de Cartan também permite verificar se uma álgebra fecha com um número finito de geradores. Até agora foram discutidas álgebras finitas, que se caracterizam por matrizes de Cartan não-singulares. Mas é possível que $det\hat{K} = 0$, e nesse caso a álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ fecha somente com um número infinito de geradores; a álgebra é dita infinita.

Considerando uma gradação de uma álgebra infinita tal que

$$\bullet \qquad \hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_n \hat{\mathcal{G}}_n \qquad [\hat{\mathcal{G}}_n, \hat{\mathcal{G}}_m] \subset \hat{\mathcal{G}}_{n+m} \tag{1.26}$$

Victor Kac e Robert Moody [9] classificaram as álgebras infinitas nas situações em que a dimensão do subespaço $\mathcal{G}_n$ não cresce exponencialmente com n, mas, sim, polinomialmente: $dim\ \hat{\mathcal{G}}_n \sim n^k$ (o valor k+1 é o chamado *growth* da álgebra, e é infinito caso a dependência seja exponencial). Estas constituem as álgebras de Kac-Moody afins.

Na verdade, é possível associar uma álgebra de Lie afim a cada álgebra de Lie simples finita. Neste processo de afinização, parte-se da matriz de Cartan de uma álgebra de Lie simples e finita, com determinante não-nulo. Acrescentando-se uma linha e uma coluna a ela obtém-se a matriz $\hat{K}$, com determinante nulo, conforme descrito na seqüência.

De acordo com o que foi exposto anteriormente, pode-se expandir uma raiz da álgebra de Lie finita como uma combinação de raízes simples com coeficientes positivos (1.11). Em particular, existe uma única raiz, $\alpha = \psi$ que é a mais alta no sentido em que sua altura, $h(\psi) = \sum_{a=1}^{r} m_a^{\psi}$, é máxima. O negativo dessa raiz, $\alpha_0 \equiv -\psi$, é então acrescido ao conjunto de raízes simples , de forma que o número de geradores aumenta de $3r$ para $3(r+1)$ e a dimensão da matriz de Cartan passa a ser $r+1$. Assim, a linha e a coluna inseridas estão associadas a uma raiz, ψ, que é combinação linear das outras raízes. Logo, seu determinante se anula e a matriz $\hat{K}$ é singular.

Com isso, obtém-se uma matriz de Cartan que admite um vetor nulo à esquerda e um vetor nulo à direita:

$$\sum_{i=0}^{r} m_i^{\psi} \hat{K}_{ij} = 0 \qquad \sum_{i=0}^{r} \hat{K}_{ij} l_j^{\psi} = 0 \tag{1.27}$$

com $i, j = 0, 1, 2, ..., r$, e as normalizações dos vetores tais que $min\{m_i^{\psi}\} = 1$ e

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$min\{l_j^\psi\} = 1$. Mostra-se também que as componentes de tais vetores são os coeficientes das seguintes expansões da raiz mais alta em termos das raízes simples:

$$\psi = \sum_{a=1}^{r} m_a^\psi \alpha_a \qquad \frac{\psi}{\psi^2} = \sum_{a=1}^{r} l_a^\psi \frac{\alpha_a}{{\alpha_a}^2} \tag{1.28}$$

Uma conseqüência da infinitude da álgebra é que existe um número infindável de geradores, e pode-se obter uma gradação da álgebra de forma que se associa um grau n aos geradores e escreve-se a base dessa álgebra como $T_a^n \equiv T_a \otimes z^n$.

É possível ainda que esses geradores sejam tais que sua estrutura se assemelhe muito à das álgebras de dimensão finita no que se refere às relações de comutação. Costuma-se expressar as relações de comutação de uma álgebra de Kac-Moody afim por

$$[T_a^m, T_b^n] = f_{ab}^c T_c^{m+n} + m\delta_{m+n,0} Tr(T_a T_b) C \tag{1.29}$$

onde C é o chamado *termo central*, que tem uma forma definida, $C \equiv l_i^\psi h_i = l_i^\psi H_i^0$, de modo a comutar com todos os geradores da álgebra sendo, pois ,único, a menos de multiplicação por um escalar:

$$[C, T_a^n] = 0 \tag{1.30}$$

A introdução desse novo elemento altera de maneira significativa a estrutura algébrica. No caso em que $C = 0$, tem-se o que se chama de álgebra de *loop*, ou de laços, na qual a álgebra infinita é composta por infinitas cópias da álgebra semi-simples associada. Na teoria quântica dos campos, a álgebra de Kac-Moody surge naturalmente com termo central proporcional a $\hbar^2$, que desaparece no limite clássico [10].

Em geral, é conveniente introduzir também um gerador D que atua como $z\frac{d}{dz}$ e mede o índice dos geradores:

$$[D, T_a^n] = nT_a^n \qquad [D, C] = 0 \tag{1.31}$$

Para que se determine explicitamente as relações de comutação em termos de operadores step e geradores da CSA, deve-se conhecer os traços entre os geradores, que na base de Weyl-Cartan são dados por

$$Tr(H_i H_j) = \delta_{ij}; \quad Tr(H_i E_\alpha) = 0; \quad Tr(E_\alpha E_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha^2}; \quad Tr(E_\alpha E_\beta) = 0 \tag{1.32}$$

$$Tr(CT_a^n) = 0; \quad Tr(DT_a^n) = 0; \quad Tr(C^2) = 0; \quad Tr(CD) = 1 \tag{1.33}$$

Com isso, as relações de comutação para a álgebra afim na base de Chevalley são as seguintes:

•

$$[\alpha \cdot H^m, \beta \cdot H^n] = \alpha \cdot \beta \, m\delta_{m+n,0} C \tag{1.34}$$

$$[\alpha \cdot H^m, E_\beta^n] = \alpha \cdot \beta \, E_\alpha^{m+n} \tag{1.35}$$

$$[E_\alpha^m, E_{-\alpha}^n] = \alpha \cdot H^{m+n} + m\delta_{m+n,0} C \tag{1.36}$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}^{m+n}, \quad se \ \alpha + \beta \ for \ raiz \tag{1.37}$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = 0, \quad se \ \alpha + \beta \ nao \ for \ raiz \tag{1.38}$$

Note que a CSA é gerada pelos operadores $\alpha \cdot H^n$ com grau nulo, além do termo central e da derivação: $\hat{H}^0 = (H^0, C, D)$. Por outro lado, os operadores $\alpha \cdot H^n$ com grau não-nulo passam a ser operadores step, associados à raiz

$$n\delta = (0, 0, n) \tag{1.39}$$

denominada *light-like* e os $E_\alpha^n \equiv E_{\hat{\alpha}}$ são operadores step com raízes *space-like*

$$\hat{\alpha} = (\alpha, 0, n) \tag{1.40}$$

O elemento $\hat{H}^0 = (H^0, C, D)$ serve também para definir os pesos da álgebra afim como sendo seus autovalores $\hat{\mu} = (\mu, \mathcal{C}, \mathcal{D})$:

$$(H^0, C, D)|\mu, \mathcal{C}, \mathcal{D}\rangle = (\mu, \mathcal{C}, \mathcal{D})|\mu, \mathcal{C}, \mathcal{D}\rangle \tag{1.41}$$

e os pesos fundamentais satisfazem

$$\frac{2\hat{\alpha}_i \cdot \hat{\lambda}_i}{\alpha_i^2} = \delta_{ij} \tag{1.42}$$

Além da derivação D, existe uma outra maneira de se graduar a álgebra, pelo uso do chamado *operador de gradação* da subálgebgra principal, que é apenas uma combinação dos geradores da CSA, do centro e da própria derivação:

$$Q = \sum_{a=1}^{r} \lambda_a \cdot H^0 + hD + \sigma C \tag{1.43}$$

onde h é o chamado *número de Coxeter* $h = \sum_{i=0}^{r} m_i^{\psi}$, sendo em geral equivalente à altura da álgebra acrescida de uma unidade, $h = h(\psi) + 1$. O termo central aparece apenas para normalizar o traço, sendo irrelevante para a ação adjunta.

É conveniente fazer a escolha das constantes multilpicativas de forma a valer:

$$Tr(QC) = h \qquad Tr(Q^2) = 0 \tag{1.44}$$

3.5 Operadores de Vértice

A teoria de representação das álgebras de Lie afins está intimamente relacionada também com a teoria quântica de campos [11], o mesmo não ocorrendo com as álgebras de Lie comuns. A construção das representações também é diferente em cada caso.

Para uma álgebra de Kac-Moody existem diferentes maneiras de realizá-la em termos de operadores que satisfaçam as relações de comutação vistas há pouco. Uma representação para essas álgebras surge naturalmente, por exemplo, quando se estuda um modelo de férmions livres bidimensional: os modos na expansão de Laurent das correntes de Noether desse modelo obedecem as relações de comutação desejadas.

Há, contudo, uma maneira mais geral de se obter uma representação para as álgebras de Kac-Moody em termos de operadores que podem ser tanto bosônicos quanto fermiônicos. Esta construção se baseia no operador de campo do sóliton, devido a Skyrme, ou equivalentemente, ao operador de vértice da teoria de cordas. A idéia consiste em obter operadores de criação e destruição e expandir os geradores da álgebra

em termos desses osciladores, que por sua vez atuarão num espaço de Fock construído a partir de um estado de vácuo.

A chamada representação homogênea da álgebra está baseada nos operadores de vértice de Fubini-Veneziano, em que os modos pertencem à subálgebra de Heisenberg homogênea, que corresponde os geradores H_i^m e H_i^{-m} da CSA, na base de Weyl-Cartan. Realmente, eles se comportam como osciladores harmônicos independentes:

$$[H_i^m, H_j^n] = m\delta_{m+n,0}\delta_{ij}C \tag{1.45}$$

Pode-se introduzir uma função geratriz aos geradores da álgebra afim: $T_a(z) = \sum_n T_a^{-n} z^n$, de modo que os geradores da CSA

$$H_i(z) = H_i^0 + \sum_{n>0} \left(H_i^n z^{-n} + H_i^{-n} z^n\right) \tag{1.46}$$

são relacionados ao *campo de momenta de Fubini-Veneziano*:

$$P_i(z) = p_i + \sum_{n>0} \left(\alpha_i^n z^{-n} + \alpha_i^{-n} z^n\right) \tag{1.47}$$

que, por sua vez, permite definir o *campo de coordenadas de Fubini-Veneziano*, $Q_i(z)$, através de $P_i(z) = \imath z \frac{dQ_i}{dz}$, resultando em

$$Q_i(z) = q_i + \imath p_i \ln z + \imath \sum_n \frac{\alpha_i^n}{n} z^{-n} \tag{1.48}$$

com q_i uma constante de integração tomada como sendo canonicamente conjugada a p_i: $[q_i, p_i] = \imath\delta_{ij}$. Ressalta-se aqui que, conforme esperado $[\alpha_i^m, \alpha_j^n] = m\delta_{m+n,0}\delta_{ij}$.

Como o espaço dos estados considerado é um espaço de Fock construído pelos estados que são simultaneamente vácuo dos osciladores e que carregam momentum nulo, temos:

$$\alpha_i|0\rangle = 0 \qquad p_i|0\rangle = 0 \tag{1.49}$$

Denotando o autoestado e o autovalor de p_i de acordo com

$$p_i|\lambda\rangle = \lambda_i|\lambda\rangle \tag{1.50}$$

vê-se que o operador $e^{\imath\lambda\cdot q}$ cria momentum λ: $e^{\imath\lambda\cdot q}|0\rangle = |\lambda\rangle$.

As condições (1.51) remetem a uma representação de peso máximo e torna natural definir um ordenamento normal:

$$: \alpha_i^n \alpha_j^m := \alpha_i^n \alpha_j^m, \quad m > 0 \tag{1.51}$$

$$: \alpha_i^n \alpha_j^m := \alpha_j^m \alpha_i^n, \quad m < 0 \tag{1.52}$$

$$: p_i q_j := q_j p_i \qquad : q_i p_j := q_i p_j \tag{1.53}$$

É instrutivo mostrar explicitamente as divergências que o ordenamento normal evita no produto dos operadores de Fubini-Veneziano:

$$P_i(z)Q_j(w) =: P_i(z)Q_j(w) : -\imath\delta ij\frac{z}{z-w}, \quad |z| > |w| \tag{1.54}$$

$$P_i(z)P_j(w) =: P_i(z)P_j(w) : +\imath\delta ij\frac{wz}{z-w}, \quad |z| > |w| \tag{1.55}$$

O operador de vértice é , então , definido por

$$U^\alpha(z) = z^{\frac{\alpha^2}{2}} : e^{\imath\alpha\cdot Q(z)} : \tag{1.56}$$

onde o ordenamento normal dos operadores de criação e destruição garante que os elementos de matriz serão finitos no espaço de Fock. Ademais, note que a univocidade do operador com relação à variável z está vinculada à condição : $p\cdot\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \in \mathbb{Z}$.

Uma propriedade do operador de vértice é criar momentum α:

$$[p_i, U^\alpha(z)] = \alpha_i U^\alpha(z) \tag{1.57}$$

Pela semelhança desta equação com $[H_i^m, E_\alpha^n] = \alpha_i E_\alpha^{m+n}$ percebe-se a proximidade de uma representação para a álgebra em termos do operador de vértice. De fato, com a univocidade do operador (1.56) na variável z, pode-se fazer uma expansão em série de Laurent:

$$U_\alpha(z) = \sum_m A_\alpha^m z^{-m} \tag{1.58}$$

Com os osciladores introduzidos obtêm-se relações de quase comutação, que podem ser recuperadas de modo a reproduzir as relações de comutação da álgebra.

O cálculo do produto de dois operadores de vértice de Fubini-Veneziano leva à seguinte expressão :

$$U^{\alpha}(z)U^{\beta}(w) =: U^{\alpha}(z)U^{\beta}(w) : \left(\frac{z-w}{z}\right)^{\alpha\cdot\beta} \tag{1.59}$$

que permite uma relevante conclusão , a de que o produto de dois operadores de vértice no mesmo ponto se anula.

Quando se trata de representações de nível 1 [12], é sempre possível escolher o módulo das raízes da álgebra igual a $\sqrt{2}$: $\alpha^2 = 2$; com isso, as singularidades em (1.59) são sempre isoladas e nunca pontos de ramificação. É possível escolher raízes com módulo unitário, mas nesses casos os operadores de vértice têm caráter fermiônico, satisfazendo relações de anticomutação.

Por outro lado, existe uma outra maneira de se construir operadores de vértice, usando-se a representação principal, associada à subálgebra de Heisenberg principal. Esta subálgebra alternativa é interessante pois os potenciais de vácuo dos modelos de Toda podem ser expressos em termos de seus geradores.

Em se tratando de representações de níveis mais altos, sabemos que estas podem ser construídas pelo produto tensorial de representações de nível 1, desde que saibamos como os pesos se somam sob tais composições:

$$\mathbb{H}|\lambda\rangle \otimes |\lambda'\rangle = (H \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H)|\lambda\rangle \otimes |\lambda'\rangle = (\lambda + \lambda')|\lambda\rangle \otimes |\lambda'\rangle \tag{1.60}$$

o que nos possibilita introduzir a seguinte notação

$$|\lambda\rangle \otimes |\lambda'\rangle = |\lambda + \lambda'\rangle \tag{1.61}$$

sendo que os operadores que atuam nesse espaço vetorial têm a forma

$$\mathbb{V} = V \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes V \tag{1.62}$$

Logo, numa representação de nível 2 ($x_i = \mathcal{C}_i = 2$), por exemplo, temos:

$$|\lambda_i\rangle = |\lambda_i, 2, 0\rangle = |\lambda_i, 1, 0\rangle \otimes |0, 1, 0\rangle \tag{1.63}$$

desde que os estados de fato existam na representação.

Assim, é fácil ver que $\mathbb{V}^2 = 2V \otimes V \neq 0$, mas

$$\mathbb{V}^3 = 0 \tag{1.64}$$

Isso garante a nilpotência da álgebra em qualquer representação, muito importante para a construção de sólitons.

Esta seção não pode ser encerrada sem que antes seja enfatizada a importância de métodos algébricos na construção de modelos integráveis. Para a melhor compreensão, torna-se mister estudar questões relacionadas às simetrias de um modelo.

Capítulo 2

Integrabilidade

1 Quantidades Conservadas

Em Mecânica Clássica [13] surge o importante conceito de integrabilidade. Um sistema associado a um espaço de fase de dimensão $2n$ é dito integrável pelo critério de Liouville se forem conhecidas n quantidades $F_i = F_i(p, q)$ conservadas

$$\{H, F_i\}_{PB} = 0 \tag{2.1}$$

em *involução* no espaço de fase:

$$\{F_i, F_j\}_{PB} = 0 \tag{2.2}$$

De acordo com o teorema de Liouville, pode-se construir uma transformação canônica $(p_i, q_i) \longrightarrow (F_i, \omega_i)$ tal que as quantidades conservadas estão entre as novas variáveis, chamadas de *ângulo* e *ação*. A solução do modelo pode então ser obtida por *quadraturas*, resolvendo-se um número finito de equações algébricas e de integrais.

Porém, não é fácil encontrar as simetrias relacionadas às leis de conservação. Ademais, mesmo nas situações em que se pode aplicar o teorema discutido, encontrar a transformação canônica que leva às variáveis de ângulo-ação é uma tarefa difícil.

Sob determinadas condições é possível não apenas garantir a existência de grandezas conservadas mas, também, construí-las, conduzindo à integrabilidade do modelo.

Já foi dito que as simetrias apresentam um papel fundamental na análise de sistemas físicos pois permitem restringir o espaço de fase do problema, conseqüentemente facilitando sua solução. Deveras, esse é um corolário importante do *teorema*

de Noether, que diz que se encontrarmos uma simetria global da ação associada ao sistema, então deve existir uma carga conservada. Entretanto, há situações em que um número infinito de quantidades conservadas podem ser encontrado mesmo que nenhuma simetria da lagrangeana esteja associada.

Teremos interesse em estudar tais simetrias escondidas do modelo. Elas ocorrem sempre que for possível expressar as equações do modelo de interesse na forma da chamada *equação de Lax*:

$$\frac{d}{dt}L = [M, L] \tag{2.3}$$

em que os operadores M, L são mapeamentos do espaço de fase numa álgebra de Lie.

As cargas conservadas podem ser construídas tomando-se o traço das potências de L, pois:

$$\frac{d}{dt}Tr\left(L^n\right) = Tr\left(\frac{d}{dt}L^n\right) = Tr([M, L^n]) = 0 \tag{2.4}$$

sendo que $n = 1, ..., N$ e N é a dimensão da representação das matrizes L e M. Logo, essa estrutura algébrica está intimamente relacionada à existência de N quantidades conservadas, que por sua vez permitem a integrabilidade da teoria. Sabe-se, inclusive, que a maior parte dos modelos que apresentam soluções solitônicas admitem uma representação na forma da equação de Lax.

1.1 Curvatura Nula

Embora a equação de Lax surja originalmente no contexto de um sistema de N partículas, pode-se usar uma formulação equivalente para teorias de campo, por exemplo, em $1 + 1$ dimensões. Assim, atinge-se uma generalização da equação de Lax conhecida como *equação de Zakharov-Shabat* ou *condição de curvatura nula*:

$$F_{\mu\nu} \equiv [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0 \tag{2.5}$$

onde $\mu, \nu = \pm$ e os termos A_μ correspondem a representações matriciais de uma álgebra de Lie, e os índices estão relacionados às *variáveis do cone de luz*:

$$x_\pm = t \pm x \qquad \partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_t \pm \partial_x) \tag{2.6}$$

Esta expressão, (2.5), pode ser interpretada como uma condição de compatibilidade para o sistema linear

$$(\partial_\mu + A_\mu)U = 0 \tag{2.7}$$

onde U é uma matriz não singular.

Uma característica importante da curvatura nula, e que permite uma generalização desta condição de integrabilidade para sistemas em dimensões mais altas [14], é que ela é uma lei de conservação no sentido em que a exponencial da integral de caminho da conexão A_μ ordenada ao longo de uma curva fechada independe do caminho. Mas, para que isso fique claro, existem alguns conceitos que precisam ser melhor compreendidos.

A equação (2.7) induz uma transformação

$$\bar{U}(x^\mu + dx^\mu) = (1 - A_\mu(x)dx^\mu)U(x) \tag{2.8}$$

gerada pelo que é conhecido como operador de *transporte paralelo*. A notação $\bar{U}(x^\mu + dx^\mu)$ foi usada para distingüí-la de $U(x^\mu + dx^\mu) = U(x^\mu) + \partial_\mu U(x^\mu)dx^\mu$.

A relevância deste conceito ocorre porque a diferença $U(x+dx) - \bar{U}(x+dx)$ relaciona a função avaliada em pontos distintos de maneira covariante, introduzindo a *derivada covariante*:

$$D_\mu U(x) = (\partial_\mu + A_\mu)U(x) \tag{2.9}$$

que recebe este nome pois a derivada de $U(x)$ se transforma como o próprio $U(x)$: $D_\mu U(x) \longrightarrow g(x)D_\mu U(x)$. Com isso a curvatura nula está relacionada ao sistema invariante $D_\mu U(x) = 0$.

Além disso, quando uma transformação local é aplicada sobre U, $U(x) \longrightarrow g(x)U(x)$, de forma que em pontos distintos do espaço-tempo o campo se altera de maneira diferente, a conexão se comporta como:

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \tag{2.10}$$

Logo, a ação do elemento de grupo g sobre U ocasiona uma transformação de gauge, (2.10), sobre os potenciais. Fica claro, pois, que a condição de curvatura nula é invariante por transformações de gauge, uma vez mostrado que $F_{\mu\nu} \longrightarrow gF_{\mu\nu}g^{-1}$.

Com o intuito de entender a curvatura nula como uma lei de conservação, observe que a solução formal para o operador de transporte paralelo definido em (2.7) é :

$$U(\sigma) = \mathcal{P}\exp\left(-\int_{\Gamma} d\sigma \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} A_{\mu}\right) \tag{2.11}$$

onde $\mathcal{P}$ representa um ordenamento de caminho de integração Γ, que por sua vez é parametrizada por σ.

Fazendo-se na equação uma variação da curva tal que o ponto final σ é fixo, encontra-se:

$$\delta U(\sigma) = -U(\sigma)\int_{0}^{\sigma} d\sigma' U(\sigma')^{-1} F_{\mu\nu} U(\sigma') \frac{dx^{\lambda}}{d\sigma'} \delta x^{\mu}(\sigma') \tag{2.12}$$

Logo, se $F_{\mu\nu} = 0$, então $U(\sigma)$ independe do caminho. Como a construção de cargas conservadas está relacionada com o fato de podermos integrar a conexão ordenada por qualquer caminho que tenha os mesmos pontos extremos, pode-se fazer uma *decomposição de Gauss* do elemento de grupo U. De fato, escolhendo-se dois caminhos diferentes, $(0 \rightarrow I \rightarrow II)$ e $(0 \rightarrow III \rightarrow II)$, mostrados na Figura 2.1, tem-se, respectivamente:

$$U(x,t) = U_0 \exp\left(-\int_{III}^{II} dx_- A_-\right) \exp\left(-\int_{0}^{III} dx_+ A_+\right) \tag{2.13}$$

e

$$U(x,t) = U_0 \exp\left(-\int_{I}^{II} dx_+ A_+\right) \exp\left(-\int_{0}^{I} dx_- A_-\right) \tag{2.14}$$

Ou seja, o elemento de grupo é escrito como a decomposição em subgrupos que são a exponenciação de geradores de graus positivos e negativos; e de duas maneiras diferentes.

E se U independe do caminho, as cargas conservadas são tomadas como sendo os traços $Tr(U^N)$ e podem, em alguns casos, ser feitas locais através de uma transformação de gauge que torne A_{μ} em diagonal, $A_{\mu} \longrightarrow a_{\mu} = \bar{g} A_{\mu} \bar{g}^{-1} - \partial_{\mu}\bar{g}\bar{g}^{-1}$ de modo que $j^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu} a_{\nu}$.

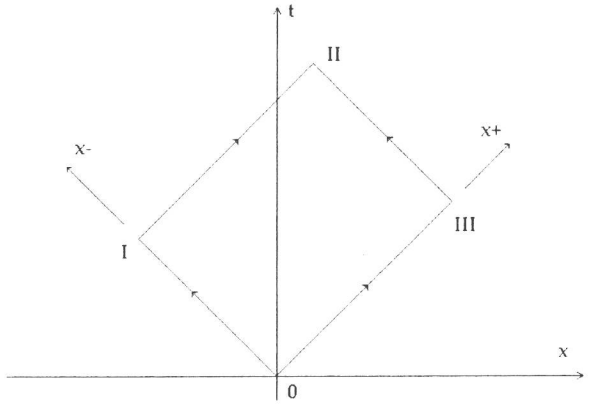

Figura 2.1: Caminhos de integração usados nas expressões (2.13) e (2.14).

O modelo CP^1 em $(2+1)$ dimensões, as teorias de Yang-Mills auto-duais e a equação de Bogomolny em $(3+1)$ dimensões são exemplos de teorias que possuem uma representação de suas equações de movimento em termos da condição de curvatura nula.

2 Modelos Integráveis

A formulação que acaba de ser apresentada é extremamente importante para a construção de soluções do tipo sóliton, que aparecem em diversos modelos exatamente solúveis, incluindo a equações de Schrödinger não-linear, de Korteweg-de Vries, e ainda os modelos de Toda, que serão abordados neste trabalho.

