UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

RITA DE CÁSSIA DOS ANJOS

TEORIAS DE CAMPOS INTEGRÁVEIS E SÓLITONS

São Carlos
2009

RITA DE CÁSSIA DOS ANJOS

TEORIAS DE CAMPOS INTEGRÁVEIS E SÓLITONS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira

São Carlos
2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Anjos, Rita de Cassia dos
Teorias de campos integráveis e sólitons / Rita de Cassia dos
Anjos; orientador Luiz Agostinho Ferreira.-- São Carlos, 2009.
92 p.

Dissertação (Mestrado em Ciência - Área de concentração:
Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de
São Paulo.

1. Solitons. 2. Cargas conservadas. 3. Modelos de Toda. 4.
Curvatura nula. 5. Método de dressing. I. Título.

Dedicatória

Dedico este meu trabalho ao Pai Seráfico São Francisco de Assis, por todo seu exemplo de santidade e por ter me ensinado o amor aos pequeninos e pobres desta vida.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, autor de minha vida, por mais essa oportunidade. Agradeço sua companhia, cuidado, amor e carinho a todo momento.

A meus pais e irmãos por toda força e amor nessa minha caminhada.

Ao Professor Luiz Agostinho Ferreira pela oportunidade, confiança, companheirismo e paciência no desenvolvimento desse projeto.

A Vinícius Teibel Santa Ana por toda amizade, alegria, exemplo e paciência durante esse tempo de estudo. Aos amigos Alexandre Cacheffo e Felipe Lorenzen pelas discussões e ótimos momentos juntos.

A todos os amigos do Instituto de Física de São Carlos, pelos momentos de estudo e companhia diária.

Aos amigos do Grupo de oração da USP de São Carlos por serem presença real de Deus pra mim. Aos amigos da Pastoral de Rua, por todos os momentos de maturidade e vivência da fé.

Aos amigos da Paróquia Nossa Senhora de Fátima, em especial à Comunidade TeDeum, pela alegria diária e companhia.

À Ana Claudia Fernandes, pela constante motivação e presença.

À D. Lourdes, Isabela e Raquel pela convivência diária.

Ao Professor Elso Drigo Filho (Unesp-Ibilce) por toda amizade e confiança. Aos amigos de Rio Preto, inesquecíveis, que fizeram de minha vida algo muito mais especial.

A todos os professores e funcionários da USP de São Carlos, por todo aprendizado científico adquirido e disponibilidade a todo momento.

A CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

ANJOS, R.C. **Teoria de campos integraveis e solitons**. 2009. 95 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

Os modelos de Toda admitem uma representação de suas equações de movimento em termos da curvatura nula, isto é, existem potenciais que são funcionais dos campos da teoria e pertencem a uma álgebra de Kac-Moody tal que a condição de curvatura nula seja equivalente às equações de movimento. Para a construção das soluções solitônicas e cargas conservadas são necessários a gradação inteira da álgebra de Kac-Moody e a existência de soluções de vácuo, de forma que os potenciais assumam valores em uma subálgebra abeliana quando calculados nestas soluções de vácuo. A gradação da álgebra é de extrema importância pois garante que o potencial transformado tenha a mesma estrutura que o potencial de vácuo. As cargas conservadas são então construídas partindo de soluções da órbita do vácuo por meio de transformações de dressing, que consistem na aplicação da decomposição de Gauss para a produção de um potencial transformado a partir de duas transformações de Gauge. Nesta dissertação calculamos as infinitas cargas conservadas dos modelos de Toda $sl(3)$ e também $sl(N)$, avaliadas nas soluções pertencentes à órbita do vácuo sob transformações de dressing. As soluções de interesse físico, como sólitons e breathers pertencem a esta órbita, e as cargas conservadas para tais soluções são escritas como uma soma sobre os sólitons. Mostramos que a energia e o momento proveem de termos de superfície.

Palavras-chave: Solitons. Cargas conservadas. Modelos de Toda. Curvatura Nula. Método de dressing.

Abstract

ANJOS, R.C. **Integrable field theories and solitons**. 2009. 95 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

The Toda models admit a zero curvature representation of their equations of motion, i.e. there exist potentials, (A) , which are functionals of the fields of the theory and which belong to a Kac-Moody algebra G such that the zero curvature condition is equivalent to the equations of motion. For the construction of the solitons solutions and conserved charges is required an integer gradation of the Kac-Moody algebra and a “vacuum solution”, such that the potentials evaluated on it belong to an abelian subalgebra. The gradation of the algebra is of extreme importance since it guarantees that the transformed potential have the same structure as the vacuum potential. The conserved charges are then constructed using the dressing method, that through the Gauss decomposition, leads to the transformed potentials by two gauge transformations. In this dissertation we calculate the infinite conserved charges of models Toda $sl(3)$ and also $sl(N)$ evaluated on the solutions belonging to the orbit of the vacuum under dressing transformations. The solutions of physical interest, like solitons and breathers belong to this orbit and the conserved charges for such solutions are written as a sum over the number the solitons. We show that the energy and momentum are boundary terms.

Keywords: Solitons. Conserved Charges. Toda models. Zero curvature. Dressing method.

Lista de Figuras

1	— Colisão de dois solitons (18)	15
2	— Taj-Mahal	17
3	— Simetria na Natureza	17
4	— Simetria Humana	17
5	— Superfície no espaço dos loops	20
6	— Contornos de integração	21
7	— Duas curvas unidas: Γ_1 e Γ_2	22
8	— $V(r)$ por r , para $a = b = 1$	25
9	— Sistema de raízes em duas dimensões	76
10	— Câmara de Weyl para A_2 ($SU(3)$ ou $Sl(3)$) (21)	77

Sumário

1	Modelos Integráveis e Sólitons	12
1.1	Introdução	12
1.2	Sólitons	14
1.3	Integrabilidade	16
1.3.1	Simetrias	16
1.3.2	Quantidades conservadas	17
1.4	Curvatura Nula	18
1.4.1	Surgimento das Leis de Conservação	21
2	Os modelos de Toda	24
2.1	A Rede de Toda	24
2.2	Teorias de Campo de Toda Clássicas	26
2.2.1	Modelos de Toda Conforme (CT)	26
2.2.2	Modelos de Toda Afim (AT)	27
2.2.3	Modelos de Toda Afim Conforme (CAT)	28
2.2.4	Relação entre os modelos CAT e AT	30
3	Métodos de Soluções	34
3.1	Método de Dressing	34
3.2	Método de Hirota	37
4	Cargas conservadas para o modelo CAT	39
4.1	Equação de Sine-Gordon	39

4.2	Cargas conservadas para o modelo de Sine-Gordon	40
4.3	Cargas conservadas para o modelo de Toda $sl(3)$	49
4.4	Cargas conservadas para o modelo de Toda $sl(N)$ - Generalização	58
5	Conclusões	65
	Referências	68
	Apêndice A – Grupos e representações	71
	Apêndice B – Álgebras de Lie	74
B.1	Matrizes de Cartan e Diagramas de Dynkin	78
B.2	Representação das Álgebras de Lie	80
	Apêndice C – Álgebras de Kac-Moody Afim	82
C.1	A álgebra de Kac-Moody $sl(2)$	85
C.2	A álgebra de Kac-Moody $sl(3)$	86
	Apêndice D – Álgebras e Operadores de Vértice	89
D.1	Propriedades dos operadores de vértice	90

1 Modelos Integráveis e Sólitos

1.1 Introdução

O estudo de sistemas não-lineares é de grande importância para o entendimento de vários fenômenos que ocorrem na natureza. Muitos modelos não-lineares apresentam ondas solitárias ou sólitos, que são soluções especiais de equações diferenciais não-lineares. Em muitos casos o aparecimento de sólitos é devido a uma concorrência equilibrada entre a não-linearidade e a dispersão. Além disso, sistemas com soluções sólitos possuem um número infinito de quantidades conservadas, que são responsáveis por muitas propriedades importantes daquelas soluções, sendo uma delas a estabilidade sob o processo de espalhamento.

A descoberta dos sólitos impulsionou o estudo de fenômenos não-lineares. Em 1834 John Scott Russel (1808-1882), em canais na Escócia, observou uma onda se propagando sem se dispersar, mantendo sua forma e com velocidade maior que as ondas usuais. Esse acontecimento deu origem ao que hoje conhecemos como sólitos (1). Em 1895, Korteweg e de Vries formularam matematicamente uma equação não-linear que ficou conhecida como KdV, a qual descreveu a onda observada por Russel (2). Zabusky e Kruskal, em 1965, analisaram o problema de Fermi-Pasta-Ulam (FPU)(3), que consistia no estudo da ergodicidade de um sistema não-linear, e obtiveram a equação de KdV em um dado limite do contínuo através de simulações numéricas. Com essas simulações, descobriram que os sólitos se espalhavam sem se destruir (4).

Por fim, em 1967, Morikazu Toda obteve uma solução analítica para o problema de FPU ao modificar o potencial. O modelo proposto por Toda foi a propagação de ondas em redes de uma dimensão, onde a interação entre os vizinhos mais próximos era feita por um potencial exponencial. Esse fato impulsionou o estudo de estruturas algébricas em sistemas integráveis (5).

A equação de KdV representada por Lax (6) evidenciou a existência de quantidades

conservadas no sistema tornando o modelo integrável. A equação de Lax para a equação de KdV foi generalizada por Zakharov-Shabat (7, 8, 9) para sistemas em duas dimensões como a condição de curvatura nula para uma conexão. As equações solitônicas podem ser obtidas por vários métodos, dentre eles o método de espalhamento inverso (MEI), que faz uso de transformadas de Fourier e foi aplicado com sucesso em equações como a KdV, equação de Schrodinger não-linear, dentre outras. Gardner, Greene, Kruskal e Miura desenvolveram um método com valor inicial para resolver a equação de KdV utilizando-se do método de espalhamento inverso (10). No presente trabalho apresentamos o método de Hirota, utilizado por Toda (11, 12) e fazemos uso do método de dressing (13).

Para a construção do método de dressing, precisamos que as equações de movimento sejam escritas em termos da curvatura nula, que por sua vez pertence a uma álgebra que precisa ser graduada, isto é, o espaço vetorial ser escrito como soma direta de seus subespaços e por fim, o sistema deve possuir soluções de vácuo, ou soluções semente, pois o método transporta uma solução a outra fazendo uso de transformações de simetria.

Neste trabalho, construímos potenciais de gauge que satisfazem a condição de curvatura nula, o que nos permite estudar propriedades algébricas dos modelos e obter as cargas conservadas relacionadas ao sistema, mostrando assim que é possível obter as quantidades conservadas mesmo que nenhuma simetria da lagrangeana esteja associada. Neste contexto, os modelos de Toda são de grande importância por apresentarem invariância conforme e serem integráveis (14). Calculamos as cargas para os modelos de Toda Afim Conforme e avaliamos tais cargas para solução de 1-sóliton. No trabalho de Ferreira e Zarkzewski (15), as cargas são calculadas para o modelo de sine-Gordon e para a equação de mKdV. Freeman considerou as cargas para o modelo de Toda Afim Conforme que são conservadas quando o tempo é tomado como sendo uma das variáveis do cone de luz (16).

No primeiro capítulo fazemos uma pequena introdução aos conceitos empregados no trabalho, como integrabilidade, simetrias e como obter as quantidades conservadas. No capítulo 2 apresentamos os modelos Clássicos de Toda, começando pela rede proposta por Toda. Os modelos são divididos em modelos de Toda Conforme; Toda Afim e Toda Afim Conforme e descrevemos suas principais características e diferenças. No capítulo 3 os métodos de soluções são explorados: o método de Hirota e o de dressing. No capítulo 4 do trabalho as cargas são obtidas. Primeiramente, apresentamos o cálculo já realizado (15) para o conhecido modelo de sine-Gordon ou Toda Afim Conforme $sl(2)$ e depois, originalmente, calculamos as cargas e mostramos que estas são termos de superfície para os modelos de Toda Afim Conforme $sl(3)$ e generalizamos para o caso $sl(N)$. Por fim, no

capítulo 5 apresentamos as conclusões. Na dissertação também constam apêndices detalhados para a compreensão de muitos aspectos do trabalho. Nestes apêndices abordamos os grupos e as suas representações; as álgebras de Lie e álgebras de Kac-Moody afim e os operadores de vértice.

1.2 Sólitos

Sólitos vêm sendo estudados por físicos, matemáticos e engenheiros desde a sua descoberta devido a sua grande aplicabilidade em diversos sistemas, por exemplo, em junções Josephson, moléculas de poliacetileno, entre outros (17). O que torna os sólitos tão especiais e interessantes são as suas propriedades, que veremos de forma mais abrangente nesta seção.

A primeira onda solitária foi observada em Agosto de 1834 por um engenheiro e filósofo natural escocês, John Scott Russel . Russel, na verdade, estava interessado na formação das ondas devido à resistência ao movimento dos barcos e também na fabricação de cascos ideais para navios. A descoberta se deu pela seguinte observação: “Eu observava o movimento de um barco que dois cavalos rebocavam através de um canal raso e estreito, quando, de repente, o barco parou; entretanto o movimento continuou pela água do canal, a água foi se acumulando, em um estado de intensa agitação, ao redor do barco e daí, jogando o barco para trás, espalhou-se, ao longo do canal, com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande ondulação solitária, cuja superfície é perfeitamente definida. Esta onda continuou sua marcha pelo canal, sem que sua forma ou mesmo sua velocidade se alterassem, pelo menos aparentemente. Continuando a cavalo, segui a onda que se movia de 8 a $9mi/h$, preservando sua forma original (uns 30 pés de comprimento e 1 a 1,5 pés de altura). A altura da onda foi gradualmente diminuindo e após uma perseguição por uma ou duas milhas eu a perdi na sinuosidade do canal. Assim, em Agosto de 1834, foi o primeiro encontro com esse fenômeno estranho e bonito” (7).

Russel, após sua interessante observação, fez vários experimentos; descobriu como produzi-los em série e determinou a relação entre a altura da onda b (amplitude), em um canal de profundidade h , e sua velocidade de propagação v (18):

$$v^2 = g(h + b) \quad (1.1)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Boussinesq, em 1869, obteve soluções aproximadas do fenômeno observado por Russel (19) que foram mais tarde aperfeiçoadas por Saint Venant em 1885 e, por fim, culminou no trabalho de Korteweg de Vries em 1895.

Este fenômeno só foi denominado de sólíton no trabalho de Zabusky e Kruskal, em 1965 (Solução numérica de equação de onda de plasma) por apresentar também característica de partícula (4), como fóton, elétron, etc. A característica de partícula vem do fato de após interagir com outros sólitons manter sua identidade a menos de uma fase.

Sólitons, então, são ondas com características particulares: não mudam de forma ao se propagarem, ou seja, possuem forma permanente; não dissipam energia enquanto se propagam e quando interagem entre si o que ocorre é apenas uma mudança de fase. A não linearidade tende a desestabilizar a forma da onda, no entanto esse efeito é balanceado pela dispersão. Esses efeitos de não-linearidade e dispersão dão lugar a fenômenos interessantes. Por exemplo, a superposição de dois sólitons não consiste apenas da soma das duas ondas mas sim de uma superposição não linear. As ondas solitárias interagem de forma a não se destruir ou criarem ondas múltiplas. Elas mantem suas formas originais apresentando apenas uma diferença de fase. O que torna esse comportamento dos sólitons possível é a existência de infinitas quantidades conservadas, que restringem o espaço de fase e fornecem estabilidade à solução.

Figura 1. — Colisão de dois solitons (18)

Um dos maiores exemplos de equação que apresenta efeitos não lineares e dispersivos é a equação de Korteweg de Vries (KdV), pela qual se obtém uma família de soluções exatas, como os sólitons. A equação da KdV é útil para descrever ondas íon-acústicas no plasma, rede anarmônica, ondas longitudinais dispersivas em materiais elásticos, etc (20). Um grande número de sistemas matemáticos hiperbólicos podem ser descritos pela

equação da KdV.

1.3 Integrabilidade

Existem várias definições de integrabilidade que não são equivalentes, por exemplo, “integrável à la Liouville”, “integrável de acordo com a Propriedade de Painlavé”, “integrável via pares de Lax”, etc. Portanto, um sistema que é integrável segundo uma destas definições pode não ser por outra. A partir disso surgiram os diferentes critérios de integrabilidade. O critério mais conhecido, por ter sido proposto inicialmente no contexto do formalismo Hamiltoniano da Mecânica Clássica, é o critério de Liouville. Nesta definição, o sistema é integrável quando o número de graus de liberdade do sistema é igual ao número de quantidades conservadas em involução. Em outras palavras, existe uma transformação canônica que permite reescrever as equações de movimento do sistema em termos de novas variáveis denominadas ângulo e ação. A Hamiltoniana é independente das novas coordenadas (variáveis ângulo) e a integração das equações de Hamilton é trivial. No entanto, o que muitas vezes inviabiliza o método é a descoberta da transformação canônica apropriada para a integração do sistema, fazendo com que sejam utilizados outros métodos.

O método empregado neste trabalho faz uso da construção de potenciais de gauge de tal forma que a condição de curvatura nula seja equivalente às equações de movimento, o que torna possível obter as quantidades conservadas, construir soluções e explorar as propriedades algébricas dos modelos.

1.3.1 Simetrias

A análise de simetrias e sua construção sempre foi uma constante no desenvolvimento da humanidade. Desde as construções egípcias até hoje temos uma grande busca por sistemas simétricos. Nas figuras seguintes vemos a simetria da construção Taj-Mahal na Índia, construída em 1650 e também o símbolo do Renascimento, movimento ocorrido no século XVI que culminou com um grande desenvolvimento nas artes, ciência e literatura, valorizando o homem com suas simetrias e colocando-o no centro do Universo. Na ciência, simetrias estão relacionadas mais intimamente a fenômenos naturais, como físicos, químicos e biológicos. Encontramos várias simetrias na natureza, como por exemplo aquela mostrada na figura 3 abaixo. Na física e na matemática, simetrias aparecem em equações e sistemas de partículas, como os números quânticos na mecânica quântica. A teoria dos grupos proporciona um estudo minucioso das simetrias e suas propriedades (21).

Figura 2. — Taj-Mahal **Figura 3.** — Simetria na Natureza **Figura 4.** — Simetria Humana

A análise das simetrias, ou invariâncias, de um sistema é uma importante ferramenta para se estudar a integrabilidade de um sistema e para a construção das integrais primeiras (22). Denominamos de simetrias externas aquelas que correspondem a transformação nos pontos do espaço-tempo e simetrias internas aquelas que atuam no espaço dos campos da teoria. Por outro lado, denominamos de simetrias globais aquelas onde os parâmetros das transformações não dependem dos pontos do espaço-tempo e de simetrias locais aquelas onde tais parâmetros dependem da posição no espaço-tempo. Por exemplo, a transformação de fase em uma função de onda, $\psi(x,t) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x,t)$, é uma simetria interna e é local (ou global) se o parâmetro α depender (ou não) dos pontos do espaço-tempo, ou seja, $\alpha = \alpha(x,t)$.

1.3.2 Quantidades conservadas

Quantidades conservadas são aquelas grandezas que são funções das variáveis dinâmicas do sistema que permanecem constantes no tempo, ou seja, que não se alteram conforme o sistema evolui. Tais quantidades fornecem muitas informações sobre a dinâmica e simetrias do sistema. Como veremos o aparecimento de sóliton; em uma dada teoria depende da existência de seu número infinito de quantidades conservadas.

Nesta dissertação estudamos as simetrias e leis de conservação através da equação de Lax e condição de curvatura nula. A equação de Lax é dada por (6):

$$\frac{d}{dt}L = [M, L] \quad (1.2)$$

onde M e L são operadores que pertencem a uma álgebra de Lie ou álgebra de operadores diferenciais e são funcionais dos campos da teoria em questão. Por exemplo, consideremos

a equação de Korteweg- de Vries (KdV),

$$u_t = 6uu_x + u_{xxx} \quad (1.3)$$

Os operadores L e M adquirem a forma:

$$L = \partial_x^2 + u \quad M = 4 \left(\partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x \right) \quad (1.4)$$

Substituindo os operadores acima na equação de Lax, reproduzimos a equação da KdV fornecida em (1.3). É possível construir as cargas conservadas tomando o traço das potências de L :

$$\frac{d}{dt} Tr(L^n) = Tr \left(\frac{d}{dt} L^n \right) = Tr([M, L^n]) = 0 \quad (1.5)$$

onde $n = 1, \dots, N$ e N é a dimensão da representação das matrizes M e L . Outra forma de expressar esta conservação é por meio da existência de autovalores de L :

$$L(t)|\psi(t)\rangle = \lambda(t)|\psi(t)\rangle \quad (1.6)$$

A derivada temporal da expressão acima fornece:

$$\dot{L}|\psi\rangle + L|\dot{\psi}\rangle = \dot{\lambda}|\psi\rangle + \lambda|\dot{\psi}\rangle \quad (1.7)$$

No caso de L ser hermitiano temos que: $\langle \psi|L = \lambda \langle \psi|$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Multiplicando a equação anterior, pela esquerda, por $\langle \psi|$ e fazendo uso da relação (1.2) obtemos:

$$\langle \psi|[M, L]|\psi\rangle = \dot{\lambda} \langle \psi|\psi\rangle \quad (1.8)$$

o que fornece:

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (1.9)$$

Portanto, esta estrutura está relacionada à existência de quantidades conservadas, que levam à integrabilidade do modelo. Uma grande parte dos modelos que apresentam soluções solitônicas admitem uma representação na forma da equação de Lax.

1.4 Curvatura Nula

A denominação de “curvatura nula” vem da geometria diferencial (23). Uma equação não-linear é integrável quando possui uma representação em termos de curvatura nula. Em duas dimensões, a condição de curvatura nula ou equação de Lax-Zakharov-Shabat é

uma lei de conservação (24):

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \quad (1.10)$$

onde $\mu, \nu = \pm$ e os campos A_μ são representações matriciais ou conexões de uma álgebra de Lie. A equação de curvatura nula é invariante pela transformação de gauge:

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \equiv A'_\mu \quad (1.11)$$

Definimos:

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu] = 0 \quad (1.12)$$

e então, substituindo A'_μ de (1.11) em (1.12) percebemos que,

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = g(\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu])g^{-1} \quad (1.13)$$

isto é, a invariância de gauge é obtida:

$$F'_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu} g^{-1} \quad (1.14)$$

Denominamos simetrias escondidas as simetrias da equação de Lax ou curvatura nula que não são simetrias das equações de movimento da teoria.

