UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS

ESTUDO TEÓRICO DAS PROPRIEDADES LINEAR E NÃO-LINEAR DE
FIBRAS COAXIAIS

HUMBERTO FILOMENO DA SILVA FILHO

Tese apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências "Física Básica"

Orientador: Prof. Dr. Frederico Dias Nunes

04

São Carlos – São Paulo
1999

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA
INFORMAÇÃO

Da Silva, Humberto Filomeno
Estudo teórico das propriedades linear e não-linear de fibras
Coaxiais /Humberto Filomeno da Silva –São Carlos, 1999.
222 p.

Tese (Doutorado)–Instituto de Física de São Carlos, 1999.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Dias Nunes

1. Ótica. 2. Fibras Coaxiais.
I. Título.

**UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO**

Instituto de Física de São Carlos
E-mail: wladerez@ifsc.usp.br

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
CEP 13560-250 - São Carlos - SP
Brasil

Fone (016) 273-9333
Fax (016) 272-2218

**MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE
HUMBERTO FILOMENO DA SILVA FILHO APRESENTADA AO INSTITUTO DE
FÍSICA DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 12 DE
AGOSTO DE 1999.**

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Frederico Dias Nunes/UFPe

Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano/IFSC-USP

Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato/IFSC-USP

Dr. Sérgio Celaschi/CPqD

Dr. Claudio Mazzali/CORNING BRASIL

Aos meus pais Josefa e Humberto

e irmãos :

Márcio, Patricia, Sandra e Valéria.

Agradecimentos

- Ao Prof. Frederico Dias Nunes pela orientação deste trabalho.
- A amiga Cláudia Adriana sem a qual este trabalho demoraria muito mais tempo do que efetivamente levou. Foi ela quem teve o desafio de iniciar a primeira parte deste trabalho (a dedução das equações transcendentais para a constante de propagação), em sua tese de mestrado.
- Aos amigos de república: Artur, Guilherme, Daniel, Flávio e Joatan pela convivência agradável, na grande maioria das vezes.
- Aos amigos com quem dividi sala: Ricardo, Nório, Viviane e Andrea pelos bons momentos que partilhamos.
- Aos demais amigos e colegas do grupo: Vander, Wânius, Aparecida, Marcel, Andre, Kleber, Serginho, Gustavo, Lino e Fernando pela troca de informações sobre os mais variados assuntos. E aos amigos mais recentes Newton, Carlos Alberto, Leandro e Marcelo pelas discussões e sugestões sobre o método numérico que desenvolvi.
- Aos professores do Grupo de Ótica: Sergio Carlos Zílio, Vanderlei Salvador Bagnato e Luís Gustavo Marcassa pelo apoio no desenvolvimento do trabalho.
- Aos funcionários do instituto, as bibliotecárias e em especial a Isabel (secretária do grupo de ótica) e Wladerez (do setor de pró-graduação), pela presteza na resolução dos problemas que surgiram durante esses anos de convivência.

ÍNDICE GERAL

Lista de figuras	iv
Lista de tabelas	xii
Resumo	xiv
<i>Abstract</i>	xv
 Capítulo 1 – Introdução Geral.	 1
1.1 – Um pouco de história	2
1.2 – Um pouco de Brasil	5
1.3 – Fibras coaxiais e filtros espectrais	5
1.4 – Objetivos deste trabalho	8
 Capítulo 2 – As equações transcendentais para as estruturas coaxiais.	
2.0 – Introdução	11
2.1 – Fibras óticas	12
2.1.1 - Teoria de raios para o guia de ondas planar	14
2.2 - Descrição da propagação em termos das equações de Maxwell	18
2.3 - Solução das equações de Maxwell em meios com simetria cilíndrica	22
2.4 - Determinação das equações transcendentais para as fibras coaxiais	26
 Capítulo 3 – Resultados para as estruturas W1 e W2	
3.0 - Introdução	34
3.1 - Resultados obtidos para a estrutura W1	35
3.1.1 - O fator de confinamento dos modos	39
3.1.2 - Estudo de N_e como função dos índices de refração	43
3.1.2.1 - N_e como função de n_4	43
3.1.2.2 - N_e como função de n_2	46
3.2 - Resultados obtidos para a estrutura W2	47
3.2.1 - Discussão de N_e como função de V_3	48
3.2.2 - Discussão dos fatores de confinamento	52
3.2.3 - Estudo de N_e como função dos índices de refração	53
3.2.3.1 - N_e em função do índice de refração n_4	54
3.2.3.2 - N_e em função do índice de refração n_2	55
3.3 – Síntese dos principais resultados obtidos	56

Capítulo 4 – Resultados obtidos para as estruturas coaxiais M1 e M2.

4.0 – Introdução	57
4.1 - Resultados obtidos para a estrutura M1	58
4.1.1 - Variação de N_e com função dos índices de refração	61
4.1.1.1 - Variação de N_e como função de n_1	61
4.1.1.2 - Variação de N_e como função de n_2	63
4.2 - Resultados obtidos para a estrutura M2	65
4.2.1 - Resultados obtidos para N_e como função de V_4	66
4.2.2 - Estudo dos fatores de confinamento	68
4.2.3 - Variação de N_e como função dos índices de refração	69
4.2.3.1 - Variação de N_e como função do índice de refração n_1	70
4.2.3.2 - Variação de N_e como função do índice de refração n_4	71
4.3 - Síntese dos principais resultados obtidos no capítulo	72

Capítulo 5 – Estudo do corte das estruturas coaxiais.

5.0 – Introdução	73
5.1 - Determinação das equações transcendentais para a frequência de corte	75
5.2 - Considerações sobre o modo fundamental	79
5.2.1 - Casos limites das estruturas W2 e M2	81
5.3 - Discussões sobre as frequência de corte das estruturas coaxiais	83
5.3.1 - Estudo da frequência de corte para a estrutura W1	84
5.3.2 - Estudo da frequência de corte para a estrutura M1	89
5.3.3 - O estudo da frequência de corte da estrutura W2	92
5.3.3.1 - Frequência de corte para valores maiores de A.	96
5.3.4 - O corte da estrutura M2	99
5.3.4.1 - O estudo das curvas de frequência de corte	100
5.4 - Síntese dos principais resultados obtidos no capítulo	105

Capítulo 6 – Compensação de dispersão.

6.0 – Introdução	106
6.1 - Descrição teórica para a dependência do índice de refração com o comprimento de onda	108
6.2 - Resultados obtidos para a estrutura W1	111
6.2.1 - Resultados obtidos para a fibra coaxial W1 com $\Delta_4=0$	113
6.2.2 - D como função de c para a estrutura W1 com $\Delta_4=0$	118
6.2.3 - Cálculo da perda de energia para uma fibra curvada	120

6.3 - Variação de D como função de Δ_4	125
6.4 - Síntese dos resultados obtidos	127
Capítulo 7 – O método da colocação para sistemas de equações	
7.0 – Introdução	128
7.1 - Descrição do método da colocação para uma equação diferencial	129
7.2 - Determinação dos pontos x_j	131
7.3 - Desenvolvimento de uma extensão do método da colocação ortogonal para sistemas de equações diferenciais parciais	138
7.4 - Exemplo de aplicação do método	140
Capítulo 8 – Estudo da propagação de pulsos em <i>taper</i>	
8.0 – Introdução	151
8.1 - Definição dos modos locais	152
8.2 - O critério de adiabaticidade	156
8.2.1 - O critério de escala de comprimento	157
8.3 - Resultados referentes a adiabaticidade das fibras coaxiais	160
8.4 - Modelo para descrever a propagação de um pulso temporal em um <i>taper</i> adiabático	165
8.5 - Resultados obtidos para o modelo de propagação de um pulso em um <i>taper</i>	171
Conclusões Gerais	178
Apêndice A – Dedução das equações transcendentais	AI
Apêndice B - Rotinas para o cálculo dos pontos de colocação	BI
Referências	I

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Fig. 1.1 - Ilustração de uma fibra coaxial, com a indicação das diferentes regiões que à constituem.

Fig. 1.2 - Perfil da fibra coaxial analisada por Boucoevalas ^[18].

CAPÍTULO 2

Fig. 2.1 - Seção transversal da fibra núcleo-casca.

Fig. 2.2 - Configuração de um guia de ondas planar.

Fig. 2.3 - Guia de ondas planar com sua variação de índice de refração.

Fig. 2.4 - Representação esquemática de uma fibra coaxial com suas quatro camadas.

Fig. 2.5 - Perfil de índices de refração das quatro fibras analisadas neste trabalho.

CAPÍTULO 3

Fig. 3.1 - Variação de N_e como função de V_1 . (a) $R=0.20$; (b) $R=0.40$.

Fig. 3.2 - Distribuição normalizada de campo elétrico para os modos do tipo 1 em função do raio da fibra. (a) $V_1=5.0$; (b) $V_1=9.0$.

Fig. 3.3 - Distribuição normalizada de campo elétrico para modos do tipo 2 em função do raio da fibra. (a) $V_1=5.05$; (b) $V_1=9.0$.

Fig. 3.4 - Variação de N_e como função de V_1 . (a) $A=0.05$; (b) $A=0.15$.

Fig. 3.5 - Evolução dos fatores de confinamento em função de V_1 para (a) Modo HE_{11} ; (b) Modo HE_{12} .

Fig. 3.6 - Variação do fator de confinamento em função de R (a) Para o modo HE_{11} ; (b) Para o modo HE_{12} .

Fig. 3.7 - Variação do índice de refração efetivo como função de n_4 em (a) $V_1=5.0$; (b) $V_1=9.0$.

Fig. 3.8 - Variação de N_e em função de n_2 com (a) $V_1=5.0$; (b) $V_1=9.0$.

Fig. 3.9 - Estruturas limites da W2 (a) $R=0$, chamada de estrutura *Aclad* (a) $R=1-A$, chamada de estrutura *Wclad*.

Fig. 3.10 - Variação de N_e em função de V_3 para a estrutura W2. (a) $A=0.01$; (b) $A=0.05$.

Fig. 3.11 - Variação de N_e como função de V_3 . (a) Para $A=0.05$ e 0.10 ; (b) Para $A=0.20$ e $A=0.30$.

Fig. 3.12 - Variação de N_e como função de V_3 . (a) Modo HE_{11} ; (b) Modo HE_{12} .

Fig. 3.13 - Evolução dos fatores de confinamento dos modos. (a) HE_{11} ; (b) HE_{12} .

Fig. 3.14 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_4 . (a) $V_3=10.0$; (b) $V_3=20.0$.

Fig. 3.15 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_2 .

(a) $V_3=10.0$; (b) $V_3=20.0$.

CAPÍTULO 4

Fig. 4.1 - Variação do índice de refração efetivo em função de V_2 . (a) $A=0.05$;

(b) $A=0.20$.

Fig. 4.2 - Variação dos fatores de confinamento para o modo fundamental

(a) $R=0.20$; (b) $R=0.40$. Nesta figura $F= f_1 + f_2 + f_3$.

Fig. 4.3 - Variação dos fatores de confinamento para o modo HE_{12} (a) $R=0.20$;

(b) $R=0.40$.

Fig. 4.4 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_1 para $R=0.40$;

(a) $V_2=5.0$ (b) $V_2=10.0$.

Fig. 4.5 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_2 para $A=0.20$

(a) $V_2=5.0$; (b) $V_2=10.0$.

Fig. 4.6 - Estruturas obtidas como limites da M2. (a) Diâmetro do núcleo nulo ($a=0$) ;

(b) $b=c$.

Fig. 4.7 - Variação do índice de refração efetivo em função de V_4 com A constante.

(a) Modos HE_{11} , HE_{12} , HE_{13} ; (b) Modos HE_{21} , HE_{22} e HE_{31} .

Fig. 4.8 - Variação do índice de refração efetivo em função de V_4 com R constante.

(a) Modos HE_{11} , H_{12} , HE_{13} ; (b) Modos HE_{21} , HE_{22} e HE_{31} .

Fig. 4.9 - Variação dos fatores de confinamento para o modo Fundamental (HE_{11}).

(a) $R=0.20$; (b) $R=0.40$.

Fig. 4.10 - Variação dos fatores de confinamento para o modo HE_{12} . (a) $R=0.20$;
(b) $R=0.40$.

Fig. 4.11 - Variação do índice de refração efetivo como função de n_1 . (a) $V_4=10.0$;
(b) $V_4=20.0$.

Fig. 4.12 - Variação do índice de refração efetivo como função de n_4 . (a) $V_4=10.0$;
(b) $V_4=20.0$.

CAPÍTULO 5

Fig. 5.1 - Desenho esquemático mostrando como é feito um taper a partir de uma fibra ótica.

Fig. 5.2 - (a) Estrutura coaxial estudada por Mahmaud *et al* ^[13].
(b) Estrutura coaxial estudada no livro de Adams ^[2].

Fig. 5.3 - Frequências de corte dos modos HE_{12} , HE_{13} e HE_{21} para a estrutura W1 em função de R para diferentes valores de q_1 e p_1 .

Fig. 5.4 - Limites da estrutura W1. (a) $R=0$ (linha contínua), $R=1-A$ (linha pontilhada) ; (b) $A=0$.

Fig. 5.5 - Variação dos fatores de confinamento em função de R para
(a) modo HE_{12} ; (b) modo HE_{13} .

Fig. 5.6 - Variação dos fatores de confinamento em função de R (a) para modo HE_{12} ; (b) modo HE_{13} .

Fig. 5.7 - Frequências de corte dos modos HE_{12} , HE_{13} e HE_{21} em função de R para diferentes valores de q_3 , p_3 e A na estrutura M1.

Fig. 5.8 - Variação dos fatores de confinamento em função de R para (a) modo HE_{12} ; (b) modo HE_{13} .

Fig. 5.9 - Curvas que delimitam as regiões onde $V_3=0$ e $V_3 \neq 0$.

Fig. 5.10 - Variação da frequência de corte em função de R para $A=0.01$
(a) $q_2=0.70$; (b) $p_2=0.50$.

Fig. 5.11 - Variação dos fatores de confinamento nas proximidades do corte do modo.
Nesta figura $A=0.01$, $q_2=0.70$ e $p_2=0.50$. (a) Modo fundamental;
(b) Modos HE_{12} e HE_{13} .

Fig. 5.12 - Variação da frequência de corte como função de R para $A=0.20$ e índices de refração citados no texto.

Fig. 5.13 - Variação dos fatores de confinamento nas proximidades do corte.
(a) Modo HE_{11} ; (b) Modo HE_{12} .

Fig. 5.14 - Variação da frequência de corte como função de R para $A=0.20$.
(a) $q_2=0.70$; (b) $p_2=0.50$.

Fig. 5.15 - Curvas de delimitação das regiões onde o modo fundamental tem $V_4=0$ e $V_4 \neq 0$.

Fig. 5.16 - Curvas de frequência de corte como função de R para $A=0.01$.
(a) $q_4=0.90$; (b) $p_4=0.30$.

Fig. 5.17 - Curvas de fatores de confinamento dos modos na proximidade do corte como função de R para $A=0.01$. (a) Modo fundamental ; (b) Modos HE_{12} e HE_{13} .

Fig. 5.18 - Curvas de frequência de corte como função de R com $A=0.20$.
(a) $q_4=0.90$; (b) $p_4=0.30$.

Fig. (5.19) Curvas de frequência de corte como função de R com A=0.20.

(a) $q_4=0.90$; (b) $p_4=0.30$.

CAPÍTULO 6

Fig. 6.1 - Fibra coaxial W1 onde $\Delta_i = \frac{n_i^2 - n_2^2}{2n_2^2}$, (i=1,3,4).

Fig. 6.2 - Variação do índice de refração efetivo em função do comprimento de onda.

As linhas pontilhadas representam os guias bastão e anel.

Fig. 6.3 - Derivadas de N_e para os modos HE_{11} e HE_{12} da Fig. (6.2).

Fig. 6.4 - Fatores do confinamento para os modos mostrados na Fig. (6.2).

Fig. 6.5 - Pares de valores (a,b), em micra, que produzem mínimo de D em $1.55 \mu\text{m}$, com $c=22.0 \mu\text{m}$, $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$.

Fig. 6.6 - (a) Variação de D como função do comprimento de onda para $\Delta_1=0.02$, $\Delta_2=0.003$, $c=22.0 \mu\text{m}$ com a e b estão em micra ; (b) variação de $-D$ em função de a e λ para os pontos indicados na Fig.(6.4).

Fig. 6.7 - Pares de valores (a,b), em micra, que produzem mínimo de D em $1.55 \mu\text{m}$ com $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$. Os valores de c estão indicados na figura.

Fig. 6.8 - Variação de D como função do comprimento de onda. Nesta figura a e b estão em micra.

Fig. 6.9 - *Bend loss* para a fibra W1 com $\Delta_4=0$ calculado nos pontos da Tab.(2) onde $\Delta_1=0.02$, $\Delta_3=0.003$ e $\lambda=1.55 \mu\text{m}$.

Fig. 6.10 - Variação dos fatores de confinamento da fibra W1 para o modo fundamental com $\Delta_4=0$. (a) $c=19.0 \mu\text{m}$; (b) $c=22.0 \mu\text{m}$; (c) $c=31.0 \mu\text{m}$.

Fig. 6.11 - Variação de D_{mim} e λ_{mim} como função de Δ_4 onde $a=1.02 \mu\text{m}$, $b=14.15 \mu\text{m}$, $c=22.0 \mu\text{m}$, $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$.

Fig. 6.12 - Variação de D_{mim} e λ_{mim} como função de Δ_4 onde $a=1.02 \mu\text{m}$, $b=1.02 \mu\text{m}$, $c=22.0 \mu\text{m}$, $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$.

CAPÍTULO 7

Fig. 7.1 - Evolução do estado inicial de U(escuro) e V(claro) em $z=0.5$ (curva vermelha).

Fig. 7.2 - Cálculo das diferenças de U,V em $z=0.5$. (a) Par de solitons claros onde $(V_N - V_{N'}) = \Delta_{N,N'}$; (b) Par de solitons escuros onde $(U_N - U_{N'}) = \Delta_{N,N'}$.

Fig. 7.3 - Variação do tempo de execução em função do número de pontos de colocação.

CAPÍTULO 8

Fig. 8.1 - Representação de um taper com sua aproximação por seções cilíndricas.

Fig. 8.2 - Representação de um *taper* suave e outro abrupto.

Fig. 8.3 - Definição do comprimento local z_b , do ângulo local Ω e da fibra local do *taper* (figura de baixo).

Fig. 8.4 - (1) *Taper* de 50 mm com $\omega=20 \mu\text{m}$ e $L+F=50 \text{ mm}$.
(2) *Taper* de 30 mm com $\omega=20 \mu\text{m}$ e $L+F=30 \text{ mm}$.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Fig. 1.1 - Ilustração de uma fibra coaxial, com a indicação das diferentes regiões que à constituem.

Fig. 1.2 - Perfil da fibra coaxial analisada por Boucoevalas ^[18].

CAPÍTULO 2

Fig. 2.1 - Seção transversal da fibra núcleo-casca.

Fig. 2.2 - Configuração de um guia de ondas planar.

Fig. 2.3 - Guia de ondas planar com sua variação de índice de refração.

Fig. 2.4 - Representação esquemática de uma fibra coaxial com suas quatro camadas.

Fig. 2.5 - Perfil de índices de refração das quatro fibras analisadas neste trabalho.

CAPÍTULO 3

Fig. 3.1 - Variação de N_e como função de V_1 . (a) $R=0.20$; (b) $R=0.40$.

Fig. 3.2 - Distribuição normalizada de campo elétrico para os modos do tipo 1 em função do raio da fibra. (a) $V_1=5.0$; (b) $V_1=9.0$.

Fig. 8.5 - Variação de $\frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ como função de z ao longo do *taper* feito a partir das fibras da Tab. (8.1) em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$.

Fig. 8.6 - Variação do índice de refração efetivo dos modos HE_{11} e HE_{12} ao longo do taper 1 na Fig. (8.4) com os parâmetros da Tab. (1).

Fig.8.7 - Variação de $\frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ como função da posição ao longo do *taper* para vários valores do raio do núcleo. As curvas escuras são válidas para um taper de 30.0 mm enquanto que a vermelha para um de 50.0 mm.

Fig. 8.8 - Variação de (a) $\frac{\beta_1(z)}{\beta_1(0)} - 1$; (b) $\frac{\beta_2(z)}{\beta_2(0)}$; (c) $\frac{F_{11}(z)}{F_{11}(0)}$ para $\lambda=1.55\mu\text{m}$ onde os parâmetros do *taper* foram fornecidos no texto.

Fig. 8.9 – Evolução da largura do pulso na metade do máximo ao longo da fibra com e sem estrangulamento para $T_0=0.1 \text{ ps}$.

Fig. 8.10 – Evolução da largura do pulso na metade do máximo de intensidade nas mesmas condições da Fig. (8.9) para um intervalo maior de ξ .

CAPÍTULO 6

Tabela 6.1 - Parâmetros para o índice de refração n_2 utilizados na Eq.(6.1).

Tabela 6.2 - Valores dos parâmetros da fibra W1 com $\Delta_4=0$ que fornecem mínimo de D em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$.

Tabela 6.3 - Parâmetros das fibras compensadoras.

CAPÍTULO 8

Tabela 8.1 - Parâmetros utilizados para construir a Fig. (8.5).

RESUMO

Este trabalho faz um estudo sistemático de fibras óticas coaxiais de quatro camadas de índices de refração no regime linear e não linear. Para o estudo no regime linear deduzimos as equações transcendentais para a constante de propagação utilizando a aproximação LP, para quatro diferentes perfis de índice de refração. A partir destas equações transcendentais estudamos as propriedades da constante de propagação e da frequência de corte dos modos como função dos parâmetros da fibra. Mostramos que existem situações em que duas das fibras estudadas (as estruturas W2 e M2), apresentam modos fundamentais cuja frequência de corte pode ser diferente de zero. Em seguida, utilizamos as equações transcendentais deduzidas para a constante de propagação para otimizar uma fibra ótica coaxial que pode funcionar como compensadora de dispersão de segunda ordem no comprimento de onda de $1.55 \mu\text{m}$. Mostramos que podem ser obtidos valores da ordem de $-12000 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$ para o parâmetro D no comprimento de onda anterior. Por fim, propomos um novo método numérico para resolver um sistema de equações diferenciais parciais que será utilizado no estudo da propagação de um pulso ao longo de um *taper*. Para esse último estudo, desenvolvemos um modelo que permitiu gerar uma equação diferencial válida para estudar a propagação de um pulso ao longo de um *taper* adiabático.

ABSTRACT

In this work a systematic coaxial optical fibers study was done to four layers of refraction indexes in the lineal and not lineal regime. For the study in the lineal regime deduced the transcendental equations for the propagation constant using the approach LP, for four different profiles of refraction index. Starting from these transcendental equations we studied the properties of the propagation constant and the cut-off as function of the parameters of the fiber. We showed that situations exist in that two of the studied fibers (the structures W2 and M2), they present fundamental mode whose cut-off can be different from zero. Soon after, we used the transcendental equations deduced for the propagation constant for optimized a coaxial optical fiber that can work as compensation of dispersion of second order in the length of wave of $1.55 \mu\text{m}$. We showed that can be obtained values of the order of $-12000 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$ for the parameter D in the previous wavelength. Finally, we propose a new numeric method to solve a system of equations for differentiate partial that will be used in the study of the propagation of a pulse to the therefore of a taper. For that last study, we developed a model that allowed to generate an differential equation valid to study the propagation of a pulse along an adiabatic taper.

INTRODUÇÃO GERAL

A tecnologia das comunicações ópticas já é um fato incorporado à nossa vida diária. Nesta área, a fibra óptica é um componente decisivo servindo como meio físico de transmissão. Inicialmente usada apenas para esse fim, ela também foi transformada em matéria prima para a produção de dispositivos passivos tais como os acopladores, WDM's (*Wavelength Division Multiplexing*)^[1], compensadores de dispersão, filtros espectrais ^[2] e outros em desenvolvimento. Com o advento das fibras dopadas com elementos terras raras, como o Érbio, deixaram de ser elementos opticamente passivos para serem ativos. Assim, vieram dispositivos como os amplificadores ópticos e lasers à fibra que vêm aparecendo em diversas aplicações práticas.

Embora as fibras ópticas já estejam em uso por mais de uma década, ainda permanecem como uma tecnologia de ponta em face dos desdobramentos que dela estão advindo. Desta forma, o objetivo deste trabalho é estudar uma família de fibras ópticas chamadas de coaxiais, que têm apresentado possibilidades de aplicação prática para diferentes propósitos. Inicialmente, este trabalho foi motivado pelo uso das fibras coaxiais do tipo W1 (a nomenclatura das fibras será apresentado no próximo capítulo), na fabricação de filtros espectrais desenvolvidos pelo CADFO do CPqD – Centro de Pesquisas da Telebrás. Deste estudo inicial e em decorrência da grande quantidade de possibilidades para os perfis de índice de refração das fibras coaxiais, decidimos analisar um conjunto de perfis na esperança de obter melhores propriedades para os dispositivos, como veremos a partir do próximo capítulo. A

análise que faremos deverá abordar o ponto básico no estudo de uma fibra ótica que é determinar a equação transcendental para a constante de propagação. A partir dela podemos estudar as propriedades dos modos quanto à dispersão da velocidade de grupo, a condição de corte e a variação da constante de propagação como função dos parâmetros da fibra. Por último, feito todo o estudo anterior no regime linear, podemos usar os conceitos abordados para estudar a propagação de pulsos temporais em dispositivos não lineares.

O que faremos neste primeiro capítulo será uma revisão sobre a história das fibras ópticas bem como seu surgimento no Brasil. Em seguida, apresentaremos a justificativa para o que pretendemos fazer.

1.1 - UM POUCO DE HISTÓRIA

O uso das comunicações ópticas é sempre sugerido como uma grande tecnologia conquistada nas últimas duas décadas. Já na década de quarenta engenheiros e cientistas “sonhavam” com o uso de ondas eletromagnéticas de pequeno comprimento de onda em comunicação, abaixo de milímetros (microondas). Este sonho teve início com a efetivação da telegrafia sem fio, quando a invenção do físico italiano Guglielmo Marconi se transformou numa realidade.

Embora seja uma realização tecnológica da atual geração, as comunicações ópticas são uma velha opção dos seres humanos, a começar pelo uso do sentido da visão. Afora este exemplo trivial há referências a outras tecnologias além da visão. Livros fazem referências ao sistema inventado por Chappe, na França, em 1791 e usualmente chamado de semáforo ^[3]. O semáforo formava um sistema de linhas de torres de comunicação, distribuídas ao longo de caminhos entre os locais que precisavam se comunicar. Nestas linhas, existiam torres que possuíam um sistema de dois braços pivotados. Operadores destes braços enviavam mensagens através de sinais codificados que eram observados e reproduzidos na torre posterior.

Com isto os sinais eram passados adiante a partir de um ponto, sendo, talvez, o primeiro sistema de comunicações de alta velocidade da história da humanidade. Entretanto, apesar da sofisticação dos semáforos, podemos dizer que outros povos não tão avançados quanto os franceses, usavam a visão como receptor de sinais

emitidos a partir de pontos distantes. Como exemplo podemos citar os índios da América do Norte que transmitiam informações através de sinais de fumaça, um verdadeiro sistema de comunicação óptica.

Com o invento do telégrafo pelo americano Samuel F. B. Morse ^[3] em 1835, o semáforo rapidamente desapareceu e a sinalização para comunicação ficou reduzida a um uso marginal. Um exemplo é a comunicação com bandeiras nas marinhas de todo o mundo. O telégrafo se origina das palavras gregas *tele*, significando distante, e *grafos*, significando escrita. Assim sendo, seu nome indica um sistema de escrita à distância. A primeira transmissão ocorreu em 1839, desde a cidade de Baltimore até Whashington com a seguinte mensagem: “ *What hath God wrought!* ” . Com o telégrafo é iniciada uma era para as comunicações modernas, usando-se sinais elétricos transportados via fios metálicos.

Antes e durante a segunda Guerra Mundial já estavam sendo investigados a nível experimental e para uso militar, sistemas de comunicação usando luz incoerente com altas taxas de transmissão de informação. Tais sistemas usavam parabóides refletores e fotomultiplicadoras. No entanto, as ondas eletromagnéticas na frequência de rádio propagando na atmosfera ainda era a grande opção das comunicações.

A década de cinquenta trouxe o início da eletrônica, da física do estado sólido, primeiro com os dispositivos discretos e depois com os integrados, os famosos CI's (Circuitos Integrados). Era uma dramática mudança tecnológica, inicialmente não percebida por muitas pessoas.

Na década de sessenta a tecnologia dos sistemas de microondas, baseados em válvulas e componentes de guias de ondas, já era uma realidade consolidada. Entre os novos desafios estava o uso dos dispositivos de microondas a semicondutor e circuito integrado com a tentativa de tornar prática a existência de guias ópticos. Vários tipos de estruturas de guias de ondas foram propostas baseados em lentes, espelhos e outros elementos. O uso de guias dielétricos já estava sendo discutido, como por exemplo, os guias dielétricos ocos. Embora o uso de fibras de vidro já ocorresse desde a década de cinquenta com os feixes de fibras (*bundles*) para uso em medicina, até meados da década de sessenta poucos consideravam possíveis a aplicação de fibras de vidro como guia óptico para sistema de comunicação. Um dos principais motivos estava nos altíssimos valores das perdas ópticas nos vidros

existentes, capazes de atingir 1000 dB/km de atenuação na transmissão de luz. Para se ter idéia de quão altas eram tais perdas, a quantidade de energia necessária para que uma radiação de 1 mm de comprimento de onda fosse reduzida a apenas um fóton após percorrer uma fibra de um quilômetro era de 10^{80} Joules no início do percurso. Naquela década a geração de energia em todo o mundo, incluindo-se a hidroelétrica de Assuan recém colocada em operação, chegava a 10^{20} Joules/ano. Esses valores trouxeram um absoluto descrédito quanto à possibilidade de utilização das fibras ópticas como meio de transmissão de luz para comunicação.

Por outro lado, no início da década de sessenta surgia o domínio de um processo que seria fundamental para a viabilização das comunicações via processos ópticos: a geração de luz coerente. Primeiro com o MASER (*Microwave on Molecular Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), inventado pelo físico americano Charles H. Townes e colaboradores ^[4]. Em segundo lugar o LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), cuja possibilidade de construção foi mostrada por Townes e Schawlow ^[3]. O primeiro laser foi construído por T. H. Maiman ^[5] em 1960, usando um bastão de rubi.

Também nos anos sessenta, Keyes e Quist do Lincoln Laboratory ^[6], anunciaram na *Solid-State Device Research Conference*, em Julho de 1962, a operação de um dispositivo eletroluminescente de GaAs funcionando a 77 K, capaz de emitir luz com quase 100% de eficiência quântica. Em setembro de 1962, Hall *et al* ^[7] observaram de forma definitiva a emissão de luz coerente por uma junção p-n de GaAs diretamente polarizada e operando a 77 K. Passando dos lasers de homojunção para os lasers de heteroestrutura dupla inventado pelo físico russo Zh. I. Alferov do *Ioffe Institute* em Lenigrado, os lasers de semicondutores se tornaram comerciais no início dos anos oitenta.

No início da década de setenta, quando Kapron e outros pesquisadores da *Corning Glass Works* ^[8], anunciaram fibras de vidro com perdas de 20 dB/km, começou a ficar claro que elas eram um meio promissor para uso em comunicação como guias de sinais ópticos. Não apenas com avanços na qualidade dos vidros, mas também no processo de fabricação das fibras através do método CVD (*Chemical Vapor Deposition*) ^[9], as perdas das fibras foram reduzidas a 7 dB/km em 1973 (*Corning Glass Works*). Também em 1973 o *Bell Laboratories*, com o processo

MCVD (Modified Chemical Vapor Deposition) ^[10], obteve fibras com 2.5 dB/km. Este Processo se tornou o padrão na fabricação de fibras nos anos seguintes. De 1974 a 1975 novos avanços ocorreram, realizados por várias empresas nos Estados Unidos e no Japão, fazendo com que as perdas nas fibras ópticas fossem reduzidas para algo entre 1.5 e 2.0 dB/km. No final dos anos setenta a *Ibaki Electrical Communication Laboratory* e a *Fujikura Cable Works* ^[11], reportaram fibras com perdas de 0.47 dB/km quando operadas com luz no comprimento de onda de 1.2 μm . Atualmente, perdas abaixo de 0.1 dB/km são uma realidade para fibras operando em 1.33 μm e 1.55 μm .

1.2 - Um pouco de Brasil

O Brasil é hoje um país que não paga *royalties* pela produção de fibras ópticas. Isto foi possível com o desenvolvimento tecnológico autônomo de dispositivos à fibra, como por exemplo, acopladores, WDM's e dispositivos baseados em fibras dopadas com érbio como amplificadores ópticos. Isto é a tradução do esforço em pesquisas básica e aplicada, iniciado no Departamento de Eletrônica Quântica do Instituto de Física Gleb Wataghin da Unicamp na década de setenta, sob a direção do Prof. Sérgio Porto. Saindo da Universidade, este esforço se traduziu no desenvolvimento da tecnologia de fibras ópticas, tanto ao nível de geração de novos insumos e dispositivos, quanto na produção piloto no Centro de Pesquisas e Desenvolvimento da Telebrás (CPqD). Passando pelo CPqD-Telebrás, a tecnologia se transformou em produto comercial nas mãos de empresas nacionais, cuja pioneira foi a ABC-Xtal, com sede em Campinas.

1.3 - Fibras coaxiais e filtros espectrais

No início dos anos oitenta, Cozens e Boucouvalas ^[2] propuseram a fabricação de acopladores direcionais e filtros espectrais a partir de fibras axialmente simétricas constituídas de quatro camadas. Tais fibras são feitas de uma estrutura bastão no seu núcleo e uma estrutura tubo, separada da primeira por uma região intermediária

denominada barreira. Todas as regiões estão contidas no interior de outra chamada de casca, como mostra a Fig. (1.1). Nos diversos artigos publicados por Boucouvalas *et al* ^[12,13], foi dada maior atenção à estrutura cujo perfil de índice de refração está mostrado na Fig.(1.2). Pouco estudo foi apresentado para outras estruturas coaxiais, formadas através da alteração nos níveis de índices de refração mostrados na Fig. (1.2).

Fig. 1.1 - Ilustração de uma fibra coaxial, com a indicação das diferentes regiões que a constituem.

Fig. 1.2 - Perfil da fibra coaxial estudada por Boucouvalas ^[13].

Há algum tempo Celaschi *et al* ^[14] conseguiram desenvolver filtros espectrais a partir de fibras coaxiais do tipo W1 que apresentavam características de alta performance como as que estão indicadas na Tab. (1.1).

Comprimento de Onda de Operação	1.3 a 1.55 μm
FSR (Free Spectral Range)	até 0.5 nm em 1.55 μm
Perdas por Inserção	0.5 dB

Tabela 1.1 - Dados sobre os filtros espectrais desenvolvidos pelo CPqD da Telebrás.

Desta forma, começou a haver um motivo para que as fibras coaxiais fossem estudadas. O estudo teórico dos filtros espectrais feitos mostrou que seu comportamento pode ser descrito através do conceito de modos locais ^[15]. Assim, para investigar o funcionamento dos filtros espectrais feitos de estruturas coaxiais é necessário conhecer o comportamento dos modos quando os parâmetros da fibra são alterados. Isso requer o conhecimento da constante de propagação das fibras coaxiais, o que nos levou ao cálculo deste parâmetro, pois existe uma falta de trabalhos na literatura sobre o assunto, ou quando erros são cometidos. Vale salientar ainda que as fibras coaxiais possuem quatro regiões de diferentes índices de refração. Isso leva a um tedioso procedimento matemático para a obtenção das equações transcendentais que determinam a constante de propagação, podendo ser este o principal motivo para a ausência de estudos mais detalhados sobre as fibras coaxiais.

Para enfatizar o que acabamos de dizer, mencionamos que Boucouvalas ^[13], ao analisar a estrutura coaxial com o perfil mostrado na Fig. (1.2), cometeu um erro. A equação transcendental para a constante de propagação apresentada por ele em seu trabalho, não está em concordância com aquela que deduzimos. Quando utilizamos a equação transcendental como está, não é possível obter numericamente os resultados apresentados no artigo. Abaixo, reproduzimos a equação transcendental para a constante de propagação encontrada por Boucouvalas, com o termo contendo o erro destacado em **negrito**:

$$\begin{aligned}
& \frac{J_m(U_4)}{Y_m(U_4)} \left[\frac{J_{m\mp 1}(U_4) \mp K_{m\mp 1}(W_4)}{U_4 J_m(U_4) \mp W_4 K_m(W_4)} \right] \left\{ \frac{I_m(W_3)}{I_m(W_2)} \left[\frac{Y_{m\mp 1}(U_3) \pm I_{m\mp 1}(W_3)}{U_3 Y_m(U_3) \mp W_3 I_m(W_3)} \right] \right. \\
& \left. \frac{J_{m\mp 1}(U_1) \pm I_{m\mp 1}(W_2)}{U_1 J_m(U_1) \mp W_2 I_m(W_2)} \right\} = \\
& \left[\frac{J_{m\mp 1}(U_3) \mp K_{m\mp 1}(W_3)}{U_3 J_m(U_3) \mp W_3 K_m(W_3)} \right] \mp \frac{K_m(W_3)}{K_m(W_2)} \left[\frac{J_{m\mp 1}(U_1) \mp K_{m\mp 1}(W_2)}{U_1 J_m(U_1) \mp W_2 K_m(W_2)} \right] \\
& = \frac{J_m(U_3)}{Y_m(U_3)} \left\{ \frac{I_m(W_3)}{I_m(W_2)} \left[\frac{J_{m\mp 1}(U_3) \pm I_{m\mp 1}(W_3)}{U_3 J_m(U_3) \mp W_3 I_m(W_3)} \right] \mp \frac{K_m(W_3)}{K_m(W_2)} \left[\frac{J_{m\mp 1}(U_1) \mp K_{m\mp 1}(W_2)}{U_1 J_m(U_1) \mp W_2 K_m(W_2)} \right] \right\},
\end{aligned}$$

onde a constante de propagação está contida em U_1 , U_3 , U_4 , W_1 , W_3 e W_4 . Oportunamente (no próximo capítulo) mostraremos a dependência explícita destes parâmetros em termos da constante de propagação. O termo em negrito na equação acima deve ser $\frac{Y_{m\mp 1}(U_4)}{U_4 Y_m(U_4)}$ para que os resultados gerados através da resolução numérica desta equação coincidam com aqueles apresentados pelo próprio Boucouvalas.

1.4 - OBJETIVOS DESTA TRABALHO

Esta tese tem como objetivo estudar fibras coaxiais de acordo com a sequência dada abaixo. Para uma melhor apresentação dos tópicos abordados, dividimos o trabalho em sete capítulos, mais um de introdução e outro de conclusões. O que segue é um roteiro dos principais tópicos apresentados em cada capítulo. A motivação principal do trabalho foi exposta nas seções anteriores que serão reforçadas na introdução e considerações finais de cada capítulo.

No segundo capítulo vamos apresentar as quatro fibras coaxiais que iremos estudar. Todas são variantes da estrutura coaxial apresentada na Fig. (1.2) em que os quatro índices de refração são diferentes, como pode ser visto na Fig. (2.5). Vamos

fazer uma revisão da teoria formal de como descrever a propagação de modos em uma fibra óptica coaxial através das equações de Maxwell. Por último, a partir do formalismo desenvolvido, encontraremos as equações transcendentais para a constante de propagação das fibras coaxiais com o uso da aproximação LP (*Linearly Polarized modes*), responsável por uma grande simplificação da descrição matemática. Esse trabalho foi iniciado por Adriana ^[20] em sua tese de mestrado.

Nos capítulos (3) e (4) analisaremos as propriedades dos modos das estruturas coaxiais como funções dos parâmetros da fibra (as localizações das três interfaces em relação ao eixo da fibra e os quatro índices de refração), usando as equações transcendentais para a constante de propagação deduzida no Cap. (2). Este trabalho também foi iniciado por Adriana ^[20]. No entanto alguns pontos ficaram sem esclarecimentos neste trabalho inicial como, por exemplo, o surgimento de degenerescências de modos na estrutura W2. Assim, no Cap. (3) analisaremos as estruturas W1 e W2 enquanto que no Cap. (4) as estruturas M1 e M2. Toda a análise será feita em função do índice de refração efetivo, que é a razão entre a constante de propagação e o vetor de onda do vácuo, dos vários modos. A razão para isso é a relação direta do índice de refração efetivo com os vários índices de refração que constituem todos os perfis coaxiais.

No capítulo (5) analisaremos a condição de corte dos modos de ordem mais baixa de todas as estruturas coaxiais estudadas nos Cap. (3) e (4). Vamos iniciar o capítulo deduzindo a equação transcendental para a frequência de corte. A partir desta equação faremos um estudo analítico da condição de corte do modo fundamental para todas as estruturas coaxiais. Pelo que sabemos, é a primeira vez que uma análise deste tipo é feita. Resultará deste estudo relações entre os parâmetros da fibra coaxial que determinam a condição a partir da qual o modo fundamental deixa de ter frequência de corte diferente de zero. Essas expressões serão testadas em situações limites para reproduzir resultados já publicados na literatura. O capítulo encerra-se com a análise da resolução numérica da equação transcendental para a frequência de corte de cada uma das estruturas coaxiais da Fig. (2.5). Explicaremos, pela primeira vez, a razão de a frequência de corte para as estruturas W1 e M1, se estabilizar em um valor constante para determinados

conjuntos de parâmetros destas fibras. Esse tipo de comportamento para os modos já foi reportado por Boucouvalas ^[32], mais não era conhecida uma explicação.

No capítulo (6) apresentaremos o cálculo do coeficiente de dispersão de segunda ordem (D). O objetivo deste estudo será otimizar uma fibra coaxial que possa funcionar como compensadora de dispersão em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$. O cálculo de D será completamente numérico e feito a partir da resolução das equações transcendentais para o índice de refração efetivo deduzidas no Cap. (2). Mostraremos como D varia em função dos parâmetros da fibra e otimizaremos pela primeira vez, uma fibra que possui um coeficiente de dispersão D da ordem de $-12000 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$ em $1.55 \mu\text{m}$. Pelo que sabemos, o mais baixo valor reportado na literatura é da ordem de $-5000 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$ ^[40]. No decorrer do capítulo explicaremos porque é desejável ter o menor valor possível para D. O capítulo finaliza com uma discussão sobre as perdas por encurvamento (*bend loss*) da fibra coaxial otimizada para funcionar como compensadora de dispersão e como podemos controlar o valor mínimo de D e sua localização, alterando o índice de refração n_4 .

No capítulo (7) propomos um novo método numérico para resolver sistemas de equações diferenciais parciais. Esse método é baseado no *método dos resíduos ponderados* (MRP). Esse capítulo inicia com uma revisão do MRP. Em seguida o novo método é proposto. Para mostrar que funciona, resolveremos um problema cuja solução é bem conhecida na literatura. Mostraremos como as fontes de erro podem ser controladas e calcularemos o tempo de cálculo computacional como função do número de pontos da malha para o exemplo considerado.

Finalmente, no capítulo (8) usaremos o método desenvolvido no capítulo (7) para estudar a propagação de um pulso ao longo de um *taper* adiabático. Mas antes de fazer este estudo, mostraremos como caracterizar uma estrutura bicônica adiabática. Mostraremos que a adiabaticidade depende do perfil do *taper* bem como dos parâmetros da fibra coaxial. A partir destes resultados, desenvolveremos um modelo original para estudar a propagação de um pulso temporal ao longo de um *taper* adiabático e aplicaremos o método proposto no capítulo anterior para encontrar os resultados do modelo. O capítulo (9) procura concluir os resultados obtidos ao longo do trabalho.

AS EQUAÇÕES TRANSCENDENTAIS PARA AS ESTRUTURAS COAXIAIS

2.0 - Introdução

Neste capítulo mostraremos como determinar as equações transcendentais para a constante de propagação em fibras coaxiais. Essas soluções serão utilizadas para estudar os modos (Caps. (3) e (4)), o corte destes modos (Cap. (5)) e as propriedades dispersivas (Cap(6)) das fibras coaxiais. Por fim, o Cap. (8) também necessitará das soluções das equações transcendentais para a determinação da constante de propagação. Desta forma, este capítulo se constitui em uma parte essencial de todo o trabalho que será apresentado ao longo dos próximos capítulos.