2.1 Modelos de Toda

A rede de Toda é um modelo simples para cristais unidimensionais não-lineares que descreve o movimento de cadeias de partículas que interagem com seus vizinhos próximos. Como descoberto por Toda, este sistema se torna particularmente interessante no caso de uma força restauradora proporcional à exponencial da elongação, o que é comumente suposto de maneira implícita. Nesse regime, o sistema apresenta uma solução analítica encontrada após uma mudança de variáveis e a introdução da chamada *função τ de Hirota.*

Três ingredientes são fundamentais à construção dos modelos de Toda: uma álgebra $\mathcal{G}$, uma gradação Q desta álgebra, e elementos constantes $\Lambda_{\pm}$ que vivem nas subálgebras $\mathcal{G}_{\pm}$ associadas a graus positivo e negativo. As equações de campo de Toda em duas dimensões (1 espacial e 1 temporal) podem então ser obtidas como uma condição de curvatura nula associada a determinados potenciais:

$$A_+ = -B\Lambda^+B^{-1} \qquad A_- = \Lambda^- - \partial_- BB^{-1} \tag{2.15}$$

em que $B \in e^{\mathcal{G}_0}$ é o elemento de um grupo relacionado a uma subálgebra de grau zero, e $\Lambda_{\pm} \in \mathcal{G}_{\pm}$ determinam as propriedades do modelo.

Levando os potenciais acima na condição de curvatura nula,
$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0$, obtém-se a seguinte equação de movimento:

$$\partial_+(\partial_- BB^{-1}) + [B\Lambda^+B^{-1}, \Lambda^-] = 0 \tag{2.16}$$

A determinação das conexões (2.15) apresenta uma arbitrariedade muito semelhante à que ocorre no Eletromagnestismo, em que a teoria é invariante por uma transformação de gauge. Escolhendo-se, por exemplo, o elemento de grupo como sendo $g = B^{-\frac{1}{2}}$, obtêm-se potenciais de certa forma mais simétricos:

$$\tilde{A}_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\partial_{\pm}BB^{-1} \pm B^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\pm}B^{-\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

Se for considerado o mapeamento exponencial $B = e^{\varepsilon\zeta_i T_i}$, onde T_i é base da álgebra de B, pode-se fazer a linearização $B = 1 + \varepsilon\zeta_i T_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ e obter

$$\partial_+\partial_-\zeta_i T_i + [\Lambda^-, [\Lambda^+, T_i]]\zeta_i = 0 \tag{2.18}$$

desde que $[\Lambda^+, \Lambda^-] \sim C$, o que permite interpretar a massa do modelo como dada por $m^2 = 4\lambda$, com λ proveniente da equação de autovalor

$$[\Lambda^-, [\Lambda^+, T]] = \lambda T. \tag{2.19}$$

Consideramos a seguir os diferentes tipos de modelos de Toda. Os mais simples são os **Modelos de Toda Conformes (CT)**, também conhecidos pelo termo *Toda molecule* (TM). Eles são modelos exatamente integráveis com invariância conforme associados a álgebras de Lie semi-simples. São obtidos fazendo-se a particular escolha:

$$B = e^{\varphi_a h_a} \qquad \Lambda^+ = q_+\sum_{a=1}^{r} e_a^+ \qquad \Lambda^- = q_-\sum_{a=1}^{r} e_a^- \tag{2.20}$$

onde os elementos h_a e $e_a^{\pm}$ são os geradores vistos na subseção 3.2, e $q_{\pm}$ são fatores de acoplamento. Os potenciais (2.15) desta classe de modelos são , portanto:

$$A_+ = -q_+\sum_a e_a^+ e^{K_{ab}\varphi_b} \qquad A_- = -\partial_-\varphi_a h_a + q_-\sum_a e_a^- \tag{2.21}$$

De acordo com o que foi discutido acima, os campos do modelo são descritos por

$$\partial_+\partial_-\varphi_a + q_+q_-e^{K_{ab}\varphi_b} = 0 \tag{2.22}$$

Dessa forma, as matrizes de Cartan desempenham um papel direto nessa classe de modelos, fornecendo uma maneira de se construir equações, cujas simetrias podem ser investigadas pela análise dos diagramas de Dynkin correspondentes [15, 16].

Neste caso, as matrizes de Cartan não são singulares ($det\ K \neq 0$), e não possuem vetor nulo, i.e, não existe um vetor v tal que $\sum_{a=1}^{r} v_a K_{ab} = 0$. Pode-se entretanto definir um vetor ρ,

$$\rho_b = \sum_{a=1}^{r} K_{ba}\varphi_a \tag{2.23}$$

que possibilita reescrever (2.22) da seguinte forma:

$$\partial_+\partial_-\rho_a + q_+q_- \sum_{b=1}^{r} K_{ab}e^{\rho_b} = 0 \tag{2.24}$$

No caso das equações originais de Toda representam o deslocamento relativo dos pontos numa rede linear infinita, a matriz de Cartan associada é aquela do grupo $SU(r+1)$, no limite $r \longrightarrow \infty$.

A invariância conforme deste modelo, relacionada ao fato de os campos aqui não possuírem massa, em duas dimensões pode ser representada por $x_+ \longrightarrow \tilde{x_+} = f(x_+)$ e $x_- \longrightarrow \tilde{x_-} = g(x_-)$, que devem ser acompanhadas da seguinte transformação dos campos:

$$e^{-\varphi_a} \longrightarrow e^{-\tilde{\varphi}_a} = (f')^{\sum_{b=1}^{r} K_{ab}^{-1}} (g')^{\sum_{b=1}^{r} K_{ab}^{-1}} e^{-\varphi_a} \tag{2.25}$$

Já os **modelos de Toda afins (AT)**, também conhecido como *Toda lattice* (TL), podem ser considerados como uma deformação dos modelos CT de tal modo que, embora a simetria conforme seja quebrada, a integrabilidade permanece. Neste caso, trabalha-se com uma álgebra de Kac-Moody afim (daí o nome), em que a matriz de Cartan é singular, logo não inversível, e admite um vetor nulo à direita:

$$\sum_{i=0}^{r} \hat{K}_{ij} l_j = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C \equiv l_\mu^\vee H_\mu^0 = 0 \tag{2.26}$$

e os geradores H_μ^0 são linearmente dependentes. Isso ocorre pois a matriz de Cartan, como discutido, foi acrescida de uma linha e uma coluna referentes a uma raiz que é combinação linear das raízes simples.

Outra diferença com relação aos modelos CT reside na definição dos elementos da álgebra que vão definir os potenciais de gauge:

$$B = e^{\varphi_a h_a} \qquad \Lambda^+ = q_+ \sum_{i=0}^{r} \sqrt{l_i^\psi} e_i^+ \qquad \Lambda^- = q_- \sum_{i=0}^{r} \sqrt{l_i^\psi} e_i^- \tag{2.27}$$

Substuindo tais expressões em (2.16), obtem-se

$$\partial_+\partial_-\varphi_a + q_+q_-l_a^{\psi}(e^{K_{ab}\varphi_b} - e^{\hat{K}_{ob}\varphi_b}) = 0 \tag{2.28}$$

que é a equação de movimento para os modelos de Toda afim. Note que $\varphi = 0$ é uma solução trivial e que o modelo não é invariante conforme; para que tal simetria seja imposta ao sistema, a subálgebra de grau zero deve ser extendida.

Como os sólitons são soluções que interpolam diferentes vácuos, os modelos CT não apresentam tais soluções pois não existe um vácuo finito, diferentemente do que ocorre para os modelos AT. Logo, é de interesse obter modelos que apresentem sólitons mas que ainda sejam invariantes por transformações conformes, o que é conseguido pela introdução de dois novos campos, relacionados à adição de extensões à álgebra de laços, responsáveis pela integrabilidade dos modelos AT.

Dessa maneira, se constrõem os **modelos de Toda Afins Conformes (CAT)**, ou *generalized Toda lattice* (GTL), pela introdução dos elementos

$$B = e^{\varphi_a h_a + \nu C + \eta Q} \qquad \Lambda_+ = q_+ \sum_{i=0}^{r} \sqrt{l_i^{\psi}} e_i^+ \qquad \Lambda^- = q_- \sum_{i=0}^{r} \sqrt{l_i^{\psi}} e_i^- \tag{2.29}$$

sendo que se tem agora um termo central não-nulo, $C \equiv l_\mu^{\psi} h_\mu \neq 0$, e Q é uma combinação dos geradores da subálgebra de Cartan e do operador *derivação*, visto em (1.43). Além da equação para os campos de Toda φ de interesse, temos também expressões que governam o movimento dos campos secundários ν e η.

A propriedade $[\Lambda_+, \Lambda_-] = C$ garante que os potenciais de vácuo podem ser escritos em termos de uma subálgebra abeliana a menos de termos centrais.

Os operadores step que compõem $\Lambda_\pm$ vivem limitados às álgebras $\mathcal{G}_{\pm 1}$, como se observa pelas seguintes relações:

$$[Q, h_a] = 0 \qquad [Q, C] = 0 \qquad [Q, e_i^\pm] = \pm e_i^\pm \tag{2.30}$$

O operador Q, além de medir o grau dos elementos da álgebra, está relacionado com as transformações de Lorentz, que em duas dimensões, são representadas por

$$x_\pm \longrightarrow \lambda^{\mp} x_\pm \qquad \partial_\pm \longrightarrow \lambda^{\pm}\partial_\pm \tag{2.31}$$

Como os campos φ, ν, η são escalares, B é um escalar de Lorentz e as equações de movimento (2.16) são invariantes se $\Lambda^{\pm} \longrightarrow \lambda^{\pm}\Lambda^{\pm}$. Na verdade, as equações também manteriam sua forma se tivéssemos trivialmente $\Lambda^{\pm}$ invariantes. No entanto, como ele está relacionado com os potenciais chatos, é desejado que ele se comporte como um vetor. Note por fim que as transformações de Lorentz em Λ podem ser implementadas pelo operador Q, $\partial_{\pm} \longrightarrow \lambda^{Q}\Lambda^{\pm}\lambda^{-Q}$.

A invariância de Lorentz dos modelos de Toda abrem uma possibilidade de interpretar os sólitons do modelo como partículas. Existem inclusive indícios de que haja uma dualidade que relacione o espectro quântico das teorias de campos aos sólitons clássicos, que em $3+1$ dimensões generaliza a dualidade eletromagnética e associa monopolos a partículas de gauge [17].

2.2 Modelos de Toda acoplados a campos de matéria (MCAT)

A abordagem dos modelos de Toda permite ainda a discussão de um caso mais geral em que os potenciais de gauge que definem o modelo tomam valores não apenas em subálgebras com graus $0, \pm 1$ como nos modelos de Toda usuais, mas também têm componentes em auto-subespaços com graus variando de $-l$ a l (com l um inteiro positivo). Assim, temos campos nos auto-subespaços $\mathcal{G}_{\pm 2}, ..., \mathcal{G}_{\pm(l-1)}$. Como veremos os novos campos introduzidos são campos de matéria que se acoplam aos campos de gauge de Toda originais.

Os potenciais (2.15) têm $B \in e^{\hat{\mathcal{G}}_0}$ como sendo um elemento do grupo associado à subálgebra de grau zero, e $\Lambda_{\pm}$ são mapeamentos em $\bigoplus_{n=1}^{l} \hat{\mathcal{G}}_{\pm n}$:

$$\Lambda^{\pm} = E_{\pm l} + \sum_{m=1}^{l-1} \Lambda_m^{\pm} \tag{2.32}$$

sendo que $E_{\pm l}$ são elementos das álgebras $\hat{\mathcal{G}}_{\pm l}$ independentes dos campos que determinam as propriedades do modelo, enquanto que nas direções de $\hat{\mathcal{G}}_{\pm m}$, com $1 < m < l$, são incluídos novos campos, ψ:

$$\Lambda_m^{\pm} = \sum_n \psi_{\pm}^n T_n^{\pm m} \tag{2.33}$$

onde $T_n^{\pm m} \in \mathcal{G}_{\pm}$, e $A_{\pm}$ toma valores em $\bigoplus_{n=0}^{l} \hat{\mathcal{G}}_{\pm n}$.

O modelo é então feito invariante conforme pela introdução dos campos nas direções do termo central C e do operador de gradação Q, obtido a partir da derivação, D, da maneira discutida na seção anterior.

Levando-se (2.15) na condição de curvatura nula (2.5), o que se encontra é um conjunto de equações:

$$\partial_+(\partial_- B B^{-1}) = [E_{-l}, B E_{+l} B^{-1}] + \sum_{n=1}^{l-1} [\Lambda_n^-, B \Lambda_n^+ B^{-1}] \tag{2.34}$$

$$\partial_- \Lambda_m^+ = [E_l, B^{-1} \Lambda_{l-m}^- B] + \sum_{n=1}^{l-m-1} [\Lambda_{n+m}^+, B^{-1} \Lambda_n^- B] \tag{2.35}$$

$$\partial_+ \Lambda_m^- = -[E_{-l}, B \Lambda_{l-m}^+ B^{-1}] - \sum_{n=1}^{l-m-1} [\Lambda_{n+m}^-, B \Lambda_n^+ B^{-1}] \tag{2.36}$$

Como Q e C estão em $\hat{\mathcal{G}}_0$, pode-se parametrizar B como $B = b e^{\eta Q} e^{\nu C}$, onde os campos η e ν são os campos responsáveis por tornar o sistema invariante conforme, b é um mapeamento no subgrupo de $\hat{G}_0$ gerado pelos demais elementos de $\hat{\mathcal{G}}_0$, isto é , os elementos H_a^0 da CSA.

Sob uma transformação conforme, em que $x_+ \longrightarrow f(x_+)$ e $x_- \longrightarrow g(x_-)$, com f e g funções analíticas, as equações dos campos são invariantes desde que estes se transformem como

$$b(x_+, x_-) \longrightarrow \tilde{b}(\tilde{x_+}, \tilde{x_-}) = b(x_+, x_-) \tag{2.37}$$

$$e^{\nu(x_+, x_-)} \longrightarrow e^{\tilde{\nu}(\tilde{x_+}, \tilde{x_-})} = (f')^{\delta} (g')^{\delta} e^{\nu(x_+, x_-)} \tag{2.38}$$

$$e^{l\eta(x_+, x_-)} \longrightarrow e^{l\tilde{\eta}(\tilde{x_+}, \tilde{x_-})} = \frac{1}{(f')} \frac{1}{(g')} e^{l\eta(x_+, x_-)} \tag{2.39}$$

com o parâmetro δ qualquer. Além disso, os novos campos devem se comportar como

$$\Lambda_m^+(x_+, x_-) \longrightarrow \tilde{\Lambda}_m^+(\tilde{x_+}, \tilde{x_-}) = (f')^{1-\frac{m}{l}} \Lambda_m^+(x_+, x_-) \tag{2.40}$$

$$\Lambda_m^-(x_+, x_-) \longrightarrow \tilde{\Lambda}_m^-(\tilde{x_+}, \tilde{x_-}) = (g')^{1-\frac{m}{l}} \Lambda_m^-(x_+, x_-) \tag{2.41}$$

Mas a simetria conforme não é a única apresentada pelo sistema. As equações de movimento também são invariantes sob

$$b(x_+, x_-) \longrightarrow k_L(x_-)b(x_+, x_-)k_R(x_+) \tag{2.42}$$

$$\Lambda_m^+(x_+, x_-) \longrightarrow {k_R}^{-1}(x_+)\Lambda_m^+(x_+, x_-)k_R(x_+) \tag{2.43}$$

$$\Lambda_m^-(x_+, x_-) \longrightarrow k_L(x_-)\Lambda_m^-(x_+, x_-){k_L}^{-1}(x_-) \tag{2.44}$$

com $k_L(x_-) \in K_0^L$ e $k_R(x_+) \in K_0^R$ satisfazendo $[k_R(x_+), E_l] = 0$ e $[k_L(x_-), E_{-l}] = 0$; como as transformações esquerda e direita comutam o grupo de gauge é $K_0^L \otimes K_0^R$.

Se K_0^L e K_0^R tiverem um conjunto comum de geradores, tem-se um subgrupo importante do grupo de gauge, $H_D \equiv K_0^L \bigcap K_0^R$, sendo uma transformação global, com os campos se transformando sob conjugação.

Com a intenção de se determinar as massas das partículas fundamentais, colocaremos as equações na forma de uma equação de Klein-Gordon. Para isso será feita uma aproximação linear e serão desprezados todos os termos de interação. Sabemos que a massa de um campo fixa uma escala na teoria impossibilitando que esta seja invariante conforme. Como os modelos CAT apresentam invariância conforme, como já discutido, o espectro de massa do sistema deveria ser contínuo ou então de massas nulas. Todavia, como o número de campos é finito, esperamos uma teoria massiva com espectro de massa discreto, que surge a partir deste modelo quando a simetria conforme observada é espontaneamente quebrada, ou seja, tomando-se uma escolha particular constante para o campo η; daí se diz que o fator e^{η} tem o papel de um campo de Higgs. Ademais, como a escolha $\eta = const$ gera um modelo AT a partir de um CAT, é possível encontrarmos uma transformação das coordenadas do espaço-tempo tal que para cada solução CAT no espaço-tempo (x_+, x_-) temos uma solução $(\hat{x}_+, \hat{x}_-)$.

Este modelo apresenta ainda uma corrente quiral conservada, obtida da seguinte maneira: multiplicamos as equações (2.35) e (2.36) por $z^{\mp 1}\Lambda_{h-m}$, somamos sobre m e tomamos o traço; em seguida, multiplicamos a equação com $\partial_{\mp}\Lambda_{h-m}^{\pm}$ por $z^{\mp 1}\Lambda_m^{\pm}$, somamos sobre m e tomamos o traço. Combinando-se ambas, temos:

$$\sum_m^{h-1} \partial_{\mp} Tr\left(z^{\mp 1}\Lambda_m^{\pm}\Lambda_{h-m}^{\pm}\right) = 2\sum_m^{h-1} Tr\left(z^{\pm}E_{\pm h}[\Lambda_m^{\pm}, B^{\mp 1}\Lambda_m^{\mp}B^{\pm 1}]\right) \tag{2.45}$$

Levando em conta ainda a equação (2.34), obtemos as seguintes correntes quirais:

$$\mathcal{J}^{\pm} \equiv Tr\left(z^{\pm 1}E_{\pm h}\partial_{\pm}BB^{-1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{m}^{h-1} Tr\left(z^{\mp 1}\Lambda_{m}^{\pm}\Lambda_{h-m}^{\pm}\right) \tag{2.46}$$

que satisfazem

$$\partial_{+}\mathcal{J}^{-} = 0 \qquad \partial_{-}\mathcal{J}^{+} = 0 \tag{2.47}$$

Como $z^{\pm 1}E_{\pm h} \in$ centro de $\hat{\mathcal{G}}_0$ comuta com os geradores que aparecem em B, pela propriedade cíclica do traço, vê-se que a corrente

$$\tilde{J}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}\sum_{m}^{h-1} Tr\left(z^{\mp 1}\Lambda_{m}^{\pm}\Lambda_{h-m}^{\pm}\right) = \sum_{m}^{h-1} Tr\left(z^{\pm}E_{\pm h}[\Lambda_{m}^{\pm}, B^{\mp 1}\Lambda_{m}^{\mp}B^{\pm 1}]\right) \tag{2.48}$$

também é conservada:

$$\partial_{\mu}\tilde{J}^{\mu} = \partial_{+}\tilde{J}^{+} + \partial_{-}\tilde{J}^{-} = 0 \tag{2.49}$$

Ademais, temos uma corrente topológica

$$\tilde{j}^{\pm} = Tr\left(z^{\pm 1}E_{\pm h}\partial_{\pm}BB^{-1}\right) \tag{2.50}$$

conservada, independentemente das equações de movimento:

$$\partial_{\mu}\tilde{j}^{\mu} = \partial_{+}\tilde{j}^{+} + \partial_{-}\tilde{j}^{-} = 0 \tag{2.51}$$

Com a notação adotada, temos:

$$\mathcal{J}^{\pm} = \mp(\tilde{J}^{\pm} - \tilde{j}^{\pm}) \tag{2.52}$$

Uma propriedade interessante pode ser vista ao vermos que sob uma transformação conforme as correntes quirais se comportam como

$$\mathcal{J}^{\pm}(x_{\pm}) \longrightarrow \frac{1}{f'(x_{\pm})}\left(\mathcal{J}^{\pm}(x_{\pm}) - \frac{1}{h}Tr(z^{\pm 1}E_{\mp h}Q)(\ln f'(x_{\pm}))'\right) \tag{2.53}$$

de modo que se $Tr(z^{\pm 1}E_{\mp h}Q) \neq 0$, dada uma solução qualquer do modelo, é sempre possível mapeá-la em outra que tenha $\mathcal{J}^{\pm} = 0$, e com isso

$$\tilde{J}^{\mu} = \tilde{j}^{\mu} \tag{2.54}$$

Esta propriedade é a responsável pelo mecanismo de confinamento a ser estudado adiante.

3 Construção de sólitons

Tendo estudado a formulação algébrica dos modelos de Toda, falta-nos determinar como usar a estrutura vista no sentido de construir soluções para estes modelos [18], dentre os quais o mais simples era o de Toda conforme (CT), que tem uma equação associada a uma álgebra simples.

Para isso nota-se que a curvatura nula garante a independência com relação ao caminho de integração do objeto:

$$U(x,t) = \mathcal{P}e^{-\int dx^{\mu} A_{\mu}} \tag{2.55}$$

onde $\mathcal{P}$ denota um ordenamento de caminho, que para fins de visualização é considerado aquele mostrado na Figura 3.

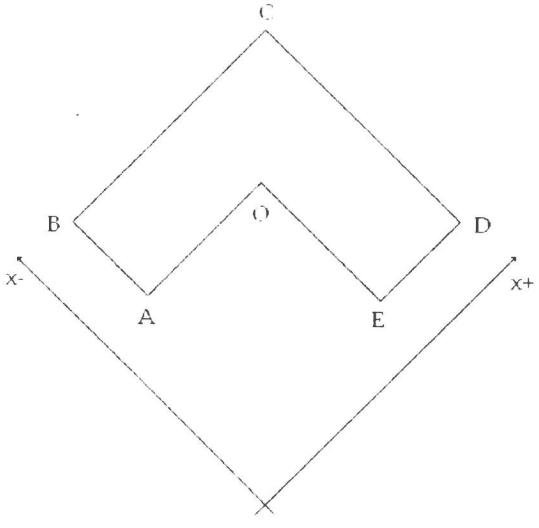

Figura 2.2: Contorno de integração em termos das coordenadas do cone de luz.

Tem-se, então , graças à independência do caminho, e em última instância à curvatura nula:

$$(\mathcal{P}e^{-\int_B^C dx^+ A_+})(\mathcal{P}e^{-\int_A^B dx^- A_-}) = (\mathcal{P}e^{-\int_D^C dx^- A_-})(\mathcal{P}e^{-\int_E^D dx^+ A_+})(\mathcal{P}e^{-\int_{AOE} dx^{\mu} A_{\mu}}) \tag{2.56}$$

Partindo-se dos potenciais de gauge

$$A_\pm = \pm\frac{1}{2}\partial_\pm\phi \pm e^{\pm\frac{\phi}{2}}\epsilon_\pm e^{\mp\frac{\phi}{2}} \qquad \epsilon_\pm = \sum_i \sqrt{l_i^\psi} E_{\pm\alpha_i} \tag{2.57}$$

satisfazendo $[\epsilon_+, \epsilon_-] = C$, é possível escolher um calibre (denotado por (1)) em que A_+ contenha apenas steps positivos e outro (denotado por (2)) em que A_- contenha apenas steps negativos:

$$A_+ \longrightarrow A_+^{(1)} = e^{\phi}\epsilon_+ e^{-\phi} \qquad A_- \longrightarrow A_-^{(2)} = e^{-\phi}\epsilon_- e^{\phi} \tag{2.58}$$

Usando esses novos potenciais e calculando-se a expressão (2.56) projetada num estado de peso máximo, $|\lambda\rangle$, que satisfaz

$$E_{\alpha_b}|\lambda\rangle = 0 \qquad E_{-\alpha_b}|\lambda\rangle = \delta_{ab}|\lambda - \alpha_a\rangle \tag{2.59}$$

é possível obter:

$$e^{-\lambda\phi(C)} = e^{-\lambda(\phi(D)+\phi(B))}\langle\lambda|U(x_+)V(x_-)|\lambda\rangle \tag{2.60}$$

com

$$U(x_+) = (\mathcal{P}e^{-\int_D^E dx^+ A_+^{(1)}})e^{-\frac{\phi(E)}{2}}(\mathcal{P}e^{-\int_{AOE} dx^\mu A_\mu})e^{-\frac{\phi(A)}{2}} \tag{2.61}$$

$$V(x_-) = (\mathcal{P}e^{-\int_A^B dx^- A_-^{(2)}})^{-1} \tag{2.62}$$

Porém ainda falta avaliar o produto $U(x_+)V(x_-)$. Para isso usemos o fato de que os elementos quirais satisafazem

$$\partial_+ U + A_+ U = 0 \qquad \partial_- V - V A_- = 0 \tag{2.63}$$

De acordo com (2.57) e (2.63) tem-se $U(x_+)V(x_-) = e^{\epsilon_+ x_+} W_0 e^{-\epsilon_- x_-}$. Assim, a solução geral para a equação CT (2.60) fica:

$$e^{-\lambda\cdot\phi} = e^{-\lambda\cdot\phi_0}\langle\lambda|e^{-\epsilon_+ x_+} W_0 e^{-\epsilon_- x_-}|\lambda\rangle \tag{2.64}$$

No caso dos modelos AT, cálculo análogo leva à seguinte solução:

$$e^{-\lambda_a\cdot\varphi} = e^{-\lambda_a\cdot\phi_0}\frac{\langle\lambda_a|e^{-\epsilon_+ x_+} W_0 e^{-\epsilon_- x_-}|\lambda_a\rangle}{\langle\lambda_0|e^{-\epsilon_+ x_+} W_0 e^{-\epsilon_- x_-}|\lambda_0\rangle} \tag{2.65}$$

Repare que os estados de peso máximo desempenham um papel fundamental na obtenção das soluções para as equações de Toda, e que existe uma liberdade na escolha de W_0, relacionado a constantes de integração, sendo que toda a estrutura da solução solitônica decorre de tal escolha, determinando a chamada *especialização solitônica.*

Se W_0 for gerado pelos elementos da subálgebra de Heisenberg principal, aqueles com grau positivo (negativo) vão aniquilar os estados de peso máximo à direita (esquerda), deixando apenas uma função do autovalor de C. Como esta aparece tanto no numerador quanto no denominador de (2.65), há o cancelamento e temos uma solução trivial.