Verifiquemos que a curvatura nula é uma lei de conservação em $(1+1)dim$ e que associadas a ela estão um número infinito de quantidades conservadas (25). Para isso, fazemos uso de uma curva Γ , parametrizada por σ , na qual $\sigma = 0$ e $\sigma = 2\pi$ correspondem às extremidades de Γ . Considere a integral ordenada no caminho W , definida por:

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0, \quad (1.15)$$

cuja solução é da forma:

$$W = 1 - \int_0^\sigma d\sigma^1 A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma^1} + \int_0^\sigma d\sigma^1 A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma^1} \int_0^{\sigma^1} d\sigma^2 A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma^2} + \dots \quad (1.16)$$

$$\equiv P \exp \left(\int_\Gamma d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) \quad (1.17)$$

onde P significa ordenamento no caminho e $W(0) = I$ é a condição inicial. Mantendo o ponto inicial $x^\mu(\sigma=0)$ fixo, analisemos como W varia sob distorções da curva Γ , $(\Gamma + \delta\Gamma)$. Então:

$$\frac{d\delta W}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta W + \delta(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}) W = 0 \quad (1.18)$$

Pela expressão inicial de W obtemos que:

$$\frac{dW^{-1}}{d\sigma} - W^{-1}A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0 \quad (1.19)$$

Multiplicando à esquerda por W^{-1} , o termo $\frac{d(W^{-1}\delta W)}{d\sigma}$ é dado por:

$$\frac{d(W^{-1}\delta W)}{d\sigma} = -W^{-1}(\partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma})W \quad (1.20)$$

Integrando por partes a expressão obtida:

$$W^{-1}\delta W = -W^{-1}A_\mu W \delta x^\mu + \int_0^\sigma d\sigma' W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\nu \quad (1.21)$$

Trocando a extremidade final para $\sigma = 2\pi$ e novamente variando Γ , o resultado encontrado é:

$$W^{-1}(2\pi)\delta W(2\pi) = \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\nu \quad (1.22)$$

Considere, agora, uma curva fechada com $x_0 \equiv x^\mu(0) = x^\mu(2\pi)$, sendo Σ uma superfície bidimensional de fronteira Γ . Σ é percorrida com loops que começam e terminam em um dado ponto fixo x_0 . Os loops são parametrizados por γ , de modo que $\gamma=0$ representa um loop infinitesimal e $\gamma=2\pi$ corresponda à própria fronteira Γ .

Figura 5. — Superfície no espaço dos loops

W é variado de tal forma que os loops deformem-se entre si, isto é, $\delta = \delta\gamma \frac{d}{d\gamma}$. Assim, a última equação pode ser reescrita:

$$\frac{dW(2\pi)}{d\gamma} - W(2\pi) \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}F_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\gamma} = 0 \quad (1.23)$$

Dessa forma, existe uma equivalência entre a equação de transporte paralelo (1.15) e a equação anterior (1.23), que consiste no **teorema de Stokes não abeliano**.

Integrando ambas as equações e igualando-as:

$$Pexp\left(\int_\Gamma d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) = P_s exp\left(\int_\Sigma d\sigma d\gamma W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\gamma}\right) \quad (1.24)$$

onde P significa ordenamento no caminho e P_s ordenamento na superfície. A constante de integração multiplicativa $W(x_0)$ correspondente ao valor inicial W foi omitida de ambos os lados da equação anterior.

1.4.1 Surgimento das Leis de Conservação

Quando $F_{\mu\nu} = 0$, pela equação (1.22) temos que $\delta W(2\pi)$ precisa ser zero e então a independência do caminho é obtida.

$$F_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \delta W(2\pi) = 0 \quad (1.25)$$

Ou seja, para $F_{\mu\nu} = 0$, independentemente do loop escolhido, o valor da integral sobre o loop é sempre o mesmo, dessa forma é possível escolher um loop tão pequeno quanto se queira (infinitesimal) que corresponderá a $W(x)$ calculado no ponto x . Consideremos o seguinte contorno fechado: No contorno temos que:

Figura 6. — Contornos de integração

$$W_{C_L} W_{C_0} = W_{C_t} W_{C_{-L}} \quad (1.26)$$

Impondo as condições de contorno:

$$A_t|_{x=L} = A_t|_{x=-L} + \beta C \quad (1.27)$$

onde β é uma função de C (termo central da álgebra) e de t , temos que a solução para W_t é a da forma:

$$W_t = e^{\int_0^t dt \beta C} U(t) W_0 U(t)^{-1} \quad (1.28)$$

com,

$$W_{0/t} = P \exp \left(- \int_{-L}^L dx A_x|_{t=0/t} \right); \quad U(t) = P \exp \left(- \int_0^t dt A_t|_{x=L} \right) \quad (1.29)$$

Os autovalores de W_t são as cargas conservadas da teoria. Se $\beta = 0$ temos a chamada evolução isospectral, os autovalores de W_t são as cargas conservadas e são constantes no tempo. Quando $\beta \neq 0$ também é possível obtermos as cargas conservadas. Para isso,

consideremos um ψ_0 que é autoestado de W_0 sob ação adjunta,

$$W_0 \psi_0 W_0^{-1} = \lambda \psi_0, \quad (1.30)$$

ao definirmos um $\psi_t = U(t) \psi_0 U(t)^{-1}$, temos que este é autoestado de W_t com o mesmo autovalor λ , ou seja, neste caso o autovalor λ é a carga conservada.

As cargas conservadas são então obtidas por meio da solução da equação de transporte paralelo:

$$W_t = e^{\int_0^t dt \beta^C} U(t) W_0 U(t)^{-1} \quad (1.31)$$

Devido ao ordenamento no caminho da equação anterior, as cargas são não-locais pois os potenciais são não-Abelianos, entretanto, a partir de uma transformação de gauge, os potenciais A_μ são colocados, em alguns casos, em uma subálgebra Abeliana e com isso o ordenamento desaparece fazendo com que as cargas tornem-se locais. A transformação de gauge é da forma:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (1.32)$$

Por meio desse gauge, W é transformado por: $W \rightarrow W' = g W \bar{g}^{-1}$, onde $\bar{g}$ independe do caminho σ , da equação (1.15). Consideremos uma curva Γ fracionada em duas: Então:

Figura 7. — Duas curvas unidas: Γ_1 e Γ_2

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Temos que:

$$\begin{aligned} W(\Gamma_1) &\rightarrow g(x_1) W(\Gamma_1) \bar{g}_1^{-1} \\ W(\Gamma_2) &\rightarrow g(x_2) W(\Gamma_2) \bar{g}_2^{-1} \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$W(\Gamma) \rightarrow g(x_2) W(\Gamma) \bar{g}^{-1}$$

Sabendo que

$$W(\Gamma) = W(\Gamma_2) W(\Gamma_1) \quad (1.34)$$

mostramos que

$$\bar{g}_2 = g(x_1) \quad (1.35)$$

Ou seja, partindo de uma transformação de gauge entre dois pontos de um caminho, W é transformado por: $W \rightarrow g(x_1)Wg(x_0)^{-1}$. Para uma curva fechada, $W \rightarrow g(x_1)Wg(x_0)^{-1}$ e assim $Tr(W^n)$ é invariante de gauge.

2 Os modelos de Toda

2.1 A Rede de Toda

Os modelos de Toda surgiram a partir do trabalho de Fermi-Pasta-Ulam, onde eles estudavam a ergodicidade de um sistema não-linear. O sistema era constituído de uma rede de N osciladores acoplados com molas levemente não-lineares onde a lei de força era dada por:

$$F = -K\Delta(1 + \alpha\Delta) \quad (2.1)$$

onde $\Delta \equiv$ diferença entre os deslocamentos com relação a posição de equilíbrio, e α e K são constantes.

O objetivo dos pesquisadores era ver como a energia de um sistema não-linear evoluía a partir de um modo normal excitado. A expectativa era ver os modos se excitarem de maneira contínua e gradual até atingirem o equilíbrio. No entanto, isso não foi verificado, o sistema apresentava uma equipartição de energia até certo ponto e então apenas um modo ou outro predominava. Após um determinado tempo o sistema retornava quase à sua configuração inicial. A conclusão a que chegaram foi a de que o espaço de fase do sistema não era totalmente preenchido e o sistema estava provavelmente sujeito à leis de conservação e simetrias escondidas.

Morikazu Toda, em 1967, propôs um potencial adicional ao sistema proposto por Fermi, Pasta e Ulam (FPU) e verificou que o conjunto possuía solução analítica. Este sistema ficou conhecido como rede de Toda. Toda considerou o seguinte Potencial (26):

$$V(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar \quad (2.2)$$

onde $(ab > 0)$

Figura 8. — $V(r)$ por r , para $a = b = 1$

O potencial possui um mínimo em $r = 0$ e a força associada ao potencial é dada por:

$$f(r) = a(e^{-br} - 1) \quad (2.3)$$

Consideremos o deslocamento relativo entre as partículas como: $r_n \equiv y_{n+1} - y_n$ e consequentemente a equação de movimento adquire a forma:

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = -2V'(r_n) + V'(r_{n+1}) + V'(r_{n-1}) \quad (2.4)$$

Substituindo (2.2) na equação de movimento acima:

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \quad (2.5)$$

Quando a rede é infinita o sistema apresenta configuração de equilíbrio estável e soluções tipo sóliton.

O modelo de Toda com um número finito de partículas com os extremos fixos é denominada de **molécula de Toda**. Assim, a equação (2.5) com $m = b = 1$ e $a = 1$ e extremidades fixas adquire a seguinte expressão:

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = -c_{nm} e^{-r_m} \quad (2.6)$$

que é uma equação matricial e c_{nm} é a matriz de Cartan da álgebra $su(N+1)$ quando o sistema é constituído de N partículas. As matrizes de Cartan estão definidas no apêndice B. Quando a álgebra associada ao sistema é uma álgebra de Lie finita, o sistema possui somente um número finito de quantidades conservadas. Além disso estes sistemas não possuem vácuos para valores finitos de r_n e isto contribui para a não existência de soluções sólitons.

Quando a rede de Toda possui condições de contorno periódicas, o que é feito unindo a primeira partícula à última por uma mola, construindo um anel, a matriz de Cartan do sistema está associada a uma álgebra de Kac-Moody $\mathcal{G}$. O modelo então possui N quantidades conservadas e é integrável. Como existem configurações de vácuo no modelo há soluções tipo sóliton. Estas soluções podem ser obtidas pelo método de Hirota, o que é apresentado no próximo capítulo deste trabalho.

2.2 Teorias de Campo de Toda Clássicas

Nesta seção apresentamos as propriedades algébricas das teorias de Campos de Toda em duas dimensões (27).

2.2.1 Modelos de Toda Conforme (CT)

A molécula de Toda em duas dimensões é chamada de teoria de Toda Conforme, que é uma teoria de campos relativística construída a partir de r campos escalares e a lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} C_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b - \sum_{a,b=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q} C_{ab} \phi^b} \quad (2.7)$$

onde C_{ab} é a matriz de Cartan de uma álgebra de Lie finita $\mathcal{G}$ e q^a e $\bar{q}$ são constantes de acoplamento. As equações de Euler-Lagrange são:

$$\partial_- \partial_+ \phi^a = \frac{q^a}{\bar{q}} e^{\bar{q} C_{ab} \phi^b} \quad (2.8)$$

com as variáveis do cone de luz: $x^\pm = x \pm t$ e $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$. O exemplo mais comum desta teoria, para $r = 1$ e $C_{ab} = 2$ é a teoria de Liouville dada pela equação:

$$\partial_- \partial_+ \phi = \frac{q^a}{\bar{q}} e^{\bar{q} 2\phi} \quad (2.9)$$

A equação (2.8) é invariante conforme pelas seguintes transformações:

$$x_+ \rightarrow \tilde{x}_+ = f(x_+) \quad (2.10)$$

e

$$x_- \rightarrow \tilde{x}_- = g(x_-) \quad (2.11)$$

definindo os novos campos da seguinte forma:

$$e^{-C_{ab}\Phi^b(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+}\right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-}\right)^{\frac{1}{\bar{q}}} e^{-C_{ab}\Phi^b(x_+, x_-)} \quad (2.12)$$

A solução para as equações (2.8) foi obtida por Leznov-Saveliev, onde fizeram uso dos seguintes potenciais (28):

$$A_+ = \partial_+ \Phi + e^{ad\Phi} \epsilon_+ = \partial_+ \Phi + \sum_{a=1}^r e^{\frac{1}{2}C_{ab}\Phi^b} E_{\alpha^a} \quad (2.13)$$

$$A_- = -\partial_- \Phi + e^{-ad\Phi} \epsilon_- = -\partial_- \Phi + \sum_{a=1}^r q^a e^{\frac{1}{2}C_{ab}\Phi^b} E_{-\alpha^a} \quad (2.14)$$

onde

$$\Phi = \frac{\bar{q}}{2} \sum_{a=1}^r \varphi^a H_a, \quad \epsilon_+ = \sum_{a=1}^r E_{\alpha^a}, \quad \epsilon_- = \sum_{a=1}^r q^a E_{-\alpha^a} \quad (2.15)$$

e H_a são os geradores da subálgebra de Cartan de $\mathcal{G}$, E_{α^a} e $E_{-\alpha^a}$ são operadores step associados às raízes simples positivas e negativas respectivamente. Uma característica importante deste modelo é que $\varphi = cte$ não é uma solução, logo, o modelo não possui vácuo para valores finitos de φ_a e, conseqüentemente, os modelos CT não possuem soluções tipo sólitons. Além disso devido a invariância conforme, as excitações da teoria não têm massa.

2.2.2 Modelos de Toda Afim (AT)

O modelo de Toda Afim é uma versão bidimensional da rede de Toda com condições de contorno periódicas. A álgebra que descreve o modelo é uma álgebra de laços, isto é, uma álgebra de Kac-Moody sem termo central. A matriz de Cartan para este modelo é singular ($\det C = 0$) e possui um vetor nulo. A teoria é composta de r campos escalares φ^a e a lagrangeana tem a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} C_{ab} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^b - \sum_{a,b=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}C_{ab}\Phi^b} - \frac{4q^0}{\Psi_a^2} e^{-\bar{q}C_{\Psi b}\Phi^b} \quad (2.16)$$

no qual $\Psi = -\alpha_0$ é a raiz mais alta da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ e $C_{\Psi b} = 2\frac{\Psi \cdot \alpha_b}{\alpha_b^2}$. A presença do último termo em (2.16) quebra a simetria conforme que (2.7) possui mas permite com que a integrabilidade permaneça. A simetria do modelo pode reaparecer estendendo-se a subálgebra de grau zero. As equações de Euler-Lagrange são:

$$\partial_- \partial_+ \varphi^a = \frac{q^a}{\bar{q}} e^{\bar{q}C_{ab}\Phi^b} - \frac{q^0}{\bar{q}} e^{-\bar{q}C_{\Psi b}\Phi^b} \quad (2.17)$$

Para este modelo existe uma configuração de vácuo estável, fazendo com que surjam soluções tipo sólitons. Como o modelo deixou de ser invariante conforme é um modelo massivo. O exemplo mais simples deste modelo é o caso $\mathfrak{sl}(2)$ denominado de sinh-Gordon, mapeado no modelo sine-Gordon quando a constante de acoplamento $\bar{q}$ é um imaginário puro.

Caso $\mathfrak{sl}(2)$: A Matriz de Cartan é:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

temos $\det C = 0$ e o vetor nulo é

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

então $K.v = 0$. Neste caso temos somente um campo e a equação fica:

$$\partial_- \partial_+ \varphi = e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} \quad (2.18)$$

que é a equação de sinh-Gordon. Fazendo $2\varphi \Rightarrow i\phi$ obtemos:

$$\partial_- \partial_+ \phi = 4 \sin \phi \quad (2.19)$$

que é a equação de sine-Gordon.

2.2.3 Modelos de Toda Afim Conforme (CAT)

O modelo de Toda Conforme Afim possui soluções tipo sólitons e é obtido pela adição de dois campos, de maneira que a invariância conforme exista no sistema. Sua lagrangeana tem a forma (29):

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} C_{ab} \partial_\rho \varphi^a \partial^\rho \varphi^b + \bar{q}^2 \partial_\rho \eta \partial^\rho v - \sum_{a,b=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}C_{ab}\varphi^b} - \frac{4q^0}{\Psi_a^2} e^{-\bar{q}C_{\psi b}\varphi^b + 2\mu} \quad (2.20)$$

onde η e $\mathbf{v}$ são os novos campos introduzidos. As equações de Euler-Lagrange ficam:

$$\partial_- \partial_+ \Phi^a = \frac{1}{\bar{q}} (q^a e^{\bar{q} C_{ab} \Phi^b} - q^0 e^{-\bar{q} C_{\psi b} \Phi^b + 2\mu}) \quad (2.21)$$

$$\partial_- \partial_+ \eta = 0 \quad (2.22)$$

$$\partial_- \partial_+ \mathbf{v} = \frac{2}{\Psi^2} \frac{q^0}{\bar{q}} e^{-\bar{q} C_{\psi b} \Phi^b + 2\mu} \quad (2.23)$$

A invariância conforme é dada por meio das tranformações $x_+ \rightarrow \tilde{x}_+ = f(x_+)$, $x_- \rightarrow \tilde{x}_- = g(x_-)$ com os campos transformados por:

$$e^{-\tilde{\Phi}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^{\frac{r^a}{\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^{\frac{r^a}{\bar{q}}} e^{-\Phi^a(x_+, x_-)} \quad (2.24)$$

$$e^{-\tilde{\mu}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^{\frac{h}{2\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^{\frac{h}{2\bar{q}}} e^{-\mu^a(x_+, x_-)} \quad (2.25)$$

$$e^{-\tilde{\mathbf{v}}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^D \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^D e^{-\mathbf{v}^a(x_+, x_-)} \quad (2.26)$$

onde D é uma constante, h é o número de Coxeter da álgebra¹ e r^a é um vetor definido como:

$$r^a = \sum_{a=1}^{\text{rank } G} C_{ab}^{-1} \quad (2.27)$$

onde

$$\sum_{b=1}^{\text{rank } G} C_{ab}^{-1} r^b = 1, \quad \sum_{b=1}^{\text{rank } G} C_{\psi b}^{-1} r^b = h - 1 \quad (2.28)$$

As equações de movimento (2.21)-(2.23) são obtidas por meio dos seguintes potenciais de gauge:

$$A_+ = \partial_+ \Phi + e^{ad\Phi} \epsilon_+, \quad A_- \partial_- \Phi + e^{-ad\Phi} \epsilon_- \quad (2.29)$$

onde

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\text{rank } G} \Phi^a H_a^0 + \mu d + \frac{1}{2} \mathbf{v} C \quad (2.30)$$

e

$$E_+ = \sum_{a=1}^{\text{rank } G} E_{\alpha_a}^0 + E_{-\psi}^1, \quad E_- = \sum_{a=1}^{\text{rank } G} q^a E_{\alpha_a}^0 + q^0 E_{\psi}^{-1} \quad (2.31)$$

E_{α_a} e E_{ψ} são os operadores step da álgebra de Kac-Moody e o campo Φ pertence a subálgebra de Cartan da álgebra em questão.

---

¹O número de Coxeter, h , é definido como a altura da raiz mais alta mais uma unidade, ou seja, $h = \text{height}(\psi) + 1$ onde $\text{height}(\psi) = \sum_{a=1}^r m_a$ e $\psi = \sum m_a \alpha_a$ com α_a sendo as raízes simples.

2.2.4 Relação entre os modelos CAT e AT

Podemos obter uma conexão bem interessante entre os modelos CAT e AT fazendo uma transformação das coordenadas do espaço tempo dos modelos, onde o campo $\mathbf{v}$ é quem descreve esta conexão (30).

Primeiramente novos campos são definidos:

$$\phi^a = \varphi^a - \frac{2r^a}{h}\mu \quad (2.32)$$

e

$$\eta = \frac{2}{h}\mu \quad (2.33)$$

As equações de movimento do modelo CAT, (2.21)-(2.23), tornam-se:

$$\partial_- \partial_+ \phi^a = \frac{1}{\bar{q}} (q^a e^{\bar{q} C_{ab} \phi^b} - q^0 e^{-\bar{q} C_{\psi b} \phi^b}) e^{\bar{q} \eta} \quad (2.34)$$

$$\partial_- \partial_+ \eta = 0 \quad (2.35)$$

$$\partial_- \partial_+ \mathbf{v} = \frac{2}{\psi^2} \frac{q^0}{\bar{q}} e^{-\bar{q} C_{\psi b} \phi^b} e^{\bar{q} \eta} \quad (2.36)$$

O campo Φ agora é definido da seguinte forma:

$$\Phi = \frac{\bar{q}}{2} \left(\sum_{a=1}^{rank \mathcal{G}} \phi^a H_a^0 + \eta Q + \mathbf{v} C \right) \quad (2.37)$$

onde Q é o operador de gradação definido no apêndice C. Reescrevemos as transformações que deixam invariantes as equações de movimento:

$$e^{-\phi^a(x_+, x_-)} \rightarrow e^{-\tilde{\phi}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = e^{-\phi^a(x_+, x_-)} \quad (2.38)$$

$$e^{-\eta(x_+, x_-)} \rightarrow e^{-\tilde{\eta}(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} e^{-\eta(x_+, x_-)} \quad (2.39)$$

A equação (2.26) fica inalterada. A solução da equação (2.36) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\eta(x_+, x_-) = \eta_+(x_+) + \eta_-(x_-) \quad (2.40)$$

Tomada uma solução $(\phi, \eta, \mathbf{v})$ do modelo CAT, a transformação das coordenadas do espaço-tempo consiste nas seguintes definições das coordenadas:

$$\tilde{x}_+ = \int^{x_+} dy_+ e^{\eta_+(y_+)} \quad , \quad \tilde{x}_- = \int^{x_-} dy_- e^{\eta_-(y_-)} \quad (2.41)$$

de tal forma:

$$\frac{df}{dx_+} = e^{+\eta_+} \quad , \quad \frac{df}{dx_-} = e^{+\eta_-} \quad (2.42)$$

e então:

$$\partial_{\pm} \rightarrow \tilde{\partial}_{\pm} = \frac{\partial x_{\pm}}{\partial \tilde{x}_{\pm}} \partial_{\pm} = e^{-\eta_{\pm}} \partial_{\pm} \quad (2.43)$$

Nas novas coordenadas, as equações de movimento do modelo CAT são reescritas:

$$\partial_- \partial_+ \tilde{\phi}^a = \frac{1}{\tilde{q}} \left(q^a e^{\tilde{q} C_{ab} \tilde{\phi}^b} - l_a^{\Psi} q^0 e^{-\tilde{q} C_{\Psi b} \tilde{\phi}^b} \right) \quad (2.44)$$

$$\partial_- \partial_+ \mathbf{v} = \frac{2}{\Psi^2} \frac{q^0}{\tilde{q}} e^{-\tilde{q} C_{\Psi b} \tilde{\phi}^b} \quad (2.45)$$

Ou seja, para cada solução do modelo CAT no espaço-tempo (x_+, x_-) obtém-se uma solução do modelo AT também no espaço-tempo $(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)$ no qual a transformação entre os espaços é determinada pela solução do campo η .