Posto isso, dividimos este capítulo da seguinte forma. Na seção (2.1) apresentamos uma descrição do que seja uma fibra ótica, bem como as vantagens em utilizar valores próximos para os índices de refração das várias camadas. Na seção (2.2) mostramos como fazer uma descrição formal de uma fibra ótica em termos das equações de Maxwell. Na seção (2.3) descrevemos a propagação em termos das equações de Maxwell e mostramos como contornar a descontinuidade do perfil de índice de refração nas interfaces entre as várias camadas que compõem as fibras coaxiais. Finalmente, na seção (2.4) deduziremos as equações transcendentais para a constante de propagação nas várias regiões da fibra coaxial utilizando a aproximação de modos linearmente polarizados. Devido à forma complicada destas equações, elas não possuem solução analítica e serão resolvidas através de métodos numéricos nos próximos dois capítulos.

2.1 - Fibras óticas

A denominação fibra ótica descreve certos tipos de guias de ondas dielétricos que apresentam forma cilíndrica. Eles podem ser separados em dois tipos distintos. No primeiro tipo o índice de refração obedece a uma determinada lei, como por exemplo uma variação quadrática e contínua na direção radial. No outro tipo, o índice de refração varia abruptamente em regiões bem definidas do espaço. A presente tese é devotada exclusivamente ao estudo de fibras óticas que pertencem ao segundo tipo.

A Fig. (2.1) mostra a fibra ótica mais simples. Um cilindro dielétrico de índice de refração n_1 é recoberto por um outro, concêntrico, de índice de refração n_2 . Para que seja possível o confinamento da radiação eletromagnética dentro do guia de onda formado, os índices de refração devem satisfazer à condição $n_1 > n_2$.

Fig. 2.1 - Seção transversal da fibra núcleo-casca.

A região do guia com índice de refração menor n_2 , chamada de casca, é essencial para o guiamento da luz. Existem três razões pelas quais é necessário ter a região n_2 . A primeira é formar com o núcleo uma estrutura capaz de provocar a reflexão total da luz, e com isso, gerar seu confinamento espacial. A segunda diz respeito à propriedade do campo não estar completamente contido no núcleo,

existindo uma parte que decai exponencialmente na região de índice de refração n_2 . Desta forma, a casca é essencial para acomodar esse campo evanescente.

A terceira razão é concernente às propriedades que os campos apresentam em um guia de onda. Observe que uma fibra ótica é capaz de suportar um número finito de modos em uma dada frequência. Se o diâmetro do núcleo a_1 é muito maior do que o comprimento de onda da radiação guiada, é possível a excitação de um número muito grande de modos. Dependendo da aplicação, sempre é desejável limitar o número de modos. A dimensão do núcleo que permite a operação de apenas um modo depende criticamente da razão n_1/n_2 . Quanto maior for essa razão, menor a_1 deve ser para assegurar que apenas um modo propague. Como é inconveniente produzir fibras com diâmetro do núcleo menor ou da ordem de $0.5 \mu\text{m}$, inclusive por questões envolvendo o processo de fabricação, o raio do núcleo pode ser bem maior e ainda assim permitir operação monomodo se a razão entre os índices de refração for próxima à unidade.

Existe outro benefício para a propagação se os índices de refração n_1 e n_2 forem da mesma ordem. A transmissão de informações através da fibra normalmente é feita através de uma sequência de pulsos de luz. Quando um pulso propaga em um meio dielétrico, ele alarga devido às propriedades dispersivas da fibra segundo a qual cada frequência propaga com uma velocidade própria. Se esse alargamento for suficientemente grande, pode haver sobreposição de um pulso com seu adjacente, levando a um decréscimo na capacidade de transmissão de informação devido a perda de resolução na sua detecção. Esse efeito limita a taxa de transmissão dos sistemas óticos que funcionam com pulsos de luz.

Através da teoria dos raios é possível encontrar uma expressão para o quanto o pulso alarga como função da distância de propagação e índices de refração da fibra núcleo-casca. No entanto, é necessário distinguir entre os raios que atravessam a fibra entre reflexões, através do eixo (chamados de raios meridionais) e aqueles que nunca passam através do eixo da fibra (chamados de raios inclinados). Pode ser demonstrado ^[15] que o tempo que o raio leva para propagar uma distância z ao longo do guia de onda cilíndrico depende somente do tempo gasto pelos raios meridianos. Como estes raios estão em um plano de comprimento 2ρ (Fig. (2.1), com $\rho=a$), que passa através do eixo, os raios meridionais possuem propriedades idênticas aos correspondentes raios de um guia de onda planar. Desta forma, o estudo da

propagação de raios em um guia de onda planar permite obter uma expressão para o tempo de alargamento de um pulso que também é válida para a fibra núcleo casca.

2.1.1) Teoria de raios para o guia de ondas planar.

O guia de onda planar está ilustrado na Fig.(2.2). Esse dispositivo consiste em um núcleo de espessura 2ρ , colocado entre duas camadas semi-infinitas que formam a casca. Os planos $x = \pm\rho$ são chamados de interfaces núcleo-casca. Como o guia é invariante por translação ao longo da direção y , o problema passa a ser bidimensional. O eixo z está localizado ao longo do eixo do guia de ondas, a meia distância entre as interfaces. O perfil do índice de refração $n(x)$ do núcleo pode ser uniforme ou gradual enquanto que o índice de refração da casca é constante. É necessário que $n_1 > n_2$ para que o guia formado possa apresentar a propriedade de confinamento dos modos no núcleo durante a propagação. Suporemos que o perfil não varia com z , o que torna o guia invariante por translação também nesta direção.

Fig. 2.2 - Configuração de um guia de ondas planar.

Os parâmetros definidos na Fig. (2.2) podem ser combinados com o comprimento de onda da luz no espaço livre (λ) para formar o parâmetro adimensional V . Este parâmetro é conhecido como *parâmetro do guia de ondas* ou *frequência normalizada do guia de ondas*. Se n_1 é o máximo valor de $n(x)$, V é definido como

$$V = \frac{2\pi\rho}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Esta definição é largamente utilizada na literatura para caracterizar os modos de uma fibra ótica^[16].

Vamos simplificar ainda mais o guia planar da Fig. (2.2) e considerar que o índice de refração do núcleo possui a seguinte variação:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & -\rho < x < \rho \\ n_2, & |x| > \rho \end{cases}, \quad (2.2)$$

em que n_1 e n_2 são constantes, satisfazendo a condição $n_1 > n_2$ (Fig. (2.3)). A Fig. (2.3) representa o guia planar com a variação de índices de refração mostrada na definição da Eq. (2.2).

Fig. 2.3 - Guia de ondas planar com sua variação de índice de refração.

A propagação dentro do núcleo do guia, de acordo com a teoria de propagação dos raios, é ao longo de linhas retas. Se o raio origina-se em P, sobre uma das interfaces, fazendo um ângulo θ_z com o eixo do guia de ondas, ele deve encontrar a face oposta em Q, como é mostrado na Fig. (2.3). A reflexão nesta situação é governada pela lei de Snell dada por :

$$n_1 \sin(\theta_r) = n_2 \sin(\theta_t). \quad (2.3)$$

Em termos de θ_z , chamado ângulo complementar, os raios são completamente refletidos internamente quando $0 < \theta_z \leq \theta_c$, onde θ_c é o complemento do ângulo crítico, dado por $\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

Um raio refletido na interface em Q volta para o núcleo formando um ângulo θ_r com a normal, independente de ocorrer reflexão total ou parcial. Se esse procedimento for repetido com sucessivas reflexões nas interfaces, o raio seguirá um caminho de 'Zig-Zag'. Esses raios são classificados em *raios ligados* (quando seu caminho está inteiramente confinado dentro do núcleo) ou *raios refratados* (aqueles parcialmente refletidos em cada reflexão). As condições que ambos os tipos de raios devem satisfazer são:

$$\text{raios ligados} : 0 \leq \theta_z < \theta_c, \quad (2.4.a)$$

$$\text{raios refratados} : \theta_c \leq \theta_z < \pi/2. \quad (2.4.b)$$

Vamos definir o comprimento do caminho entre duas sucessivas reflexões como a distância PQ. A partir da geometria da Fig. (2.3) temos que :

$$PQ = \frac{2\rho}{\sin(\theta_z)}. \quad (2.5)$$

O tempo *transiente* τ é definido como o tempo que o raio leva para propagar uma distância z ao longo do eixo do guia de ondas, seguindo o caminho de "zig-zag". A velocidade da luz para os raios ligados é $v_g = c/n_1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. De acordo com a Fig. (2.3) o tempo transiente será :

$$\tau = \left(\frac{z}{z_p}\right) \frac{PQ}{v_g} = \left(\frac{z}{z_p}\right) \frac{2\rho}{\sin(\theta_z)(c/n_1)}. \quad (2.6)$$

$$\text{Como } \frac{2\rho}{z_p} = \tan(\theta_z) = \frac{\sin(\theta_z)}{\cos(\theta_z)},$$

$$\tau = \frac{zn_1}{\cos(\theta_z)c} \quad (2.7)$$

Devemos mencionar que τ na Eq. (2.7) é um pouco maior devido ao efeito Goos Haenchen^[16], que foi omitido. No entanto, para o propósito desta seção que é introduzir os conceitos fundamentais na descrição da propagação em fibra ótica, essa equação é satisfatória.

O intervalo angular $\Delta\theta_z$ em que os raios ligados estão contidos, é dado pela Eq. (2.4a). Consequentemente, o tempo transiente mínimo ($\tau_{\min}$) corresponde a um raio que propaga satisfazendo a condição $\theta_z=0$, enquanto que o tempo transiente máximo ($\tau_{\max}$) corresponde a um raio que propaga em um ângulo $\theta_z=\theta_c$. Desta forma,

$$\tau_{\max} = \frac{zn_1}{\cos(\theta_c)c} = \frac{zn_1^2}{cn_2} \text{ e } \tau_{\min} = \frac{zn_1}{c}.$$

Como um pulso de luz pode ser pensado em termos de uma coleção de raios que propagam dentro do intervalo dado pela Eq. (2.4a), o alargamento do pulso no tempo após propagar uma distância z (τ_d), pode ser estimado como a diferença entre o máximo e o mínimo tempo de transiente dado por:

$$\tau_d = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{zn_1}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right). \quad (2.8)$$

Esse resultado mostra que quanto maior for o comprimento do guia de onda e a razão n_1/n_2 , maior será o alargamento do pulso no tempo. Na condição de guiamento fraco, onde supomos que $n_2 \cong n_1$, τ_d é o menor possível para certa distância propagada. Essa condição leva a uma redução da dispersão dos raios e consequentemente, do alargamento do pulso.

Existem outras origens para a dispersão do guia de onda e que também contribuem para o alargamento do pulso. Vamos citar as duas mais importantes. Uma é a *dispersão do material* que é devido à dependência do índice de refração com o comprimento de onda. A outra é chamada de *dispersão do guia de ondas*, sendo uma consequência da dependência das propriedades do guia com o comprimento de onda. No Cap. 6 descreveremos de forma detalhada o problema da dispersão em fibra.

Por enquanto nos interessa informar apenas que uma escolha adequada para a distribuição de índices de refração possibilita muitas vantagens. Em situações práticas, as diferenças entre todos os índices de refração que compõem a fibra são da ordem de 0.01, devido às vantagens que isso traz ao reduzir o alargamento do pulso. Como veremos mais adiante, isso facilita a descrição matemática desde que os efeitos devido à polarização da luz não são levados em consideração.

2.2 - Descrição da propagação em termos das equações de Maxwell

Uma descrição satisfatória para a propagação de campos eletromagnéticos em guias de ondas formados por meios dielétricos é feita através do uso das equações de Maxwell. Em um meio dielétrico sem cargas elétricas e correntes livres, as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte forma :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.9a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.9b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.9c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.9d)$$

Os vetores elétricos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ estão relacionados e em geral é uma relação complicada, podendo ser de natureza tensorial ou não-linear. No entanto, para as situações de nosso interesse o meio dielétrico é linear e isótropo, o que torna satisfatória uma relação linear entre estes vetores dada por :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.10)$$

onde a constante ϵ é chamada de *permissividade dielétrica* e a razão ϵ/ϵ_0 de *constante dielétrica*. ϵ_0 é a *permissividade do vácuo*.

A conexão entre $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ também é dada através de uma relação similar para um meio linear e isotrópico

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.11)$$

onde μ é chamado de *permeabilidade magnética*. Em meios não magnéticos seu valor é aproximadamente igual ao valor constante μ_0 assumido no vácuo. As Eqs. 2.9(a,b,c,d) mais as Eqs. (2.10) e (2.11) descrevem completamente a propagação de um campo eletromagnético em um meio isotrópico e linear na ausência de correntes e cargas livres no espaço.

As equações de Maxwell podem ser modificadas para fornecer outras que são mais apropriadas em certos tipos de aplicações. Por exemplo, vamos aplicar o operador rotacional na Eq. (2.9b). Essa operação fornece a seguinte equação :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

onde supomos que μ é independente das coordenadas espaciais e do tempo. Substituindo a Eq. (2.9a) na Eq. (2.12) o resultado depende apenas de $\mathbf{E}$, sendo dado por :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.13)$$

onde, a Eq. (2.13) é válida para ϵ função das coordenadas de espaço mas independente do tempo.

Vamos utilizar a seguinte identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ para reescrever a Eq. (2.13) com a ajuda da Eq. (2.9c). Assim procedendo, obtemos :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

Para o caso especial em que ϵ é constante ou $\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \ll 1$ em um determinado domínio do espaço, a Eq. (2.14) se reduz à forma :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Observemos que essa equação só é válida na região do espaço em que são satisfeitas as condições que anulam o segundo termo do lado esquerdo da Eq. (2.14).

Como nosso estudo para entender a propagação de luz em fibra ótica utilizará as soluções da Eq. (2.15), torna-se interessante investigar com mais detalhes as condições em que essa equação torna-se uma boa aproximação para a Eq. (2.14). Esta equação é muito mais difícil de resolver do que aquela, motivo pelo qual não é usual em tratamentos de problemas de propagação de campos eletromagnéticos.

A ordem de magnitude dos termos que aparecem na Eq. (2.14) é dominada pelo primeiro termo do lado esquerdo e pelo termo do lado direito como pode ser mostrado para um campo possuindo dependência exponencial da forma $e^{i(kx-\omega t)}$. Assim, uma estimativa para o termo de derivada segunda no tempo pode ser feita da seguinte forma :

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cong \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{v^2} \mathbf{E} = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \mathbf{E}. \quad (2.16)$$

Substituindo o operador ∇ pela derivada com respeito a alguma direção S no espaço, podemos reescrever aproximadamente o segundo termo do lado direito da Eq. (2.14) como :

$$\nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) \cong \frac{\partial}{\partial S} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) \cong \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right), \quad (2.17)$$

onde S representa a coordenada na direção do vetor S . Como estamos interessados em uma justificativa para o segundo termo do lado esquerdo da Eq. (2.14) ser muito menor do que os outros, podemos estimar a ordem de magnitude deste termo em relação aos dominantes dividindo-o por este. Desta forma, obtemos :

$$R = \frac{\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right)}{\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}} \cong \frac{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2} = \frac{\lambda \nabla \epsilon}{2\pi \epsilon} \cong \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon \Delta S}, \quad (2.18)$$

onde na expressão acima aproximamos o gradiente de ϵ pela razão entre a diferença $\epsilon_2 - \epsilon_1$ de dois pontos próximos divididos pela distância entre eles ΔS . O passo final consiste em fazer $\Delta S = \lambda$ e obter :

$$R = \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon} \quad (2.19)$$

Se desejamos desprezar o segundo termo no lado esquerdo da Eq. (2.14), devemos exigir que $R \ll 1$. Isso significa que a mudança relativa de ϵ na distância de um comprimento de onda deve ser muito menor do que a unidade. Essa condição sempre é satisfeita mesmo em meios óticos não-homogêneos. Em nossa futura discussão sobre guias de ondas dielétricos com permissividade dielétrica constante, sempre $R \ll 1$ e podemos usar a equação de ondas para descrever o comportamento dos campos eletromagnéticos.

Para completar essa discussão devemos salientar que os guias de ondas cujas propriedades iremos estudar, apresentam interfaces dielétricas. Nestas interfaces, R pode ser da ordem de um ou mesmo superior. No entanto, mesmo neste caso necessitamos resolver apenas a equação de ondas uma vez que ela vale em todo lugar menos nas interfaces. A situação é contornada igualando-se as soluções obtidas nas regiões consideradas homogêneas através das condições de contorno que os campos eletromagnéticos devem satisfazer nas interfaces. Essas condições de contorno impõem que as componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético e as componentes normais do deslocamento elétrico e do campo de indução magnética sejam contínuas através da interface dielétrica ^[16,17].

O argumento anterior demonstra que a equação de onda pode ser usada mesmo que ϵ não seja uma constante, mas varie no espaço. A condição para que isso ocorra é que a variação de ϵ seja desprezível para a distância de um comprimento de onda. Com exceção das interfaces entre os dois diferentes meios dielétricos do guia de onda, essa condição é quase sempre satisfeita. Assim, a diferença entre a equação de ondas Eq. (2.15) e a Eq. (2.14) torna-se desprezível.

2.3 - Solução das equações de Maxwell em meios com simetria cilíndrica

Consideremos que a permissividade dielétrica seja independente de uma das coordenadas espaciais. Posicionando o sistema de coordenadas apropriadamente e considerando que z seja a direção de propagação, suporemos que ϵ não depende de z e procuraremos soluções para as equações de Maxwell da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y)e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (2.20b)$$

onde $\mathbf{E}_0(x, y)$ e $\mathbf{H}_0(x, y)$ representam campos que apresentam dependência apenas com as coordenadas transversas.

Substituindo as Eqs. (2.20a) e (2.20b) nas Eqs. (2.9a,b,c,d) e separando as seis componentes cartesianas obtemos o seguinte conjunto de equações acopladas:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + i\beta H_y = i\omega\epsilon E_x, \quad (2.21a)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} - i\beta H_x = i\omega\epsilon E_y, \quad (2.21b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z, \quad (2.21c)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\beta E_y = -i\omega\mu H_x, \quad (2.21d)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + i\beta E_x = i\omega\mu H_y, \quad (2.21e)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z. \quad (2.21f)$$

Multiplicando a Eq. (2.21e) por β e usando a Eq. (2.21a), podemos expressar a componente transversa do campo elétrico E_x em função das componentes E_z e H_z , da seguinte forma:

$$E_x = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu\omega \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (2.22a)$$

onde $\kappa^2 = \omega^2\mu\epsilon - \beta^2$.

Procedendo de forma análoga, podemos expressar as outras componentes transversais dos campos em função das componentes longitudinais da seguinte forma:

$$E_y = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu\omega \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \quad (2.22b)$$

$$H_x = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \epsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (2.22c)$$

$$H_y = -\frac{i}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \epsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \quad (2.22d)$$

As Eqs. (2.22) (a,b,c,d) são exatas, pois foram encontradas através do uso das equações de Maxwell, sem nenhuma outra condição a não ser aquelas apresentadas nas Eqs. (2.20) (a,b). Substituindo H_x e H_y dados pelas Eqs. (2.22c) e (2.22d) na Eq. (2.21c) encontramos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \kappa^2 E_z = 0. \quad (2.23)$$

Substituindo E_x e E_y dados pelas Eqs. (2.22a) e (2.22b) na Eq. (2.21f) encontramos que :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \kappa^2 H_z = 0 . \quad (2.24)$$

As Eqs. (2.23) e (2.24) são exatas somente se ϵ for constante já que para chegar a essas equações foi necessário fazer derivações nas coordenadas espaciais. No entanto, é um resultado formidável que essas equações contenham somente E_z ou H_z . Como consequência, as componentes longitudinais de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ estão desacopladas e podem ser escolhidas independentemente desde que satisfaçam as Eqs. (2.23) e (2.24). Em uma classe ampla de problemas o acoplamento entre as componentes longitudinais pode ocorrer através das condições de contorno. Se não ocorre esse tipo de acoplamento, é possível obter soluções onde $E_z=0$ ou $H_z=0$. Essas soluções (chamadas modos do guia) são designadas por TE (transversal elétrica) ou TM (transversal magnética), respectivamente. Na primeira situação o campo elétrico apresenta apenas componentes transversais enquanto que na segunda é o campo magnético.

Quando ϵ depende das coordenadas x e y , as Eqs. (2.23) e (2.24) não são mais exatas. No entanto, elas ainda fornecem uma boa aproximação se a variação relativa de ϵ for muito menor do que a unidade, como foi mostrado na dedução da Eq.(2.19). Para um campo ótico com comprimento de onda extremamente curto essa aproximação é satisfatória e simplifica sobremaneira os cálculos.

No restante desta seção transformaremos as Eqs. (2.23) e (2.24) de forma a se tornarem apropriadas à descrição da propagação do campo eletromagnético em guias com simetria cilíndrica. O sistema polar é definido em relação às variáveis (r, θ) , relacionadas às coordenadas cartesianas através das seguintes transformações:

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{1/2} , \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando as equações de transformação anteriores e fazendo as derivadas correspondentes, as Eqs. (2.23) e (2.24) podem ser transformadas em^[16]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \kappa^2 \Psi = 0, \quad (2.26)$$

onde Ψ pode ser E_z ou H_z , dependendo da equação considerada ser a Eq. (2.23) ou Eq. (2.24), respectivamente.

Vamos utilizar a técnica de separação de variáveis^[18,19] para resolver a Eq. (2.26). Essa técnica consiste em propor que $\Psi(r, \theta)$ possa ser expresso como o produto de uma função de r e outra de θ da seguinte forma:

$$\Psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (2.27)$$

Substituindo a Eq. (2.27) na Eq. (2.26) encontramos que :

$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) \frac{1}{R} + \kappa^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \right) = 0. \quad (2.28)$$

A Eq.(2.28) pode ser desacoplada definitivamente fazendo:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -m^2, \quad (2.29)$$

onde m é uma constante. Desta forma, as soluções para a função Θ são do seguinte tipo :

$$\Theta(\theta) = \Theta_0 e^{\pm im\theta}. \quad (2.30)$$

Para determinar m vamos exigir que os campos sejam uma função unívoca de θ (quando θ mudar de 2π , o campo deverá permanecer inalterado). Neste caso, m deve ser nulo ou um número inteiro. Assim, $R(r)$ satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (2.31)$$

onde $\kappa = (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2)^{1/2} = (k_0^2 n^2 - \beta^2)^{1/2}$, $k_0 = 2\pi/\lambda$ e n é o índice de refração do meio.

A Eq. (2.31) é chamada de equação diferencial de Bessel cujas soluções são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, dependendo do sinal de $(k_0^2 n^2 - \beta^2)$.

A constante de propagação β ainda permanece indeterminada. Ela é o autovalor associado ao problema de autovetor e seus possíveis valores são determinados pela aplicação das condições de contorno. Na próxima seção mostraremos como determinar a constante de propagação para os guias de ondas estudados em nosso trabalho.

2.4 - Determinação das equações transcendentais para as fibras coaxiais

Fig. 2.4 - Representação esquemática de uma fibra coaxial com suas quatro camadas.

As fibras óticas que estudaremos em nosso trabalho são feitas de quatro camadas, conforme representado na Fig. (2.4). Embora seja possível imaginar várias configurações para a distribuição de índices de refração, nos limitaremos àquelas

variações mostradas na Fig. (2.5). Essas estruturas são classificadas como fibras do *tipo W* e a do *tipo M*. Para cada tipo existe uma sub-classificação 1 e 2. Observe que a nomenclatura de determinada estrutura está associada à semelhança do perfil de índice de refração com a letra W ou M.

Fig. 2.5 - Perfis de índices de refração das quatro fibras analisadas neste trabalho.

Para encontrar a constante de propagação em um guia de onda cilíndrico, devemos procurar as soluções das equações de Maxwell nesta geometria. No entanto, essa tarefa é muito complicada para as fibras coaxiais e mesmo para a fibra muito mais simples núcleo-casca. Adams^[16] mostra como encontrar a constante de propagação e os campos modais para a fibra núcleo-casca mostrada na Fig. (2.1). Em resumo, o procedimento consiste em utilizar as soluções da Eq. (2.31) para construir a componente z dos campos elétrico e magnético. As soluções desta equação são funções de Bessel de primeiro ou segundo tipo, dependendo do intervalo em que está a constante de propagação e são bem conhecidas na literatura^[18]. A partir da determinação de H_z e E_z , as componentes transversais dentro de cada camada de índice de refração da fibra bastão, podem ser encontradas através do uso das Eqs. (2.22)(a,b,c,d), reescritas em coordenadas cilíndricas. Com todas as componentes do campo caracterizadas em cada região da fibra, a constante de propagação é

determinada impondo que a distribuição de campo seja finita no espaço e continua através da interface entre as camadas dielétricas da fibra. Esse procedimento conduz a uma equação transcendental para a constante de propagação em termos de funções de Bessel e dos parâmetros da fibra cujas soluções só podem ser encontradas numericamente.

Pelas razões apresentadas na seção (2.1), as fibras óticas utilizadas em situações práticas possuem pequenas variações dos índices de refração. Isso possibilita utilizar uma aproximação chamada na literatura de *guiamento fraco*^[16,18]. Por exemplo, a aproximação de guiamento fraco aplicada a fibra de Fig. (2.1) impõe que $\frac{(n_1 - n_2)}{n_1} \ll 1$. Essa aproximação permite, como solução, modos linearmente polarizados que podem ser obtidos a partir de combinações lineares apropriadas daqueles modos descritos brevemente no parágrafo anterior. Adriana^[20] e Adams^[16] detalham como essas soluções linearmente polarizadas podem ser encontradas no limite de guiamento fraco para uma fibra núcleo-casca a partir das soluções EH e HE.

Seguir o procedimento anterior para encontrar as soluções LP (Linearmente Polarizadas), válidas para as fibras coaxiais mostradas na Fig. (2.5), é bem mais complicado devido à existência de três interfaces dielétricas. Assim, é mais simples seguir o procedimento de Gloge^[21] e construir modos linearmente polarizados válidos para as fibras coaxiais.

Esse procedimento considera que a componente transversa do campo é dada pelas soluções da Eq. (2.28). Assim sendo, consideremos que E_y e H_x sejam as componentes transversas linearmente polarizadas do campo eletromagnético. Isso implica que as outras componentes E_x , H_y , E_z e H_z são consideradas nulas em um primeiro momento. Utilizando as Eqs. (2.21b), (2.21c) e (2.21f), convertidas para coordenadas cilíndricas^[16], encontramos as seguintes relações entre as componentes em primeira ordem:

$$H_x \cong -n \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} E_y, \quad (2.32)$$

$$E_z \cong \frac{i}{k_0 n} \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{i}{k_0 n} \left(\sin(\theta) \frac{\partial E_y}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \right), \quad (2.33)$$

$$H_z \cong \frac{i}{k_0} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{i}{k_0} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left(\cos(\theta) \frac{\partial E_y}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \right).$$

(2.34)

Como as fibras coaxiais da Fig. (2.5) apresentam quatro camadas de diferentes índices de refração, a Eq. (2.28) possui diferentes soluções que dependem do intervalo em que se encontra o índice de refração efetivo ($N_e = \beta/k_0$). Como exemplo, consideremos as soluções da Eq. (2.28) para a fibra coaxial W1 onde o índice de refração efetivo pertence ao intervalo $n_4 < N_e < n_2$ (ver Fig. (2.5)). As soluções válidas em cada camada da fibra estão apresentadas na coluna do meio da tabela (2.1). Como outro exemplo, se o índice de refração efetivo pertencer ao intervalo $n_4 < N_e < n_1$ da estrutura M2, as soluções permitidas serão aquelas mostradas na coluna 3 da Tab. (2.1). Para outros intervalos as soluções estão apresentados na Tab. (2.1) ou na Tab. (2.2).

Região	$n_4 < N_e < n_2$ (W1) e (M1)	$n_2 < N_e < n_3$ (W1) , $n_4 < N_e < n_3$ (W2) $n_2 < N_e < n_1$ (M1) , $n_4 < N_e < n_1$ (M2)
$0 \leq \rho < a$	$AJ_m \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(m\theta)$ $U_1 = (n_1^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 a$	$AJ_m \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(m\theta)$ $U_1 = (n_1^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 a$
$a \leq \rho < b$	$\left[BJ_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos(m\theta)$ $W_2 = (n_2^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 a$	$\left[BI_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos(m\theta)$ $W_2 = (N_e^2 - n_2^2)^{1/2} k_0 a$
$b \leq \rho < c$	$\left[DJ_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos(m\theta)$ $U_3 = (n_3^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 b$	$\left[DJ_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos(m\theta)$ $U_3 = (n_3^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 b$
$c \leq \rho$	$FK_m \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos(m\theta)$ $W_4 = (N_e^2 - n_4^2)^{1/2} k_0 c$	$FK_m \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos(m\theta)$ $W_4 = (N_e^2 - n_4^2)^{1/2} k_0 c$

Tab. 2.1 - Soluções da Eq. (2.28) para a componente E_y em alguns intervalos de índices de refração das estruturas coaxiais mostradas na Fig.(2.5).

Região	$n_3 < N_e < n_1$ W1 e W2	$n_1 < N_e < n_3$ M1 e M2
$0 \leq \rho < a$	$AJ_m \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(m\theta)$ $U_1 = (n_1^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 a$	$AI_m \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(m\theta)$ $U_1 = (N_e^2 - n_1^2)^{1/2} k_0 a$
$a \leq \rho < b$	$\left[BI_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos(m\theta)$ $W_2 = (N_e^2 - n_2^2)^{1/2} k_0 a$	$\left[BI_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_m \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos(m\theta)$ $W_2 = (N_e^2 - n_2^2)^{1/2} k_0 a$
$b \leq \rho < c$	$\left[DI_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EK_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos(m\theta)$ $U_3 = (N_e^2 - n_3^2)^{1/2} k_0 b$	$\left[DJ_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_m \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos(m\theta)$ $U_3 = (n_3^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 b$
$c \leq \rho$	$FK_m \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos(m\theta)$ $W_4 = (N_e^2 - n_4^2)^{1/2} k_0 c$	$FK_m \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos(m\theta)$ $W_4 = (N_e^2 - n_4^2)^{1/2} k_0 c$

Tab. (2.2) Continuação da Tab(2.1).

A partir das funções E_y apresentadas nas Tabs. (2.1) e (2.2), podemos encontrar uma primeira aproximação para as componentes E_z e H_z de cada estrutura coaxial, através das Eqs.(2.33) e (2.34). No entanto, essas componentes passam a ser proporcionais à raiz quadrada da diferença entre os índices de refração, conforme mostra o cálculo de E_z para o intervalo $n_2 < N_e < n_3$ para a estrutura W1^[20] :

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{2akn} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}((\ell-1)\theta) + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}((\ell+1)\theta) \right\}, & 0 < r < a \\ -\frac{iW_2}{2akn} \left\{ \left[BI_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}((\ell-1)\theta) - \right. \\ \left. \left[BI_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}((\ell+1)\theta) \right\}, & a < r < b \\ \frac{iU_3}{2bkn} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}((\ell-1)\theta) + \right. \\ \left. \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}((\ell+1)\theta) \right\}, & b < r < c \\ F \frac{iW_4}{2ckn} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}((\ell-1)\theta) - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}((\ell+1)\theta) \right\}, & r > c \end{cases}, \quad (2.35)$$

onde utilizamos relações de recorrência entre as funções de Bessel para obter a expressão anterior. Observe que a proporcionalidade com a raiz quadrada da diferença entre os índices de refração advém das definições de U_1 , W_2 , U_3 e W_4 pois, por exemplo, temos que:

$$\begin{aligned} U_1 &= (n_1^2 - N_e^2)^{1/2} k_0 a = ((n_1 + N_e)(n_1 - N_e))^{1/2} k_0 a \\ &\cong (2n_1(n_1 - n_2))^{1/2} k_0 a, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde, na última passagem, utilizamos o mínimo valor que N_e assume no intervalo considerado. Expressões semelhantes podem ser obtidas para W_2 , U_3 e W_4 .

Fazendo outra diferenciação da componente E_z dada pela Eq. (2.35) e na expressão semelhante para H_z e utilizando as Eqs. (2.22b) e (2.22c), obtemos componentes transversas que não são idênticas àquelas mostrados nas Tabs. (2.1) e (2.2), mas são pequenas quando comparadas a essas pois são da ordem das diferenças entre os índices de refração. Se a aproximação de guiamento fraco é válida para quaisquer das estruturas coaxiais da Fig.(2.5), a máxima diferença entre todos os índices de refração é pequena e as componentes transversas obtidas na condição acima poderão ser desprezadas em relação aos campos das Tabs. (2.1) e (2.2). É essa aproximação que determina a exatidão dos modos linearmente polarizados.

Para resolver completamente o problema, necessitamos encontrar os valores de A , B , C , D , E e F para os campos nas Tabs. (2.1) e (2.2). Para esse fim, impomos que todas as componentes mostradas nestas tabelas mais as aproximações para E_z e H_z em primeira ordem, sejam contínuas nas três interfaces dielétricas. Com isso, obtemos um sistema homogêneo de seis equações lineares que relaciona as variáveis A , B , C , D , E e F cuja solução é diferente da trivial apenas quando o determinante principal for nulo. Simplificando esse determinante através de um laborioso procedimento, obtemos para cada estrutura coaxial e intervalo de índice de refração considerado, uma equação transcendental para o índice de refração efetivo. Nunes, Mello e da Silva^[22] determinaram essas equações transcendentais que estão apresentadas na Tab. (2.3). Um maior detalhamento das passagens matemáticas envolvidas na dedução destas equações transcendentais pode ser encontrado no Apêndice (A).

Intervalo de N_e	Equação transcendental
$n_4 < N_e < n_2$ W1 e M1	$\frac{J_{m\pm 1}(U_4)}{Y_{m\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J(U_4) \mp K(W_4)}{Y(U_4) \mp K(W_4)} \right] * \\ \left\{ \frac{Y_{m\pm 1}(W_3)}{Y_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y(U_3) - Y(W_3)}{J(U_1) - Y(W_2)} \right] - \frac{J_{m\pm 1}(W_3)}{J_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y(U_3) - J(W_3)}{J(U_1) - J(W_2)} \right] \right\} = \\ \frac{J_{m\pm 1}(U_3)}{Y_{m\pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{Y_{m\pm 1}(W_3)}{Y_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J(U_3) - Y(W_3)}{J(U_1) - Y(W_2)} \right] - \frac{J_{m\pm 1}(W_3)}{J_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J(U_3) - J(W_3)}{J(U_1) - J(W_2)} \right] \right\}$
$n_2 < N_e < n_3$ W1	$\frac{J_{m\pm 1}(U_4)}{Y_{m\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J(U_4) \mp K(W_4)}{Y(U_4) \mp K(W_4)} \right] *$
$n_2 < N_e < n_1$ M1	$\left\{ \frac{\pm K_{m\pm 1}(W_3)}{\mp K_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y(U_3) \mp K(W_3)}{J(U_1) \mp K(W_2)} \right] - \frac{I_{m\pm 1}(W_3)}{I_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y(U_3) \pm I(W_3)}{J(U_1) \pm I(W_2)} \right] \right\} =$
$n_4 < N_e < n_3$ W2	$\frac{J_{m\pm 1}(U_3)}{Y_{m\pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{K_{m\pm 1}(W_3)}{K_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm J(U_3) - K(W_3)}{\mp J(U_1) + K(W_2)} \right] - \frac{I_{m\pm 1}(W_3)}{I_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J(U_3) \pm I(W_3)}{J(U_1) \pm I(W_2)} \right] \right\}$
$n_4 < N_e < n_1$ M2	
$n_3 < N_e < n_1$ W1 e W2	$\frac{I_{m\pm 1}(U_4)}{K_{m\pm 1}(U_4)} \left[\frac{I(U_4) + K(W_4)}{K(U_4) - K(W_4)} \right] * \\ \left\{ \frac{K_{m\pm 1}(W_3)}{K_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{K(W_3) - K(U_3)}{K(W_2) \mp J(U_1)} \right] + \frac{I_{m\pm 1}(W_3)}{I_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{I(W_3) - K(U_3)}{I(W_2) \mp J(U_1)} \right] \right\} = \\ \frac{I_{m\pm 1}(U_3)}{K_{m\pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{K_{m\pm 1}(W_3)}{K_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{K(W_3) - I(U_3)}{K(W_2) \pm J(U_1)} \right] + \frac{I_{m\pm 1}(W_3)}{I_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{I(W_3) - I(U_3)}{I(W_2) \pm J(U_1)} \right] \right\}$
$n_1 < N_e < n_3$ M1 e M2	$\frac{J_{m\pm 1}(U_4)}{Y_{m\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J(U_4) \mp K(W_4)}{Y(U_4) \mp K(W_4)} \right] * \\ \left\{ \frac{K_{m\pm 1}(W_3)}{K_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm Y(U_3) - K(W_3)}{I(U_1) + K(W_2)} \right] - \frac{I_{m\pm 1}(W_3)}{I_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm Y(U_3) + I(W_3)}{I(U_1) - I(W_2)} \right] \right\} = \\ \frac{J_{m\pm 1}(U_3)}{Y_{m\pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{K_{m\pm 1}(W_3)}{K_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm J(U_3) - K(W_3)}{I(U_1) + K(W_2)} \right] - \frac{I_{m\pm 1}(W_3)}{I_{m\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm J(U_3) + I(W_3)}{I(U_1) - I(W_2)} \right] \right\}$

Tab. 2.3 - Equações transcendentais para todas as fibras coaxiais mostradas na Fig. (2.5). A definição do argumento de cada função está dado no correspondente intervalo de índice de refração efetivo nas Tabs. (2.1) e (2.2).

Na Tab. (2.3) utilizamos a seguinte notação: $T(x) = \frac{T_\ell(x)}{xT_{\ell+1}(x)}$, com T podendo ser alguma das funções de Bessel. Por exemplo, $K(W_3)$ significa $\frac{K_\ell(W_3)}{W_3 K_{\ell+1}(W_3)}$.

Devemos enfatizar que a aproximação LP só é válida no limite em que as diferenças entre todos os índices de refração no guia de onda é pequena (da ordem de 10^{-2}). Apesar desta restrição, a descrição dos campos e autovalores resultantes conduzem a bons resultados que estão próximos da realidade, como indica a extensa literatura sobre o assunto ^[13,23].

RESULTADOS PARA AS ESTRUTURAS W1 e W2

3.0 - Introdução

Neste capítulo vamos apresentar e discutir os resultados obtidos para o índice de refração efetivo do par de estruturas coaxiais W1 e W2 como funções dos parâmetros da fibra. Essas estruturas estão mostradas na parte superior da Fig. (2.5). Esse estudo é importante porque a partir dele é possível caracterizar o guia completamente. Optamos pelo estudo em função do índice de refração efetivo ao contrário dos resultados que estão mostrados na literatura ^[13,20,21,22,23]. A razão da escolha é que ela possibilita localizar diretamente o índice de refração efetivo dos modos em relação ao perfil de índice de refração da estrutura.

Os índices de refração efetivos dos vários modos foram obtidos a partir da resolução numérica das equações transcendentais deduzidas no Cap.(2) e apresentadas na Tab. (2.3). As primeiras versões dos programas foram desenvolvidos em Fortran77, com as rotinas utilizadas no cálculo das funções de Bessel gerando apenas oito dígitos de precisão quando os valores foram comparados com as tabelas do livro de Abramowitz ^[24]. Foi então feito um esforço para melhorar os programas computacionais e a solução encontrada foi reescrevê-los em Fortran90 da Microsoft (*Microsoft Fortran power station 4.0*). Feito isso e utilizando as rotinas do IMSL para gerar as funções de Bessel contidas no próprio programa, a precisão saltou para dupla (10^{-14}), melhorando substancialmente a precisão final no cálculo do índice de refração efetivo. Esse aumento de precisão é crucial para distinguir soluções da equação transcendental que se aproximam muito para determinados parâmetros das fibras coaxiais, conforme será mostrado durante a discussão da estrutura W2. Mais à

frente no estudo da condição de corte no Cap. (5) e da dispersão no Cap. (6), serão mostrados outros exemplos da necessidade do aumento da precisão no cálculo do índice de refração efetivo.

Este capítulo está dividido da seguinte forma. Na seção (3.1) apresentaremos os resultados referentes à estrutura W1. Mostraremos resultados para a variação do índice de refração efetivo (N_e) como função da frequência normalizada V_1 , dos parâmetros adimensionais A e R (definidos abaixo) e dos índices de refração n_2 e n_4 . Será mostrado ainda um estudo do fator de confinamento nas várias regiões da fibra. Na seção (3.2) faremos o mesmo tipo de estudo para a estrutura W2. Por fim, na seção (3.3) apresentaremos uma síntese dos principais resultados.

3.1 - Resultados obtidos para a estrutura W1

A Fig. 3.1(a,b) mostra o comportamento típico do índice de refração efetivo para os modos de ordem mais baixa, como função da frequência normalizada de propagação $V_1 = k_0 c (n_1^2 - n_3^2)^{1/2}$. Para a análise que segue, vamos definir as grandezas adimensionais A e R como:

$$A = \frac{a}{c}, \quad R = \frac{b-a}{c}. \quad (3.1)$$

Observe que A mede a extensão do núcleo enquanto que R o comprimento da barreira em relação à distância da interface ânulo-casca. Com essas definições podemos reescrever os argumentos das funções de Bessel e estudar N_e como função de V_1 , A , R e dos índices de refração. Observe que o difícil na análise das estruturas coaxiais está em selecionar apropriadamente o intervalo em que variam os muitos parâmetros (sete ao todo, os três comprimentos espaciais que localizam as interfaces das várias camadas e os quatro índices de refração) e depois entender como varia o índice de refração efetivo como função de cada um destes parâmetros.

Os valores de A e R considerados em todas as simulações que seguem foram escolhidos de forma a englobar os raios das várias camadas a , b e c encontrados em situações práticas. Como geralmente $c=62.5 \mu\text{m}$, os valores considerados para A e R

na Fig. (3.1) fazem com que a pertença ao intervalo (3.2 μm , 9.4 μm) enquanto que b ao intervalo (15.7 μm , 35.5 μm).

Fig. 3.1 - Variação de N_e como função de V_1 . (a) $R=0.20$
(b) $R=0.40$.

Os valores de índices de refração usados para gerar as curvas da Fig. (3.1) são os seguintes: $n_1=1.4658$, $n_2=1.4587$, $n_3=1.46$ e $n_4=1.444$. Os gráficos mostram o comportamento típico das curvas $N_e \times V_1$: os valores de N_e crescem a partir do corte do modo. Observe que o aumento de A provoca aumento nos valores de N_e para os modos HE_{11} , HE_{12} e HE_{13} (chamados doravante de modos do tipo 1) enquanto que para os modos HE_{21} , HE_{22} e HE_{31} (chamados do tipo 2), N_e permanece praticamente inalterado.

Quando a mesma análise é feita com $R=0.40$ (Fig. 3.1(b)) para os mesmos valores de A , observamos que N_e para os modos do tipo 1 permanecem praticamente inalterados quando comparado com os valores de Fig. (3.1a), enquanto que os modos do tipo 2 variam, embora pouco. Esse comportamento é explicado pelo fato dos modos do tipo 1 possuírem uma distribuição de campo elétrico com um máximo relativo no núcleo, como está mostrado na Fig. (3.2), enquanto que aqueles do tipo 2 sempre apresentam $E(r=0)=0$, conforme mostra a Fig. (3.3). Como o máximo da distribuição de campo elétrico para os modos do tipo 2 está fora do núcleo nas regiões da barreira e anel, estes passam a ser mais sensíveis a uma alteração no tamanho da barreira (b-a) ou do anel (c-b). Para os modos do tipo 1, o máximo na distribuição de campo elétrico ocorre na região do núcleo da fibra, o que faz estes

modos serem mais sensíveis a alterações no comprimento do núcleo, daí a grande alteração das curvas N_e quando A varia de 0.05 para 0.15. Observe que ao aumentar o valor de R com A constante, estamos favorecendo alterações de N_e para os modos do tipo 2 uma vez que estes modos são maximizados na região fora do núcleo.

Fig. 3.2 - Distribuição normalizada de campo elétrico para os modos do tipo 1 em função do raio da fibra. (a) $V_1=5.0$;(b) $V_1=9.0$.

Fig. 3.3 - Distribuição normalizada de campo elétrico para modos do tipo 2 em função do raio da fibra. (a) $V_1=5.05$ (b) $V_1=9.0$.