A solução de sóliton é então construída de maneira muito simples, escolhendo-se os elementos constantes W_0 como exponenciais dos auto-estados de $\epsilon_{\pm}$. É interessante que as relações de comutação desses elementos com o resto da álgebra sejam simples. Logo, diagonalizam-se com respeito à ação adjunta os demais geradores da álgebra:

$$[\epsilon_{\pm}, V] = \omega^{\pm} V \tag{2.66}$$

Ou seja, a álgebra aqui é separada numa subálgebra abeliana a menos de termos centrais, denominada *subálgebra de Heisenberg*, mais seu complemento tomado de forma a ser auto-estado dessa subálgebra, em correspondência à subálgebra de Cartan e os operadores step, respectivamente. Similarmente, os operadores V são como operadores de vértice

As idéias discutidas até agora formam a essência da teoria de sólitons para os modelos de Toda, e podem ser generalizadas resultando no *método de dressing*, a ser usado na obtenção dos sólitons do modelo de Bullough-Dodd.

3.1 Método de dressing

As transformações de *dressing* [19] constituem um método importante para se obter soluções de equações diferencias não-lineares em duas dimensões, cuja validade vem sendo verificada em todos os modelos conhecidos, sejam eles relativísticos ou não, desde que o modelo satisfaça algumas condições.

Primeiramente, o modelo deve admitir uma representação de curvatura nula, isto é , deve-se conhecer potenciais $A_\mu \in \mathcal{G}$ que geram as equações de movimento

desejadas ao se impôr que estes devem ser chatos no seguinte sentido:

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0, \tag{2.67}$$

Assim sendo, estabelece-se uma relação entre os potenciais chatos e os elementos de grupo $U \in e^{\mathcal{G}}$ através da solução formal da equação acima:

$$A_\mu = -\partial_\mu U U^{-1}, \tag{2.68}$$

Conforme já foi mencionado, a equação (2.67) é invariante sob a transformação de gauge gerada pelo elemento de grupo g

$$A^0_\mu \longrightarrow A_\mu = g A^0_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad U_0 \longrightarrow U = g U_0 h^{-1} \tag{2.69}$$

com h um elemento de grupo constante qualquer, a princípio.

A hipótese crucial para o sucesso do método consiste em supôr que existe um elemento h para o qual o elemento de grupo U é invariante e que o elemento $g = U_0 h U_0^{-1}$ admite uma *decomposição de Gauss*:

$$g = U_0 h U_0^{-1} = g_- g_0 g_+ = e^{\mathcal{G}_-} e^{\mathcal{G}_0} e^{\mathcal{G}_+} \tag{2.70}$$

Define-se então o novo elemento

$$U_h = \theta_+ U_0 = \theta_- U_0 h \tag{2.71}$$

onde $\theta_+ = g_+$ e $\theta_-^{-1} = g_- g_0$. De acordo com (2.68), tal elemento permite obter um potencial transformado tanto por
$A^h_\mu = -\partial_\mu(\theta_+ U_0)(\theta_+ U_0)^{-1}$ quanto por $A^h_\mu = -\partial_\mu(\theta_- U_0 h)(\theta_- U_0 h)^{-1}$.

Fica assim evidente que A^0_μ e A^h_μ se relacionam por duas transformações de gauge distintas, uma que só envolve elementos com grau não-negativo e outra apenas com elementos com grau não-positivo:

$$A^h_\mu = \theta_\pm A^0_\mu \theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \theta_\pm \theta_\pm^{-1} \tag{2.72}$$

Além da decomposição de Gauss introduzimos no método uma outra condição a ser obedecida: os potenciais do modelo devem viver numa álgebra infinita (Kac-Moody), com gradação inteira:

$$A_\mu = \sum_{n=N_-}^{N_+} A_\mu^{(n)} \qquad A_\mu^{(n)} \in \mathcal{G}_n \tag{2.73}$$

onde N_- é um inteiro não positivo e N_+ é um inteiro não negativo, e a graduação da álgebra é tal que:

$$\mathcal{G} = \bigoplus_n \mathcal{G}_n \qquad [\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_m] = \mathcal{G}_{n+m} \tag{2.74}$$

Tiremos agora proveito da simetria de gauge de que se dispõe, uma vez que ela permite relacionar diferentes soluções de uma maneira não-trivial. Considere U_0, por exemplo, uma solução muito simples do modelo (chamada de vácuo), isto é, que satisfaça $A_\mu^0 = -\partial_\mu U_0 U_0^{-1}$, mas que ainda seja graduada: $A_\mu^0 = \sum_{n=N_-}^{N_+} A_\mu^{0(n)}$. Como o potencial transformado pode ser obtido simultaneamente por duas transformações distintas, estas devem diferir por no máximo uma constante.

Lembrando que uma delas envolve apenas geradores de graus positivo e outra apenas geradores de grau negativo, conclui-se que a estrutura de gradação é preservada, e esta é uma característica da transformação de dressing.

Conjectura-se [20] que os sólitons estejam na mesma órbita que o vácuo da teoria. A implementação do método de dressing requer ainda que quando os potenciais forem calculados nesse estado de vácuo, eles assumam valores em uma subálgebra abeliana, a menos de termos centrais, ou seja, uma álgebra de osciladores. Isto quer dizer que os potenciais de vácuo são do tipo

$$A_\mu^0 = \sum_n c_n^\mu b_n + \rho_\mu(x_\mu) C \qquad [b_m, b_n] = m\delta_{m+n,0} C \tag{2.75}$$

a partir dos quais é possível determinar U_0, que por depender explicitamente das coordenadas espaço-temporais desempenhará um papel relevante no cálculo da solução.

A relação entre os parâmetros da transformação e os campos é obtida impondo-se que os potenciais transformados sejam iguais a (2.15):

$$A_+^h = -B\Lambda_+ B^{-1} \qquad A_-^h = -\partial_- B B^{-1} + \Lambda_- \tag{2.76}$$

Igualando-se separadamente os termos com grau do mesmo tipo, descobrimos que $g_0 = B^{-1}e^{-\Omega x_- x_+ C}$, de forma que $g = g_- B^{-1} e^{-\Omega x_- x_+ C} g_+$. Logo,

$$U_0\ h\ U_0^{-1} = g_- B^{-1} e^{-\Omega x_- x_+ C} g_+ \tag{2.77}$$

Tomando-se o elemento de matriz num estado de peso máximo e escolhendo $h = e^V$, obtemos a função-τ de Hirota que permitirá determinar as soluções solitônicas:

$$\tau = \langle\lambda|B^{-1}e^{-\Omega x_- x_+ C}|\lambda\rangle = \langle\lambda|U_0 e^V U_0^{-1}|\lambda\rangle \tag{2.78}$$

Tal igualdade relaciona os campos de gauge, que parametrizam B, às coordenadas de espaço-tempo, de modo que para conhecer o comportamento dos campos basta calcular os elementos de matriz acima, o que pode não ser uma tarefa animadora.

Alternativamente, existe o método de Hirota para determinar sólitons, que consiste em propôr uma transformação de campos e um ansatz para o novo campo cuja forma exata é determinada através de sua substituição nas novas equações de movimento. Entretanto, não é tarefa simples descobrir transformações e ansatz que funcionem.

Dessa forma, adota-se uma maneira de construir os sólitons através de um método que combina a simplicidade do método de Hirota, uma vez que se conheçam a transformação de campos e o ansatz que dê a solução, com o método de dressing, que permite encontrar as transformações de Hirota, bem como, a partir de (2.78), a forma de sua solução, a função-τ:

$$\tau = 1 + e^{\gamma(x-vt)}\langle\lambda|V|\lambda\rangle + e^{2\gamma(x-vt)}\langle\lambda|V^2|\lambda\rangle + \cdots \tag{2.79}$$

Finalmente, as soluções de N-sólitons são obtidas fazendo-se uma transformação de dressing a partir das soluções de vácuo, com o elemento constante sendo dado pelo operador de criação dos sólitons, isto é , por exponenciais dos auto-estados dos osciladores: $h = e^{V(z_1)}e^{V(z_2)}...e^{V(z_N)}$, onde os z_i estão associados às velocidades de cada um dos sólitons.

No caso de haver auto-estados multiplamente degenerados, o elemento constante é escolhido como uma combinação linear desses auto-estados:
$V(z) = \alpha_1 V_1(z) + \cdots + \alpha_m V_m(z)$.

Capítulo 3

Estudo do modelo de Bullough-Dodd

1 A álgebra do modelo BD: $A_2^{(2)}$

Tendo em vista que a equação de Bullough-Dodd (BD) é uma equação de Toda cuja integrabilidade está relacionada com a álgebra de Kac-Moody afim $A_2^{(2)}$, vamos primeiramente determinar suas características mais relevantes para nossos objetivos.

A maneira mais direta de definir tal álgebra é através de sua matriz de Cartan generalizada:

$$K_{BD} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Algumas das informações importantes contidas na matriz acima são de que seu vetor nulo pela direita é $l^{\psi} = (2, 1)$ e seu vetor nulo pela esquerda é $m^{\psi} = (1, 2)$, de forma que $C = 2h_0 + h_1$.

Percebe-se ainda que a matriz (3.1) proporciona uma maneira de construir uma base para esta álgebra através dos 6 geradores, $h_0, h_1, e_0^+, e_1^+, e_0^-, e_1^-$, que obedecem:

$$[h_0, h_1] = 0 \qquad [e_0^+, e_0^-] = h_0 \qquad [e_1^+, e_1^-] = h_1 \qquad [e_0^{\pm}, e_1^{\mp}] = 0 \tag{3.2}$$

$$[h_0, e_0^{\pm}] = \pm 2 e_0^{\pm} \qquad [h_0, e_1^{\pm}] = \mp e_1^{\pm} \tag{3.3}$$

$$[h_1, e_0^{\pm}] = \mp 4 e_0^{\pm} \qquad [h_1, e_1^{\pm}] = \pm 2 e_1^{\pm} \tag{3.4}$$

Já as relações de Serre (1.20) afirmam que

$$[e_0^{\pm}, [e_0^{\pm}, e_1^{\pm}]] = 0 \qquad [e_1^{\pm}, [e_1^{\pm}, [e_1^{\pm}, [e_1^{\pm}, [e_1^{\pm}, e_0^{\pm}]]]]] = 0 \tag{3.5}$$

As relações listadas acima seriam suficientes para se determinar, mesmo que implicitamente, toda a álgebra em termos dos elementos acima e de seus comutadores, mas o fato de que $det\hat{K} = 0$ implica, entre outras coisas, que a álgebra é infinita. Para simplificar a notação prefere-se, portanto, fazer uso de outros métodos para determinar os geradores da álgebra.

A relação entre as álgebras $A_2^{(2)}$ e $\hat{so}(8)$

Ao invés de simplesmente definir a matriz (3.1), existe um modo mais instrutivo de se obter o modelo BD que consiste em partir da álgebra $so(8)$ e realizar um *folding* [15, 16], de sua versão afinizada $\hat{so}(8)$. Este processo está relacionado com as simetrias de equação de Toda. São procuradas as permutações $p : \varphi_a \longrightarrow \varphi_{p(a)}$, com $(a = 1, ..., n)$ que deixam as equações invariantes no sentido em que se o conjunto $\{\varphi_a\}$ é solução, então $\{\varphi_{p(a)}\}$ também o é. Isso é garantido se $K_{ab} = K_{p(a)p(b)}$, o que será verdade se a permutação respeitar a estrutura do diagrama de Dynkin.

Para dar início a essa tarefa, deve-se inicialmente analisar a álgebra $so(8)$, que pode ser definida pelo diagrama de Dynkin constituído por 4 pontos $\{(1), (2), (3), (4)\}$ em que $(1), (2), (3)$ estão ligados a (4) por uma única linha (o que significa que as raízes têm todas o mesmo tamanho, e a matriz de Cartan é simétrica; nesses casos diz-se que a álgebra é *simply laced*):

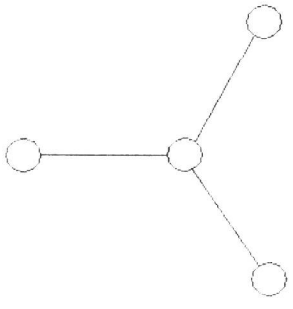

Figura 3.1: Diagrama de Dynkin referente à álgebra $so(8)$.

A matriz de Cartan associada tem a forma:

$$K_{so(8)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

A dimensão desta álgebra é 28 e seu rank é 4, de modo que existem 12 raízes positivas, que podem ser determinadas:

altura h = 1: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

altura h = 2: $(\alpha_1 + \alpha_4), (\alpha_2 + \alpha_4), (\alpha_3 + \alpha_4)$

altura h = 3: $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4), (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4), (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$

altura h = 4: $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$

altura h = 5: $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4) \equiv \psi$

Como o determinante da matriz de Cartan acima (3.6) é não -nulo, ela possui uma inversa:

$$K^{-1}_{so(8)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

que possibilita determinar os pesos fundamentais

$$\lambda_a = K^{-1}_{ab}\alpha_b \tag{3.8}$$

Agora já é possível determinar as constantes $N_{\alpha\beta}$, que aparecem nas relações de comutação (1.15). Como a álgebra em questão é do tipo *simply laced*, essas constantes são essencialmente sinais (± 1). Assim, obtêm-se todas as relações de comutação referentes a $so(8)$.

A afinização consiste em incluir a raiz $\alpha_0 \equiv -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4$, e a matriz de Cartan estendida toma a forma:

SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

$$K_{\hat{so}(8)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

apresentando os vetores nulos[1]:

$$m^{\psi} = (1, 1, 1, 1, 2) \qquad l^{\psi} = (1, 1, 1, 1, 2) \tag{3.10}$$

Com isso, o diagrama de Dynkin ganha um novo ponto:

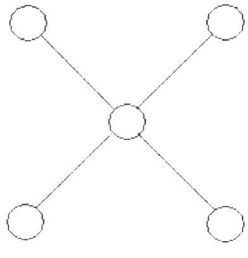

Figura 3.2: Diagrama de Dynkin referente à álgebra $\hat{so}(8)$, afim.

Observa-se que tanto o diagrama de Dynkin de $so(8)$ quanto o de $\hat{so}(8)$ apresentam simetrias Γ não -triviais:

$$\Gamma(so(8)) = S_3 \qquad \Gamma(\hat{so}(8)) = S_4 \tag{3.11}$$

com S_N o grupo de simetria das permutações de N elementos.

A álgebra $\hat{so}(8)$ admite geradores que satisfazem relações do tipo

$$[T_a^m, T_b^n] = f_{ab}^c T_c^{m+n} + m\delta_{m+n,0} Tr(T_a T_b) C \tag{3.12}$$

e um automorfismo

$$[\tau(T_a^m), \tau(T_b^n)] = \tau([T_a^m, T_b^n]) \tag{3.13}$$

[1]A igualdade dos vetores se deve ao fato de que a álgebra é simplesmente laçada, ou equivalentemente, a matriz de Cartan é simétrica.

de ordem $N = 4$ tal que

$$\tau(T) = e^{i2\pi(n+\frac{m}{4})}T \qquad \Longrightarrow \qquad \tau^4(T) = T \tag{3.14}$$

com $m = 0, 1, 2, 3$, e diz-se que $T \in \mathcal{G}_{(m)}$. Então o grau do gerador, $r \equiv n + \frac{m}{4}$, não é inteiro (mas $4r \in \mathbb{Z}$). Uma álgebra infinita formada por geradores $\{T_a^r\}$ com grau não-inteiro $r \in \mathbb{Z} + \frac{m}{4}$ forma uma chamada álgebra de Kac-Moody afim com *twist*, $\hat{\mathcal{G}}^\tau$.

Entretanto, apenas combinações pertencentes ao subespaço de ordem zero, $\hat{\mathcal{G}}_{(0)}$, $A = X + \tau(X) + \tau^2(X) + \tau^3(X)$, formam uma subálgebra de $\hat{\mathcal{G}}$. Logo, $\hat{\mathcal{G}}_{(0)}$ é uma subálgebra invariante de $\hat{\mathcal{G}}$ sob o automorfismo do diagrama.

Serão de interesse apenas os automorfismos externos, isto é , aqueles que não podem ser obtidos por conjugação, mas, sim, por uma simetria não trivial do diagrama de Dynkin. Este, mostrado na Figura 3.2, por sua vez, possibilita escrever:

$$\tau(\hat{\alpha_0}) = \hat{\alpha_1}; \qquad \tau(\hat{\alpha_1}) = \hat{\alpha_2}; \qquad \tau(\hat{\alpha_2}) = \hat{\alpha_3}; \qquad \tau(\hat{\alpha_3}) = \hat{\alpha_0}; \tag{3.15}$$

$$\tau(\hat{\alpha_4}) = \hat{\alpha_4}; \tag{3.16}$$

sendo que as raízes simples da álgebra afim são , de acordo com (1.40):

$$\hat{\alpha_0} = (\alpha_0, 0, 1) \tag{3.17}$$

$$\hat{\alpha_1} = (\alpha_1, 0, 0); \qquad \hat{\alpha_2} = (\alpha_2, 0, 0); \qquad \hat{\alpha_3} = (\alpha_3, 0, 0); \qquad \hat{\alpha_4} = (\alpha_4, 0, 0) \tag{3.18}$$

É possível construir uma nova base para o subespaço invariante pelo automorfismo constituída por:

$$\hat{\beta_0} \equiv (\alpha_4, 0, 0) \qquad \hat{\beta_1} \equiv \frac{1}{4}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 0, 1) \tag{3.19}$$

O fator $\frac{1}{4}$ incluído tem o objetivo de fazer com que a razão entre os comprimentos das raízes seja tal que $\beta_0^2 = 4\beta_1^2$, e o diagrama de Dynkin associado a tais raízes seja o mesmo que o de $A_2^{(2)}$:

Há , portanto, dois pesos fundamentais associados às raízes (3.19):

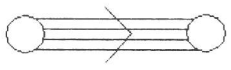

Figura 3.3: Diagrama de Dynkin referente à álgebra $A_2^{(2)}$.

$$\hat{\lambda}_0 = (\lambda_4, 2, 0) \qquad \hat{\lambda}_1 = (\lambda_1, 1, 0) \tag{3.20}$$

de modo que os estados de peso máximo associados são caracterizados por:

$$H^0|\hat{\lambda}_0\rangle = \lambda_4|\hat{\lambda}_0\rangle \qquad H^0|\hat{\lambda}_1\rangle = \lambda_1|\hat{\lambda}_1\rangle \qquad C|\hat{\lambda}_0\rangle = 2|\hat{\lambda}_0\rangle \qquad C|\hat{\lambda}_1\rangle = |\hat{\lambda}_1\rangle \tag{3.21}$$

Definindo-se o nível de uma representação como sendo

$$x_i = \frac{2\mathcal{C}_i}{\phi^2} \tag{3.22}$$

com $\mathcal{C}_i$ o autovalor de C e ϕ a maior raiz da álgebra, o estado $|\hat{\lambda}_0\rangle$ corresponde a uma representação de nível 2 e $|\hat{\lambda}_1\rangle$, a uma de nível 1. Entretanto, o estado de nível 2 pode ser escrito como combinação dos estados de nível 1:

$$|\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{\lambda}_1\rangle \otimes E_{-\hat{\alpha}_1}|\hat{\lambda}_1\rangle - E_{-\hat{\alpha}_1}|\hat{\lambda}_1\rangle \otimes |\hat{\lambda}_1\rangle\right) \tag{3.23}$$

pois $\lambda_4 = 2\lambda_1 - \alpha_1$.

A estreita relação entre as duas álgebras em questão nesta subseção fica corroborada se nos atentarmos para o fato de que as relações de (3.2) a (3.5) são obedecidas pelos seguintes geradores:

$$h_0 \equiv \hat{\beta}_0 \cdot \hat{H} \qquad h_1 \equiv 4\hat{\beta}_1 \cdot \hat{H} \tag{3.24}$$

$$e_0^{\pm} \equiv E_{\pm\hat{\beta}_0} \qquad e_1^{\pm} \equiv 2E_{\pm\hat{\beta}_1} \tag{3.25}$$

Existe, de fato, uma combinação dos geradores da álgebra de $\hat{so}(8)$ que leva exatamente ao conjunto $\{e_0^+, e_1^+, e_0^-, e_1^-\}$. Assim, $\hat{so}(8)$ é uma álgebra de Kac-Moody afim que se relaciona com a álgebra de $A_2^{(2)}$ através de um *folding*.

O estudo do automorfismo de $\hat{so}(8)$ nos levou aos resultados: sobre uma raiz $n\delta = (0, 0, n)$ a atuação do automorfismo é trivial: $\tau(n\delta) = n\delta$; já sobre uma raiz $\hat{\alpha} = (\alpha, 0, n)$ a atuação do automorfismo é : $\tau(\hat{\alpha}) = (\tilde{\tau}(\alpha), 0, n + n_3)$, onde $\tilde{\tau}(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4) = -n_3\alpha_1 + (n_1 - n_3)\alpha_2 + (n_2 - n_3)\alpha_3 + (n_4 - 2n_3)\alpha_4$.

Dessa forma, os geradores da álgebra se transformam como

$$\tau(E^n_\alpha) = E^{n+n_3}_{\tilde{\tau}(\alpha)} \qquad \tau(\alpha \cdot H^n) = \tilde{\tau}(\alpha) \cdot H^n \qquad \tau(C) = C \tag{3.26}$$

Logo, os elementos da base da subálgebra invariante de interesse deve ser dos tipos: $E^n_\alpha + \tau(E^n_\alpha) + \tau^2(E^n_\alpha) + \tau^3(E^n_\alpha)$ e $(\alpha + \tilde{\tau}(\alpha) + \tilde{\tau}^2(\alpha) + \tilde{\tau}^3(\alpha)) \cdot H^n$.

Sabemos que será necessário encontrar uma maneira de atribuir graus aos geradores, o que pode ser conseguido com o operador de gradação principal, que nesse caso assume a forma:

$$Q = 6D + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot H^0 \tag{3.27}$$

Os geradores de $\hat{so}(8)_{(0)}$ são , pois, divididos nos seguintes auto-subespaços:

$$\hat{\mathcal{G}}_{6n} = \{\alpha_4 \cdot H^n\} \tag{3.28}$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{6n\pm1} = \{E^n_{\pm\alpha_1} + E^n_{\pm\alpha_2} + E^n_{\pm\alpha_3} + E^{n\pm1}_{\pm\alpha_0} \quad ; \quad E^n_{\pm\alpha_4}\} \tag{3.29}$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{6n\pm2} = \{E^n_{\pm(\alpha_1+\alpha_4)} + E^n_{\pm(\alpha_2+\alpha_4)} + E^n_{\pm(\alpha_3+\alpha_4)} - E^{n\pm1}_{\pm(\alpha_0+\alpha_4)}\} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}_{6n\pm3} = \{&E^n_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)} + E^n_{\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)} + E^n_{\pm(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)} + \\ &+E^{n\pm1}_{\mp(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)} + E^{n\pm1}_{\mp(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)} + E^{n\pm1}_{\mp(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)}\}\end{aligned} \tag{3.31}$$

Com isso, encontramos explicitamente a forma dos geradores de Serre-Cartan para a subálgebra invariante de $\hat{so}(8)$, ou seja, para a álgebra do modelo de Bullough-Dodd:

$$h_0 = \alpha_4 \cdot H^0 \qquad h_1 = C - 2\alpha_4 \cdot H^0 \tag{3.32}$$

$$e_0^{\pm} = E^0_{\pm\alpha_4} \qquad e_1^{\pm} = E^0_{\pm\alpha_1} + E^0_{\pm\alpha_2} + E^0_{\pm\alpha_3} + E^{\pm 1}_{\pm\alpha_0} \tag{3.33}$$

que obedecem as relações discutidas no início desta seção. Embora já tenhamos concluído o primeiro passo em direção a nosso objetivo, mostraremos uma terceira abordagem que permite encontrar os geradores de BD.

A relação entre as álgebras $A_2^{(2)}$ e $su(3)$

A álgebra $A_2^{(2)}$ do modelo BD mantém relações estreitas também com a álgebra $su(3)$, de acordo com o que será explicitado nesta seção.

Um modo de se introduzir a álgebra $su(3)$, denotada alternativamente por A_2, é pelo seu diagrama de Dynkin:

Figura 3.4: Diagrama de Dynkin referente à álgebra $su(3)$.