A lagrangeana do modelo CAT é:

$$\mathcal{L} = \frac{\tilde{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} C_{ab} \partial_{\rho} \phi^a \partial^{\rho} \phi^b + \frac{\tilde{q}^2}{2} \sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \partial_{\rho} \phi^a \partial^{\rho} \eta + \tilde{q}^2 \frac{h}{2} \partial_{\rho} \eta \partial^{\rho} \mathbf{v} - U(\phi, \eta) \quad (2.46)$$

o potencial é dado por:

$$U(\phi, \eta) = \sum_{a=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\tilde{q}(C_{ab}\phi^b + \eta)} + \frac{4q^0}{\Psi_a^2} e^{-\tilde{q}(C_{\Psi b}\phi^b + \eta)} \quad (2.47)$$

Simplificando a notação, definimos o vetor:

$$\phi \equiv \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a^2}{\alpha_a} \phi^a \quad (2.48)$$

o potencial (2.47) adquire a forma:

$$U(\phi, \eta) = \sum_{j=0}^r \frac{4q^j}{\alpha_j^2} e^{\tilde{q}(\alpha_j \cdot \phi + \eta)} \quad (2.49)$$

onde $\alpha_0 = \Psi$ é a raiz de peso mais alto da álgebra da álgebra de Kac-Moody $\mathcal{G}$.

O potencial (2.49) é invariante pelas seguintes transformações:

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{2\pi i}{\tilde{q}} \mu^{\vee} \quad ; \quad \eta \rightarrow \eta + \frac{2\pi i}{\tilde{q}} n \quad (2.50)$$

onde $\mu^{\vee} = \sum_{a=1}^r m_a \frac{2\lambda_a}{\alpha^2}$; α_a são pesos fundamentais de $\mathcal{G}$ e m_a e n são inteiros.

O tensor de energia-momento canônico da lagrangiana (2.46) tem a forma:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\rho\sigma} = & \frac{\bar{q}^2}{2} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} C_{ab} \left[\partial_\rho \phi^a \partial_\sigma \phi^b - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b \right] \\
& + \frac{\bar{q}^2}{2} \sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} [\partial_\rho \phi^a \partial_\sigma \eta + \partial_\sigma \phi^a \partial_\rho \eta - g_{\rho\sigma} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \eta] \\
& + \bar{q}^2 \frac{h}{2} [\partial_\rho \eta \partial_\sigma v + \partial_\sigma \eta \partial_\rho v - g_{\rho\sigma} \partial_\mu \eta \partial^\mu v] \\
& + g_{\rho\sigma} \left[\sum_{a=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}(C_{ab}\phi^b + \eta)} + \frac{4q^0}{\psi^2} e^{\bar{q}(-C_{ab}\phi^b + \eta)} \right]
\end{aligned} \tag{2.51}$$

onde $\rho, \sigma = 0, 1$ são os índices do espaço-tempo, ($\partial_0 \equiv \partial_t, \partial_1 \equiv \partial_x$) e $g_{\rho\sigma}$ é a métrica com $g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{01} = g_{10} = 0$. O traço do tensor acima não é zero, no entanto, como a teoria é conforme é possível modificá-lo para que isto ocorra. Adicionamos ao tensor uma divergência (termo Belinfante) e o tensor torna-se:

$$\Theta_{\rho\sigma}^{CAT} = \Theta_{\rho\sigma} - \bar{q} (\partial_\rho \partial_\sigma - g_{\rho\sigma} \partial^2) \left(\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \phi^a + hv \right) \tag{2.52}$$

onde h é o número de Coxeter; $\Theta_{\rho\sigma}$ é o tensor canônico. Para $\eta = 0$, temos a seguinte relação entre os tensores:

$$\Theta_{\rho\sigma}^{AT} = \Theta_{\rho\sigma}^{CAT}|_{\eta=0} + \bar{q} (\partial_\rho \partial_\sigma - g_{\rho\sigma} \partial^2) \left(\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \phi^a + hv \right) \tag{2.53}$$

Para uma solução de 1-sóliton, a massa é obtida pela integral de Θ_{00} no referencial de repouso. No modelo CAT não há massa, e então os sólitons são não massivos:

$$\int dx \Theta_{00}^{CAT} = 0 \tag{2.54}$$

No entanto, como o modelo AT tem massa, a massa é determinada pelo comportamento assintótico de $\left(\sum_a \frac{2}{\alpha_a^2} \phi^a + hv \right)$.

$$\begin{aligned}
\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta_{01}^{AT} \\
&= \bar{q} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \partial_t \left(\sum_a \frac{2}{\alpha_a^2} \phi^a + hv \right) \\
&= \bar{q} \partial_t \left(\sum_a \frac{2}{\alpha_a^2} \phi^a + hv \right) \Big|_{-\infty}^{\infty}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

---

onde M é a massa do sóliton e v sua velocidade em unidades da velocidade da luz.

3 Métodos de Soluções

Neste capítulo apresentamos os métodos de dressing e de Hirota. O dressing mapeia uma solução em outra através de transformações de gauge que são simetrias da equação da curvatura nula. Por sua vez, o método de Hirota faz uso das chamadas funções τ e de um Ansatz, permitindo que as soluções exatas sejam escritas em forma de polinômios. Os dois métodos são estudados em detalhe.

3.1 Método de Dressing

As transformações de dressing, também chamadas de revestimento, são simetrias da curvatura nula, ou seja, simetrias de equações diferenciais não-lineares em duas dimensões. Também podem ser definidas como transformações de gauge que atuam na equação de Lax deixando sua forma invariante (31). O grupo de transformações de dressing pode ser visto como precursor clássico do grupo de simetria quântico. O método consiste em levar soluções em soluções, daí a necessidade de que existam soluções semente e que a álgebra possua uma estrutura de gradação.

É importante destacar que as transformações de dressing não fornecem soluções gerais para os modelos, apenas as soluções na mesma órbita da solução semente, pois elas dividem o espaço de soluções em órbitas.

Se o modelo apresentar certa simetria, este método pode ser usado para determinar as soluções associadas. No entanto, veremos que são necessárias algumas condições. Primeiramente, o modelo deve admitir a representação de suas equações de movimento em termos de curvatura nula, ou seja, existem potenciais A_μ que são funcionais dos campos e pertencem a uma álgebra de Kac-Moody $\mathcal{G}$ de tal forma que a condição de curvatura nula,

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0, \quad (3.1)$$

seja equivalente às equações de movimento. Além disso necessitamos de uma gradação da

álgebra de Kac-Moody dada por:

$$\mathcal{G} = \bigoplus_n \mathcal{G}_n \quad (3.2)$$

$$[\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_m] \subset \mathcal{G}_{n+m}$$

onde $n, m, \in \mathbb{Z}$ são os graus associados aos subespaços $\mathcal{G}_n$. A decomposição dos potenciais é da forma:

$$A_\mu = \sum_{n=N_\mu^-}^{N_\mu^+} A_\mu^{(n)} \quad (3.3)$$

onde $A_\mu^{(n)} \in \mathcal{G}_n$ com N_{μ^-} e N_{μ^+} inteiros não-positivos e não-negativos, respectivamente. Por fim, deve existir uma solução de vácuo, também chamada de semente da teoria, tal que os potenciais A_μ avaliados nesta solução pertençam a uma subálgebra abeliana com termo central:

$$A_\mu^{vac} = \sum_{n=N_\mu^-}^{N_\mu^+} \sum_{a=1}^r c_\mu^{a,n} b_n^a + \sigma_\mu C \quad (3.4)$$

onde $c_\mu^{a,n}$ são constantes e C é o termo central de $\mathcal{G}$, os b_n^a satisfazem relações algébricas de uma álgebra de osciladores (subálgebra de Heisenberg),

$$[b_m^a, b_n^b] = \omega^{ab} m \delta_{m+n,0} C, \quad (3.5)$$

com ω^{ab} sendo uma matriz simétrica e $a, b = 1, 2, \dots, r$ números infinitos de conjuntos de osciladores. O índice n corresponde ao grau dos osciladores.

Como A_μ^{vac} é uma solução da equação de curvatura nula, ela pode ser escrita na forma de puro gauge:

$$A_\mu^{vac} = -\partial_\mu \Psi_{vac} \Psi_{vac}^{-1} \quad (3.6)$$

Escolhemos um elemento constante h , de forma que possamos escrever a seguinte decomposição de Gauss:

$$\Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} = G_-^{-1} G_0 G_+ \quad (3.7)$$

com $G_{+,0,-}$ sendo elementos de grupo obtidos pela exponenciação de geradores de $\mathcal{G}$ com graus positivo, zero e negativo, respectivamente. Introduzimos as variáveis:

$$\Psi_h \equiv G_0 G_- \Psi_{vac} h = G_+ \Psi_{vac} \quad (3.8)$$

$$\tilde{\Psi}_h \equiv G_- \Psi_{vac} h = G_0^{-1} G_+ \Psi_{vac} \quad (3.9)$$

e os correspondentes potenciais:

$$A_\mu^h = -\partial_\mu \Psi_h \Psi_h^{-1} \quad (3.10)$$

$$\bar{A}_\mu^h = -\partial_\mu \bar{\Psi}_h \Psi_h^{-1} \quad (3.11)$$

Portanto temos:

$$A_\mu^h = G_+ A_\mu^{vac} G_+^{-1} - \partial_\mu G_+ G_+^{-1} \quad (3.12)$$

$$= G_0 G_- A_\mu^{vac} (G_0 G_-)^{-1} - \partial_\mu (G_0 G_-) (G_0 G_-)^{-1} \quad (3.13)$$

$$\bar{A}_\mu^h = G_- A_\mu^{vac} G_-^{-1} - \partial_\mu G_- G_-^{-1} \quad (3.14)$$

$$= G_0^{-1} G_+ A_\mu^{vac} (G_0^{-1} G_+)^{-1} - \partial_\mu (G_0^{-1} G_+) (G_0^{-1} G_+)^{-1} \quad (3.15)$$

Os potenciais A_μ^h e A_μ são então relacionados por duas transformações de gauge, uma contendo apenas elementos com grau não-negativo e a outra com elementos de grau não-positivo, permitindo que a estrutura de gradação seja preservada. Para o cálculo das soluções fazemos uso da função tau definida por:

$$|\tau_i\rangle \equiv \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} |\hat{\lambda}_i\rangle \quad (3.16)$$

onde $|\lambda_i\rangle$ são os estados de peso máximo da representação da álgebra de Kac-Moody $\mathcal{G}$ definidos no apêndice C. Pela decomposição de Gauss (3.7) temos que:

$$|\tau_i\rangle = G_- G_0 G_+ |\hat{\lambda}_i\rangle = G_- G_0 |\lambda_i\rangle \quad (3.17)$$

onde usamos o fato de que os geradores de grau positivo aniquilam o estado de peso máximo e assim temos:

$$G_+ |\lambda_i\rangle = |\lambda_i\rangle \quad \langle \lambda_i | G_- = \langle \lambda_i | \quad (3.18)$$

A função τ consiste de um conjunto de estados na representação da álgebra de Kac-Moody. Ela é a órbita do estado de peso máximo $|\lambda_i\rangle$, no qual o elemento $\Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1}$ atua. Assim, variando-se h , obtém-se um conjunto de estados que constitui uma órbita dessas transformações.

Em resumo, as condições necessárias à construção de soluções por dressing são: A condição de curvatura nula, que consiste na representação das equações de movimento da teoria; a integral ordenada no caminho independe do caminho, ou seja, depende apenas dos pontos inicial e final; a álgebra ser graduada, garantindo que o potencial transformado possua a mesma estrutura que o potencial de vácuo; os elementos do grupo serem decompostos em subgrupos, que são exponenciações de geradores de graus positivos

e negativos; e por fim a representação de peso máximo da álgebra, isto é, representações que contêm um estado único que é aniquilado pelos operadores step (32).

3.2 Método de Hirota

As soluções dos modelos de Toda AT foram primeiramente encontradas usando o método de Hirota (33) e depois o método foi generalizado para o cálculo de qualquer álgebra de Lie g .

As equações de movimento para o modelo de Toda são:

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -V'(r_{n-1}) + V'(r_n) \quad (3.19)$$

$y_n \equiv$ deslocamento da massa m

$r_n \equiv y_{n+1} - y_n$

Reescrevendo a equação anterior:

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = -2V'(r_n) + V'(r_{n+1}) + V'(r_{n-1}) \quad (3.20)$$

A seguinte mudança de variável é feita:

$$\frac{d^2 S_n}{dt^2} \equiv \ddot{S}_n \equiv -V'(r_n) \quad (3.21)$$

então, (3.20) torna-se:

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2\ddot{S}_n - \ddot{S}_{n+1} - \ddot{S}_{n-1} \quad (3.22)$$

Temos que:

$$\ddot{S}_n = -V'(r_n) = a(e^{-br_n} - 1) \quad (3.23)$$

ou seja,

$$r_n = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{1}{a} \ddot{S}_n + 1 \right) \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.22):

$$-\frac{m}{b} \ln \left(\frac{1}{a} \ddot{S}_n + 1 \right) = 2\ddot{S}_n - \ddot{S}_{n+1} - \ddot{S}_{n-1} \quad (3.25)$$

Mudando novamente as variáveis, introduzimos a função tau:

$$S_n = \frac{m}{b} \ln \tau_n \quad (3.26)$$

A equação (3.25) é reescrita:

$$\ln\left(\frac{1}{a}\ddot{S}_n + 1\right) = \ln\left(\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}\right) \quad (3.27)$$

Obtemos então a equação de Hirota:

$$\frac{m}{ab}[\ddot{\tau}_n\tau_n - \dot{\tau}_n^2]^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 \quad (3.28)$$

onde usamos as seguintes relações para obter a última equação

$$\dot{S}_n = \frac{m}{b} \frac{\dot{\tau}_n}{\tau_n} \quad \ddot{S}_n = \frac{m}{b} \left(\frac{\ddot{\tau}_n}{\tau_n} - \left(\frac{\dot{\tau}_n}{\tau_n} \right)^2 \right) \quad (3.29)$$

A equação (3.28) pode ser resolvida pelo método de Hirota. O método consiste em uma expansão formal de τ_n em potências de um parâmetro ε (34). A série pode ser truncada obtendo-se uma solução exata. Observa-se que $\tau_n = 1$ é uma solução da equação. A solução tem a forma:

$$\tau_n = 1 + e^{2(k_n - \beta t + \delta)}$$

no qual $\beta = \pm \sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh k$. Voltando à variáveis originais a solução é dada por:

$$y_n = \frac{1}{b} \ln \frac{1 + e^{2(k_{n-1} - \beta t + \delta)}}{1 + e^{2(k_n - \beta t + \delta)}} \quad (3.30)$$

4 Cargas conservadas para o modelo CAT

Neste capítulo apresentamos o modelo de sine-Gordon (26). Calculamos as cargas conservadas para os modelos de sine-Gordon (Toda $\mathfrak{sl}(2)$), Toda $\mathfrak{sl}(3)$ e Toda generalizado, $\mathfrak{sl}(N)$, fazendo uso do método de dressing discutido no capítulo 3.

4.1 Equação de Sine-Gordon

Consideremos o modelo de Toda unidimensional de duas partículas com coordenadas q_0 e q_1 .

$$\begin{aligned}\ddot{q}_0 &= e^{-(q_0-q_1)} - e^{-(q_1-q_0)} \\ \ddot{q}_1 &= e^{-(q_1-q_0)} - e^{-(q_0-q_1)}\end{aligned}\tag{4.1}$$

o que fornece:

$$\frac{d^2}{dt^2}(q_0 - q_1) = 2(e^{-(q_0-q_1)} - e^{-(q_1-q_0)})\tag{4.2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(q_0 + q_1) = 0\tag{4.3}$$

A dinâmica do sistema é dada por (4.2) e então:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = 4 \sin q\tag{4.4}$$

onde definimos, $q \equiv i(q_0 - q_1)$. A equação (4.4) é a equação do pêndulo simples. Uma teoria de campo em $(1+1)$, com invariância de Lorentz em $(1+1)$ dimensões associada a este modelo é a equação de sine-Gordon:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \phi = 0\tag{4.5}$$

Ela descreve um sistema contínuo de pêndulos simples ligados por uma fita de torção horizontal. A equação acima pode ser obtida pela lagrangeana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{m^2}{\beta^2}(\cos(\beta\phi) - 1) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - 2\frac{m^2}{\beta^2}\sin\left(\frac{\beta\phi}{2}\right)^2\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde,

$$V(\phi) = -2\frac{m^2}{\beta^2}\sin\left(\frac{\beta\phi}{2}\right)^2\tag{4.7}$$

Os potenciais A_μ da teoria são então definidos:

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{m}{4} \begin{pmatrix} i\frac{\beta}{m}\partial_1\phi & e^{i\beta\phi/2} + 1/\lambda e^{-i\beta\phi/2} \\ e^{i\beta\phi/2} + \lambda e^{-i\beta\phi/2} & -i\frac{\beta}{m}\partial_1\phi \end{pmatrix} \\ A_1 &= \frac{m}{4} \begin{pmatrix} i\frac{\beta}{m}\partial_0\phi & e^{i\beta\phi/2} - 1/\lambda e^{-i\beta\phi/2} \\ e^{i\beta\phi/2} - \lambda e^{-i\beta\phi/2} & -i\frac{\beta}{m}\partial_0\phi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

onde λ é denominado parâmetro espectral. A condição de curvatura nula é equivalente à equação (4.5), fazendo com que o modelo de sine-Gordon seja um modelo integrável e apresente quantidades conservadas.

4.2 Cargas conservadas para o modelo de Sine-Gordon

Para construir quantidades conservadas precisamos da representação de peso máximo e portanto do termo central da álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{sl}(2)$ não-nulo. O termo central é um gerador da álgebra. Quando este não é nulo, ($C \neq 0$), temos uma representação matricial finita da álgebra, que faz com que para os cálculos das cargas utilizemos apenas as relações de comutação descritas no apêndice C. Trabalharemos com uma extensão do modelo de sine-Gordon, que consiste na adição de dois campos (η e $\mathbf{v}$), deixando-o invariante conforme.

Os potenciais para o modelo de Toda geral são dados pelas seguintes expressões:

$$A_+ = -B\Lambda_+B^{-1} \quad (4.8)$$

$$A_- = -\partial_-BB^{-1} + \Lambda_- \quad (4.9)$$

onde o campo B para o caso do sine-Gordon é:

$$B = e^{\varphi H^0 + \nu C + \eta Q} \quad (4.10)$$

e

$$\Lambda_+ = E_1 = E_+^0 + E_-^1 \quad (4.11)$$

$$\Lambda_- = E_{-1} = E_-^0 + E_+^{-1} \quad (4.12)$$

onde E 's são os operadores step; H 's são os geradores da subálgebra de Cartan e por fim, Q é o operador de gradação, definidos nos apêndices B e C respectivamente. Para o caso do sine-Gordon faremos $\varphi \rightarrow i\varphi$ e então:

$$B = e^{i\varphi H^0 + \nu C + \eta Q} \quad (4.13)$$

Os potenciais são obtidos a partir dos cálculos:

$$B\Lambda_+B^{-1} = B(E_+^0 + E_-^1)B^{-1} \quad (4.14)$$

como $[L, T] = \lambda T$, ou seja, $e^{\alpha L}Te^{-\alpha L} = \alpha\lambda T + \frac{(\alpha L)^2 T}{2} + \dots = e^{\alpha\lambda}T$ pois os operadores step, E 's, são autoestados dos H 's. Então:

$$B\Lambda_+B^{-1} = e^{\varphi_1 - \varphi_2 + \eta}E_+^0 + e^{\varphi_2 - \varphi_2 + \eta}E_-^1 \quad (4.15)$$

O potencial A_+ adquire a forma:

$$A_+ = -e^\eta [e^{\varphi_1 - \varphi_2 + \eta}E_+^0 + e^{\varphi_2 - \varphi_2 + \eta}E_-^1] \quad (4.16)$$

Substituindo (4.13) em (4.9) obtemos o potencial A_- :

$$A_- = -i\partial_-H^0\varphi - \partial_- \eta Q - \partial_- \gamma C + E_-^0 + E_+^{-1} \quad (4.17)$$

Devido a gradação da álgebra, a base dos H 's é agora substituída pela base dos F 's descrita

no apêndice C. Os potenciais são reescritos:

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{1}{2}e^\eta(\cos\varphi E_1 + i\sin\varphi F_1) \\ A_- &= -\frac{1}{2}E_{-1} - \frac{i}{2}\partial_- \varphi F_0 - \partial_- \eta Q - \frac{1}{4}\partial_- (\rho + \gamma)C \end{aligned} \quad (4.18)$$

γ satisfaz a seguinte função: $\partial_+ \partial_- \gamma = -e^\eta$. A equação de movimento do modelo geral é dada por:

$$\partial_+(\partial_- BB^{-1}) = \pm[B\Lambda_+ B^{-1}, \Lambda_-] \quad (4.19)$$

Substituindo a expressão do campo B na equação de movimento acima temos as equações de movimento do modelo:

$$\partial^2 \varphi = -e^\eta \sin \varphi \quad (4.20)$$

$$\partial^2 \rho = e^\eta (1 - \cos \varphi) \quad (4.21)$$

$$\partial^2 \eta = 0 \quad (4.22)$$

Escolhemos o vácuo para: $\varphi = \eta = \rho = 0$, e os potenciais ficam:

$$\begin{aligned} A_+^{(vac)} &= \frac{1}{2}E_1 \\ A_-^{(vac)} &= -\frac{1}{2}E_{-1} - \frac{1}{4}\partial_- \gamma^{(vac)}C \end{aligned} \quad (4.23)$$