As Figs. (3.2(a,b)) e (3.3(a,b)) mostram a distribuição de campo elétrico na direção transversa da fibra para dois valores diferentes de V_1 , para modos do tipo 1 e do tipo 2, respectivamente. O fator de normalização dos campos é dado por:

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} E^2 r dr \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

As Figs. (3.2) e (3.3) ainda permitem concluir o seguinte. Os modos aumentam seu confinamento na região núcleo-barreira-anel à medida que V_1 cresce. Esse resultado também é válido para a fibra núcleo-casca ^[16]. Outra informação que podemos retirar destas figuras é que o aumento do confinamento na região núcleo-barreira-anel é reforçado por um crescimento no tamanho do núcleo. No entanto, a variação do campo elétrico para os modos do tipo 1 é maior do que para os do tipo 2. Observe que quando V_1 é grande (Figs. (3.2b),(3.3b)), a sensibilidade do campo a um aumento na extensão do núcleo é maior para ambos os tipos de modos. Isso ocorre porque a contribuição do núcleo aumenta e a extensão do campo na direção transversa diminui. Quando refazemos a análise anterior para a distribuição de campo elétrico no caso $R=0.40$, os resultados discutidos para $R=0.20$ permanecem inalterados.

Fig. 3.4 - Variação de N_e como função de V_1 . (a) $A=0.05$ (b) $A=0.15$.

A Fig. 3.4 (a,b) mostra como varia o índice de refração efetivo como função de V_1 para dois valores diferentes de A . Os índices de refração usados para gerar esta figura possuem os mesmos valores utilizados na Fig. (3.1 (a,b)). Como podemos visualizar neste gráfico, os resultados mostram que todos os modos para determinado valor de A diminuem seu confinamento na região núcleo-barreira-anel (que é a consequência da redução no valor de N_e), à medida que R aumenta. O aumento de N_e , no entanto, é maior para os modos do tipo 1 com o aumento de A do que para os modos do tipo 2. Para justificar isso, devemos lembrar que os modos do tipo 1 apresentam máximos de distribuição em $z=0$ e são mais sensíveis a alterações no

valor de A. Já os modos do tipo 2 apresentam o mínimo de sua distribuição no núcleo da fibra fazendo com que sejam menos sensíveis a uma alteração no valor de A.

Os resultados apresentados até agora sobre o comportamento do índice de refração efetivo não permitem determinar qual camada da fibra coaxial contribui mais para manter o confinamento do campo na região núcleo-barreira-anel. Saber em quais condições isso ocorre e identificar os principais parâmetros responsáveis por esse controle é crucial uma vez que quanto maior for a extensão do campo na casca, maior será maior as perdas por encurvamento da fibra (chamada de *bend-loss*). Assim, apresentaremos na próxima seção um estudo do fator de confinamento dos modos para a fibra coaxial W1. Isso permitirá entender qual camada da fibra contribui mais para o guiamento dos modos como função de seus parâmetros.

3.1.1 - O fator de confinamento dos modos.

Definimos o fator de confinamento de um modo em cada camada de índice de refração da fibra coaxial como a fração da energia contida na correspondente camada. Por exemplo, o fator de confinamento no núcleo, representado por f_1 , é definido como:

$$f_1 = \frac{\int_0^a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr}{\int_0^\infty (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr} \quad (3.3)$$

De forma semelhante, definimos os fatores de confinamento da barreira (f_2), do anel (f_3) e da casca (f_4) como:

$$f_2 = \frac{\int_a^b (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr}{\int_0^\infty (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr} \quad (3.4)$$

$$f_3 = \frac{\int_b^c (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr}{\int_0^\infty (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr}, \quad (3.5)$$

$$f_4 = \frac{\int_0^\infty (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr}{\int_0^\infty (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) r dr}. \quad (3.6)$$

De acordo com as definições anteriores apenas três fatores de confinamento são independentes, pois a soma de todos satisfaz à seguinte propriedade:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1. \quad (3.7)$$

Em vez de trabalhar com f_4 é mais conveniente utilizar F , definido como:

$$F = f_1 + f_2 + f_3 = 1 - f_4, \quad (3.8)$$

uma vez que estamos interessados em estudar principalmente o confinamento na região núcleo-barreira-anel.

A Fig. 3.5 (a,b) mostra a mudança dos fatores de confinamento para os modos HE_{11} e HE_{12} em função de V_1 para $R=0.20$ e A assumindo os valores 0.05 e 0.15. Esses gráficos mostram que F é pequeno nas proximidades do corte do modo, tornando f_4 o fator de confinamento dominante. A justificativa é que próximo da condição de corte do modo, seu campo elétrico está distribuído ao longo de toda a direção transversa da fibra e a casca passa a possuir grande parte do campo. À medida que V_1 cresce, rapidamente é reduzida a parte do campo guiada pela casca devido ao aumento do confinamento modal na região núcleo-barreira-anel da estrutura coaxial. Outro fato importante é que o modo fundamental passa a ser guiado predominantemente através do núcleo da fibra apenas quando A é grande (cor vermelha na Fig. (3.5a)). Para $A \leq 0.05$ as simulações feitas mostraram que f_1 sempre é pequeno quando comparado a f_2 ou f_3 devido à pequena dimensão do núcleo em relação às outras camadas da fibra.

Para o modo HE_{12} mostrado na Fig. (3.5b), o campo elétrico está concentrado principalmente nas regiões da barreira e anel, com o núcleo tendo uma influência bem menor em comparação ao modo fundamental. Observe que mesmo aumentando o raio do núcleo o efeito anterior se mantém. Como mostra a Fig. (3.2), o modo HE_{12} possui uma parte considerável do campo elétrico distribuído ao longo da região da barreira e anel. Portanto, nada mais natural do que essas duas regiões contribuam de forma mais significativa.

Fig. 3.5 - Evolução dos fatores de confinamento em função de V_1 para
(a) Modo HE_{11} ; (b) Modo HE_{12} .

Refizemos a figura anterior para a situação em que $R=0.40$ para os mesmos valores de A . Os resultados obtidos não diferiram substancialmente daqueles comentados nos dois parágrafos anteriores.

No estudo da condição de corte dos modos que será feito no Cap. (5), exploraremos os casos limites da estrutura W1, obtidos quando $R=0$ e $R=1-A$. Isso é importante, pois as propriedades de corte dos modos são intermediárias entre essas situações limites. Assim, vamos concluir essa seção estudando a dependência do fator de confinamento dos modos HE_{11} e HE_{12} como função de R .

Fig. 3.6 - Variação do fator de confinamento em função de R

(a) Para o modo HE_{11} ; (b) Para o modo HE_{12} .

A Fig. (3.6a) mostra como mudam os vários fatores de confinamento para o modo HE_{11} enquanto que a Fig. (3.6b) faz o mesmo para o modo HE_{12} . Em $R=0$, não existe a camada de índice de refração n_2 , o que faz f_2 nulo. No extremo oposto em $R=1-A$, a região da fibra coaxial que não existe é a do anel, fazendo $f_3=0$. Os gráficos mostram que entre os valores extremos de R a energia contida na região de índice de refração n_3 (anel), é transferida continuamente para aquela de índice de refração n_2 (barreira), uma vez que a energia contida no núcleo permanece aproximadamente constante para os dois modos, dentro do intervalo considerado de R . Observe que o valor de V_1 usado para fazer essa figura é relativamente baixo e o efeito da concentração da energia no núcleo para o modo HE_{11} ainda não é muito pronunciando, conforme mostra a Fig. (3.5a). Vale ressaltar que existe um intervalo em R no qual os fatores de confinamento permanecem constantes para o modo HE_{12} , indicando que o campo elétrico mantém sua distribuição inalterada neste intervalo. Nós refizemos os gráficos da Fig. (3.6(a,b)) para outros valores de V_1 , mas não houveram novidades em relação ao que já foi discutido nesta seção.

3.1.2 - Estudo de N_e como função dos índices de refração

Iniciamos o estudo do índice de refração efetivo como função dos índices de refração. Isso é importante porque permite um primeiro vislumbre das propriedades de corte dos modos. Devido à enormidade de parâmetros da fibra coaxial W1, optamos por fazer o estudo com $V_1 = ak_0(n_1^2 - n_3^2)^{1/2}$, constante. Ao fazer isso k_0 , c , n_1 e n_3 são constantes ou o produto $k_0c(n_1^2 - n_3^2)^{1/2}$. Considerando que a primeira situação é a que ocorre, nos resta considerar apenas os índices de refração que não pertencem à definição de V_1 , ou seja, n_4 e n_2 .

3.1.2.1 - N_e como função de n_4

A Fig. (3.7(a,b)) mostra a variação de N_e para alguns modos de ordem mais baixa com função de n_4 em dois diferentes valores de V_1 . Ao variar n_4 , mantivemos n_1 , n_2 e n_3 fixos nos valores fornecidos no começo da discussão da estrutura W1. Desta forma, o intervalo de variação de n_4 é dado por: $1.444 < n_4 < 1.4587$.

Os gráficos confirmam que os modos do tipo 1 (HE_{11} , HE_{12} e HE_{13}), tem seus valores de N_e muito mais sensíveis a uma alteração no diâmetro do núcleo do que os modos do tipo 2 (HE_{21} , HE_{22} e HE_{31}), conforme mostra a Fig. (3.7a). Quando V_1 aumenta, vemos que o efeito sobre os modos é bem mais pronunciado naqueles do tipo 1, conforme mostra a Fig. (3.7b) com N_e se deslocando para valores maiores para todos os modos. A explicação é que o aumento do confinamento do campo modal na região núcleo-barreira-anel para modos do tipo 1 é favorecido à medida que A e V_1 crescem, conforme já discutimos.

Fig. 3.7 - Variação do índice de refração efetivo como função de n_4 em (a) $V_1 = 5.0$; (b) $V_1 = 9.0$.

Um fato merecedor de atenção é que a fibra torna-se mais restritiva à propagação de modos à medida que n_4 aumenta e se aproxima de n_2 . Observe que a condição de corte para determinado modo ocorre quando $N_e = n_4$. Assim, a curva $N_e = n_4$ (linha mais escura na Fig. 3.7(a,b)), constitui um limite intransponível para o índice de refração efetivo de cada modo. Por exemplo, escolhendo $n_4 = 1.457$, apenas os modos HE_{11} e HE_{21} são permitidos propagar. Observe também que o efeito de corte dos modos é mais forte quando V_1 é pequeno, como mostra a Fig. (3.7a). Nada mais natural uma vez que os modos estão mais próximos da condição de corte à medida que $V_1 \rightarrow 0$.

Nós refizemos a Fig. (3.7(a,b)) para outros valores de R , com os demais parâmetros mantidos constantes. Os resultados obtidos com essas novas simulações não acrescentaram nada de novo a discussão.

Fig. 3.8 – Variação de N_e como função de n_2 com (a) $V_1 = 5.0$; (b) $V_1 = 9.0$

3.1.2.2 - N_e como função de n_2

A Fig. (3.8(a,b)) mostra a variação de N_e em função de n_2 para dois diferentes valores de V_1 . Como na situação anterior, mantemos os demais índices de refração constantes nos valores fornecidos no início da discussão. Desta forma n_2 varia dentro do intervalo $1.444 < n_2 < 1.46$.

Ao contrário dos resultados obtidos com a variação de n_4 , para este caso os modos não são cortados à medida que n_2 aumenta. Os modos do tipo 1 continuam sendo os mais afetados pelo aumento do tamanho do núcleo. Observe que neste caso a diminuição de V_1 não foi capaz de cortar os modos na mesma quantidade daquela provocada pelo aumento de n_4 . Isso permite concluir que uma redução na diferença $(n_3 - n_2)$ favorece a propagação dos modos.

3.2 - Resultados obtidos para a estrutura W2

Nesta seção vamos estudar a variação do índice de refração efetivo da estrutura W2 em função dos parâmetros da fibra. A definição da frequência normalizada de propagação é a mesma usada no estudo da estrutura W1. No entanto, vamos usar uma notação diferente para ser consistente com a definição adotada no estudo das condições de corte no Cap. (5). Assim,

$$V_3 = ck_0 (n_1^2 - n_3^2)^{1/2} . \quad (3.9)$$

Os índices de refração utilizados para gerar os gráficos que discutiremos, a menos que dito expressamente em contrário, foram mantidos constantes nos seguintes valores: $n_1=1.4658$, $n_2=1.444$, $n_3=1.46$ e $n_4=1.4587$.

Existe uma diferença básica entre o comportamento do modo fundamental da estruturas W2 e W1. Embora um estudo mais profundo da frequência de corte dos modos seja feito apenas no próximo capítulo, podemos adiantar que o modo fundamental da estrutura W2 apresenta frequência de corte diferente de zero a partir de determinados valores de A e R para determinada configuração de índices de refração. Isso não ocorre para a estrutura W1 uma vez que é possível mostrar (Cap. 5), que as curvas de índice de refração efetivo como função de V_1 para o modo fundamental sempre começam em $V_1=0$, independentemente dos parâmetros da fibra.

Fig. 3.9 - Estruturas limites da W2 (a) $R=0$, chamada de estrutura *Aclad*;
(b) $R=1-A$, chamada de estrutura *Wclad*.

Atribuímos esse comportamento do modo fundamental da estrutura W2 ao fato do índice de refração n_4 ser maior do que n_2 . Considere as estruturas obtidas como limites da W2 em $R=0$ e $R=1-A$, estudadas por Monerie^[23] e desenhadas na Fig. (3.9(a,b)). Como mostrado por Monerie, a estrutura representada na Fig. (3.9b), apresenta modo fundamental com frequência de corte diferente de zero e a razão a/c em que isso começa a ocorrer depende do perfil de índices de refração^[25]. No entanto, a estrutura obtida fazendo $R=0$ (Fig. (3.9a)), sempre apresenta frequência de corte nula para o modo fundamental, independentemente da razão a/c ou do perfil de índices de refração. Desta forma, esperamos que o modo fundamental da estrutura W2 apresente frequência de corte diferente de zero, pois seu comportamento para R fora dos extremos deve ser intermediário entre aqueles limites. A partir de que condição o modo fundamental passa a ter frequência de corte diferente de zero depende dos valores de A , R e índices de refração, como será mostrado no Cap. (5). Nesta seção estamos interessados apenas na influência dos parâmetros da fibra sobre o índice de refração efetivo.

3.2.1 - Discussão de N_e como função de V_3

Fig. 3.10 - Variação de N_e em função de V_3 para a estrutura W2.

(a) $A=0.01$; (b) $A=0.05$.

A Fig. (3.10(a,b)) mostra o comportamento do índice de refração efetivo como função de V_3 . As cores nas curvas estão associadas ao respectivo modo. Comparando esses gráficos verificamos que não existe uma alteração significativa das curvas $N_e \times V_3$ quando A varia de 0.01 para 0.05. No entanto, comparando a Fig. (3.10b) com aquela obtida para a estrutura W1 na Fig. (3.4a), verificamos que a estrutura W2 tem um comportamento mais restritivo à propagação de modos do que a estrutura W1 (por exemplo, em $V_1=V_3=10.0$ existem mais modos na estrutura W1 do que na W2). Outra diferença está na maior variação das curvas $N_e \times V_3$ como função de R , quando comparado com as respectivas curvas $N_e \times V_1$ para a estrutura W1 (para $A=0.05$, $R=0.20$ ou 0.40). Esses resultados mostram que uma redução no comprimento do anel na estrutura W2, torna-a mais desfavorável a propagação, pois leva a uma diminuição do índice de refração efetivo do modo. Esse efeito também apareceu no estudo da estrutura W1, como mostra a Fig. (3.4(a,b)), mas a redução de N_e foi bem menor.

Fig. 3.11 - Variação de N_e como função de V_3 . (a) Para $A=0.05$ e 0.10
(b) Para $A=0.20$ e $A=0.30$.

À medida que aumentamos o valor de A para a estrutura W2, surge um efeito de aproximação entre as curvas $N_e \times V_3$ dos vários modos, que não apareceu durante o estudo das correspondentes curvas da estrutura W1. O que segue é uma análise deste efeito para os modos HE_{11} , HE_{12} e HE_{13} . Devemos ressaltar que os modos do tipo 2 também apresentam o mesmo efeito.

A Fig. (3.11(a,b)) mostra a variação do índice de refração efetivo como função de V_3 para $R=0.10$ e vários valores do parâmetro A . Considere, por exemplo, a curva em que $A=0.20$ na Fig.(3.11b). Os modos HE_{11} e HE_{12} aproximam-se para determinado valor de V_3 . O mesmo ocorre para $A=0.30$, mas o valor de V_3 em que ocorre a menor aproximação entre as curvas é menor. Vemos ainda que os modos HE_{12} e HE_{13} também se aproximam para $A=0.10$ na Fig. (3.11a). Fica claro na Fig. (3.11(a,b)) que a aproximação entre os modos depende dos valores de A e R , para uma determinada configuração de índices de refração. Vamos elucidar esse comportamento no estudo da próxima figura.

Fig. 3.12 - Variação de N_e como função de V_3 . (a) Modo HE_{11} ;
(b) Modo HE_{12}

Na Fig. (3.12(a,b)) mostramos como muda o índice de refração efetivo como função de V_3 para $A=0.20$ e vários valores de R . As curvas em vermelho representam $N_e \times V_3$ para as estruturas limites, mostradas na Fig. (3.9(a,b)), obtidas através da resolução numérica das equações transcendentais deduzidas por Monerie^[23]. Quando $R=0.001$ ou $R=0.799$ para $A=0.20$ na equação transcendental para o índice de refração efetivo da estrutura W2 deduzida em nosso trabalho, obtemos curvas de dispersão que praticamente coincidem com aquelas das estruturas limites *Aclad* ou *Wclad*, respectivamente. Não podemos substituir diretamente $R=0$ ou $R=0.80$ na equação transcendental pois estes casos extremos fazem alguns argumentos das funções de Bessel serem nulos, levando a divergências nas funções modificadas de

Bessel. No entanto, como os resultados demonstram, são obtidos os limites corretos quando R tende a seus valores extremos.

Consideremos o modo fundamental da estrutura W2 apresentado na Fig. (3.12a). Para um valor de R contido dentro do intervalo aberto $0.0 < R < (1.0 - A)$, o comportamento da curva $N_e \times V_3$ deverá ser intermediário entre as duas situações limites e isso está mostrado claramente na Fig. (3.12a). Os resultados mostram que existe um valor de R acima do qual as propriedades de propagação do modo fundamental na estrutura W2 são determinadas pela *Wclad* associada à estrutura W2. Na Fig. (3.12b) estão apresentados os resultados para o modo HE_{12} e a mesma análise pode ser feita. Vale informar que o modo HE_{12} sempre tem frequência de corte diferente de zero.

Apesar do estudo do corte dos modos ser feito apenas no Cap. 5, devemos adiantar alguns resultados para que seja possível entender o que está acontecendo. Mostraremos que o modo HE_{11} da estrutura W2 pode ter frequência de corte diferente de zero e deduziremos uma expressão para o valor de R (chamado valor crítico de R , designado como R_c) acima do qual isso ocorre. R_c é função de A e dos índices de refração da fibra. Usando os valores dos parâmetros da Fig. (3.12(a)), encontramos que $R_c = 0.156$. Isso significa que até $R = R_c$, as curvas $N_e \times V_3$ na Fig. (3.12a) sempre começam em $V_3 = 0$ e para valores de R tal que $R > R_c$, essa curva sempre começa em valores $V_3 \neq 0$. Podemos ainda mostrar (Cap. 5) que o modo fundamental na Fig. (3.12a) sempre começa em $V_3 = 8.10$ se $R > 0.50$.

De acordo com os resultados anteriores concluímos o seguinte. A mudança de comportamento da curva $N_e \times V_3$ para o modo fundamental está associada ao fato deste modo ter frequência de corte nula abaixo de um valor crítico de R ou diferente de zero acima deste valor crítico. À medida que R aumenta, mais se aproxima do valor R_c acima do qual o modo começa a ter frequência de corte diferente de zero, o que vai progressivamente aproximando seu comportamento àquele da estrutura limite *Wclad*. Para $R > R_c$ a curva de dispersão começa em um valor $V_3 > 0$ que rapidamente tende ao comportamento da estrutura *Wclad*. Para o modo HE_{12} vemos que também existe um valor de R acima do qual o comportamento da curva de dispersão é determinado essencialmente pela estrutura *Wclad*, nos mesmos moldes do modo fundamental. No entanto, o modo HE_{12} sempre começa em $V_3 \neq 0$.

Quando a análise é refeita para outros valores de A , as conclusões retiradas para $A=0.20$ permanecem válidas. No entanto, o valor R_c é diferente e a aproximação entre os modos alterada para cada valor de A , como mostra a Fig. (3.11(a,b)). Outra propriedade que surge ao diminuir A com R fixo, é que o intervalo em que ocorre a mudança de comportamento nas curvas $N_e \times V_3$ é deslocado para maiores valores de V_3 . Isso pode ser entendido desde que no limite de A tendendo a zero e R a 1, a estrutura resultante é completamente anticonfinante, levando a uma grande redução no valor do índice de refração efetivo.

Nos moldes do que fizemos para estrutura W1, vamos estudar os fatores de confinamento para alguns modos da estrutura W2. Isso nos permitirá intuir sobre a contribuição de cada camada da fibra para as propriedades dos modos.

3.2.2 - Discussão dos fatores de confinamento

Consideremos a Fig. (3.11a) com $A=0.05$ e calculemos os fatores de confinamento dos modos HE_{1n} ($n=1,2,3$) como função de V_3 . O cálculo é feito de acordo com as definições dadas nas Eqs. (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6). Os resultados estão apresentados na Fig. (3.13). Como para a estrutura W1, próximo à condição de corte dos modos existe uma fração considerável do campo que está na região da casca.

Fig. 3.13 - Evolução dos fatores de confinamento dos modos. (a) HE_{11} ; (b) HE_{12} .

A diferença fundamental entre estes gráficos e os obtidos para a estrutura W1 advém de uma transição muito mais brusca entre as regiões da fibra W2. O intervalo V_3 em que ocorre essa mudança corresponde aquele onde os modos HE_{11} e HE_{12} se aproximam como mostra a Fig. (3.12(a,b)). Como o núcleo da fibra é grande, após a transição praticamente todo o campo é guiado através do núcleo para ambos os modos.

Observe, por exemplo, a curva $N_e \times V_3$ para $R=0.20$ na Fig. 3.12(a). O intervalo no eixo V_3 em que ocorre a mudança de curvatura da curva corresponde aquele na Fig. (3.13a) em que o modo HE_{11} passa de uma distribuição de campo que está concentrada na região do anel (f_3), para uma outra em que está concentrado no núcleo (f_1). Para $R=0.01$ vemos que ocorre o mesmo tipo de mudança, de forma mais gradual. Os resultados das simulações feitas para valores de R maiores do que 0.20, mostram que essa transição de comportamento do campo elétrico com predominância na região do anel para o núcleo continua acontecendo, mas o intervalo V_3 em que ocorre torna-se cada vez mais estreito.

De forma análoga, para o modo HE_{12} também ocorre uma transição semelhante. Observando as curvas da Figs. (3.13b) e (3.12b) para $R=0.05$, observamos que a curva $N_e \times V_3$ antes da transição, fica aproximadamente constante dentro do intervalo em V_3 compreendido entre (10.0,20.0). Isso corresponde a situação em que o campo elétrico está predominantemente contido no anel, mantendo sua distribuição como mostra a Fig. (3.13b) no referido intervalo.

3.2.3 - Estudo de N_e como função dos índices de refração

Nesta seção estudaremos a variação de N_e como função dos índices de refração. Como $V_3 = ck_0(n_1^2 - n_3^2)^{1/2}$ será mantido constante pelas mesmas razões apresentadas para o estudo da estrutura W1, então c , k_0 , n_1 e n_3 são constantes ou o produto $ck_0(n_1^2 - n_3^2)^{1/2}$. Considerando que a primeira situação seja verdadeira, resta-nos estudar a variação do índice de refração efetivo como função dos índices de refração que não aparecem na definição da frequência normalizada de propagação que são n_2 e n_4 .

3.2.3.1 - N_e em função do índice de refração n_4

Fig. 3.14 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_4 .

(a) $V_3=10.0$; (b) $V_3=20.0$.

A Fig. (3.14(a,b)) mostra a variação de N_e como função de n_4 em dois valores distintos de V_3 . Os demais índices de refração foram mantidos constantes nos valores indicados no começo da discussão da estrutura W2. Desta forma, n_4 foi variado dentro do intervalo $1.444 < n_4 < 1.46$.

Considere a Fig. (3.14a). À medida que n_4 aumenta a estrutura vai ficando cada vez mais restritiva a propagação de modos. Isso significa que a estrutura limite da W2 obtida quando $n_4=n_3$ para A e R diferentes de zero é muito restritiva à propagação. Desta forma, a linha reta $N_e=n_4$ (mostrada no interior da Fig. (3.14(a,b))), limita os valores possíveis para N_e , tornando a região $N_e < n_4$ inacessível aos modos guiados. Observe que esse efeito pode ser reduzido através do aumento da frequência normalizada de propagação, como mostra a Fig. 3.14(b). Isso ocorre porque o confinamento dos modos na região núcleo-barreira-anel aumenta com o crescimento de V_3 .

Observando a Fig. (3.14(a,b)) podemos ainda constatar que o crescimento de V_3 aumenta o índice de refração efetivo de todos os modos, embora permaneça praticamente constante. Isso confirma o efeito de aumento do confinamento na região núcleo-barreira-anel à medida que cresce a frequência normalizada de propagação.

3.2.3.2 - N_e em função do índice de refração n_2 .

Fig. 3.15 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_2 .

(a) $V_3=10.0$; (b) $V_3=20.0$.

A Fig. (3.15(a,b)) mostra a variação de N_e como função de n_2 . Para gerar essa figura os demais índices de refração foram mantidos constantes nos valores fornecidos no início da discussão da estrutura W2. Desta forma, o índice de refração n_2 foi variado no intervalo $1.444 < n_2 < 1.4587$.

Está claro nas figuras acima que o aumento das curvas $N_e \times n_2$ com o crescimento de n_2 e V_3 é mais acentuado do que para as curvas $N_e \times n_4$. A estrutura se torna mais favorável à propagação com o aumento de n_2 uma vez que para $V_3=10.0$ o modo HE_{22} está cortado enquanto que em $V_3=20.0$ isso não ocorre. Isto indica que a estrutura limite obtida quando $n_2=n_4$ é muito mais favorável à propagação de modos do que para algum valor $n_2 < n_4$. As figuras mostram ainda que persiste a redução de N_e com o aumento de R para A fixo, pelas razões já mencionadas.

3.3 - Síntese dos principais resultados obtidos neste capítulo.

Mostramos que existe uma diferença fundamental entre o comportamento do modo HE_{11} de ambas as estruturas. A estrutura W1 apresenta um modo fundamental que sempre tem condição de corte em $V_1=0$ enquanto que na W2 a frequência normalizada de propagação pode ser nula ou diferente de zero, dependendo dos parâmetros da fibra. Embora essa demonstração seja feita apenas no Cap. (5), o estudo das curvas de índice de refração efetivo como função da frequência normalizada para a estrutura W1 (Figs. (3.1(a,b)) e (3.4(a,b))) e W2 (Fig. (3.12a)) mostram que isso é verdade.

Mostramos ainda que o confinamento na região núcleo-barreira-anel cresce com o aumento da frequência normalizada. Como o maior índice de refração é o do núcleo das fibras, o estudo dos fatores de confinamento permitiu mostrar que o campo elétrico tende a se concentrar no núcleo da fibra para os modos do tipo 1. No entanto, mostramos que para a estrutura W2 a mudança do campo da região do anel para o núcleo ocorre de maneira rápida na posição do eixo V_3 onde ocorre a menor aproximação entre os modos. Isso não ocorreu para a estrutura W1. Esse comportamento foi atribuído a grande influência que à estrutura limite W_{clad} , mostrada na Fig. (3.9b), exerce sobre a estrutura W2.

RESULTADOS OBTIDOS PARA AS ESTRUTURAS COAXIAIS M1 e M2

4.0 - Introdução

Neste capítulo continuaremos o estudo iniciando no anterior, do índice de refração efetivo como função dos parâmetros da fibra para as estruturas M1 e M2. O estudo segue a linha do capítulo anterior: primeiro vamos apresentar os resultados de N_e em função da frequência normalizada, depois, os fatores de confinamento como função dos parâmetros da fibra e, por último, a variação de N_e como função dos índices de refração. A diferença essencial entre essas estruturas e aquelas estudadas no capítulo anterior está na região do anel que passa a ter o maior índice de refração. Nas estruturas do tipo W, é o núcleo que possui o maior índice de refração. Como será mostrado, essa diferença faz com que os modos para as fibras do tipo M sejam mais insensíveis a uma alteração na extensão do núcleo quando comparados àqueles do tipo W.

4.1- Resultados obtidos para a estrutura M1

Os gráficos apresentados ao longo da discussão sobre a estrutura M1, a menos que dito expressamente ao contrário, foram obtidos para os seguintes valores de índices de refração $n_1=1.46$, $n_2=1.4587$, $n_3=1.4658$ e $n_4=1.444$. A frequência normalizada é definida como:

$$V_2 = ck_0(n_3^2 - n_4^2)^{1/2} \quad (4.1)$$

A razão para esta definição de V_2 é manter a consistência com o estudo da condição de corte.

Fig. 4.1 - Variação do índice de refração efetivo em função de V_2 .

(a) $A=0.05$. (b) $A=0.20$.

A Fig. 4.1(a,b) mostra a variação do índice de refração efetivo como função de V_2 . Não é possível uma comparação direta com as Figs. (3.1(a,b)) ou (3.4(a,b)), válidas para a estrutura W1, pois a definição das frequências normalizadas são diferentes. No entanto, usando os valores dos índices de refração utilizados para gerar a Fig. (3.4(a,b)) e aqueles usados para a Fig. (4.1(a,b)) encontramos que $\frac{V_1}{V_2} = 0.52$. Ou seja, o intervalo em V_2 é um pouco maior do que o dobro do correspondente a V_1 . Tendo essa consideração em mente, podemos fazer comparações entre essa estrutura e a W1.

Comparando a Fig. (3.4(a,b)) com a Fig. (4.1(a,b)) observamos que N_e varia bem mais como função de R para a estrutura M1 do que para a W1. Explicamos isso da seguinte forma. À medida que R aumenta na estrutura M1, a extensão da região de maior índice de refração diminui. Como essa região é a principal responsável pelo confinamento dos modos na estrutura, quanto maior for sua extensão mais favorável será o confinamento na região núcleo-barreira-anel. Assim, ao aumentar R estamos reduzindo a extensão do anel da fibra, fazendo com que N_e diminua para todos os modos. Quando A aumenta, a redução na extensão do anel é ainda maior para os mesmos valores de R . No entanto, esse efeito é pouco pronunciado para a estrutura M1, já que o núcleo não apresenta o maior índice de refração. Isso está mostrado na Fig. (4.1(a,b)) para os mesmos valores de R em dois valores diferentes de A . Refizemos a Fig. (4.1(a,b)) para outros valores de A e R . No entanto, os resultados obtidos na Fig. (4.1) acima foram confirmados sem nenhum acréscimo à discussão, razão pela qual não são apresentadas figuras adicionais.

A Fig. (4.2(a,b)) mostra a variação dos fatores de confinamento nas regiões do núcleo, barreira e anel para o modo fundamental apresentado nas Figs. (4.1(a,b)). Esses fatores de confinamento foram calculados de acordo com as definições dadas pelas Eqs. (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6). A primeira informação importante que retiramos desta figura é que o confinamento do modo fundamental na estrutura núcleo-barreira-anel aumenta rapidamente com o aumento de V_2 . Nas proximidades de $V_2=0$ o modo está próximo da condição de corte, o que faz sua distribuição de campo elétrico estender-se ao longo da direção transversa da fibra, levando uma fração considerável da energia a estar na casca, o que reduz o valor de F . Para os parâmetros considerados, a partir de $V_2 = 5.0$, praticamente não existe campo na casca da fibra. Ao contrário da estrutura W1, em que a fração de energia contida no núcleo da fibra aumenta substancialmente com o aumento de V_1 e A , na estrutura M1 isso não ocorre e em todos os casos considerados o modo HE_{11} tende a aumentar seu confinamento na região do anel à medida que V_2 cresce.

Fig. 4.2 - Variação dos fatores de confinamento para o modo fundamental
(a) $R=0.20$; (b) $R=0.40$. Nesta figura $F = f_1 + f_2 + f_3$.

Vamos analisar a Fig. (4.2 (a,b)) com um pouco mais de detalhe. Observe que em ambas as figuras f_3 é maior do que os outros fatores de confinamento. Isso confirma que a região do anel concentra a distribuição de campo elétrico e a justificativa é que apresenta o maior índice de refração. Observe que o confinamento no anel é maior quando o núcleo é menor. Isso pode ser entendido se tivermos em mente que quanto menor for a extensão do núcleo maior será o comprimento do anel da fibra. Vale ressaltar que se R é grande (Fig. (4.2b)), são necessários maiores valores de V_2 para que o confinamento no anel fique no mesmo nível observado para $R=0.20$. Isso também é consequência da redução no comprimento do anel. Observe que f_3 cresce com o aumento de V_2 indicando aumento do confinamento na região de maior índice de refração. Esse efeito também foi observado no estudo das estruturas W1 e W2.

A Fig. (4.3(a,b)) mostra a variação dos fatores de confinamento em função da frequência normalizada para o modo HE_{12} . As mesmas observações que fizemos com relação ao modo fundamental permanecem válidas para este modo. No entanto devemos mencionar que a contribuição das regiões do núcleo e barreira são maiores neste caso do que naquele. Isso se deve ao fato deste modo ser mais distribuído na direção transversa da fibra do que o fundamental, fazendo com que a região do núcleo e barreira contribua mais. Para concluir essa discussão devemos informar que

as propriedades de confinamento dos modos HE_{11} e HE_{12} da estrutura M1 permanecem válidas para os outros modos.

Fig. 4.3 - Variação dos fatores de confinamento para o modo HE_{12}
(a) $R=0.20$; (b) $R=0.40$.

4.1.1 - Variação de N_e como função dos índices de refração

Nesta seção apresentamos a variação do índice de refração efetivo como função dos índices de refração. Devido à grande quantidade de parâmetros, vamos manter V_2 constante durante a análise. Isso significa que c , k_0 , n_3 e n_4 são constantes ou o produto $ck_0(n_3^2 - n_4^2)^{1/2}$. Supondo que a primeira situação seja a verdadeira, resta-nos variar os índices de refração n_1 e n_2 .

4.1.1.1 - Variação de N_e como função de n_1

A Fig. (4.4 (a,b)) mostra a variação do índice de refração efetivo em função de n_1 , para dois valores de A e mantendo os demais parâmetros constantes. Os índices de refração n_2 , n_3 e n_4 foram mantidos constantes nos valores fornecidos no começo da discussão da estrutura M1. Assim, o intervalo de mudança do índice de refração do núcleo é $1.4587 < n_1 < 1.4658$.

Fig. 4.4 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_1 para $R=0.40$. (a) $V_2=5.0$; (b) $V_2=10.0$.

Os resultados apresentados na Fig. (4.4(a,b)), mostram que N_e é praticamente insensível a uma alteração no valor de n_1 para dados valores de R e A . Essa insensibilidade está mostrada claramente na Fig. (4.4a), para $V_2=5.0$. Como já mostramos, o campo elétrico dos vários modos nesta estrutura apresenta seu máximo de distribuição ao redor ou dentro da região do anel. Assim, quando a extensão do núcleo é pequena, seu efeito sobre as propriedades do campo praticamente não existem. Já para $A=0.20$, N_e dos modos ainda permanece inalterado, com exceção dos modos HE_{12} em $V_2=5.0$ e HE_{12} e HE_{13} em $V_2=10.0$. Isso tem um justificativa no fato de que estes modos tem uma contribuição significativa do núcleo sobre suas propriedades, como mostra a variação do fator de confinamento para o modo HE_{12} (mostrado na Fig. (4.3b) e HE_{13} (não mostrado).

A Fig. (4.4(a,b)) também mostra que N_e cresce para todos os modos, à medida que V_2 cresce. O crescimento de N_e implica aumento do confinamento modal na região núcleo-barreira-anel e também foi obtido para os modos da estrutura W1 e W2. Observe que N_e diminui com o aumento de A , com exceção dos modos comentados no parágrafo anterior, pois o comprimento do anel diminui com R mantido constante.

Nós refizemos a Fig. (4.4(a,b)) para outros valores de R , V_2 e A . Os resultados obtidos com essas novas simulações confirmaram a pouca participação do núcleo na determinação das propriedades dos modos.

4.1.1.2 - Variação de N_e como função de n_2 .

Fig. 4.5 - Variação do índice de refração efetivo em função de n_2 para $A=0.20$. (a) $V_2=5.0$; (b) $V_2=10.0$.

A Fig. (4.5(a,b)) mostra como varia N_e em função do índice de refração da barreira. Para que a estrutura coaxial permaneça dentro dos limites da M1, n_2 deve estar dentro do intervalo $n_4 < n_2 < n_1$. Os outros índices de refração foram mantidos constantes e iguais aos valores apresentados no início da discussão. Desta forma, o intervalo de variação para n_2 é o seguinte: $1.444 < n_2 < 1.46$.

Comparando a Fig. (4.5(a,b)) com a Fig. (4.4(a,b)) verificamos que N_e muda mais como função de n_2 . A condição $n_2=n_4$ é a mais desconfiante para a estrutura M1 uma vez que a grande diferença (n_1-n_4) provoca uma redução de N_e . O oposto ocorre quando $n_2=n_1$, como pode ser verificado para todos os modos na Fig. (4.5(a,b)).

A Fig. (4.5(a,b)) também mostra o efeito do aumento do confinamento na estrutura núcleo-barreira-anel provocado pelo crescimento de V_2 . Como foi mostrado para o caso particular em que $n_2=1.4587$ na Fig. 4.1(b), os modos HE_{22} e HE_{13} estão cortados em $V_2=5.0$ e isso permanece mesmo quando n_2 varia para o

intervalo considerado nesta seção. À medida que n_2 diminui do valor usado para gerar a Fig. 4.1(b), o modo HE_{12} aproxima-se cada vez mais da condição de corte até que para $n_2=1.4443$ (com $A=0.20$, $R=0.20$) ou $n_2=1.4517$ (com $A=0.20$, $R=0.40$), o modo é cortado.

Para os outros modos, o índice de refração efetivo se torna menor quando R cresce, como mostra a Fig. 4.5(a,b). Isso já foi justificado nos parágrafos anteriores. Novamente, como N_e aumenta de forma proporcional ao aumento da extensão da região do anel, uma diminuição nesta região acarreta uma conseqüente diminuição no índice de refração efetivo. Nós refizemos a Fig. 4.5(a,b) para outros valores de A e não ocorreram mudanças significativas nos resultados, razão pela qual não apresentamos mais gráficos.

4.2 - Resultados obtidos para a estrutura M2

Nesta seção vamos apresentar os resultados do estudo da variação de N_c como função da frequência normalizada V_4 , definida como:

$$V_4 = ck_0(n_3^2 - n_2^2)^{1/2}. \quad (4.1)$$

Os índices de refração utilizados nas simulações, a menos que dito expressamente em contrário, assumem os seguintes valores: $n_1=1.46$, $n_2=1.444$, $n_3=1.4658$ e $n_4=1.4587$. Usando os índices de refração utilizados para gerar os gráficos da estrutura W1 e aqueles da estrutura M2, podemos relacionar as frequências de corte através da relação $\frac{V_1}{V_4} = 0.52$.

Fig. 4.6 - Estruturas obtidas como limites da M2. (a) Diâmetro do núcleo nulo ($a=0$); (b) $b=c$.

Assim como será mostrado no capítulo 5 para a estrutura W2, a estrutura coaxial M2 também apresenta modo fundamental cuja frequência de corte é diferente de zero a partir de determinados valores dos parâmetros A e R , que dependem da configuração de índices de refração. A justificativa para esse comportamento do modo fundamental é análoga àquela fornecida para a estrutura W2. A atual estrutura, no entanto, é ainda mais restritiva à propagação de modos em geral e em particular, do modo HE_{11} . Isso se deve ao fato desta possuir estruturas limites em $R=1-A$ e $A=0$, conforme mostra a Fig. (4.7(a,b)), que apresentam modos fundamentais que podem

ter frequência de corte diferente de zero. Para a estrutura W2, apenas um dos limites, aquele obtido fazendo $R=1-A$, apresentou a propriedade anterior para o modo fundamental.

A estrutura apresentada na Fig. (4.6a), foi obtida a partir da M2 fazendo o diâmetro do núcleo igual a zero. Ela foi estudada por Samir e Kharbat ^[26], que mostraram a existência de um valor crítico para a razão b/c acima da qual o modo LP_{01} apresenta frequência de corte diferente de zero. No capítulo 5 deduziremos essa expressão para a razão crítica b/c e mostraremos que esse valor depende dos índices de refração n_2 , n_3 e n_4 . Já a estrutura limite em $R=1-A$ com $A \neq 0$, é a mesma obtida no estudo da estrutura W2 e que foi estudada por Adams ^[25].

4.2.1 - Resultados obtidos para N_e como função de V_4

Fig. 4.7 - Variação do índice de refração efetivo em função de V_4 com A constante. (a) Modos HE_{11} , HE_{12} , HE_{13} ; (b) Modos HE_{21} , HE_{22} e HE_{31} .

A Fig. (4.7(a,b)) mostra como varia N_e em função de V_4 para a estrutura M2. Observe que não ocorrem mudanças bruscas nas curvas $N_e \times V_4$ no intervalo considerado como aquelas observadas para a estrutura W2 (Fig. (3.11(a,b))). Os resultados mostram que a redução de N_e com o aumento de R é maior para a estrutura M2 quando comparada à estrutura W1. Isso pode ser explicado pelo fato de M2 ser mais desconfiante do que W1, pois a região do anel apresenta o maior índice

de refração. Como o núcleo contribui pouco para a distribuição de campo elétrico nesta estrutura, há uma concentração na região n_3 ($b < r < c$) que é reforçada pelo fato de $n_4 > n_2$. Assim, uma variação nos parâmetros A e R que levem a uma diminuição da diferença $(c-b)$, provocará uma redução de N_e . Na Fig. (4.7a), A é mantido constante no valor 0.20 enquanto que R muda. Desta forma, a diferença $(c-b)$ diminui fazendo com que N_e para os modos HE_{11} , HE_{12} e HE_{13} diminua. O mesmo ocorre para os modos HE_{21} , HE_{22} e HE_{31} na Fig. (4.7b).

A próxima figura mostra o efeito da variação de A na estrutura coaxial M2 com R fixo. Nesta condição, um aumento de A também leva a uma redução no tamanho do anel, provocando uma diminuição de N_e . Vale ressaltar que os modos que apresentam uma distribuição de campo elétrico com predominância na região do anel, serão os mais afetados com a redução na extensão desta camada.

Fig. 4.8 - Variação do índice de refração efetivo em função de V_4 com R constante. (a) Modos HE_{11} , HE_{12} , HE_{13} ; (b) Modos HE_{21} , HE_{22} e HE_{31} .

Nós refizemos a Fig. (4.8(a,b)) para outros valores de R . Os resultados obtidos comprovaram aqueles discutidos nos parágrafos anteriores. Por exemplo, para $R=0.40$, A assumindo os valores da Fig. (4.8(a,b)) e V_4 no mesmo intervalo, obtivemos igual comportamento das curvas $N_e \times V_4$. Mas em determinado valor de V_4 os valores de N_e para $R=0.40$ são menores do que no correspondente ponto obtido para $R=0.20$. Esse comportamento, pelo que já foi discutido, é esperado pois o

aumento de R faz a extensão do anel diminuir, reduzindo o confinamento na região núcleo, barreira e anel.

4.2.2 - Estudo dos fatores de confinamento

Fig. 4.9 - Variação dos fatores de confinamento para o modo Fundamental (HE₁₁). (a) $R=0.20$; (b) $R=0.40$.

A Fig. (4.9(a,b)) mostra a variação dos fatores de confinamento do núcleo, barreira e anel para o modo fundamental cujas curvas de dispersão estão mostradas na Fig. (4.8a). Como nas estruturas anteriores, o confinamento na região núcleo-barreira-anel aumenta à medida que V_4 cresce. No entanto, o campo do modo fundamental sempre concentra-se na região do anel após certo valor da frequência normalizada. Por exemplo, na Fig. (4.9a) com $A=0.05$, $R=0.20$ e acima de $V_4=13.0$ praticamente todo o campo do modo HE₁₁ está concentrado na região do anel. Como mostra a figura, o efeito da redução de N_e com o aumento de A ou R leva o modo fundamental a retardar seu confinamento na região do anel da fibra, fazendo com que as curvas de confinamento versus V_4 se desloquem para maiores valores de V_4 . É necessário que o efeito do aumento do confinamento com o crescimento de V_4 seja apreciável para contrabalançar a diminuição do comprimento do anel. Essa é a mesma explicação dada para a estrutura M1. Observe que para $R=0.40$ e $A=0.30$ na Fig. (4.9b), o modo fundamental apresenta condição de corte diferente de zero.