Por se tratar de uma álgebra do tipo simplesmente laçada, podemos escolher as raízes como tendo módulo $|\alpha|^2 = 2$, de onde se obtém a matriz de Cartan:

$$K_{su(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Neste caso, as raízes são denotadas com uma barra para não criar confusões com as raízes de $so(8)$:

$$\bar{\alpha}_1, \qquad \bar{\alpha}_2, \qquad \bar{\alpha}_3 \equiv \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \tag{3.35}$$

tem-se então seis operadores *step*,

$$\bar{E}_{\pm\alpha_1}, \qquad \bar{E}_{\pm\alpha_2}, \qquad \bar{E}_{\pm\alpha_3} \tag{3.36}$$

e dois geradores da subálgebra de Cartan,

$$\bar{H}_1 \equiv \bar{\alpha}_1 \cdot H, \qquad \bar{H}_2 \equiv \bar{\alpha}_2 \cdot H \tag{3.37}$$

O diagrama de Dynkin apresentado na Figura 3.4 possui uma simetria não -trivial, que leva uma raiz na outra; logo, existe um automorfismo externo:

$$\tau(\bar{\alpha}_1) = \bar{\alpha_2}; \qquad \tau(\bar{\alpha}_2) = \bar{\alpha}_1; \tag{3.38}$$

de ordem dois: $\tau^2 = 1$. Assim, é possível separar os geradores de $su(3)$ em dois grupos, um com autovalor $+1$ com respeito ao automorfismo, o outro com autovalor -1. Denotaremos por $su(3)_{(0)}$ a subálgebra invariante sob τ, e por $su(3)_{(1)}$ o subconjunto para a qual a atuação do automorfismo introduz um sinal negativo:

$$su(3)_{(0)} = \{\bar{H}_1 + \bar{H}_2, \bar{E}_{\alpha_1} + \bar{E}_{\alpha_2}, \bar{E}_{-\alpha_1} + \bar{E}_{-\alpha_2}\} \tag{3.39}$$

$$su(3)_{(1)} = \{\bar{H}_1 - \bar{H}_2, \bar{E}_{\alpha_1} - \bar{E}_{\alpha_2}, \bar{E}_{-\alpha_1} - \bar{E}_{-\alpha_2}, \bar{E}_{\alpha_3}, \bar{E}_{-\alpha_3}\} \tag{3.40}$$

Dados os 8 geradores de $su(3)$, encontramos combinações que se dividem em auto-subespaços $\mathcal{G}_{(m)}$ os quais obedecem $[\mathcal{G}_{(m)}, \mathcal{G}_{(n)}] \subseteq \mathcal{G}_{(m+n) \ mod \ 2}$. Ademais, percebe-se que $su(3)_{(0)}$ é uma subálgebra de $su(3)$ isomórfica a $su(2)$, e que $su(3)_{(1)}$ forma uma representação de $su(3)_{(0)}$ de spin 2. Para evidenciar esta propriedade notável tomamos como base os seguintes geradores:

$$T_3 = \bar{H}_1 + \bar{H}_2 \qquad T_{\pm} = \sqrt{2}\left(\bar{E}_{\pm\alpha_1} + \bar{E}_{\pm\alpha_2}\right) \tag{3.41}$$

$$L_0 = \bar{H}_1 - \bar{H}_2 \qquad L_{\pm 1} = \sqrt{2}\left(\bar{E}_{\pm\alpha_1} - \bar{E}_{\pm\alpha_2}\right) \qquad L_{\pm 2} = \bar{E}_{\pm\alpha_3} \tag{3.42}$$

A base para a álgebra com twist procurada é obtida pela inclusão da derivação D e conseqüentemente dos índices:
$T_a \longrightarrow T_a^n \equiv T_a z^n$, tal que $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ se $T_a \in su(3)_{(1)}$, e $n \in \mathbb{Z}$ se $T_a \in su(3)_{(0)}$.

Já as raízes da álgebra com twist $su(3)^\tau$ são construídas por uma associação com a raiz positiva de $su(3)_{(0)}$, $+1$, e com o negativo do peso máximo de $su(3)_{(1)}$, -2. Assim, sendo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\hat{\beta}_0 = (-2, 0, \frac{1}{2}) \qquad \hat{\beta}_1 = (1, 0, 0) \tag{3.43}$$

além de $n\delta = (0, 0, n)$.

Essas raízes conduzem ao mesmo diagrama de Dynkin que o mostrado em Fig. 3.3, evidenciando que $su(3)^\tau$ tem a mesma estrutura que a álgebra do modelo BD.

A base de Serre-Cartan de $A_2^{(2)}$ pode ser escrita como combinação desses novos geradores:

$$h_0 = -T_3^0 + \frac{1}{2}\bar{C} \qquad h_1 = 2T_3^0 \tag{3.44}$$

$$e_0^{\pm} = L_{\mp 2}^{\pm\frac{1}{2}} \qquad e_1^{\pm} = T_{\pm}^0 \tag{3.45}$$

Há , portanto, dois pesos fundamentais associados às raízes (3.43):

$$\hat{\lambda}_0 = (0, 4, 0) \qquad \hat{\lambda}_1 = (\frac{1}{2}, 2, 0) \tag{3.46}$$

de modo que os estados de peso máximo são caracterizados por:

$$T_3^0|\hat{\lambda}_0\rangle = 0 \qquad T_3^0|\hat{\lambda}_1\rangle = \frac{1}{2}|\hat{\lambda}_1\rangle \qquad \bar{C}|\hat{\lambda}_0\rangle = 4|\hat{\lambda}_0\rangle \qquad \bar{C}|\hat{\lambda}_1\rangle = 2|\hat{\lambda}_1\rangle \tag{3.47}$$

de onde vemos uma discrepância com relação a (3.21) no que se refere aos autovalores do termos central: $\bar{C} = 2C$. Porém neste caso, a raiz mais alta tem $\bar{\phi}^2 = 4$, de modo que os níveis (3.22) continuam os mesmos, 2 e 1, e temos de fato $|\hat{\lambda}_0\rangle$ correspondendo a uma representação de nível 2 e $|\hat{\lambda}_1\rangle$ uma de nível 1.

Note, contudo, que com os estados $|\hat{\lambda}_0\rangle$ e $|\hat{\lambda}_1\rangle$ definidos em termos das raízes (3.43) também é possível expressar o estado de nível 2 como produto tensorial de estados de nível 1:

$$|\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{\lambda}_1\rangle \otimes T_-^0|\hat{\lambda}_1\rangle - T_-^0|\hat{\lambda}_1\rangle \otimes |\hat{\lambda}_1\rangle\right) \tag{3.48}$$

Com esta riqueza da teoria das álgebras de Kac-Moody conseguimos separar a álgebra $\hat{so}(8)$ numa álgebra isomórfica a $su(2)$ e numa representação de spin 2 de $su(2)$, com a associação:

$$T_3^0 \leftrightarrow \frac{1}{2}C - \alpha_4 \cdot H^0 \tag{3.49}$$

$$T_{\pm}^0 \leftrightarrow E_{\pm\alpha_1}^0 + E_{\pm\alpha_2}^0 + E_{\pm\alpha_3}^0 + E_{\pm\alpha_0}^{\pm 1} \tag{3.50}$$

$$L_{\mp 2}^{\pm\frac{1}{2}} \leftrightarrow E_{\pm\alpha_4}^{0} \tag{3.51}$$

$$L_{\mp 1}^{\pm\frac{1}{2}} \leftrightarrow E_{\pm(\alpha_1+\alpha_4)}^{0} + E_{\pm(\alpha_2+\alpha_4)}^{0} + E_{\pm(\alpha_3+\alpha_4)}^{0} - E_{\pm(\alpha_0+\alpha_4)}^{\pm 1} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} L_{0}^{\pm\frac{1}{2}} \leftrightarrow \pm(&E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)}^{0} + E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{0} + E_{\pm(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)}^{0} + \\ &+E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)}^{\pm 1} + E_{\mp(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}^{\pm 1} + E_{\mp(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)}^{\pm 1}) \end{aligned} \tag{3.53}$$

As diferentes abordagens poderão então ser usadas harmoniosamente com o intuito de facilitar os cálculos. De fato, a graduação de $su(3)^{\tau}$ é inspirada por aquela obtida pela graduação principal de $so(8)$, de modo em ambos os casos temos um período igual a 6. Convencionaremos usar a base introduzida nesta seção que satisfaz as relações de comutação:

$$[T_3^m, T_3^n] = 2m\delta_{m+n,0}C \qquad [L_0^k, L_0^j] = 6k\delta_{k+j,0}C \tag{3.54}$$

$$[L_2^k, L_{-2}^j] = T_3^{k+j} + k\delta_{k+j,0}C \qquad [L_1^k, L_{-1}^j] = 2T_3^{k+j} + 4k\delta_{k+j,0}C \tag{3.55}$$

$$[T_+^m, T_-^n] = 2T_3^{m+n} + 4m\delta_{m+n,0}C \tag{3.56}$$

$$[T_3^m, T_\pm^n] = \pm T_3^{m+n} \qquad [T_3^m, L_0^k] = 0 \tag{3.57}$$

$$[T_3^m, L_{\pm 1}^k] = \pm L_{\pm 1}^{m+k} \qquad [T_3^m, L_{\pm 2}^k] = \pm 2L_{\pm 2}^{m+k} \tag{3.58}$$

$$[T_\pm^m, L_0^k] = \mp 3L_{\pm 1}^{m+k} \qquad [T_\pm^m, L_{\pm 1}^k] = \mp 4L_{\pm 2}^{m+k} \qquad [T_\pm^m, L_{\mp 1}^k] = \pm 2L_0^{m+k} \tag{3.59}$$

$$[T_\pm^m, L_{\pm 2}^k] = 0 \qquad [T_\pm^m, L_{\mp 2}^k] = \pm L_{\mp 1}^{m+k} \tag{3.60}$$

$$[L_0^k, L_{\pm 2}^j] = 0 \qquad [L_0^k, L_{\pm 1}^j] = \pm 3T_{\pm}^{k+j} \tag{3.61}$$

$$[L_{\pm 1}^k, L_{\pm 2}^j] = 0 \qquad [L_{\pm 2}^k, L_{\mp 1}^j] = \mp T_{\pm}^{k+j} \tag{3.62}$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $k, j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

Agora que dispomos das informações algébricas de interesse voltamo-nos para a construção e posterior solução do modelo.

2 Construção dos sólitons do modelo

Tendo em mente toda a estrutura da álgebra $A_2^{(2)}$ que acabamos de estudar, estamos agora em posição de construir o modelo de Bullough-Dodd em termos de uma representação de curvatura nula. Entretanto, antes de fazê-lo, apliquemos algumas técnicas usuais de teoria de campos.

Talvez a maneira mais canônica de introduzir o modelo de interesse seja através de sua densidade lagrangeana, que é dada por

$$\mathcal{L}_{BD} = \frac{1}{2}\partial_+\varphi\partial_-\varphi - \frac{\mu^2}{\beta^2}\left(\frac{1}{2}e^{2\beta\varphi} + \frac{1}{4}e^{-4\beta\varphi} - \frac{3}{4}\right) \tag{3.63}$$

onde μ é um termo de massa β é um acoplamento do campo, sendo que a equação de movimento do sistema é dada por

$$\partial_+\partial_-\varphi + \frac{\mu^2}{\beta}e^{\eta}\left(e^{2\beta\varphi} - e^{-4\beta\varphi}\right) = 0 \tag{3.64}$$

A partir de (3.63) se contrói a densidade hamiltoniana associada, com o auxílio de (2.2):

$$\mathcal{H}_{BD} = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\mu^2}{\beta^2}\left(\frac{1}{2}e^{2\beta\varphi} + \frac{1}{4}e^{-4\beta\varphi} - \frac{3}{4}\right) \tag{3.65}$$

fornecendo a energia do sistema, que, num referencial de repouso, representa a massa relacionada ao campo.

Note que há uma invariância da equação de movimento com relação à transformação $\varphi \longrightarrow \varphi + \imath n\pi$, e com isso o vácuo do campo φ é degenerado. Temos associada a essa simetria uma corrente topológica

$$j_\mu = \frac{1}{2\pi\beta}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\varphi \tag{3.66}$$

trivialmente conservada, $\partial^\mu j_\mu = 0$, originando a carga topológica

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\beta}\left(\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)\right) \tag{3.67}$$

Com essa discussão , notamos que o modelo envolve campos complexos e para calcular a massa dos sólitons complexos, poderíamos substituir $\varphi = \varphi_r + \imath\varphi_i$

na hamiltoniana (3.65). No entanto, esta deixa de ser real e positiva definida. Uma segunda tentativa é considerar

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi^* - \frac{\mu^2}{\beta^2}\left(\frac{1}{2}e^{2\beta\varphi} + \frac{1}{4}e^{-4\beta\varphi} + \frac{1}{2}e^{2\beta\varphi^*} + \frac{1}{4}e^{-4\beta\varphi^*} - \frac{3}{2}\right) \quad (3.68)$$

que, pelas condições de Cauchy-Riemann, é equivalente a suas partes real imaginária

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2}\partial_+\varphi_r\partial_-\varphi_r - \frac{1}{2}\partial_+\varphi_i\partial_-\varphi_i - \frac{\mu^2}{2\beta^2}e^{2\beta\varphi_r}\cos 2\beta\varphi_i + \frac{\mu^2}{4\beta^2}e^{-4\beta\varphi_r}\cos 4\beta\varphi_i \quad (3.69)$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\partial_+\varphi_r\partial_-\varphi_i + \frac{1}{2}\partial_+\varphi_i\partial_-\varphi_r - \frac{\mu^2}{2\beta^2}e^{2\beta\varphi_r}\sin 2\beta\varphi_i + \frac{\mu^2}{4\beta^2}e^{-4\beta\varphi_r}\sin 4\beta\varphi_i \quad (3.70)$$

expressas em termos das coordenadas do cone de luz ($\mu = \pm$) e $\varphi = \varphi_r + \imath\varphi_i$. As equações de movimento resultantes, como esperado, são as equações para as partes real e imaginária do campo:

$$\partial_+\partial_-\varphi_r + \frac{\mu^2}{\beta^2}e^{2\beta\varphi_r}\cos(2\beta\varphi_i) - \frac{\mu^2}{\beta^2}e^{-4\beta\varphi_r}\cos(4\beta\varphi_i) = 0 \quad (3.71)$$

$$\partial_+\partial_-\varphi_i + \frac{\mu^2}{\beta^2}e^{2\beta\varphi_r}\sin(2\beta\varphi_i) + \frac{\mu^2}{\beta^2}e^{-4\beta\varphi_r}\sin(4\beta\varphi_i) = 0 \quad (3.72)$$

Todavia, as hamiltonianas obtidas a partir dessas lagrangeanas alternativas tampouco são positivias definidas. Espera-se contudo que a energia das soluções solitônicas seja real e positiva.

Vê-se contudo que a simetria conforme não está presente em (3.64). Entretanto, ao aplicarmos as técnicas algébricas estudadas para construir e resolver o modelo, introduziremos novos campos na direção do centro C e da gradação Q da álgebra, recuperando assim a invariância conforme.

Este modelo, de Bullough-Dodd conforme, apresenta uma representação de curvatura nula com potenciais chatos dados, em termos dos geradores de $su(3)^\tau$, por:

$$A_+ = -q_+\left(\sqrt{2}e^{-4\beta\varphi+\eta}L^{\frac{1}{2}}_{-2} + e^{2\beta\varphi+\eta}T^0_+\right) \quad (3.73)$$

$$A_- = -\partial_- \left(2\beta\varphi T_3^0 + \nu C + \eta Q\right) + q_- \left(\sqrt{2}L_2^{-\frac{1}{2}} + T_-^0\right) \tag{3.74}$$

ou ainda por outras expressões que se relacionam com (3.73) e (3.74) através de uma transformação de gauge, por exemplo:
$\tilde{A}_\pm = \pm\frac{1}{2}\partial_\pm \left(2\beta\varphi T_3^0 + \nu C + \eta Q\right) + q^\pm e^{\frac{\eta}{2}} \left(\sqrt{2}e^{\mp 2\varphi} L_{\mp 2}^{\pm\frac{1}{2}} + e^{\pm\varphi} T_\pm^0\right)$
adquirindo um caráter mais simétrico entre as componentes com grau positivo e negativo. A transformação de gauge que relaciona os tipos de potenciais acima é dada pelo elemento $g = e^{-\beta\varphi T_3^0 - \frac{1}{2}\nu C - \frac{1}{2}\eta Q}$.

As equações fornecidas são , por conseguinte:

$$\partial_+\partial_-\eta = 0 \tag{3.75}$$

$$\partial_+\partial_-\nu + \mu^2 e^{\eta} e^{-4\beta\varphi} = 0 \tag{3.76}$$

$$\partial_+\partial_-\varphi + \frac{\mu^2}{\beta} e^{\eta} \left(e^{2\beta\varphi} - e^{-4\beta\varphi}\right) = 0 \tag{3.77}$$

em que os fatores $q^\pm$ foram escolhidos com a finalidade de ajustar o termo de massa da equação: $\mu^2 = q_+ q_-$. Esse conjunto de equações contém a equação BD, de nosso interesse, acompanhada de uma equação para o campo η, que tem a finalidade de tornar o sistema invariante conforme, e uma equação para ν, secundária, que nos auxiliará na determinação dos sólitons.

Analisemos agora os aspectos que levam às soluções solitônicas do modelo. Como gostaríamos que os potenciais de vácuo pertencessem a subálgebras abelianas a menos de termos centrais, percebemos que as seguintes soluções de vácuo

$$\varphi^0 = \frac{in\pi}{\beta} \quad ; \quad \eta^0 = 0 \quad ; \quad \nu^0 = -\mu^2 x_+ x_- \tag{3.78}$$

fornecem o que desejamos, pois quando calculados nesses estados os potenciais (2.15) assumem as formas

$$A_+^0 = -q_+\epsilon_+ \qquad A_-^0 = -q_-\epsilon_- + \mu^2 x_+ C \tag{3.79}$$

com $\epsilon_\pm = \sqrt{2}L_{\mp 2}^{\pm\frac{1}{2}} + T_\pm^0$, satisfazendo o que se chama de álgebra de osciladores:

$$b_{6m\pm1} = \sqrt{2}L_{\mp2}^{m\pm\frac{1}{2}} + T_{\pm}^{m} \quad \longleftrightarrow \quad [b_{6m+1}, b_{6n-1}] = (6m+1)\delta_{m+n,0}C \tag{3.80}$$

Escrevendo os potencias de vácuo como $A_{\mu}^{0} = -\partial_{\mu}U_0U_0^{-1}$, temos:

$$U_0 = e^{x_+q_+\epsilon_+}e^{-x_-q_-\epsilon_-} \tag{3.81}$$

Com o conhecimento deste elemento é possível aplicar uma transformação de *dressing* e construir uma nova solução que esteja na mesma órbita deste vácuo, possivelmente um sóliton. Para isso será necessário calcular elementos de matriz do objeto $U_0hU_0^{-1}$, com h sendo a exponenciação dos autoestados dos osciladores de modo zero ($m = 0$, em (3.80)):

$$[\epsilon_{\pm}, V(z)] = \omega^{\pm}V(z) \tag{3.82}$$

Introduzindo-se a notação

$$\Gamma = \omega^{+}x_{+} - \omega^{-}x_{-} \tag{3.83}$$

tem-se que a função-τ de Hirota pode ser expressa como

$$\tau \equiv \langle\hat{\lambda}|\exp\{e^{\Gamma}V(z)\}|\hat{\lambda}\rangle = \langle\hat{\lambda}|B^{-1}e^{-\mu^2x_+x_-C}|\hat{\lambda}\rangle \tag{3.84}$$

sendo $|\hat{\lambda}\rangle$ um estado de peso máximo.

Mostra-se que o autoestado comum a $\epsilon_{\pm}$ é da forma:

$$\begin{aligned} V(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \big(&(\imath\sqrt{2}T_3^m + \frac{2}{\imath\sqrt{6}}\delta_{m,0}C)(\imath z)^{-6m} + (2\sqrt{2}L_{-2}^{m+\frac{1}{2}} - T_{+}^{m})(\imath z)^{-6m-1} + \\ &-\imath\sqrt{3}L_{-1}^{m+\frac{1}{2}}(\imath z)^{-6m-2} - \sqrt{2}L_0^{m+\frac{1}{2}}(\imath z)^{-6m-3} + \\ &-\imath\sqrt{3}L_1^{m+\frac{1}{2}}(\imath z)^{-6m-4} + (2\sqrt{2}L_2^{m+\frac{1}{2}} - T_{-}^{m+1})(\imath z)^{-6m-5} \big) \end{aligned} \tag{3.85}$$

com os correspondentes autovalores:

$$\omega^{\pm} = (\imath z)^{\pm1}\sqrt{6} = \bar{z}^{\pm1}\sqrt{6} = \varepsilon e^{\pm\theta}\sqrt{6} \tag{3.86}$$

sendo $\varepsilon = \pm1$ apenas um sinal e $\bar{z}$ um parâmetro arbitrário que, por conveniência, foi considerado proporcional à exponencial da rapidez (*rapidity*) θ do sóliton. Essa escolha

garantirá que a dependência espaço-temporal das soluções seja do tipo viajante e não oscilatória.

Assim, temos duas funções-τ que podem ser escritas como:

$$\tau_0 \equiv \langle \hat{\lambda}_0 | \exp\left(e^{\sqrt{6}\varepsilon\gamma(x-vt)}V(z)\right) | \hat{\lambda}_0 \rangle = \langle \hat{\lambda}_0 | e^{-2\beta\varphi T_3^0 - \nu C - \eta D} e^{-\mu^2 x_+ x_- C} | \hat{\lambda}_0 \rangle \tag{3.87}$$

$$\tau_1 \equiv \langle \hat{\lambda}_1 | \exp\left(e^{\sqrt{6}\varepsilon\gamma(x-vt)}V(z)\right) | \hat{\lambda}_1 \rangle = \langle \hat{\lambda}_1 | e^{-2\beta\varphi T_3^0 - \nu C - \eta D} e^{-\mu^2 x_+ x_- C} | \hat{\lambda}_1 \rangle \tag{3.88}$$

ou, ainda, de maneira mais explícita:

$$\tau_0 \equiv 1 + e^{\Gamma}\langle \hat{\lambda}_0 | V(z) | \hat{\lambda}_0 \rangle + e^{2\Gamma}\langle \hat{\lambda}_0 | V(z)^2 | \hat{\lambda}_0 \rangle + \cdots = e^{-2(\nu + \mu^2 x_+ x_-)} \tag{3.89}$$

$$\tau_1 \equiv 1 + e^{\Gamma}\langle \hat{\lambda}_1 | V(z) | \hat{\lambda}_1 \rangle + e^{2\Gamma}\langle \hat{\lambda}_1 | V(z)^2 | \hat{\lambda}_1 \rangle + \cdots = e^{-\beta\varphi} e^{-(\nu + \mu^2 x_+ x_-)} \tag{3.90}$$

A esta altura, convém frisar a importância de se ter uma álgebra infinita, pois se ela fosse finita não seria possível diagonalizar operadores de grau não-nulo. Uma vez que a expressão para o autoestado $V(z)$ foi determinada (3.85), o trabalho de calcular os elementos de matriz de suas potências, embora enfadonho, é perfeitamente factível, e traz uma agradável surpresa: a série que a princípio é infinita, trunca.

Como os campos do modelo aparecem associados aos geradores de $su(3)^{\tau}$, usamos a representação fundamental com $|\hat{\lambda}_0\rangle = |0, 2, 0\rangle$ e $|\hat{\lambda}_1\rangle = |\frac{1}{2}, 1, 0\rangle$ para avaliar as projeções que aparecem na solução dos campos:

$$\varphi = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{\tau_0}{\tau_1^2} = \frac{1}{2\beta}\ln\left(\frac{1 + e^{\Gamma}\langle \hat{\lambda}_0 | V(z) | \hat{\lambda}_0 \rangle + e^{2\Gamma}\langle \hat{\lambda}_0 | V(z)^2 | \hat{\lambda}_0 \rangle}{(1 + e^{\Gamma}\langle \hat{\lambda}_1 | V(z) | \hat{\lambda}_1 \rangle)^2}\right) \tag{3.91}$$

$$\nu + \mu^2 x_+ x_- = -\frac{1}{2}\ln\tau_0 = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + e^{\Gamma}\langle \hat{\lambda}_0 | V(z) | \hat{\lambda}_0 \rangle + e^{2\Gamma}\langle \hat{\lambda}_0 | V(z)^2 | \hat{\lambda}_0 \rangle\right) \tag{3.92}$$

Pela complexidade encontrada nos cálculos dos elementos de matriz nas expressões acima, a abordagem que acabamos de apresentar não é a mais conveniente. Com o intuito de reduzir as dificuldades, resolvemos aplicar uma transformação de variáveis sugerida por (3.91) e (3.92): $\{\varphi, \nu\} \longrightarrow \{\tau_0, \tau_1\}$

Dessa forma, é lícito reescrever as equações de movimento do sistema, (3.76) e (3.77), que passam a ser:

$$\partial_+\tau_0\partial_-\tau_0 - \tau_0\partial_+\partial_-\tau_0 + 2\mu^2(\tau_1^4 - \tau_0^2) = 0 \tag{3.93}$$

$$\partial_+\tau_1\partial_-\tau_1 - \tau_1\partial_+\partial_-\tau_1 + \mu^2(\tau_0 - \tau_1^2) = 0 \tag{3.94}$$

Ao invés da representação fundamental, de spin $\frac{1}{2}$, poderíamos ter usado qualquer outra; deveras, na representação de spin 1 em que os pesos máximos são $|0,2,0\rangle$ e $|\frac{1}{2},1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2},1,0\rangle$, teríamos um conjunto de equações de Hirota mais simples, sem aparecer funções-τ com potência maior que 2:
$\partial_+\tau_0\partial_-\tau_0 - \tau_0\partial_+\partial_-\tau_0 + 2\mu^2(\tau_1^2 - \tau_0^2) = 0$ e $\partial_+\tau_1\partial_-\tau_1 - \tau_1\partial_+\partial_-\tau_1 + \mu^2(\tau_0\tau_1 - \tau_1^2) = 0$.

Agora, pois, devemos resolver o conjunto de equações (3.93) e (3.94), o que parece ser um trabalho completamente novo. Contudo, a abordagem anterior, mais trabalhosa, ainda é útil por ser capaz de fornecer um *ansatz* exato para a solução dessas novas equações:

$$\tau_0 = 1 + a_0\varepsilon e^{\Gamma} + b_0\varepsilon^2 e^{2\Gamma} \qquad \tau_1 = 1 + a_1\varepsilon e^{\Gamma} \tag{3.95}$$

de modo o campo de Bullough-Dodd se comporta como

$$\varphi = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1 + a_0\varepsilon e^{\Gamma} + b_0\varepsilon^2 e^{2\Gamma}}{1 + 2a_1\varepsilon e^{\Gamma} + a_1^2\varepsilon^2 e^{2\Gamma}} \tag{3.96}$$

Com tais expressões em mãos, o que nos resta é substituí-las nas equações (3.93) e (3.94) e resolvê-las para cada ordem do parâmetro ε. Com isso encontramos os valores dos coeficientes a_0, b_0, e a_1 que fornecem a solução.