Os potenciais de vácuo encontrados satisfazem a condição de curvatura nula, ou seja:

$$\partial_- A_+^{vac} - \partial_+ A_-^{vac} + [A_-^{vac}, A_+^{vac}] = 0 \quad (4.24)$$

onde $\gamma^{(vac)} = -x_+ x_-$. Os potenciais podem ser escritos da seguinte maneira:

$$A_\mu^{(vac)} = -\partial_\mu \Psi_{vac} \Psi_{vac}^{-1} \quad (4.25)$$

com,

$$\Psi_{vac} = e^{\frac{1}{2}x_+ E_1} e^{\frac{1}{2}x_- E_{-1}} \quad (4.26)$$

O método de dressing a partir daqui é aplicado para o cálculo das cargas. As soluções que desejamos obter se encontram na órbita da solução de vácuo (4.25) e para obtê-las consideramos um elemento constante h do grupo que é obtido pela exponenciação dos geradores da álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{sl}(2)$, o qual admite a seguinte decomposição ou fatorização de Gauss:

$$\Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} = G_-^{-1} G_0^{-1} G_+ \quad (4.27)$$

onde G_+ , G_- e G_0 são os elementos do grupo obtidos pelas exponenciações dos geradores de graus positivo, negativo e zero respectivamente, do operador de gradação Q definido no apêndice C. Podemos dessa forma, definir o potencial A_μ^h :

$$A_\mu^h = -\partial_\mu \psi_h \psi_h^{-1} \quad (4.28)$$

com

$$\begin{array}{c} \nearrow G_+ \psi_{vac} \\ \psi_h \\ \searrow G_0 G_- \psi_{vac} h \end{array} \quad (4.29)$$

e então:

$$\begin{array}{c} \nearrow G_+ A_\mu^{vac} G_+^{-1} - \partial_\mu G_+ G_+^{-1} \\ A_\mu^h \\ \searrow G_0 (G_- A_\mu^{vac} G_-^{-1} - \partial_\mu G_- G_-^{-1}) G_0^{-1} - \partial_\mu G_0 G_0^{-1} \end{array} \quad (4.30)$$

As expressões para os campos são obtidas por meio de G_0 . Comparando a componente de grau zero da segunda transformação de gauge ($A_-^h = -1/4 \partial_- \gamma^{vac} C - \partial_- G_0 G_0^{-1}$) com o potencial A_- de (4.18) para $\eta = 0$. O G_0 obtido é:

$$G_0 = e^{\frac{i}{2} \Phi F_0 + \frac{1}{4} \rho C} \quad (4.31)$$

A partir do G_0 encontrado, das relações do apêndice e do fato de que os estados de peso máximo das representações da álgebra de Kac-Moody $sl(2)$ serem aniquilados pelos geradores de grau positivo $G_+ |\lambda_i\rangle = |\lambda_i\rangle$ e negativo $\langle \lambda_i | G_- = \langle \lambda_i |$, $i = 0, 1, 2$, encontramos as duas funções tau de Hirota:

$$\tau_0 \equiv \langle \lambda_0 | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | G_0^{-1} | \lambda_0 \rangle = e^{\frac{i}{4} \Phi - \frac{1}{4} \rho} \quad (4.32)$$

$$\tau_1 \equiv \langle \lambda_1 | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | G_0^{-1} | \lambda_1 \rangle = e^{-\frac{i}{4} \Phi - \frac{1}{4} \rho} \quad (4.33)$$

os campos encontrados possuem a forma:

$$\Phi = -2i \log \frac{\tau_0}{\tau_1} \quad (4.34)$$

$$\rho = -2 \log(\tau_0 \tau_1) \quad (4.35)$$

Substituindo (4.34)-(4.35) nas equações de movimento, (4.20)-(4.21) com $\eta = 0$, encontramos as funções tau de Hirota:

$$\begin{aligned}\tau_0 \partial_+ \partial_- \tau_0 - \partial_+ \tau_0 \partial_- \tau_0 &= \frac{1}{4}(\tau_0^2 - \tau_1^2) \\ \tau_1 \partial_+ \partial_- \tau_1 - \partial_+ \tau_1 \partial_- \tau_1 &= \frac{1}{4}(\tau_1^2 - \tau_0^2)\end{aligned}\tag{4.36}$$

Introduzimos os elementos de grupo $G_{\pm}$ escritos da seguinte maneira:

$$G_{\pm} = g_{\pm,F}^{-1} g_{\pm,E}\tag{4.37}$$

onde,

$$g_{\pm,F} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^{(\pm)} F_{\pm n}\right)\tag{4.38}$$

$$g_{\pm,E} = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_{2n+1}^{(\pm)} E_{\pm(2n+1)}\right)\tag{4.39}$$

Por (4.30) temos o potencial transformado:

$$A_{\mu}^h = G_+ A_{\mu}^{vac} G_+^{-1} - \partial_{\mu} G_+ G_+^{-1}\tag{4.40}$$

Reescrevemos a equação anterior fazendo uso de (4.37) e (4.38)-(4.39):

$$g_{+,F} A_{\mu}^h g_{+,F}^{-1} - \partial_{\mu} g_{+,F} g_{+,F}^{-1} = g_{+,E} A_{\mu}^{vac} g_{+,E}^{-1} - \partial_{\mu} g_{+,E} g_{+,E}^{-1} \equiv a_{\mu}^+\tag{4.41}$$

A segunda equação de (4.30) também é reescrita e obtemos:

$$g_{-,F} \bar{A}_{\mu}^h g_{-,F}^{-1} - \partial_{\mu} g_{-,F} g_{-,F}^{-1} = g_{-,E} A_{\mu}^{vac} g_{-,E}^{-1} - \partial_{\mu} g_{-,E} g_{-,E}^{-1} \equiv a_{\mu}^-\tag{4.42}$$

onde definimos os potenciais $\bar{A}_{\mu}^h$ como sendo:

$$\bar{A}_{\mu}^h \equiv G_0^{-1} A_{\mu}^h G_0 - \partial_{\mu} G_0^{-1} G_0\tag{4.43}$$

Os diagramas seguintes mostram de forma simples a relação entre os potenciais e os elementos de grupo:

$$\begin{array}{ccc} A_{\mu}^{(vac)} & \xrightarrow{G_+} & A_{\mu}^h \\ & \searrow g_{+,E} & \downarrow g_{+,F} \\ & & a_{\mu}^{(+)} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_{\mu}^{(vac)} & \xrightarrow{G_-} & \bar{A}_{\mu}^h \\ & \searrow g_{-,E} & \downarrow g_{-,F} \\ & & a_{\mu}^{(-)} \end{array}\tag{4.44}$$

Como os potenciais A_{μ} e A_{μ}^h possuem a mesma estrutura de gradação, consideremos os

potencias (4.18) com $\eta = 0$ e substituímos em (4.43), com essa operação encontramos os potenciais $\bar{A}_\mu$:

$$\begin{aligned}\bar{A}_+^h &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \partial_+ \varphi F_0 + \frac{1}{4} \partial_+ \rho C \\ \bar{A}_-^h &= -\frac{1}{2} (\cos \varphi E_{-1} - i \sin \varphi F_{-1}) - \frac{1}{4} \partial_- \gamma^{(vac)} C.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Substituímos os potenciais A_μ^h e $A_\mu^{(vac)}$ em (4.41) e tomemos a componente x_- da expressão obtida:

$$\begin{aligned}g_{+,F} \left(-\frac{1}{2} E_{-1} - \frac{i}{2} \partial_- \varphi F_0 \right) g_{+,F}^{-1} - \frac{1}{4} \partial_- (\rho + \gamma^{(vac)}) C - \partial_- g_{+,F} g_{+,F}^{-1} \\ = -\frac{1}{2} E_{-1} - \frac{1}{4} \left(2\xi_1^{(+)} + \partial_- \gamma^{(vac)} \right) C - \sum_{n=0}^{\infty} \partial_- \xi_{2n+1}^{(+)} E_{2n+1}\end{aligned}\tag{4.46}$$

e a componente x_+ de (4.42) nos dá:

$$\begin{aligned}g_{-,F} \left(-\frac{1}{2} E_1 + \frac{i}{2} \partial_+ \varphi F_0 \right) g_{-,F}^{-1} + \frac{1}{4} \partial_+ \rho C - \partial_+ g_{-,F} g_{-,F}^{-1} \\ = \frac{1}{2} E_1 - \frac{1}{2} \xi_1^{(-)} C - \sum_{n=0}^{\infty} \partial_+ \xi_{2n+1}^{(-)} E_{-2n-1}\end{aligned}\tag{4.47}$$

As equações (4.46) - (4.47) possuem termos proporcionais aos osciladores E_{2n+1} e ao termo central C somente, dessa forma, os termos relacionados aos F_n^s , do lado esquerdo, precisam ser zero. Partindo disso e calculando as comutações entre os E_n^s e F_n^s do lado direito das expressões acima obtemos recursivamente:

$$\begin{aligned}\zeta_1^{(+)} &= -\frac{i}{2} \partial_- \varphi & \zeta_1^{(-)} &= -\frac{i}{2} \partial_+ \varphi \\ \zeta_2^{(+)} &= \frac{i}{2} \partial_-^2 \varphi & \zeta_2^{(-)} &= -\frac{i}{2} \partial_+^2 \varphi \\ &\vdots & &\vdots\end{aligned}\tag{4.48}$$

Os termos $\zeta_n^{(\pm)}$ são polinômios relacionados apenas aos campos φ . Para a obtenção das cargas precisamos ter $\varphi \rightarrow 2\pi n_\pm$ como $x \rightarrow \pm\infty$ e assim têm-se que $g_{\pm,F} \rightarrow 1$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Ainda fazendo uso das expressões (4.46) - (4.47) na direção do termo central, podemos relacionar os campos φ e ρ :

$$\begin{aligned}\xi_1^{(+)} &= \frac{1}{2} \partial_- \rho, \\ \partial_- \xi_1^{(+)} &= -\frac{1}{4} (\partial_- \varphi)^2, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{4.49}$$

e

$$\begin{aligned}\xi_1^{(-)} &= -\frac{1}{2}\partial_+\rho, \\ \partial_+\xi_1^{(+)} &= \frac{1}{4}(\partial_+\varphi)^2, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{4.50}$$

As expressões obtidas implicam nas relações entre os campos:

$$\partial_-^2\rho = -\frac{1}{2}(\partial_-\varphi)^2 \quad \partial_+^2\rho = -\frac{1}{2}(\partial_+\varphi)^2\tag{4.51}$$

As componentes do tensor energia-canônico para o modelo Toda $\mathfrak{sl}(2)$ são dadas por:

$$\begin{aligned}\Theta_{00}|_{\eta=0} &= \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + 1 - \cos\varphi = -2\partial_x^2\rho \\ \Theta_{01}|_{\eta=0} &= \partial_t\varphi\partial_x\varphi = -2\partial_t\partial_x\rho\end{aligned}\tag{4.52}$$

Os tensores obtidos mostram que a energia e o momento, na órbita do vácuo, são termos de superfície:

$$\begin{aligned}P &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Theta_{01}|_{\eta=0} = -2\partial_t\rho|_{x=-\infty}^{x=+\infty} \\ E &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Theta_{00}|_{\eta=0} = -2\partial_x\rho|_{x=-\infty}^{x=+\infty}\end{aligned}\tag{4.53}$$

A partir daqui as cargas conservadas são calculadas. Consideremos os potenciais de vácuo para a construção das cargas. Fazemos uso da solução da equação de transporte paralelo discutida no primeiro capítulo, $W = \exp(-\int_L^{-L} dx A_x(t))$. O potencial A_x é da forma: $A_x = (A_+ - A_-)$ e assim:

$$W_t^{(vac)} = e^{-\frac{1}{2}E_{-1}} e^{-\frac{1}{2}E_1} e^{\frac{1}{8}(L^2 + \int_{-L}^L dx \partial_- \gamma^{(vac)})C}\tag{4.54}$$

Definimos os operadores com ordenamento normal, no qual os operadores de aniquilação ocupam lugar à direita dos operadores de criação no ordenamento:

$$\Psi_{2n+1} =: e^{E_{2n+1} + E_{-2n-1}} := e^{E_{-2n-1}} e^{E_{2n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots\tag{4.55}$$

Sob ação adjunta, Ψ_{2n+1} tornam-se autovetores de $W_t^{(vac)}$ com autovalor 1, ou seja,

$$W_t^{(vac)} \Psi_{2n+1} W_t^{(vac)-1} = \Psi_{2n+1}\tag{4.56}$$

O dressing nos permite relacionar a equação acima juntamente com as transformações de gauge, $W_t^{(\pm)} = g_{\pm, E(t, x=L)} W_t^{(vac)} g_{\pm, E(t, x=-L)}^{-1}$ e a partir disso obter uma nova solução.

Substituímos os $g_{\pm,E}$ nesta expressão obtemos as expressões:

$$W_t^{(\pm)} \Psi_{2n+1} W_t^{(\pm)-1} = e^{\pm(2n+1)C(\xi_{2n+1}^{(\pm)}(t,x=L) - \xi_{2n+1}^{(\pm)}(t,x=-L))} \Psi_{2n+1} \quad (4.57)$$

onde as cargas são:

$$\begin{aligned} \Omega_{2n+1}^{(\pm)} &= \pm(2n+1)(\xi_{2n+1}^{(\pm)}(t,x=L) - \xi_{2n+1}^{(\pm)}(t,x=-L)) \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.58)$$

Para o cálculo das cargas fazemos uso das soluções da órbita de vácuo, encontradas pelo método da transformação de dressing e das relações das álgebras de Kac-Moody $sl(2)$ no apêndice C (para $n \geq 0$ e $i = 0, 1$).

$$\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-2n-1} | \lambda_i \rangle = \langle \lambda_i | G_-^{-1} G_0^{-1} G_+ E_{-2n-1} | \lambda_i \rangle \quad (4.59)$$

$$= \tau_i \langle \lambda_i | G_+ E_{-2n-1} | \lambda_i \rangle \quad (4.60)$$

$$= \tau_i \langle \lambda_i | g_{+,F}^{-1} g_{+,E} E_{-2n-1} g_{+,E}^{-1} | \lambda_i \rangle \quad (4.61)$$

$$= (2n+1) C \xi_{1,2n+1}^{(+)} \tau_i \quad (4.62)$$

Encontramos:

$$\xi_{2n+1}^{(+)}(t, x = \pm L) = \frac{1}{(2n+1)} \frac{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-2n-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.63)$$

O mesmo cálculo é feito para $\xi_{2n+1}^{(-)}$.

$$\xi_{2n+1}^{(-)}(t, x = \pm L) = -\frac{1}{(2n+1)} \frac{\langle \lambda_i | E_{2n+1} \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.64)$$

De (4.58) as cargas são:

$$\begin{aligned} \Omega_{2n+1}^{(+)} &= \frac{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-2n-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L} \\ \Omega_{2n+1}^{(-)} &= \frac{-\langle \lambda_i | E_{2n+1} \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L} \end{aligned} \quad (4.65)$$

De (4.49) - (4.50), (4.53) e (4.58), as expressões da energia e do momento são obtidas:

$$E = 2(\Omega_1^{(+)} - \Omega_1^{(-)}) \quad P = -2(\Omega_1^{(+)} + \Omega_1^{(-)}) \quad (4.66)$$

As soluções solitônicas e as expressões explícitas para as cargas são obtidas considerando

que o elemento do grupo h é um produto de n operadores de vértice, que são exponenciais de autovetores dos osciladores E_{2n+1} . Os operadores de vértice e suas propriedades estão definidos no apêndice C:

$$h = \prod_{i=1}^n e^{a_i V(z_i)} \quad (4.67)$$

E então:

$$\Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} = \prod_{i=1}^n e^{a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i)} = \prod_{i=1}^n (1 + a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i)) \quad (4.68)$$

onde usamos que:

$$\Gamma(z_i) \equiv z_i x_+ - \frac{x_-}{z_i} \quad (4.69)$$

Os operadores de vértice nos permite obter as seguintes relações:

$$[E_{2n+1}, V_i(z)] = 2z^{(2n+1)} V_i(z) \quad (4.70)$$

e conseqüentemente:

$$E_{2n+1}(1 + a e^{\Gamma(z)} V(z)) = (1 + a e^{\Gamma(z)} V(z)) E_{2n+1} - 2a e^{\Gamma(z)} z^{2n+1} V(z) \quad (4.71)$$

Partindo de (4.68) e (4.65) as cargas tornam-se:

$$\begin{aligned} \Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} &= \pm 2 \sum_{k=1}^n z_k^{\pm(2n+1)} a_k e^{\Gamma(z_k)} \times \\ &\frac{\langle \lambda_l | [\prod_{i=1}^{k-1} (1 + a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i))] V(z_k) [\prod_{j=k+1}^n (1 + a_j e^{\Gamma(z_j)} V(z_j))] | \lambda_l \rangle}{\langle \lambda_l | \prod_{i=1}^n (1 + a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i)) | \lambda_l \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=L} \end{aligned} \quad (4.72)$$

temos que α_i e θ_i são parâmetros reais e $z_i = e^{-\alpha_i + i\theta_i}$. Com isso, reescrevemos a equação (4.69):

$$\Gamma(z_i) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2}} [\cos \theta_i (x - v_i t) + i \sin \theta_i (t - v_i x)] \quad (4.73)$$

onde $v_i = \tanh \alpha_i$ e $\cosh \alpha = 1 / \sqrt{1 - \tanh^2 \alpha}$. Na fração das equações das cargas conservadas dada em (4.72) vemos que quando $x \rightarrow \pm\infty$ o denominador e o numerador apresentam o mesmo comportamento, reduzindo a expressão a:

$$\Omega_{(2n+1)}^{(\pm)} = \pm 2 \sum_{k=1}^n \epsilon_k z_k^{\pm(2n+1)}. \quad (4.74)$$

O comportamento de $e^{\Gamma(z_i)}$ para $x \rightarrow \pm\infty$ é determinado pelo sinal do $\cos \theta_i$. Então $\epsilon_k = \pm 1$, isto é, o sinal é dependente da combinação das exponenciais dos Γ 's.

Para 1-sóliton temos que $v = \tanh \alpha \Rightarrow e^\alpha = \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\frac{1}{2}}$ e $\varepsilon \equiv e^{i\theta} = \pm 1$, $\theta = 0, \pi$. Assim:

$$\Omega_{(2n+1)}^{(\pm)} = \pm 2 \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm \left(\frac{2n+1}{2} \right)} \quad (4.75)$$

De forma particular, a energia e o momento ficam:

$$E = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}} \quad P = -\frac{8v}{\sqrt{1-v^2}} \quad (4.76)$$

4.3 Cargas conservadas para o modelo de Toda $sl(3)$

As equações de movimento para o modelo Toda $sl(3)$ são:

$$\partial_+ \partial_- \varphi_1 = (e^{2\varphi_1 - \varphi_2} - e^{-\varphi_1 - \varphi_2}) e^\eta \quad (4.77)$$

$$\partial_+ \partial_- \varphi_2 = (e^{2\varphi_2 - \varphi_1} - e^{-\varphi_1 - \varphi_2}) e^\eta \quad (4.78)$$

$$\partial_+ \partial_- v = e^{-\varphi_1 - \varphi_2} e^\eta \quad (4.79)$$

$$\partial_+ \partial_- \eta = 0 \quad (4.80)$$

obtidas da equação geral de movimento CAT: $\partial_+(\partial_- BB^{-1}) + [B\Lambda_l B^{-1}, \Lambda_{-l}]$, onde o campo B e potenciais Λ são respectivamente:

$$B = e^{\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2 + (v+\beta)c + \eta Q} \quad (4.81)$$

$$\Lambda_+ = E_1 = E_{\alpha_1}^0 + E_{\alpha_2}^0 + E_{-\alpha_3}^1 \quad (4.82)$$

$$\Lambda_- = E_{-1} = E_{-\alpha_1}^0 + E_{-\alpha_2}^0 + E_{\alpha_3}^{-1} \quad (4.83)$$

onde novamente E 's são os operadores step; H 's são os geradores da subálgebra e Q é o operador de gradação definidos nos apêndices B e C . Assim,

$$B\Lambda_+ B^{-1} = B(E_{\alpha_1}^0 + E_{\alpha_2}^0 + E_{-\alpha_3}^1) B^{-1} \quad (4.84)$$

a equação acima fornece:

$$B\Lambda_+ B^{-1} = e^{2\varphi_1 - \varphi_2 + \eta} E_{\alpha_1}^0 + e^{-\varphi_1 + 2\varphi_2 + \eta} E_{\alpha_2}^0 + e^{-\varphi_1 - \varphi_2 + \eta} E_{-\alpha_3}^1 \quad (4.85)$$

onde usamos o fato que os E 's são autoestados dos H 's. Encontramos então:

$$\partial_+(\partial_-BB^{-1}) = \partial_+\partial_-\varphi_1H_1 + \partial_+\partial_-\varphi_2H_2 + \partial_+\partial_-(\mathbf{v} + \beta)c + \partial_+\partial_-\eta\mathcal{Q} \quad (4.86)$$

$$[B\Lambda_+B^{-1}, \Lambda_-] = e^{2\varphi_1-\varphi_2+\eta}H_1 + e^{-\varphi_1+2\varphi_2+\eta}H_2 + e^{-\varphi_1-\varphi_2+\eta}(-H_1 - H_2 + c) \quad (4.87)$$

o que nos fornece as equações (4.77)-(4.80). Os campos gerais são:

$$A_+ = -B\Lambda_+B^{-1} \quad (4.88)$$

$$A_- = -\partial_-BB^{-1} + \Lambda_- \quad (4.89)$$

Para o caso $\mathfrak{sl}(3)$ obtemos:

$$A_+ = -e^\eta[e^{2\varphi_1-\varphi_2}E_{\alpha_1}^0 + e^{-\varphi_1+2\varphi_2}E_{\alpha_2}^0 + e^{-\varphi_1-\varphi_2}E_{-\alpha_3}^1] \quad (4.90)$$

com o vácuo: $\eta = 0$, $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = 0$

$$A_+^{vac} = -E_{\alpha_1}^0 - E_{\alpha_2}^0 - E_{-\alpha_3}^1 \quad (4.91)$$

e

$$A_- = -\partial_-(\varphi_1H_1 + \varphi_2H_2 + \mathbf{v}c + \eta\mathcal{Q}) + E_{-\alpha_1}^0 + E_{-\alpha_2}^0 + E_{\alpha_3}^{-1} \quad (4.92)$$

para o vácuo: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\eta = 0$ e $\mathbf{v} = 0$

$$A_-^{vac} = -\partial_-\beta c + E_{-\alpha_1}^0 + E_{-\alpha_2}^0 + E_{\alpha_3}^{-1} \quad (4.93)$$