Fig. 4.10 - Variação dos fatores de confinamento para o modo HE_{12} .
(a) $R=0.20$. (b) $R=0.40$.

A Fig. (4.10(a,b)) mostra a mesma variação dos parâmetros A e R para o modo HE_{12} . Neste caso o campo modal também está concentrado na região do anel mesmo para valores de V_4 próximos ao corte. Os resultados mostram que o aumento de V_4 concentra cada vez mais a energia na região do anel. A razão é a mesma dada para o modo fundamental de forma que as curvas deslocam-se para maiores valores de V_3 à medida que A e R aumentam pelas razões já mencionadas.

4.2.3 - Variação de N_e como função dos índices de refração

Nesta seção mostraremos como é a variação do índice de refração efetivo como função dos índices de refração para a estrutura M2. Devido à enormidade de parâmetros, vamos manter V_2 constante. Isso significa que c , k_0 , n_3 e n_4 são constantes ou o produto $ck_0(n_3^2 - n_2^2)^{1/2}$. Supondo que a primeira hipótese seja satisfeita, resta-nos variar n_1 e n_4 . Os demais índices de refração foram mantidos constantes nos valores apresentados no começo da discussão desta estrutura

4.2.3.1 - Variação de N_e como função do índice de refração n_1

Vamos iniciar o estudo com o índice de refração n_1 . Para que a configuração de índices de refração seja mantida dentro dos limites permitidos para a estrutura M2, devemos fazer $n_4 < n_1 < n_3$. Usando os valores considerados no começo da discussão, o intervalo anterior se transforma em $1.4587 < n_1 < 1.4658$.

Fig. 4.11 - Variação do índice de refração efetivo como função de n_1 .

(a) $V_4=10.0$; (b) $V_4=20.0$.

A Fig. (4.11a) mostra como muda o índice de refração efetivo como função do índice de refração do núcleo, para os modos não cortados em $V_4=10.0$ da Fig. (4.8(a,b)). Observe ainda na figura que os modos são insensíveis a uma alteração no valor do índice de refração do núcleo. Isso comprova o que dissemos anteriormente sobre a insensibilidade do campo ao índice de refração do núcleo na estrutura M2. No entanto, observe que uma redução na extensão do anel através do aumento de A ou R , continua provocando uma diminuição de N_e e como consequência, do confinamento modal na região núcleo-barreira-anel, conforme foi mostrado no estudo das curvas $N_e \times V_4$ para o caso particular em que $n_1=1.46$.

À medida que V_4 cresce, o confinamento dos modos na região do anel cresce, aumentando o valor de N_e conforme mostra a Fig. (4.11b). No entanto, a medida que n_1 cresce e se aproxima de n_3 para grandes valores de A , os modos passam a ter uma menor distância de aproximação em determinado valor de n_1 , como mostra a Fig.

(4.12b) para os modos HE_{12} e HE_{13} quando $A=0.30$ e $R=0.20$. No estudo da estrutura W2 obtivemos esse comportamento de aproximação entre os modos. Uma justificativa para isso é que o aumento da diferença (n_1-n_4) na estrutura M2, aproxima seu comportamento àquele da estrutura W2 onde aparecem aproximações entre os modos (Fig. (3.11(a,b))).

4.2.3.2 - Variação de N_e como função do índice de refração n_4

Fig. 4.12 - Variação do índice de refração efetivo como função de n_4 .

(a) $V_4=10.0$; (b) $V_4=20.0$.

A figura acima mostra como muda o índice de refração efetivo como função de n_4 , o índice de refração da casca. Essa figura foi obtida mantendo os outros índices de refração constantes nos valores declarados no começo da discussão da estrutura M2. Portanto, o intervalo de variação para n_4 é o seguinte: $1.444 < n_4 < 1.46$. Os resultados mostram que o aumento de n_4 para valores pequenos de V_4 , gradativamente cortam os modos. Isso indica que o crescimento de n_4 é desfavorável ao guiamento de modos, tornando a estrutura M2 mais restritiva à propagação. De acordo com o apresentado na Fig. (4.12 (a,b)), o comportamento anterior é reforçado pela diminuição da região do anel através do aumento de A ou R . Observe que a condição de corte dos modos ocorre quando $N_e=n_4$. Isso implica que além desta curva (linha reta na Fig. 4.12.(a)), não são permitidos modos propagantes.

Comparando as Figs. (4.12a) com a (4.12b) comprovamos mais uma vez que o aumento de V_4 leva a um crescimento de N_e para todos os modos. As razões já

foram explicadas nos parágrafos anteriores. A exceção é a curva $N_c \times n_4$ do modo HE_{13} na Fig. 4.12(a) com $R=0.20$ e $A=0.30$ quando comparada com a correspondente em $A=0.05$. Ainda não compreendemos porque ocorre essa exceção.

4.3 - Síntese dos principais resultados obtidos neste capítulo

O principal resultado obtido para as estruturas do tipo M dizem respeito a pouca influência que a região do núcleo exerce sobre as curvas de índice de refração efetivo como função da frequência normalizada. Através de várias curvas para a estrutura M1 (Figs. (4.1(a,b)), (4.2(a,b)) e (4.4(a,b))), mostramos que isso é consequência de o campo dos modos concentrarem-se na região de maior índice de refração n_3 .

Da mesma forma que para as estruturas W1 e W2, o aumento da frequência normalizada de propagação provoca um aumento do confinamento na região núcleo-barreira-anel para as estruturas M1 e M2. No entanto, a região da fibra em que o campo dos modos passa a se concentrar é a do anel, como mostram as Figs. (4.2(a,b)) e (4.3(a,b)) para a estrutura M1 e Figs. (4.9(a,b)) e (4.10(a,b)) para a estrutura M2. Finalmente, as curvas para o modo fundamental da estrutura M2 nas figuras (4.7a) e (4.8a), permitem antecipar que esse modo apresenta frequência de corte diferente de zero a partir de certo valor de A e R para uma determinada configuração de índice de refração. Isso será mostrado explicitamente no Cap. (5), mas como as estruturas limites de M2, mostradas na Fig. (4.6(a,b)), apresentam modos fundamentais que podem ter frequência de corte diferente de zero, podemos assegurar que a estrutura M2 também apresenta, simplesmente porque seu comportamento é intermediário entre as duas situações limites.

ESTUDO DO CORTE DAS ESTRUTURAS COAXIAIS

5.0) Introdução.

Cozens e Boucouvalas^[12] introduziram um novo tipo de fibra óptica que apresenta quatro camadas de dielétrico. Nesta nova estrutura, a luz é guiada principalmente pela camada de maior índice de refração. A partir desta fibra foram desenvolvidos dispositivos tais como sensores e filtros espectrais ^[14]. No Cap. (2) fizemos um estudo teórico usando a aproximação LP, dos guias de ondas dielétricos com quatro camadas mostrados na Fig.(2.5), chamados genericamente de fibras coaxiais. Naquele capítulo foram obtidas as equações transcendentais para o índice de refração efetivo de cada estrutura, em todos os intervalos permitidos. Neste capítulo estudaremos a condição de corte dos modos das fibras coaxiais apresentados e discutidos nos Caps. (3) e (4).

Como um exemplo da importância do estudo da condição de corte citamos que a estrutura W1 foi utilizada para fabricar filtros espectrais ^[14] com características promissoras para comunicações ópticas. Esses filtros são feitos a partir de um estreitamento do diâmetro externo da fibra, que perde sua invariância translacional na direção de propagação. Esse estrangulamento passa a ser chamado pelo seu nome em inglês *taper*. O entendimento das propriedades de um *taper* adiabático é feito através de uma teoria perturbativa em que o campo elétrico propagante é aproximado por uma expansão de todos os modos locais compatíveis com a fibra de raio externo local ^[27]. Se o *taper* for abrupto, seu comportamento passa a ser semelhante ao de um

interferômetro do tipo Michelson ^[28]. A Fig. (5.1) mostra esquematicamente como é o processo de fabricação de um *taper*.

Fig. 5.1 - Desenho esquemático mostrando como é feito um taper a partir de uma fibra ótica.

Um *taper* (que possui uma denominação alternativa de Estrutura Bicônica - EB), é feito através da fusão de uma fibra em um forno que possui um comprimento apropriado. Ao mesmo tempo a fibra é submetida a uma tensão através de motores de passo, que a faz alongar ao fundir. Como o diâmetro da fibra na cintura do *taper* pode reduzir-se a valores da ordem de 5 μm , o núcleo colapsa e a região interna da parte estrangulada passa a ser composta pelo material da casca. Essa região tem suas extremidades definidas pelas pontas dos cones formados pelo núcleo da fibra, como está mostrado esquematicamente no destaque da Fig. (5.1).

Independentemente do dispositivo ser adiabático ou abrupto, é necessário para a manifestação de suas propriedades que a fibra comporte pelo menos dois modos. Esses geralmente são os de ordem mais baixa (HE_{11} e HE_{12}). Se um deles está em condição de corte o dispositivo é privado de operar. Assim, o estudo da condição de corte dos modos é necessário para que saibamos sob que condições os dois modos existem.

Este capítulo está dividido da seguinte forma. Na seção (5.1) apresentaremos o procedimento para obter as equações transcendentais cujas soluções fornecem as frequências de corte como função dos parâmetros da fibra. Na seção (5.2) faremos uma análise, para cada uma das estruturas, das condições em que o modo fundamental apresenta frequência de corte diferente de zero. Mostraremos que as estruturas W1 e M1 têm modos fundamentais cujas frequências de corte são sempre nulas enquanto que nas estruturas W2 e M2 isso não ocorre. Na seção (5.3) as equações transcendentais obtidas na seção (5.1) serão resolvidas numericamente e as propriedades de corte dos modos serão analisadas para cada estrutura como função de seus parâmetros.

5.1 - Determinação das equações transcendentais para a frequência de corte

A condição de corte para qualquer modo das fibras coaxiais mostradas na Fig. (2.5), ocorre quando $N_e = n_4$. Usando essa condição nas equações transcendentais apresentadas na Tab. (2.3), obtemos a equação transcendental para a frequência normalizada de propagação dos modos na condição de corte. No entanto, devem ser usadas apenas aquelas equações transcendentais cujo limite inferior do intervalo de índice de refração seja n_4 porque a condição de corte dos modos ocorre apenas quando $N_e = n_4$.

Ao usar a condição anterior para N_e nas equações transcendentais ocorrem alguns problemas. Como por definição $W_4 = ck_0 (N_e^2 - n_4^2)^{1/2}$, a condição $N_e = n_4$ faz com que $W_4 = 0$, fazendo com que a função modificada de Bessel $K_m(W_4)$ divirja no limite em que W_4 tende a zero. Esse problema é contornado através do uso de uma aproximação para essa função, válida quando o argumento é pequeno^[29], dada por:

$$K_\ell(W_4) = \begin{cases} -\ln(W_4) + \ln(2) - \gamma, & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{\Gamma(\ell)}{2} \left(\frac{2}{W_4} \right)^\ell, & \text{se } \ell > 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Nesta expressão, $\gamma \approx 0.577$ é chamada de constante de Euler e $\Gamma(\ell)$ representa a função Gamma de ordem ℓ .

Fazendo $N_e = n_4$ na equação transcendental válida no intervalo $n_4 \leq N_e < n_2$ para as estruturas W1 ou W2 e usando a aproximação da Eq. (5.1), obtemos uma equação transcendental para a frequência normalizada de propagação destas estruturas no corte, doravante denominada de frequência de corte. Se fizermos a mesma substituição na equação transcendental válida para a estrutura W2 em que $n_4 < N_e < n_3$ ou na equação transcendental da estrutura M2 onde $n_4 < N_e < n_1$, obtemos a equação transcendental para a frequência de corte válida para as outras estruturas. O limite $W_4 \rightarrow 0$ nos termos em que aparece a função modificada de Bessel $K_m(W_4)$, é feito da seguinte forma:

$$\lim_{W_4 \rightarrow 0} \left(\frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell+1}(W_4)} \right) = \frac{1}{2\ell}, \quad (5.2)$$

para $\ell \neq 0$.

Para $\ell = 0$, devemos analisar todo o termo em que aparece W_4 , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{W_4 \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{J_0(U_4)}{U_4 J_1(U_4)} - \frac{K_0(W_4)}{W_4 K_1(W_4)}}{\frac{Y_0(U_4)}{U_4 Y_1(U_4)} - \frac{K_0(W_4)}{W_4 K_1(W_4)}} \right) &= \\ = \lim_{W_4 \rightarrow 0} \left(\frac{J_0(U_4) - U_4 J_1(U_4)(-\ln(W_4) + \ln(2) - \gamma)}{Y_0(U_4) - U_4 Y_1(U_4)(-\ln(W_4) + \ln(2) - \gamma)} \right) \frac{Y_1(U_4)}{J_1(U_4)} &= 1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Substituindo os limites anteriores nas equações transcendentais que determinam a condição de corte e fazendo as operações necessárias, obtemos uma equação transcendental para a frequência de corte que apresenta a seguinte forma:

$$\left[\frac{2\ell J_\ell(U_4) - U_4 J_{\ell+1}(U_4)}{2\ell Y_\ell(U_4) - U_4 Y_{\ell+1}(U_4)} \right] (AD \mp BC) = (E_1 D \mp E_2 B), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

onde os parâmetros A, B, C, D, E₁ e E₂ são somas ou diferenças de produtos de funções de Bessel que dependem das estruturas coaxiais e estão definidos na Tab. (5.1). O sinal menos dentro de cada parêntese na Eq. (5.4) é aplicado para as estruturas W1 e M1 enquanto que o sinal mais para as estruturas W2 e M2.

W1 e M1
$A = W_3 Y_{\ell+1}(W_3) Y_{\ell}(U_3) - U_3 Y_{\ell+1}(U_3) Y_{\ell}(W_3)$
$B = W_2 Y_{\ell+1}(W_2) J_{\ell}(U_1) - U_1 J_{\ell+1}(U_1) Y_{\ell}(W_2)$
$C = W_3 J_{\ell+1}(W_3) Y_{\ell}(U_3) - U_3 Y_{\ell+1}(U_3) J_{\ell}(W_3)$
$D = W_2 J_{\ell+1}(W_2) J_{\ell}(U_1) - U_1 J_{\ell+1}(U_1) J_{\ell}(W_2)$
$E_1 = W_3 Y_{\ell+1}(W_3) J_{\ell}(U_3) - U_3 J_{\ell+1}(U_3) Y_{\ell}(W_3)$
$E_2 = W_3 J_{\ell+1}(W_3) J_{\ell}(U_3) - U_3 J_{\ell+1}(U_3) J_{\ell}(W_3)$
W2 e M2
$A = W_3 K_{\ell+1}(W_3) Y_{\ell}(U_3) - U_3 Y_{\ell+1}(U_3) K_{\ell}(W_3)$
$B = U_1 J_{\ell+1}(U_1) K_{\ell}(W_2) - W_2 K_{\ell+1}(W_2) J_{\ell}(U_1)$
$C = W_3 I_{\ell+1}(W_3) Y_{\ell}(U_3) + U_3 Y_{\ell+1}(U_3) I_{\ell}(W_3)$
$D = W_2 I_{\ell+1}(W_2) J_{\ell}(U_1) + U_1 J_{\ell+1}(U_1) I_{\ell}(W_2)$
$E_1 = W_3 K_{\ell+1}(W_3) J_{\ell}(U_3) - U_3 J_{\ell+1}(U_3) K_{\ell}(W_3)$
$E_2 = W_3 I_{\ell+1}(W_3) J_{\ell}(U_3) + U_3 J_{\ell+1}(U_3) I_{\ell}(W_3)$

Tab. (5.1) Parâmetros da Eq. (5.4).

As definições de U₁, U₃, U₄, W₂ e W₃ em termos dos índices de refração e dimensões espaciais estão fornecidas nas Tab. (2.1) e (2.2). No entanto, para a análise que segue é mais conveniente redefinir esses parâmetros em termos de outros mais apropriados. Considerando a definição das frequências normalizadas de propagação,

$$V_1 = ck_0 \left(n_1^2 - n_3^2 \right)^{1/2},$$

(5.5)

$$V_2 = ck_0 \left(n_3^2 - n_4^2 \right)^{1/2},$$

(5.6)

$$V_3 = V_1,$$

(5.7)

$$V_4 = ck_0 \left(n_3^2 - n_2^2 \right)^{1/2},$$

(5.8)

para as estruturas W1, M1, W2 e M2 respectivamente, $A=a/c$ e $R=(b-a)/c$ fornecidas nos capítulos (3) e (4), podemos reescrever os argumentos das várias funções de Bessel na Tab. (5.1). O resultado está na Tab. (5.2).

W1 (i=1)	W2 (i=3)	M1 (i=2)	M2 (i=4)
$U_1 = \frac{V_1 A}{(1 - q_1^2)^{1/2}}$	$U_1 = V_3 \left(\frac{1 - p_2^2}{1 - q_2^2} \right)^{1/2} A$	$U_1 = V_2 A q_3$	$U_1 = V_4 (q_4^2 - p_4^2)^{1/2} A$
$U_3 = \frac{V_1 q_1 (R + A)}{(1 - q_1^2)^{1/2}}$	$U_3 = V_3 \left(\frac{q_2^2 - p_2^2}{1 - q_2^2} \right)^{1/2} (R + A)$	$U_3 = V_2 (R + A)$	$U_3 = V_4 (1 - p_4^2)^{1/2} (A + R)$
$U_4 = \frac{V_1 q_1}{(1 - q_1^2)^{1/2}}$	$U_4 = V_3 \left(\frac{q_2^2 - p_2^2}{1 - q_2^2} \right)^{1/2}$	$U_4 = V_2$	$U_4 = V_4 (1 - p_4^2)^{1/2}$
$W_2 = \frac{V_1 p_1 A}{(1 - q_1^2)^{1/2}}$	$W_2 = \frac{V_3 p_2 A}{(1 - q_2^2)^{1/2}}$	$W_2 = V_2 p_3 A$	$W_2 = V_4 p_4 A$
$W_3 = \frac{V_1 p_1 (R + A)}{(1 - q_1^2)^{1/2}}$	$W_3 = \frac{V_3 p_2 (R + A)}{(1 - q_2^2)^{1/2}}$	$W_3 = V_2 p_3 (R + A)$	$W_3 = V_4 p_4 (A + R)$

Tab. (5.2) Argumentos das várias funções de Bessel.

$q_1 = \left(\frac{n_3^2 - n_4^2}{n_1^2 - n_4^2} \right)^{1/2}$	$p_1 = \left(\frac{n_2^2 - n_4^2}{n_1^2 - n_4^2} \right)^{1/2}$
$q_2 = \left(\frac{n_3^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2}$	$p_2 = \left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2}$
$q_3 = \left(\frac{n_1^2 - n_4^2}{n_3^2 - n_4^2} \right)^{1/2}$	$p_3 = \left(\frac{n_2^2 - n_4^2}{n_3^2 - n_4^2} \right)^{1/2}$
$q_4 = \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2} \right)^{1/2}$	$p_4 = \left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2} \right)^{1/2}$

Tab. (5.3) Definição dos outros parâmetros da Tab. (5.2).

Observe que a Eq. (5.4) é uma equação transcendental que relaciona a frequência de corte com todos os parâmetros da fibra coaxial. Esta equação deve ser resolvida numericamente para que sejam estabelecidas as propriedades dos modos em relação ao corte.

Na próxima seção vamos dar uma especial atenção ao modo fundamental de cada estrutura coaxial na Fig. (2.5). A motivação para isso é o fato deste modo ser o usualmente excitado nas fibras óticas para transmitir informações. Da mesma forma, o *taper* que iremos estudar no Cap. (8) permite como a propagação dominante àquela do modo fundamental.

5.2 - Considerações sobre o modo fundamental

Mostraremos na próxima seção que a resolução numérica da Eq. (5.4) admite apenas soluções para valores discretos da frequência de corte. O ponto $V_i=0$, $i=1,2,3,4$ (ver notação na Tab. (5.2)), é chamada de solução trivial, como será mostrado logo mais. Por exemplo, para a estrutura W1 com $\ell = 0$ na Eq. (5.4), as possíveis soluções para V_1 estão no intervalo $[0,\infty)$ e são ordenadas, em ordem crescente como $x_1, x_2, x_3, \dots$, correspondendo aos modos HE_{11} , HE_{12} , HE_{13} , etc (ver, por exemplo, o ponto inicial destes modos nas curvas N_e versus V_1 apresentadas na Fig. (3.1(a,b))). A solução de menor valor é identificada como correspondendo ao modo fundamental. Como a solução trivial é válida na maioria das vezes, o estudo da Eq.(5.4) próximo de $V_i=0$, $i=1,2,3,4$, permite determinar as condições em que o modo fundamental apresenta frequência de corte diferente de zero.

Vamos definir a função F como sendo a diferença entre o lado direito e esquerdo da Eq. (5.4). Desta forma, a condição $F=0$ determina os valores de V_i , $i=1,2,3,4$ para as possíveis soluções da Eq.(5.4). Seguindo o procedimento adotado por Safaai-Jazi *et al* ^[30,31], no estudo de guias de ondas dielétricos coaxiais com duas e três camadas, vamos fazer $V_i \rightarrow 0$, $i=1,2,3,4$ em F . Isso corresponde a fazer o comprimento de onda tender para infinito. Para achar a forma de F válida neste limite, devemos substituir as funções de Bessel por aproximações válidas quando o argumento é pequeno uma vez que U_1, U_3, U_4, W_2 e W_3 tendem a zero. Essas aproximações são fornecidas na Tab. (5.4).

Vamos fazer $\ell = 0$ em F. Substituindo as funções de Bessel na definição de F por suas aproximações na Tab. (5.4) até segunda ordem em x e simplificando a expressão formada, obtemos o seguinte comportamento de F nas proximidades de $V_i=0$:

$J_0(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2}$	$J_1(x) \cong \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}$
$Y_0(x) \cong \frac{2}{\pi} \ln(x)$	$Y_1(x) \cong -\frac{2}{\pi x}$
$I_0(x) \cong 1 + \frac{x^2}{2}$	$I_1(x) \cong \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16}$

Tab. (5.4) Comportamento das várias funções de Bessel no limite $x \rightarrow 0$.

$$F = V_i F_i \quad , i=1, 2, 3 \text{ e } 4$$

(5.9)

onde na Eq. (5.9) F_i depende da fibra coaxial considerada, sendo função das dimensões espaciais e índices de refração. As funções F_i estão apresentadas na Tab. (5.5) para cada estrutura.

W1	$F_1 = 4 \left[\frac{(1 - (R + A)^2) q_1^2}{1 - q_1^2} + \frac{(R + A)^2 p_1^2}{1 - q_1^2} + \frac{A^2 (1 - p_1^2)}{1 - q_1^2} \right]$
M1	$F_2 = 4 \left[(1 - (R + A)^2) + p_3^2 (R + A)^2 + A^2 (q_3^2 - p_3^2) \right]$
W2	$F_3 = -\frac{(R + A)^2 q_2^2}{1 - q_2^2} + \frac{A^2}{1 - q_2^2} + \frac{q_2^2 - p_2^2}{1 - q_2^2}$
M2	$F_4 = -(R + A)^2 + A^2 q_4^2 + 1 - p_4^2$

Tab. (5.5) Funções F_i , $i=1,2,3,4$ para cada tipo de fibra coaxial.

Vamos analisar a Eq. (5.9) com mais detalhes. Essa equação mostra que se existir o limite $\lim_{V_i \rightarrow 0} F = 0$, $i=1,2,3,4$, a solução trivial faz parte das possíveis soluções da Eq. (5.4). A pergunta que devemos responder é a seguinte: será que existe alguma condição sobre os parâmetros da fibra coaxial que faz o modo

fundamental começar em uma frequência de corte diferente de zero? Para responder, vamos estudar o comportamento da Eq. (5.9) para V_i ($i=1,2,3,4$) próximo de zero.

Consideremos as estruturas W1 e M1 na situação em que V_i ($i=1,2$) está muito próximo de zero. De acordo com a Tab. (5.5) F_i , $i=1,2$ para estas estruturas é sempre maior do que zero para quaisquer valores dos parâmetros das fibras. Neste caso, F poderá ser tão pequeno quanto menor for V_i , $i=1,2$, e só será nulo quando V_i for igual a zero. Assim, o modo fundamental sempre apresenta frequência de corte nula para as estruturas W1 e M1.

A situação é diferente para as estruturas W2 e M2. Consideremos a situação em que V_i , $i=3,4$ na Eq. (5.9), está muito próximo de zero. De acordo com a Tab. (5.5) F_i , $i=3,4$ pode ser nulo. Impondo que F_i seja igual a zero, F pode ser zero mas com $V_i \neq 0$. Desta forma, a condição $F_i=0$ para as estruturas W2 e M2, determina a relação que os parâmetros (q_2, p_2) (ou (q_4, p_4)), A e R devem satisfazer para que V_i , $i=3,4$, possa começar a ser diferente de zero. No entanto, o cálculo exato de V_i deve ser feito através da resolução numérica da Eq. (5.4).

Antes de prosseguirmos com a análise das estruturas coaxiais, vamos usar as funções F_i , $i=3,4$ para as estruturas W2 e M2. Investigaremos a situação de duas estruturas coaxiais com três camadas, obtidas como limites das estruturas anteriores. Essas estruturas limites são obtidas fazendo A e R assumirem seus valores limites e são interessantes pelo fato de estarem bem fundamentadas na literatura, permitindo checar nossos resultados.

5.2.1) Casos limites das estruturas W2 e M2

Fazendo $F_i=0$, $i=3,4$ na Tab. (5.5) para as estruturas W2 e M2, obtemos a condição entre os parâmetros da fibra que separa a região onde $V_i=0$ daquela em que $V_i \neq 0$ ($i=3,4$). Para a estrutura W2 essa condição de fronteira pode ser determinada através da seguinte equação:

$$-(R + A)^2 q_2^2 + A^2 + q_2^2 - p_2^2 = 0. \quad (5.10)$$

Assim, dado um valor para o par ordenado (p_2, q_2) , obtemos uma curva $R(A)$ no plano R versus A , que separa a região onde o modo fundamental da estrutura W_2 tem $V_3=0$ daquela em que $V_3 \neq 0$.

Para a estrutura M_2 , obtemos a seguinte equação:

$$-(R+A)^2 + A^2 q_4^2 - p_4^2 + 1 = 0. \quad (5.11)$$

Da mesma forma, para um dado valor de (p_4, q_4) , obtemos no plano R versus A uma curva $R(A)$ que separa a região em que o modo fundamental da estrutura M_2 possui $V_4=0$ daquela em que $V_4 \neq 0$.

Fig. 5.2 - (a) Estrutura coaxial estudada por Mahmaud *et al* ^[26],
(b) Estrutura coaxial estudada no livro de Adams ^[16].

Retornemos à estrutura M_2 cujo perfil está mostrado na Fig. (2.5). Fazendo $a=0$ esta fibra coaxial se reduz àquela estudada por Mahmaud *et al* ^[26], como está mostrado na Fig. (5.2a). A imposição anterior faz com que $A=a/c=0$ e $R=(b-a)/c=b/c$. Substituindo estes valores na Eq. (5.11) e usando as definições de p_4 e q_4 fornecidos na Tab. (5.3), o valor obtido para a razão b/c em nosso trabalho é dado por :

$$\frac{b}{c} = \left(\frac{n_3^2 - n_4^2}{n_3^2 - n_2^2} \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

O valor anterior para a razão $\frac{b}{c}$ representa o valor crítico acima do qual o frequência de corte do modo fundamental passa a ser diferente de zero. Substituindo

na Eq.(5.12) os valores dos índices de refração fornecidos por Mahmaud *et al* ^[26], obtemos que $\frac{b}{c} = 0.55$. Isso corresponde ao ponto a partir do qual o modo fundamental mostrado na Fig. (5) de Mahmaud *et al* ^[26] começa a ter frequência de corte diferente de zero.

Consideremos agora a estrutura W2 cujo perfil está na Fig. (2.5) e façamos $b=c$. Isto faz com que a estrutura W2 reduza-se àquela mostrada na Fig. (5.2b). Esta estrutura foi estudada com muito detalhe no livro de Adams ^[25]. A igualdade entre b e c faz com que $R=(b-a)/c=1-a/c=1-A$. Substituindo esse valor de R na Eq. (5.10) e usando as definições de q_2 e p_2 fornecidas na Tab. (5.3), nosso trabalho permite obter a seguinte expressão para a razão a/c :

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2} \quad (5.13)$$

A expressão anterior coincide com aquela deduzida por Adams ^[25].

Os resultados obtidos para a condição de corte do modo fundamental das estruturas limites mostradas na Fig. (5.2(a,b)), permitem concluir que as Eqs. (5.10) e (5.11) generalizam a condição a partir da qual o modo fundamental passa a ter corte diferente de zero para as estruturas coaxiais W2 e M2.

5.3 - Discussões sobre as frequências de corte das estruturas coaxiais

Retornemos à equação transcendental para a frequência de corte, dada pela Eq. (5.4). Para um determinado conjunto de parâmetros da fibra, esta equação só pode ser resolvida numericamente para a frequência de corte. Nós a resolvemos através da mesma estrutura de programação desenvolvida para estudar as equações transcendentais para o índice de refração efetivo nos Caps. (3) e (4). Para as estruturas W2 e M2, deve ser feito uso das Eqs. (5.10) e (5.11) na distinção entre os modos HE_{11} e HE_{12} quando o modo fundamental possuir frequência de corte diferente de zero.

No que segue, vamos desenvolver uma análise da frequência de corte dos modos de mais baixa ordem para cada estrutura coaxial apresentada na Fig. (2.5). Estes modos são os seguintes: HE_{11} (quando existe), HE_{12} , HE_{13} e HE_{21} . Para evitar um número excedente de figuras, escolhemos estudar V_i ($i=1,2,3,4$) como função de R enquanto que os demais parâmetros são mantidos constantes.

5.3.1 - Estudo da frequência de corte para a estrutura W1

Fig. 5.3 - Frequências de corte dos modos HE_{12} , HE_{13} e HE_{21} para a estrutura W1 em função de R para diferentes valores de q_1 p_1 .

A Fig. (5.3(a,b,c,d)), mostra V_1 como função de R para os modos HE_{1n} ($n=2,3$) e HE_{21} da estrutura W1. O modo HE_{21} , como está demonstrado na literatura para outras estruturas ^[16,13,26], é o mais próximo modo permitido propagar ao HE_{11} . Isso também permanece válido para a fibra coaxial W1.

Nesta figura o parâmetro R possui valores no intervalo $(0,1-A)$. Nos extremos deste intervalo a estrutura W1 é reduzida a uma fibra com três camadas. Em $R=0$, a estrutura limite corresponde àquela mostrada em Fig. (5.4a) ($n_1 > n_3 > n_4$), enquanto

que em $R=1-A$ àquela mostrada na Fig. (5.4a) (linha quebrada, com $n_1 > n_2 > n_4$). Se $A=0$ a estrutura W_1 converge para aquela mostrada na Fig. (5.4b).

Fig. 5.4 - Limites da estrutura W_1 . (a) $R=0$ (linha contínua), $R=1-A$ (linha pontilhada) ; (b) $A=0$.

A estrutura coaxial W_1 possui modo fundamental que sempre tem frequência de corte igual a zero, conforme discutimos na seção (5.2). Para os outros modos, V_1 apresenta valores não nulos como função de R para A , q_1 e p_1 fixos. Esses valores aumentam com o crescimento da ordem do modo e R , apresentando o comportamento mostrado na Fig. (5.3). Em determinados intervalos de R a curva $V_1 \times R$ permanece constante enquanto que fora destes intervalos o comportamento é sempre crescente. Esse tipo de comportamento também foi encontrado por Boucouvalas *et al* ^[32], no estudo da fibra coaxial obtida como caso particular da W_1 fazendo $n_1=n_3$ e $n_2=n_4$. Observe que a frequência de corte é função de muitas variáveis nesta estrutura bem como para as outras que pretendemos estudar nas seções subsequentes. Não é fácil separar a influência de determinado parâmetro com os restantes mantidos constantes em um número reduzido de figuras. No entanto a parametrização adotada na seção (5.1) permite retirar todas as informações relevantes.

A primeira tarefa que surge é explicar a constância da curva V_1 versus R para determinados intervalos de R . Para entender esse comportamento, vamos estudar a variação do fator de confinamento nas proximidades da condição de corte como função de R em cada região da fibra coaxial. A Fig. (5.5(a,b)) mostra a variação dos fatores de confinamento do núcleo (f_1), da barreira (f_2), do anel (f_3) e a soma $F=f_1+f_2+f_3$ nas condições anteriores. Estas curvas foram feitas fixando os índices de refração da casca (n_4) e do núcleo (n_1) nos seguintes valores: $n_4=1.444$ e $n_1=1.4658$.

Usando as definições de q_1 e p_1 fornecidos na Tab. (5.3), encontramos que os valores de n_2 e n_3 são dados através de :

$$n_2 = \left(n_4^2 + p_1^2 (n_1^2 - n_4^2) \right)^{1/2}, \quad (5.14)$$

$$n_3 = \left(n_4^2 + q_1^2 (n_1^2 - n_4^2) \right)^{1/2}. \quad (5.15)$$

Fig. 5.5 - Variação dos fatores de confinamento em função de R para $A=0.01$ e (a) modo HE_{12} ; (b) modo HE_{13} .

O índice de refração efetivo considerado para traçar a Fig. (5.5) foi 0.2% maior do que o valor de corte em $N_c=n_4$. Devemos lembrar que não podemos determinar a distribuição de campo elétrico exatamente no corte pois nesta condição ocorre divergências nas funções de Bessel uma vez que o campo elétrico está sendo irradiado. Apesar das limitações numéricas, obtivemos as distribuições de campo elétrico levemente acima da condição de corte, necessárias ao cálculo dos fatores de confinamento. Isso nos permitirá ter uma boa idéia do comportamento do campo nas várias camadas da fibra coaxial na condição de corte.

A curva na cor preta na Fig. (5.5(a,b)), representa aquela de corte normalizada pelo maior valor no intervalo de variação de R . Seu objetivo é apenas visualizar os contornos da curva de corte na mesma escala daquela dos fatores de confinamento. Como esperado, próximo ao corte existe uma fração significativa do campo elétrico na casca da fibra. Essa fração pode ser estimada através da diferença

1-F, que fornece o fator de confinamento na casca. A simulação foi feita fazendo $c=62.5$ micra com o raio da fibra tendo 140 micra. Este último valor foi encontrado de forma que não houvesse variação perceptível na integral do quadrado do campo através de todo o domínio no cálculo dos fatores de confinamento de acordo com as Eqs. (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6).

Observando a Fig. (5.5(a,b)) verificamos que as regiões de R em que V_1 permanece aproximadamente constante corresponde aquelas em que F apresenta máximos. Nestes intervalos f_1 , f_2 e f_3 variam pouco e o campo elétrico mantém sua distribuição. A consequência disto é que V_1 permanece quase inalterado nestes intervalos. É significativo mencionar que de $R=0$ até $R=1-A$ a estrutura coaxial W1 varia entre as estruturas limites apresentadas na Fig. (5.4a). Em $R=0$, $f_2=0$ pois não existe a região da barreira. Já em $R=1-A$, $f_3=0$ pois é a região do anel que passa a não existir. Entre os valores limites de R, as quatro regiões da fibra cooperam para determinar as propriedades de corte.

Fig. 5.6 - Variação dos fatores de confinamento em função de R para $A=0.20$ e (a) modo HE_{12} (b) modo HE_{13} .

Quando mantemos constante o valor de q_1 e aumentamos os valores de A e p_1 os resultados retirados com base no estudo dos fatores de confinamento permanecem inalterados. No entanto os valores máximos de F são menos pronunciados como mostra a Fig. (5.6(a,b)). Observe que a contribuição do núcleo da fibra para o confinamento do campo é maior do que no caso anterior em que $A=0.01$. Nada mais

natural já que a extensão do núcleo aumentou. No entanto, os intervalos onde as curvas $V_1 \times R$ permanecem constantes, continuam a corresponder àqueles em que os fatores de confinamento permanecem constantes.

Voltemos à análise de alguns aspectos da Fig. (5.3). Observe que os modos HE_{21} e HE_{12} possuem um ponto de cruzamento, como mostram as Figs. (5.3(b,d)). Isto também foi observado na estrutura coaxial estudada por Boucouvalas *et al*^[32], indicando que para alguns valores dos parâmetros da fibra W1 o modo HE_{12} é o de ordem superior mais próximo ao fundamental e não o HE_{21} .

Consideremos a Fig. (5.3(a)). Quando q_1 é mantido constante os índices de refração n_1 , n_3 e n_4 estão fixos ou a razão $\left(\frac{n_3^2 - n_4^2}{n_1^2 - n_4^2} \right)^{1/2}$. Para simplificar as considerações, vamos supor que a primeira condição anterior é verdadeira. Nesta situação, aumentar o valor de p_1 cuja definição está na Tab. (5.3), significa aumentar n_2 e fazê-lo tender a n_3 . Nas proximidades de $R=0$ a influência de n_2 sobre a estrutura é muito reduzida, pois essa camada praticamente não existe. Neste limite, V_1 deve ser independente de p_1 e depender apenas do modo considerado uma vez que quanto maior a ordem do modo mais este encontra-se distribuído ao longo da direção transversa da fibra, dificultando ainda mais seu confinamento na estrutura. À medida que R cresce, V_1 aumenta mais para $p_1=0.20$ do que com $p_1=0.50$. Isso significa que a estrutura coaxial formada com $p_1=0.50$ é mais favorável à contenção do modo. Isso é consequência direta de n_2 ficar mais próximo de n_3 à medida que p_1 cresce e indica que o *aumento* no confinamento do modo na estrutura núcleo-barreira-anel próximo da condição de corte faz com que V_1 diminua.

Baseado no que foi descrito no parágrafo anterior, podemos resumir o comportamento da frequência de corte informando que o confinamento de um modo na estrutura W1 na região $r < c$, crescerá quanto mais próximos estiverem os índices de refração n_1, n_2 e n_3 e menor o valor de R . Isso terá como consequência a redução da frequência de corte do modo uma vez que seu confinamento aumentou. Observe que no caso limite em que $n_1=n_2=n_3$ e $R=0$, obtemos a estrutura bastão^[16] que apresenta as melhores condições para a propagação de modos, mesmo nas proximidades da condição de corte.

Como comprovação do que dissemos no parágrafo anterior, consideremos a Fig. (5.3c). Neste gráfico, p_1 e A estão mantidos fixos enquanto que q_1 varia. Isto

significa que n_1 , n_2 e n_4 são constantes ou a razão $\left(\frac{n_2^2 - n_4^2}{n_1^2 - n_4^2}\right)^{1/2}$. Supondo que a primeira hipótese seja a verdadeira, aumentar q_1 significa crescer n_3 e fazer a estrutura tender para o maior índice de refração n_1 . Nas proximidades de $R=0$ onde a região da barreira pouco contribui, o valor de V_1 depende do valor de q_1 , pois na definição desta variável não entra o índice de refração da barreira n_2 . Observe que à medida que q_1 aumenta V_1 diminui para todos os modos analisados, pois n_3 aproxima-se de n_1 .

As Figs. (5.3(b,d)) mostram a variação de V_1 como função dos parâmetros p_1 e q_1 nos mesmos valores das Figs. (5.3(a,c)), mas com $A=0.20$. O comportamento é o mesmo observado para o caso onde $A=0.01$. A única diferença significativa é que os valores de V_1 são bem menores naquele caso quando comparado a este. Isto é devido ao aumento no confinamento modal na região $r < c$ proporcionado por um acréscimo no tamanho do núcleo.

5.3.2 - Estudo da frequência de corte para a estrutura M1

A Fig. (5.7(a,b,c,d)) mostra a dependência da frequência de corte V_2 para a estrutura M1 como função de R . Este gráfico mostra que são válidos os mesmos argumentos usados para explicar o comportamento das curvas de corte da estrutura W1. Isso não poderia ser diferente uma vez que a equação transcendental válida para estudar a condição de corte nas duas estruturas é a mesma.

Como confirmação do que dissemos, a Fig. (5.8(a,b)) mostra a variação dos fatores de confinamento dos modos HE_{12} e HE_{13} como função de R . Os valores dos índices de refração n_3 e n_4 utilizados para gerar essas figuras são 1.4658 e 1.444, respectivamente. Os índices de refração n_1 e n_2 foram determinados através da definição dos parâmetros q_3 e p_3 , fornecidos na Tab. (5.3). Como nas Figs. (5.5(a,b)) e (5.6(a,b)) para a estrutura W1, a curva preta representa a de corte dos modos HE_{12} e HE_{13} , normalizada pelo maior valor alcançado no intervalo considerado de R .

Fig. 5.7 - Frequências de corte dos modos HE_{12} , HE_{13} e HE_{21} em função de R para diferentes valores de q_3 , p_3 e A na estrutura M1.

Como está claro na Fig. (5.8(a,b)), a região do gráfico V_2 versus R aproximadamente constante corresponde àquela região em que ocorre o máximo de F . Nesta região, a fração da energia contida no núcleo, barreira e anel permanecem aproximadamente constantes, indicando que o campo elétrico mantém seu perfil transversal inalterado, fazendo com que V_2 fique constante. Nós fizemos mais gráficos parecidos aos da Fig. (5.8(a,b)) com outros valores de p_3 , q_3 e A . No entanto, o comportamento destas novas curvas confirmaram os resultados mostrados na Fig. (5.8(a,b)).

Consideremos a análise da Fig. (5.7a) com $q_3=0.90$ e $A=0.01$ mantidos constantes enquanto p_3 varia. De acordo com a definição deste parâmetro na Tab. (5.3), ao fixar q_3 mantemos constantes os valores de n_1 , n_3 e n_4 ou a razão

$\left(\frac{n_1^2 - n_4^2}{n_3^2 - n_4^2} \right)^{1/2}$. Considerando que a primeira situação seja satisfeita, ao aumentar o valor de p_3 estamos aumentando o índice de refração n_2 em relação a n_4 . Isso faz n_2

aproximar-se de n_1 , tornando o guia de onda mais confinante e reduzindo o valor da frequência de corte. Quando p_3 diminui, a situação é invertida.

Fig. 5.8 - Variação dos fatores de confinamento em função de R para $A=0.20$ e (a) modo HE_{12} ; (b) modo HE_{13} .

Para encerrar essa seção, dois pontos merecem ser comentados. O primeiro diz respeito a diminuição de V_2 com o aumento do raio do núcleo ser menor do que a observada para a estrutura W1. Explicamos isso através do fato desta estrutura possuir a região do anel como o de maior índice de refração. Pelo que foi discutido no Cap. (4), isso faz as propriedades desta estrutura serem mais sensíveis a uma alteração no comprimento da barreira. O segundo fato está ligado diretamente ao primeiro e refere-se à Fig. (5.7c). Nesta figura $A=0.01$, $p_3=0.20$ e q_3 assume os valores de 0.30 e 0.90. Os resultados mostram que isso faz a curva V_2 versus R permanecer inalterada com a variação de q_3 . Observe que aumentar q_3 de acordo com sua definição na Tab. (5.3) significa aumentar o índice de refração n_1 . No entanto, o diâmetro do núcleo é pequeno fazendo com que essa região não influa no comportamento de V_2 .

5.3.3 - O estudo da frequência de corte da estrutura W2

Vamos fazer uso da Eq. (5.10) e obter no plano R versus A, a curva que separa as regiões em que o modo fundamental tem $V_3=0$ daquela em que $V_3\neq 0$. O resultado está mostrado na Fig. (5.9). Como exemplo, a região hachuriada mostrada nesta figura para $p_2=0.5$ e $q_2=0.9$ ou $q_2=0.90$ e $p_2=0.30$, determinam os valores de A e R que fazem o modo fundamental ter frequência de corte diferente de zero. Para A e R fora desta região, a frequência de corte do modo fundamental é sempre igual a

zero.

Fig. 5.9 - Curvas que delimitam as regiões onde $V_3=0$ e $V_3\neq 0$.

As curvas mostradas na Fig. (5.9) permitem determinar a tendência de comportamento da frequência de corte para o modo fundamental da estrutura W2. De acordo com a definição de p_2 e q_2 em termos dos índices de refração (ver Tab. (5.3)), constatamos que ao manter p_2 constante significa manter n_1 , n_2 e n_4 constantes ou a

razão $\left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}\right)^{1/2}$. Assim, ao aumentar q_2 nas condições anteriores, aumentamos o

índice de refração do anel n_3 . Os resultados apresentados nas curvas da Fig. (5.9) mostram que se a diferença $(n_3 - n_4)$ cresce, maior é o intervalo de valores A e R que permitem ao modo fundamental ter frequência de corte igual a zero. De forma contrária, se essa diferença diminui e a estrutura W2 tende àquela que chamamos no

capítulo quatro de *Wclad*, menor é o intervalo das variáveis A e R que permitem ao modo fundamental ter frequência de corte igual a zero.