Finalmente, discutimos a obtenção de mais de um sóliton. Cada sóliton é caracterizado por um conjunto de parâmetros diferentes que os distiguem, como por exemplo a velocidade e a *rapidity*, e conseqüentemente o parâmetro z. Dessa forma, para cada um dos N sólitons, indexados por i, que desejamos construir temos:

$$[\epsilon_{\pm}, V_i(z_i)] = \omega_i^{\pm} V_i(z_i) \tag{3.97}$$

de modo que a função-τ é dada por

$$\tau \equiv \langle\hat{\lambda}|e^{e^{\Gamma_1}V(z_1)}\cdots e^{e^{\Gamma_N}V(z_N)}|\hat{\lambda}\rangle = \langle\hat{\lambda}|B^{-1}e^{-x_+x_-C}|\hat{\lambda}\rangle \tag{3.98}$$

com $\Gamma_i = \omega_i^+ x_+ - \omega_i^- x_-$ e relações similares a (3.86). Como o último membro da igualdade se manteve inalterado podemos escrever o *ansatz*

$$\begin{aligned}\tau_0 = 1 + e^{\Gamma_1}A_1 + e^{\Gamma_2}B_1 + e^{2\Gamma_1}C_1 + e^{2\Gamma_2}D_1 + e^{\Gamma_1+\Gamma_2}E_1 + \\ + e^{2\Gamma_1+\Gamma_2}F_1 + e^{\Gamma_1+2\Gamma_2}G_1 + e^{2\Gamma_1+2\Gamma_2}H_1\end{aligned} \tag{3.99}$$

•

$$\tau_1 = 1 + e^{\Gamma_1}A_0 + e^{\Gamma_2}B_0 + e^{\Gamma_1+\Gamma_2}C_0 \tag{3.100}$$

A substituição dessas funções-τ nas respectivas equações nos leva às constantes adequadas para que φ e ν sejam sólitons.

3 Sólitons de Bullough-Dodd

3.1 Solução de 1-sóliton de BD

O procedimento discutido anteriormente fornece a seguinte solução para a equação de Bullough-Dodd definida em (3.77):

$$\varphi = \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1 + 4Xe^{\Gamma} + X^2 e^{2\Gamma}}{1 - 2Xe^{\Gamma} + X^2 e^{2\Gamma}} \right) \tag{3.101}$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + 4Xe^{\Gamma} + X^2 e^{2\Gamma} \right) \tag{3.102}$$

com $\eta = 0$, $\Gamma = 2\sqrt{6}\varepsilon\mu \cosh\theta(x + t\tanh\theta)$ e X um parâmetro livre decorrente da solução do problema linear referente ao método. Como o operador de vértice (3.85) que cria os sólitons do modelo apresenta elementos imaginários, existe a possibilidade de que o parâmetro X não seja apenas um sinal ($\pm$), mas algo mais geral, como uma fase. Nessa situação, podemos inclusive permitir que este parâmetro complexo não seja unimodular. Assim, os elementos que contêm a dependência temporal são da forma

$$Xe^{\Gamma} = \rho e^{\imath\phi} e^{2\sqrt{6}\varepsilon\mu \cosh\theta(x + t\tanh\theta)} = e^{\imath\phi} e^{2\sqrt{6}\varepsilon\mu \cosh\theta(x + t\tanh\theta - x_0)} \tag{3.103}$$

onde o módulo de $X = \rho e^{\imath\phi}$ é absorvido como um deslocamento relativo da posição da onda solitária: $\Gamma \longrightarrow \sqrt{6}\mu\varepsilon \cosh\theta(x - vt - x_0)$

Sendo assim, a solução pode ser expressa como

$$\varphi = \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1 + 4e^{\Gamma + \imath\phi} + e^{2\Gamma + 2\imath\phi}}{1 - 2e^{\Gamma + \imath\phi} + e^{2\Gamma + 2\imath\phi}} \right) \equiv \varphi_r + \imath\varphi_i \tag{3.104}$$

com

$$\varphi_r = \frac{1}{4\beta} \ln \left(\frac{1 + 8\cos\phi e^{\Gamma} + (16 + 2\cos 2\phi)e^{2\Gamma} + 8\cos\phi e^{3\Gamma} + e^{4\Gamma}}{1 - 4\cos\phi e^{\Gamma} + (4 + 2\cos 2\phi)e^{2\Gamma} - 4\cos\phi e^{3\Gamma} + e^{4\Gamma}} \right) \tag{3.105}$$

e

$$\varphi_i = \frac{1}{2\beta} \arctan \left(\frac{6\sin\phi(e^{\Gamma} - e^{3\Gamma})}{1 + 2\cos\phi(e^{\Gamma} + e^{3\Gamma}) + (2\cos 2\phi - 8)e^{2\Gamma} + e^{4\Gamma}} \right) \tag{3.106}$$

Como vimos, o comportamento dos campos depende da escolha do parâmetro X, havendo uma substancial distinção entre os casos. Os campos de Bullough-Dodd associados às diferentes escolhas $X = 1,\ \imath,\ -1,\ -\imath$ ou $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ estão apresentados nas Figuras 3.5 e 3.6 respectivamente.

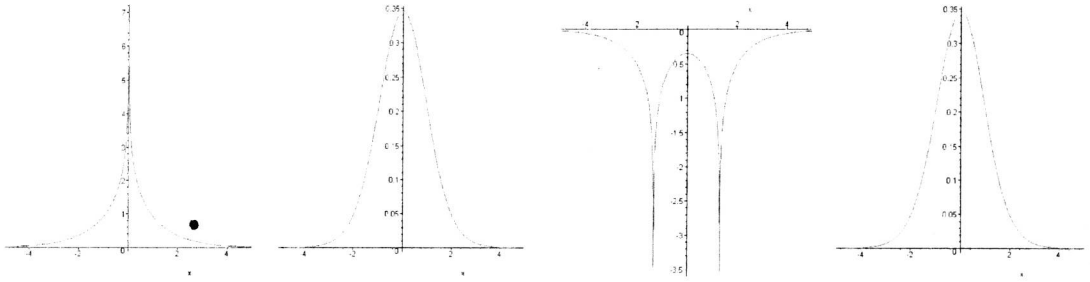

Figura 3.5: Parte real φ_r do campo BD para diferentes fases: $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, seqüencialmente.

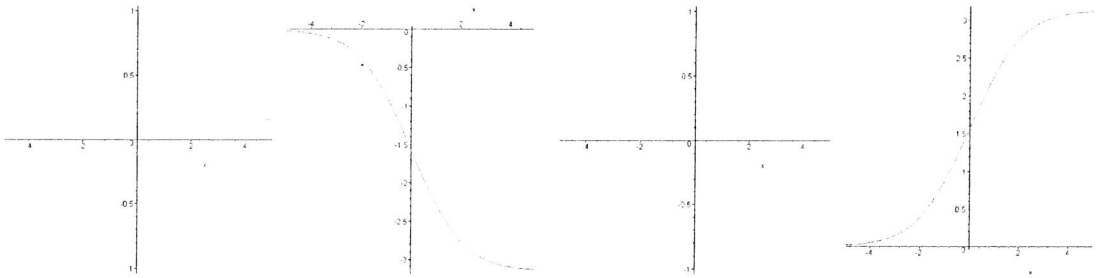

Figura 3.6: Parte imaginária φ_i do campo BD para diferentes fases: $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, seqüencialmente.

Percebe-se então que é possível encontrar uma transformação que envolva apenas uma função-tau:

$$\varphi = \frac{1}{2\beta} \ln\left(1 + \partial_+\partial_- \ln \tau\right) \tag{3.107}$$

com

$$\tau = 1 - Xe^{\Gamma} \tag{3.108}$$

A densidade hamiltoniana (3.65) para a solução apresentada, no caso em que $X = 1$, permite determinar a massa do campo como sendo a integral dessa distribuição num referencial de repouso. A integral da expressão

$$\mathcal{H}_0 = \frac{135}{4\sqrt{6}}\frac{\mu^2}{\beta^2}\frac{X^2e^{2\Gamma}(1+Xe^{\Gamma})^2}{(1-Xe^{\Gamma})^2(1+4Xe^{\Gamma}+X^2e^{2\Gamma})^2} \tag{3.109}$$

diverge, indicando um campo de massa infinita para a solução real do campo de Bullough-Dodd.

Apesar dos problemas apresentados pela densidade Hamiltoniana no caso de campos complexos, na órbita dos sólitons a massa das soluções é real, finita e independe da fase complexa ϕ, em contraste com o que ocorre com o caso real.

Para se ver isso, construimos um tensor de energia-momentum para os modelos CAT. Ao admitir um campo complexo como solução, a lagrangeana do sistema deve ser reescrita como (3.68) e o tensor energia-momentum fica da seguinte maneira

$$\theta_{\mu\nu}^{CAT} = \theta_{\mu\nu} - \left(\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\partial^2\right)\frac{1}{8}\left(2(\varphi+\varphi^*)+3(\nu+\nu^*)\right) \tag{3.110}$$

onde o segundo termo é uma divergência, o que garante que esta quantidade seja conservada; ele foi adicionado para que o novo tensor possua traço nulo, como esperado de uma teoria conforme. Como uma teoria conforme possui massa nula, tem-se

$$\int dx\theta_{00}^{CAT} = 0 \tag{3.111}$$

Não perdendo de vista que um modelo AT pode ser obtido simplesmente fixando-se $\eta = \eta_0$, podemos estabelecer que a massa do sóliton depende do comportamento assintótico dos campos φ e ν, de forma que ela apresenta um caráter topológico:

$$M = \frac{1}{8\beta^2}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}\frac{\partial}{\partial_t}\left(2(\varphi+\varphi^*)+3(\nu+\nu^*)\right)|_{-\infty}^{\infty} \tag{3.112}$$

dependendo apenas do comportamento assintótico das partes reais dos campos o sóliton de Bullough-Dodd tem massa

$$M = \frac{6\sqrt{6}\mu}{\beta^2} \tag{3.113}$$

de onde se vê que para massas solitônicas finitas, como desejado, existe uma equivalência entre o acoplamento e o termo de massa. A massa do sóliton é então gerada por um mecanismo do tipo Higgs, em que a escolha do valor de vácuo para o campo $\eta = \eta^0$ quebra a simetria conforme do modelo CAT.

As soluções encontradas permitem também determinar cargas topológicas conservadas ao longo da evolução do modelo de Bullough-Dodd. Perceba que a carga (3.67) depende do comportamento assintótico do campo. Logo, vê-se que, enquanto o campo φ_r apresenta carga topológica nula, o campo φ_i apresenta valor não-nulo para esta quantidade conservada:

$$Q = -\varepsilon sign(\sin\phi) \tag{3.114}$$

3.2 Solução de 2-sólitons de BD

Foi mostrado que o modelo BD apresenta soluções do tipo ondas solitárias. Imagine agora que exista outra solução para a qual no passado remoto temos N ondas solitárias com posições e velocidades arbitrárias. Esta solução evolui no tempo e no futuro distante temos novamente N ondas solitárias. Temos assim o que se chama de solução de N-sólitons.

A solução de dois sólitons não apresenta nenhuma dificuldade teórica extra em relação ao caso de 1-sóliton, e as funções-τ de Hirota que satisfazem as equações (3.93) e (3.94) e descrevem a propagação de dois sólitons são dadas pelas expressões seguintes:

$$\begin{aligned}\tau_1^2 = 1 &- \frac{1}{2}Xe^{\Gamma_1} - \frac{1}{2}Ye^{\Gamma_2} + \frac{1}{16}X^2e^{2\Gamma_1} + \frac{1}{16}Y^2e^{2\Gamma_2} + \\ &+\frac{1}{4}\frac{(z_1^4+4z_1^2z_2^2+z_2^4)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)}XYe^{\Gamma_1+\Gamma_2} + \\ &-\frac{1}{32}\frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)}X^2Ye^{2\Gamma_1+\Gamma_2} + \\ &-\frac{1}{32}\frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)}XY^2e^{\Gamma_1+2\Gamma_2} + \\ &+\frac{1}{256}\frac{(z_1-z_2)^4(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)^2}{(z_1+z_2)^4(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)^2}X^2Y^2e^{2\Gamma_1+2\Gamma_2}\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned}\tau_0 = 1 + Xe^{\Gamma_1} + Ye^{\Gamma_2} + \frac{1}{16}X^2e^{2\Gamma_1} + \frac{1}{16}Y^2e^{2\Gamma_2} + \\ + \frac{1}{2}\frac{(2z_1^4 - z_1^2z_2^2 + 2z_2^4)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)}XYe^{\Gamma_1+\Gamma_2} + \\ + \frac{1}{16}\frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)}X^2Ye^{2\Gamma_1+\Gamma_2} + \\ + \frac{1}{16}\frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)}XY^2e^{\Gamma_1+2\Gamma_2} + \\ + \frac{1}{256}\frac{(z_1-z_2)^4(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)^2}{(z_1+z_2)^4(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)^2}X^2Y^2e^{2\Gamma_1+2\Gamma_2}\end{aligned} \tag{3.116}$$

onde $\Gamma_1 = \sqrt{6}\mu\varepsilon_1(e^{\theta_1}x_+ - e^{-\theta_1}x_-)$, $\Gamma_2 = \sqrt{6}\mu\varepsilon_2(e^{\theta_2}x_+ - e^{-\theta_2}x_-)$, X e Y são parâmetro complexos livres e $z_1 = e^{\theta_1}$ e $z_2 = e^{\theta_2}$ estão associados à rapidez de cada um dos sólitons em rota de colisão .

Uma das propriedades mais importantes que podemos extrair da solução de 2-sólitons obtida acima é o chamado *time delay*, que mede o quanto a rota de um dos sólitons se alterou devido à interação com o outro.

Time Delay

O cálculo do *time delay* [21] é feito considerando-se que os sólitons são assintoticamente livres no sentido em que a interação entre eles não é sentida quando estes estão muito distantes. Longe da região de colisão , então , os sólitons caminham em linha reta obedecendo a equações horárias de um movimento uniforme, de acordo com a Figura 3.7.

Para que as soluções se encontrem em algum instante, uma deve ter velocidade maior que a outra: $\Gamma_1 = \gamma_1(x - v_1t - x_1)$ e $\Gamma_2 = \gamma_2(x - v_2t - x_2)$, com $v_1 > v_2$, por exemplo. O *tracking* é feito colocando-se num referencial que se move com uma das partículas: $x = v_1t$, de modo que $e^{\Gamma_1} = e^{\gamma_1x_1}$ é finito e $e^{\Gamma_2} = e^{\gamma_2((v_1-v_2)t-x_2)}$ apresenta dependência temporal.

Da expressão para a solução de 2-sólitons

$$\frac{\tau_0}{\tau_1^2} = \frac{1 + aXe^{\Gamma_1} + bYe^{\Gamma_2} + cX^2e^{2\Gamma_1} + dY^2e^{2\Gamma_2} + fXYe^{\Gamma_1+\Gamma_2} + gX^2Ye^{2\Gamma_1+\Gamma_2} + hXY^2e^{\Gamma_1+2\Gamma_2} + jX^2Y^2e^{2\Gamma_1+2\Gamma_2}}{1 + 2xXe^{\Gamma_1} + 2yYe^{\Gamma_2} + x^2X^2e^{2\Gamma_1} + y^2Y^2e^{2\Gamma_2} + 2(xy+z)XYe^{\Gamma_1+\Gamma_2} + 2xzX^2Ye^{2\Gamma_1+\Gamma_2} + 2yzXY^2e^{\Gamma_1+2\Gamma_2} + z^2X^2Y^2e^{2\Gamma_1+2\Gamma_2}} \tag{3.117}$$

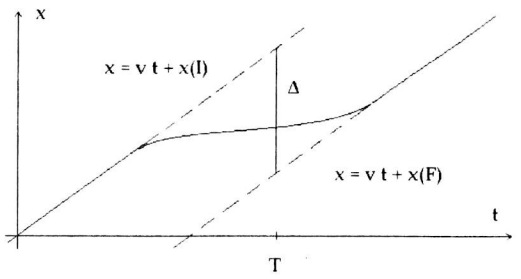

Figura 3.7: Gráfico mostrando que o efeito da colisão sobre a trajetória de um dos sólitons, no referencial do outro sóliton, é apenas deslocar o coefiente linear da equação de movimento, uma vez que as velocidades não são alteradas no choque.

vemos que, enquanto num tempo infinitamente anterior ao choque os termos contendo e^{Γ_2} podem ser desprezados,

$$\frac{\tau_0}{\tau_1^2}|_{t=-\infty} = \frac{1 + aXe^{\Gamma_1} + cX^2e^{2\Gamma_1}}{1 + 2xXe^{\Gamma_1} + x^2X^2e^{2\Gamma_1}} \tag{3.118}$$

num tempo infinitamente posterior ao encontro o comportamento assintótico é dominado por fatores e^{Γ_2}, a expressão acima assume a forma

$$\frac{\tau_0}{\tau_1^2}|_{t=\infty} = \frac{dY^2e^{2\Gamma_2}}{y^2Y^2e^{2\Gamma_2}}\left(\frac{1 + \frac{h}{d}Xe^{\Gamma_1} + \frac{j}{d}X^2e^{2\Gamma_1}}{1 + \frac{2z}{y^2}Xe^{\Gamma_1} + \frac{z^2}{y^2}X^2e^{2\Gamma_1}}\right) \tag{3.119}$$

Comparando o comportamento em (3.118) com (3.119), vemos que o argumento das exponenciais sofre uma alteração $\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1 + \ln\frac{h}{ad}$, com $\frac{h}{ad} = \frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)^2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)}{(z_1+z_2)^2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)}$, de acordo com (3.116) e (3.115)

Com isso, o deslocamento lateral na posição deste sóliton é dado por

$$\Delta L = \frac{1}{2\sqrt{6}\cosh\theta}\frac{1}{\mu}\ln\frac{1}{4}\frac{(z_1 - z_2)^2(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2)}{(z_1 + z_2)^2(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2)} \tag{3.120}$$

e o atraso temporal, por

$$\Delta T = \frac{1}{2\sqrt{6}\sinh\theta}\frac{1}{\mu}\ln\frac{1}{4}\frac{(z_1 - z_2)^2(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2)}{(z_1 + z_2)^2(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2)} \tag{3.121}$$

sendo que a quantidade invariante por Lorentz é dada por

$$p\Delta T = M\sinh\theta\Delta T = \frac{3}{\beta^2}\ln\frac{1}{4}\frac{(z_1 - z_2)^2(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2)}{(z_1 + z_2)^2(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2)} \tag{3.122}$$

de onde se obtém uma importante propriedade dos sólitons: quanto maior o acoplamento do campo, menor a interação dos sólitons. É por essa razão que se diz que eles podem ajudar na compreensão dos setores de acoplamento forte das teorias de Yang-Mills. Note ainda que, cinematicamente, quanto maior a diferença entre as velocidades dos sólitons menor o desvio sofrido por eles.

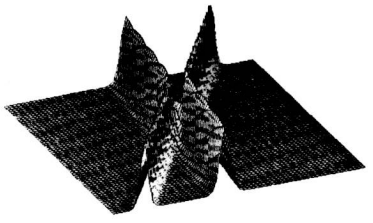

Figura 3.8: Gráfico que ilustra o deslocamento de duas soluções do tipo sóliton, associadas à parte real do campo de Bullough-Dodd, φ_r, com fase $\phi = \frac{\pi}{2}$, em rota de colisão, para um acoplamento unitário. Observe que os sólitons interagem e após o choque, permanecem inalterados.

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

4 A inclusão de novos campos de matéria

Encontrada a solução solitônica do modelo de Bullough-Dodd, concentramo-nos agora na formulação do sistema de Toda associado acoplado a campos de matéria. A generalização almejada é feita introduzindo-se campos nas direções dos geradores com grau a partir de 1, ou seja, $l = 2$, de acordo com (2.32).

Entretanto, nem todos os casos serão frutíferos, como por exemplo os casos $l = 2$, $l = 4$, e $l = 5$, em que não é possível encontrar uma solução de vácuo tal que os potenciais, quando calculados nesses vácuos, formem uma subálgebra de osciladores. Isso impede a construção dos sólitons pelo método que vem sendo explorado.

Desse modo, limitaremo-nos a apresentar os resultados para as generalizações com $l = 3$ e $l = 6$, denotados por MBD3 e MBD6, respectivamente.

4.1 Modelo $MBD3$

Para este caso, são introduzidos novos campos nas direções ± 1 e ± 2:

$$\Lambda^{\pm} = \psi_0^{\pm}\sqrt{2}L_{\mp 2}^{\pm\frac{1}{2}} + \psi_1^{\pm}T_{\pm}^0 + \psi_2^{\pm}L_{\mp 1}^{\pm\frac{1}{2}} + L_0^{\pm\frac{1}{2}} \tag{3.123}$$

que fornecem o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\partial_+\partial_-\eta = 0 \tag{3.124}$$

$$\partial_+\partial_-\nu + 3e^{3\eta} + 2e^{-2\varphi+2\eta}\psi_2^+\psi_2^- + e^{-4\varphi+\eta}\psi_0^+\psi_0^- = 0 \tag{3.125}$$

$$\partial_+\partial_-\varphi - e^{-2\varphi+2\eta}\psi_2^+\psi_2^- + e^{2\varphi+\eta}\psi_1^+\psi_1^- - e^{-4\varphi+\eta}\psi_0^+\psi_0^- = 0 \tag{3.126}$$

$$\partial_\mp\psi_0^{\pm} + 2\sqrt{2}e^{2\varphi+\eta}\psi_2^{\pm}\psi_1^{\mp} = 0 \tag{3.127}$$

$$\partial_\mp\psi_1^{\pm} - 3e^{-2\varphi+2\eta}\psi_2^{\mp} - \sqrt{2}e^{-4\varphi+\eta}\psi_2^{\pm}\psi_0^{\mp} = 0 \tag{3.128}$$

$$\partial_\mp\psi_2^{\mp} + 3e^{2\varphi+\eta}\psi_1^{\pm} = 0 \tag{3.129}$$

Combinando-se as equações (3.127) e (3.129), observamos a conservação das correntes quirais:

$$\partial_\mp\left(\psi_0{}^{\pm} - \frac{\sqrt{2}}{3}\psi_2^{\pm}\psi_2^{\pm}\right) = 0 \tag{3.130}$$

Vê-se ainda que uma solução de vácuo para este sistema consiste em tomar, dentre outras coisas, todos os campos de matéria nulos:

$$\psi_i^{0\pm} = 0 \ ; \quad \eta^0 = 0 \ ; \quad \nu^0 = -3x_+x_- \ ; \quad \varphi^0 = 0 \tag{3.131}$$

Os potenciais de vácuo são então dados por

$$A_+^0 = -L_0^{\frac{1}{2}} \qquad A_-^0 = L_0^{-\frac{1}{2}} + 3x_+C \tag{3.132}$$

e obedecem, pois, uma álgebra de osciladores: $[A_+^0, A_-^0] = -3C$, satifazendo a condição de curvatura nula, de forma que os sólitons são criados pelos auto-estados de $L_0^{\pm\frac{1}{2}}$:

$$[L_0^{\pm\frac{1}{2}}, \alpha_1 V_1(-z) + \alpha_2 V_2(z)] = 3z^{\pm 3}\{\alpha_1 V_1(-z) + \alpha_2 V_2(z)\} \tag{3.133}$$

com

$$V_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(L_{-1}^{m+\frac{1}{2}} z^{-6m-2} + T_-^{m+1} z^{-6m-5} \right) \tag{3.134}$$

$$V_2(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(T_+^m z^{-6m-1} + L_1^{m+\frac{1}{2}} z^{-6m-4} \right) \tag{3.135}$$

Ademais:

$$U_0 = e^{x_+ L_0^{+\frac{1}{2}}} e^{x_- L_0^{-\frac{1}{2}}} \quad \longleftrightarrow \quad A_\mu^0 = -\partial_\mu U_0 U_0^{-1} \tag{3.136}$$

O *dressing* do modelo é então feito conjugando-se o elemento constante h por U_0 e admitindo por hipótese que esse novo elemento pode ser decomposto como $g = U_0 h U_0^{-1} = g_- g_0 g_+ = \theta_-^{-1}\theta_+$, com a parametrização $g_\pm = e^{\sum_{m>0} t(\pm m)}$.

O novo elemento de grupo $U_h \equiv \theta_+ U_0 = \theta_-^{-1} U_0 h$ está associado ao novo potencial $A_\mu^h \equiv \theta_\pm A_\mu^0 \theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \theta_\pm \theta_\pm^{-1}$, de modo que

$$-B\Lambda^+ B^{-1} = \theta_\pm A_+^0 \theta_\pm^{-1} - \partial_+ \theta_\pm \theta_\pm^{-1} \tag{3.137}$$

$$-\partial_- B B^{-1} + \Lambda^- = \theta_\pm A_-^0 \theta_\pm^{-1} - \partial_- \theta_\pm \theta_\pm^{-1} \tag{3.138}$$

Vemos de (3.137) que se o vácuo tem $\eta = 0$, o lado esquerdo da equação não pode ter $\eta \neq 0$, pois a gradação Q não pode ser obtida como comutador de nenhum

par de elementos da álgebra. Diz-se que o dressing não excita o campo η a partir de um vácuo com $\eta = 0$. Logo, B não tem η na órbita do vácuo: $B = e^{2\varphi T_3^0 + \nu C}$. Percebemos ainda da componente de grau zero e com θ_- de (3.138) que $B = g_0 e^{-3x_+ x_- C}$.