Os potenciais de vácuo encontrados também satisfazem a condição de curvatura nula (4.24). A partir daqui, sairemos da base dos H 's e iremos para a base dos F 's descrita no apêndice C. Dessa forma, os potenciais adquirem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} A_+ = & -\frac{e^\eta}{3}[F_1^1(e^{2\varphi_1-\varphi_2} + \gamma^2e^{2\varphi_2-\varphi_1} + \gamma e^{-\varphi_1-\varphi_2}) + F_1^2(e^{2\varphi_1-\varphi_2} + \gamma e^{2\varphi_2-\varphi_1} + \gamma^2e^{-\varphi_1-\varphi_2}) + \\ & + E_1(e^{2\varphi_1-\varphi_2} + e^{2\varphi_2-\varphi_1} + e^{-\varphi_1-\varphi_2})] \end{aligned} \quad (4.94)$$

e

$$A_- = -\partial_-[\frac{1}{3}F_0^1(\varphi_1 + \gamma^2\varphi_2) + \frac{1}{3}F_0^2(\varphi_1 + \gamma\varphi_2) + (\frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2 + \mathbf{v} + \beta)C + \eta\mathcal{Q}] + E_{-1} \quad (4.95)$$

e os potenciais de vácuo:

$$A_+^{vac} = -E_1 \quad (4.96)$$

$$A_-^{vac} = E_1 - \partial_-\beta^{vac}C. \quad (4.97)$$

onde $\beta^{vac} = -x_+x_-$. A partir daqui, podemos então aplicar o método de dressing. Definido o potencial A_μ^{vac}

$$A_\mu^{vac} = -\partial_\mu \Psi_{vac} \Psi_{vac}^{-1} \quad (4.98)$$

com

$$\Psi_{vac} = e^{x_+E_1} e^{-x_-E_{-1}}, \quad (4.99)$$

temos que o dressing é realizado quando consideramos um elemento constante h do grupo, escrito em termos da exponenciação dos geradores da álgebra de Kac-Moody $sl(3)$, com a decomposição de Gauss:

$$\Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} = G_-^{-1} G_0^{-1} G_+ \quad (4.100)$$

na qual G_+ , G_- e G_0 são obtidos pela exponenciação dos geradores de graus positivo, negativo e zero e pertencem ao grupo. Definimos o potencial:

$$A_\mu^h = -\partial_\mu \Psi_h \Psi_h^{-1} \quad (4.101)$$

com $\Psi_h = G_0 G_- \Psi_{vac} h = G_+ \Psi_{vac}$. O potencial A_μ^h torna-se:

$$A_\mu^h = G_+ A_\mu^{vac} G_+^{-1} - \partial_\mu G_+ G_+^{-1} \quad (4.102)$$

$$= G_0 (G_- A_\mu^{vac} G_-^{-1} - \partial_\mu G_- G_-^{-1}) G_0^{-1} - \partial_\mu G_0 G_0^{-1} \quad (4.103)$$

Quando comparamos a componente de grau zero da segunda transformação de gauge ($A_-^h = -\partial_- G_0 G_0^{-1} - \partial_- \beta C$) com o potencial (4.95) para $\eta = 0$ o G_0 adquire a forma:

$$G_0 = e^{\frac{1}{3}(\varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2) F_0^1 + \frac{1}{3}(\varphi_1 + \gamma \varphi_2) F_0^2 + (\frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2 + \nu) C} \quad (4.104)$$

A partir do G_0 encontrado, das relações do apêndice e do fato de que os estados de peso máximo das representações da álgebra de Kac-Moody $sl(3)$ são aniquilados pelos geradores de grau positivo $G_+ |\lambda_i\rangle = |\lambda_i\rangle$ e negativo $\langle \lambda_i | G_- = \langle \lambda_i |$, $i = 0, 1, 2$, encontramos as funções tau de Hirota, que neste caso são três:

$$\tau_0 \equiv \langle \lambda_0 | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | G_0^{-1} | \lambda_0 \rangle = e^{-\nu} \quad (4.105)$$

$$\tau_1 \equiv \langle \lambda_1 | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | G_0^{-1} | \lambda_1 \rangle = e^{-(\varphi_1 + \nu)} \quad (4.106)$$

$$\tau_2 \equiv \langle \lambda_2 | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_2 | G_0^{-1} | \lambda_2 \rangle = e^{-(\varphi_2 + \nu)} \quad (4.107)$$

e as expressões para os campos:

$$\varphi_1 = \log \frac{\tau_0}{\tau_1} \quad (4.108)$$

$$\varphi_2 = \log \frac{\tau_0}{\tau_2} \quad (4.109)$$

$$\mathbf{v} = \beta - \log \tau_0 \quad (4.110)$$

Substituindo (4.108)-(4.110) nas equações de movimento (4.77)-(4.80), com $\eta = 0$, o que obtemos são as funções tau de Hirota:

$$\tau_i \partial_+ \partial_- \tau_i - \partial_+ \tau_i \partial_- \tau_i = \tau_{i-1} \tau_{i+1} - \tau_i^2 \quad (4.111)$$

com $i = 0, 1, 2$, $\tau_{-1} = \tau_2$ e $\tau_3 = \tau_0$. Os elementos de grupo são escritos como em (4.37), entretanto $g_{\pm, F}$ e $g_{\pm, E}$ agora são:

$$g_{\pm, E} = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{1, 3n+1}^{(\pm)} E_{3n+1} + \xi_{2, 3n+2}^{(\pm)} E_{3n+2}) \right] \quad (4.112)$$

$$g_{\pm, F} = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta^{(\pm, 1)} F_{\pm n}^1 + \zeta^{(\pm, 2)} F_{\pm n}^2) \right] \quad (4.113)$$

Uma das formas do potencial A_μ^h obtidas foi:

$$A_\mu^h = G_+ A_\mu^{vac} G_+^{-1} - \partial_\mu G_+ G_+^{-1} \quad (4.114)$$

Esta pode novamente ser reescrita como:

$$g_{+, F} A_\mu^h g_{+, F}^{-1} - \partial_\mu g_{+, F} g_{+, F}^{-1} = g_{+, E} A_\mu^{vac} g_{+, E}^{-1} - \partial_\mu g_{+, E} g_{+, E}^{-1} \equiv a_\mu^+ \quad (4.115)$$

e

$$g_{-, F} \bar{A}_\mu^h g_{-, F}^{-1} - \partial_\mu g_{-, F} g_{-, F}^{-1} = g_{-, E} A_\mu^{vac} g_{-, E}^{-1} - \partial_\mu g_{-, E} g_{-, E}^{-1} \equiv a_\mu^- \quad (4.116)$$

onde $\bar{A}_\mu^h$ é definido por:

$$\bar{A}_\mu^h \equiv G_0^{-1} A_\mu^h G_0 - \partial_\mu G_0^{-1} G_0 \quad (4.117)$$

onde usamos que $G_\pm = g_{\pm, F}^{-1} g_{\pm, E}$ e as definições de (4.112)-(4.113). Os potenciais A_μ e A_μ^h possuem a mesma estrutura de gradação, sendo assim, os potenciais do modelo (4.94)-(4.95) são substituídos em (4.117) com $\eta = 0$ para obtermos $\bar{A}_\pm^h$:

$$\bar{A}_+^h = -\partial_- \frac{1}{3} F_0^1 (\varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2) - \frac{1}{3} F_0^2 (\varphi_1 + \gamma \varphi_2) - \left(\frac{1}{3} \varphi_1 + \frac{1}{3} \varphi_2 + \mathbf{v} \right) C - E_1 \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_-^h = & \frac{1}{3}[F_{-1}^1(e^{2\varphi_1-\varphi_2} + \gamma^2 e^{2\varphi_2-\varphi_1} + \gamma e^{-\varphi_1-\varphi_2}) + F_{-1}^2(e^{2\varphi_1-\varphi_2} + \gamma e^{2\varphi_2-\varphi_1} + \gamma^2 e^{-\varphi_1-\varphi_2}) + \\ & + E_{-1}(e^{2\varphi_1-\varphi_2} + e^{2\varphi_2-\varphi_1} + e^{-\varphi_1-\varphi_2})] - \partial_- \beta^{vac} C\end{aligned}\quad (4.119)$$

Os potenciais A_μ^h e A_μ^{vac} são substituídos em (C.31) e considerando a componente x_- da equação obtida temos a expressão:

$$\begin{aligned}g_{+,F}[-\frac{1}{3}\partial_- F_0^1(\varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2) - \frac{1}{3}\partial_- F_0^2(\varphi_1 + \gamma \varphi_2) - \partial_- (\frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2 + v + \beta^{vac})C + E_{-1}]g_{+,F}^{-1} - \\ - \partial_- g_{+,F} g_{+,F}^{-1} = -\partial_- \beta^{vac} C + E_{-1} - \xi_{1,1}^{(+)} C - \sum_{n=0}^{\infty} \partial_- (\xi_{1,3n+1}^{(+)} E_{3n+1} + \xi_{2,3n+2}^{(+)} E_{3n+2})\end{aligned}\quad (4.120)$$

A componente x_+ da equação (4.116) é:

$$\begin{aligned}g_{-,F}[-\frac{1}{3}\partial_+ F_0^1(\varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2) - \frac{1}{3}\partial_+ F_0^2(\varphi_1 + \gamma \varphi_2) - \partial_+ (\frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2 + v)C - E_1]g_{-,F}^{-1} - \\ - \partial_+ g_{-,F} g_{-,F}^{-1} = -E_1 - \xi_{1,1}^{(-)} C - \sum_{n=0}^{\infty} \partial_+ (\xi_{1,3n+1}^{(-)} E_{-(3n+1)} + \xi_{2,3n+2}^{(-)} E_{-(3n+2)})\end{aligned}\quad (4.121)$$

Como já visto para o caso anterior, o lado direito das expressões (4.120) e (4.121) possuem termos proporcionais apenas a C e aos osciladores, dessa forma os termos na direção dos F 's se anulam. Em primeira ordem obtemos as seguintes relações respectivamente:

$$\begin{aligned}\zeta_1^{(+,1)} &= \frac{1}{3}\partial_- (\varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2) \\ \zeta_1^{(+,2)} &= \frac{1}{3}\partial_- (\varphi_1 + \gamma \varphi_2) \\ &\vdots\end{aligned}\quad (4.122)$$

$$\begin{aligned}\zeta_1^{(-,1)} &= \frac{1}{3}\partial_+ (\varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2) \\ \zeta_1^{(-,2)} &= \frac{1}{3}\partial_+ (\varphi_1 + \gamma \varphi_2) \\ &\vdots\end{aligned}\quad (4.123)$$

Novamente, das equações (4.120) e (4.121), os termos na direção de C fornecem:

$$\begin{aligned}\xi_{1,1}^{(-)} &= -\frac{1}{3}\partial_+ \rho \\ \partial_+ \xi_{1,1}^{(-)} &= \frac{1}{3}((\partial_+ \varphi_1)^2 + (\partial_+ \varphi_2)^2 - (\partial_+ \varphi_1 \partial_+ \varphi_2)) \\ &\vdots\end{aligned}\quad (4.124)$$

Da equação (4.121):

$$\begin{aligned}\xi_{1,1}^{(+)} &= \frac{1}{3}\partial_{-}\rho \\ \partial_{-}\xi_{1,1}^{(+)} &= -\frac{1}{3}((\partial_{-}\varphi_1)^2 + (\partial_{-}\varphi_2)^2 - (\partial_{-}\varphi_1\partial_{-}\varphi_2)) \\ &\vdots\end{aligned}\tag{4.125}$$

onde $\rho = (\varphi_1 + \varphi_2 + 3\mathbf{v})$. As relações entre os campos são da forma:

$$\begin{aligned}\partial_{-}^2\rho &= -((\partial_{-}\varphi_1)^2 + (\partial_{-}\varphi_2)^2 - (\partial_{-}\varphi_1\partial_{-}\varphi_2)) \\ \partial_{+}^2\rho &= ((\partial_{+}\varphi_1)^2 + (\partial_{+}\varphi_2)^2 - (\partial_{+}\varphi_1\partial_{+}\varphi_2))\end{aligned}\tag{4.126}$$

As componentes do tensor energia-momento canônico para o modelo de Toda $sl(3)$ possuem as seguintes expressões:

$$\Theta_{01}|_{\eta=0} = (\partial_t\varphi_1\partial_x\varphi_1) + (\partial_t\varphi_2\partial_x\varphi_2) - \frac{1}{2}(\partial_t\varphi_1\partial_x\varphi_2) - \frac{1}{2}(\partial_t\varphi_2\partial_x\varphi_1) = -\partial_t\partial_x\rho\tag{4.127}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{00}|_{\eta=0} &= \frac{1}{2}[(\partial_t\varphi_1)^2 + (\partial_x\varphi_1)^2 + (\partial_t\varphi_2)^2 + (\partial_x\varphi_2)^2 - (\partial_t\varphi_2\partial_t\varphi_1) - (\partial_x\varphi_2\partial_x\varphi_1)] + \\ &\quad + 2[e^{2\varphi_1-\varphi_2} + e^{2\varphi_2-\varphi_1} + e^{-\varphi_1-\varphi_2}] = -\partial_x^2\rho\end{aligned}\tag{4.128}$$

Então concluímos que as cargas conservadas são termos de superfície, dependendo apenas das condições dos campos nas extremidades.

$$\begin{aligned}P &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Theta_{01}|_{\eta=0} = -\partial_t\rho|_{x=-\infty}^{x=+\infty} \\ E &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Theta_{00}|_{\eta=0} = -\partial_x\rho|_{x=-\infty}^{x=+\infty}\end{aligned}\tag{4.129}$$

Pelos modelos de Toda estudados no capítulo 2, concluímos que a energia e o momento são termos de superfície diretamente por meio do termo belinfante, $\bar{q}(\partial_\rho\partial_\sigma - g_{\rho\sigma}\partial^2)(\sum_{a=1}^2 \frac{2}{\alpha_a^2}\varphi^a + h\nu)$, pois essas cargas conservadas somem ao serem calculadas nas soluções de sólitons. Com $\alpha_a^2 = 2$ e $(\varphi^1 + \varphi^2 + 3\mathbf{v} = \rho)$. Para $\bar{q} = 1$, $h = 3$, $\rho = 0$ e $\sigma = 1$,

$$P = -\int dx \partial_t\partial_x\rho = -\partial_t\rho|_{x=-\infty}^{x=+\infty}\tag{4.130}$$

e $\rho = 0$ e $\sigma = 0$,

$$E = -\int dx \partial^2\rho = -\partial_x\rho|_{x=-\infty}^{x=+\infty}\tag{4.131}$$

Calculemos agora as cargas conservadas. A solução da equação de transporte paralelo para o $sl(3)$ tem a forma:

$$W_t^{(vac)} = e^{2LE_1} e^{2LE_{-1}} e^{2(L^2 + \int_{-L}^L \partial_{-}\beta^{(vac)} C)}\tag{4.132}$$

Definimos os operadores fazendo uso da propriedade de ordenação normal dos operadores de vértice:

$$\begin{aligned} \Psi_{3n+1} &=: e^{E_{3n+1}+E_{-3n-1}} := e^{E_{-3n-1}} e^{E_{3n+1}} \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.133)$$

Neste caso temos Ψ_{3n+1} e Ψ_{3n+2} . Faremos os cálculos para Ψ_{3n+1} pois o mesmo é feito para Ψ_{3n+2} . Vimos que existe conservação de cargas para a solução de vácuo, então podemos escrever:

$$W_t^{(vac)} \Psi_{3n+1} (W_t^{(vac)})^{-1} = \Psi_{3n+1} \quad (4.134)$$

A equação acima associada ao gauge do modelo, $W_t^{(\pm)} = g_{\pm, E(t, x=L)} W_t^{(vac)} g_{\pm, E(t, x=-L)}^{-1}$, nos permite escrever:

$$W_t^{(\pm)} \Psi_{3n+1} (W_t^{(\pm)})^{-1} = e^{\pm(3n+1)C(\xi_{1,3n+1}^{(\pm)}(x=L) - \xi_{1,3n+1}^{(\pm)}(x=-L))} \Psi_{3n+1} = e^{\Omega_{3n+1}^{(\pm)}} \quad (4.135)$$

$$W_t^{(\pm)} \Psi_{3n+2} (W_t^{(\pm)})^{-1} = e^{\pm(3n+2)C(\xi_{2,3n+2}^{(\pm)}(x=L) - \xi_{2,3n+2}^{(\pm)}(x=-L))} \Psi_{3n+2} = e^{\Omega_{3n+2}^{(\pm)}} \quad (4.136)$$

As cargas são então encontradas por meio das soluções da órbita de vácuo e das relações das álgebras de Kac-Moody $sl(3)$, descritas no apêndice C (para $n \geq 0$ e $i = 0, 1, 2$).

$$\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-3n-1} | \lambda_i \rangle = \langle \lambda_i | G_-^{-1} G_0^{-1} G_+ E_{-3n-1} | \lambda_i \rangle \quad (4.137)$$

$$= \tau_i \langle \lambda_i | G_+ E_{-3n-1} | \lambda_i \rangle \quad (4.138)$$

$$= \tau_i \langle \lambda_i | g_{+,F}^{-1} g_{+,E} E_{-3n-1} g_{+,E}^{-1} | \lambda_i \rangle \quad (4.139)$$

$$= (3n+1) C \xi_{1,3n+1}^{(+)} \tau_i \quad (4.140)$$

Então:

$$\xi_{1,3n+1}^{(+)}(t, x = \pm L) = \frac{1}{(3n+1)} \frac{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-3n-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.141)$$

O mesmo cálculo é feito para os outros ξ^s .

$$\xi_{1,3n+1}^{(-)}(t, x = \pm L) = -\frac{1}{(3n+1)} \frac{\langle \lambda_i | E_{3n+1} \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.142)$$

$$\xi_{2,3n+2}^{(-)}(t, x = \pm L) = -\frac{1}{(3n+2)} \frac{\langle \lambda_i | E_{3n+2} \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.143)$$

$$\xi_{2,3n+2}^{(+)}(t, x = \pm L) = \frac{1}{(3n+2)} \frac{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-3n-2} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.144)$$

Substituímos as equações (4.141)-(4.142) na expressão geral para as cargas, (4.135), e o mesmo para as equações referentes à Ψ_{3n+2} temos:

$$\Omega_{3n+1}^{(+)} = \frac{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-3n-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L} \quad (4.145)$$

$$\Omega_{3n+1}^{(-)} = \frac{-\langle \lambda_i | E_{3n+1} \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L}$$

$$\Omega_{3n+2}^{(+)} = \frac{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} E_{-3n-2} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L} \quad (4.146)$$

$$\Omega_{3n+2}^{(-)} = \frac{-\langle \lambda_i | E_{3n+2} \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \Psi_{vac} h \Psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L}$$

As soluções do modelo e suas cargas são encontradas como no caso do sine-Gordon, onde o elemento h consiste de uma exponenciação dos operadores de vértice. Podemos calcular τ_0 , τ_1 e τ_2 usando (4.105)-(4.107), (4.68) e as propriedades de operadores de vértice do apêndice D:

$$\tau_0 = 1 + \sum_{l=1}^n a_l e^{\Gamma(z_l)} + \sum_{l_1 < l_2 = 2}^n \left(\frac{z_{l_1} - z_{l_2}}{z_{l_1} + z_{l_2}} \right)^2 a_{l_1} a_{l_2} e^{\Gamma(z_{l_1})} e^{\Gamma(z_{l_2})} + \dots \quad (4.147)$$

$$\tau_1 = 1 - \sum_{l=1}^n a_l e^{\Gamma(z_l)} + \sum_{l_1 < l_2 = 2}^n \left(\frac{z_{l_1} - z_{l_2}}{z_{l_1} + z_{l_2}} \right)^2 a_{l_1} a_{l_2} e^{\Gamma(z_{l_1})} e^{\Gamma(z_{l_2})} + \dots \quad (4.148)$$

$$\tau_2 = 1 + \sum_{l=1}^n a_l e^{\Gamma(z_l)} + \sum_{l_1 < l_2 = 2}^n \left(\frac{z_{l_1} - z_{l_2}}{z_{l_1} + z_{l_2}} \right)^2 a_{l_1} a_{l_2} e^{\Gamma(z_{l_1})} e^{\Gamma(z_{l_2})} + \dots \quad (4.149)$$

As relações obtidas com os osciladores e os operadores de vértice para este caso são descritas abaixo:

$$[E_{3n+1}, V_i(z)] = -\sqrt{3} z^{(3n+1)} V_i(z) \quad (4.150)$$

$$E_{3n+1}(1 + a e^{\Gamma(z)} V(z)) = (1 + a e^{\Gamma(z)} V(z)) E_{3n+1} - \sqrt{3} a e^{\Gamma(z)} z^{3n+1} V(z) \quad (4.151)$$

onde

$$\Gamma(z_i) \equiv z_i x_+ - \frac{x_-}{z_i}. \quad (4.152)$$

Pela definição de (4.145) e (4.68) as cargas tornam-se:

$$\begin{aligned} \Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} &= \pm \sqrt{3} \sum_{k=1}^n z_k^{\pm(3n+1)} a_k e^{\Gamma(z_k)} \quad \times \\ &\frac{\langle \lambda_l | [\prod_{i=1}^{k-1} (1 + a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i))] V(z_k) [\prod_{j=k+1}^n (1 + a_j e^{\Gamma(z_j)} V(z_j))] | \lambda_l \rangle}{\langle \lambda_l | \prod_{i=1}^n (1 + a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i)) | \lambda_l \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L} \end{aligned} \quad (4.153)$$

vimos no modelo anterior que a expressão para as cargas acima é escrita em termos de α_i e θ_i que são parâmetros reais e $z_i = e^{-\alpha_i + i\theta_i}$. Dessa forma, a equação (4.152) torna-se,

$$\Gamma(z_i) = \frac{1}{\sqrt{1-v_i^2}} [\cos \theta_i (x - v_i t) + i \sin \theta_i (t - v_i x)], \quad (4.154)$$

com $v_i = \tanh \alpha_i$ e $\cosh \alpha = 1/\sqrt{1 - \tanh^2 \alpha}$. Na equação (4.153) quando $x \rightarrow \infty$ o numerador e o denominador do segundo termo apresentam o mesmo comportamento e com isso a expressão da carga adquire a forma:

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm \sqrt{3} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k^{\pm(3n+1)} \quad (4.155)$$

Temos que, $v = \tanh \alpha \Rightarrow e^\alpha = \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\varepsilon \equiv e^{i\theta} = \pm 1$, $\theta = 0, \pi$. Assim, para 1-sóliton obtemos:

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm \sqrt{3} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\pm\left(\frac{3n+1}{2}\right)} \quad (4.156)$$

Fazendo os mesmos cálculos anteriores quando trabalhamos com Ψ_{3n+2} encontramos o outro conjunto de cargas conservadas para 1-sóliton:

$$\Omega_{(3n+2)}^{(\pm)} = \pm \sqrt{3} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\pm\left(\frac{3n+2}{2}\right)} \quad (4.157)$$

O cálculo de 2-sólitons, para os dois conjuntos de carga, considerando agora que $\varepsilon \equiv e^{i\theta} = \pm 1$, $\theta_i = 0, \pi$ e $i = 1, 2$ tem a forma:

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm \sqrt{3} \left[\left(\frac{1+v_1}{1-v_1}\right)^{\pm\left(\frac{3n+1}{2}\right)} + \left(\frac{1+v_2}{1-v_2}\right)^{\pm\left(\frac{3n+1}{2}\right)} \right] \quad (4.158)$$

$$\Omega_{(3n+2)}^{(\pm)} = \pm \sqrt{3} \left[\left(\frac{1+v_1}{1-v_1}\right)^{\pm\left(\frac{3n+2}{2}\right)} + \left(\frac{1+v_2}{1-v_2}\right)^{\pm\left(\frac{3n+2}{2}\right)} \right] \quad (4.159)$$

Soluções solitônicas oscilantes para o caso de 2-sólitons são chamadas de breathers (35). Suas cargas são obtidas com a seguinte mudança nos parâmetros: $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$, $\theta_1 = -\theta_2 \equiv \theta$ e $z_1 = z_2^*$. As cargas tornam-se:

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm \sqrt{3} \varepsilon \left(e^{\pm(3n+1)(-\alpha+i\theta)} + e^{\pm(3n+1)(-\alpha-i\theta)} \right) \quad (4.160)$$

$$\Omega_{(3n+2)}^{(\pm)} = \pm \sqrt{3} \varepsilon \left(e^{\pm(3n+2)(-\alpha+i\theta)} + e^{\pm(3n+2)(-\alpha-i\theta)} \right) \quad (4.161)$$

Reescrevendo,

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm 2\sqrt{3}\epsilon \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm(\frac{3n+1}{2})} \cos[(3n+1)\theta] \quad (4.162)$$

$$\Omega_{(3n+2)}^{(\pm)} = \pm 2\sqrt{3}\epsilon \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm(\frac{3n+2}{2})} \cos[(3n+2)\theta] \quad (4.163)$$

onde ϵ é o sinal do $\cos(\theta)$.