Fig. (5.10) Variação da frequência de corte em função de R para $A=0.01$ e (a) $q_2=0.70$; (b) $p_2=0.50$.

A Fig. (5.10(a,b)) mostra a variação da frequência de corte para a estrutura W2 em função do parâmetro R para $A=0.01$. As curvas V_3 versus R mostradas são muito diferentes daquelas apresentadas para as estruturas W1 e M1. Enquanto estas estruturas apresentavam intervalos em que as curvas de frequência de corte como função de R eram aproximadamente constantes, na estrutura W2 isso não ocorre para pequenos valores de A pois as curvas são monotonicamente crescentes. Outra diferença que pode ser observado na Fig. (5.10(a,b)), é que o modo fundamental apresenta frequência de corte diferente de zero para a estrutura W2 enquanto que é sempre igual a zero nas estruturas W1 e M1. Além do mais, o caráter desconfinante aumenta a medida que o parâmetro R cresce e se aproxima do valor extremo $1-A$. Devemos lembrar que em $R=1-A$ obtemos a estrutura *Wclad* que torna-se mais desconfinante à medida que A tende a zero, pois neste limite essa a estrutura passa a ser um anteguia de onda.

O comportamento das curvas mostradas na Fig. (5.10(a,b)) segue o que dissemos sobre o modo fundamental na discussão da Fig. (5.9). Seja a Fig. (5.10a). De acordo com a definição de q_2 fornecida na Tab. (5.3), ao mantê-la constante

estamos fazendo n_1 , n_2 e n_3 constantes ou a razão $\left(\frac{n_3^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}\right)^{1/2}$. Suponhamos que a primeira condição anterior seja a válida. Ao aumentar o valor de p_2 estamos aumentando o índice de refração n_4 e diminuindo a diferença $\delta=(n_3-n_4)$. Isso leva as curvas V_3 versus R a deslocarem-se para maiores valores de V_3 , tornando a estrutura W2 bem mais restritiva a propagação de modos na região núcleo-barreira-anel. Como foi mostrado no estudo do índice de refração efetivo, a partir de determinado valor de R com A fixo, a estrutura W2 se comporta como a *Wclad* associada que aumenta sua influência a medida que a diferença (n_4-n_2) cresce ou (n_3-n_4) diminui.

A partir da Fig. (5.10b) retiramos a mesma conclusão do parágrafo anterior. Senão, vejamos. Ao manter p_2 fixo, estamos mantendo n_1 , n_2 e n_4 constantes ou a razão $\left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}\right)^{1/2}$. Supondo que a primeira condição anterior seja a satisfeita, ao aumentar o valor de q_2 estamos aumentando $\delta=(n_3-n_4)$, que leva a uma diminuição de V_3 .

É possível obter o valor de R a partir do qual a curva V_3 versus R começa a ser diferente de zero para o modo fundamental. Essa expressão é encontrada a partir da Eq. (5.10) isolando a variável R , e é dada por:

$$R = \left(1 + \frac{A^2 - p_2^2}{q_2^2}\right)^{1/2} - A \quad (5.16)$$

Por exemplo, substituindo na Eq. (5.16) os valores $A=0.01$, $q_2=0.70$ e $p_2=0.50$ que geraram a Fig. (5.10a), obtemos que $R=0.69$. Esse valor corresponde ao ponto inicial da curva de frequência de corte como função de R para o modo fundamental.

A Fig. (5.11(a,b)) mostra a mudança do fator de confinamento do núcleo (f_1), da barreira (f_2) e do anel (f_3) para alguns modos nas proximidades da condição de corte. Para fazer essa figura tomamos como referência os valores $n_1=1.4587$ e $n_2=1.444$. Os índices de refração n_3 e n_4 foram determinados usando a definição de q_2 e p_2 dados por:

$$n_3 = \left(n_2^2 + q_2^2 (n_1^2 - n_2^2) \right)^{1/2}, \quad (5.17)$$

$$n_3 = \left(n_2^2 + p_2^2 (n_1^2 - n_2^2) \right)^{1/2}.$$

Para o cálculo dos fatores de confinamento nas proximidades da condição de corte fizemos $c=62.5 \mu\text{m}$ e o raio da fibra variando de 0 até $2c$ para calcular as das integrais de confinamento de acordo com as definições fornecidas no Cap. (3). O índice de refração efetivo foi feito igual a (n_4+10^{-7}) e os valores permitidos de V_3 encontrados a partir da resolução numérica da equação transcendental para o índice de refração efetivo. Devemos lembrar que isso tem de ser feito para contornar o problema da divergência no cálculo da distribuição de campo elétrico exatamente na condição de corte $N_e=n_4$.

Fig. 5.11 - Variação dos fatores de confinamento nas proximidades do corte do modo. Nesta figura $A=0.01$, $q_2=0.70$ e $p_2=0.50$.

(a) Modo fundamental ; (b) Modos HE_{12} e HE_{13} .

Os gráficos apresentados na Fig. (5.11) possuem um comportamento bem diferente daqueles obtidos para as estruturas W1 e M1. Na atual discussão, a soma dos fatores de confinamento do núcleo, da barreira e do anel, decresce continuamente à medida que R aumenta para seu valor máximo. Esse comportamento das curvas de confinamento informam que a parte do campo elétrico na casca cresce continuamente, fazendo com que esses modos sejam fortemente radiados no limite superior de R . Isso confirma que uma estrutura fortemente anteguida de onda é

formada na estrutura W2 quando o núcleo é pequeno e R tende a seu valor máximo $1-A$.

5.3.3.1 - Frequência de corte para valores maiores de A

Nesta seção vamos discutir com mais profundidade a aproximação entre os modos HE_{11} e HE_{12} verificada para a estrutura W2. A Fig. (5.12) mostra como varia a frequência de corte destes modos como função de R para $A=0.20$, nos mesmos valores de índices de refração utilizados para gerar a Fig. (3.12(a,b)). Novamente, os índices de refração possuem os seguintes valores: $n_1=1.4658$, $n_2=1.444$, $n_3=1.46$ e $n_4=1.4587$. Substituindo os valores anteriores na Eq. (5.16), encontramos que o modo fundamental deixa de ter frequência de corte diferente de zero em $R=0.17$.

Fig. 5.12 - Variação da frequência de corte como função de R para $A=0.20$ e índices de refração citados no texto.

A Fig. (3.12a) mostra a mudança do índice de refração efetivo do modo fundamental para a estrutura W2 como função da frequência normalizada de propagação para $A=0.20$ e vários valores de R . De acordo com a definição de frequência de corte, as curvas da Fig. (5.12) para os modos HE_{11} e HE_{12} , mostram em que valor começa o gráfico N_e versus V_3 para um dado valor de R . A Fig. (5.12) indica que acima de $R=0.50$ as curvas de dispersão para o modo fundamental devem

começar sempre no mesmo ponto $V_3=8.11$, que é igual ao valor onde começa a curva N_e versus V_3 para a estrutura limite *Wclad*. Da mesma forma, observando a Fig. (3.12b) para o modo HE_{12} , vemos que a estrutura *Wclad* domina para $R>0.68$ com a curva N_e versus V_3 sempre começando em $V_3=22.2$. Os resultados mostram que para outros valores de R dentro do intervalo $(0,1-A)$, o ponto inicial da curva N_e versus V_3 , sempre coincide com o correspondente da Fig. (5.12).

Para completar, na Fig. (5.13(a,b)) mostramos como varia os fatores de confinamento nas proximidades do corte para os modos apresentados na Fig. (5.12). Para calcular a distribuição de campo elétrico nas proximidades da condição de corte dos modos, utilizamos a equação transcendental para o índice de refração efetivo e determinamos V_3 fazendo $N_e=n_4+10^{-7}$. Devido a problemas de convergência nas funções de Bessel que determinam a distribuição de campo elétrico, não podemos fazer diretamente $N_e=n_4$, conforme já explicamos no estudo das estruturas W1 e M1. Mesmo assim, observe que o cálculo dos fatores de confinamento nas proximidades do corte é bem mais complicado para a estrutura W2 do que nos casos anteriores uma vez que esta é mais restritiva à propagação dos modos à medida que R cresce.

Fig. (5.13) - Variação dos fatores de confinamento nas proximidades do corte. (a) Modo HE_{11} ; (b) Modo HE_{12} .

Devemos informar que as curvas de corte para os modos apresentados na Fig. (5.12) aproximam-se muito no entorno de $R=0.50$, mas não se tocam. Observando a Fig. (5.13a), verificamos que no ponto de máxima aproximação entre as curvas da Fig. (5.12) ocorre uma mudança na distribuição do campo elétrico do modo

fundamental. Antes do ponto de máxima aproximação, o modo HE_{11} estava concentrado principalmente no anel e exatamente no ponto em que as curvas mais se aproximam ocorre uma mudança brusca no campo, que aumenta seu confinamento na estrutura núcleo-barreira-anel com o núcleo passando a conter a maior parte do campo. Pelo que já foi discutido no estudo do índice de refração efetivo, associamos esse comportamento do modo fundamental a predominância das propriedades da estrutura *Wclad* a partir do ponto de mudança de comportamento. A Fig. (5.13a) ainda mostra que após $R=0.50$ os fatores de confinamento ficam constantes, mostrando que não ocorre alteração significativa no valor da frequência de corte. No entanto, esse efeito degrada para R próximo a seu valor extremo $R=1-A$.

Para o modo HE_{12} na Fig. (5.13(b)), podem ser feitas as mesmas considerações. No ponto R em que ocorre a máxima aproximação com o HE_{11} , aquele modo passa de uma distribuição com predominância no núcleo para outra em que domina a região do anel. No entanto, a maior parte do campo está na casca da fibra após a mudança brusca. Em $R=0.68$ ocorre outra variação brusca no comportamento do modo. Ele tem seu confinamento rapidamente aumentado na região do anel, como indica o pico formado em $R=0.68$, mas logo depois a principal influência sobre o campo retorna para a região da casca da fibra. Observe que o valor $R=0.68$ coincide com o início da região onde V_3 é constante para o modo HE_{12} na Fig. (5.12).

Fig. 5.14 - Variação da frequência de corte como função de R para $A=0.20$. (a) $q_2=0.70$ (b) $p_2=0.50$.

Para concluir essa seção, vamos mostrar o comportamento da frequência de corte para $A=0.20$ e alguns valores de q_2 e p_2 . A Fig. (5.14(a,b)) mostra os resultados. A explicação para o comportamento dos modos apresentados nestas curvas segue a mesma linha de raciocínio utilizada para explicar a Fig. (5.10(a,b)). A diferença significativa é que todos os modos passam a ter intervalos em R nas curvas V_3 versus R onde V_3 é constante. O estudo dos fatores de confinamento dos modos HE_{1n} , $n=1,2,3$ da Fig. (5.14(a,b)), confirmaram as explicações fornecidas anteriormente para explicar a Fig. (5.12), razão pela qual não mostramos os gráficos.

5.3.4 - O corte da estrutura M2

De acordo com a discussão feita na seção (5.2), o modo fundamental da estrutura M2 também possui frequência de corte diferente de zero para certos valores dos parâmetros da fibra. Usando valores para p_4 e q_4 na Eq. (5.11), podemos desenhar a curva no plano R versus A que delimita a região em que o modo fundamental apresenta frequência de corte nula ou diferente de zero. A Fig. (5.15) mostra isso para diferentes valores de p_4 e q_4 . Por exemplo, a região hachuriada nesta figura em que $p_4=0.50$ e $q_4=0.90$ corresponde a todos os valores permitidos de A e R que levam o modo fundamental a ter frequência de corte diferente de zero.

Fig. 5.15 - Curvas de delimitação das regiões onde o modo fundamental tem $V_4=0$ e $V_4 \neq 0$.

Podemos fazer algumas análises a partir da Fig. (5.15), que serão úteis ao longo desta seção. Ao manter p_4 constante, estamos mantendo n_2 , n_3 e n_4 constantes ou a razão $\left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2}\right)^{1/2}$. Nesta condição, ao aumentar q_4 estamos aumentando o valor de n_1 e a diferença $\delta=(n_1-n_4)$, levando ao aumento do conjunto de valores (A,R) em que o modo fundamental apresenta frequência de corte igual a zero. Isso indica que a propagação do modo HE_{11} ocorre em condições cada vez mais favoráveis nesta estrutura coaxial. De forma contrária, a diminuição de δ provoca uma redução na região do plano R versus A em que o modo fundamental tem $V_4=0.0$. Isso está mostrado claramente na parte superior da Fig. (5.15) com $q_4=0.90$ e p_4 crescendo progressivamente. Nesta última condição, ao fixar q_4 estamos mantendo n_1 , n_2 e n_3 constantes ou a razão $\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2}\right)^{1/2}$ enquanto que o aumento de p_4 faz n_4 crescer. A consequência é que $\delta=n_1-n_4$ diminui ocorrendo uma redução do intervalo do plano R versus A em que $V_4=0$.

5.3.4.1 - O estudo das curvas de frequência de corte

Fig. (5.16) Curvas de frequência de corte como função de R para $A=0.01$. (a) $q_4=0.90$; (b) $p_4=0.30$.

A Fig. (5.16(a,b)) mostra a variação da frequência de corte como função de R para vários valores de q_4 e p_4 com $A=0.01$. Os gráficos apresentados nesta figura

foram obtido através da resolução numérica da equação transcendental (5.4), válida para a estrutura M2. Como mostramos na Seção 5.2, o modo fundamental apresenta frequência de corte diferente de zero e o valor de R a partir do qual isso começa a acontecer é função de A, p_4 e q_4 . Esse valor crítico pode ser encontrado a partir da Eq. (5.11), isolando a variável R e é dada por:

$$R = \left(1 + A^2 q_4^2 - p_4^2\right)^{1/2} - A. \quad (5.18)$$

Como exemplo do uso da Eq. (5.18), considere a Fig. 5.16(a). Fazendo $q_4=0.90$, $p_4=0.70$ e $A=0.01$ e substituindo na Eq. (5.18) obtemos $R=0.70$. Para $q_4=0.90$, $p_4=0.30$ e $A=0.01$ obtemos que $R=0.94$. Observe que os valores anteriores de R correspondem aos pontos iniciais da curva V_4 versus R para o modo fundamental mostrado na Eq. (5.16a).

Analiseemos primeiro a Fig. 5.16(a). Mantendo o parâmetro q_4 fixo os índices de refração n_1 , n_2 e n_3 são constantes ou a razão $\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2}\right)^{1/2}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que os índices de refração sejam mantidos constantes. De acordo com sua definição na Tab. (5.3), ao aumentar p_4 com a condição anterior satisfeita, estamos aumentando o valor de n_4 e diminuindo a diferença $(n_1 - n_4)$. Isso faz as curvas V_3 versus R de todos os modos se deslocarem para maiores valores de V_3 , tornando-a mais restritiva à propagação de modos. Como já sabemos, quanto maior for a diferença $n_4 - n_2$ e A próximo de zero com R tendendo ao limite $1 - A$, mais o comportamento da estrutura M2 aproxima-se de uma estrutura anteguia de onda.

Apesar da semelhança de comportamento entre as frequências de corte das estruturas M2 e W2 para q_4 fixo e p_4 variando, existe uma diferença como mostra a Fig. (5.16b). Os resultados indicam que um pequeno valor para o raio do núcleo na fibra M2 exerce pouca influência sobre as curvas V_4 versus R para p_4 constante e q_4 variando. Esse comportamento é fácil de entender se tivermos em mente que ao alterar q_4 com p_4 mantido constante, estamos mantendo fixo os índices de refração

n_2 , n_3 e n_4 ou a razão $\left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2}\right)^{1/2}$ e variando o valor do índice de refração do

núcleo. No entanto, como o raio do núcleo é pequeno ($A=0.01$) e seu índice de

refração menor do que aquele do anel, uma variação em q_4 não altera o comportamento das curvas de corte dos modos neste limite.

Fig. 5.17 - Curvas de fatores de confinamento dos modos na proximidade do corte como função de R para $A=0.01$. (a) Modo fundamental ; (b) Modos HE_{12} e HE_{13} .

A Fig. (5.17) mostra a variação dos fatores de confinamento do núcleo (f_1), da barreira (f_2), do anel (f_3) e a soma $F=f_1+f_2+f_3$ como função de R para os modos HE_{11} , HE_{12} e HE_{13} . Essas curvas foram feitas considerando que os modos possuísem índice de refração efetivo igual a n_4+10^{-6} , pelas razões já apresentadas na discussão sobre o cálculo da distribuição de campo elétrico dos modos nas proximidades da condição de corte para as outras estruturas. O que devemos ressaltar na Fig. (5.17(a,b)) é sua semelhança com a Fig. (5.11(a,b)), válida para a estrutura W2. Novamente, a medida que a frequência de corte cresce com o aumento de R , a maior parte do campo passa a ser conduzido pela casca da fibra, com todos os modos se comportando da mesma forma.

A medida que o valor de A cresce as curvas V_4 versus R tornam-se mais complicadas como mostra a Fig. (5.18(a,b)). Começam a aparecer intervalos em R onde as curvas (V_4 versus R) permanecem constantes como aconteceu para a estrutura W2. No entanto, as mesmas considerações feitas sobre o sentido de variação das curvas V_4 versus R para $A=0.01$ como função de p_4 e q_4 na Fig. (5.16a), permanecem válidas quando o raio do núcleo aumenta.

Fig. 5.18 - Curvas de frequência de corte como função de R para $A=0.20$.
(a) $q_4=0.90$; (b) $p_4=0.30$.

A explicação para o comportamento da frequência de corte dos modos segue a mesma linha de raciocínio que utilizamos para a estrutura W2. Observe que a estrutura limite obtida em $R=1-A$ para a estrutura M2 é igual à W_{clad} , mas com o índice de refração do núcleo menor quando comparado à estrutura limite da W2. Como mostramos na discussão da Fig. (5.12) também neste caso a grande influência da estrutura limite W_{clad} sobre as propriedades do guia é responsável pelo comportamento dos modos mostrados na Fig. (5.18(a,b)).

Comparando as Figs. (5.18b) e (5.16b) observamos que as curvas de corte passam a depender de q_4 para $A=0.20$. Isso ocorre porque a extensão do núcleo não pode ser considerada desprezível como ocorreu na Fig. (5.16b). Observe ainda que ao aumentar q_4 com p_4 fixo, estamos aumentando o valor de n_1 com n_2 , n_3 e n_4

mantidos constantes ou a razão $\left(\frac{n_4^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2} \right)^{1/2}$. Isso provoca um aumento da diferença

$(n_1 - n_4)$, levando a uma diminuição no valor de V_c , conforme já discutimos para a Fig. (5.16a).

Um fato que devemos mencionar na Fig. (5.18b) é a constância da curva de corte para o modo HE_{21} como função de q_4 para $p_4=0.30$ e $A=0.20$. Esse comportamento é igual aquele observado para a estrutura M1 na Fig. (5.7c) e pode ser justificado pelo fato deste modo possuir uma distribuição de campo elétrico fora do núcleo. Isso possibilita a constância da frequência de corte para o modo HE_{21}

como função de q_4 uma vez que aumentar o valor de q_4 significa aumentar o valor do índice de refração do núcleo.

Fig. (5.19) Curvas de frequência de corte como função de R com $A=0.20$. (a) HE_{11} ; (b) HE_{12} .

A Fig. (5.19(a,b)) mostra a variação dos fatores de confinamento do núcleo (f_1), barreira (f_2) e anel (f_3), como função de R para os modos HE_{11} e HE_{12} . Como mostra a figura, o intervalo em que a curva V_4 versus R fica constante corresponde aquele onde os fatores de confinamento permanecem inalterados. Esse resultado também foi obtido no estudo da estrutura W2. Embora não esteja mostrado, o mesmo tipo de comportamento ocorre com o modo HE_{13} .

5.4 - Síntese dos principais resultados obtidos no capítulo

Todas as propriedades da frequência de corte para os modos de cada estrutura coaxial apresentada na Fig. (2.5), podem ser encontradas a partir da resolução numérica da equação transcendental deduzida na Seção (5.1) e dada pela Eq. (5.4). O único resultado analítico obtido a partir da análise da Eq. (5.4) e que constitui o principal resultado do capítulo foi a demonstração de que os modos fundamentais das estruturas W1 e M1 sempre apresentam frequências de corte nula independentemente dos valores dos parâmetros das fibras. Para as estruturas W2 e M2 o resultado é bem diferente. Dependendo dos parâmetros da fibra estas estruturas apresentam frequências de corte que podem ser diferentes de zero. A análise que fizemos a partir da equação transcendental para a frequência de corte, permitiu encontrar a relação entre os parâmetros da fibra a partir da qual o modo fundamental possui frequência de corte diferente de zero. Essas expressões são dadas por:

$$R = \left(1 + \frac{A^2 - p_2^2}{q_2^2} \right)^{1/2} - A, \quad (5.16)$$

para a estrutura W2 e

$$R = \left(1 + A^2 q_4^2 - p_4^2 \right)^{1/2} - A, \quad (5.18)$$

para a estrutura M2. As definições dos parâmetros q_2 , p_2 , q_4 e p_4 que aparecem nestas equações estão fornecidas na Tab. (5.3). Essas equações fornecem os limites corretos quando é feita uma redução das estruturas W2 e M2 a casos limites bem estabelecidos na literatura.

Compensação de dispersão

6.0 - Introdução

Com o advento de amplificadores óticos dopados com Érbio operando em 1.55 μm , cresceu o interesse por sistemas que operam neste comprimento de onda. Uma solução para controlar a dispersão de pulsos cuja frequência central está no comprimento de onda anterior é construir fibras com dispersão deslocada para essa região. No entanto, nos dias atuais, existe uma grande quantidade de sistemas que operam com fibras monomodo de dispersão deslocada para a janela de 1.31 μm e seria inviável economicamente substituir todos esses sistemas já instalados por outros que operam em comprimentos de onda diferentes. Assim, existe um considerável interesse em esquemas que permitam fazer *upgrade* dos sistemas instalados para a janela de 1.55 μm . Como as fibras monomodo que operam em 1.31 μm apresentam dispersão positiva em 1.55 μm ($D > 0$), os esquemas devem incluir um método para compensar essa dispersão quando otimizados para operar com altas taxas de transmissão.

Para resolver esse problema, se está pesquisando o uso de fibras compensadoras de dispersão (DCF - *Dispersion Compensating Fibers*)^[33-37]. Lin^[33] *et al* sugeriu pela primeira vez utilizar fibras óticas de apropriado comprimento com efeitos dispersivos contrários. Os autores propõem uma técnica que utiliza o fato do parâmetro de dispersão de segunda ordem ser nulo em determinado comprimento de onda λ_c . Na vizinhança deste comprimento de onda o parâmetro de dispersão de

segunda ordem transiciona de positivo para negativo (ou vice-versa, dependendo do material da fibra), e os autores utilizam esse fato para minimizar a dispersão de pulsos que propagam através de uma fibra monomodo. Poole ^[34] *et al* discute uma técnica que utiliza o alto valor que o parâmetro de dispersão β_2 assume para o modo LP_{11} próximo de 1.55 μm nas proximidades da condição de corte em fibras que possuem dois modos. Os autores conseguem um valor para $D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2$ da ordem de -228 ps/(nm.Km) em 1.56 μm . No entanto, o arranjo experimental necessário para converter o modo fundamental que propaga na fibra normal para o modo LP_{11} da fibra compensadora de dispersão ^[38,39], torna essa técnica de difícil implementação prática uma vez que são possíveis outras de mais simples execução. Vengsarker ^[35] *et al.* e Antos ^[36] *et al* propõem novos perfis para a variação do índice de refração do núcleo como a da fibra coaxial que designamos como W2. No entanto, os valores máximos obtidos para D estão por volta de -250 ps/(nm.Km) em 1.55 μm .

Peschel ^[37] *et al* mostraram que os supermodos de dois guias de ondas planares não semelhantes e acoplados podem exibir compensação de dispersão. A análise teórica foi feita através do modelo de guias de ondas acoplados, com os modos de cada sub-estrutura sendo acoplados através de uma constante de acoplamento κ .

Baseados na idéia de guias de ondas dissimilares de Peschel *et al*, Thyagarajan *et al* ^[40] estenderam esse conceito para a geometria cilíndrica. Os autores fizeram uma análise teórica do guia de ondas coaxial W1, representado na Fig. (2.5a) com $n_2=n_4$. Eles obtiveram um coeficiente de dispersão D grande e negativo que pode atingir -5100 ps/(nm.Km). Recentemente, Nunes ^[41] *et al* fizeram um estudo mais detalhado da fibra estudada por Thyagarajan e mostraram que é possível otimizar uma que pode apresentar valores para D muito maiores, alterando o raio do anel da fibra. Esses resultados serão apresentados no decorrer da exposição.

No presente capítulo usaremos as equações transcendentais deduzidas no Cap. (2) para encontrar a variação do coeficiente de dispersão das fibras coaxiais como função de seus parâmetros. Para alcançar esse objetivo, as equações transcendentais para o índice de refração efetivo serão resolvidas numericamente e o coeficiente de dispersão de segunda ordem, calculado através do cálculo numérico da

derivada segunda do índice de refração efetivo. O procedimento seguido é bem diferente daquele utilizado nas Refs. [37,40].

Este capítulo está dividido da seguinte forma. Na próxima seção apresentaremos o modelo para a variação do índice de refração como função do comprimento de onda. Como estamos interessados em compensar a dispersão de pulsos, apresentaremos sua equação de propagação no regime linear, bem como o esquema de compensação de dispersão. Na seção (6.2) apresentaremos os resultados obtidos para a estrutura coaxial W1 e, na (6.3), para a estrutura W2. No final da discussão, faremos comentários sobre as estruturas M1 e M2.

6.1 - Descrição teórica para a dependência do índice de refração com o comprimento de onda

Quando uma onda eletromagnética interage com os elétrons ligados de um meio dielétrico, a resposta depende de sua frequência ótica. Essa propriedade é chamada de dispersão cromática. O modelo mais simples para encontrar $n(\omega)$ considera que o meio absorve a radiação eletromagnética em frequências que correspondem àsquelas de ressonância dos elétrons ligados. Distantes destas ressonâncias, o índice de refração pode ser aproximado através da equação de Sellmeier [42] :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (6.1)$$

onde ω_j ($j=1, \dots, m$) são as frequências de ressonância e B_j a grandeza que mede a intensidade da ressonância j . A soma na Eq. (6.1) é feita sobre todas as ressonâncias que contribuem para o intervalo de frequência considerado.

A dispersão em fibra desempenha um papel muito importante na propagação de pulsos óticos curtos, pois as componentes espectrais de diferentes frequências viajam com diferentes velocidades. Mesmo quando os efeitos não lineares são pequenos, a dispersão induzindo alargamento do pulso pode ser muito prejudicial para sistemas de comunicações, já que isso implica em um limite para a taxa de

transmissão. No regime não linear, a combinação de dispersão e não linearidade (auto modulação de fase, modulação de fase cruzada, ganho Raman, etc), pode resultar em um comportamento bem diferente, como será explorado no Cap. (8).

Matematicamente os efeitos da dispersão são considerados através da expansão da constante de propagação β em série de Taylor, ao redor de uma frequência central ω_0 , da seguinte forma:

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots, \quad (6.2)$$

onde $\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0}$, $m=0,1,2,3,\dots$.

A dedução da equação diferencial para a evolução da amplitude de um pulso na direção de propagação e no tempo encontra-se detalhada em muitos livros textos. ^[43,44] Aqui, apresentaremos apenas o resultado. Se $A(z,T)$ representa a amplitude do pulso, sua propagação em um meio dielétrico em que os efeitos não lineares podem ser desprezados é dada através da seguinte equação diferencial ^[43]:

$$\frac{\partial A(z,T)}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A(z,T) + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z,T)}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A(z,T)}{\partial T^3} = 0. \quad (6.3)$$

Nesta equação a variável $T = t - z/v_g = t - \beta_1 z$ define um sistema de referência que se move com a velocidade de grupo v_g do pulso e z é a direção de propagação.

Devido à natureza linear da Eq. (6.3), várias técnicas são capazes de compensar a dispersão em uma fibra ótica que esteja operando neste regime. A solução geral para a Eq. (6.3) com $\alpha=0$ e $\beta_3=0$ possui a seguinte forma ^[43]:

$$A(z,T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0,\omega) \exp \left[i \frac{\beta_2 \omega^2 z}{2} - i\omega T \right] d\omega, \quad (6.4)$$

onde $\tilde{A}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, T) \exp(i\omega T) dT$.

A idéia por trás do dispositivo compensador de dispersão considera dois segmentos de fibra. Um pedaço apresenta comprimento L_1 , enquanto que o outro L_2 . Depois de propagar o comprimento $L=L_1+L_2$, o pulso terá a seguinte forma:

$$A(L, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp \left[i \frac{\omega^2}{2} (\beta_{21} L_1 + \beta_{22} L_2) - i\omega T \right] d\omega, \quad (6.4)$$

em que β_{2j} é o parâmetro de GVD (*Group Velocity Dispersion*), para o segmento L_j ($j=1,2$). Em aplicações práticas é mais conveniente definir o parâmetro D_j através de :

$$D_j = \frac{d\beta_j}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_{2j} = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 N_e}{d\lambda^2}, \quad (6.5)$$

onde N_e é o índice de refração efetivo do modo.

Usando a definição de D_j na Eq. (6.5) e substituindo na Eq. (6.4) obtemos a seguinte condição para que haja compensação de dispersão:

$$D_1 L_1 + D_2 L_2 = 0. \quad (6.6)$$

Substituindo a Eq. (6.6) na Eq. (6.4) obtemos que

$$A(L, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp[-i\omega T] d\omega = A(0, T). \quad (6.7)$$

Assim, o perfil do pulso em $z=L$ é restaurado à sua forma inicial em $z=0$ quando a Eq. (6.6) for satisfeita.

A Eq. (6.6) mostra que a fibra compensadora de dispersão (índice $j=2$, sem perda de generalidade) deve ter $D_2 < 0$ em 1.55 μm , desde que $D_1 > 0$ para a fibra núcleo-casca usada nos sistemas de telecomunicações já instalados. Para evitar que

as perdas sejam grandes, L_2 deve ser tão menor quanto possível. Para que isso ocorra $|D_2|$ deve possuir o maior valor possível.

Na próxima seção começamos a análise do comportamento de D como função dos vários parâmetros das fibras coaxiais propostas no capítulo 2. Mostraremos que em determinadas condições dos parâmetros da fibra, D pode ser da ordem de -4900 ps/(nm.Km) em $1.55 \mu\text{m}$ ou maior, concordando com resultados publicados recentemente ^[40,41].

6.2 - Resultados obtidos para a estrutura W1

Antes de apresentar os resultados, vamos descrever o procedimento adotado para calcular D numericamente. Dada uma certa configuração para a fibra coaxial (os valores de a , b e c) e com os índices de refração calculados de acordo com a expressão de Sellmeier, resolvemos numericamente as equações transcendentais deduzidas no Cap. (2), para encontrar o índice de refração efetivo como função do comprimento de onda. Feito isso, o último passo consiste em calcular numericamente a derivada segunda de $N_e(\lambda)$ através da seguinte aproximação ^[45]:

$$\left(\frac{d^2 N_e(\lambda)}{d^2 \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = \frac{1}{12h^2} (-N_e(\lambda_0 - 2h) + 16N_e(\lambda_0 - h) - 30N_e(\lambda_0) + 16N_e(\lambda_0 + h) - N_e(\lambda_0 + 2h)), \quad (6.8)$$

onde h nesta expressão é o passo da função discreta. Calculando a derivada segunda do índice de refração efetivo de acordo com a Eq. (6.8), multiplicamos por λ e obtemos D . Este foi o procedimento utilizado para gerar as curvas D versus λ , discutidas nas próximas seções.

Fig. 6.1 - Fibra coaxial W1 onde $\Delta_i = \frac{n_i^2 - n_2^2}{2n_2^2}$ (i=1,3,4).

$B_1=0.69681388$	$\lambda_1=0.070555513$
$B_2=0.40865177$	$\lambda_2=0.11765660$
$B_3=0.89374039$	$\lambda_3=9.8754801$

Tab. 6.1 - Parâmetros para o índice de refração n_2 utilizados na Eq. (6.1).

A Fig. (6.1) mostra o perfil de índice de refração e a definição dos parâmetros da fibra coaxial. Uma propriedade notável desta estrutura é apresentar altos valores negativos de D quando $\Delta_4=0$ e Δ_3 é bem menor do que Δ_1 , tornando o guia assimétrico. Nós mostramos no Cap. (2) que em situações práticas as diferenças entre os índices de refração n_1, n_2, n_3 e n_4 são pequenas (usualmente da ordem de 10^{-2}). Assim, vamos supor a mesma dependência com o comprimento de onda para todos os índices de refração. Mas observe que esses índices estão deslocados entre se e vinculados pelo perfil de índice de refração que define a estrutura. Desta forma, se Δ_1, Δ_3 e Δ_4 são constantes e independentes do comprimento de onda, n_1, n_3 e n_4 podem ser expressos como função de n_2 através das definições dos Δ_i (i=1,3,4). Para todas a simulações feitas, utilizamos os valores dos parâmetros de Sellmeier^[16] apresentados na Tab. (6.1) para o índice de refração n_2 .

6.2.1 - Resultados obtidos para a fibra coaxial W1 com $\Delta_4=0$

A Fig. (6.2) mostra o que acontece com o índice de refração efetivo dos modos HE_{11} e HE_{12} em função do comprimento de onda quando os parâmetros da fibra assumem os valores $a=1.08 \mu\text{m}$, $b=10.0 \mu\text{m}$, $c=25.0 \mu\text{m}$, $\Delta_1=0.02$, $\Delta_3=0.003$ e $\Delta_4=0.0$. Eles foram encontrados de forma a tornar D o menor possível nas proximidades de $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ para o modo fundamental.

Fig. 6.2 - Variação do índice de refração efetivo como função do comprimento de onda. As linhas pontilhadas representam os guias bastão e anel.

De acordo com a Fig. (6.2), o índice de refração efetivo dos modos HE_{11} e HE_{12} aproximam-se em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$. Na vizinhança deste ponto, N_e para ambos os modos varia de forma acentuada como mostra o cálculo numérico de $\frac{dN_e}{d\lambda}$, apresentado na Fig. (6.3). Como D é proporcional à derivada segunda de N_e em relação a λ , ele pode assumir grandes valores nas proximidades de $1.55 \mu\text{m}$. Assim, o modo fundamental apresenta dispersão negativa em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ ($D<0$), como requerido para haver compensação de dispersão neste comprimento de onda. O modo HE_{12} , ao contrário, apresenta dispersão positiva.

Fig. 6.3 - Derivadas de N_e para os modos HE_{11} e HE_{12} da Fig. (6.2).

A Fig. (6.2) também mostra a variação do índice de refração efetivo do modo fundamental do guia central (bastão) na ausência daquele que está no intervalo $b < r < c$ (anel), e o contrário, nas mesmas condições da estrutura completa. Para comprimentos de onda menores do que $1.55 \mu\text{m}$ observamos que o modo HE_{11} da estrutura completa apresenta um comportamento semelhante ao modo fundamental da estrutura central enquanto que o modo HE_{12} assemelha-se ao modo fundamental do guia que resulta da estrutura apresentada na Fig. (6.1) na ausência do núcleo. A situação contrária ocorre quando o comprimento de onda é maior do que $1.55 \mu\text{m}$. A observação da Fig. (6.2) nos permite concluir que a distância de menor aproximação entre os modos HE_{11} e HE_{12} acontece quando ocorre a transição de comportamento do guia bastão para o anel, no caso do modo fundamental, ou do guia anel para o bastão, no caso do modo HE_{12} . Essa transição entre os dois comportamentos é influenciada pela assimetria do guia e existe uma configuração ótima dos parâmetros da fibra que permitem uma mudança rápida em determinado comprimento de onda. Na Fig. (6.2) o valor mínimo que D assume é $-2914.8 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$ em $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ para o modo fundamental.

Fig. 6.4 - Fatores do confinamento para os modos mostrados na Fig. (6.2).

A Fig. (6.4) mostra com mais detalhes o que acontece com a distribuição de intensidade dos modos HE_{11} e HE_{12} com o comprimento de onda. Esta figura apresenta o cálculo dos fatores de confinamento do núcleo (f_1), da barreira (f_2), do anel (f_3) e a soma $F=f_1+f_2+f_3$, conforme as definições apresentadas no Cap. (3). Está mostrado claramente que o modo HE_{11} transita em um intervalo centrado em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ de uma distribuição de campo elétrico característica de um guia bastão ^[47] para uma outra característica do guia anel ^[47]. De forma contrária, o modo HE_{12} transita de uma distribuição de campo elétrico característica de um guia anel para aquela de um guia bastão. É essa alternância de comportamento a responsável pela aproximação das curvas de dispersão da Fig. (6.2).

Como mostramos na Fig. (6.2), os modos HE_{11} e HE_{12} se aproximam em um determinado valor de comprimento de onda. Variando os parâmetros da fibra, ou seja, os valores de a , b , c , Δ_1 e Δ_3 , alteramos o comprimento de onda em que ocorre a menor aproximação entre os modos e, como consequência, o ponto da curva $D(\lambda)$ onde ocorre o mínimo. A Fig. (6.5) mostra o conjunto de pares ordenados (a,b) da fibra apresentada na Fig. (6.1) com $\Delta_4=0$, em que ocorre o mínimo de D no comprimento de onda de $1.55 \mu\text{m}$. Os demais parâmetros foram mantidos constantes e são fornecidos na legenda da figura. Esse gráfico mostra que um aumento no valor do raio do núcleo pode ser compensado com uma redução no valor de b para que o mínimo de D ainda ocorra no comprimento de onda especificado de $1.55 \mu\text{m}$.

Fig. 6.5 - Pares de valores (a,b), em micra, que produzem mínimo de D em 1.55 μm , com $c=22.0 \mu\text{m}$, $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$.

Observe que apesar da curva D versus λ apresentar um valor mínimo em 1.55 μm para o par (a,b) mostrado na Fig. (6.5), sua altura muda como mostra a Fig. 6.6(a,b). Desta forma, os parâmetros podem ser otimizados para fornecerem o menor valor de D. Para os valores de Δ_1 , Δ_3 e c considerados na Fig. (6.5), o valor mínimo que D assume é $D_{\text{mim}} = -4.034,5 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$ quando $a=1.01\mu\text{m}$ e $b=14.73\mu\text{m}$. Esse comportamento é devido à dependência da aproximação entre as curvas N_e versus λ para os modos HE_{11} e HE_{12} ser função de a e b bem como dos demais parâmetros fixos. Quanto mais essas curvas se aproximam em determinado comprimento de onda, maior será o valor de D (em valor absoluto), uma vez que mais drástica será a transição bastão/anel do modo fundamental.

Fig. 6.6 - (a) Variação de D como função do comprimento de onda para

$\Delta_1=0.02$, $\Delta_2=0.003$, $c=22.0 \mu\text{m}$ com a e b em micra.

(b) Variação de $-D$ em função de a e λ para os pontos indicados na Fig. (6.4).

Observando os valores de a e b mostrados na Fig. (6.6a), constatamos que o comportamento das curvas D versus λ é mais sensível a a do que a b . Isso significa que uma pequena variação em a requer uma maior mudança em b para manter o valor de D mínimo no comprimento de onda especificado. Para enfatizar que o valor mínimo de D requer uma adequada otimização dos parâmetros a e b , calculamos sua dependência como função do comprimento de onda e a , para os pontos indicados na Fig. (6.5). O resultado está mostrado na superfície da Fig. (6.6b) que apresenta um máximo quando a , b , Δ_1 e Δ_3 assumem os valores informados no parágrafo anterior.

6.2.2 - D como função de c para a estrutura W1 com $\Delta_4=0$

Vamos considerar a variação de D em função do raio c para a estrutura da Fig. (6.1) com $\Delta_4=0$. Para cada valor de c fizemos curvas da mesma forma que aquela mostrada na Fig. (6.5), ou seja, calculamos os pares (a,b) que geram o mínimo de D em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$. O resultado é a família de curvas mostradas na Fig. (6.7). A altura do mínimo de D altera-se ao longo de cada curva da mesma forma que os resultados obtidos para $c=22.0 \mu\text{m}$ na Fig. (6.6a). No entanto, encontramos que o mínimo de D em cada curva sempre ocorre quando $a=1.02 \mu\text{m}$ para c maior do que $22.0 \mu\text{m}$, como mostra a linha vermelha conectando estes valores na Fig. (6.7).

Fig. 6.7 - Pares de valores (a,b), em micra, que produzem mínimo de D em $1.55 \mu\text{m}$ com $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$. Os valores de c estão indicados na figura.

A Fig. (6.8) mostra como D varia em função do comprimento de onda para $c=25.0 \mu\text{m}$. O comportamento de D verificado nestas curvas é o mesmo obtido na Fig. (6.6a), com uma diferença fundamental. Seu valor mínimo é bem menor do que o obtido naquele caso. Com $a=1.02 \mu\text{m}$, $b=16.98 \mu\text{m}$, $c=25.0 \mu\text{m}$, $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$ obtemos $-12.179 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$ para D, duas vezes e meia maior do que o valor obtido por Thyagarajan *at al*.^[40] Outro fato importante é que a largura da

curva D versus λ diminui com o aumento de c . Os resultados de nossas simulações mostram que à medida que c aumenta com Δ_1 e Δ_3 constantes, os modos HE_{11} e HE_{12} se aproximam muito mais em determinado comprimento de onda fazendo com que a transição bastão/anel mostrada na Fig. (6.2) seja mais busca. Isso possibilita um crescimento muito grande do valor mínimo de D .

Fig. 6.8 - Variação de D como função do comprimento de onda.

Nesta figura a e b estão em micra.

Como D pode crescer para valores enormes com o aumento de c com Δ_1 e Δ_3 mantidos constantes em 0.02 e 0.003, respectivamente, precisamos estabelecer se esse comportamento é benéfico do ponto de vista prático. Como estamos procurando otimizar uma fibra compensadora de dispersão que apresente o menor comprimento possível para compensar uma determinada largura inicial do pulso, o que significa o maior valor para $-D$, um parâmetro essencial para aferir a eficiência desta fibra é o *bend loss*. Isso se deve ao fato de pensarmos o compensador de dispersão como um comprimento apropriado da fibra compensadora enrolada em um carretel que deve possuir o menor raio possível para que o dispositivo seja compacto. Desta forma, o estudo do *bend loss* permite excluir configurações de fibras que embora forneçam um grande valor negativo para D , apresentam um grande raio de *bend*.

6.2.3 - Cálculo da perda de energia para uma fibra curvada

Para fibras ópticas com um arbitrário perfil transversal de índice de refração, o *bend loss* do modo fundamental pode ser calculado através da seguinte expressão^[48]:

$$\alpha'_b = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{cRW^3} \right)^{1/2} S(V, W) \exp \left(-\frac{4RW^3\Delta}{3V^2c} \right), \quad (6.9)$$

onde ,

$$S(V, W) = \frac{c^2}{K_0^2(W)} \left[\int_0^\infty \frac{E^2(\rho) \rho d\rho}{E^2(c)} \right]^{-1}, \quad (6.10)$$

onde $E(\rho)$ é a distribuição radial do campo elétrico na fibra reta, sem o curvamento. As outras variáveis destas equações (sempre em relação à Fig. (6.1)), são:

$$W = ck_0 (N_c^2 - n_4^2)^{1/2}, \quad V = \frac{2\pi c}{\lambda} (n_1^2 - n_4^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \Delta = \frac{n_1^2 - n_4^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_4}{n_1}. \quad \text{Esta última}$$

aproximação só é válida porque estamos supondo pequenas as diferenças entre os índices de refração envolvidos na distribuição transversal de índice de refração.

Considerando que a entrada da fibra esteja em $z=0$ e a saída em $z=L$, a potência na saída $P(L)$ está relacionada àquela de entrada $P(0)$, através de :

$$P(L) = P(0) \exp(-2\alpha'_b L). \quad (6.11)$$

Desta forma o nível de diferença entre as potências de entrada e saída, chamada de atenuação da fibra em decibéis, é por definição, dada como:

$$\begin{aligned} a(\text{dB}) &= 10 \log \left(\frac{P(0)}{P(L)} \right) = 20\alpha'_b L \log(e) \\ &= 8.68589\alpha'_b L \end{aligned} \quad (6.11)$$

A Fig. (6.9) mostra o cálculo do puro *bend loss* de acordo com a expressão apresentada na Eq. (6.11). Os valores de a e b estão mostrados na Tab. (2) e foram encontrados de forma que o valor mínimo de D ocorresse em $\lambda=1.55\text{ }\mu\text{m}$. A distribuição de campo elétrico foi calculada numericamente a partir da determinação do índice de refração efetivo compatível com esses parâmetros da fibra. Da mesma forma, a integral que aparece na Eq. (6.9) também foi calculada numericamente através de uma rotina desenvolvida em Fortran90.

a (μm)	b (μm)	c (μm)
1.0	12.32	19.0
1.02	14.15	22.0
1.02	16.98	25.0
1.02	20.0	28.0
1.02	22.99	31.0

Tab. 6.2 - Valores dos parâmetros da fibra W1 com $\Delta_4=0$ que fornecem mínimo de D em $\lambda=1.55\text{ }\mu\text{m}$.