Já olhando para a equação (3.137) associada a uma transformação negativa, com θ_-, tal que o último termo não contribua (por conter apenas termos com grau negativo enquanto o lado esquerdo contém apenas termos com grau positivo) e considerando a equação (3.138) com transformações positivas θ_+, concluimos que:

$$\Lambda_2^{\pm} = \mp[t^{\mp 1}, L_0^{\pm\frac{1}{2}}] \qquad \Lambda_1^{\pm} = \mp[t^{\mp 2}, L_0^{\pm\frac{1}{2}}] + \frac{1}{2}[t^{\mp 1}, [t^{\mp 1}, L_0^{\pm\frac{1}{2}}]] \tag{3.139}$$

Lembrando ainda que numa representação de peso máximo temos $\mathcal{G}_+|\lambda\rangle = 0$ e $\langle\lambda|\mathcal{G}_- = 0$, vemos que os elementos de matriz

$$\langle\lambda|\mathcal{G}_+ g|\lambda\rangle = \langle\lambda|g_-^{-1}\mathcal{G}_+ g_- g_0|\lambda\rangle = \langle\lambda|\{\mathcal{G}_+ - \sum_m [t^{-m}, \mathcal{G}_+] + \frac{1}{2}\sum_{m,n}[t^{-n}, [t^{-m}, \mathcal{G}_+]] + \cdots\} g_0|\lambda\rangle \tag{3.140}$$

$$\langle\lambda|g\mathcal{G}_-|\lambda\rangle = \langle\lambda|g_0 g_+ \mathcal{G}_- g_+^{-1}|\lambda\rangle = \langle\lambda|g_0\{\mathcal{G}_- + \sum_m [t^m, \mathcal{G}_-] + \frac{1}{2}\sum_{m,n}[t^n, [t^m, \mathcal{G}_-]] + \cdots\}|\lambda\rangle \tag{3.141}$$

correspondem a séries que truncam, o que fazem destas expressões bons candidatos para fornecer a função-τ do problema.

Os geradores dos elementos com grau ± 1 e ± 2 podem ser expressos em termos dos geradores da álgebra e para isso fazemos a parametrização:

$$t^{\mp 1} = a^{\mp} T_{\mp}^0 + b^{\mp} L_{\pm 2}^{\mp\frac{1}{2}} \qquad t^{\mp 2} = d^{\mp} L_{\pm 1}^{\mp\frac{1}{2}}$$

e os parâmetros podem ser determinados com a imposição de que valham $\Lambda_1^{\pm} = \psi_1^{\pm} T_{\pm}^0 + \sqrt{2}\psi_0^{\pm} L_{\mp 2}^{\pm\frac{1}{2}}$ e $\Lambda_2^{\pm} = \psi_2^{\pm} L_{\mp} 1^{\pm\frac{1}{2}}$:

$$\psi_2^{\pm} = -3a^{\mp} \qquad \psi_1^{\pm} = 3\left(d^{\mp} - \frac{a^{\mp} b^{\mp}}{2}\right) \tag{3.142}$$

Dessa consistência surge também a seguinte *redução*:

$$\psi_0^{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{3}\psi_2^{\pm}\psi_2^{\pm} \tag{3.143}$$

em que os campos $\psi_0^{\pm}$ são eliminados em favor de $\psi_2^{\pm}$. Como conseqüência disso a corrente quiral a ser conservada (3.130) é trivialmente nula.

As funções-τ associadas aos campos de matéria são então dadas como elementos do tipo (3.140) e (3.141):

$$\tau_1^{\pm} \equiv \langle \lambda_1 | T_+^0 g | \lambda_1 \rangle = -\frac{1}{3}\psi_2^{\pm}\tau_1 \tag{3.144}$$

$$\tau_0^{\pm} \equiv \langle \lambda_0 | L_{\mp 1}^{\pm\frac{1}{2}} g | \lambda_0 \rangle = \frac{4}{3}\psi_1^{\mp}\tau_0 \tag{3.145}$$

com $\tau_0 = e^{-2(\nu+3x_+x_-)}$ e $\tau_1^2 = e^{-2\varphi}\tau_0$, como no caso Bullough-Dodd original, diferindo apenas pelo coeficiente de x_+x_-C.

O sistema de equações com a redução hamiltoniana é ligeiramente simplificado. Na verdade, as equações podem ser mais convenientemente escritas em termos de spinores. Somos então levados a definir as matrizes-γ

$$\gamma_0 = \imath \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \gamma_1 = -\imath \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 \tag{3.146}$$

e os spinores

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1^+ \\ \psi_2^- \end{pmatrix} ; \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} \psi_2^+ \\ -\psi_1^- \end{pmatrix} \tag{3.147}$$

Dessa maneira as equações de movimento assumem uma forma mais interessante, em que fica claro que os campos $\psi_1^{\pm}$ e $\psi_2^{\pm}$ obedecem equações de Dirac:

$$\partial_+\partial_-\eta = 0 \tag{3.148}$$

$$\partial_+\partial_-\nu - 2\imath e^{-2\varphi+2\eta}\bar{\psi}_2 P_-\psi_1 - \frac{2}{9}e^{-4\varphi+\eta}\left(\bar{\psi}_2 P_-\psi_1\right)^2 + 3e^{3\eta} = 0 \tag{3.149}$$

$$\partial_+\partial_-\varphi - \imath\bar{\psi}_2\left(e^{2\varphi+2\eta}P_+ - e^{-2\varphi+2\eta}P_-\right)\psi_1 - \frac{2}{9}e^{-4\varphi+\eta}\left(\bar{\psi}_2 P_-\psi_1\right)^2 = 0 \tag{3.150}$$

$$\imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - 6\bar{\psi}_2\left(e^{2\varphi+\eta}P_+ + e^{-2\varphi+2\eta}P_-\right)\psi_1 + U_1 = 0 \tag{3.151}$$

$$\imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - 6\bar{\psi}_2\left(e^{-2\varphi+2\eta}P_+ + e^{2\varphi+\eta}P_-\right)\psi_2 + U_2 = 0 \tag{3.152}$$

com os projetores dados por

$$P_+ = \left(\frac{\mathbf{1}+\gamma_5}{2}\right) \qquad P_- = \left(\frac{\mathbf{1}-\gamma_5}{2}\right) \tag{3.153}$$

e os potenciais de interação, por

$$U_1 = e^{\eta} Tr\left(T_-^0[\Lambda_2^+, e^{-2\varphi T_3^0}\Lambda_1^- e^{2\varphi T_3^0}]\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{3.154}$$

$$U_2 = e^{\eta} Tr\left(T_+^0[\Lambda_2^-, e^{2\varphi T_3^0}\Lambda_1^+ e^{-2\varphi T_3^0}]\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{3.155}$$

Reescrevendo-as em termos das novas variáveis definidas pelas funções-τ temos:

$$\partial_+\tau_0\partial_-\tau_0 - \tau_0\partial_+\partial_-\tau_0 + 36\tau_1^+\tau_1^-(\tau_0 - \tau_1^+\tau_1^-) = 0 \tag{3.156}$$

$$\tau_0\partial_+\tau_1\partial_-\tau_1 - \tau_0\tau_1\partial_+\partial_-\tau_1 + 9\tau_1^2\tau_1^+\tau_1^- + \frac{9}{16}\tau_0^+\tau_0^- = 0 \tag{3.157}$$

$$\tau_1^\pm\partial_\mp\tau_1 - \tau_1\partial_\mp\tau_1^\pm + \frac{3}{4}\tau_0^\mp = 0 \tag{3.158}$$

$$\tau_0\partial_\mp\tau_0^\pm - \tau_0^\pm\partial_\mp\tau_0 + 12\tau_1\tau_1^\mp(\tau_0 + 2\tau_1^\pm\tau_1^\mp) = 0 \tag{3.159}$$

Os ansatz para se resolver esse sistema de equações é dado pelo cálculo dos elementos de matriz (3.144) e (3.145), além dos ansatz usados no caso de Bullough-Dodd normal, (3.91) e (3.92). A diferença entre esses casos é que agora a série não tem o termo independente e começa com termos do tipo e^Γ, pois $\langle\lambda|\mathcal{G}_\pm|\lambda\rangle = 0$.

As soluções solitônicas para esse caso são dadas por

$$\tau_0 = X - a_1^+ a_1^- e^{2\Gamma} \qquad \tau_1 = Y \tag{3.160}$$

$$\tau_0^\pm = \pm 4Yz^{\pm 1}a_1^\pm e^\Gamma \qquad \tau_1^\pm = a_1^\pm e^\Gamma \tag{3.161}$$

onde $\Gamma = 3\gamma(x - vt)$ e as constantes $a_1^\pm$ se relacionam com as constantes α_1 e α_2 que aparecem na forma geral do auto-estado de $L_0^{\pm\frac{1}{2}}$.

Agora que temos as soluções procuradas para este modelo, vamos analisar as simetrias das equações de movimento. Inicialmente, note que elas são invariantes sob transformações conformes do tipo $x_\pm \longrightarrow \lambda^\mp x_\pm$, desde que os campos se transformem como

$$\varphi \longrightarrow \varphi \qquad \nu \longrightarrow \nu \qquad \eta \longrightarrow \eta \tag{3.162}$$

$$\psi_0 \pm \longrightarrow \lambda^{\pm\frac{2}{3}}\psi_0 \pm \qquad \psi_1 \pm \longrightarrow \lambda^{\pm\frac{2}{3}}\psi_1 \pm \qquad \psi_2 \pm \longrightarrow \lambda^{\pm\frac{1}{3}}\psi_2 \pm \tag{3.163}$$

Notamos também que existe uma simetria de gauge global gerada pelo elemento T_3^0 que gera uma carga conservada. Sob tal invariância os campos se transformam da seguinte maneira:

$$\varphi \longrightarrow \varphi \qquad \nu \longrightarrow \nu \qquad \eta \longrightarrow \eta \tag{3.164}$$

$$\psi_0 \pm \longrightarrow e^{\mp 2\imath\alpha}\psi_0 \pm \qquad \psi_1 \pm \longrightarrow e^{\pm\imath\alpha}\psi_1 \pm \qquad \psi_2 \pm \longrightarrow e^{\mp\imath\alpha}\psi_2 \pm \tag{3.165}$$

ou seja, os campos acopladaos são carregados, enquanto os campos de Toda são neutros, e a carga de ψ_0 é o dobro da de ψ_1 e ψ_2.

Gostaríamos ainda de determinar o spin das partículas fundamentais associadas aos campos. Sabemos que a maneira pela qual um objeto se comporta sob transformações de Lorentz é caracterizada por seu spin: enquanto campos escalares são invariantes e campos vetoriais se transformam da maneira usual em duas dimensões, os spinores apresentam uma transformação menos trivial:

$$\phi \longrightarrow \phi \qquad x_\mu \longrightarrow \Lambda_\mu^\nu x_\nu \qquad \psi \longrightarrow S\psi \tag{3.166}$$

com

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} e^{(1-\lambda)\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\theta} \end{pmatrix} \tag{3.167}$$

de acordo com (3.163).

A linearização das equações de movimento, que consiste em desprezar os termos que não são lineares nos campos, permite-nos notar que o campo ψ_1^+ só se acopla com ψ_2^-, assim como ψ_2^+, que se acopla apenas com ψ_1^-. Ainda dentro da aproximação linear, concluimos que os únicos campos massivos desse submodelo são $\psi_1^\pm$ e $\psi_2^\pm$, com

massa $m^2 = 36e^{3\eta}$. Desconsiderar os termos responsáveis pelas interações entre os campos também resulta em que os novos campos se comportem como campos de Dirac.

Se impusermos ainda que $\overline{\psi}_2 \equiv \psi_2^T \gamma_0$, poderemos derivar tais equações de movimento a partir da seguinte lagrangeana livre:

$$\mathcal{L}_0 = i\overline{\psi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 - 6\overline{\psi}_2 \left(e^\eta \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) + e^{2\eta} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \right) \psi_1 \tag{3.168}$$

A simetria $U(1)$ que permite $\psi^\pm \longrightarrow e^{\pm i\alpha}\psi^\pm$ gera uma corrente de Noether

$$J^\mu = \overline{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 \tag{3.169}$$

De maneira mais explícita temos

$$\mathcal{L}_0 = \left(\psi_1^- \partial_+ \psi_2^- - \psi_2^+ \partial_- \psi_1^+ \right) + 3 \left(e^\eta \psi_1^+ \psi_1^- + e^{2\eta} \psi_2^+ \psi_2^- \right) \tag{3.170}$$

$$J^\pm = \mp \psi_1^\mp \psi_2^\mp \tag{3.171}$$

É natural o interesse em construir uma lagrangeana completa para o sistema aqui tratado. Porém, o conjunto de equações de movimento obtido pela introdução da redução hamiltoniana ainda é demasiado complicado, apresentando inclusive acoplamentos cúbicos nos campos, sendo difícil encontrar a ação que o descreva. Deveras, o máximo que se pode fazer é :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = \partial_+ \varphi \partial_- \varphi + \frac{1}{3} \psi_2^+ \partial_- \psi_1^+ - \frac{1}{3} \psi_1^- \partial_+ \psi_2^- + \\ - e^{2\varphi} \psi_1^+ \psi_1^- - e^{-2\varphi} \psi_2^+ \psi_2^- - \frac{1}{9} e^{-4\varphi} \psi_2^+ \psi_2^+ \psi_2^- \psi_2^- \end{aligned} \tag{3.172}$$

que fornece as equações para os todos os campos, com $\eta = 0$, exceto para o campo auxiliar ν.

4.2 Modelo $MBD6$

Nessa situação os potenciais chatos são

$$A_+ = e^{-4\varphi+\eta}\sqrt{2}\psi_0^+ L_{-2}^{\frac{1}{2}} + e^{2\varphi+\eta}\psi_1^+ T_+^0 + e^{-2\varphi+2\eta}\psi_2^+ L_{-1}^{\frac{1}{2}} + e^{3\eta}\psi_3^+ L_0^{\frac{1}{2}} + e^{2\varphi+4\eta}\psi_4^+ L_1^{\frac{1}{2}} + e^{4\varphi+5\eta}\sqrt{2}\psi_5^+ L_2^{\frac{1}{2}} + e^{-2\varphi+5\eta}\psi_6^+ T_-^1 + e^{6\eta}T_3^1 \tag{3.173}$$

$$\begin{aligned} \bullet A_- = {} & \sqrt{2}\psi_0^- L_2^{-\frac{1}{2}} + \psi_1^- T_-^0 + \psi_2^- L_1^{-\frac{1}{2}} + \psi_3^- L_0^{-\frac{1}{2}} + \\ & + \psi_4^- L_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\psi_5^- L_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \psi_6^- T_+^{-1} + T_3^{-1} + \\ & - 2\partial_-\varphi T_3^0 - \partial_-\nu C - \partial_-\eta Q \end{aligned} \tag{3.174}$$

sendo que os demais casos não podem ser obtidos a partir destes potenciais impondo-se simplesmente condições do tipo $\psi = 0$. As equações de movimento para todos os 17 campos desse modelo seguem abaixo:

$$\partial_+\partial_-\eta = 0 \tag{3.175}$$

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_-\nu + 2e^{6\eta} + e^{-4\varphi+\eta}\psi_0^+\psi_0^- + 2e^{-2\varphi+2\eta}\psi_2^+\psi_2^- + 3e^{3\eta}\psi_3^+\psi_3^- + \\ + 2e^{2\varphi+4\eta}\psi_4^+\psi_4^- + e^{4\varphi+5\eta}\psi_5^+\psi_5^- + 4e^{-2\varphi+5\eta}\psi_6^+\psi_6^- = 0 \end{aligned} \tag{3.176}$$

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_-\varphi - e^{-4\varphi+\eta}\psi_0^+\psi_0^- + e^{2\varphi+\eta}\psi_1^+\psi_1^- - e^{-2\varphi+2\eta}\psi_2^+\psi_2^- + \\ + e^{2\varphi+4\eta}\psi_4^+\psi_4^- + e^{4\varphi+5\eta}\psi_5^+\psi_5^- - e^{-2\varphi+5\eta}\psi_6^+\psi_6^- = 0 \end{aligned} \tag{3.177}$$

$$\partial_\mp\psi_0^\pm + 2\sqrt{2}e^{2\varphi+\eta}\psi_2^\pm\psi_1^\mp - 2\sqrt{2}e^{2\varphi+4\eta}\psi_6^\pm\psi_4^\mp + 2e^{4\varphi+5\eta}\psi_5^\mp = 0 \tag{3.178}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mp\psi_1^\pm - \sqrt{2}e^{-4\varphi+\eta}\psi_2^\pm\psi_0^\mp - 3e^{-2\varphi+2\eta}\psi_3^\pm\psi_2^\mp + 3e^{3\eta}\psi_4^\pm\psi_3^\mp + \\ + \sqrt{2}e^{2\varphi+4\eta}\psi_5^\pm\psi_4^\mp - e^{-2\varphi+5\eta}\psi_6^\mp = 0 \end{aligned} \tag{3.179}$$

$$\partial_{\mp}\psi_2^{\pm} + 3e^{2\varphi+\eta}\psi_3^{\pm}\psi_1^{\mp} - 3e^{3\eta}\psi_6^{\pm}\psi_3^{\mp} + e^{2\varphi+4\eta}\psi_4^{\mp} = 0 \tag{3.180}$$

$$\partial_{\mp}\psi_3^{\pm} - 2e^{2\varphi+\eta}\psi_4^{\pm}\psi_1^{\mp} + 2e^{-2\varphi+2\eta}\psi_6^{\pm}\psi_2^{\mp} = 0 \tag{3.181}$$

$$\partial_{\mp}\psi_4^{\pm} + \sqrt{2}e^{-4\varphi+\eta}\psi_6^{\pm}\psi_0^{\mp} - \sqrt{2}e^{2\varphi+\eta}\psi_5^{\pm}\psi_1^{\mp} - e^{-2\varphi+2\eta}\psi_2^{\mp} = 0 \tag{3.182}$$

$$\partial_{\mp}\psi_5^{\pm} - 2e^{-4\varphi+\eta}\psi_0^{\mp} = 0 \tag{3.183}$$

$$\partial_{-}\psi_6^{\pm} + e^{2\varphi+\eta}\psi_1^{\mp} = 0 \tag{3.184}$$

sendo que as equações para os novos campos podem ser expressas como:

$$\imath\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_1 - 2\left(e^{2\varphi+\eta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) + e^{-2\varphi+5\eta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right)\psi_1 + U_1 = 0 \tag{3.185}$$

$$\imath\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_6 - 2\left(e^{-2\varphi+5\eta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) + e^{2\varphi+\eta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right)\psi_6 + U_6 = 0 \tag{3.186}$$

$$\imath\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_0 - 4\left(e^{4\varphi+\eta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) + e^{-4\varphi+5\eta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right)\psi_0 + U_0 = 0 \tag{3.187}$$

$$\imath\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_5 - 4\left(e^{-4\varphi+5\eta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) + e^{4\varphi+\eta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right)\psi_5 + U_5 = 0 \tag{3.188}$$

$$\imath\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_2 - 2\left(e^{2\varphi+2\eta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) + e^{-2\varphi+4\eta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right)\psi_2 + U_2 = 0 \tag{3.189}$$

$$\imath\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_4 - 2\left(e^{-2\varphi+4\eta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) + e^{2\varphi+2\eta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right)\psi_4 + U_4 = 0 \tag{3.190}$$

$$\imath\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_3 + U_3 = 0 \tag{3.191}$$

com os potencias de interação sendo do tipo

$$U_i = \sum_n e^{n\eta} Tr(\mathcal{G}_i[\Lambda_{n+1}^{\pm}, e^{\mp 2\varphi T_3^0}\Lambda_n^{\mp}e^{\pm 2\varphi T_3^0}]) \tag{3.192}$$

e os spinores dados por

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} +\psi_1^+ \\ +\psi_6^- \end{pmatrix} \qquad \psi_0 = \begin{pmatrix} +\psi_0^+ \\ -\psi_5^- \end{pmatrix} \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} +\psi_2^+ \\ -\psi_4^- \end{pmatrix} \tag{3.193}$$

$$\psi_6 = \begin{pmatrix} +\psi_6^+ \\ -\psi_1^- \end{pmatrix} \qquad \psi_5 = \begin{pmatrix} +\psi_5^+ \\ +\psi_0^- \end{pmatrix} \qquad \psi_4 = \begin{pmatrix} +\psi_4^+ \\ +\psi_2^- \end{pmatrix} \tag{3.194}$$

A linearização destas equações fornece as massas das partículas fundamentais associadas aos campos:

$$m_\eta = m_\nu = m_\varphi = m_{\psi_3} = 0 \tag{3.195}$$

$$m_{\psi_0}^2 = m_{\psi_5}^2 = 16e^{6\eta_0} \tag{3.196}$$

$$m_{\psi_1}^2 = m_{\psi_2}^2 = m_{\psi_4}^2 = m_{\psi_6}^2 = 4e^{6\eta_0} \tag{3.197}$$

Com a linearização conseguimos ainda escrever as equações na forma de equações de Dirac:

$$\imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - 2\psi_1 = 0 \qquad \imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_6 - 2\psi_6 = 0 \tag{3.198}$$

$$\imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_0 - 4\psi_0 = 0 \qquad \imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_5 - 4\psi_5 = 0 \tag{3.199}$$

$$\imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - 2\psi_2 = 0 \qquad \imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi_4 - 2\psi_4 = 0 \tag{3.200}$$

além do dos campos $\psi_3^\pm$, que se comportam como componentes de uma equação de Dirac com massa nula.

Como solução de vácuo para o sistema abordado nesta subseção podemos tomar todos os campos se anulando, e com isso os potenciais de vácuo são simplesmente:

$$A_+^0 = -T_3^1 \; ; \qquad A_-^0 = T_3^{-1} \tag{3.201}$$

Devemos determinar os auto-estados dos operadores $T_3^{\pm 1}$, que correspondem à subálgebra de Heisenberg. Temos, pois, solitons de 2 espécies, um associado ao autovalor 1 e outro a 2:

$$[T_3^{\pm 1}, V_{II}(z)] = 2z^{\pm 6} V_{II}(z) \tag{3.202}$$

$$[T_3^{\pm 1}, V_I(z)] = z^{\pm 6} V_I(z) \tag{3.203}$$

com

$$V_{II}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(a_{II} L_2^{m+\frac{1}{2}} z^{-6m-5} + b_{II} L_{-2}^{m+\frac{1}{2}} (iz)^{-6m-1} \right) \tag{3.204}$$

$$V_I(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(a_I T_+^m z^{-6m-1} + b_I L_1^{m+\frac{1}{2}} (z)^{-6m-4} + c_I T_-^m (iz)^{-6m-5} + d_I L_{-1}^{m+\frac{1}{2}} (iz)^{-6m-2} \right) \tag{3.205}$$

Mesmo com $l = 6$ não é necessário que estejam presentes campos nas direções dos geradores com todos os graus inferiores. Uma possibilidade é termos, por exemplo, campos apenas nas direções associadas aos graus 0, 3, 6. As equações resultantes nesse caso são:

$$\partial_+ \partial_- \eta = 0 \tag{3.206}$$

$$\partial_+ \partial_- \nu + 2e^{6\eta} + 3e^{3\eta} \psi_3^+ \psi_3^- = 0 \tag{3.207}$$

$$\partial_+ \partial_- \varphi = 0 \tag{3.208}$$

$$\partial_+ \partial_- \psi_3^{\pm} = 0 \tag{3.209}$$

e uma solução de vácuo para este sistema é

$$\eta^0 = 0 \qquad \nu^0 = -2x_+ x + _- \qquad \varphi^0 = 0 \qquad \psi_3^{\pm 0} = 0 \tag{3.210}$$

Os potenciais de vácuo deste caso, $A_+^0 = -T_3^1$ e $A_-^0 = T_3^{-1} + 2x_+ C$, são essencialmente os mesmos do caso geral, de modo que os estados a serem diagonalizados são os mesmos. Porém, as equações para os campos φ e $\psi_3^{\pm}$ são lienares e apresentam soluções simples. Assim, vamos nos concentrar no caso completo do campo de gauge.

As soluções para este sistema são determinadas pela introdução de funções de Hirota, bem como seu ansatz, através do método de dressing já discutido. Pela estrutura dos auto-estados (3.202) e (3.203), vemos que deve haver soluções com

IFSC-USP SERVIÇO DE INFORMAÇÃO

$\Gamma' = (zx_+ - z^{-1}x_-)$, com degenerescência quádrupla, e $\Gamma = 2(zx_+ - z^{-1}x_-)$, com degenerescência dupla.

No submodelo em que $\psi_1^{\pm} = 0$, $\psi_2^{\pm} = 0$, $\psi_3^{\pm} = 0$, $\psi_4^{\pm} = 0$, $\psi_6^{\pm} = 0$, o sistema de equações simplifica-se e podemos escrever os campos não-nulos em termos de funções-τ de Hirota:

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau_0}{\tau_1^2} \tag{3.211}$$

$$\nu = -2x_+x_- - \frac{1}{2}\ln\tau_0 \tag{3.212}$$

$$\psi_5^{\pm} = \sqrt{2}\frac{\tau_5^{\pm}}{\tau_0} \tag{3.213}$$

$$\psi_0^{\pm} = \sqrt{2}\frac{\tau_0^{\pm}}{\tau_0} \tag{3.214}$$

e em seguida obtemos as equações de Hirota para o sistema, que podem ser resolvidas ordem a ordem, como feito no caso MBD3.

A solução para este caso fornece os seguintes resultados:

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\alpha e^{2\Gamma}}{1-\alpha e^{2\Gamma}}\right) \tag{3.215}$$

$$\nu = -2x_+x_- - \frac{1}{2}\ln\left(1-\alpha^2 e^{4\Gamma}\right) \tag{3.216}$$

$$\psi_5 = \sqrt{2}aXe^{\Gamma}\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\alpha e^{2\Gamma}} \\ -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\alpha e^{2\Gamma}} \end{pmatrix} \tag{3.217}$$

$$\psi_0 = \sqrt{2}bXe^{\Gamma}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha e^{2\Gamma}} \\ -\frac{1}{z}\frac{1}{1+\alpha e^{2\Gamma}} \end{pmatrix} \tag{3.218}$$

com $\alpha = \frac{abX^2}{4z}$ e $\Gamma = 2(zx_+ - z^{-1}x_-)$.