4.4 Cargas conservadas para o modelo de Toda $\mathfrak{sl}(N)$ -Generalização

Os potenciais para o modelo Toda $\mathfrak{sl}(N)$ são:

$$A_+ = -B\Lambda_+B^{-1} \quad (4.164)$$

$$A_- = -\partial_-BB^{-1} + \Lambda_- \quad (4.165)$$

Neste caso o campo B tem a expressão:

$$B = e^{\sum_{i=1}^a \Phi_a H_a + \mathbf{v}C + \eta Q} \quad (4.166)$$

com,

$$\Lambda_+ = \sum_{i=0}^r e_i, \quad \Lambda_- = \sum_{i=0}^r v_i f_i \quad (4.167)$$

onde e_i e f_i são geradores da álgebra de Lie e v_i é um vetor dentro da álgebra e $\mathbf{v} = -x_+x_-$.

Para o vácuo os campos vão a zero, $\Phi = 0$ e $\eta = 0$ e temos:

$$B^{(vac)} = e^{-x_+x_-C} \quad (4.168)$$

Assim, os potenciais de vácuo adquirem a forma:

$$A_+^{(vac)} = -\Lambda_+ \quad (4.169)$$

$$A_-^{(vac)} = -\partial_-(e^{-x_+x_-C})e^{x_+x_-C} + \Lambda_- = -x_+C + \Lambda_- \quad (4.170)$$

As equações de movimento dos campos são:

$$\partial_+(\partial_-BB^{-1}) = \pm[B\Lambda_+B^{-1}, \Lambda_-] \quad (4.171)$$

e suas equações ficam:

$$\partial_- \partial_+ \Phi^a = -e^\eta v_a \left(e^{C_{ab} \Phi^b} - e^{C_{0b} \Phi^b} \right) \quad (4.172)$$

$$\partial_- \partial_+ \eta = 0 \quad (4.173)$$

$$\partial_- \partial_+ v = -e^\eta e^{C_{0b} \Phi^b} \quad (4.174)$$

onde c_{ij} é a matriz de Cartan. Os potenciais de vácuo (4.169)-(4.170), satisfazem a condição de curvatura nula e o potencial de $A_\mu^{(vac)}$ é então:

$$A_\mu^{(vac)} = -\partial_\mu w_0 w_0^{-1} \quad (4.175)$$

onde $w_0 = e^{x_+ \Lambda_+} e^{-x_- \Lambda_-}$. A partir daqui um elemento constante h do grupo é escolhido para a transformação de dressing. Pela decomposição de Gauss:

$$G = w_0 h w_0^{-1} = e^{x_+ \Lambda_+} e^{-x_- \Lambda_-} h e^{x_- \Lambda_-} e^{-x_+ \Lambda_+} = G_- G_0 G_+ \quad (4.176)$$

o que pode ser reescrito como:

$$G = w_0 h w_0^{-1} = G_- G_0 G_+ = G_- \epsilon^{(1)} \epsilon^{(2)} G_+ \quad (4.177)$$

onde consideramos uma decomposição do gerador de grau nulo, $G_0 = \epsilon^{(1)} \epsilon^{(2)}$. Neste caso G_0 é o mais geral pois consiste de uma fragmentação entre Θ_+ e Θ_- . Para continuação do dressing, definimos um potencial transformado, A_μ^h , da seguinte forma:

$$A_\mu^h = \theta_\pm A_\mu^{vac} \theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \theta_\pm \theta_\pm^{-1} \quad (4.178)$$

onde $\theta_+ = \epsilon_0^{(1)} G_+$ e $\theta_- = \epsilon_0^{(2)-1} G_-^{-1}$. Pelos potenciais de vácuo, (4.169)-(4.170) obtemos:

$$A_+^h = -\theta_\pm \Lambda_+ - \theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \theta_\pm \theta_\pm^{-1} \quad (4.179)$$

$$A_-^h = x_+ C + \theta_\pm \Lambda_- - \theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \theta_\pm \theta_\pm^{-1} \quad (4.180)$$

Os potenciais transformados possuem a mesma estrutura que os potenciais de partida, (4.164)-(4.165). Então:

$$A_+^h = -B \Lambda_+ B^{-1} \quad (4.181)$$

$$A_-^h = -\partial_- B B^{-1} + \Lambda_- \quad (4.182)$$

Igualando os potenciais acima com os potenciais transformados definidos em (4.179)-(4.180) as expressões para B e G_0 são encontradas. Igualamos primeiramente (4.181) com (4.179) para θ_+ :

$$-B\Lambda_+B^{-1} = -\epsilon_0^{(1)}G_+\Lambda_+G_+^{-1}\epsilon_0^{(1)-1} - \partial_+\epsilon_0^{(1)}\epsilon_0^{(1)-1} - \epsilon_0^{(1)}\partial_+G_+G_+^{-1}\epsilon_0^{(1)-1} \quad (4.183)$$

Pela análise dos graus da equação (4.183), vemos que o lado esquerdo não tem grau zero e portanto:

$$\partial_+\epsilon_0^{(1)}\epsilon_0^{(1)-1} = 0 \quad (4.184)$$

A igualdade agora se dá entre (4.182) com (4.180) também para θ_+ :

$$-\partial_-BB^{-1} + \Lambda_- = x_+C + \epsilon_0^{(1)}G_+\Lambda_-G_+^{-1}\epsilon_0^{(1)-1} - \partial_-\epsilon_0^{(1)}\epsilon_0^{(1)-1} - \epsilon_0^{(1)}\partial_-G_+G_+^{-1}\epsilon_0^{(1)-1} \quad (4.185)$$

o que leva a seguinte igualdade:

$$\Lambda_- = \epsilon_0^{(1)}\Lambda_-\epsilon_0^{(1)-1} \quad (4.186)$$

Ou seja, concluímos que não existe elemento que comute com Λ_- além do termo central e então:

$$\epsilon_0^{(1)} = e^{\alpha(x_-)C} \quad (4.187)$$

Comparando as equações (4.181) com (4.179) para θ_- encontramos:

$$-B\Lambda_+B^{-1} = \epsilon_0^{(2)-1}\Lambda_+\epsilon_0^{(2)} \quad (4.188)$$

Multiplicando a equação acima, ambos os lados, por $\epsilon_0^{(2)}$ à esquerda e $\epsilon_0^{(2)-1}$ à direita, a expressão obtida tem a forma:

$$\epsilon_0^{(2)}B\Lambda_+B^{-1}\epsilon_0^{(2)-1} = \Lambda_+ \quad (4.189)$$

Novamente além do termo C , não existe outro elemento que comute com Λ_+ , então:

$$\epsilon_0^{(2)}B = e^{\alpha C} \Rightarrow B = \epsilon_0^{(2)-1}e^{\alpha C} \quad (4.190)$$

Da mesma forma, comparando (4.182) com (4.180) para θ_- obtemos,

$$-\partial_-BB^{-1} = x_+C - \partial_-\epsilon_0^{(2)-1}\epsilon_0^{(2)} \quad (4.191)$$

dessa última equação com (4.190) temos que $-\partial_- \alpha C = x_+ C \Rightarrow \alpha = -x_+ x_- + cte$. Tomamos a $cte = 0$ e adotamos que $\alpha(x_-) = 0$ em (4.187), conseqüentemente:

$$\epsilon_0^{(1)} = 1 \quad B = \epsilon_0^{(2)-1} e^{-x_+ x_- C} \quad (4.192)$$

A decomposição de Gauss fica:

$$G_- G_0 G_+ = G_- B^{-1} e^{-x_+ x_- C} G_+ \quad (4.193)$$

ou seja,

$$G_0 = B^{-1} e^{-x_+ x_- C} \quad (4.194)$$

A partir do G_0 , por meio da representação dos estados de peso máximo da álgebra de Kac-Moody $sl(N)$ no apêndice C, as funções tau de Hirota são obtidas.

$$\tau_0 \equiv \langle \lambda_0 | w_0 h w_0^{-1} | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | G_0^{-1} | \lambda_0 \rangle = e^{-(v+x_+ x_-)} \quad (4.195)$$

$$\tau_a \equiv \langle \lambda_a | w_0 h w_0^{-1} | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_a | G_0^{-1} | \lambda_a \rangle = e^{-(\phi_a + v + x_+ x_-)} \quad (4.196)$$

$$(4.197)$$

para $a = 1, 2, \dots, n$, e os campos são:

$$v = -\log \tau_0 + x_+ x_- \quad (4.198)$$

$$\phi_a = \log \frac{\tau_0}{\tau_a}$$

As representações de peso máximo obtidas em (4.195)-(4.197) também são obtidas a partir da especialização solitônica do método de Leznov-Saveliev (36). Como nos outros casos, substituindo (4.198) nas equações de movimento do modelo, (4.172) - (4.174), com $\eta = 0$ obtemos as funções de Hirota,

$$\tau_i \partial_+ \partial_- \tau_i - \partial_+ \tau_i \partial_- \tau_i = \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^r \tau_j^{-c_{ij}} - \tau_i^2 \right] \quad (4.199)$$

que podem ser resolvidas por meio de um ansatz (33), onde c_{ij} é a matriz de Cartan definida no apêndice B.

Redefinimos os potenciais,

$$\Lambda_+ = \sum_{i=0}^r e_i \equiv E_l \quad (4.200)$$

$$\Lambda_- = \sum_{i=0}^r v_i f_i \equiv E_{-l} \quad (4.201)$$

e os potenciais de vácuo tornam-se:

$$A_+^{(vac)} = -E_l \quad (4.202)$$

$$A_-^{(vac)} = -\partial_- \beta^{(vac)} C + E_{-l} \quad (4.203)$$

onde $\beta = -x_+ x_-$. Então a solução da equação de transporte paralelo adquire a seguinte expressão para o caso geral:

$$W_t^{(vac)} = e^{2LE_l + eLE_{-l}} e^{2(L^2 + \int_{-L}^L \partial_- \beta^{(vac)})C} \quad (4.204)$$

Como nos outros casos, por meio dos operadores de ordenamento normal, mostramos que há conservação de cargas para solução de vácuo e então:

$$W_t^{(vac)} \Psi_{a,n} W_t^{(vac)-1} = \Psi_{a,n} \quad (4.205)$$

Os elementos do grupo $G_{\pm} = g_{\pm,F}^{-1} g_{\pm,E}$ agora são da forma:

$$\begin{aligned} g_{\pm,F} &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a=1}^r \zeta_n^{(\pm,a)} F_{\pm n}^a \right] \\ g_{\pm,E} &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a=1}^r \xi_{a,n}^{(\pm)} E_{\pm n}^a \right] \end{aligned} \quad (4.206)$$

Pela conservação das cargas associadas ao gauge do modelo podemos escrever:

$$W_t^{(\pm)} = g_{\pm,E(t,x=L)} W_t^{(vac)} g_{\pm,E(t,x=-L)}^{-1} \quad (4.207)$$

e a partir disso a expressão das cargas é obtida:

$$W_t^{(\pm)} \Psi_{a,n} W_t^{(\pm)-1} = e^{\pm n C \left[\xi_{a,n}^{(\pm)}(x=L) + \xi_{a,n}^{(\pm)}(x=-L) \right]} \Psi_{a,n} \equiv e^{\Omega_{a,n}^{(\pm)}} \quad (4.208)$$

Pela representação de peso máximo e funções tau escrevemos (para $n \geq 0, i = 0, 1 \dots N-1$):

$$\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} E_{-n} | \lambda_i \rangle = \langle \lambda_i | G_-^{-1} G_0^{-1} G_+ E_n | \lambda_i \rangle \quad (4.209)$$

$$= \tau_i \langle \lambda_i | G_+ E_{-n} | \lambda_i \rangle \quad (4.210)$$

$$= \tau_i \langle \lambda_i | g_{+,F}^{-1} g_{+,E} E_{-n} g_{+,E}^{-1} | \lambda_i \rangle \quad (4.211)$$

$$= n C \xi_{1,n}^{(+)} \tau_i \quad (4.212)$$

isto é,

$$\xi_{a,n}^{(+)}(t, x = \pm L) = \frac{1}{n} \frac{\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} E_{-n} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.213)$$

$$\xi_{a,n}^{(-)}(t, x = \pm L) = \frac{1}{n} \frac{\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} E_{-n} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=\pm L} \quad (4.214)$$

As cargas ficam:

$$\Omega_{a,n}^{(+)} = \frac{\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} E_{-n} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L} \quad (4.215)$$

$$\Omega_{a,n}^{(-)} = \frac{-\langle \lambda_i | E_n \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \psi_{vac} h \psi_{vac}^{-1} | \lambda_i \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L}$$

As funções tau, escritas em termos dos operadores de vértice, são da forma:

$$\begin{aligned} \tau_i = & 1 + (-1)^i \sum_{j=1}^n a_j e^{\Gamma(z_j)} + \sum_{j_1 < j_2 = 1}^n \left(\frac{z_{j_1} - z_{j_2}}{z_{j_1} + z_{j_2}} \right)^2 a_{j_1} a_{j_2} e^{\Gamma(z_{j_1}) + \Gamma(z_{j_2})} + \dots \\ & + (-1)^i \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^n \left(\frac{z_{j_1} - z_{j_2}}{z_{j_1} + z_{j_2}} \right)^2 \left(\frac{z_{j_1} - z_{j_3}}{z_{j_1} + z_{j_3}} \right)^2 \left(\frac{z_{j_2} - z_{j_3}}{z_{j_2} + z_{j_3}} \right)^2 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} e^{\Gamma(z_{j_1}) + \Gamma(z_{j_2}) + \Gamma(z_{j_3})} \\ & \dots + (-1)^{in} \prod_{k_1 < k_2 = 1}^n \left(\frac{z_{k_1} - z_{k_2}}{z_{k_1} + z_{k_2}} \right)^2 \prod_{j=1}^n a_j e^{\Gamma(z_j)} \quad i = 0, 1, 2 \dots N. \end{aligned}$$

A relação entre os osciladores e os operadores de vértice de forma geral é dada por:

$$[E_n, V_i(z)] = -\kappa z^n V_i(z) \quad (4.216)$$

onde $\kappa_N = -2 + \omega + \omega^{N-1}$ e $\omega = e^{(2\pi i/N)}$ da álgebra de Kac-Moody $sl(N)$ descrita no apêndice C. Esta relação de comutação fornece a seguinte relação:

$$E_n(1 + a e^{\Gamma(z)} V(z)) = (1 + a e^{\Gamma(z)} V(z)) E_n - \kappa a e^{\Gamma(z)} z^n V(z) \quad (4.217)$$

As cargas adquirem a expressão:

$$\Omega_n^{(\pm)} = \pm \kappa \sum_{k=1}^n z_k^{\pm(n)} a_k e^{\Gamma(z_k)} \times$$

$$\frac{\langle \lambda_l | [\prod_{i=1}^{k-1} (1 + a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i))] V(z_k) [\prod_{j=k+1}^n (1 + a_j e^{\Gamma(z_j)} V(z_j))] | \lambda_l \rangle}{\langle \lambda_l | \prod_{i=1}^n (1 + a_i e^{\Gamma(z_i)} V(z_i)) | \lambda_l \rangle} \Big|_{x=-L}^{x=+L} \quad (4.218)$$

Fazendo as mesmas considerações como nos outros casos e as mesmas substituições, a expressão geral para as cargas de 1-sóliton é da forma:

$$\Omega_{a,n}^{(\pm)} = \pm \kappa_N \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm \left(\frac{n+a}{2} \right)} \quad (4.219)$$

onde $a = 1, \dots, r$ e r é o rank da álgebra. Para 2-sólitons temos:

$$\Omega_{a,n}^{(\pm)} = \pm \kappa_N \left[\left(\frac{1+v_1}{1-v_1} \right)^{\pm \left(\frac{n+a}{2} \right)} + \left(\frac{1+v_2}{1-v_2} \right)^{\pm \left(\frac{n+a}{2} \right)} \right] \quad (4.220)$$

A generalização para M-sólitons fica:

$$\Omega_{a,n}^{(\pm)} = \pm \kappa_N \sum_{i=1}^M \left(\frac{1+v_i}{1-v_i} \right)^{\pm \left(\frac{n+a}{2} \right)}. \quad (4.221)$$

5 Conclusões

Neste trabalho apresentamos os sólitons com algumas de suas propriedades, começando por sua descoberta em 1834, discutimos a necessidade e a importância de se obter as cargas conservadas de um sistema. A partir desse cálculo é possível conhecer as simetrias associadas ao sistema. Estudamos as simetrias associadas à curvatura nula e a partir disso obtivemos as cargas conservadas dos modelos de Toda $Sl(2)$, $sl(3)$ e $sl(N)$.

A partir da discussão anterior abordamos a rede de Toda e os modelos de Toda clássicos, que apresentam soluções solitônicas, dando maior ênfase ao modelo de Toda Afim Conforme, para o qual calculamos as cargas. Descrevemos os modelos de Toda Conforme, Afim e Afim Conforme e ao final relacionamos os dois últimos modelos. Os dois métodos de soluções, Hirota e dressing, foram apresentados de maneira detalhada no capítulo seguinte, enfatizando propriedades e vantagens.

O método para o cálculo das cargas conservadas utilizado nesta dissertação foi proposto originalmente na ref. (15), onde os exemplos dos modelos de sine-Gordon e mKdV foram apresentados explicitamente. A contribuição original desta dissertação consistiu no cálculo das infinitas cargas conservadas dos modelos de Toda $sl(3)$ e $sl(N)$ para $N > 3$ através dos métodos de (15). Estes resultados serão o conteúdo de um trabalho a ser submetido para publicação. A seguir apresentamos os conjuntos das cargas conservadas obtidas para os modelos de Toda $sl(3)$ e $sl(N)$, Ω_n :

Para o modelo $sl(3)$ 1-sóliton:

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm\sqrt{3} \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm\left(\frac{3n+1}{2}\right)} \quad (5.1)$$

$$\Omega_{(3n+2)}^{(\pm)} = \pm\sqrt{3} \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm\left(\frac{3n+2}{2}\right)} \quad (5.2)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e v é a velocidade do sóliton.

Para 2-sólitons:

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm\sqrt{3} \left[\left(\frac{1+v_1}{1-v_1} \right)^{\pm(\frac{3n+1}{2})} + \left(\frac{1+v_2}{1-v_2} \right)^{\pm(\frac{3n+1}{2})} \right] \quad (5.3)$$

$$\Omega_{(3n+2)}^{(\pm)} = \pm\sqrt{3} \left[\left(\frac{1+v_1}{1-v_1} \right)^{\pm(\frac{3n+2}{2})} + \left(\frac{1+v_2}{1-v_2} \right)^{\pm(\frac{3n+2}{2})} \right] \quad (5.4)$$

Para os breathers:

$$\Omega_{(3n+1)}^{(\pm)} = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm(\frac{3n+1}{2})} \cos[(3n+1)\theta] \quad (5.5)$$

$$\Omega_{(3n+2)}^{(\pm)} = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm(\frac{3n+2}{2})} \cos[(3n+2)\theta] \quad (5.6)$$

onde ε é o sinal do $\cos(\theta)$.

As cargas generalizadas para $\mathfrak{sl}(N)$ 1 e 2-sólitons obtidas foram, respectivamente:

$$\Omega_{a,n}^{(\pm)} = \pm \kappa_N \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\pm \frac{n+a}{2}} \quad (5.7)$$

$$\Omega_{a,n}^{(\pm)} = \pm \kappa_N \left[\left(\frac{1+v_1}{1-v_1} \right)^{\pm \frac{n+a}{2}} + \left(\frac{1+v_2}{1-v_2} \right)^{\pm \frac{n+a}{2}} \right] \quad (5.8)$$

onde $a = 1, \dots, r$ e r é o rank da álgebra e $\kappa_N = -2 + \omega + \omega^{N-1}$. A generalização para M-sólitons:

$$\Omega_{a,n}^{(\pm)} = \pm \kappa_N \sum_{i=1}^M \left(\frac{1+v_i}{1-v_i} \right)^{\pm(\frac{n+a}{2})}. \quad (5.9)$$

Explicitamos os cálculos algébricos na dissertação para o modelo de sine-Gordon e para o modelo de Toda Afim Conforme $\mathfrak{sl}(3)$. Para esses modelos mostramos que as cargas conservadas, energia e momento, na órbita do vácuo, são termos de superfície fazendo uso das equações de movimento, do tensor energia momento e do termo Belinfante. Destacamos novamente que para o emprego do método de dressing é necessário que as equações do modelo sejam escritas em termos da curvatura nula, garantindo a integrabilidade do mesmo. A álgebra precisa ser graduada, possuir representação de peso máximo e o modelo precisa possuir uma solução semente para que o mapeamento por meio de transformações de gauge ocorra. Referenciamos nosso texto com os principais trabalhos e livros que abordam os assuntos discutidos para um maior aprofundamento, se desejado.