A Fig. (6.9) mostra que embora o valor mínimo de D cresça com o aumento de c, o *bend loss* também cresce. Isso ocorre porque à medida que c cresce, mais as curvas de dispersão dos modos HE_{11} e HE_{12} se aproximam fazendo com que o campo elétrico na casca da fibra tenha uma contribuição maior. Com sabemos, quanto maior for a extensão do campo elétrico na casca da fibra, maior será sua sensibilidade à curvatura. Para confirmar isso, mostramos na Fig. (6.10(a,b,c)) o comportamento dos fatores de confinamento como função do comprimento de onda nas condições que geraram a Fig. (6.9).

Fig. 6.9 - *Bend loss* para a fibra W1 com $\Delta_4=0$ calculado nos pontos da Tab. (2) onde $\Delta_1=0.02$, $\Delta_3=0.003$ e $\lambda=1.55 \mu\text{m}$.

As Figs. (6.10(a,b,c)) mostram o mesmo comportamento para os fatores de confinamento do modo fundamental na Fig. (6.4a). Novamente, esse modo transita de uma configuração com campo elétrico centrado na região do núcleo e barreira para comprimentos de onda menores do que $1.55 \mu\text{m}$, para uma outra com predominância na região do anel. No entanto, essa mudança de comportamento torna-se cada vez mais abrupta à medida que c aumenta e está associada com a maior aproximação entre as curvas de índices de refração efetivos dos modos HE_{11} e HE_{12} . Observe na Fig. (6.10) que, quanto mais brusca for a mudança no campo, maior deve ser o raio de curvatura para permitir um *bend-loss* aceitável. Observe também que os parâmetros da Tab. (6.2) foram encontrados de forma que apresentam o menor valor de D em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$, daí a mudança de comportamento nos fatores de confinamento ocorrer neste comprimento de onda. Por fim, a inversão de comportamento na Fig. (6.9) entre as curvas 1 e 2, mostra que existe um processo de otimização de forma que apenas determinada configuração dos parâmetros da fibra permite que o raio de *bend* seja o menor possível.

Fig. 6.10 - Variação dos fatores de confinamento da fibra W1 para o modo fundamental com $\Delta_4=0$. (a) $c=19.0 \mu\text{m}$; (b) $c=22.0 \mu\text{m}$; (c) $c=31.0 \mu\text{m}$.

a (μm)	b (μm)	c (μm)	R _{bend} (cm)	D (ps/(Km.nm))
1.02	14.15	22.00	> 3.06	-3993.0
1.02	16.98	25.00	> 3.30	-12175.6

Tab. 6.3 - Parâmetros das fibras compensadoras.

Os resultados de nossas simulações permitem projetar as fibras da Tab. (6.3) que podem atuar como compensadoras de dispersão. Nesta tabela R_{bend} é o mínimo raio de curvatura da fibra que faz o *bend-loss* ser menor do que 0.01 dB/Km. Os demais parâmetros são mantidos constantes nos valores $\Delta_1=0.02$, $\Delta_3=0.003$ e $\Delta_4=0.0$. Observe que o mínimo raio de curvatura grandemente aceito em ligações de moradias por desenvolvedores de fibra na instalação de sistemas óticos baseados em fibra é de 3.75 cm ^[48]. Desta forma, ambas as fibras apresentadas na Tab. (6.3) podem ser utilizadas para esse objetivo.

6.3 - Variação de D como função de Δ_4

A partir dos parâmetros utilizados para otimizar as fibras apresentadas na Tab. (6.3), variamos o valor de Δ_4 . Ao fazer isso, as estruturas obtidas passam a ser aquelas que chamamos de W1 (se $\Delta_4 < 0$) ou W2 (se $\Delta_4 > 0$). Para encontrar os índices de refração efetivos dos modos como função do comprimento de onda, resolvemos numericamente as equações transcendentais deduzidas no Cap. (2) da mesma forma que nos Caps. (3) e (4). Os resultados estão mostrados nas Figs. (6.11) e (6.12).

Fig. 6.11 - Variação de D_{min} e λ_{min} como função de Δ_4 onde
 $a=1.02 \mu m$, $b=14.15 \mu m$, $c=22.0 \mu m$, $\Delta_1=0.02$ e $\Delta_3=0.003$.

A Fig. (6.11a) mostra a variação do comprimento de onda onde ocorre o mínimo do coeficiente de dispersão de segunda ordem como função de Δ_4 , enquanto que a Fig. (6.11b) mostra os correspondentes valores de D . Os gráficos permitem concluir que uma alteração de Δ_4 controla a posição do mínimo da curva D versus λ . Os resultados mostram que para $\Delta_4 > 0$, o valor mínimo de D assume maiores valores, em valor absoluto, enquanto que para $\Delta_4 < 0$, menores valores. Com isso podemos colocar o mínimo de D em uma posição nas vizinhanças de $1.55 \mu\text{m}$ sem alterar significativamente seu valor. Os resultados obtidos para $c=25.0 \mu\text{m}$ são muito semelhantes àqueles com $c=22.0 \mu\text{m}$, como mostra a Fig. (6.12). Mas observe que neste caso os valores de D são bem maiores do que naquele.

Fig. (6.12) Variação de D_{mim} e λ_{mim} como função de Δ_4 onde

$$a=1.02 \mu\text{m}, b=16.98 \mu\text{m}, c=25.0 \mu\text{m}, \Delta_1=0.02 \text{ e } \Delta_3=0.003.$$

6.4 - Síntese dos resultados obtidos

O principal resultado obtido neste capítulo diz respeito à otimização de uma fibra ótica coaxial que pode atuar como compensadora de dispersão no comprimento de onda de $1.55 \mu\text{m}$. Os parâmetros otimizados estão fornecidos na Tab. (6.3). Nestas circunstâncias o valor mais baixo encontrado para D foi de $-12179 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$. Este alto valor indica que é necessário um pequeno comprimento da fibra compensadora para conseguir determinada compensação de dispersão. Observe que a principal vantagem em ter grandes valores de D está na redução do comprimento da fibra necessário para determinado nível de compensação, fazendo com que as perdas inerentes à propagação sejam desprezíveis nesta parte do sistema. Posto isso, o principal problema que resta se refere ao acoplamento do campo modal da fibra onde o pulso propaga originalmente cuja dispersão desejamos compensar àquele da fibra compensadora de dispersão e novamente da fibra compensadora para a fibra original. Nós não avaliamos esse tipo de perda mas do ponto de vista experimental, isso está resolvido, como mostram algumas das referências citadas na introdução deste capítulo.

Os resultados obtidos indicam ainda que a localização do mínimo de D como função do comprimento de onda pode ser alterada através da variação de Δ_4 . As Figs. (6.11) e (6.12) mostram isso de maneira incontestável.

Para finalizar, queremos informar que calculamos os valores de D para as estruturas M1 e M2. Para os parâmetros de que dispomos (principalmente os coeficientes de Sellmeier para a variação dos quatro índices de refração como função do comprimento de onda), os valores obtidos para D em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ com estas estruturas foram bem inferiores aos alcançados para as estruturas W1 e W2. Além do mais, os resultados discutidos no Cap. (4) mostram que as estruturas M1 e M2 apresentam um modo fundamental cuja distribuição de campo elétrico está concentrada na região do anel da fibra. Desta forma, estas estruturas são muito mais sensíveis ao *bend loss* do que as do tipo W cuja distribuição de campo elétrico do modo fundamental está concentrada no núcleo.

O MÉTODO DA COLOCAÇÃO PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES

7.0) Introdução

Neste capítulo propomos um novo método numérico para resolver um sistema de equações diferenciais parciais. Esse método será utilizado no próximo capítulo para estudar a propagação de pulsos em um *taper*. Ele é uma extensão do método da colocação ortogonal, desenvolvido para uma equação diferencial parcial. Dividimos o capítulo da seguinte forma. Na seção (7.1) revemos o método dos resíduos ponderados e apresentamos o da colocação. Na seção (7.2) desenvolvemos o procedimento que permite escolher os pontos de colocação de forma a minimizar o erro no cálculo da função resíduo. Mostraremos que os melhores pontos de colocação são as raízes dos polinômios de Jacobi de ordem N . Na seção (7.3), propomos o método para resolver sistemas de equações diferenciais parciais. Por último, na seção (7.4) aplicamos o método desenvolvido na seção (7.3) a um problema resolvido na literatura. Para o exemplo apresentado, mostraremos como estudar a convergência da solução e como escolher o número de pontos de colocação de forma a obter uma solução aproximada com o menor erro e no menor tempo de computação.

7.1- Descrição do método da colocação para uma equação diferencial

Consideremos uma equação diferencial que governa determinado problema físico e que apresenta a seguinte forma:

$$L_1 Y(x) + f(x) = 0, \quad (7.1)$$

onde L_1 representa um operador diferencial definido dentro de um volume V , Y é a variável dependente, $f(x)$ é uma função de x . Nestas equações x representa as variáveis independentes ($x=x_1, x_2, \dots, x_N$).

A equação diferencial (7.1) deve satisfazer a condição de contorno

$$L_2 Y(x) + g(x) = 0, \quad (7.2)$$

sobre o contorno S de V . Novamente, L_2 e $g(x)$ representam um operador diferencial e uma função de x , respectivamente, definidos sobre S .

Em geral a função $Y(x)$ é desconhecida e difícil de encontrar. Desta forma, procuramos uma solução aproximada $\bar{Y}(x)$ para a Eq. (7.1), construída como uma expansão em termos de funções polinomiais da seguinte forma:

$$\bar{Y}(x) = T_0(x) + \sum_{j=1}^N a_j T_j(x), \quad (7.3)$$

onde $T_0(x)$ satisfaz a Eq. (7.2). As funções $T_j(x)$ são definidas dentro do domínio V e chamadas de funções tentativas. Em geral são de livre escolha, desde que sejam linearmente independentes. Os N coeficientes a_j devem ser determinados de alguma forma tal que as funções $Y(x)$ e $\bar{Y}(x)$ sejam as mais próximas possíveis.

Substituindo a Eq. (7.3) na Eq. (7.1) obtemos uma função não nula chamada resíduo, representada como $R_N(a, x)$, $a=a_1, \dots, a_N$. Multiplicando o resíduo por uma função peso $W_j(x)$, $j=1, 2, \dots, N$, integrando no domínio das variáveis independentes e

exigindo que a integral resultante seja nula, obtemos N relações entre os coeficientes a_j que, em princípio, permitem determiná-los. Essa relação possui a seguinte forma:

$$\int_V R_N(a, \mathbf{x}) W_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (7.4)$$

A Eq. (7.3) propõe uma forma de encontrar os coeficientes a_j e constitui a relação básica para uma classe de métodos numéricos chamados de Método dos Resíduos Ponderados (*MWE- Weighted Residual Method*).

Existem muitas possibilidades de escolha para as N funções peso e cada opção recebe um nome particular. Por exemplo, para $W_j(\mathbf{x}) = x^{j-1}$, $j=1, \dots, N$, o método passa a ser chamado de método dos momentos. Já para a escolha da função peso como $W_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial Y_N}{\partial a_j}$, $j=1, \dots, N$, o método passa a ser chamado de método de Galerkin^[49].

Em nosso trabalho nos limitaremos ao método da colocação em que as funções peso adquirem a seguinte forma:

$$W_j(x) = \delta(x - x_j), \quad (7.5)$$

onde $j=1, \dots, N$ e os pontos x_j são N pontos no interior de V escolhidos de forma conveniente. A escolha da função peso (7.5) simplifica muito o problema, pois não é necessário fazer uma integração da função resíduo. Os valores a_j , $j=1, \dots, N$ neste caso são determinados através da resolução do sistema linear $R_N(a, x_j) = 0$, $j=1, \dots, N$.

Na próxima seção vamos detalhar o procedimento que permite determinar o melhor conjunto de valores x_j , $j=1, \dots, N$. Esse conjunto de valores anula o resíduo se a solução do problema original (7.1) for um polinômio.

7.2 - Determinação dos pontos x_j

Para facilitar o desenvolvimento que segue, consideremos x como uma variável unidimensional. Desejamos encontrar o melhor conjunto de valores x_j , $j=1,\dots,N$ para o método da colocação, que minimize o erro ao propor como aproximação para a solução do problema a Eq. (7.3). Para tanto, retornemos ao cálculo da integral de resíduo, apresentada na Eq. (7.4). De forma geral, os parâmetros a_j serão multiplicados por integrais em x , definidas dentro do domínio do problema. Consideremos que esse domínio seja representado como o intervalo fechado $[b_1, b_2]$. Vamos mostrar que essas integrais podem ser aproximadas por uma soma da seguinte forma:

$$\int_{b_1}^{b_2} W(x)f(x)dx \cong \sum_{i=0}^N \omega_i f(x_i) , \quad (7.6)$$

onde omitimos o índice j da função peso na Eq. (7.4). Os $N+1$ valores ω_i , chamados de pesos, são calculados para cada um dos $N+1$ valores funcionais $f(x_i)$. Os valores x_i , $i=0,\dots,N$ são os pontos que desejamos determinar de tal forma que a Eq. (7.6) seja verdadeira.

Vamos estimar o valor da integral do lado esquerdo da Eq. (7.6) através de um polinômio interpolante de ordem N designado como $p_N(x)$. Ao fazer isso, a integração será dada por:

$$\int_{b_1}^{b_2} W(x)f(x)dx \cong \int_{b_1}^{b_2} W(x)p_N(x)dx + \int_{b_1}^{b_2} W(x)R_N(x)dx , \quad (7.7)$$

em que $R_N(x)$ é o erro de ordem N cometido ao aproximar $f(x)$ pelo polinômio interpolante $p_N(x)$.

Como os valores x_i ainda não foram especificados, a forma Lagrangiana para o polinômio interpolante é a mais adequada pois permite pontos arbitrariamente espaçados. Desta forma, $f(x)$ será dado por ^[50]:

$$f(x) \cong p_N(x) + R_N(x) = \sum_{i=0}^N L_i(x) f(x_i) + \left[\prod_{i=0}^N (x - x_i) \right] \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}, \quad (7.8)$$

onde $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$ é chamado de polinômio interpolador de Langrange,

$\xi \in [b_1, b_2]$, e $f^{(N+1)}(\xi)$ é a derivada de ordem $(N+1)$ de $f(x)$. Vamos considerar que os pontos x_i estejam contidos dentro do intervalo fechado $[b_1, b_2]$.

Para o que segue, como ficará claro ao longo da exposição, é mais conveniente redefinir o intervalo $[b_1, b_2]$ como $[-1, 1]$, através da seguinte transformação:

$$z = \frac{2x - (b_1 + b_2)}{b_2 - b_1}. \quad (7.9)$$

Desta forma, uma nova função $F(z)$ é definida como:

$$F(z) = f\left(\frac{z(b_2 - b_1) + (b_1 + b_2)}{2}\right), \quad (7.10)$$

e a Eq. (7.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F(z) \cong \sum_{i=0}^N L_i(z) F(z_i) + \left[\prod_{i=0}^N (z - z_i) \right] \frac{F^{(N+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (7.11)$$

em que os pontos z_i são os x_i transformados de acordo com a Eq. (7.9).

Em geral $f(x)$ ou seu correspondente $F(z)$, não são polinômios. No entanto, vamos considerar que $f(x)$ apresenta a forma particular de um polinômio de grau $2N+1$ e estudar a consequência que este fato provoca na Eq. (7.7). Mostraremos que essa condição sobre a forma de $f(x)$ torna a Eq. (7.6) uma igualdade.

De acordo com hipótese anterior, $F^{(N+1)}(\xi)$ na Eq. (7.11) passa a ser um polinômio de ordem N . Como $L_i(z)$ é um polinômio de ordem N e $\prod_{i=0}^N (z - z_i)$ de

ordem $N+1$, $F(z)$ apresenta a ordem desejada. Se fazemos $\frac{F^{(N+1)}(\xi)}{(n+1)!} = q_N(z)$, a Eq. (7.11) pode ser reescrita como:

$$F(z) \cong \sum_{i=0}^N L_i(z) F(z_i) + \left[\prod_{i=0}^N (z - z_i) \right] q_N(z), \quad (7.12)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (12) por $W(x)$ e integrando entre os limites $[-1, 1]$, encontramos que :

$$\int_{-1}^1 W(z) F(z) dz \cong \sum_{i=0}^N F(z_i) \int_{-1}^1 W(z) L_i(z) dz + \int_{-1}^1 W(z) \left[\prod_{i=0}^N (z - z_i) \right] q_N(z) dz, \quad (7.13)$$

Se desprezamos o último termo do lado direito da igualdade anterior obtemos a formula desejada para o cálculo da integral da forma

$$\int_{-1}^1 W(z) F(z) dz \cong \sum_{i=0}^N \omega_i F(z_i), \quad (7.14)$$

desde que definamos $\omega_i = \int_{-1}^1 W(z) L_i(z) dz = \int_{-1}^1 W(z) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N \left(\frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right) dz$.

Note que a Eq. (7.14) é verdadeira apenas se o termo de erro for nulo. Assim, nosso objetivo é encontrar os valores z_i que o tornam nulo. Para isso, vamos utilizar as propriedades de ortogonalidade e completeza dos polinômio de Jacobi ^[51]. Esses polinômios, representados como $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ apresentam a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 (1-z)^\alpha (1+z)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(z) P_k^{(\alpha, \beta)}(z) dz = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \delta_{nk}, \quad (7.15)$$

onde $\Gamma(z)$ é a função Gamma.

Como os polinômios de Jacobi são funções contínuas dentro do intervalo $[-1, 1]$ e formam uma base de funções como consequência da Eq. (7.15), vamos expandir os polinômios $q_N(z)$ e $\prod_{i=0}^N (z - z_i)$ do termo de erro na Eq. (7.13) (segundo termo do lado direito) nesta base. O resultado é o seguinte:

$$\prod_{i=0}^N (z - z_i) = \sum_{i=1}^{N+1} d_i P_i^{(\alpha, \beta)}(z), \quad (7.16)$$

$$q_N(z) = \sum_{j=1}^N c_j P_j^{(\alpha, \beta)}(z).$$

Substituindo as expansões apresentadas na Eq. (7.16) no termo de erro da Eq. (7.13), encontramos que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 W(z) \left[\prod_{i=0}^N (z - z_i) \right] q_N(z) dz &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_i c_j \int_{-1}^1 W(z) P_i^{(\alpha, \beta)}(z) P_j^{(\alpha, \beta)}(z) dz + \\ & b_{N+1} \sum_{j=1}^N c_j \int_{-1}^1 W(z) P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z) P_j^{(\alpha, \beta)}(z) dz. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Neste ponto da dedução, vamos fazer $W(z) = (1-z)^\alpha (1+z)^\beta$, onde $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. Com essa escolha particular para a função peso, podemos utilizar a relação de ortogonalidade entre os polinômios de Jacobi e mostrar que a Eq.(7.16) se reduz a:

$$\int_{-1}^1 W(z) \left[\prod_{i=0}^N (z - z_i) \right] q_N(z) dz = \sum_{j=0}^N d_j c_j \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2j + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(j + \alpha + 1) \Gamma(j + \beta + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(j + \alpha + \beta + 1)}. \quad (7.18)$$

Desejamos anular o lado direito da Eq. (7.18). Vamos impor que $d_i = 0$ para $i=1, \dots, N$ e verificar que consequências isso acarreta nas Eqs. (7.16). Com a

imposição anterior sobre os coeficientes d_i válida, o coeficiente d_{N+1} na expansão (7.16) fica indeterminado e essa expansão fica reduzida à seguinte equação:

$$\prod_{i=0}^N (z - z_i) = d_{N+1} P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z) . \quad (7.19)$$

Observe que o polinômio de Jacobi do lado esquerdo da equação (7.19) é de ordem $N+1$. Como qualquer polinômio de Jacobi apresenta todas as raízes reais e contidas dentro do intervalo $[-1, 1]$, $P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z)$ pode ser representado através de:

$$P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z) = \alpha_{N+1} \prod_{i=0}^N (z - \mu_i) , \quad (7.20)$$

em que μ_i , $i=0, \dots, N$ são suas $N+1$ raízes.

A propriedade importante da Eq. (7.19) é que o polinômio do lado esquerdo está na forma fatorada, isso é, ele possui $N+1$ raízes z_i . Desde que o lado direito da Eq. (7.18) é o mesmo polinômio do lado esquerdo, os números z_i devem ser as raízes de $d_{N+1} P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z)$ ou seja, $\mu_i = z_i$. Com essa escolha para os pontos de colocação o termo de erro da Eq. (7.13) é nulo e a Eq. (1.14) passa a ser uma igualdade.

A partir das considerações anteriores concluímos que:

$$\int_{-1}^1 (1-z)^\alpha (1+z)^\beta F(z) dz = \sum_{i=0}^N \omega_i F(z_i) , \quad (7.21)$$

onde z_i são as $N+1$ raízes do Polinômio de Jacobi $P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z)$. Observe que essa igualdade só é verdadeira quando $F(z)$ for um polinômio de ordem até $2N+1$. No caso geral em que $F(z)$ não é um polinômio, a Eq. (7.22) passa a ser aproximada e será tanto mais exata quanto maior for o valor de N . A fórmula apresentada na Eq. (7.21) é chamada genericamente de fórmula de quadratura. Como os polinômios utilizados foram os de Jacobi, a quadratura passa a ter o nome particular de quadratura de Gauss-Jacobi.

Para completar a discussão, devo comentar sobre a condição imposta sobre os coeficientes $d_i = 0$, $i=1, \dots, N$. De acordo com a Eq. (7.16) e a relação de ortogonalidade entre os polinômios de Jacobi (7.15), os coeficiente d_k são dados por:

$$d_k = \frac{(2k + \alpha + \beta + 1)\Gamma(k + 1)\Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k + \alpha + 1)\Gamma(k + \beta + 1)} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left\{ \prod_{i=0}^N (z - z_i) \right\} P_k^{(\alpha, \beta)}(z) dz \quad (7.22)$$

Se o produto entre chaves na expressão anterior for proporcional a $P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z)$, podemos retirar duas conclusões. A primeira é que $d_k=0$, para $k=1, \dots, N$, consequência direta da relação de ortogonalidade. O termo d_{N+1} é diferente de zero. A segunda é que os pontos z_i são as $N+1$ raízes de $P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z)$ pois a Eq. (7.20) é sempre válida para um polinômio. Desta forma, não existe inconsistências no processo de determinação dos $N+1$ pontos de colocação.

A partir dos resultados obtidos acima, podemos reformular o método da colocação considerando que os pontos x_i utilizados como pontos de colocação na Eq. (7.5) sejam as $N+1$ raízes do polinômio de Jacobi $P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(z)$. Essa escolha permite minimizar o erro cometido ao propor a aproximação (7.3) como solução da Eq. (7.1). Neste caso particular, o método passa a ser chamado de colocação ortogonal.

A nova solução aproximada passa a assumir a seguinte forma:

$$\bar{Y}(x) = \sum_{j=0}^N L_j(x) y_j, \quad (7.23)$$

em que os polinômios de Langrange $L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$, $j=1, \dots, N$, são as funções

tentativa. Essa escolha para os pontos de colocação e funções tentativa fazem com que o erro cometido seja minimizado ou levem ao resultado exato se a solução do problema $Y(x)$ for um polinômio de ordem até $2N+1$. Por último, devemos informar que nem sempre o domínio de interesse do problema que desejamos resolver coincide com o intervalo $[-1, 1]$ onde os polinômio de Jacobi são definidos. Neste caso, é necessária uma mudança de variáveis nos moldes daquela apresentada na Eq. (7.9).

O leitor interessado em saber como aplicar o método para resolver uma equação diferencial parcial parabólica não-linear deve consultar as referências ^[52,53]. No capítulo 4 da tese de mestrado de Filomeno ^[52] estão resolvidos alguns exemplos bem simples de aplicação do método bem como um estudo da convergência da solução aproximada como função do número de pontos de colocação. É mostrado que quanto maior for a quantidade de pontos de colocação, maior a convergência do método, o que concorda com o aumento da precisão da soma em (7.6) com o aumento de N se $f(x)$ não for um polinômio.

No restante da exposição trabalharemos com os polinômios de Jacobi definidos no intervalo $[0,1]$. Todo o procedimento desenvolvido acima continua válido desde que a função peso seja definida como $W(x) = (1-x)^{p-q} x^{q-1}$, com $(p-q) > -1$ e $q > 0$ ^[43]. Nesta situação, o intervalo de ortogonalidade dos polinômios passa a ser o intervalo $[0,1]$. Fizemos isso motivado pelo fato das rotinas desenvolvidas para o cálculo das raízes dos polinômios de Jacobi e derivadas dos polinômios de Langrange terem sido desenvolvidas para o intervalo $[0,1]$ ^[54]. O apêndice (2) apresenta uma listagem das rotinas que calculam as raízes dos polinômios de Jacobi, fazem as derivadas dos polinômios de Langrange nos pontos de colocação e calculam uma aproximação para a solução através da interpolação Langrangena, adaptadas para FORTRAN90.

7.3 - Desenvolvimento de uma extensão do método da colocação ortogonal para sistemas de equações diferenciais parciais

Consideremos um sistema de duas equações diferenciais parciais nas variáveis dependentes U e V , funções das coordenadas independentes (ξ, s) . O tipo de sistema que pretendemos resolver assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \xi} &= E_1(\xi, s, U, V)U, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} &= E_2(\xi, s, U, V)V,\end{aligned}\tag{7.24}$$

onde E_1 e E_2 são operadores diferenciais que podem ser funções das variáveis dependentes ou independentes e de derivadas parciais de primeira ou segunda ordem na variável s .

O método consiste em propor que U e V possam ser expandidos através de uma generalização da Eq. (7.23) da seguinte forma :

$$\begin{aligned}U(\xi, s) &= \sum_{j=1}^N L_j(s)u_j(\xi), \\ V(\xi, s) &= \sum_{j=1}^N L_j(s)v_j(\xi),\end{aligned}\tag{7.25}$$

onde $L_j(s)$ são polinômios de Langrange de ordem N com x_j , $j=1, \dots, N$, sendo as N raízes do polinômio de Jacobi $P_N^{(\alpha, \beta)}(s)$ no intervalo $[0, 1]$. Até dito em contrário, vamos supor que o domínio da variável s em $U(\xi, s)$ e $V(\xi, s)$, esteja dentro do intervalo $[0, 1]$. Após a dedução do método, em um exemplo específico, mostraremos como fazer para contornar o problema que surge quando s está fora do intervalo anterior.

É fácil mostrar que o polinômio de Langrange satisfaz a seguinte propriedade nos pontos x_j , chamados de pontos de colocação:

$$L_j(s_i) = \delta_{ij}. \quad (7.26)$$

Substituindo as Eqs. (7.25) nas Eqs. (7.24) encontramos que:

$$\sum_{j=1}^N L_j(s) \frac{du_j}{d\xi} = E_1 \sum_{j=1}^N L_j(s) u_j(\xi), \quad (7.27)$$

$$\sum_{j=1}^N L_j(s) \frac{dv_j}{d\xi} = E_2 \sum_{j=1}^N L_j(s) v_j(\xi).$$

Vamos considerar que os pontos extremos do intervalo de colocação ($j=1$ e $j=N$), sejam utilizados para satisfazer as condições de contorno do problema. Assim, restam $N-2$ pontos interiores ao intervalo da variável s , para cada variável dependente, onde não conhecemos os valores das funções $u_j(\xi)$ e $v_j(\xi)$. A determinação destas últimas é feita através da resolução do sistema de Eqs. (7.27) em cada ponto de colocação s_i , $i=2, \dots, N-1$, usando a propriedade dos polinômios de Langrange apresentada na Eq. (7.26). O resultado é o seguinte:

$$\frac{du_i}{d\xi} = E_1 u_i(\xi), \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (7.28)$$

$$\frac{dv_i}{d\xi} = E_2 v_i(\xi), \quad i = 2, \dots, N-1,$$

onde E_1 e E_2 passam a ser funções de u_i e v_i e das derivadas de $L_j(s)$ calculadas em $s=s_i$. Nesta forma, o sistema de equações (7.28) pode ser resolvido com as condições iniciais do problema original. Assim, o método converte o sistema de duas equações diferenciais parciais em um de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que pode ser resolvido numericamente através do método de Runge-Kutta de 5º ordem [50].

Resolvido o sistema de Equações (7.28), encontramos os valores de u_i, v_i em determinada posição ξ . Retornando esses valores nas Eqs. (7.25), encontramos através da interpolação proposta, os valores de $U(\xi, s)$ e $V(\xi, s)$ em qualquer posição s . Essa é a essência do método. Sua maior ou menor complexidade de implementação em um problema específico depende da forma dos operadores E_1 e E_2 e das condições de contorno do problema.

Na próxima seção resolveremos um sistema de equações específico e determinaremos exatamente a forma do sistema de equações (7.28). Como veremos, o método é suficientemente versátil para permitir o acréscimo de mais equações diferenciais, de forma que podemos resolver um sistema de 3, 4, ... equações diferenciais acopladas. No entanto, a dificuldade de implementação aumenta com o aumento da quantidade de equações a resolver.

7.4 - Exemplo de aplicação do método

Este exemplo tem como objetivo apresentar as propriedades do método proposto na seção anterior. Escolhemos para isso, o sistema de equações diferenciais proposto por Ostrovskaya e Kivshar ^[56], para descrever a interação entre dois feixes linearmente polarizados e incoerentes em um meio fotorefrativo. Se u e ω são as amplitudes destes feixes, o sistema apresenta a seguinte forma:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(|u|^2 + |\omega|^2)}{1 + s(|u|^2 + |\omega|^2)} u + u = 0, \quad (7.29)$$

$$i \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{(|u|^2 + |\omega|^2)}{1 + s(|u|^2 + |\omega|^2)} \omega + \lambda \omega = 0, \quad (7.30)$$

onde $u(z, x)$ e $\omega(z, x)$ são funções complexas e s, λ são parâmetros que aparecem no modelo. Observe que $i = (-1)^{1/2}$.

O primeiro passo para resolver este sistema é transformá-lo em um de equações que envolvam apenas variáveis reais. Para tanto, vamos reescrever

explicitamente $u(z, x)$ e $\omega(z, x)$ em termos de suas partes reais e imaginárias da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(z, x) &= u_1(z, x) + iu_2(z, x), \\ \omega(z, x) &= \omega_1(z, x) + i\omega_2(z, x), \end{aligned} \quad (7.31)$$

onde u_1, u_2, ω_1 e ω_2 são funções reais.

Substituindo as Eqs. (7.31) nas Eqs. (7.29) e (7.30) e separando as partes reais e imaginárias, encontramos o seguinte sistema de equações acopladas para u_1, u_2, ω_1 e ω_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{1 + s(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)} \right) u_2 &= 0, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{1 + s(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)} \right) u_1 &= 0, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + \left(\lambda - \frac{(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{1 + s(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)} \right) \omega_2 &= 0, \\ -\frac{\partial \omega_2}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \left(\lambda - \frac{(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{1 + s(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)} \right) \omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Com o sistema de equações original posto na forma das Eqs. (7.32), vamos expandir as funções u_1, u_2, ω_1 e ω_2 na forma apresentada nas Eqs. (7.25). Desta forma, obtemos:

$$u_1(z, x) = \sum_{j=1}^N L_j(x) c_j(z), \quad u_2(z, x) = \sum_{j=1}^N L_j(x) d_j(z), \quad (7.33a)$$

$$\omega_1(z, x) = \sum_{j=1}^N L_j(x) f_j(z), \quad \omega_2(z, x) = \sum_{j=1}^N L_j(x) g_j(z). \quad (7.33b)$$

Substituindo as expansões apresentadas nas Eq. (7.33(a,b)) nas Eqs. (7.32) nos pontos de colocação x_i e usando a propriedade dos polinômios de Langrange apresentada na Eq. (7.26), obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias para os coeficientes c_j , d_j , f_j e g_j dado por:

$$\frac{dc_i}{dz} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij} d_j - \left(1 - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) d_i, \quad (7.34)$$

$$\frac{dd_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij} c_j + \left(1 - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) c_i, \quad (7.35)$$

$$\frac{df_i}{dz} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij} g_j - \left(\lambda - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) g_i, \quad (7.36)$$

$$\frac{dg_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij} f_j + \left(\lambda - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) f_i, \quad (7.37)$$

onde $i=2, \dots, N-1$ para cada equação. Na dedução do sistema anterior, utilizamos a seguinte notação para a derivada segunda do polinômio de Langrange calculado nos pontos de colocação: $A_{ij} = \left(\frac{d^2 L_j(x)}{dx^2} \right)_{x=x_i}$. Observe que para obter as Eqs. (7.34),

(7.35), (7.36) e (7.37) tivemos que fazer cálculos do tipo $(u_i)_{x=x_i}^2$, da seguinte forma:

$$(u_i)_{x=x_i}^2 = \left(\sum_{j=1}^N L_j(x) c_j(z) \right)_{x=x_i}^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N L_j(x_i) L_m(x_i) c_j(z) c_m(z) = \quad (7.38)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \delta_{ij} \delta_{im} c_j(z) c_m(z) = (c_i(z))^2.$$

O sistema de Eqs. (7.34), (7.35), (7.36) e (7.37) será resolvido mediante as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\text{Condições iniciais : } \begin{cases} u_1(0, x) = v_1(x) , & u_2(0, x) = 0 \\ \omega_1(0, x) = v_2(x) , & \omega_2(0, x) = 0 \end{cases} , \quad (7.39)$$

$$\text{Condições de contorno : } \begin{cases} u_1(z, x \rightarrow \infty) = u_1(z, x \rightarrow -\infty) = u_0 \\ u_2(z, x \rightarrow \infty) = u_2(z, x \rightarrow -\infty) = 0 \\ \omega_1(z, x \rightarrow \infty) = \omega_1(z, x \rightarrow -\infty) = 0 \\ \omega_2(z, x \rightarrow \infty) = \omega_2(z, x \rightarrow -\infty) = 0 \end{cases} , \quad (7.40)$$

onde u_0 é uma constante.

Para transpor as condições iniciais e de contorno para os coeficiente c_j , d_j , f_j e g_j devemos lembrar que estes são calculados apenas nos pontos de colocação. Assim, por exemplo, o valor de $u_1(z, x)$ para qualquer valor de z quando x tende ao infinito corresponde ao ponto final do intervalo de colocação enquanto que o ponto inicial corresponde ao valor que $u_1(z, x)$ assume quando x tende a menos infinito e qualquer valor de z . Desta forma, as condições (7.39) e (7.40) são calculadas da seguinte forma:

$$u_1(0, x)_{x=x_i} = \left(\sum_{j=1}^N L_j(x) c_j(0) \right)_{x=x_i} = c_i(0) = v_1(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.41)$$

$$\omega_1(0, x)_{x=x_i} = \left(\sum_{j=1}^N L_j(x) f_j(0) \right)_{x=x_i} = f_i(0) = v_2(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.42)$$

$$u_1(z, x \rightarrow \infty) = \left(\sum_{j=1}^N L_j(x) c_j(z) \right)_{x=x_N} = c_N(z) = u_0, \quad \forall z, \quad (7.43)$$

$$u_1(z, x \rightarrow -\infty) = \left(\sum_{j=1}^N L_j(x) c_j(z) \right)_{x=x_1} = c_1(z) = u_0, \quad \forall z, \quad (7.44)$$

fazendo com que as condições apresentadas nas Eqs. (7.39) e (7.40) sejam reescritas em termos de c_j , d_j , f_j e g_j como:

$$\text{Condições iniciais : } \begin{cases} c_i(0) = v_1(x_i) , d_i(0) = 0 , i = 1, \dots, N \\ f_i(0) = v_2(x_i) , g_i(0) = 0 , i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (7.45)$$

$$\text{Condições de contorno : } \begin{cases} c_1(z) = c_N(z) = u_0 , \forall z \\ d_1(z) = d_N(z) = 0 , \forall z \\ f_1(z) = f_N(z) = 0 , \forall z \\ g_1(z) = g_N(z) = 0 , \forall z \end{cases} \quad (7.46)$$

Desta forma, o sistema de equações diferenciais (7.34), (7.35), (7.36) e (7.37) pode ser reescrito como:

$$\frac{dc_i}{dz} = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} d_j - \left(1 - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) d_i , \quad (7.47)$$

$$\frac{dd_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} c_j + \left(1 - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) c_i + \frac{u_0}{2} (A_{i1} + A_{iN}) , \quad (7.48)$$

$$\frac{df_i}{dz} = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} g_j - \left(\lambda - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) g_i , \quad (7.49)$$

$$\frac{dg_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} f_j + \left(\lambda - \frac{c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2}{1 + s(c_i^2 + d_i^2 + f_i^2 + g_i^2)} \right) f_i , \quad (7.50)$$

em que $i=2, \dots, N-1$ em todas as equações acima.

O sistema de Eqs. (7.47), (7.48), (7.49) e (7.50) na forma em que está acima não é adequado para uma resolução numérica. Vamos substituir o índice i por $i-1$, definir $m=N-2$ e utilizar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} c_i &= Y_i , i=1, \dots, m , \\ d_i &= Y_i , i=m+1, \dots, 2m , \\ f_i &= Y_i , i=2m+1, \dots, 3m , \\ g_i &= Y_i , i=3m+1, \dots, 4m . \end{aligned} \quad (7.51)$$

Utilizando as definições mostradas na Eqs. (7.51), podemos transformar o sistema de equações (7.47), (7.48), (7.49) e (7.50) no seguinte sistema diferencial:

$$\frac{dY_i}{dz} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m A_{i+1,j+1} Y_{j+m} - \left(1 - \frac{Y_i^2 + Y_{i+m}^2 + Y_{i+2m}^2 + Y_{i+3m}^2}{1 + s(Y_i^2 + Y_{i+m}^2 + Y_{i+2m}^2 + Y_{i+3m}^2)} \right) Y_{i+m}, \quad (7.52)$$

, $i = 1, \dots, m$

$$\frac{dY_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m A_{i-m+1,j+1} Y_j + \left(1 - \frac{Y_{i-m}^2 + Y_i^2 + Y_{i+m}^2 + Y_{i+2m}^2}{1 + s(Y_{i-m}^2 + Y_i^2 + Y_{i+m}^2 + Y_{i+2m}^2)} \right) Y_{i-m} + \frac{u_0}{2} (A_{i-m+1,1} + A_{i-m+1,N}), \quad (7.53)$$

, $i = m+1, \dots, 2m$

$$\frac{dY_i}{dz} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m A_{i-2m+1,j+1} Y_{3m+j} - \left(\lambda - \frac{Y_{i-2m}^2 + Y_{i-m}^2 + Y_i^2 + Y_{i+m}^2}{1 + s(Y_{i-2m}^2 + Y_{i-m}^2 + Y_i^2 + Y_{i+m}^2)} \right) Y_{i+m}, \quad (7.54)$$

, $i = 2m+1, \dots, 3m$

$$\frac{dY_i}{dz} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m A_{i-3m+1,j+1} Y_{2m+j} + \left(\lambda - \frac{Y_{i-3m}^2 + Y_{i-2m}^2 + Y_{i-m}^2 + Y_i^2}{1 + s(Y_{i-3m}^2 + Y_{i-2m}^2 + Y_{i-m}^2 + Y_i^2)} \right) Y_{i-m}. \quad (7.55)$$

, $i = 3m+1, \dots, 4m$

As equações (7.52), (7.53), (7.54) e (7.55) constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, apropriado para resolução numérica. Encontrando os valores Y_i , $i=1, \dots, 4m$ na posição z_1 que evoluíram da condição inicial (7.45), utilizamos as definições (7.51) para encontrar os valores de c_i , d_i , f_i e g_i . Com esses últimos valores determinados, retornamos as equações de interpolação com os polinômios de Langrange (7.33(a,b)) e encontramos os valores $u_1(z_1, x)$, $u_2(z_1, x)$, $\omega_1(z_1, x)$ e $\omega_2(z_1, x)$ em qualquer posição x dentro do intervalo de colocação. Esse é o princípio fundamental do método.

O sistema de Eqs (7.52), (7.53), (7.54) e (7.55) foi resolvido com as seguintes condições iniciais

$$u_1(0, x) = \tanh(x - 0.6) \tanh(x + 0.6), \quad u_2(0, x) = 0, \quad (7.56)$$

$$\omega_1(0, x) = (\operatorname{sech}(x - 0.6) - \operatorname{sech}(x + 0.6))/2, \quad \omega_2(0, x) = 0. \quad (7.57)$$

De acordo com os resultados discutidos por Ostrovskaya *et al*,^[56] o modelo não integrável de equações diferenciais (7.29) e (7.30) suporta estados ligados estacionários de dois ou mais sólitons. Assim, os resultados mostram que o estado de dois sólitons claros com fases opostas (7.56), propaga sem alteração na presença do estado de dois sólitons escuros (7.57). Desta forma, não ocorre alteração do estado inicial de ambos os feixes à medida que propagam ao longo de z .

O primeiro passo para a implementação do método consiste em definir o domínio da a variável x . Suponhamos que $x \in [-XF, XF]$ onde XF é uma constante. Vamos definir a variável x' da seguinte forma :

$$x' = (x + XF)/(2XF) . \quad (7.58)$$

Com essa definição, a variável x' está dentro do intervalo $[0,1]$ onde estão definidos os pontos de colocação. No domínio de x' , o sistema de equações (7.52), (7.53), (7.54) e (7.55) descreve o sistema original (7.29), (7.30). Quando resolvermos o problema em x' , retornamos para o espaço x através da equação de transformação (7.58) obtendo a aproximação para a solução.

Fig. 7.1 - Evolução do estado inicial de U(escuro) e V(claro) em $z=0.5$.

De acordo com os resultados discutidos por Ostrovskaya *et al*,^[56] o modelo não integrável de equações diferenciais (7.29) e (7.30) suporta estados ligados estacionários de dois ou mais sólitons. Assim, os resultados mostram que o estado de dois sólitons claros com fases opostas (7.56), propaga sem alteração na presença do estado de dois sólitons escuros (7.57). Desta forma, não ocorre alteração do estado inicial de ambos os feixes à medida que propagam ao longo de z .

O primeiro passo para a implementação do método consiste em definir o domínio da a variável x . Suponhamos que $x \in [-XF, XF]$ onde XF é uma constante. Vamos definir a variável x' da seguinte forma :

$$x' = (x + XF) / (2XF) . \quad (7.58)$$

Com essa definição, a variável x' está dentro do intervalo $[0,1]$ onde estão definidos os pontos de colocação. No domínio de x' , o sistema de equações (7.52), (7.53), (7.54) e (7.55) descreve o sistema original (7.29), (7.30). Quando resolvermos o problema em x' , retornamos para o espaço x através da equação de transformação (7.58) obtendo a aproximação para a solução.

Fig. 7.1 - Evolução do estado inicial de U(escuro) e V(claro) em $z=0.5$.

A Fig. (7.1) mostra a forma do estado ligado de dois sólitons claros (fora de fase) e escuros na posição inicial $z=0$ (curvas com pontos pretos). Os mesmos estados estão mostrados na posição $z=0.5$ (curva vermelha). Os pontos marcados em preto correspondem aos de colocação cujo número para essa figura é de $N=81$ e a variável $x \in [-15.0, 15.0]$, fazendo com que $XF=15.0$. Isso implica que a quantidade de equação diferenciais ordinárias resolvidas foi de $4*(N-2)=342$. Os resultados obtidos com nosso método confirmam os já encontrados, ou seja, os feixes conservam seu perfil original.

Para avaliar a convergência do método com a alteração do número de pontos de colocação fizemos o seguinte. Fixamos a posição final em $z=0.5$ e as condições iniciais de acordo com as Eqs. (7.56) e (7.57). Em seguida, variamos os pontos de colocação e calculamos, via sistema de equações (7.52), (7.53), (7.54) e (7.55), os valores de U, V na posição final. Suponhamos que N, N' (com $N > N'$, sem perda de generalidade), sejam os números de pontos de colocação utilizados e (U_N, V_N) , $(U_{N'}, V_{N'})$ os correspondentes valores de U e V em $z=0.5$. Se o método convergir, devemos esperar que as diferenças $(U_N - U_{N'})$ e $(V_N - V_{N'})$ sejam cada vez menores à medida que aumentamos os valores de N e N' . A afirmativa anterior é baseada no fato de que $(U_N - U_{N'})=0$ e $(V_N - V_{N'})=0$ se para determinado valor de N' encontramos a solução exata.