As correntes quirais (2.46) conservadas nesse caso têm a forma

$$\mathcal{J}^{\pm} = 4\partial^{\pm}\varphi - 2\psi_0^{\pm}\psi_5^{\pm} \tag{3.219}$$

Como $Tr(T_3^0 Q) \neq 0$ podemos, de acordo com (2.53) encontrar uma transformação conforme que nos leva a uma solução em que $\mathcal{J}^{\pm} = 0$, e com isso

$$\psi_0^{\pm}\psi_5^{\pm} = 2\partial^{\pm}\varphi \tag{3.220}$$

Temos então uma situação em que os campos de matéria $\psi_0^{\pm}$ e $\psi_5^{\pm}$ existirão apenas nas regiões de derivada não-nula do campos φ. Ou seja, os campos de matéria ficam confinados aos sólitons [22].

4.3 Caso não-abeliano: NA-MBD

Uma última possibilidade relacionada à álgebra $A_2^{(2)}$ que exploramos foi considerar uma gradação diferente:

$$Q = 4D + T_3^0 \tag{3.221}$$

A nova estrututa de gradação permite parametrizar os campos de Toda como

$$B = e^{\phi_1 L_{-2}^{\frac{1}{2}}} e^{\varphi T_3^0} e^{\phi_2 L_2^{-\frac{1}{2}}} e^{\nu C} e^{\eta Q} \qquad \Lambda^{\pm} = \psi_1^{\pm} T_{\pm}^0 + \psi_2^{\pm} L_{\mp}^{\pm\frac{1}{2}} + L_0^{\pm\frac{1}{2}} \tag{3.222}$$

de forma que os geradores que parametrizam o elemento B não comutam entre sí. Tem-se com isso o que se conhece por *modelos de Toda não-abelianos.*

As equações de movimento podem, então , ser obtidas com apenas um pouco mais de trabalho:

$$\partial_+\partial_-\eta = 0 \tag{3.223}$$

$$\partial_+\partial_-\nu + 3e^{2\eta} - 2e^{\eta+\varphi}\phi_1\psi_1^+\psi_2^- + 2e^{\eta-\varphi}\psi_2^-\psi_2^+ + e^{2\varphi}\phi_1\partial_-\phi_2\partial_+\varphi + \frac{1}{2}e^{2\varphi}\partial_-\phi_2\partial_+\phi_1 + \frac{1}{2}e^{2\varphi}\phi_1\partial_+\partial_-\phi_2 = 0 \tag{3.224}$$

$$\partial_+\partial_-\varphi + 2e^{\eta+\varphi}\psi_1^+\psi_1^- + 2e^{\eta+\varphi}\phi_1\psi_1^+\psi_2^- - 2e^{\eta}\phi_2\psi_1^-\psi_2^+ - 2e^{\eta-\varphi}\psi_2^+\psi_2^- - \tag{3.225}$$

$$2e^{\eta+\varphi}\phi_1\phi_2\psi_2^+\psi_2^- - 2e^{2\varphi}\phi_1\partial_-\phi_2\partial_+\varphi - e^{2\varphi}\partial_-\phi_2\partial_+\phi_1 - e^{2\varphi}\phi_1\partial_+\partial_-\phi_2 = 0 \tag{3.226}$$

$$\partial_+\partial_-\phi_2 + 2\partial_-\phi_2\partial_+\varphi - 4e^{\eta-\varphi}\phi_2\psi_2^+\psi_2^- + 4e^{\eta}\psi_1^+\psi_2^- = 0 \tag{3.227}$$

$$\partial_+\psi_2^- - 3e^{\eta+\varphi}\phi_2\psi_2^+ + 3e^{\eta+\varphi}\psi_1^+ = 0 \tag{3.228}$$

$$\partial_-\psi_2^+ + e^{2\varphi}\phi_1\phi_2\partial_-\psi_2^+ - e^{2\varphi}\phi_1\partial_-\psi_1^+ + 3e^{\eta+\varphi}\psi_1^- = 0 \tag{3.229}$$

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\phi_1 - e^{2\varphi}\phi_1^2\partial_+\partial_-\phi_2 + 2\phi_1\partial_-\partial_+\varphi - 2e^{2\varphi}\phi_1\partial_-\phi_2\partial_+\phi_1 + 2\partial_-\varphi\partial_+\phi_1 + \\ -2e^{2\varphi}\phi_1^2\partial_-\phi_2\partial_+\varphi - 4e^{\eta+\varphi}\phi_1\phi_2\psi_1^-\psi_2^+ - 4e^{\eta-\varphi} + 4e^{\eta+\varphi}\phi_1\psi_1^+\psi_1^- = 0\end{aligned} \tag{3.230}$$

$$\partial_+\psi_1^+ - 3e^{\eta+\varphi}\phi_1\phi_2\psi_2^+ - 3e^{\eta-\varphi}\psi_2^+ + 3e^{\eta}\phi_1\psi_1^+ = 0 \tag{3.231}$$

$$\partial_-\psi_1^+ - e^{\varphi}\phi_2\partial_-\psi_2^+ - 2e^{3\varphi}\phi_1\phi_2\psi_2^+\partial_-\phi_2 - 2e^{\varphi}\psi_2^+\partial_-\phi_2 - 2^{3\varphi}\phi_1\psi_1^+\partial_-\phi_2 - 3e^{\eta}\psi_2^- = 0 \tag{3.232}$$

Note apenas que é possível uma solução de vácuo na qual $\psi_i^{\pm} = 0$ de modo a termos potenciais de vácuo do tipo $L_0^{\pm\frac{1}{2}}$. Ora, um potencial desse mesmo tipo foi obtido no caso MBD-3 e por isso já conhecemos seus auto-estados (3.133). O leitor será poupado de detalhes do método de dressing. Diremos apenas que as transformações de variáveis são :

$$\nu = -3x_+x_- - \frac{1}{2}\ln\tau_0 \qquad \varphi = \ln\frac{\tau_0}{\tau_1^2} \qquad \phi_1 = -\frac{\tau_0^-}{\tau_0} \qquad \phi_2 = -\frac{\tau_0^+}{\tau_0} \tag{3.233}$$

$$\psi_1^{\pm} = 3\left(\frac{\tau_2^{\pm}}{4\tau_0} + \frac{\tau_1^{\pm}}{\tau_1}\frac{\tau_0^{\pm}}{\tau_0}\right) \qquad \psi_2^{\pm} = -3\frac{\tau_1^{\pm}}{\tau_1} \tag{3.234}$$

Os ansatz para as funções-τ são , como já sabido, dados por projeções de elementos como $g = e^{\epsilon^{\Gamma}V}$ (ou $T^+g = T^+e^{\epsilon^{\Gamma}V}$ e $gT^- = e^{\epsilon^{\Gamma}V}T^-$) em estados de peso máximo da representação. Mas como o vértice é neste caso o mesmo que o encontrado em MBD-3, poder-se-ia dizer que as soluções para as funções τ_0 e τ_1 já são conhecidas. No entanto, o resultado obtido pelo método de Hirota fornece uma discrepância, devida ao fato de que agora o elemento B é diferente.

A solução para este submodelo é :

$$\tau_1 = a + b \qquad \tau_0 = a + b \qquad \tau_2^+ = bXe^{\Gamma} \qquad \tau_2^- = aXe^{\Gamma} \tag{3.235}$$

$$\tau_1^+ = -\frac{a}{4}e^{\theta}Xe^{\Gamma} \qquad \tau_1^- = \frac{b}{4}e^{-\theta}Xe^{\Gamma} \qquad \tau_0^+ = -\frac{b}{16}e^{-\theta}X^2e^{2\Gamma} \qquad \tau_0^- = \frac{a}{16}e^{\theta}X^2e^{2\Gamma} \tag{3.236}$$

com $\Gamma = 3(e^{\theta}x_+ - e^{-\theta}x_-)$.

Devido ao fato de que a álgebra $A_2^{(2)}$ (BD) pode ser entendida como uma subálgebra de $\hat{so}(8)$ invariante pelo automorfismo de seu diagrama de Dynkin, seria interessante possuir resultados dos modelos cuja álgebra seja $\hat{so}(8)$, correspondentes aos obtidos até agora, com o intuito analisar as diferenças entre os modelos. Tal tarefa pode ser feita seguindo-se a mesma técnica empregada nos casos estudados até agora .

Capítulo 4

Conclusões

Através de um procedimento que combina os métodos de dressing e de Hirota, foi possível construir soluções solitônicas do modelo de Bullough-Dodd. Dessa forma, a técninca empregada mostrou-se implementável às álgebras de Kac-Moody com *twist*, que ainda careciam de uma análise mais detalhada, sem muitas complicações.

Inicialmente determinamos a estrutura da álgebra $A_2^{(2)}$, obtida por duas maneiras diferentes (através de um *folding* da álgebra $\hat{so}(8)$ e de um *twist* de $su(3)$). A introdução de extensões centrais permitiu construir uma representação de curvatura nula para o modelo BD e conseqüêntemente determinar sua solução.

O modelo tratado apresenta soluções solitônicas complexas, sendo que o vácuo infinitamente degenerado da parte imaginária do campo leva a cargas topológicas conservadas durante a evolução do sistema. Foram calculados também a massa e o *time delay* decorrente da interação entre dois sólitons.

Compreendida a riqueza matemática associada à teoria dos sólitons, introduzimos novos campos nos potenciais chatos de forma que estes contenham geradores de diferentes graus $(\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l)$. Os campos com graus mais elevados (≥ 1) comportam-se em geral como campos de Dirac, em duas dimensões. Funções-τ tanto para os campos escalares quanto para os campos de matéria foram obtidas pelo método de dressing.

Determinamos assim soluções para os modelos MBD3 e MBD6, modelos de Toda acoplados a campos de matéria, cuja álgebra subajecente é a $A_2^{(2)}$. A análise de tais soluções [23] indica a existência de uma equivalência entre as correntes topológica e de Noehter em MBD6. Com isso, espera-se um mecanismo que leve ao confinamento dos campos de matéria no interior dos sólitons escalares.

O trabalho permitiu reunir um conjunto relevante de informações sobre o modelo de Bullough-Dodd e algumas possíveis generalizações, servindo como uma introdução à pesquisa científica em teoria de sólitons e modelos exatamente integráveis.

Capítulo 5

Apêndice A

1 Modelos de Toda como teorias de WZNW

Nesta seção veremos uma estrutura formal que fundamenta os modelos de Toda, abordados neste trabalho: os modelos de Wess-Zumino-Novickov-Witten (WZNW) [24, 25]. Estes constituem uma classe de teorias de campo conformes com simetrias algébricas de Lie que apresentam uma propriedade desejável, mas não fundamental: podem ser obtidos diretamente a partir de uma ação.

Partimos, contudo, do Modelo Sigma Não-Linear em duas dimensões, definido pela ação:

$$S_0 = \frac{1}{4a^2} \int d^2x Tr \left(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g\right) \tag{5.1}$$

onde a^2 é uma constante de acoplamento adimensional.

Ele descreve um campo bosônico matricial $g(x)$ vivendo numa variedade de um grupo G associado a uma álgebra $\mathcal{G}$, cujas correntes conservadas geram uma álgebra de Lie. A minimização da ação acima nos dá equações de continuidade como equações de movimento do modelo:

$$\partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) = 0 \tag{5.2}$$

As correntes conservadas pela dinâmica do modelo, $J_\mu \equiv g^{-1}\partial_\mu g$, obedecem ainda uma estrutura de curvatura-nula. Para aumentar a simetria do modelo e ainda assim preservar as características que acabamos de apontar, adicionamos à ação dada por (5.1) um termo de Wess-Zumino:

$$\Gamma = -\frac{1}{24\pi}\int_B d^3y\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr\left(\tilde{g^{-1}}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\right) \tag{5.3}$$

definido por sua vez numa variedade tridimensional B que tem como contorno a compactificação do espaço bidimensional original, com $\tilde{g}$ a extensão do campo g para essa variedade $3D$. Considerando-se, porém, que num espaço $3D$ compactificado um espaço bidimensional compacto delimita duas variedades tridimensionais distintas, a extensão do campo g não é unívoca. Isto provoca uma ambigüidade na definição de Γ. A diferença entre as duas escolhas possíveis quantifica a ambigüidade. Levando-se em conta a orientação e o fato que todo espaço $3D$ compacto é topologicamente equivalente à esfera tridimensional, obtém-se:

$$\Delta\Gamma = -\frac{1}{24\pi}\int_{S^3} d^3y\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr\left(\tilde{g^{-1}}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\right) \tag{5.4}$$

Emobora o termo WZ seja expresso como uma integral tridimensional, sua variação é um funcional bidimensional, de forma que a equação de campo para a ação completa resulta na conservação de correntes quirais:

$$\left(1+\frac{ka^2}{4\pi}\right)\partial_+J_- + \left(1-\frac{ka^2}{4\pi}\right)\partial_-J_+ = 0 \tag{5.5}$$

desde que os parâmetros sejam escolhidos adequadamente.

Os modelos de Toda Afins Conformes (CAT), que em geral apresentam soluções solitônicas, são obtidos através de uma redução hamiltoniana do modelo WZNW associado a uma álgebra afinizada, que pode ser entendido como um modelo CT perturbado de um modo que a simetria conforme é quebrada mas a integrabilidade é preservada. A simetria conforme pode então ser restablecida apenas pela introdução de campos extra que não alterem a dinâmica do modelo inicial; por exemplo, o campo é livre se o colocarmos numa direção que não pertence à álgebra.

Nesses modelos os campos tomam valores num grupo de Lie G_0 finito e as simetrias de translação, pela esquerda e pela direita, por elementos desse grupo

$$g \longrightarrow g_L(x_-)g \;\; ; \;\; g \longrightarrow gg_R(x_+) \tag{5.6}$$

é quebrada por um termo da forma:

$$\int d^2xTr(\Lambda_{-l}B\Lambda_l B^{-1}) \tag{5.7}$$

com $B \in G_0$ e $\Lambda_{\pm l}$ elementos constantes que vivem no subespaço de grau $\pm l$, $\mathcal{G}_{\pm}$, de acordo com uma gradação da álgebra de Kac-Moody que satisfaça

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_n \hat{\mathcal{G}}_n \qquad [\hat{\mathcal{G}}_m, \hat{\mathcal{G}}_n] \subset \hat{\mathcal{G}}_{m+n} \tag{5.8}$$

Assumindo que possa ser feita a decomposição de Gauss de um elemento do grupo, de acordo com

$$g = MBN \in G \tag{5.9}$$

sendo $M \in e^{\mathcal{G}_-}$, $B \in e^{\mathcal{G}_0}$, e $N \in e^{\mathcal{G}_+}$. Impondo-se a equação de movimento sobre tal elemento, decorrem as seguintes equações:

$$\partial_+(M^{-1}\partial_- g g^{-1} M) = [M^{-1}\partial_- g g^{-1} M, M^{-1}\partial_+ M] \tag{5.10}$$

$$\partial_+(N g^{-1}\partial_+ g N^{-1}) = -[N g^{-1}\partial_+ g N^{-1}, \partial_- N N^{-1}] \tag{5.11}$$

As quantidades

$$K_L \equiv M^{-1}\partial_- g g^{-1} M = M^{-1}\partial_- M + \partial_- B B^{-1} + B\partial_- N N^{-1} B^{-1} \tag{5.12}$$

$$K_R \equiv N g^{-1}\partial_+ g N^{-1} = B^{-1} M^{-1}\partial_+ M B + B^{-1}\partial_+ B + \partial_+ N N^{-1} \tag{5.13}$$

envolvidas nas equações não são portanto quirais mas têm uma estrutura mais simples que as correntes quirais. A redução do modelo WZNW é feita colocando-se vínculos não diretamente nas correntes, mas, sim, em K_R e K_L:

$$\partial_- N N^{-1} = \Lambda_l \qquad M^{-1}\partial_+ M = -\Lambda_{-l} \tag{5.14}$$

ou seja, o modelo reduzido corresponde a uma teoria que contém apenas os campos correspondentes aos componentes de B e aos componentes de M e N associados aos geradores com graul $\pm l$, respectivamente.

Igualando os termos pertencentes ao subespaço da álgebra de grau zero:

$$\partial_+(\partial_- B B^{-1}) + [B\Lambda_l B^{-1}, \Lambda_{-l}] = 0 \tag{5.15}$$

que corresponde às equações dos modelos de Toda. Similarmente para o grau l, por exemplo:

$$\partial_+(B\Lambda_l B^{-1}) = 0 \qquad \partial_-(B^{-1}\Lambda_{-l} B) = 0 \tag{5.16}$$

A curvatura nula, necessária para a integrabilidade, é equivalente às equações de movimento para os campos B com os potenciais tomados como:

$$A_+ = -B\Lambda_l B^{-1} \qquad A_- = -\partial_- B B^{-1} + \Lambda_{-l} \tag{5.17}$$

Mas esta curvatura nula não envolve as equações para os campos quirais que aparecem nas direções diferentes de zero.

Tomando-se a parametrização $B = B_0 e^{\nu C + \eta Q}$, a ação para o modelo CAT assume a forma:

$$\frac{S}{k} = -\frac{1}{8}\int d^2x Tr(\partial_\mu B_0 \partial^\mu B_0^{-1}) + \frac{1}{12}\int_B d^3y \varepsilon^{ijk} Tr(B_0^{-1}\partial_i B_0 B_0^{-1}\partial_j B_0 B_0^{-1}\partial_k B_0) +$$
$$+ \int d^2x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \eta + \frac{h}{4}\int d^2x \partial_\nu \varphi \partial^\mu \eta + \int d^2x e^{l\eta} Tr(\Lambda_l B_0^{-1}\Lambda_{-l} B_0) + \frac{1}{12}\int \varepsilon^{ijk}\aleph_{ijk} \tag{5.18}$$

sendo que o último termo se anula no caso de $\eta = 0$, bem como os termos cinéticos. Ademais, nos modelos de Toda abelianos, em que os B_0 comutam, o segundo termo também se anula. É fácil ver ainda que a dependência explícita em l está em $e^{l\eta}$ e pode ser eleiminada fazendo $\eta \longrightarrow \frac{\eta}{l}$ e $\nu \longrightarrow l\nu$, e que o grupo de simetria do modelo CAT é o subgrupo do grupo de simetria de WZNW que mantém o termo potencial invariante.

Capítulo 6

Apêndice B

1 Os sólitons do modelo $\hat{so}(8)$

Como discutido anteriormente, o modelo de Bullough-Dodd, ou Zhiber-Mikhailov-Shabat, corresponde a um modelo de Toda associado à álgebra de Kac-Moody afim com twist $A_2^{(2)}$, sendo que esta álgebra mantém uma estreita relação com a álgebra $\hat{so}(8)$, através de uma redução das simetrias desta. Por essa razão parece ser interessante estudar como se comportam os modelos CAT e MCAT cuja álgebra seja a $\hat{so}(8)$.

A matriz (3.9), embora não seja inversível, permite gerar a equação de Bullough-Dodd através de

$$\partial_+\partial_-\rho_i + \sum_{i=0}^{r} \hat{K}_{ij} e^{\rho_j} = 0 \tag{6.1}$$

com

$$\rho_i = \sum_{b=1}^{r} \hat{K}_{ib}\varphi_b \tag{6.2}$$

O sistema assim produzido tem as primeiras linhas fornecedo equações equivalentes, pela simetria entre as raízes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ da álgebra $\hat{so}(8)$:

$$\partial_+\partial_-\rho_c + 2e^{\rho_c} - e^{\rho_4} = 0 \tag{6.3}$$

$$\partial_+\partial_-\rho_4 - e^{\rho_0} - e^{\rho_1} - e^{\rho_2} - e^{\rho_3} + 2e^{\rho_4} = 0 \tag{6.4}$$

onde $c = 0, 1, 2, 3$.

Uma redefinição de variáveis o reduz a um sistema 2×2 de duas variáveis, associado à matriz de Cartan (3.1) da álgebra $A_2(2)$:

$$\partial_+\partial_-\rho_1 + 2e^{\rho_1} - e^{\rho_4} = 0 \tag{6.5}$$

$$\partial_+\partial_-\rho_4 - 4e^{\rho_1} + 2e^{\rho_4} = 0 \tag{6.6}$$

Com a relação $2\rho_1 + \rho_4 = 0$ vê-se que esse sistema é equivalente à equação de Bullough-Dodd, a menos de uma translação do vácuo. Apesar de esta construção deixar muito clara a simetria do sistema, nem sempre é possível empregá-la para construir modelos de Toda, por K não ser inversível.

1.1 Modelo CAT-$\hat{so}(8)$

Primeiramente devemos definir os potenciais (2.15) que vivem na álgebra $\hat{so}(8)$ e cuja gradação dá elementos com grau 0 e ± 1 apenas. Conhecendo os geradores da álgebra mostrados na seção (1) deste capítulo, escrevemos:

$$A_+ = -e^{\eta}\left(e^{-\varphi_4}E^1_{\alpha_0} + e^{2\varphi_1-\varphi_4}E^0_{\alpha_1} + e^{2\varphi_2-\varphi_4}E^0_{\alpha_2} + e^{2\varphi_3-\varphi_4}E^0_{\alpha_3} + e^{-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\sqrt{2}E^0_{\alpha_4}\right) \tag{6.7}$$

$$A_- = \partial_-\left(\varphi_1 H^0_1 + \varphi_2 H^0_2 + \varphi_2 H^0_2 + \varphi_4 H^0_4 + \nu C + \eta Q\right) + E^{-1}_{-\alpha_0} + E^0_{-\alpha_1}E^0_{-\alpha_2} + E^0_{-\alpha_3} + \sqrt{2}E^0_{-\alpha_4} \tag{6.8}$$

As equações de movimento que obedecem a estrutura da curvatura nula com estes potenciais são :

$$\partial_+\partial_-\eta = 0 \tag{6.9}$$

$$\partial_+\partial_-\nu + e^{\eta-\varphi_4} = 0 \tag{6.10}$$

$$\partial_+\partial_-\varphi_b + e^{\eta}\left(e^{2\varphi_b-\varphi_4} - e^{-\varphi_4}\right) = 0 \tag{6.11}$$

$$\partial_+\partial_-\varphi_4 + 2e^{\eta}\left(e^{2\varphi_4-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3} - e^{-\varphi_4}\right) = 0 \tag{6.12}$$

com $b = 1, 2, 3$.

É interessante notar que este sistema se reduz ao modelo Bullough-Dodd conforme ao fazermos $\varphi_b = 0$. A partir dessas equações pode-se ainda obter potenciais de vácuo que pertençam a uma subálgebra abeliana a menos de termos centrais:

$$A^0_+ = -E^1_{\alpha_0} - E^0_{\alpha_1} - E^0_{\alpha_2} - E^0_{\alpha_3} - \sqrt{2}E^0_{\alpha_4} = -\Lambda^+ \tag{6.13}$$

$$A^0_- = x_+C + E^{-1}_{-\alpha_0} + E^0_{-\alpha_1}E^0_{-\alpha_2} + E^0_{-\alpha_3} + \sqrt{2}E^0_{-\alpha_4} = x_+C + \Lambda^- \tag{6.14}$$

tal que $[A^0_+, A^0_-]^{\bullet} = -C$ e $U_0 = e^{\Lambda^+ x_+} e^{-\Lambda^- x_-}$.

Uma transformação de gauge que preserve a estrutura de gradação com a qual o modelo foi construído permite ober uma nova solução, não trivial, para o sistema de equações abordado. A transformação de *dressing* gera uma solução álgébrica para os sólitons, desde que se tome o elemento constante a ser conjugado como a exponenciação dos auto-estados dos potenciais de vácuo, isto é, $h = e^V$. Ademais, permite definir apropriadamente as funções-τ de Hirota como sendo o elemento de matriz de $B^{-1}e^{-x_+ x_-}$ calculado nos estados de peso máximo $\hat{\lambda_0} = (0,1,0)$, $\hat{\lambda_b} = (\lambda_b, 1, 0)$ e $\hat{\lambda_4} = (\lambda_4, 2, 0)$:

$$\nu = -\ln \tau_0 - x_+ x_- \tag{6.15}$$

$$\varphi_b = \ln \frac{\tau_0}{\tau_b} \qquad \varphi_4 = \ln \frac{{\tau_0}^2}{\tau_4} \tag{6.16}$$

Logo, as equações de Hirota assumem a forma

$$\partial_+\tau_0\partial_-\tau_0 - \tau_0\partial_+\partial_-\tau_0 + \tau_4 - \tau_0^2 = 0 \tag{6.17}$$

$$\tau_b^2\tau_0\partial_+\partial_-\tau_0 - \tau_b^2\partial_+\tau_0\partial_-\tau_0 - -\tau_0^2\tau_1\partial_+\partial_-\tau_1 + \tau_0^2\partial_+\tau_1\partial_-\tau_1 + \tau_4(\tau_0^2 - \tau_b^2) = 0 \tag{6.18}$$

$$2\tau_4^2\tau_0\partial_+\partial_-\tau_0 - 2\tau_1^2\partial_+\tau_0\partial_-\tau_0 - \tau_0^2\tau_4\partial_+\partial_-\tau_4 + \tau_0^2\partial_+\tau 4\partial_-\tau_4 + 2(\tau_0^3\tau_1\tau_2\tau_3 - \tau_4^3) = 0 \tag{6.19}$$

As soluções desse modelo já foram determinadas em [26]. Existem dois tipos de solução:

solução 1

No primeiro tipo de solução, as séries para as funções τ_0 e τ_b truncam em ordem ε enquanto τ_4 trunca em ordem ε^2, como esperado pois os primeiros estão relacionados com uma representação de nível 1, enquanto o último, com uma representação de nível 2:

$$\tau_0 = 1 + Xe^{\sqrt{6}(e^{\theta}x_+ - e^{-\theta}x_-)} \tag{6.20}$$

$$\tau_b = 1 + Xe^{\sqrt{6}(e^{\theta}x_+ - e^{-\theta}x_-)} \tag{6.21}$$

$$\tau_4 = 1 - 4Xe^{\sqrt{6}(e^{\theta}x_+ - e^{-\theta}x_-)} + X^2 e^{2\sqrt{6}(e^{\theta}x_+ - e^{-\theta}x_-)} \tag{6.22}$$

Repare que as soluções apresentam uma simetria que pode ser reduzida fazendo-se $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$. Este é exatamente o *folding* que leva a álgebra $\hat{so}(8)$ em $A_2^{(2)}$. Ademais, como os potenciais para a construção deste modelo envolvem os mesmos elementos $e_1^{\pm} \equiv E^{\pm 1}_{\pm\alpha_0} + E^0_{\pm\alpha_1} + E^0_{\pm\alpha_2} + E^0_{\pm\alpha_3}$ e $e_0^{\pm} \equiv \sqrt{2}E^0_{\pm\alpha_4}$, usados no caso Bullough-Dodd original, um dos possíveis operadores de vértice que diagonalizam os potenciais de vácuo é a combinação obtida naquele modelo já estudado. Deveras, tal operador que tem auto-valor $\sim \sqrt{6}$, o mesmo que aparece no argumento das exponenciais.