Uma ênfase especial foi dada nos apêndices para as propriedades das álgebras de Lie, de Kac-Moody e dos operadores de vértice, pois foram as ferramentas necessárias para os cálculos. No primeiro apêndice abordamos os grupos e suas representações; no apêndice seguinte descrevemos as propriedades, definições e representação das álgebras de Lie. As álgebras de Lie de dimensão infinita, denominadas álgebras de Kac-Moody são descritas no apêndice C, onde colocamos suas propriedades e relações de comutação para as álgebras $sl(2)$ e $sl(3)$ utilizadas no texto. Por fim, no último apêndice, apresentamos algumas propriedades das álgebras dos operadores de vértice. O elemento de grupo utilizado no dressing é escrito em termos de operadores de vértice e é por meio desses operadores e de suas relações com os osciladores (E_n) que obtemos os valores das cargas.

Concluimos nosso trabalho enfatizando a elegância e a extensão do método de dressing. Por meio dele generalizamos a expressão para as cargas conservadas para o modelo de Toda Afim Conforme $sl(N)$ em duas dimensões.

Referências

- 1 DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. *Soliton: an Introduction*. Cambridge: University Press. Cambridge, 1993.
- 2 KORTEWEG, D.; DEVRIES. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Wave. *Philosophical Magazine*, v. 39, n. 5, p. 422-443, 1895.
- 3 FORD, J. The Fermi-Pasta-Ulam Problem: paradox turn discovery. *Physics Reports*, v. 213, n. 1, p. 271-310, 1992.
- 4 ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of the initial states *Physical Review Letters*, v. 15, n. 6, p. 240-243, 1965.
- 5 TODA, M. Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 22, n. 3, p. 431-436, 1967.
- 6 LAX, P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 21, n. 5, p. 467-490, 1968.
- 7 ZAKHAROV, V.E.; SHABAT, A.B. Scheme for integrating the non-linear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. *Functional Analysis and Its Applications*, v. 8, n. 3, p. 43-53, 1974.
- 8 ZAKHAROV, V.E.; SHABAT, A.B. Scheme for integrating the non-linear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. *Functional Analysis and Its Applications*, v. 13, n. 3, p. 13-22, 1979.
- 9 ZAKHAROV, V.E.; SHABAT, A.B. Integration of non linear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering II. *Functional Analysis and Its Applications*, v.13, n. 3, p. 166, 1979.
- 10 FADDEEV, L.D.; TAKHTAJAN, L.A. Hamiltonian methods in the theory of solitons. New York: *Springer-Verlag*, 1987.
- 11 HIROTA, R. *Direct methods in soliton theory*. In: Bullough RK, Caudrey PJ, editors. Solitons. New York: Springer, 1980.
- 12 ARATYN, H.; CONSTANTIDINIS, C.P.; FERREIRA, L.A.; GOMES, J.F.; ZIMERMAN, A.H. Hirota's solitons in the affine and the conformal affine Toda models. *Nuclear Physics B*, v. 406, n. 3, p. 727- 770, 1993. [hep-th/9212086].
- 13 BABELON, O.; L. BONORA, Conformal affine $sl(2)$ toda field theory. *Physics Letters B*, v. 244, n. 2, p. 220-226, 1990.

- 14 JOHNSON,P.R. On solitons in affine Toda field theories. 1996. *Thesis*. (PHD) University ofWales, 1996.
- 15 FERREIRA, L. A.; ZAKRZEWSKI, W. J. A simple formula for the conserved charges of soliton theories. *Journal of High Energy Physics*, v. 9, n. 15, p. 1-29, 2007. DOI: 10.1088/1126-6708/2007/09/015.
- 16 FREEMAN,M. Conserved charges and soliton solutions in affine Toda theory. *Nuclear Physics B*, v. 433, p. 657-670, 1995. DOI: 10.1016/0550-3213(94)00519-K. [hep-th/9408092].
- 17 GALLÉAS,W; YMAI,L. H.; NATTI,P. L. e TAKANO NATTI, E. R. Ondas do tipo sólitons em dielétricos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25 , n. 3, p. 294-304, 2003.
- 18 CARDOSO JUNIOR, J. L. Solitons. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 10, n. 3,p, 695-716 1980.
- 19 NOVICKOV, S.P.; MANAKOV,S.V.; PITAEVSKII L.P.; ZAKHAROV,V.E. Theory of solitons. *Contemporary Soviet Mathematics*: Consultants Bureau, 1984.
- 20 REMOINSSENT, M. *Waves called solitons*. 3.ed. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- 21 FERREIRA, L. A. *Lecture Notes on Lie Algebras and lie Groups*, IFT-Unesp, 2000.
- 22 BABELON O.; BERNARD, D.; TALON, M. *Introduction to classical integrable systems*. Camdridge: Camdridge University Press, 2003. 616p.(Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- 23 FRANKEL, T. *The geometry of physics : an introduction* Cambridge, United Kingdom; New York : Cambridge University Press, 1997.
- 24 OLIVE, D.I.; TUROK, N. Local conserved densities and zero-curvature conditions for Toda lattice field theories. *Nuclear Physics B*, v. 257, p. 277-301, 1985. DOI: 10.1016/0550-3213(85)90347-5
- 25 FERREIRA,L.A.; MIRAMONTES, J.L.; SANCHEZ GUILLEN,J. Tau functions and dressing transformations for zero curvature affine integrable equations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, n. 2, p. 882-901, 1997. [hep-th/9606066]
- 26 TODA, M. *Nonlinear waves and solitons*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1989.
- 27 OLIVE,D.I.; TUROK, N. Algebraic structure of Toda systems.*Nuclear Physics B*, v. 220, n.4, p. 491-507, 1983.
- 28 LEZNOV, A.N.; SAVELIEV, M.V. Article Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp(kx)_{\alpha}$ and its integrability, *Letters in Mathematical Physics* v. 3, n. 6, p. 489-494, 1979. G
- 29 OLIVE,D.I.; TUROK,N; UNDERWOOD,J.W.R. Solitons and the energy-momentum tensor for affine Toda theory. *Nuclear Physics B*, v. 401, n.3, p. 663-697, 1993.

- 30 CONSTANTIDINIS, C.P.; FERREIRA, L.A.; GOMES, J.F.; ZIMMERMAN, A.H. Connection between affine and conformal affine Toda models and their Hirota's solution. *Physics Letters B*, v. 298, n. 1-2, p. 88-94, 1993. [hep-th/9207061].
- 31 BABELON, O.; BERNARD, D. Dressing transformations and the origin of the quantum group symmetries. *Physics Letters B*, v. 260, n. 1-2, p. 81-86, 1991; Dressing symmetries. *Communications of Mathematical Physics*, v. 149, n. 2, p. 279-306, 1992 [hep-th/9111036].
- 32 OLIVE, D.I.; TUROK, N. The Toda lattice field theory heirarchies and zero-curvature conditions in Kac-Moody algebras. *Nuclear Physics B*, v. 265, n. 3, p. 469-484, 1986.
- 33 HOLOWOOD, T.J.; Solitons in affine Toda field theories. *Nuclear Physics B*, v. 384, n. 3, p. 523-540, 1992.
- 34 DATE, E.; KASHIWARA, M.; MIWA, T. Vertex operators and tau-functions transformation groups for soliton-equations 2. *Proceedings of Japan Academy*, v. 57, n. 8, p. 387-392, 1981.
- 35 RAJAMARAN, R. *Solitons and Instantons*. North Holland, 1982.
- 36 OLIVE, D.I.; SAVELEV, M.V.; UNDERWOOD, J.W.J. On a solitonic specialization for the general solutions of some two-dimensional completely integrable systems. *Physics Letters B*, v. 311, n. 1-4, p. 117-122, 1993. [hep-th/9212123].
- 37 SAN MARTIN, L. A. B. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp. 1999.
- 38 HUMPHREYS, J. E. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. New York: Springer-Verlag, 1972.
- 39 HALL, Brian C. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*. New York: Springer, 2003.
- 40 KAC, V. G. *Infinite dimensional Lie algebras*. 3. ed. Cambridge: Cambridge university Press, 1990.
- 41 GODDARD, P.; OLIVE, D.I. Kac-Moody and virasoro algebras in relation to quantum physics. *International Journal of Modern Physics A*, v. 1, n. 2, p. 303-414, 1986.
- 42 LEPOWSKY, J.; LI, H. *Introduction to Vertex operator algebras and their representations*. Progress in Mathematics. v. 227, 1962.
- 43 FRING, A.; JOHNSON, P.R.; KNEIPP, M.A.C.; OLIVE, D.I. Vertex operators and soliton time delays in affine Toda field theory. *Nuclear Physics B*, v. 430, n. 3, p. 597-614, 1994.
- 44 OLIVE, D.I.; TUROK, N.; UNDERWOOD, J.W.R. Affine Toda solitons and vertex operators. *Nuclear Physics B*, v. 409, n. 3, p. 509-546, 1993.

Apêndice A – Grupos e representações

O conceito de simetria tem um papel muito importante em Física e nas Ciências Naturais. As estruturas matemáticas apropriadas para o estudo de simetrias são o conceito de grupo e suas representações. O papel da teoria de representação de grupos em Física cresceu bastante no início do século XX com o advento da Mecânica Quântica. Entre os grandes contribuidores para este desenvolvimento estão Wigner, von Neumann e Weyl. Apresentamos aqui um resumo dos conceitos mais utilizados nesta dissertação.

Definição A.1 *Um grupo é um conjunto $\mathcal{G}$ munido de uma operação binária:*

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

$$(a, b) \longmapsto ab$$

tal que esta operação seja:

(i) *Se a e b são elementos de $\mathcal{G}$, então o produto ab é também um elemento de $\mathcal{G}$.*

(ii) *Associativa: $(ab)c = a(bc)$.*

(iii) *Existe um elemento neutro $e \in \mathcal{G}$, tal que $ea = ae = a$, $\forall a \in \mathcal{G}$.*

(iv) *Para cada elemento $a \in \mathcal{G}$ existe um elemento a^{-1} denominado inverso $\in \mathcal{G}$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.*

Se a operação for comutativa, ou seja, $ab = ba$ para todos os elementos $a, b \in \mathcal{G}$, então $\mathcal{G}$ é dito comutativo ou abeliano.

Um subconjunto H de um grupo $\mathcal{G}$ que satisfaz as propriedades de um grupo com mesma lei de composição usada por $\mathcal{G}$ é dito ser um **subgrupo** de $\mathcal{G}$. A identidade e o próprio grupo $\mathcal{G}$ são subgrupos de $\mathcal{G}$ denominados subgrupos impróprios, todos os outros grupos de $\mathcal{G}$ são denominados subgrupos próprios (21).

Dado um grupo $\mathcal{G}$ podemos parametrizar seus elementos por um conjunto de parâmetros $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se o grupo for contínuo esses parâmetros são contínuos e podem ser reais ou complexos. Os elementos do grupo podem então ser descritos como $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Quando tomamos o produto de dois elementos de um grupo

$$g(x)g(x') = g(x'') \quad (\text{A.1})$$

os parâmetros do elemento obtido ficam em função dos parâmetros dos outros dois elementos.

$$x'' = F(x, x') \quad (\text{A.2})$$

De forma análoga, os parâmetros do elemento inverso de um $g \in \mathcal{G}$ é uma função dos parâmetros de g e vice-versa. Temos que se

$$g(x)g(x') = e = g(x')g(x) \quad (\text{A.3})$$

então,

$$x' = f(x) \quad (\text{A.4})$$

Um grupo $\mathcal{G}$ é denominado de **grupo de Lie** quando as funções $F(x, x')$ e $f(x)$ discutidas acima forem analíticas e os elementos g de $\mathcal{G}$ constituírem um manifold.¹

O conceito de grupos abstratos é de grande importância na Física. Consideremos um conjunto de operadores $D_1, D_2, \dots$ atuando em um espaço vetorial $\mathcal{V}$

$$D_i |v\rangle = |v'\rangle; \quad |v\rangle, |v'\rangle \in \mathcal{V} \quad (\text{A.5})$$

O produto desses operadores pode ser definido pela composição de sua ação, ou seja, um operador D_3 é o produto de dois outros operadores D_1 e D_2 ,

$$D_1(D_2|v\rangle) = D_1|v'\rangle = D_3|v\rangle \quad (\text{A.6})$$

para todo $|v\rangle \in \mathcal{V}$. Dessa forma podemos escrever: $D_1.D_2 = D_3$. Se esses operadores formarem um grupo sob esta lei produto, esse grupo é denominado de **grupo de operador** ou **grupo de transformações**.

Se associarmos a cada elemento g de um grupo abstrato $\mathcal{G}$ um operador denotado por $D(g)$, tal que a estrutura de $\mathcal{G}$ seja preservada, isto é, $D(g)D(g') = D(gg')$, onde $g, g' \in \mathcal{G}$, então dizemos que cada conjunto de operadores é uma **representação do grupo abstrato $\mathcal{G}$** no espaço vetorial $\mathcal{V}$. A dimensão da representação é a dimensão do espaço

---

¹Espaço analítico localmente isomórfico ao $\mathbb{R}^N$.

de representação.

Podemos associar o mesmo operador a dois ou mais elementos de $\mathcal{G}$, mas o inverso não é verdade. No caso onde para cada operador D existe um único elemento g associado a ele, dizemos que a **representação é fiel**. Quando associamos mais elementos a um único operador, a **representação é dita infiel**.

Os operadores de uma dada representação atuam em um espaço de representação $\mathcal{V}$ como um grupo de transformações. No caso onde um subespaço de $\mathcal{V}$ é invariante por todas as transformações, dizemos que a representação é **irredutível**. Por outro lado, uma representação que não é irredutível é dita **reduzível**.

A idéia central da representação é a de que os elementos do grupo podem ser escritos como matrizes, onde a multiplicação dessas matrizes obedece a lei de comutação da álgebra.

Apêndice B – Álgebras de Lie

Definimos uma álgebra de Lie como sendo um espaço vetorial g munido de uma aplicação $g \times g \rightarrow g$, denominada de produto de Lie ou operação colchete. A aplicação sobre o par $(x, y) \in g \times g$ é denotada por $[xy]$ satisfazendo as seguintes condições:

- A operação colchete é bilinear;
- $[xx] = 0$, para todo $x \in g$;
- A identidade de Jacobi é satisfeita, ou seja, $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$, quaisquer que sejam $x, y, z \in g$.

O terceiro item diferencia uma álgebra de Lie de uma álgebra associativa. A álgebra onde a operação colchete é trivial, isto é, $[xy] = 0$, para $x, y \in g$ é dita abeliana e, do contrário, dita não-abeliana. Um subálgebra de Lie é definida como sendo um subespaço k de g fechado em relação ao comutador, ou seja, $[xy] \in k$, para todo $x, y \in k$.

Uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie g é definida como uma subálgebra nilpotente que é igual ao seu normalizador. O normalizador de uma subálgebra k de g é definido por:

$$N(k) \equiv \{x \in g \mid [x, k] \subset k\} \quad (\text{B.1})$$

Pela identidade de Jacob temos:

$$[[x, x'], k] \subset k \quad (\text{B.2})$$

com $x, x' \in N(k)$. Portanto, o normalizador $N(k)$ é uma subálgebra de g e k é uma subálgebra invariante de $N(k)$. Assim, podemos dizer que o normalizador de k em g é a maior subálgebra de g , a qual contém k como uma subálgebra invariante. Dizemos que g é uma álgebra nilpotente se $g^n = 0$ para qualquer n .

Pelo fato da subálgebra de Cartan ser igual ao seu normalizador, implica que não existem geradores no complemento P de H em g tal que $[H, P] \subset H$. Logo temos, $[H, P] \subset P$.

Podemos então diagonalizar a ação adjunta de H em P e trabalhar com uma base formada por autoestados de H_i , ou seja,

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (\text{B.3})$$

Os autovalores da equação acima, $\alpha_i (i = 1, \dots, r)$, são denominados *raízes* da álgebra, constituindo vetores que vivem num espaço de dimensão r . A métrica no espaço de raízes é Euclideana para as álgebras de Lie finitas. Um conceito importante é o de reflexão de Weyl. Dados duas raízes α e β definimos: $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\alpha\beta/\alpha^2$, que é a reflexão de β através de planos perpendiculares a α . O conjunto dessas reflexões gera o chamado grupo de Weyl. O espaço vetorial das raízes é dividido por hiperplanos perpendiculares às raízes em regiões denominadas **câmaras de Weyl**.

Consideremos $\Phi \subseteq \mathcal{E}$, espaço vetorial real com produto interno (espaço euclidiano), dado por (α, β) . Como a álgebra é finita, o número de raízes também o é. A estrutura das álgebras simples de Lie é tal que o conjunto de raízes satisfaz as propriedades:

1. Φ é finito, gera $\mathcal{E}$ apesar de não ser base e não contém o zero.
2. Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos de α que estão em Φ são $\pm \alpha$.
3. Se $\alpha \in \Phi$, $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$
4. Se $\alpha, \beta \in \Phi$, $\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$.

Todo conjunto Φ , contido num espaço euclidiano $\mathcal{E}$ com essas quatro propriedades satisfeitas é denominado sistema de raízes. Todo conjunto de raízes de uma álgebra de Lie semisimples satisfaz estas condições.

Os operadores descritos em (??) e (B.3) são descritos na chamada base de Weyl-Cartan, muito utilizada por possuir propriedades de ortonormalidade em relação ao traço de um par de geradores, entretanto por motivos algébricos introduzimos uma nova base chamada de base de Chevalley, na qual todas as constantes de estrutura passam a ser números inteiros.

$$H_a \equiv 2 \frac{\alpha_a \cdot H}{\alpha_a^2} \quad (\text{B.4})$$

onde α_a é uma raiz simples. No caso do $\mathfrak{sl}(N)$ todas as raízes possuem o mesmo tamanho e então as normalizamos como $\alpha_a^2 = 2$. As relações de comutação são:

$$[H_a, H_b] = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$[H_a, E_\beta] = \alpha_a \cdot \beta \cdot E_\beta \quad (\text{B.6})$$

e as demais,

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta} & , \text{ se } \alpha + \beta \text{ é raiz} \\ \delta_{\alpha\beta} H_\beta & , \text{ se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & , \text{ nos demais casos} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Propriedades entre as raízes: Sejam $\alpha, \beta \in \Phi$, e θ o ângulo entre elas. Daí: $(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cdot \cos \theta$, e portanto:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \frac{2\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos \theta$$

Da quarta propriedade podemos escrever:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 4 \cos^2 \theta \in \mathbb{Z}$$

A partir disso podemos montar a seguinte tabela com os possíveis ângulos entre as raízes ($\alpha \neq \pm \beta$) e os quocientes $\|\alpha\|/\|\beta\|$ se $\theta \neq \pi/2$.

ângulo	quociente das normas
$\pi/2$	indeterminado
$\pi/3$ ou $2\pi/3$	1
$\pi/4$ ou $3\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/6$ ou $5\pi/6$	$\sqrt{3}$

Tabela 1. Tabela de ângulos e quociente das normas de raízes

Figura 9. — Sistema de raízes em duas dimensões

Todas as câmaras de Weyl são equivalentes e possuem a mesma forma, dessa maneira escolhe-se uma que passa a ser denominada como câmara de Weyl fundamental. Dado um vetor x dentro da câmara fundamental de Weyl, dizemos que α é uma raiz positiva se $\alpha \cdot x > 0$ e uma raiz negativa se $\alpha \cdot x < 0$.

Figura 10. — Câmara de Weyl para A_2 ($SU(3)$ ou $Sl(3)$) (21)

As raízes simples são assim chamadas pois não podem ser obtidas pela soma de duas raízes positivas. As raízes são escritas como combinações lineares das simples e com coeficientes inteiros e de mesmo sinal.

$$\alpha = \sum_{a=1}^r m_a^\alpha \alpha_a \quad (\text{B.8})$$

A altura de uma raiz é definida como:

$$h(\alpha) = \sum_{a=1}^r m_a \quad (\text{B.9})$$

e a raiz de maior altura, isto é, a raiz mais alta de uma álgebra de Lie tem a forma:

$$\psi = \sum_{a=1}^r m_a^\psi \alpha_i \quad (\text{B.10})$$

onde α_i são as raízes simples desta álgebra e $m_a^\psi > 0$. Definimos agora o chamado número de Coxeter da álgebra de Lie, que consiste na altura da raiz mais uma unidade.

$$h = 1 + \sum_{a=1}^r m_a^\psi \quad (\text{B.11})$$

B.1 Matrizes de Cartan e Diagramas de Dynkin

O desenvolvimento da teoria das álgebras simples foi descrita pelo trabalho de Hawkins, englobando os trabalhos de W. Killing e a contribuição importante de E. Cartan. O teorema final de classificação das álgebras foi feita por W. Killing em meados de 1888-1890, no qual apresentou algumas falhas mais tarde corrigidas por E. Cartan em sua tese (1894). Por Cartan: *“No que diz respeito aos grupos contínuos e finitos, os princípios da teoria foram assentados por S. Lie e M. Engel. Em uma série de artigos importantes, Killing deu um grande avanço à teoria e, em particular, determinou todos os grupos simples com parâmetros complexos. Mas suas demonstrações continham diversas lacunas e passagens inexatas. Em minha Tese (1894) me propus a ordená-los com rigor. Mesmo assim obtive independentemente de Killing diversos resultados novos”* (37, 38).

Definimos uma matriz de Cartan por meio de um sistema de raízes simples e seus produtos escalares:

$$c_{ij} = \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} \quad (\text{B.12})$$

com $i, j = 1, \dots, \text{rank}$. É muito útil utilizar diagramas para codificar as informações contidas na matriz de Cartan. Estes são denominados diagramas de Dynkin e são definidos da seguinte maneira: O diagrama contém l vértices representando cada uma das raízes simples. Os vértices são ligados ou não por um, dois ou três segmentos (arestas) no seguintes casos.

$$1. \text{ Se } \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 0$$

não existe ligação;

$$2. \text{ Se } \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = -1$$

α_i e α_j são ligadas por um segmento:

3. Se $\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$ ou $\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$

é -2 (respectivamente -3) então os vértices são ligados por dois e três segmentos respectivamente.