A Fig. 7.2 (a) mostra o cálculo da diferença $\Delta_{N,N'}$ entre as funções $V(z=0.5, x)$ em função do número de pontos de colocação para os sólitons claros. Já a Fig. 7.2(b) mostra o mesmo para os sólitons escuros $U(z=0.5, x)$. Assim, por exemplo, $\Delta_{71,61}$ significa que calculamos a diferença $U(z=0.5, x)_{N=71} - U(z=0.5, x)_{N'=61}$ ou $(V(z=0.5, x)_{N=71} - V(z=0.5, x)_{N'=61})$. Os resultados mostram que essa diferença vai diminuindo à medida que aumentamos o número de pontos de colocação e confirma o que dissemos no parágrafo anterior. Observe que a menor variação da diferença como função de x para os pontos de colocação considerados ocorre para $\Delta_{101,81}$ em ambos os casos. No entanto, note que $\Delta_{101,81}$ não é muito diferente do caso $\Delta_{81,71}$. Isso indica que o aumento da precisão com o crescimento do número de pontos de colocação é parcialmente anulado pelo aumento do número de equação diferenciais ordinárias a ser resolvido. Lembre-se que estamos utilizando um procedimento completamente numérico para resolver tais equações ordinárias e sempre existem

erros de arredondamento que se propagam à medida que z aumenta. Tais erros crescem muito com o aumento do número de interações.

Fig. 7.2 - Cálculo das diferenças de U, V em $z=0.5$. (a) Par de sólitons Claros onde $(V_N - V_{N'}) = \Delta_{N,N'}$; (b) Par de sólitons escuros onde $(U_N - U_{N'}) = \Delta_{N,N'}$.

Fig. (7.3) Variação do tempo de execução em função do número de pontos de colocação.

A Fig. (7.3) mostra o tempo de execução do programa que desenvolvemos em Fortran90, como função do número de pontos de colocação. Os pontos escuros foram os determinados e a curva vermelha mostra o ajuste pela função exponencial mostrada nesta figura. O computador utilizado para executar o programa foi um Pentium II de 350 MHz com aproximadamente 128 MB de memória RAM. Observe que o número de equações diferenciais ordinárias a resolver de acordo com o sistema (7.52), (7.53), (7.54) e (7.55) é de $4(N-2)$. Desta forma, para $N=101$ devem ser resolvidas 396 equações enquanto que para $N=51$ serão 196. Observe que para $N=51$ o tempo de execução é de apenas 1.05 minutos enquanto que para $N=101$ é de 22.25 minutos. Uma estimativa para o erro cometido fica abaixo de 1 % para ambos os tipos de sólitons na situação em que o número de pontos de colocação é $N=61$. Chegamos a esse valor considerando que a máxima diferença para $\Delta_{61,51}$ é menor do que 0.01 para o par de sólitons escuros e de 0.0025 para o par claro enquanto que os máximos valores de $U(z,x)$ e $V(z,x)$ são de 1.0 e 0.26, respectivamente. Dividindo os valores máximos correspondentes à diferença e U, V , obtemos o percentual indicado.

Os resultados apresentados nos parágrafos anteriores mostram que o método funciona. No entanto, uma otimização do número de pontos de colocação se faz necessária para que obtenhamos determinada precisão com o menor tempo de simulação.

ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DE PULSOS EM *TAPER*

8.0 - Introdução.

Uma extensão natural do estudo que fizemos com as fibras coaxiais no regime linear é estudá-las no regime não linear através da propagação de pulsos temporais. Isso tem especial interesse em telecomunicações, pois as fibras são os meios materiais utilizados para a transmissão de informações. No Cap. (6) otimizamos duas fibras coaxiais que apresentavam altos valores negativos de D que poderiam ser utilizadas como compensadoras de dispersão. Para fazer o acoplamento do modo que desejamos compensar à dispersão para o fundamental da fibra compensadora existe a proposta para utilizar um *taper* ^[40]. Motivados pelos altos valores obtidos para β_2 no Cap. (6), o que determina um comprimento de dispersão da ordem do comprimento do *taper*, vamos estudar a propagação de pulsos no tempo ao longo de um *taper* adiabático. A motivação é que o *chirp* induzido pelo *taper* possibilite efeitos apreciáveis sobre o pulso como, por exemplo, sua compressão. Antes de propormos o modelo para descrever a propagação do pulso ao longo do *taper* é necessário introduzir alguns conceitos importantes que serão utilizados em sua construção na seção (8.4). Esses conceitos são os de modos locais, discutidos na seção (8.1) e o critério de adiabaticidade introduzido na seção (8.2). Na seção (8.3) mostraremos como controlar a adiabaticidade de um *taper* feito com fibra coaxial através da alteração de seus parâmetros e do perfil do estrangulamento. Finalmente, na seção (8.5) discutiremos os resultados do modelo.

8.1 - Definição dos modos locais

Na introdução do capítulo (5) descrevemos como um *taper* pode ser formado a partir de uma fibra ótica. Encontrar uma solução da equação de onda ao longo da estrutura bicônica (EB) é difícil, sendo em geral impossível obter soluções analíticas. Mesmo soluções numéricas são encontradas a partir de aproximações para o campo que propaga ao longo do estrangulamento. A mais simples destas aproximações envolve uma EB onde a variação de seu raio é lenta ao longo do estrangulamento. Com essa condição satisfeita é possível simplificar a descrição matemática. Mas antes de caracterizar um *taper* de modo a apresentar uma simples descrição, vamos introduzir o conceito de modos locais ^[57,58].

Fig. 8.1 - Representação de um *taper* com sua aproximação por seções cilíndricas.

Consideremos a Fig. (8.1) onde está desenhado o perfil da fibra estrangulada juntamente com uma aproximação para esse perfil através de seções cilíndricas. A perda da invariança translacional da fibra na direção de propagação (doravante designada como direção z) faz com que o índice de refração seja uma função de z . No entanto, dentro de cada seção cilíndrica considerada na Fig. (8.1), a variação transversa de índice de refração é considerada inalterada. Posto isso, o problema de estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em uma EB pode ser resolvido aproximadamente mediante as seguintes hipóteses:

1) Em primeiro lugar, a região onde ocorre o estrangulamento na fibra será aproximada por uma série de seções cilíndricas de raio constante, nas quais supomos que o perfil de índice de refração transversal é independente de z , como mostra o

detalhe de comprimento δz na Fig. (8.1). A variação do índice de refração na direção transversa é aquela referente ao ponto z_c , que corresponde à posição onde a estrutura cilíndrica coincide com o raio variável do *taper*. Assim, o índice de refração local definido como aquele dentro da fibra local de comprimento δz , é dado por $n(x, y, z_c)$.

2) Os campos elétrico e magnético dentro de cada seção cilíndrica serão aproximados por uma combinação linear dos modos de uma fibra infinita, chamada de fibra local, onde o índice de refração é dado por $n(x, y, z_c)$. Desta forma, os campos serão expressos dentro de cada seção cilíndrica j como ^[57]:

$$\mathbf{E}(x, y, z_c) = \sum_{j=1}^N b_j(z_c) \mathbf{e}_j(x, y, z_c), \quad (8.1)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z_c) = \sum_{j=1}^N b_j(z_c) \mathbf{h}_j(x, y, z_c), \quad (8.2)$$

onde j indica o j -ésimo modo local e N é a quantidade total de modos da fibra local usados. Se considerarmos que a fibra da qual o *taper* é feito corresponde a um dos tipos coaxiais mostrados na Fig. (2.5), os campos $\mathbf{e}_j$ e $\mathbf{h}_j$ são as soluções da equação de onda válida para a fibra local j , chamados de modos locais. Desta forma, as Eqs. (8.1) e (8.2) propõem que o campo elétrico ou magnético, possam ser expandidos em determinada posição z ao longo do estrangulamento, como uma combinação linear dos modos compatíveis com a fibra local.

3) Embora os campos locais sejam diferentes em cada seção da fibra, a potência contida em cada modo local deve ser conservada ao longo do estrangulamento. Isso é satisfeito quando os campos locais são ortogonais. Essa condição é sempre verdadeira uma vez que os modos locais são soluções da fibra local e, portanto, mutuamente excludentes.

4) À medida que um modo da estrutura estrangulada se propaga ao longo de z , sua fase β_j aumenta não apenas devido ao aumento do caminho óptico mas também à variação da constante de propagação em cada seção de comprimento δz .

Tendo em mente as quatro condições anteriores, vamos considerar que a variação do perfil do *taper* seja suave. A fase adquirida por cada modo local até a posição z no interior do estrangulamento será aproximadamente dada por:

$$\phi(z) = \int_0^z \beta_j(z_1) dz_1 \quad (8.3)$$

Desta forma, o campo eletromagnético que propaga ao longo do *taper* e satisfaz as quatro condições anteriores, pode ser representado na posição z como os modos da fibra local em z , ou de forma mais geral, como uma combinação linear destes modos locais. Desta forma, a fase dada pela Eq. (8.3) contém a informação referente à passagem do campo pelas seções anteriores. Assim, as Eqs. (8.1) e (8.2) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{j=1}^N a_j(z) \mathbf{e}_j(x, y, z) \exp \left[i \int_0^z \beta_j(z_1) dz_1 \right], \quad (8.4)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \sum_{j=1}^N a_j(z) \mathbf{h}_j(x, y, z) \exp \left[i \int_0^z \beta_j(z_1) dz_1 \right], \quad (8.5)$$

onde $a_j(z)$ são coeficientes que dependem apenas da coordenada z e devem ser determinados impondo que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ satisfaçam as equações de Maxwell. Observe que os $a_j(z)$ estão relacionados aos $b_j(z)$ das Eqs. (8.1) e (8.2) através de

$$b_j(z) = a_j(z) \exp \left(i \int_0^z \beta_j(z_1) dz_1 \right).$$

Se o campo eletromagnético que se propaga em um *taper* satisfaz a todas as condições apresentadas acima, podemos definir os modos locais como o conjunto de todos os modos compatíveis com a fibra local de comprimento δz na Fig. (8.1). Definidos desta forma, os modos locais constituem uma boa aproximação para os modos da estrutura estrangulada.

A aproximação dos modos locais será tão precisa quanto maior for o comprimento δz na Fig. (8.1) em que ocorre uma alteração significativa do campo propagante. Isso significa dizer que o conceito de modos locais fica mais preciso à medida que o estrangulamento for ficando mais suave. Como consequência, a energia transportada pelo modo fundamental não deve sofrer uma variação apreciável ao se propagar ao longo do *taper* e a aproximação passa a ser chamada de adiabática.

Fig. 8.2 - Representação de um *taper* suave e outro abrupto.

Para estruturas bicônicas onde a inclinação do estrangulamento é acentuada (ver Fig.(8.2)), a aproximação adiabática não é mais válida. Neste caso, os modos locais deixam de ser uma aproximação adequada para descrever a propagação ao longo do *taper* mesmo que o número de modos seja ampliado para incluir os radiados. Isto ocorre porque a própria definição de modos locais passa a não fazer sentido. É necessário, pois, uma nova abordagem para descrever um *taper* abrupto chamada de aproximação súbita^[59]. Os resultados obtidos com esse modelo mostram que a potência transmitida no final do *taper* tem um comportamento semelhante ao de um interferômetro do tipo Michelson, dependendo do comprimento de onda e do índice de refração da casca da fibra^[60,61].

O procedimento que desenvolveremos para estudar a propagação de pulsos é válido apenas para um *taper* adiabático. Desta forma, é necessário desenvolver critérios para saber quando determinado *taper* é adiabático ou não. Na próxima seção faremos uma revisão do critério que usaremos para identificar um *taper* adiabático, chamado de *Length-scale criterion*. Esse critério é fácil de implementar, pois envolve

o cálculo das constantes de propagação dos modos de ordem mais baixa ao longo do estrangulamento .

8.2 - O critério de adiabaticidade

A propagação de um campo eletromagnético através de uma fibra estrangulada leva a perda de energia, conforme já dissemos. O encurvamento das interfaces entre as várias camadas que compõem a fibra ao longo da direção de propagação, fazem com que o campo seja incapaz de alterar sua distribuição espacial ao longo de z em uma taxa suficientemente rápida para acompanhar a variação das dimensões transversas da fibra. A causa disto é a perda da invariança translacional ao longo da direção de propagação.

A princípio essa perda de energia poderia ser para modos locais de ordem mais alta ou mesmo para os radiados que constituem o espectro contínuo e não são confinados ao guia de onda. Como este tipo de modo propaga fora da fibra, ocorre perda de energia para o meio externo. Nas estruturas bicônicas que vamos estudar a variação do raio da fibra ao longo do estrangulamento é pequena. Isso permite desprezar o acoplamento do modo propagante para os radiantes e utilizar apenas o espectro discreto.

O conceito de adiabaticidade para a propagação do campo eletromagnético em estruturas estranguladas impõe que esse campo não sofra uma alteração apreciável ao atravessar a EB. Isso implica que se na entrada do *taper* o campo que se propaga pode ser descrito como o do modo fundamental, ao atravessá-lo esse campo se acopla muito pouco com os outros modos locais. Para ser mais claro, se a adiabaticidade é válida, a estrutura bicônica possui um estrangulamento suave o bastante para permitir que as frentes de onda se ajustem às variações das dimensões transversas da fibra. Caso a luz transmitida através do estrangulamento seja monitorada durante o puxamento de uma EB adiabática, o resultado será um nível de potência constante na saída. Se o estrangulamento violar a adiabaticidade, a potência na saída será oscilatória ^[60,61], mostrando que ocorre acoplamento entre os modos locais e a conseqüente troca de energia entre eles.

Aparentemente, quando ocorre perda de energia do modo fundamental (de agora em diante consideraremos que o modo fundamental da fibra contém a energia

no começo da propagação ao longo do *taper*) à medida que ocorre a propagação ao longo do *taper* para modos de ordem mais alta, o critério de adiabaticidade falha. No entanto, caso o ângulo Ω definido na Fig. (8.2) seja suficientemente pequeno, a perda de energia do modo fundamental será desprezível. Nesta situação, o modo excitado originalmente na fibra poderá transpor a EB e sair aproximadamente sem perdas. Uma estrutura bicônica com essa propriedade é chamada de aproximadamente adiabática.

Para que essa quase adiabaticidade ocorra, a EB deve ser longa o suficiente para que o encurvamento ao longo da direção de propagação seja suave. Isso faz o ângulo local Ω pequeno, como ilustrado na Fig. (8.2). No entanto, dispositivos feitos com tais estruturas como, por exemplo, chaves, acopladores e filtros espectrais seriam inviáveis do ponto de vista prático devido a dificuldades de manuseio, encapsulamento, performance e confiabilidade, além de serem muito sensíveis a influências externas. Assim, deve existir um compromisso entre o valor do ângulo local que permite ao *taper* operar como aproximadamente adiabático e um que minimize esses efeitos desfavoráveis. Se a inclinação do estrangulamento for muito intensa, a estrutura passa a ser chamada de abrupta (Fig. (8.2)) e o dispositivo funcionará como uma estrutura interferométrica que apresenta resposta em função do comprimento de onda ^[59].

8.2.1 - O critério de escala de comprimento

Devido à mudança no comprimento transversal da fibra provocada pelo estrangulamento, ocorrerá acoplamento entre os modos locais. Como estamos supondo que no começo do *taper* existe apenas o modo fundamental, haverá acoplamento com modos de ordem mais alta de mesma simetria se o *taper* for completamente simétrico. Consideremos que esta seja a situação. Antes de apresentar o critério de adiabaticidade que utilizaremos, será necessário introduzir a definição de comprimento de batimento.

A distância característica na qual ocorre uma mudança significativa do campo expandido na base formada pelos modos locais é dada pelo comprimento de batimento, definido em termos das constantes de propagação dos modos locais β_i e β_j como:

$$z_b = \frac{2\pi}{\beta_i - \beta_j}. \quad (8.6)$$

Fig. 8.3 - Definição do comprimento local z_l , do ângulo local Ω e da fibra local do *taper* (figura de baixo).

O critério de adiabaticidade é derivado com base no argumento de que o comprimento local do *taper* deve ser muito maior do que o comprimento de batimento entre o modo fundamental e o modo com o qual este se acopla de forma dominante (geralmente o HE_{12}). Se essa condição for satisfeita, a energia perdida pelo modo fundamental para outros modos locais é muito pequena. O comprimento local do *taper*, z_l , é definido como a altura do cone circular direito com base coincidente com a seção transversal local, conforme está mostrado na Fig. (8.3). O ângulo do ápice deste cone é igual ao ângulo do *taper* $\Omega(z)$, dado por:

$$\Omega(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{z}\right), \quad (8.7)$$

onde z é a distância ao longo do eixo do *taper* e $\rho(z)$ o raio local do núcleo. Se a estrutura bicônica é adiabática, $\Omega(z) \ll 1$. Desta forma, temos que:

$$z_t \cong \frac{\rho}{\Omega}. \quad (8.8)$$

É intuitivo que se $z_t \gg z_b$ em toda posição ao longo do *taper*, ocorrerá um acoplamento desprezível entre esses dois modos. Nesta situação, o modo fundamental deve se propagar com desprezível troca de energia com outros modos locais, pois possui um espaço físico suficiente para se acomodar às variações das dimensões transversas em cada seção local. Na situação onde $z_t \ll z_b$, ocorrerá um comportamento contrário ao anterior, com acoplamento apreciável do modo fundamental com os de ordem superior.

A partir do que foi apresentado no parágrafo anterior Love *et al*,^[58] propuseram a condição $z_t = z_b$ como um critério de adiabaticidade. Usando as definições de z_t e z_b podemos encontrar uma expressão para Ω da seguinte forma:

$$\Omega(z) = \frac{\rho(z)(\beta_1(z) - \beta_2(z))}{2\pi}. \quad (8.9)$$

A igualdade acima determina uma curva no plano $\Omega \times z$ que delimita a região onde ocorrem grandes perdas de energia do modo fundamental (região não adiabática) daquela em que o *taper* é adiabático. Obviamente o critério não estabelece a partir de que valores as perdas serão suficientemente grandes ou pequenas, mas fornece a condição acima da qual ocorrem altas perdas. Assim, quanto mais acima da curva Ω versus z dada pela Eq. (8.9), estiver determinado *taper*, mais intensa será a perda de energia do modo fundamental.

Na próxima seção apresentaremos os resultados referentes a adiabaticidade de uma fibra ótica coaxial do tipo W1. Procuraremos ajustar os parâmetros de forma que o *taper* seja adiabático.

8.3 - Resultados referentes a adiabaticidade das fibras coaxiais

Em primeiro lugar vamos considerar as fibras coaxiais do capítulo (6), onde seus parâmetros foram otimizados para fornecer um mínimo do coeficiente de dispersão de segunda ordem em $1.55 \mu\text{m}$, conforme está mostrado na Tab. (6.3). Consideremos, uma fibra coaxial que possui raio interno da casca maior do que aquele das fibras otimizadas no Cap. (6) e que um *taper* é feito a partir desta fibra. A variação do raio externo da fibra com z após a formação do *taper* é bem reproduzida experimentalmente de acordo com a seguinte função ^[14]:

$$\rho(z) = \omega_0 + (\rho_0 - \omega_0) \left| \left(\sin \left(\frac{\pi z}{L + F} \right) \right)^3 \right|, \quad (8.10)$$

onde ω_0 é o raio da cintura do *taper*, ρ_0 é o raio da fibra no início do estrangulamento, L é o comprimento de puxamento e F o tamanho do forno. Observe que L e F são parâmetros experimentais que fazem parte do processo de estrangulamento, fornecidos em milímetros, enquanto que ω_0 e ρ_0 são fornecidos em micra. A Fig. (8.4) mostra o perfil de duas estruturas estranguladas obtidas com o uso da Eq. (8.10).

Fig. 8.4 - (1) *Taper* de 50 mm com $\omega=20 \mu\text{m}$ e $L+F=50 \text{ mm}$.

(2) *Taper* de 30 mm com $\omega=20 \mu\text{m}$ e $L+F=30 \text{ mm}$.

De acordo com o critério de escala de comprimento, um *taper* é adiabático se a seguinte condição for satisfeita:

$$\frac{z_b}{z_t} = \frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \ll 1. \quad (8.11)$$

Desta relação podemos constatar diretamente que quanto mais gradual for o estrangulamento, mais o termo do lado esquerdo da desigualdade (8.9) será próximo de zero, pois $\frac{d\rho}{dz}$ será pequeno. No entanto, só esse fato não é suficiente para tornar um *taper* adiabático, pois também é necessário que o comprimento de batimento seja pequeno.

Fig. 8.5 - Variação de $\frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ como função de z ao longo do *taper* feito a partir das fibras da Tab. (8.1) em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$.

A Fig. (8.5) mostra como varia o lado direito da desigualdade (8.11) para o *taper* (2) da Fig. (8.4), feito a partir das fibras compensadoras de dispersão W1, estudadas no Cap. (6). Os valores dos parâmetros utilizados nas simulações são mostrados na Tab. (8.1).

Fibra	a (μm)	b (μm)	c (μm)	$\Delta_1 = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_2^2}$	$\Delta_3 = \frac{n_3^2 - n_2^2}{2n_2^2}$	$\Delta_4 = \frac{n_4^2 - n_2^2}{2n_2^2}$
1	1.02	16.97	25.00	0.02	0.003	-0.0002
2	1.02	14.15	22.00	0.02	0.003	-0.0002

Tab. (8.1) Parâmetros utilizados para construir a Fig. (8.5).

Para gerar a Fig.(8.5) fizemos a seguinte consideração, satisfeita experimentalmente. Embora o processo de estrangulamento reduza o raio externo da fibra e, como consequência, a extensão de suas várias camadas, a razão entre essas dimensões transversas é mantida. Desta forma, se a fibra coaxial não estrangulada possui a, b e c como as dimensões das suas camadas mais internas, a formação do *taper* não altera as razões $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$. Além do mais, utilizaremos a aproximação da fibra local infinita, conforme mostra a Fig. (8.3). Assim, estamos deliberadamente excluindo *tapers* abruptos, uma vez que nesta situação ocorre o colapso do núcleo da fibra na região da cintura, que passa a ser constituído pelo material da casca.

A Fig. (8.5) mostra que $\frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ não é uniforme ao longo da estrutura bicônica. Esse gráfico mostra que a adiabaticidade do *taper* é maior no seu início ($z=0$) e final ($z=L$, onde L é o comprimento do *taper*). Existe uma posição no interior do *taper* em que ocorre um máximo em $\frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$. Esta posição corresponde à localização da fibra local que assume os valores apresentados na Tab. (6.3) e levam a um mínimo de dispersão, conforme mostramos no Cap.(6). Naquele capítulo foi demonstrado que quando ocorre um valor muito baixo de D para determinado conjunto de parâmetros da fibra, acontece uma minimização da diferença entre as constantes de propagação dos modos HE₁₁ e HE₁₂. Isso faz com que o comprimento de batimento destes modos seja muito grande na posição z onde ocorre a menor aproximação, reduzindo a adiabaticidade do *taper*, que se manifesta através do aumento do lado esquerdo da Eq. (8.11). A posição onde ocorre o máximo na Fig. (8.5) muda pelo fato da

aproximação entre os modos alterar-se com a posição da fibra local onde ocorre a menor aproximação entre os modos HE_{11} e HE_{12} , como está mostrado na Fig. (8.6).

Fig. 8.6 - Variação do índice de refração efetivo dos modos HE_{11} e HE_{12} ao longo do taper 1 na Fig. (8.4) com os parâmetros da Tab. (1).

A partir do cálculo do lado direito da Eq. (8.11), podemos otimizar um *taper* adiabático fazendo com que a desigualdade seja válida. Assim, quanto menor for o valor de $\frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$, mais o *taper* será adiabático. A Fig. (8.7) mostra como podemos fazer isso apenas alterando o valor do raio do núcleo.

A partir da Fig. (8.7) podemos fazer as seguintes considerações. Antes de tudo, as curvas de número 4 nesta figura foram obtidas a partir da fibra 1 da Tab. (8.1) onde variamos o tamanho do *taper*. Observe que a curva vermelha representando um *taper* de 50.0 mm, é a mais adiabática de todas. Isso vai de encontro ao que foi mencionado anteriormente e informa que se o perfil da estrutura bicônica é mais suave, ela torna-se mais adiabática.

Fig.8.7 - Variação de $\frac{z_b}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ como função da posição ao longo do *taper* para vários valores do raio do núcleo. As curvas escuras são válidas para um taper de 30.0 mm, enquanto que a vermelha para um de 50.0 mm.

Nós variamos os parâmetros da fibra coaxial e o comprimento do *taper*. Como resultado, verificamos que *tapers* feitos a partir de fibras cuja razão entre seus parâmetros coincidem com aqueles das compensadoras de dispersão otimizadas no cap. (6) e mostradas na Tab. (8.1), são não adiabáticas. A principal razão para isso é que o comprimento de batimento torna-se muito grande na posição do *taper* onde ocorre a menor aproximação entre os modos HE_{11} e HE_{12} . Fora da condição anterior onde é grande a diferença entre as constantes de propagação dos modos locais ao longo do *taper*, o comprimento de batimento torna-se pequeno e a adiabaticidade é controlada basicamente pelo perfil da EB, pois quanto mais suave for, menor será $\frac{d\rho}{dz}$.

Na próxima seção vamos desenvolver um modelo que permite estudar a propagação de um pulso temporal através de um *taper* adiabático. Deduziremos a

equação diferencial para a amplitude complexa do pulso que será resolvida com o uso do método desenvolvido no Cap. (7).

8.4 - Modelo para descrever a propagação de um pulso temporal em um *taper* adiabático

Consideremos um *taper* dividido em N seções de comprimento δz , conforme está mostrado na Fig. (8.1). Dentro de cada uma destas seções, o perfil do *taper* é aproximado por uma fibra local na posição z_c , mostrada em mais detalhe na parte de baixo da Fig. (8.3). É intuitivo que se $\delta z \rightarrow 0$, essa aproximação fica cada vez melhor. Mostramos nas seções anteriores que uma estrutura bicônica adiabática apresenta uma distribuição de campo elétrico que muda pouco de seção para seção a medida que ocorre a propagação. Portanto, uma combinação linear dos modos locais da fibra local é uma boa aproximação para os campos que se propagam ao longo do *taper*. Designando z_j e z_{j+1} os pontos inicial e final, respectivamente, da seção local, seu comprimento será $\delta z_j = (z_{j+1} - z_j)$ e o comprimento total do *taper* dado por $L = \sum_{j=1}^{N-1} \delta z_j$.

O que faremos a seguir é descrever uma maneira para encontrar a equação diferencial para a propagação de um pulso ao longo de um *taper* adiabático. Em essência, esse procedimento encontra a modificação que o campo elétrico sofre dentro da seção δz_i . O efeito total sobre o campo será dado pela soma dos efeitos dentro de cada seção do *taper*. Para o que segue, a menos que seja dito expressamente em contrário, consideraremos que a coordenada espacial z está na direção de propagação e contida dentro do intervalo aberto (z_j, z_{j+1}) de extensão δz , como mostra a Fig. (8.1).

O ponto de partida para estudar a propagação de pulsos ópticos em fibras dispersivas e não-lineares dentro do intervalo anterior é a equação de ondas, reescrita na seguinte forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (8.12)$$

onde P_L é a parte linear e P_{NL} a não-linear da polarização induzida.

Antes de resolver a Eq. (8.12) dentro do intervalo (z_j, z_{j+1}) é necessário fazer algumas simplificações. A primeira considera P_{NL} como uma pequena perturbação para P_L . A segunda propõe que a polarização do campo seja mantida ao longo do comprimento da seção local, permitindo a validade da descrição dos campos na fibra local através da aproximação LP. Por último, suporemos que o campo elétrico é quasi-monocromático, isto é, seu espectro centrado em ω_0 , possui largura espectral $\Delta\omega$ tal que $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$. Desde que geralmente $\omega_0 \cong 10^{15} \text{ s}^{-1}$, a desigualdade anterior torna-se válida se $\Delta\omega \leq 10^{13} \text{ s}^{-1}$. Isso significa que a largura do pulso não pode ser inferior a 0.1 ps.

De forma geral, $E(r,t)$ pode ser expresso como:

$$E(r,t) = \frac{1}{2} \mathbf{x} [E(r,t)e^{-i\omega_0 t} + cc], \quad (8.13)$$

onde cc representa complexo conjugado, $\mathbf{x}$ a direção de polarização e $E(r,t)$ uma função que varia lentamente com o tempo. Nesta forma, toda a variação rápida no tempo foi colocada no termo exponencial.

Uma simplificação considerável da Eq. (8.12) pode ser obtida supondo que a resposta não linear do meio é instantânea ^[63]. Isso significa desprezar a contribuição das vibrações moleculares para $\chi^{(3)}$ (o efeito Raman). A partir desta simplificação, a polarização não linear é dada por:

$$P_{NL}(r,t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} : E(r,t)E(r,t)E(r,t), \quad (8.14)$$

onde estamos desprezando o termo de segunda ordem, geralmente muito pequeno na fibra ótica local.

Ao substituir a Eq. (8.13) na Eq. (8.14), encontramos uma expressão para a polarização não linear que possui termos oscilando em ω_0 e $3\omega_0$. O termo com frequência em $3\omega_0$ pode ser desprezado por ser pequeno a menos que haja condições

especiais de casamento de fase. Como $P_{NL}(r, t) = \mathbf{x}P_{NL}(r, t)$ uma vez que $E(r, t)$ está na direção $\mathbf{x}$, a relação entre $P_{NL}(r, t)$ e $E(r, t)$ é dada por:

$$P_{NL} = \frac{3}{8}\epsilon_0\chi_{xxxx}^{(3)}|E(r, t)|^2 E(r, t) = \epsilon_0\epsilon_{NL} E(r, t), \quad (8.15)$$

onde $\epsilon_{NL} = \frac{3}{8}\chi_{xxxx}^{(3)}|E(r, t)|^2$.

Para encontrar a equação diferencial válida para $E(r, t)$, é mais conveniente transformar a Eq. (8.12) para o domínio de Fourier. Isso geralmente não é possível fazer por causa da dependência com a intensidade da Eq. (8.15). Para contornar esse problema o procedimento padrão consiste em manter ϵ_{NL} constante durante toda a derivação da equação diferencial para $E(r, t)$ [63]. Isso é justificado pela natureza perturbativa de P_{NL} e pela aproximação de envoltória lenta, considerada mais adiante. Usando a seguinte definição para a transformada de Fourier,

$$E(r, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(r, t) \exp(i(\omega - \omega_0)t) dt, \quad (8.16)$$

a Eq. (8.12) transforma-se em:

$$\nabla^2 E(r, \omega - \omega_0) + \epsilon(\omega)k_0^2 E(r, \omega - \omega_0) = 0, \quad (8.17)$$

onde $k_0 = \frac{\omega}{c}$ e $\epsilon(\omega) = 1 + \chi_{xx}^{(1)} + \epsilon_{NL}$, com $\chi_{xx}^{(1)}$ chamado de susceptibilidade linear.

A Eq. (8.17) pode ser resolvida através do método da separação de variáveis, supondo que $E(r, \omega - \omega_0)$ pode ser expresso como:

$$E(r, \omega - \omega_0) = F(x, y)A(z, \omega - \omega_0)\exp(i\beta_j z), \quad (8.18)$$

em que $A(z, \omega - \omega_0)$ é uma função que varia lentamente com z . Observe que, como o *taper* é adiabático, o campo varia muito pouco de seção para seção ao longo do

estrangulamento, sendo por isso que dentro de cada uma das seções a Eq. (8.18) constitui uma boa aproximação.

O procedimento para encontrar a equação diferencial satisfeita por $A(z, \omega - \omega_0)$ consiste em substituir a Eq. (8.18) na Eq. (8.17) e utilizar a aproximação de envoltória lenta (desprezar a derivada segunda de $A(z, \omega - \omega_0)$ em relação a z). Isso está feito nos mínimos detalhes no livro de Agrawal ^[63]. Como resultado final, obtemos uma equação diferencial para a propagação de um pulso dentro da fibra local, da seguinte forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_{j,1} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{j,2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i \frac{n_2 \omega_0}{c A_{j,\text{eff}}} |A|^2 A, \quad (8.19)$$

onde $\beta_{j,1} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{j,\omega=\omega_0}$ é o inverso da velocidade de grupo, $\beta_{j,2} = \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{j,\omega=\omega_0}$ é o

parâmetro que leva em conta a dispersão na velocidade de grupo

e $A_{j,\text{eff}} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy}$ é a definição da área efetiva do modo. O índice j

nestas definições significa que dentro da fibra local compreendida entre (z_j, z_{j+1}) , todas as variáveis com esse índice são constantes.

Como o intervalo (z_j, z_{j+1}) pode ser tão pequeno quanto desejado e $z \in (z_j, z_{j+1})$, podemos fazer $z_j \cong z_{j+1} \cong z$ e reescrever a Eq. (8.19) como:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1(z) \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2(z) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}(z)} |A|^2 A. \quad (8.20)$$

Essa é a equação diferencial que propomos para estudar a evolução de um pulso temporal ao longo de uma estrutura bicônica.

A Eq. (8.20) pode ser reescrita em uma forma mais conveniente para a análise que segue. Se o *taper* tem origem em $z=0$ e final em $z=L$ com $\beta_1(0)$, $\beta_2(0)$ e $A_{\text{eff}}(z) \forall z$ diferentes de zero, podemos definir as seguintes funções:

$$F_1(z) = \frac{\beta_1(z)}{\beta_1(0)}, \quad (8.21)$$

$$F_2(z) = \frac{\beta_2(z)}{\beta_2(0)}, \quad (8.22)$$

$$F_{11}(z) = \frac{A_{\text{eff}}(0)}{A_{\text{eff}}(z)}. \quad (8.23)$$

Substituindo as Eqs. (8.21), (8.22) e (8.23) na Eq. (8.20), podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1(0)F_1(z)\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2}\beta_2(0)F_2(z)\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}A = i\frac{n_2\omega_0}{cA_{\text{eff}}(0)}F_{11}(z)|A|^2 A. \quad (8.24)$$

É comum na literatura sobre o estudo da propagação de pulsos óticos em fibras, sem a presença do estrangulamento, reescrever a Eq. (8.24) em um sistema de referência que evolui com a velocidade de grupo do pulso. Como desejamos checar a validade da equação diferencial obtida na presença do estrangulamento no limite em que fazemos a EB tender para uma fibra normal vamos fazer a mesma transformação. Assim, vamos definir o tempo retardado como:

$$T = t - z\beta_1(0). \quad (8.25)$$

Observe que é necessário definir T desta forma já que $\beta_1(z)$ varia ao longo do *taper*.

Usando a mudança de variáveis da Eq. (8.25) na Eq. (8.24), obtemos uma nova equação diferencial dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1(0)(F_1(z) - 1)\frac{\partial A}{\partial T} + \frac{i}{2}\beta_2(0)F_2(z)\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{\alpha}{2}A = \\ i\frac{n_2\omega_0}{cA_{\text{eff}}(0)}F_{11}(z)|A|^2 A \end{aligned} \quad (8.26)$$

Finalmente, vamos transformar a Eq.(8.26) definindo variáveis adimensionais da seguinte forma : $L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2(0)|}$, $L_w = \frac{T_0}{|\beta_1(0)|}$, $A(z,t) = (P_0)^{1/2} e^{-\alpha z/2} U(z,t)$, $\tau = \frac{T}{T_0}$ e $\xi = \frac{z}{L_D}$ onde T_0 e P_0 são a largura inicial e a potência inicial do pulso em $z=0$, respectivamente. Fazendo a mudança de variáveis anterior na Eq. (8.26), obtemos a seguinte equação diferencial nas novas coordenadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_w} (F_1(\xi) - 1) \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{i}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \\ i \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\xi) |U|^2 U e^{-\alpha L_D \xi}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

onde definimos $L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}$ e $\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}(0)}$. Na Eq. (8.27) $\text{sig}(\beta_1(0))$ e $\text{sig}(\beta_2(0))$ representam o sinal de $\beta_1(0)$ e $\beta_2(0)$, respectivamente.

Considerando que a absorção do material seja desprezível ($\alpha=0$), a Eq. (8.27) simplifica-se um pouco mais e transforma-se em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_w} (F_1(\xi) - 1) \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{i}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \\ i \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\xi) |U|^2 U \end{aligned}, \quad (8.28)$$

que é a equação diferencial (8.26) reescrita no sistema adimensional (ξ, τ) .

Para checar se a Eq. (8.28) fornece o limite correto na ausência do estrangulamento, consideremos a partir desta equação que o perfil do *taper* fica cada vez mais suave até a situação limite onde ele passa a não mais existir. Nesta situação, dentro do intervalo $(0, L)$, as funções $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ e $A_{\text{eff}}(z)$ não mudam e são mantidas constantes a seus valores originais em $z=0$. Então, usando as definições (8.21), (8.22) e (8.23) obtemos que $F_1(z)=F_2(z)=A_{\text{eff}}(z)=1$, $\forall z \in (0, L)$. Substituindo isso na Eq. (8.28), obtemos uma equação diferencial muito mais simples, que possui a seguinte forma:

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon} + \frac{i}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = iN^2 |U|^2 U, \quad (8.29)$$

onde $N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$. Essa equação concorda com aquela adotada para estudar a propagação de um *sóliton* ótico em uma fibra ótica com não linearidade do tipo Kerr. Desta forma a Eq. (8.28) fornece o limite correto na ausência do estrangulamento.

8.5 - Resultados obtidos para o modelo de propagação de um pulso em um *taper*

A Eq. (8.28) deverá ser resolvida através do método numérico desenvolvido no Cap. (7). A primeira providência para a implementação consiste em separar as partes reais e imaginárias da Eq. (8.28). Para isso, vamos separar $U(\epsilon, \tau)$ em sua parte real e imaginária da seguinte forma :

$$U(\epsilon, \tau) = U_R(\epsilon, \tau) + iU_I(\epsilon, \tau). \quad (8.30)$$

Substituindo a Eq. (8.30) na Eq. (8.28), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais, acoplando as partes real e imaginária de U :

$$\frac{\partial U_R}{\partial \epsilon} = -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_W} (F_1(\epsilon) - 1) \frac{\partial U_R}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\epsilon) \frac{\partial^2 U_I}{\partial \tau^2} - \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\epsilon) (U_R^2 + U_I^2) U_I, \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial U_I}{\partial \epsilon} = -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_W} (F_1(\epsilon) - 1) \frac{\partial U_I}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\epsilon) \frac{\partial^2 U_R}{\partial \tau^2} + \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\epsilon) (U_R^2 + U_I^2) U_R. \quad (8.32)$$

O próximo passo consiste em propor que U_R e U_I possam ser expandidos como (ver Cap. (7)):

$$U^R = \sum_{j=1}^{N_x} \ell_j(\tau) C_j, \quad U^I = \sum_{j=1}^{N_x} \ell_j(\tau) D_j, \quad (8.33)$$

onde $\ell_j(\tau) = \prod_{k=1, k \neq j}^{N_x} \left(\frac{\tau - \tau_k}{\tau_j - \tau_k} \right)$ é chamado de polinômio interpolador de Langrange e

τ_k é a k -ésima raiz do polinômio de Jacobi de ordem N_x . Substituindo as expansões propostas na Eq. (8.33) nas Eqs. (8.31) e (8.32) encontramos um sistema de equações para os coeficientes C_i e D_i , $i=2, \dots, N_x-1$, com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dC_i}{d\varepsilon} = & -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_W} (F_1(\varepsilon) - 1) \sum_{j=1}^{N_x} B_{ij} C_j + \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\varepsilon) \sum_{j=1}^{N_x} A_{ij} D_j - \\ & \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\varepsilon) (C_i^2 + D_i^2) D_i, \\ & i=2, \dots, N_x-1, \end{aligned} \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_i}{d\varepsilon} = & -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_W} (F_1(\varepsilon) - 1) \sum_{j=1}^{N_x} B_{ij} D_j - \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\varepsilon) \sum_{j=1}^{N_x} A_{ij} C_j + \\ & \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\varepsilon) (C_i^2 + D_i^2) C_i, \\ & i=2, \dots, N_x-1. \end{aligned} \quad (8.35)$$

onde definimos $B_{ij} = \left(\frac{\partial \ell_j(\tau)}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_i}$ e $A_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \ell_j(\tau)}{\partial \tau^2} \right)_{\tau=\tau_i}$. O sistema de equações

anterior deve ser resolvido mediante apropriadas condições de contorno para fornecer uma solução única.

Vamos impor que a amplitude do pulso que se propaga ao longo do estrangulamento tenda a zero quando o raio transversal vai para o infinito. Para que isso seja satisfeito, devemos impor as seguintes condições de contorno:

$$C_1 = C_{N_X} = D_1 = D_{N_X} = 0, \forall \epsilon. \quad (8.36)$$

Com essas condições de contorno aplicadas às Eqs. (8.34) e (8.35), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dC_i}{d\epsilon} = & -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_W} (F_1(\epsilon) - 1) \sum_{j=2}^{N_X-1} B_{ij} C_j + \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\epsilon) \sum_{j=2}^{N_X-1} A_{ij} D_j - \\ & \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\epsilon) (C_i^2 + D_i^2) D_i, \\ & i=2, \dots, N_X-1, \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_i}{d\epsilon} = & -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_W} (F_1(\epsilon) - 1) \sum_{j=2}^{N_X-1} B_{ij} D_j - \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\epsilon) \sum_{j=2}^{N_X-1} A_{ij} C_j + \\ & \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\epsilon) (C_i^2 + D_i^2) C_i, \\ & i=2, \dots, N_X-1. \end{aligned} \quad (8.38)$$

O último passo da dedução consiste em transformar o sistema de Eqs. (8.37) e (8.38) em um mais apropriado para resolução numérica. Isso é feito através da seguinte identificação:

$$\begin{aligned} C_i &= Y_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ D_i &= Y_i, \quad i = N+1, \dots, 2N, \end{aligned} \quad (8.39)$$

onde $N=N_X-2$. Fazendo $i=i-1$, $j=j-1$ e a mudança apresentada na Eq. (8.39) encontramos que o sistema de equações (8.37) e (8.38) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{d\epsilon} = & -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_W} (F_1(\epsilon) - 1) \sum_{j=1}^N B_{i+1,j+1} Y_j + \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\epsilon) \sum_{j=1}^N A_{i+1,j+1} Y_{j+N} - \\ & \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\epsilon) (Y_i^2 + Y_{i+N}^2) Y_{i+N}, \\ & i=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{d\varepsilon} = & -\text{sig}(\beta_1(0)) \frac{L_D}{L_w} (F_1(\varepsilon) - 1) \sum_{j=1}^N B_{i+1-N,j+1} Y_{j+N} - \\ & \frac{1}{2} \text{sig}(\beta_2(0)) F_2(\varepsilon) \sum_{j=1}^N A_{i+1-N,j+1} Y_j + \frac{L_D}{L_{NL}} F_{11}(\varepsilon) (Y_{i-N}^2 + Y_i^2) Y_{i-N}, \\ & i=N+1, \dots, 2N. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Para extrair as propriedades do modelo proposto na seção (8.4), vamos utilizar o *taper* de número 4 da Fig. (8.7) cujo comprimento é 50.0 milímetros. Usamos a fibra W1 para construir esse *taper* com os seguintes parâmetros: $a=2.0 \mu\text{m}$, $b=14.15 \mu\text{m}$, $c=22.0 \mu\text{m}$, $\Delta_1=0.02$, $\Delta_3=0.003$ e $\Delta_4=-0.0002$. Assim, as razões $A = \frac{a}{c} = 0.091$ e $R = \frac{b-a}{c} = 0.552$ permanecem constantes ao longo do estrangulamento.