No entanto, além de conter a solução para o modelo BD, existe um outro tipo de solução para o modelo $\hat{so}(8)$.

solução 2

O outro tipo de solução encontrada não apresenta a simetria observada no caso anterior e por essa razão não constitui uma solução para o BD. O sistema linear construído para se resolver o problema pelo método de Hirota apresenta soluções degeneradas, de modo que os coeficientes das expansões das funções-τ são dados como combinações lineares gerais dos três tipos de soluções.

A estrutura algébrica permite compreender melhor essa tripla degenerescência. Além do auto-estado expresso em termo de uma subálgebra de $\hat{so}(8)$ invariante pelo automorfismo de ordem 4 de seu diagrama de Dynkin e que envolve as raízes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, existem outros auto-estados que não satisfazem essa simetria. No entanto, olhando para $e_1^{\pm}$ fica claro que persiste o automorfismo da álgebra $so(8)$, não

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

afinizada, em que se pode permutar as raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Com isso, dado um novo auto-estado V_1 que contenha operadores H_1^m e/ou $E^m_{\pm\alpha_1}$ associados à raiz α_1, constrõem-se imediatamente dois novos auto-estados V_2 e V_3, com mesmo auto-valor, pela simples substituição da raiz α_1 por α_2 e α_3.

Dessa maneira, o auto-estado associado a essa nova solução é do tipo $V = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$, tal que $V_a^2 = 0$ mas $V^2 \neq 0$, e as séries não truncam em ε e ε^2, mas, sim, em ε^3 e ε^6, como de fato observado.

1.2 Modelo MCAT-$\hat{so}(8)$

Dando seqüência ao estudo comparativo entre os modelos de Toda das álgebras $\hat{so}(8)$ e $A_2^{(2)}$, vamos acoplar campos de matéria aos campos de gauge apresentados da subseção anterior. Como a gradação da álgebra tem periodicidade 6, os campos podem ser colocados nas direções com grau ±1 ($l = 2$), ±2 ($l = 3$), ±3 ($l = 4$), ±4 ($l = 5$) e ±5 ($l = 6$).

Entretanto, como no modelo BD, a generalização com $l = 2$ fornece potenciais de vácuo que não pertencem a uma subálgebra de osciladores, e pelo isomorfismo, o mesmo vale para $l = 4$ e $l = 5$. Somos então levados a abordar o caso $l = 3$ e compará-lo com o que foi feito no caso da álgebra $A_2^{(2)}$.

$\hat{so}(8)$-III

Para se construir a generalização desejada, usamos os elementos

$$\Lambda_1^{\pm} = \psi_{10}^{\pm}E^{\pm1}_{\pm\alpha_0} + \psi_{11}^{\pm}E^{0}_{\pm\alpha_1} + \psi_{12}^{\pm}E^{0}_{\pm\alpha_2} + \psi_{13}^{\pm}E^{0}_{\pm\alpha_3} + \psi_{14}^{\pm}\sqrt{2}E^{0}_{\pm\alpha_4} \tag{6.23}$$

$$\Lambda_2^{\pm} = \psi_{20}^{\pm}E^{\pm1}_{\pm(\alpha_0+\alpha_4)} + \psi_{21}^{\pm}E^{0}_{\pm(\alpha_1+\alpha_4)} + \psi_{22}^{\pm}E^{0}_{\pm(\alpha_2+\alpha_4)} + \psi_{23}^{\pm}E^{0}_{\pm(\alpha_3+\alpha_4)} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned} E_{\pm3} = {} & E^{0}_{\pm(\alpha_1+\alpha_2\alpha_4)} + E^{0}_{\pm(\alpha_1+\alpha_3\alpha_4)} + E^{0}_{\pm(\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)} + \\ & + E^{\pm1}_{\mp(\alpha_1+\alpha_2\alpha_4)} + E^{\pm1}_{\mp(\alpha_1+\alpha_3\alpha_4)} + E^{\pm1}_{\mp(\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)} \end{aligned} \tag{6.25}$$

que determinarão os potenciais do modelo, e conseqüentemente as equações de movimento:

$$\partial_+\partial_-\eta = 0 \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\nu + e^{\eta-\varphi_4}\psi^+_{10}\psi^-_{10} + e^{2\eta-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi^+_{20}\psi^-_{20} + \\ +e^{3\eta}(e^{-\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3} + e^{-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3} + e^{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3}) = 0\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\varphi_1 - e^{\eta}(e^{-\varphi_4}\psi^+_{10}\psi^-_{10} - e^{2\varphi_1-\varphi_4}\psi^+_{11}\psi^-_{11}) + \\ -e^{2\eta}(e^{-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi^+_{20}\psi^-_{20} - e^{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4}\psi^+_{21}\psi^-_{21}) + \\ -e^{3\eta}(e^{-\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3} + e^{-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3} - e^{\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3} - e^{\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3}) = 0\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\varphi_2 - e^{\eta}(e^{-\varphi_4}\psi^+_{10}\psi^-_{10} - e^{2\varphi_2-\varphi_4}\psi^+_{12}\psi^-_{12}) + \\ -e^{2\eta}(e^{-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi^+_{20}\psi^-_{20} - e^{-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4}\psi^+_{22}\psi^-_{22}) + \\ -e^{3\eta}(e^{-\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3} + e^{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3} - e^{\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3} - e^{-\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}) = 0\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\varphi_3 - e^{\eta}(e^{-\varphi_4}\psi^+_{10}\psi^-_{10} - e^{2\varphi_3-\varphi_4}\psi^+_{13}\psi^-_{13}) + \\ -e^{2\eta}(e^{-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi^+_{20}\psi^-_{20} - e^{-\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4}\psi^+_{23}\psi^-_{23}) + \\ -e^{3\eta}(e^{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3} + e^{-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3} - e^{\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3} - e^{-\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}) = 0\end{aligned} \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\varphi_4 - 2e^{\eta}(e^{-\varphi_4}\psi^+_{10}\psi^-_{10} - e^{2\varphi_3-\varphi_4}\psi^+_{14}\psi^-_{14}) + \\ -e^{2\eta}(e^{-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi^+_{20}\psi^-_{20} - e^{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4}\psi^+_{21}\psi^-_{21} + \\ -(e^{-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4}\psi^+_{22}\psi^-_{22} - e^{-\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4}\psi^+_{23}\psi^-_{23}) + \\ -e^{3\eta}(e^{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3} + e^{-\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3} - e^{\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3} - e^{-\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}) = 0\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\partial_\mp\psi^\pm_{10} + \sqrt{2}e^{\eta-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi^\pm_{20}\psi^\mp_{14} = 0 \tag{6.32}$$

$$\partial_\mp\psi^\pm_{11} + \sqrt{2}e^{\eta-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi^\pm_{21}\psi^\mp_{14} = 0 \tag{6.33}$$

$$\partial_{\mp}\psi_{12}^{\pm} + \sqrt{2}e^{\eta-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi_{22}^{\pm}\psi_{14}^{\mp} = 0 \tag{6.34}$$

$$\partial_{\mp}\psi_{13}^{\pm} + \sqrt{2}e^{\eta-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+2\varphi_4}\psi_{23}^{\pm}\psi_{14}^{\mp} = 0 \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\partial_{\mp}\psi_{14}^{\pm} + e^{\eta}(&-e^{-\varphi_4}\psi_{20}^{\pm}\psi_{10}^{\mp} + e^{2\varphi_1-\varphi_4}\psi_{21}^{\pm}\psi_{11}^{\mp} + \\ &+e^{2\varphi_2-\varphi_4}\psi_{22}^{\pm}\psi_{12}^{\mp} + e^{2\varphi_3-\varphi_4}\psi_{23}^{\pm}\psi_{13}^{\mp}) = 0\end{aligned} \tag{6.36}$$

$$\partial_{\mp}\psi_{20}^{\pm} - e^{\eta}(e^{2\varphi_1-\varphi_4}\psi_{11}^{\mp} + e^{2\varphi_2-\varphi_4}\psi_{12}^{\mp} + e^{2\varphi_3-\varphi_4}\psi_{13}^{\mp}) = 0 \tag{6.37}$$

$$\partial_{\mp}\psi_{21}^{\pm} + e^{\eta}(e^{-\varphi_4}\psi_{10}^{\mp} + e^{2\varphi_2-\varphi_4}\psi_{12}^{\mp} + e^{2\varphi_3-\varphi_4}\psi_{13}^{\mp}) = 0 \tag{6.38}$$

$$\partial_{\mp}\psi_{22}^{\pm} + e^{\eta}(e^{-\varphi_4}\psi_{10}^{\mp} + e^{2\varphi_1-\varphi_4}\psi_{11}^{\mp} + e^{2\varphi_3-\varphi_4}\psi_{13}^{\mp}) = 0 \tag{6.39}$$

$$\partial_{\mp}\psi_{23}^{\pm} + e^{\eta}(e^{-\varphi_4}\psi_{10}^{\mp} + e^{2\varphi_1-\varphi_4}\psi_{11}^{\mp} + e^{2\varphi_2-\varphi_4}\psi_{12}^{\mp}) = 0 \tag{6.40}$$

Considerando-se o vácuo com $\psi_i^{\pm} = 0$, $\varphi_a = 0$, $\eta = 0$ e $\nu = -3x_+x_-$, podemos construir sólitons na órbita desse vácuo pelo método de dressing, pois os potenciais de vácuo formam uma álgebra de osciladores: $[A_+^0, A_-^0] = -3C$.

O mesmo procedimento seguido no caso MBD-3 é feito aqui e se obtêm as funções-τ de Hirota, em função das quais as equações de movimento serão escritas. Os campos de gauge obedecem as mesmas transformações que foram discutidas na subseção anterior:

$$\nu = -\ln\tau_0 - 3x_+x_- \tag{6.41}$$

$$\varphi_b = \ln\frac{\tau_0}{\tau_b} \qquad \varphi_4 = \ln\frac{{\tau_0}^2}{\tau_4} \tag{6.42}$$

Já os campos nas direções de grau ± 2 ficam

$$\psi^{\pm}_{20} = \frac{\tau^{\pm}_{11}}{\tau_1} + \frac{\tau^{\pm}_{12}}{\tau_2} + \frac{\tau^{\pm}_{13}}{\tau_3} \qquad \psi^{\pm}_{21} = -\left(\frac{\tau^{\pm}_{10}}{\tau_0} + \frac{\tau^{\pm}_{12}}{\tau_2} + \frac{\tau^{\pm}_{13}}{\tau_3}\right) \tag{6.43}$$

$$\psi^{\pm}_{22} = -\left(\frac{\tau^{\pm}_{10}}{\tau_0} + \frac{\tau^{\pm}_{11}}{\tau_1} + \frac{\tau^{\pm}_{13}}{\tau_3}\right) \qquad \psi^{\pm}_{23} = -\left(\frac{\tau^{\pm}_{10}}{\tau_0} + \frac{\tau^{\pm}_{11}}{\tau_1} + \frac{\tau^{\pm}_{12}}{\tau_2}\right) \tag{6.44}$$

Finalmente, campos nas direções de grau ± 1 são expressos como

$$\psi^{\pm}_{10} = \frac{\tau^{\pm}_{21}}{\tau_4} + \frac{\tau^{\pm}_{22}}{\tau_4} + \frac{\tau^{\pm}_{23}}{\tau_4} \qquad \psi^{\pm}_{11} = -\frac{\tau^{\pm}_{20}}{\tau_0} + \frac{\tau^{\pm}_{22}}{\tau_4} + \frac{\tau^{\pm}_{23}}{\tau_4} \tag{6.45}$$

$$\psi^{\pm}_{12} = -\frac{\tau^{\pm}_{20}}{\tau_0} + \frac{\tau^{\pm}_{21}}{\tau_4} + \frac{\tau^{\pm}_{23}}{\tau_4} \qquad \psi^{\pm}_{13} = -\frac{\tau^{\pm}_{20}}{\tau_0} + \frac{\tau^{\pm}_{21}}{\tau_4} + \frac{\tau^{\pm}_{22}}{\tau_4} \tag{6.46}$$

havendo aqui também uma redução hamiltoniana, em que os campos $\psi^{\pm}_{14}$ ficam em função de outros campos:

$$\psi^{\pm}_{14} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\tau^{\pm}_{11}}{\tau_1}\frac{\tau^{\pm}_{12}}{\tau_2} + \frac{\tau^{\pm}_{11}}{\tau_1}\frac{\tau^{\pm}_{13}}{\tau_3} + \frac{\tau^{\pm}_{12}}{\tau_2}\frac{\tau^{\pm}_{13}}{\tau_3}\right) \tag{6.47}$$

A substituição dessas novas funções nas equações de movimento permitem determinar as soluções. Nesse caso, introduzimos a notação $\Gamma = 2(e^{\theta}x_+ - e^{-\theta}x_-)$ e temos as soluções:

$$\nu = -\ln\left(1 + A^1_0 X e^{\Gamma} + A^2_0 X^2 e^{2e^{\Gamma}} + A^3_0 X^3 e^{3e^{\Gamma}}\right) - 3x_+x_- \tag{6.48}$$

$$\varphi_1 = \ln\left(\frac{1 + A^1_0 X e^{\Gamma} + A^2_0 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_0 X^3 e^{3\Gamma}}{1 + A^1_1 X e^{\Gamma} + A^2_1 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_1 X^3 e^{3\Gamma}}\right) \tag{6.49}$$

$$\varphi_2 = \ln\left(\frac{1 + A^1_0 X e^{\Gamma} + A^2_0 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_0 X^3 e^{3\Gamma}}{1 + A^1_2 X e^{\Gamma} + A^2_2 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_2 X^3 e^{3\Gamma}}\right) \tag{6.50}$$

$$\varphi_3 = \ln\left(\frac{1 + A^1_0 X e^{\Gamma} + A^2_0 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_0 X^3 e^{3\Gamma}}{1 + A^1_3 X e^{\Gamma} + A^2_3 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_3 X^3 e^{3\Gamma}}\right) \tag{6.51}$$

$$\varphi_4 = \ln\left(\frac{\left(1 + A^1_0 X e^{\Gamma} + A^2_0 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_0 X^3 e^{3\Gamma}\right)^2}{1 + A^1_4 X e^{\Gamma} + A^2_4 X^2 e^{2\Gamma} + A^3_4 X^3 e^{3\Gamma} + A^4_4 X^4 e^{4\Gamma} + A^5_4 X^5 e^{5\Gamma} + A^6_4 X^6 e^{6\Gamma}}\right) \tag{6.52}$$

com os coeficientes que aparecem nas expressões acima sendo dados por

$$A_0^1 = (-a_1 - 2a_3 + 2a_4) \tag{6.53}$$

$$A_0^2 = (\frac{3}{2}a_3a_1 - \frac{3}{2}a_1a_4 - \frac{5}{2}a_3a_4 + \frac{1}{4}a_1^2 + a_4^2 + \frac{5}{4}a_3^2) \tag{6.54}$$

$$A_0^3 = (-\frac{1}{4}a_1^2a_3 - \frac{1}{4}a_3^3 + \frac{3}{4}a_3^2a_4 - \frac{1}{2}a_3a_4^2 - \frac{1}{2}a_3^2a_1 - \frac{1}{2}a_1a_4^2 + \frac{1}{4}a_4a_1^2 + a_3a_1a_4) \tag{6.55}$$

$$A_1^1 = a_1 \tag{6.56}$$

$$A_1^2 = (-\frac{3}{4}a_3^2 + \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{3}{2}a_3a_4 - \frac{1}{2}a_3a_1 + \frac{1}{2}a_1a_4 - a_4^2) \tag{6.57}$$

$$A_1^3 = (-\frac{1}{4}a_1^2a_3 - \frac{1}{4}a_3^3 + \frac{3}{4}a_3^2a_4 - \frac{1}{2}a_3a_4^2 - \frac{1}{2}a_3^2a_1 - \frac{1}{2}a_1a_4^2 + \frac{1}{4}a_4a_1^2 + a_3a_1a_4) \tag{6.58}$$

$$A_2^1 = (a_3 - 2a_4) \tag{6.59}$$

$$A_2^2 = (-\frac{1}{2}a_3a_4 + a_4^2 - \frac{1}{2}a_3a_1 + \frac{1}{2}a_1a_4 - \frac{1}{4}a_3^2 - \frac{1}{4}a_1^2) \tag{6.60}$$

$$A_2^3 = (-\frac{1}{4}a_1^2a_3 - \frac{1}{4}a_3^3 + \frac{3}{4}a_3^2a_4 - \frac{1}{2}a_3a_4^2 - \frac{1}{2}a_3^2a_1 - \frac{1}{2}a_1a_4^2 + \frac{1}{4}a_4a_1^2 + a_3a_1a_4) \tag{6.61}$$

$$A_3^1 = a_3 \tag{6.62}$$

$$A_3^2 = (\frac{3}{2}a_3a_4 - \frac{1}{2}a_3a_1 + \frac{1}{2}a_1a_4 - a_4^2 - \frac{1}{4}a_3^2 - \frac{1}{4}a_1^2) \tag{6.63}$$

$$A_3^3 = (-\frac{1}{4}a_1^2a_3 - \frac{1}{4}a_3^3 + \frac{3}{4}a_3^2a_4 - \frac{1}{2}a_3a_4^2 - \frac{1}{2}a_3^2a_1 - \frac{1}{2}a_1a_4^2 + \frac{1}{4}a_4a_1^2 + a_3a_1a_4) \tag{6.64}$$

$$A_4^1 = a4 \tag{6.65}$$

$$A_4^2 = (\frac{1}{2}a_1a_4 + \frac{5}{2}a_3a_4 - a_4^2 - \frac{3}{2}a_3^2 - a_3a_1 - \frac{1}{2}a_1^2) \tag{6.66}$$

$$A_4^3 = (-\frac{1}{2}a_3a_1a_4 - a_4^3 - \frac{5}{4}a_3^2a_4 + 2a_3a_4^2 - \frac{1}{4}a_4a_1^2) \tag{6.67}$$

$$\begin{aligned} A_4^4 = (&\frac{7}{8}a_3^2a_1^2 - \frac{1}{2}a_4^3a_1 + \frac{1}{2}a_4^2a_1^2 - \frac{1}{2}a_3a_4^3 + \frac{3}{2}a_3^2a_4^2 + \frac{5}{4}a_3^3a_1 - \frac{13}{8}a_3^3a_4 \\ &+\frac{1}{4}a_1^3a_3 - \frac{1}{8}a_1^3a_4 + \frac{9}{16}a_3^4 + \frac{1}{16}a_1^4 + 2a_3a_4^2a_1 - \frac{11}{8}a_3a_4a_1^2 - \frac{23}{8}a_3^2a_1a_4) \end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned} A_4^5 = (&\frac{1}{4}a_3^4a_4 + \frac{1}{4}a_4^3a_1^2 + \frac{1}{4}a_3^2a_4^3 - \frac{1}{2}a_3^3a_4^2 \\ &-a_3^2a_4^2a_1 + \frac{1}{2}a_3a_4^3a_1 + \frac{1}{4}a_3^2a_4a_1^2 - \frac{1}{2}a_3a_4^2a_1^2 + \frac{1}{2}a_3^3a_1a_4) \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned} A_4^6 = (&-\frac{1}{4}a_3^5a_1 - \frac{5}{16}a_3^4a_4^2 + \frac{1}{8}a_4^3a_1^3 + \frac{1}{8}a_3^3a_4^3 - \frac{1}{16}a_1^4a_3^2 - \frac{1}{4}a_3^3a_1^3 + \\ &-\frac{1}{16}a_1^4a_4^2 - \frac{3}{8}a_3^4a_1^2 + \frac{1}{4}a_3^5a_4 - \frac{1}{16}a_3^6 + \frac{1}{8}a_1^4a_3a_4 + \frac{7}{8}a_3^4a_1a_4 \\ &-a_3^3a_4^2a_1 - \frac{1}{2}a_3a_4^2a_1^3 + \frac{3}{8}a_3^2a_4^3a_1 - \frac{9}{8}a_3^2a_4^2a_1^2 + \frac{3}{8}a_3a_4^3a_1^2 + \frac{9}{8}a_3^3a_4a_1^2 + \frac{5}{8}a_3^2a_4a_1^3) \end{aligned} \tag{6.70}$$

Por sua vez, os campos de matéria todos se anulam, de modo que se redescobre a solução do segundo tipo do modelo CAT-$\hat{so}(8)$, discutida na seção anterior.

Essa solução obtida pelas transformações de Hirota deve ser confrontada com aquela obtida por métodos algébricos, que envolve o cálculo dos elementos de matriz dos operadores de vértice. Para isso, vemos que os operadores de vértice associados à subálgebra de Heisenberg em questão são

$$V_b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{z^{-6m}(2H_b^m + H_4^m) + z^{-6m-3}\{E^m_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4} + E^m_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4} - E^m_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + -E^{m+1}_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)} - E^{m+1}_{-(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)} + E^{m+1}_{-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}\}\} \tag{6.71}$$

com $b = 1, 2, 3$, de modo que há uma degenerescência tripla dos autoestados, associados ao autovalor 2, o que está em plena concordância com o que foi observado no método de Hirota.

Existe ainda um autoestado invariante sob o automorfismo do diagrama de Dynkin de $\hat{so}(8)$ que deveria dar uma solução análoga à do modelo MBD3. No entanto, pelo método de Hirota tal solução não aparece. Isso porque ela está associada às soluções $\varphi_b = 0$, e essa condição anula os demais campos. Devido ao sinais diferentes de (3.53) que não foram considerados em (6.25), o modelo apresentado nessa seção difere um pouco do modelo MBD3, o que prejudica a comparação que gostaríamos de fazer. Todavia, isso pode ser feito com um pouco de manipulação.

Referências Bibliográficas

[1] O. Babelon, D. Bernard e M. Talon, *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, 2003.

[2] D. I. Olive, M. V. Saveliev, J. W. R. Underwood, Phys. Lett. **B311** (1993), 117-122.

[3] L. A. Ferreira, J. L. Gervais, J. S. Guillén, M. V. Saveliev, Nucl. Phys. **B470** (1996), 236-290.

[4] R. K. Dodd and R. K. Bullough, Proc. Roy. Soc. Lond. **A352** (1977), 481.

[5] A. V. Mikhailov, Physica 3D (1981) 1 e 2, 73-117.

[6] P. G. Drazin, R.S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge, 1989.

[7] L. A. Ferreira, *Lecture Notes on Lie Algebras and lie Groups*, IFT-Unesp, 2000.

[8] J. F. Cornwell, *Group theory in Physics*, Vols I e II, *Techniques in Physics 7*, Academic Press 1984.

[9] V. G. Kac, Funct. Anal. App. **1** (1967) 328;
R. V. Moody, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) 217.

[10] P. Goddard and D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to Quantum Physics*, International Journal of Modern Physics A, Vol I, No 2, 1986.

[11] L. A. Ferreira, *Teorias de Campos Conformes e Representações das álgebras de Kac-Moody e Virasoro*, X ENFPC, 1989.

[12] D. I. Olive, N. Turok, J. W. R. Underwood, Nucl. Phys. **B409** (1993) 509-546.

[13] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* , 1974.

[14] Orlando Alvarez, Luiz A. Ferreira e J. Sánchez Guillén, Nucl. Phys. **B529** (1998) 689 - 736.

[15] D. Olive and Neil Turok, Nuclear Physics, **B215** (1983), 470-494.

[16] M. A. C. Kneipp, D. I. Olive, Comm. Math. Phys. Volume 177, Number 3 (1996).

[17] C. Montonem and D. Olive, Physics Letters, Volume **72B**, number 1, 1977.

[18] D. I. Olive, N. Turok, J. W. R. Underwood, Nuc. Phys. **B401** (1993) 663-697.

[19] L. A. Ferreira, J. S. Guillén, *Aspects of solitons in affine integrable theories*, 1997, solv-int/9701006 .

[20] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, J. S. Guillén, J.Math.Phys. 38 (1997) 882-901.

[21] A. Fring, P. R. Johnson, M. A. C. Kneipp, D. I. Olive, Nucl.Phys. B430 (1994) 597-614.

[22] H. S. Blas and L. A. Ferreira, Nuclear Physics **B571**, 607-631 (2000).

[23] P. E. G. Assis, L. A. Ferreira, em preparação.

[24] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal *Conformal Field Theory*, 1997.

[25] P. Forgacs, A. Wipf, J. Balog, L.Feher, O. O'Raifeartaigh, Phys. Lett. **B227** 214-220 (1989).

[26] H. Aratyn, C. P. Constantinidis, L. A. Ferreira, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, Nucl.Phys. **B406** (1993) 727-770.