Como o diagrama contém a informação da matriz de Cartan e se ele for construído de acordo com as regras, então $c_{ij} = c_{ji} = 0$ quando as raízes α_i e α_j não são ligadas e $c_{ij} = c_{ji} = -1$ se forem ligadas por um segmento apenas. Entretanto, quando a ligação é feita por dois ou três segmentos não é possível saber qual das entradas c_{ij} ou c_{ji} da matriz de Cartan é -2 ou -3; então a ligação é orientada na direção da raiz α_j que é menor se:

$$c_{ji} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -2, -3 \quad (\text{B.13})$$

e então $c_{ij} = -1$. E tem-se:

O número de ligações entre duas raízes simples e o ângulo que elas formam entre si (θ) é fornecido pela relação:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 4 \cos^2 \theta \quad (\text{B.14})$$

A partir disso temos:

sem ligação	$\theta = 90^\circ$
uma ligação	$\theta = 120^\circ$
duas ligações	$\theta = 135^\circ$
três ligações	$\theta = 150^\circ$

Exemplo:

A matriz de Cartan de $\mathfrak{sl}(n)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

define o diagrama:

B.2 Representação das Álgebras de Lie

Um conjunto de operadores T_i atuando em um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é considerado uma representação de uma álgebra de Lie nesse espaço se for possível definir uma operação entre quaisquer operadores que possa reproduzir as relações de comutação da álgebra considerada. Podemos escolher a base do espaço de representação como sendo autoestados dos geradores da subálgebra de Cartan:

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle \quad (\text{B.15})$$

os vetores $\mu_1, \dots, \mu_r$ formam um espaço r -vetorial e são chamados **pesos da álgebra**. Dizemos que toda raiz é um peso, entretanto o oposto não é verdadeiro. Dentre os pesos da álgebra existem os chamados **pesos fundamentais**, λ , que satisfazem:

$$\frac{\lambda_j \cdot 2\alpha_i}{\alpha_i^2} = \delta_{ij} \quad (\text{B.16})$$

onde α_i são raízes simples e $i, j = 1, \dots, r$ na base de Chevalley,

$$H_\alpha|\lambda\rangle = 2\frac{\lambda \cdot \alpha}{\alpha^2}|\lambda\rangle = n|\lambda\rangle \quad (\text{B.17})$$

onde n é um inteiro. Os operadores step atuando em um estado geram outro estado onde os pesos diferem por somas de raízes. O **estado de peso máximo** possui a seguinte propriedade:

$$E_\alpha|\lambda\rangle = 0 \quad \alpha > 0 \quad (\text{B.18})$$

ou seja, todos os estados podem ser obtidos a partir desse estado pela atuação de steps com raízes negativas.

Uma representação dita **fundamental** é aquela em que o peso máximo também é um peso fundamental e a **representação adjunta** é aquele em que o peso máximo é maior raiz positiva.

Apêndice C – Álgebras de Kac-Moody Afim

As relações de comutação de uma álgebra de Kac-Moody podem ser escritas por:

$$[T_a^m, T_b^n] = f_{ab}^c T_c^{m+n} + m\delta_{m+n,0} \text{Tr}(T_a T_b) C \quad (\text{C.1})$$

onde T são os geradores da álgebra, f são os chamados de constantes de estrutura e C é chamado termo central da álgebra, que tem a propriedade de comutar com todos os geradores da álgebra, $[C, T_a^m] = 0$. No caso em que $C = 0$, tem-se o que chamamos de álgebra de **loop**, ou de laços, na qual a álgebra infinita é composta por infinitas cópias da álgebra semisimples associada (40).

O conceito de gradação é de grande importância na teoria das álgebras de Kac-Moody quando estas são aplicadas a sistemas integráveis (41). O espaço vetorial $\hat{\mathcal{G}}$ é dito ter uma $\mathcal{G}$ -gradação se $\hat{\mathcal{G}}$ é uma soma direta de subespaços de $\hat{\mathcal{G}}_n$, ou seja:

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_n \hat{\mathcal{G}}_n \quad [\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_m] \subset \mathcal{G}_{n+m} \quad (\text{C.2})$$

Na gradação principal podemos definir os geradores da álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{sl}(N)$ do seguinte modo:

$$F_{Nn}^l = H_1^n + \omega H_2^n + \dots + \omega^{N-2} H_{N-1}^n + \omega^{N-1} H_0^n \quad (\text{C.3})$$

onde, $l = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $H_0^n = -H_1^n - H_2^n - \dots - H_{N-1}^n + \delta_{n,0} C$ e $\omega \equiv \exp(2\pi i n/N)$. As

relações de comutação na base de Chevalley são:

$$[H_a^m, H_b^n] = C \frac{2}{\alpha^2} K_{ab} m \delta_{m+n,0} \quad (C.4)$$

$$[H_a^m, E_{\pm\alpha}^{m+n}] = \pm K_{\alpha a} E_{\pm\alpha}^{m+n} \quad (C.5)$$

$$[E_\alpha^m, E_{-\alpha}^n] = l_a^\alpha H_a^{m+n} + C \frac{2}{\alpha^2} K_{ab} m \delta_{m+n,0} \quad (C.6)$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{m+n} \quad \text{se } \alpha + \beta \text{ é uma raiz de } \mathcal{G}. \quad (C.7)$$

$$[D, H_b^m] = m H_b^m \quad (C.8)$$

$$[D, E_\alpha^m] = m E_\alpha^m \quad (C.9)$$

$$(C.10)$$

onde $K_{\alpha a} = 2\alpha \cdot \alpha_a / \alpha_a^2 = n_b^\alpha K_{ab}$ é a matriz de Cartan de uma álgebra de Lie finita $\mathcal{G}$ associada a $\hat{\mathcal{G}}$, com n_b^α e l_a^α sendo inteiros nas expansões $\alpha = n_a^\alpha \alpha_a$ e $\alpha/\alpha^2 = l_a^\alpha \alpha_a / \alpha^2$ e $\varepsilon(\alpha, \beta)$ sendo constantes de estruturas. A álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ possui uma forma bilinear simétrica não-degenerada é normalizada pelas seguintes propriedades:

$$Tr(H_a^m H_b^n) = \eta_{ab} \delta_{m+n,0} \quad (C.11)$$

$$Tr(E_\alpha^m E_\beta^n) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0} \delta_{m+n,0'} \quad (C.12)$$

$$Tr(CD) = 1 \quad (C.13)$$

O operador de gradação Q_s mede o índice dos geradores e satisfaz a relação:

$$[Q_s, \hat{\mathcal{G}}_n] = n \hat{\mathcal{G}}_n; \quad n \in \mathbb{Z} \quad (C.14)$$

sendo definido por:

$$Q_s = H_s + N_s D + \sigma C, \quad H_s = \sum_{a=1}^r s_a \lambda_a^\vee \cdot H^0, \quad (C.15)$$

no qual $(s_0, s_1, \dots, s_r)$ é um vetor inteiro não-negativo e $\lambda_a^a \equiv 2\lambda_a / \alpha^2$, com λ_a e α_a sendo os comprimentos fundamentais e raízes de $\mathcal{G}$ respectivamente. Ainda,

$$N_s = \sum_{i=0}^r s_i m_i^\Psi, \quad \Psi = \sum_{a=1}^r m_a^\Psi \alpha_a, \quad m_0^\Psi \equiv 1 \quad (C.16)$$

sendo Ψ a maior raiz da álgebra. O valor de σ é parametrizado como: $\sigma = -Tr(H_s^2)/(2N_s)$.

O operador de gradação possui as seguintes relações de comutação:

$$[Q_s, H_a^n] = nN_s H_a^n \quad (C.17)$$

$$[Q_s, E_\alpha^n] = \left(\sum_{a=1}^r m_a s_a + nN_s \right) E_\alpha^n \quad (C.18)$$

As raízes simples positivas e negativas dos operadores step de $\hat{\mathcal{G}}_n$ são:

$$e_a \equiv E_{\alpha_a}^0 \quad (C.19)$$

$$e_0 \equiv E_{-\psi}^1 \quad (C.20)$$

$$f_a \equiv E_{-\alpha_a}^0 \quad (C.21)$$

$$f_0 \equiv E_{\psi}^{-1} \quad (C.22)$$

e os geradores da subálgebra de Cartan,

$$h_a \equiv H_a^0 \quad (C.23)$$

$$h_0 \equiv - \sum_{a=1}^r l_a^\psi H_a^0 + \frac{2}{\psi^2} C \quad (C.24)$$

$$(C.25)$$

e D . Os geradores satisfazem:

$$[Q_s, h_i] = [Q_s, D] = 0 \quad (C.26)$$

$$[Q_s, e_i] = s_i e_i \quad (C.27)$$

$$[Q_s, f_i] = -s_i f_i \quad (C.28)$$

$$(C.29)$$

$i = 0, 1, \dots, r$

As álgebras de Kac-Moody possuem uma classe de representação denominada representação de peso máximo (40). São definidas por meio de estados de peso máximo, que são aniquilados pelos geradores de gaus positivos.

$$\hat{\mathcal{G}}_n |\lambda_s\rangle = 0 \quad (C.30)$$

Estes estados também são autoestados de todos os geradores da subálgebra $\hat{\mathcal{G}}_0$ com:

$$h_i|\lambda_s\rangle = s_i|\lambda_s\rangle \quad (C.31)$$

$$f_i|\lambda_s\rangle = 0 \quad \text{para qualquer } i \text{ tal que } s_i = 0 \quad (C.32)$$

$$Q_s|\lambda_s\rangle = \eta_s|\lambda_s\rangle \quad (C.33)$$

$$C|\lambda_s\rangle = \frac{\Psi^2}{2} \left(\sum_{i=0}^r l_i^\Psi s_i \right) |\lambda_s\rangle \quad (C.34)$$

onde l_i^Ψ é dado por:

$$\frac{\Psi}{\Psi^2} = \sum_{a=1}^r l_a^\Psi \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2}; \quad l_0^\Psi = 1 \quad (C.35)$$

Os estados de peso máximo, $|\lambda_s\rangle$, também podem ser descritos por:

$$|\lambda_s\rangle \equiv \bigotimes_{i=0}^r |\hat{\lambda}_i\rangle^{\otimes s_i} \quad (C.36)$$

onde $|\hat{\lambda}_i\rangle$ são os estados de peso máximo das representações fundamentais de $\hat{\mathcal{G}}$ e $\hat{\lambda}_i$ os pesos fundamentais de $\mathcal{G}$, onde:

$$\hat{\lambda}_0 = (0, \Psi^2/2, 0) \quad (C.37)$$

$$\hat{\lambda}_a = (\lambda_a, l_a^\Psi \Psi^2/2, 0) \quad (C.38)$$

As relações (C.31)-(C.34) agora tornam-se:

$$H_a^0|\hat{\lambda}_0\rangle = 0 \quad (C.39)$$

$$C|\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{\Psi^2}{2}|\hat{\lambda}_0\rangle \quad (C.40)$$

$$H_b^0|\hat{\lambda}_a\rangle = \delta_{a,b}|\hat{\lambda}_a\rangle \quad (C.41)$$

$$C|\hat{\lambda}_a\rangle = \frac{\Psi^2}{2} l_a^\Psi |\hat{\lambda}_a\rangle \quad (C.42)$$

$$D|\hat{\lambda}_i\rangle = 0 \quad (C.43)$$

C.1 A álgebra de Kac-Moody $sl(2)$

A álgebra de Kac-Moody $Sl(2)$ tem apenas uma raiz simples e sua matriz de Cartan é $K = 2$. Neste caso temos $K_{ab} = K_{\psi b} = 2$, $l_a^\Psi = 1$ e normalizando a raiz, $\Psi^2 = 2$. A base é dada por:

$$E_{2m+1} = E_+^m + E_-^{m+1} \quad (\text{C.44})$$

$$F_{2m+1} = E_+^m - E_-^{m+1} \quad (\text{C.45})$$

$$F_{2m} = H^m - \frac{1}{2}C\delta_{m,0} \quad (\text{C.46})$$

$$(\text{C.47})$$

Adicionando o termo central C e o operador de gradação $Q = \frac{1}{2}H^\circ + 2D$. As relações de comutação são:

$$[E_{2m+1}, E_{2n+1}] = C(2m+1)\delta_{m+n+1,0} \quad (\text{C.48})$$

$$[E_{2m+1}, F_{2n+1}] = -2F_{2(m+n+1)} \quad (\text{C.49})$$

$$[E_{2m+1}, F_{2n}] = -2F_{2(m+n+1)} \quad (\text{C.50})$$

$$[E_{2m+1}, F_n] = -2F_{n+2m+1} \quad (\text{C.51})$$

$$[E_{2m+1}, F_{2n+1}] = -C(2m+1)\delta_{m+n+1,0} \quad (\text{C.52})$$

$$[F_{2m+1}, F_{2n}] = -2E_{2(m+n)+1} \quad (\text{C.53})$$

$$[F_{2m}, F_{2n}] = C2m\delta_{m+n,0} \quad (\text{C.54})$$

$$[Q, E_{2m+1}] = (2m+1)E_{2m+1} \quad (\text{C.55})$$

$$[Q, F_{2m+1}] = (2m+1)F_{2m+1} \quad (\text{C.56})$$

$$[Q, F_{2m}] = 2mF_{2m} \quad (\text{C.57})$$

$$(\text{C.58})$$

C.2 A álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{sl}(3)$

A matriz de Cartan para $\text{Sl}(3)$ é:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Neste caso $l_a^\Psi = 1$ e $a = 1, 2$. As raízes simples são α_1 e α_2 e a raiz mais alta é $\psi = \alpha_1 + \alpha_2$ normalizada por $\psi^2 = 2$. Também $K_{\psi_1} = K_{\psi_2} = 1$. As constantes de estrutura são tais que $\varepsilon(\alpha, \beta) = -\varepsilon(-\alpha, -\beta)$, $\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, $\varepsilon(-\alpha, \psi) = 1$ e $\varepsilon(-\alpha_2, \psi) = -1$. Os geradores de

Cartan são :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e o vetores da base do espaço de raízes que correspondem às raízes positivas são:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para as raízes negativas temos que: $E_{-\alpha} = (E_{+\alpha})^T$ A base é formada pelas seguintes relações:

$$E_{3n+1} = E_1^n + E_2^n + E_{-3}^{n+1} \quad (C.59)$$

$$E_{3n-1} = E_{-1}^n + E_{-2}^n + E_3^{n-1} \quad (C.60)$$

$$F_{3n+1}^1 = E_1^n + \gamma E_2^n + \gamma^2 E_{-3}^{n+1} \quad (C.61)$$

$$F_{3n}^1 = H_1^n + \gamma H_2^n + \gamma^2 H_0^n \quad (C.62)$$

$$F_{3n-1}^1 = E_{-1}^n + \gamma E_{-2}^n + \gamma^2 E_3^{n-1} \quad (C.63)$$

$$F_{3n+1}^2 = E_1^n + \gamma^2 E_2^n + \gamma E_{-3}^{n+1} \quad (C.64)$$

$$F_{3n}^2 = H_1^n + \gamma^2 H_2^n + \gamma H_0^n \quad (C.65)$$

$$F_{3n-1}^2 = E_{-1}^n + \gamma^2 E_{-2}^n + \gamma E_3^{n-1} \quad (C.66)$$

onde $H_0^n = -H_1^n - H_2^n + \delta_{n,0}C$ e $\gamma^3 = 1$, pois $\gamma = e^{2\pi i n/3}$ para $n = 1, 2, 3$. As relações de comutação entre os elementos da base são:

$$[E_{3m+1}, E_{3n+1}] = 0 \quad (\text{C.67})$$

$$[E_{3m+1}, E_{3n-1}] = (3m+1)c\delta_{m+n,0} \quad (\text{C.68})$$

$$[E_{3m-1}, F_{3n+1}^1] = -F_{3(m+n)}^1 \quad (\text{C.69})$$

$$[E_{3m+1}, F_{3n-1}^1] = F_{3(m+n)}^1 \quad (\text{C.70})$$

$$[E_{3m-1}, F_{3n+1}^2] = -F_{3(m+n)}^2 \quad (\text{C.71})$$

$$[E_{3m+1}, E_{3n}^2] = -3F_{3(m+n)+1}^2 \quad (\text{C.72})$$

$$[E_{3m-1}, F_{3n}^1] = -3F_{3(m+n)-1}^1 \quad (\text{C.73})$$

$$[E_{3m-1}, F_{3n}^2] = -3F_{3(m+n)-1}^2 \quad (\text{C.74})$$

$$[E_{3m+1}, F_{3n}^1] = -3F_{3(m+n)+1}^1 \quad (\text{C.75})$$

$$[E_{3m+1}, F_{3n+1}^2] = -F_{3(m+n)+2}^2 \quad (\text{C.76})$$

$$[E_{3m+1}, F_{3n+1}^1] = -F_{3(m+n)+2}^1 \quad (\text{C.77})$$

$$[F_{3m+1}^1, F_{3n}^1] = -3F_{3(m+n)+1}^2 \quad (\text{C.78})$$

$$[F_{3m-1}^1, F_{3n}^1] = -3F_{3(m+n)-1}^2 \quad (\text{C.79})$$

$$[F_{3m+1}^1, F_{3n}^2] = -3E_{3(m+n)+1} \quad (\text{C.80})$$

$$[F_{3m-1}^1, F_{3n}^2] = -3E_{3(m+n)-1} \quad (\text{C.81})$$

$$[F_{3m-1}^1, F_{3n+1}^2] = 3mc\delta_{m+n,0} \quad (\text{C.82})$$

$$[F_{3m+1}^1, F_{3n-1}^2] = mc\delta_{m+n,0} \quad (\text{C.83})$$

$$[F_{3m+1}^2, F_{3n}^2] = -3F_{3(m+n)+1}^1 \quad (\text{C.84})$$

$$[F_{3m-1}^2, F_{3n}^2] = -3F_{3(m+n)-1}^1 \quad (\text{C.85})$$

$$[F_{3m+1}^2, F_{3n}^1] = -3E_{3(m+n)+1} \quad (\text{C.86})$$

$$[F_{3m}^1, F_{3n+1}^2] = 3E_{3(m+n)+1} \quad (\text{C.87})$$

$$[F_{3m}^1, F_{3n-1}^2] = 3E_{3(m+n)-1} \quad (\text{C.88})$$

$$(\text{C.89})$$

Apêndice D – Álgebras e Operadores de Vértice

As álgebras de vertex podem ser vistas com mais detalhes em (42, 43). Consideremos aqui a construção de Fubini-Veneziano para os operadores de vértice, que foram propostos originalmente no contexto das teorias de cordas.

Os modos dessa álgebra estão contidos em uma subálgebra de Heisenberg homogênea, i.e., corresponde aos geradores H_i^m e H_i^{-m} da subálgebra de Cartan. Os osciladores hamônicos definidos na base de Weyl-Cartan possuem a seguinte relação:

$$[H_m^i, H_n^j] = \delta^{ij} m \delta_{m+n,0} \quad (\text{D.1})$$

e são independentes. A coleção de osciladores possui grande importância na teoria de cordas e sua função geratriz é denominada campo de momentum Fubini-Veneziano sendo definida por:

$$H^i(z) = P^i(z) \equiv p^i + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^i z^{-n} + \alpha_{-n}^i z^n), \quad (\text{D.2})$$

onde

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = \delta^{ij} m \delta_{m+n,0} \quad (\text{D.3})$$

Também podemos definir a coordenada do campo Fubini-Veneziano, $Q^i(z)$, obtida por meio de $P^i(z)$,

$$P^i(z) = iz \frac{dQ^i}{dz} \quad (\text{D.4})$$

o que fornece:

$$Q^i(z) = q^i - ip^i \ln z + i \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i z^n / n, \quad (\text{D.5})$$

onde q é uma constante de integração e é o conjugado canônico de p^i , isto é, $[q^i, p^j] = i\delta^{ij}$. Os espaços onde os estados vivem é o espaço de Fock, o qual é construído pelos estados que são simultaneamente o vácuo dos osciladores, os quais também carregam momentum nulo:

$$\alpha_n^i |0\rangle = 0, \quad n > 0, \quad p^i |0\rangle = 0. \quad (\text{D.6})$$

O operador de vértice é definido como (44):

$$V(z) \equiv: e^{\mathcal{Q}(z)} := e^{\mathcal{Q}_{<}(z)} e^{\mathcal{Q}_{>}(z)}, \quad (\text{D.7})$$

onde $::$ significa ordenamento normal dos osciladores da álgebra, ou seja, E_{Nn+1} com $n \geq 0$ são os operadores de aniquilação que ocupam lugar à frente dos operadores de criação no ordenamento, ainda temos:

$$\mathcal{Q}(z) \equiv \mathcal{Q}_{<}(z) + \mathcal{Q}_{>}(z) \quad (\text{D.8})$$

e

$$\mathcal{Q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-N}}{N} E_N - \frac{z^N}{N} E_{-N} \right) \quad (\text{D.9})$$

O ordenamento normal evita divergências no produto dos operadores de Fubini-Veneziano:

$$P_i(z) \mathcal{Q}_j(w) \equiv: P_i(z) \mathcal{Q}_j(w) : -i\delta_{ij} \frac{z}{z-w}, \quad |z| > |w| \quad (\text{D.10})$$

$$P_i(z) P_j(w) \equiv: P_i(z) P_j(w) : +i\delta_{ij} \frac{wz}{z-w}, \quad |z| < |w| \quad (\text{D.11})$$

Os operadores F'_s são representados por:

$$F_n = \oint \frac{dz}{2\pi iz} z^n V(z) \quad (\text{D.12})$$

D.1 Propriedades dos operadores de vértice

Uma propriedade importante dos operadores de vértice é que são autoestados dos osciladores. Com isso, as relações de comutação para as álgebras de Kac-Moody são: Para $\mathfrak{sl}(2)$,

$$[E_{2n+1}, V_i(z)] = -2z^{(2n+1)} V_i(z) \quad (\text{D.13})$$

$\mathfrak{sl}(3)$:

$$[E_{3n+1}, V_i(z)] = -\sqrt{3} z^{(3n+1)} V_i(z) \quad (\text{D.14})$$

Generalização, $\mathfrak{sl}(N)$:

$$[E_n, V_i(z)] = -\kappa z^n V_i(z) \quad (\text{D.15})$$

para o qual $\kappa_N = -2 + \omega + \omega^{N-1}$ e $\omega = e^{(2\pi i/N)}$.

O operador de vértice é nilpotente, $V(z)^2 = 0$, e possui a seguinte expansão em termos de produto:

$$V(z_1) V(z_2) \equiv: V(z_1) V(z_2) : \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 \quad (\text{D.16})$$

O produto de três operadores é:

$$V(z_1)V(z_2)V(z_3) =: V(z_1)V(z_2)V(z_3) : \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 + z_3} \right)^2 \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3} \right)^2 \quad (\text{D.17})$$

De forma geral,

$$\prod_{i=1}^n V(z_i) =: \prod_{i=1}^n V(z_i) : \prod_{i < j=1}^n \left(\frac{z_i - z_j}{z_i + z_j} \right) \quad (\text{D.18})$$

Ainda temos as propriedades para as conjugações com os vértices:

$$\langle \lambda_0 | \prod_{i=1}^n V(z_i) : | \lambda_0 \rangle = 1 \quad (\text{D.19})$$

$$\langle \lambda_1 | \prod_{i=1}^n V(z_i) : | \lambda_1 \rangle = (-1)^n \quad (\text{D.20})$$