As Figs. 8.8 (a,b,c) mostram as variações das funções de z que aparecem na Eq. (8.26) para o *taper* cujos parâmetros foram dados no parágrafo anterior. As funções $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ e a área efetiva do modo foram calculadas a partir da resolução numérica da equação transcendental para o índice de refração efetivo em cada seção local do *taper*. Desta forma, as derivadas de primeira e segunda ordem do índice de refração efetivo puderam ser calculadas numericamente da mesma forma que no Cap. (6), através do uso da Eq. (6.8) para o cálculo da derivada segunda e uma relação semelhante para o cálculo da derivada primeira ^[45]. Para os parâmetros da fibra apresentados acima, na origem (ou final) do *taper* os resultados das simulações mostram que $\beta_2(0) = \beta_2(L) = -30.56 \text{ ps}^2/\text{Km}$ e a área efetiva do modo $A_{\text{eff}}(0) = 21.20 \mu\text{m}^2$ que concordam com aqueles usualmente encontrados na literatura ^[43]. Observe que a fibra apresenta dispersão de segunda ordem negativa em $z=0$, que por isso é chamada de região de dispersão anômala, tornando $\text{sig}(\beta_2(0)) = -1$. Cada um dos pontos mostrados na Fig. (8.8(a,b,c)) corresponde ao valor encontrado para essas funções em cada uma das 101 seções locais em que o *taper* foi dividido. Usando o valor de $\beta_2(0)$ encontrado e a definição do comprimento de dispersão da fibra na ausência do estrangulamento como $L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2(0)|}$, encontramos que L_D para um pulso

de largura inicial $T_0=0.1$ ps é 327 mm, enquanto que para $T_0=1$ ps é de 32.7 m. Estes valores serão importantes para a discussão que segue.

Fig. 8.8 - Variação de (a) $\frac{\beta_1(z)}{\beta_1(0)} - 1$, (b) $\frac{\beta_2(z)}{\beta_2(0)}$ e (c) $\frac{P_{11}(z)}{P_{11}(0)}$ para $\lambda=1.55$ μm ,

onde os parâmetros do *taper* foram fornecidos no texto.

Observe na Fig. (8.8a) que a variação relativa da velocidade de grupo (o parâmetro β_1 é definido como o inverso da velocidade de grupo) do pulso ao longo do estrangulamento é muito pequena. Como o *taper* é adiabático, esperamos que as propriedades do pulso mudem muito pouco ao longo do estrangulamento. Desta forma e baseados na Fig. (8.8a), podemos desprezar o efeito de mudança na velocidade de grupo dada pelo segundo termo do lado direito da Eq. (8.28). Como última simplificação do problema vamos considerar que a potência inicial do pulso é escolhida de tal forma que $L_{NL}=L_D$. Com essas considerações, não existe o primeiro

termo do lado direito de cada equação que compõe o sistema de equações (8.40) e (8.41).

Fig. 8.9 – Evolução da largura do pulso na metade do máximo ao longo da fibra com e sem estrangulamento para $T_0=0.1$ ps.

A Fig. (8.9) mostra a evolução da largura do perfil de intensidade do pulso na metade do valor máximo, chamado de σ , na presença ou ausência do estrangulamento. O *taper* usado para as simulações, como já informamos, possui comprimento $L=50.0$ milímetros que pode ser convertido para a coordenada ξ através da transformação $\xi = \frac{z|\beta_2(0)|}{T_0^2}$, onde T_0 é a largura inicial do pulso. Por exemplo, para $T_0=0.1$ ps que é a menor largura inicial em que é válida a teoria desenvolvida na seção (8.4), o comprimento do *taper* será de $L=0.15$ unidades da coordenada ξ . Para os resultados apresentados na Fig. (8.9), a origem do *taper* foi posicionada em $\xi=2.0$ para a fibra onde ele existe.

A Fig. (8.9) mostra a evolução de σ para duas condições iniciais. Uma corresponde a um pulso do tipo $U(0, \tau) = \text{sech}(\tau)$ em $\xi=0.0$. Como a fibra normal

(sem o *taper*), apresenta dispersão anômala e $\frac{L_D}{L_{NL}} = 1$, ela é propícia à propagação

do *sóliton* fundamental cuja intensidade é dada pela função $\text{sech}^2(\tau)$. Desta forma, não deve ocorrer alteração na largura inicial para uma função do tipo $U(0, \tau) = \text{sech}(\tau)$ e isso está mostrado na Fig. (8.9). A presença do *taper* em $\xi=2.0$ introduz um *chirped* neste pulso de forma que após essa posição ocorre uma quebra no estado de *sóliton*. Nós ampliamos o intervalo de variação de ξ para até 10 unidades como mostra a Fig. (8.10) e não houve recuperação do perfil inicial do pulso.

Fig. 8.10 – Evolução da largura do pulso na metade do máximo de intensidade nas mesmas condições da Fig. (8.9) para um intervalo maior de ξ .

Para o pulso inicial possuindo o perfil $U(0, \tau) = \exp(-\tau^2/2)$ na Fig. (8.9) na ausência do *taper*, a situação é parecida, mas com uma diferença essencial. Como essa função não possui a forma do *sóliton* fundamental, ela ajusta-se à medida que se propaga na fibra de forma a cancelar os efeitos de automodulação de fase e dispersão da velocidade de grupo tão completa quanto possível, como está mostrado no Cap.

(4) do livro de Agrawal ^[43]. Na presença do *taper* o *chirp* induzido soma-se aquele do pulso e o efeito diminui um pouco a largura do pulso após este passar pelo *taper*.

Nós refizemos os gráficos anteriores para ambos os perfis de pulsos iniciais com $T_0=1$ ps. Os resultados obtidos mostraram que as curvas σ versus ξ na presença ou ausência do *taper* são praticamente iguais. Observe que neste caso o comprimento de dispersão é de 32.7 metros, bem maior que o comprimento de 50 milímetros do *taper*. Simulações feitas para $T_0 > 1$ ps confirmaram que não existe distinção das curvas σ versus ξ para fibras com ou sem o *taper* que estamos considerando. Isso indica que para haver uma manifestação da presença do estrangulamento, seu comprimento deve ser comparável ao comprimento característico em que ocorre a dispersão de segunda ordem (L_D) e a não linearidade do tipo Kerr (L_{NL}). Para os resultados apresentados acima, a presença do *taper* passa a ser percebida pelo pulso quando $\frac{L_D}{L} < \frac{327}{50} \cong 6.5$.

CONCLUSÕES

Determinamos as equações transcendentais para a constante de propagação das quatro fibras ópticas coaxiais apresentadas na Fig.(2.5). Essas equações foram encontradas através do uso das equações de Maxwell usando a aproximação dos modos linearmente polarizados e estão apresentadas na Tab. (2.3). O procedimento analítico para determiná-las foi exemplificado no Apêndice A para a fibra W1, em que $n_4 < N_e < n_2$. Através da repetição deste procedimento é possível obter as outras equações transcendentais para a constante de propagação.

A partir da resolução numérica das equações transcendentais obtidas para a constante de propagação no Cap. (2) e que vinculam todos os parâmetros da fibra, encontramos as propriedades dos modos de ordem mais baixa. Fizemos isso nos Caps. (3) e (4). Da análise das curvas de índice de refração efetivo como função das três dimensões espaciais e dos quatro índices de refração mostramos que existe uma diferença básica entre o comportamento dos modos para as estruturas W1 e W2 e para as estruturas M1 e M2. Como o índice de refração do núcleo para as estruturas do tipo W apresenta o maior valor, os modos destas estruturas tendem a apresentar máximos de distribuição do campo elétrico nesta região principalmente os modos HE_{11} , HE_{12} e HE_{12} . No entanto, para as estruturas do tipo M onde é a região de índice de refração n_3 (anel da fibra) que apresenta o maior valor, os modos tendem a apresentar um máximo de sua distribuição de campo elétrico nesta região, especialmente os citados anteriormente. Isso faz com que o campo elétrico dos modos para estas estruturas, esteja mais distribuído ao longo da direção transversal. Isso significa uma grande área efetiva do modo o que possibilitará a redução de efeitos não lineares.

Mostramos ainda que o confinamento na região núcleo-barreira-anel de todas as fibras coaxiais estudadas, cresce com o aumento da frequência normalizada de

propagação. Como o maior índice de refração para as estruturas do tipo W, está no núcleo da fibra, o estudo dos fatores de confinamento confirmou que o campo elétrico tende a se concentrar no núcleo da fibra para os modos que apresentam um máximo em sua distribuição de campo elétrico nesta parte da fibra (os modos HE_{11} , HE_{12} e HE_{13}). Na estrutura W2 a mudança sofrida pelo campo elétrico do modo fundamental contido na região do anel para o núcleo, ocorre de maneira rápida na posição do eixo V_3 onde acontece sua maior aproximação com o modo HE_{12} . Isso não ocorreu para os modos da estrutura W1. Nós mostramos que esse comportamento é devido a grande influência que a estrutura limite *Wclad* exerce sobre a W2. Para as estruturas do tipo M ($M1$ e $M2$), mostramos que o núcleo exerce pouca influência sobre as curvas de índice de refração efetivo como função da frequência normalizada. Isso é consequência de o campo elétrico de todos os modos estarem concentrados na região do anel da fibra que apresenta o maior índice de refração.

No Cap. (5) determinamos a equação transcendental para a frequência de corte das estruturas coaxiais a partir da equação transcendental para a constante de propagação. Assim, as propriedades da frequência de corte para os modos de mais baixa ordem puderam ser encontradas através da resolução numérica desta equação transcendental. O único resultado analítico obtido a partir desta equação transcendental foi a demonstração de que o modo fundamental das estruturas W1 e M1 sempre apresentam frequência de corte nula, independentemente dos valores dos parâmetros destas fibras. Já para as estruturas W2 e M2 o resultado é bem diferente. Dependendo dos parâmetros das fibras, estas estruturas apresentam modo fundamental cuja frequência de corte que pode ser diferente de zero. A análise que fizemos a partir da equação transcendental para a frequência de corte permitiu encontrar a relação entre os parâmetros da fibra a partir da qual o modo fundamental possui frequência de corte diferente de zero. A expressão obtida para a estrutura W2 é dada por:

$$R = \left(1 + \frac{A^2 - p_2^2}{q_2^2} \right)^{1/2} - A, \quad (1)$$

enquanto que para a estrutura M2,

$$R = \left(1 + A^2 q_4^2 - p_4^2\right)^{1/2} - A. \quad (2)$$

As definições dos parâmetros q_2 , p_2 , q_4 e p_4 estão dispostas na Tab. (5.3). Assim, para dados valores dos índices de refração (parâmetros q_2 e p_2 para a estrutura W2 ou p_4 e q_4 para a estrutura M2) e A , as Eqs. (1) e (2) permitem encontrar o valor de R a partir do qual o modo fundamental apresenta frequência de corte diferente de zero. Com relação às curvas de frequência de corte como função de R para os modos das estruturas W1 e M1, mostramos que as regiões destas curvas que permanecem constantes correspondem aquelas onde o confinamento dos modos aumenta na região núcleo-barreira-anel. Para as estruturas W2 e M2, esse comportamento não ocorreu. Para pequenos valores de A , as curvas de frequência de corte como função de R sempre apresentam um comportamento monotônico e crescente, indicando que estas estruturas são mais desconfinantes dos que W1 e M1.

No Cap. (6) fizemos o estudo do coeficiente de dispersão de segunda ordem das fibras W1 e W2 com o objetivo de otimizar uma fibra que possa atuar como compensadora de dispersão no comprimento de onda de $1.55 \mu\text{m}$. Como consequência dos estudos, obtivemos os parâmetros fornecidos na Tab. (6.3) cujo valor mais baixo encontrado para D foi de $-12179 \text{ ps}/(\text{nm.Km})$. Este alto valor indica que é necessário um pequeno comprimento da fibra compensadora para conseguir determinada compensação de dispersão, fazendo com que as perdas inerentes à propagação sejam desprezíveis nesta parte do sistema. Os resultados obtidos mostraram ainda que a localização do mínimo de D como função do comprimento de onda pode ser alterada através de uma variação no índice de refração n_4 . Nós calculamos os valores de D para as estruturas M1 e M2. No entanto para os coeficientes de Sellmeier que dispomos para a variação dos quatro índices de refração como função do comprimento de onda, os valores obtidos para D em $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ foram bem inferiores aos alcançados para as estruturas W1 e W2. Além do mais, os resultados do Cap. (4) mostram que as estruturas M1 e M2 apresentam um modo fundamental cuja distribuição de campo elétrico está concentrada na região do anel da fibra, o que as torna muito mais sensíveis às perdas por encurvamento do que aquelas do tipo W.

No Cap. (7) desenvolvemos um novo método numérico para resolver um sistema de equações diferenciais parciais acopladas. Ele é baseado no método da colocação ortogonal, desenvolvido originalmente para resolver apenas uma equação diferencial parcial. Mostramos que o método é suficientemente versátil para resolver um sistema com mais de duas equações diferenciais parciais acopladas, sendo que o acréscimo de mais equações pode ser feito facilmente. Mostramos que o método funciona resolvendo um sistema de quatro equações diferenciais parciais acopladas, calculamos o erro cometido e avaliamos o tempo gasto durante a execução do programa. Os resultados obtidos com esse exemplo mostram que é necessário otimizar a quantidade de pontos de colocação de forma que a requerida precisão seja obtida no menor tempo de execução do programa.

No Cap. (8) desenvolvemos um modelo original para estudar a propagação de um pulso temporal em um *taper* adiabático. Originalmente, a idéia era utilizar as propriedades altamente dispersivas de segunda ordem das fibras otimizadas no Cap. (6) e estudar a atuação do *chirp* induzido sobre o pulso por um *taper* feito com essa fibra. No entanto, mostramos que essas fibras geram *tapers* que não são adiabáticos. Assim, fizemos a otimização de um *taper* adiabático variando o raio do núcleo da fibra compensadora de dispersão usando o critério de escala de comprimento proposto por Love *et al.* ^[58] Feito isso, utilizamos o modelo que desenvolvemos para descrever a propagação de um pulso temporal ao longo do estrangulamento.

Os resultados obtidos com o modelo para a propagação de um pulso ao longo de um *taper* adiabático mostram que o *taper* não apresenta propriedades dispersivas. A presença do *taper* só influencia o pulso quando seu comprimento é da ordem do comprimento de dispersão do pulso no início da fibra. Se o comprimento do *taper* é bem menor do que o comprimento de dispersão do pulso no início da fibra, tudo se passa como se este não existisse. Nós não conseguimos obter uma equação que descrevesse a propagação de um pulso temporal ao longo de um *taper* não adiabático, o que pretendemos fazer futuramente. Acreditamos que deva surgir efeitos de compressão do pulso apreciáveis em um *taper* não adiabático e para pulsos curtos ($T_0 < 0.1$ ps). Neste caso, devemos acrescentar os termos não lineares de ordem superior que desprezamos durante a dedução.

APÊNDICE A

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES TRANSCENDENTAIS

A.0 - Introdução.

Neste apêndice apresentaremos as passagens matemáticas omitidas durante a dedução das equações transcendentais para as estruturas coaxiais no Cap. (2). Devido a enormidade de operações, apresentaremos apenas os detalhes da dedução de uma das equações transcendentais. As demais equações são obtidas de forma completamente análoga.

A.1 - Fibra Coaxial W1 e W2.

Fig. (A1) Perfil de índice de refração das estruturas W1 e W2.

A Fig. (A1) apresenta o perfil das estruturas coaxiais W1 e W2. Para a estrutura W1 por exemplo, existem três equações transcendentais distintas para o índice de refração efetivo. Qual equação utilizar depende do intervalo em que está o

índice de refração efetivo. Por exemplo, se o índice de refração efetivo estiver no intervalo $n_3 < N_e < n_1$, a equação utilizada deve ser aquela que pertence ao intervalo 3 na Fig. (A1). Outro fato que merece destaque é que as equações transcendentais para a estrutura W2 são iguais as correspondentes da W1. A diferença ocorre na definição do argumento da função de Bessel na região $\rho > c$.

Feitos os comentários anteriores, vamos encontrar a equação transcendental para a região 1 da estrutura W1 onde $n_4 < N_e < n_2$. Usando as considerações feitas no final do Cap. (2), a componente do campo elétrico E_y na direção transversa satisfazendo a aproximação LP, apresenta a seguinte forma :

$$E_y = \begin{cases} AJ_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(\ell \theta) & , 0 < \rho < a \\ \left[BJ_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos(\ell \theta) & , a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos(\ell \theta) & , b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos(\ell \theta) & , c < \rho \end{cases} , \quad (A1)$$

onde os parâmetros U_1 , U_3 , W_2 e W_4 são definidos como :

$$\begin{aligned} U_1 &= [N_1^2 - N_e^2]^{1/2} k_0 a , & W_2 &= [N_2^2 - N_e^2]^{1/2} k_0 a , \\ U_3 &= [N_3^2 - N_e^2]^{1/2} k_0 b , & W_4 &= [N_e^2 - N_4^2]^{1/2} k_0 c . \end{aligned} \quad (A2)$$

De acordo com a aproximação LP , a componente E_x será igual a zero e a E_z aproximadamente dada por:

$$E_z \cong \frac{1}{kn} \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{kn} \left[\sin \theta \frac{\partial E_y}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \right] , \quad (A3)$$

A componente E_θ pode ser escrita como função de E_y através da equação de transformação entre os sistema de coordenadas cartesianas e polares da seguinte forma :

$$E_\theta = -E_x \sin(\theta) + E_y \cos(\theta) \cong E_y \cos(\theta) , \quad (A4)$$

uma vez que $E_x=0$.

Para calcular E_z a partir de E_y devemos fazer derivadas das funções de Bessel nos intervalos indicados na Eq. (A1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= A \frac{U_1}{a} (\sin \theta \cos \ell \theta) J'_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) J_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right), \quad \rho < a, \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{W_2}{a} (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[B J'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[B J_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right], \\ &\hspace{25em} a < \rho < b, \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{U_3}{b} (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[D J'_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + E Y'_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[D J_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + E Y_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right], \\ &\hspace{25em} b < \rho < c, \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{c} (\sin \theta \cos \ell \theta) K'_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - F \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) K_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right), \quad \rho > c. \end{aligned} \quad (A5)$$

Vamos utilizar relações de recorrência para as funções de Bessel e expressar as derivadas destas funções como somas ou diferenças da mesma função mas com ordem diferente. Essas relações de recorrência são dadas por :

$$\begin{aligned} J_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [J_{\ell+1}(u) + J_{\ell-1}(u)], \quad J'_\ell(u) = \frac{1}{2} [J_{\ell-1}(u) - J_{\ell+1}(u)], \\ Y_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [Y_{\ell+1}(u) + Y_{\ell-1}(u)], \quad Y'_\ell(u) = \frac{1}{2} [Y_{\ell-1}(u) - Y_{\ell+1}(u)], \\ K_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [K_{\ell+1}(u) - K_{\ell-1}(u)], \quad K'_\ell(u) = -\frac{1}{2} [K_{\ell-1}(u) + K_{\ell+1}(u)], \\ I_\ell(u) &= -\frac{u}{2\ell} [I_{\ell+1}(u) - I_{\ell-1}(u)], \quad I'_\ell(u) = \frac{1}{2} [I_{\ell-1}(u) + I_{\ell+1}(u)], \end{aligned} \quad (A6)$$

Usando as relações anteriores para as funções de Bessel e suas derivadas bem como as identidades trigonométricas para $\sin(A+B)$ e $\sin(A-B)$, $\frac{dE_y}{dy}$ pode ser reescrito como :

Para o intervalo $0 < \rho < a$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= A \frac{U_1}{a} (\sin \theta \cos \ell \theta) J'_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) J_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] - (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] \right\} \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ [\sin \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \sin \ell \theta] J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - [\sin \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \sin \ell \theta] J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ \sin(1-\ell)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - \sin(1+\ell)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ -\sin(\ell-1)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - \sin(\ell+1)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -A \frac{U_1}{2a} \left\{ \sin(\ell-1)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + \sin(\ell+1)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\}. \tag{A7}
 \end{aligned}$$

Intervalo $a < \rho < b$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{W_2}{a} (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[B J'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[B J_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \\
 &= \frac{W_2}{2a} (\sin \theta \cos \ell \theta) \left\{ B \left[J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] + C \left[Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \right\} + \\
 &\quad - \frac{W_2}{2a} (\cos \theta \sin \ell \theta) \left\{ B \left[J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] + C \left[Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{W_2}{2a} \left\{ B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\sin \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \sin \ell \theta] - B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\sin \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \sin \ell \theta] + \right. \\
 &\quad \left. + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\sin \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \sin \ell \theta] - C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\sin \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \sin \ell \theta] \right\} \\
 &= \frac{W_2}{2a} \left\{ \left[B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \sin(1-\ell)\theta - \left[B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \sin(1+\ell)\theta \right\} \\
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{W_2}{2a} \left\{ \left[B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \sin(\ell-1)\theta + \left[B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \sin(\ell+1)\theta \right\}. \tag{A8}
 \end{aligned}$$

Intervalo $b < \rho < c$:

Como na Eq.(A5) as equações nos intervalos $a < \rho < b$ e $b < \rho < c$ são iguais, podemos obter a equação semelhante a (A8) mudando apropriadamente suas constantes e argumentos das funções de Bessel , obtendo a equação válida neste intervalo dada por:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{U_3}{2b} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \quad (A9)$$

Intervalo $\rho > c$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{c} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) K'_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{2c} \right) - F \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) K_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{2c} \right) \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left[K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right] + (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left[K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right] \right\} \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ \text{sen}(1-\ell)\theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + \text{sen}(1+\ell)\theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ -\text{sen}(\ell-1)\theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + \text{sen}(\ell+1)\theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\ \therefore \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{2c} \left\{ \text{sen}(\ell-1)\theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - \text{sen}(\ell+1)\theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\}. \quad (A10) \end{aligned}$$

Desta forma, a componente do campo elétrico na direção z, para cada região da fibra, é dado através da seguinte expressão:

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{nk2a} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iW_2}{nk2a} \left\{ \left[BJ_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[BJ_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iU_3}{nk2b} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{nk2c} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{cases} \quad (A11)$$

A componente do campo na direção θ é dada pela Eq.(A4). Desta forma, obtemos a seguinte expressão para E_θ

$$E_\theta = \begin{cases} AJ_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & , 0 < \rho < a \\ \left[BJ_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & , a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & , b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & , c < \rho \end{cases} \quad (A12)$$

As condições de contorno impõem que as componentes do campo elétrico devam ser iguais nas interfaces de cada região da fibra. Utilizando as expressões para E_θ e E_z , podemos encontrar a relação que A, B, C, D, E e F devem satisfazer para que essas componentes sejam contínuas através da interface. Assim, usando a expressão para a componente E_θ obtemos o seguinte vínculo entre A, B e C

$$J_\ell(U_1)A = J_\ell(W_2)B + Y_\ell(W_2)C. \quad (A13)$$

Da componente E_z resulta as seguintes equações :

$$U_1 J_{\ell-1}(U_1)A = W_2 [J_{\ell-1}(W_2)B + Y_{\ell-1}(W_2)C], \quad (A14)$$

$$U_1 J_{\ell+1}(U_1)A = W_2 [J_{\ell+1}(W_2)B + Y_{\ell+1}(W_2)C]. \quad (A15)$$

Somando as equações anteriores, obtemos que :

$$U_1 J_{\ell+1}(U_1)A = W_2 [J_{\ell+1}(W_2)B + Y_{\ell+1}(W_2)C]. \quad (A16)$$

A partir da expressão para E_θ em $\rho=b$ encontramos a seguinte equação:

$$J_\ell\left(\frac{W_2 b}{a}\right)B + Y_\ell\left(\frac{W_2 b}{a}\right)C = J_\ell(U_3)D + Y_\ell(U_3)E. \quad (A17)$$

Procedendo da mesma com a componente E_z , obtemos as seguintes expressões :

$$\frac{W_2}{a} \left[J_{\ell-1}\left(\frac{W_2 b}{a}\right)B + Y_{\ell-1}\left(\frac{W_2 b}{a}\right)C \right] = \frac{U_3}{b} [J_{\ell-1}(U_3)D + Y_{\ell-1}(U_3)E], \quad (A18)$$

$$\frac{W_2}{a} \left[J_{\ell+1}\left(\frac{W_2 b}{a}\right)B + Y_{\ell+1}\left(\frac{W_2 b}{a}\right)C \right] = \frac{U_3}{b} [J_{\ell+1}(U_3)D + Y_{\ell+1}(U_3)E]. \quad (A19)$$

Observe que as duas equações anteriores podem ser reunidas na seguinte forma:

$$\frac{W_2 b}{a} \left[J_{\ell+1}\left(\frac{W_2 b}{a}\right)B + Y_{\ell+1}\left(\frac{W_2 b}{a}\right)C \right] = U_3 [J_{\ell+1}(U_3)D + Y_{\ell+1}(U_3)E]. \quad (A20)$$

Da mesma forma em $\rho = c$, a continuidade da componente E_θ levará à seguinte equação:

$$J_\ell\left(\frac{U_3 c}{b}\right)D + Y_\ell\left(\frac{U_3 c}{b}\right)E = K_\ell(W_4)F, \quad (A21)$$

e a componente E_z resultará as seguintes equações :

$$-\frac{U_3}{b} \left[J_{\ell-1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{\ell-1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = \frac{W_4}{c} K_{\ell-1}(W_4) F, \quad (A22)$$

$$\frac{U_3}{b} \left[J_{\ell+1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{\ell+1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = \frac{W_4}{c} K_{\ell+1}(W_4) F, \quad (A23)$$

que podem ser somadas para fornecer

$$\pm \frac{U_3 c}{b} \left[J_{\ell \pm 1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{\ell \pm 1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = W_4 K_{\ell \pm 1}(W_4) F. \quad (A24)$$

Por uma questão de conveniência, vamos definir as variáveis W_3 e U_4 da seguinte forma :

$$W_3 = \frac{W_2 b}{a} \quad \text{e} \quad U_4 = \frac{U_3 c}{b}. \quad (A25)$$

Substituindo as definições anteriores nas Eqs. (A17), (A20), (A21) e (A24) juntamente com as equações A13 e A16, obtém-se o seguinte sistema de equações :

$$J_{\ell}(U_1)A - J_{\ell}(W_2)B - Y_{\ell}(W_2)C = 0, \quad (A26)$$

$$U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)A - W_2 J_{\ell \pm 1}(W_2)B - W_2 Y_{\ell \pm 1}(W_2)C = 0, \quad (A27)$$

$$J_{\ell}(W_3)B + Y_{\ell}(W_3)C - J_{\ell}(U_3)D - Y_{\ell}(U_3)E = 0, \quad (A28)$$

$$W_3 J_{\ell \pm 1}(W_3)B + W_3 Y_{\ell \pm 1}(W_3)C - U_3 J_{\ell \pm 1}(U_3)D - U_3 Y_{\ell \pm 1}(U_3)E = 0, \quad (A29)$$

$$J_{\ell}(U_4)D + Y_{\ell}(U_4)E - K_{\ell}(W_4)F = 0, \quad (A30)$$

$$\pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)D \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)E - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0. \quad (A31)$$

Este é um sistema homogêneo de equações lineares que apresenta solução diferente da trivial apenas se o determinante dos coeficientes for nulo. Desta forma, devemos impor :

$$\begin{vmatrix} J_{\ell}(U_1) & -J_{\ell}(W_2) & -Y_{\ell}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) & -W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) & -W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{\ell}(W_3) & Y_{\ell}(W_3) & -J_{\ell}(U_3) & -Y_{\ell}(U_3) & 0 \\ 0 & W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) & W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\ell}(U_4) & Y_{\ell}(U_4) & K_{\ell}(W_4) \\ 0 & 0 & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = 0. \quad (A32)$$

Tudo o que temos que fazer para encontrar a equação transcendental para o índice de refração efetivo e determinante (A32). Ele pode ser simplificado usando o desenvolvimento de Laplace. Assim, usando a primeira coluna do lado esquerdo do determinante anterior, obtemos :

$$J_{\ell}(U_1)\alpha(5) - U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)\xi(5) = 0, \quad (A33)$$

onde $\alpha(5)$ e $\xi(5)$ são dois determinantes de ordem 5, dados como :

$$\alpha(5) = \begin{vmatrix} -W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) & -W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ J_{\ell}(W_3) & Y_{\ell}(W_3) & -J_{\ell}(U_3) & -Y_{\ell}(U_3) & 0 \\ W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) & W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & J_{\ell}(U_4) & Y_{\ell}(U_4) & -K_{\ell}(W_4) \\ 0 & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}, \quad (A34)$$

$$\xi(5) = \begin{vmatrix} -J_t(W_2) & -Y_t(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ J_t(W_3) & Y_t(W_3) & -J_t(U_3) & -Y_t(U_3) & 0 \\ W_3 J_{t\pm 1}(W_3) & W_3 Y_{t\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{t\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{t\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & J_t(U_4) & Y_t(U_4) & -K_t(W_4) \\ 0 & 0 & \pm U_4 J_{t\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{t\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{t\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} \quad (A35)$$

Esses determinantes de ordem 5 podem ser reduzidos através do uso da regra de Laplace aplicada a primeira linha, às seguintes expressões:

$$\alpha(5) = -W_2 J_{t\pm 1}(W_2) \alpha(4) + W_2 Y_{t\pm 1}(W_2) \xi(4), \quad (A36)$$

$$\xi(5) = -J_t(W_2) \alpha(4) + Y_t(W_2) \xi(4), \quad (A37)$$

que contém dois determinantes 4×4 com a seguinte forma:

$$\alpha(4) = \begin{vmatrix} Y_t(W_3) & -J_t(U_3) & -Y_t(U_3) & 0 \\ W_3 Y_{t\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{t\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{t\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & J_t(U_4) & Y_t(U_4) & -K_t(W_4) \\ 0 & \pm U_4 J_{t\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{t\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{t\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}, \quad (A38)$$

$$\xi(4) = \begin{vmatrix} J_t(W_3) & -J_t(U_3) & -Y_t(U_3) & 0 \\ W_3 J_{t\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{t\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{t\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & J_t(U_4) & Y_t(U_4) & -K_t(W_4) \\ 0 & \pm U_4 J_{t\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{t\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{t\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}. \quad (A39)$$

Aplicando novamente o processo de redução, os determinantes (A38) e (A39) podem ser reduzidos a dois de ordem 3, conforme mostra as próximas expressões:

$$\alpha(4) = Y_t(W_3) \alpha(3) - W_3 Y_{t\pm 1}(W_3) \xi(3), \quad (A40)$$

$$\xi(4) = J_t(W_3) \alpha(3) - W_3 J_t(W_3) \xi(3), \quad (A41)$$

onde os determinantes de ordem 3 são dados por :

$$\alpha(3) = \begin{vmatrix} -U_3 J_{t\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{t\pm 1}(U_3) & 0 \\ J_t(U_4) & Y_t(U_4) & -K_t(W_4) \\ \pm U_4 J_{t\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{t\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{t\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}, \quad (A42)$$

$$\xi(3) = \begin{vmatrix} -J_t(U_3) & -Y_t(U_3) & 0 \\ J_t(U_4) & Y_t(U_4) & -K_t(W_4) \\ \pm U_4 J_{t\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{t\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{t\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}. \quad (A43)$$

Novamente, os determinantes (A42) e (A43) podem ser calculados em termos de dois de segunda ordem através das seguintes expressões :

$$\alpha(3) = -U_3 J_{t\pm 1}(U_3) \alpha(2) + U_3 Y_{t\pm 1}(U_3) \xi(2), \quad (A44)$$

$$\xi(3) = -J_t(U_3) \alpha(2) + Y_t(U_3) \xi(2), \quad (A45)$$

onde $\alpha(2)$ e $\xi(2)$ são dados por :

$$\alpha(2) = \begin{vmatrix} Y_t(U_4) & -K_t(W_4) \\ \pm U_4 Y_{t\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{t\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = \pm U_4 Y_{t\pm 1}(U_4) K_t(W_4) - W_4 K_{t\pm 1}(W_4) Y_t(U_4), \quad (A46)$$

$$\xi(2) = \begin{vmatrix} J_t(U_4) & -K_t(W_4) \\ \pm U_4 J_{t\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{t\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = \pm U_4 J_{t\pm 1}(U_4) K_t(W_4) - W_4 K_{t\pm 1}(W_4) J_t(U_4), \quad (A47)$$

que podem ser reescritas da seguinte forma :

$$\alpha(2) = U_4 W_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\pm \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} - \frac{Y_{\ell}(U_4)}{U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \right], \quad (A48)$$

$$\xi(2) = U_4 W_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\pm \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} - \frac{J_{\ell}(U_4)}{U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)} \right]. \quad (A49)$$

Feito todas essas passagens, retornamos a Eq. (A33). Mas antes, vamos substituir as Eqs. (A36) e (A37) na Eq. (A33) e obter a seguinte expressão :

$$J_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{J_{\ell}(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} - \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} \right] \alpha(4) - Y_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{Y_{\ell}(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} - \frac{Y_{\ell}(U_1)}{U_1 Y_{\ell\pm 1}(U_1)} \right] \xi(4) = 0, \quad (A50)$$

onde $\alpha(4)$ e $\xi(4)$ podem ser expressos em termos de $\alpha(2)$ e $\xi(2)$ através do uso das Eqs. (A40), (A41), (A42) e (A43), como :

$$\alpha(4) = U_3 W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) \left\{ \begin{aligned} & J_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_{\ell}(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \alpha(2) + \\ & - Y_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_{\ell}(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \xi(2) \end{aligned} \right\}, \quad (A51)$$

$$\xi(4) = U_3 W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) \left\{ \begin{aligned} & J_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_{\ell}(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \alpha(2) + \\ & - Y_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_{\ell}(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \xi(2) \end{aligned} \right\}. \quad (A52)$$

Por fim, substituindo as Eqs. (A48) e (A49) nas Eqs. (A51) e (A52) que por sua vez são substituídas na Eq. (A50), encontramos a seguinte equação transcendental :

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{J_{t\pm 1}(U_4)}{Y_{t\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J_t(U_4)}{U_4 J_{t\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_t(W_4)}{W_4 K_{t\pm 1}(W_4)} \right] \right\} \left. \frac{Y_{t\pm 1}(W_3)}{Y_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_t(U_3)}{U_3 Y_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_t(W_3)}{W_3 Y_{t\pm 1}(W_3)} \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{J_{t\pm 1}(W_3)}{J_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_t(U_3)}{U_3 Y_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{J_t(W_3)}{W_3 J_{t\pm 1}(W_3)} \right] \right\} = \\
 & = \frac{J_{t\pm 1}(U_3)}{Y_{t\pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{Y_{t\pm 1}(W_3)}{Y_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_t(U_3)}{U_3 J_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_t(W_3)}{W_3 Y_{t\pm 1}(W_3)} \right] - \frac{J_{t\pm 1}(W_3)}{J_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_t(U_3)}{U_3 J_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{J_t(W_3)}{W_3 J_{t\pm 1}(W_3)} \right] \right\} \\
 & \hspace{15em} (A53)
 \end{aligned}$$

Essa é a equação transcendental que deve ser resolvida numericamente para que sejam conhecidos os índices de refração efetivos no intervalo $N_4 < N_e < N_2$ dos modos da estrutura W1. Para obter as outras equações transcendentais apresentadas na Tab. (2.3), devemos proceder da mesma forma que fizemos acima, utilizando as Tabs. (2.1) e (2.2) para propor a distribuição de campo E_z .

APÊNDICE B

ROTINAS PARA O CÁLCULO DOS PONTOS DE COLOCAÇÃO.

B.0 - Introdução.

Este apêndice lista as rotinas necessárias para o cálculo das N raízes do polinômio de Jacobi $P_N^{(\alpha,\beta)}(x)$ (chamada de JCOBIP), as derivadas do polinômio de Langrange nas N raízes do polinômio de Jacobi de ordem N (chamada de DFOPR) e a que calcula o valor do polinômio de Langrange em qualquer ponto contido dentro do domínio dos polinômios de Jacobi (chamada INTRP). Essas rotinas foram retiradas do livro de Villadsen ^[44] e adaptadas para funcionar em Fortran90.

B.1 - Listagem das rotinas.

```
!
!  ROTINA QUE CALCULA AS RAÍZES DOS POLINÔMIOS DE JACOBI DE ORDEM N
!  DENTRO DO INTERVALO [0,1]
!
!  .  A ROTINA JCOBI FUNCIONA DA SEGUINTE MANEIRA
!
!      NX → ORDEM DO POLINÔMIO DE JACOBI DE EXPOENTES ALFA(AL) e
!           BETA(BE) (COMO ESTA DECLARADO NO PROGRAMA.
!
!      N0 → INDICA SE O PONTO INICIAL DO DOMÍNIO SERÁ UTILIZADO NA
!           QUADRATURA. NESTE CASO, N0=1. SE NÃO, N0=0.
!
!      N1 → INDICA SE O PONTO FINAL DO DOMÍNIO SERÁ UTILIZADO NA
!           QUADRATURA. NESTE CASO, N1=1. SE NÃO, N1=0.
!
!      DIFX1,DIFX2,DIFX3 → VETORES USADOS NO CALCULO DAS DERIVADAS
!                           DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM E PESOS DA
!                           QUADRATURA CALCULADOS NAS RAÍZES DOS
!                           POLINÔMIOS DE JACOBI.
!
!      ROOTX → VETOR QUE CONTÉM AS NX RAÍSES DO POLINOMIO
!               DE JACOBI DE ORDEM NX.
```

```

!
SUBROUTINE JCOBIP(ND,N,N0,N1,AL,BE,DIF1,DIF2,DIF3,ROOT)
IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
DIMENSION DIF1(ND),DIF2(ND),DIF3(ND),ROOT(ND)
!
!....Cálculo das raízes e as 2 primeiras derivadas do Polinômio de Jacobi.
!
AB= AL+BE
AD= BE-AL
AP= BE*AL
!
DIF1(1)=(AD/(AB+2.D0)+1.D0)/2.D0
DIF2(1)= 0.D0
!
IF (N.LT.2) GOTO 15
!
DO 10 I= 2,N
    Z1= I-1
    Z= AB+2.D0*Z1
!
    DIF1(I)= (AB*AD/Z/(Z+2.D0)+1.D0)/2.D0
!
    IF (I.NE.2) GOTO 11
!
    DIF2(I)= (AB+AP+Z1)/Z/Z/(Z+1.D0)
    GO TO 10
!
11 Z= Z*Z
    Y= Z1*(AB+Z1)
    Y= Y*(AP+Y)
!
    DIF2(I)= Y/Z/(Z-1.D0)
!
10 CONTINUE
!
!....Determinação das raízes por Newton com eliminação prévia das raízes
!
15 X= 0.D0
!
DO 20 I= 1,N
!
25 XD= 0.D0
    XN= 1.D0
    XD1= 0.D0
    XN1= 0.D0
!
    DO 30 J= 1,N
        XP= (DIF1(J)-X)*XN-DIF2(J)*XD
        XP1= (DIF1(J)-X)*XN1-DIF2(J)*XD1-XN
        XD= XN
        XD1= XN1
        XN= XP
30    XN1= XP1
        ZC= 1.D0
        Z= XN/XN1
!
        IF(I.EQ.1)GO TO 21
!
        DO 22 J= 2,I

```

```

22    ZC= ZC-Z/(X-ROOT(J-1))
!
21 Z= Z/ZC
    X= X-Z
    IF (DABS(Z).GT.1.D-9) GOTO 25
!
    ROOT(I)= X
!
    X= X+1.D-4
20 CONTINUE
!
!....Soma eventual dos pontos em X= 0 ou X= 1
!
    NT= N+N0+N1
    IF (N0.EQ.0) GOTO 35
!
    DO 31 I= 1,N
        J= N+1-I
31 ROOT(J+1)= ROOT(J)
    ROOT(1)= 0.D0
!
35 IF (N1.EQ.1) ROOT(NT)= 1.D0
!
!....Cálculo das derivadas do Polinômio Total
!
    DO 40 I= 1,NT
        X= ROOT(I)
!
        DIF1(I)= 1.D0
        DIF2(I)= 0.D0
        DIF3(I)= 0.D0
!
        DO 40 J= 1,NT
!
            IF (J.EQ.I) GOTO 40
!
            Y= X-ROOT(J)
!
            DIF3(I)= Y*DIF3(I)+3.D0*DIF2(I)
            DIF2(I)= Y*DIF2(I)+2.D0*DIF1(I)
            DIF1(I)= Y*DIF1(I)
!
40 CONTINUE
!
    RETURN
    END

```

A ROTINA DFOPR FUNCIONA DA SEGUINTE MANEIRA :

I → DADO A RAÍZ I, ESSA ROTINA RETORNA O VALOR DA DERIVADA DO POLINÔMIO DE LANGRANGE DO PONTO I CALCULADO NOS OUTROS PONTOS (J=1,NTX).

ID=1 → CALCULA A DERIVADA DE PRIMEIRA ORDEM NAS RAÍZES DO POLINÔMIO DE JACOBI.

ID=2 → CALCULA A DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM NAS RAÍZES DO

POLINÔMIO DE JACOBI.

ID=3 → CALCULA OS PESOS DE QUADRATURA.

VECT → VETOR DE SAÍDA QUE CONTÉM O RESULTADO DA OPÇÃO ANTERIOR NAS RAÍZES DOS POLINÔMIOS DE JACOBI.

```

SUBROUTINE DFOPR(ND,N,NO,N1,LID,DIF1,DIF2,DIF3,ROOT,VECT)
IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
DIMENSION DIF1(ND),DIF2(ND),DIF3(ND),ROOT(ND),VECT(ND)
NT=N+NO+N1
IF(ID.EQ.3) GOTO 10
DO 20 J=1,NT
IF(J.NE.1) GOTO 21
IF(ID.NE.1) GOTO 5
VECT(I)=DIF2(I)/DIF1(I)/2.D0
GOTO 20
5 VECT(I)=DIF3(I)/DIF1(I)/3.D0
GOTO 20
21 Y=ROOT(I)-ROOT(J)
VECT(J)=DIF1(I)/DIF1(J)/Y
IF(ID.EQ.2) VECT(J)=VECT(J)*(DIF2(I)/DIF1(I)-2.D0/Y)
20 CONTINUE
GOTO 50
10 Y=0.D0
DO 25 J=1,NT
X=ROOT(J)
AX=X*(1.D0-X)
IF(NO.EQ.0) AX=AX/X/X
IF(N1.EQ.0) AX=AX/(1.D0-X)/(1.D0-X)
VECT(J)=AX/DIF1(J)**2
25 Y=Y+VECT(J)
DO 60 J=1,NT
60 VECT(J)=VECT(J)/Y
50 RETURN
END

```

A ROTINA INTRP FUNCIONA DA SEGUINTE MANEIRA :

· ESSA ROTINA RETORNA O VALOR DE $L_i(X)$ PARA TODO $i=1,NTX$, ONDE $L_i(X)$ É O POLINÔMIO DE LANGRANGE DE ORDEM i .

XINTP(I) → É O VETOR QUE ACUMULA OS VALORES.

X0 → PONTO ONDE O POLINÔMIO DE LANGRANGE DE ORDEM J É CALCULADO.

```

SUBROUTINE INTRP(ND,NT,X,ROOT,DIF1,XINTP)
IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
DIMENSION ROOT(ND),DIF1(ND),XINTP(ND)
POL=1.D0
DO 5 I=1,NT
DF=X-ROOT(I)
XINTP(I)=0.D0
IF(DF.EQ.0.D0) XINTP(I)=1.D0
POL=POL*DF
5 CONTINUE
IF(POL.EQ.0.D0) GOTO 10
DO 6 I=1,NT

```



```
      XINTP(I)=POL/(X-ROOT(I))/DIF1(I)
6  CONTINUE
10  RETURN
    END
```

!

!

!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. McLandrich M. N., Orazi R. J. and Marlin H. R., "Polarization independent narrow channel wavelength division multiplexing fiber couplers for 1,55 μm ", J. Lightwave Technol., 9, 442-447, (1991).
2. Cozens J. R., Boucouvalas A. C. and Webster N. L., "Coaxial optical couplers", 1th European Conf. on Integrated optics, London, pg. 102, (1981).
3. Ymamasahi T. and Kimoto T., "History of Electral Engineers, Ohm Publ., Tokyo, 1976.
4. Gordon J. P., Zeiger H. J. and Townes C. H. , "Molecular micro wave oscillator and new hyperfine structure in the micro wave spectrum of NH_3 ", Phys. Review, 1995, 282-284, (1954).
5. Maiman T. H., "Stimulated optical radiation in ruby masers" , Nature, 187, 493-493, (1950).
6. Keyes R. J. and Quist T. M., "Recombination radiation emmited by gallium arsenide diodes", Solid State Device Res. Anf., Durham, NH, (1962).
7. Hall R. N., Fenner G. E., Kingsley J. D., Soltys T. J. and Carlson R. O., "Cohrrent light emission from GaAs junctions, Phys. Rev. Lett., 9, 366-368, (1962).
8. Kapron F. P. , "Radiation loss in glass optical waveguides", App. Phys. Lett., 17, 423-425, (1970).
9. Keck D. B., Schultz P. C. and Zimar F. , "Attenuation of multimode glass optical wave guides", Appl. Phys. Lett. , 21, 215-217, (1972).

10. Kaiser P., "Spectral losses of unclad fibers made from high-grade vitreous silica", *Appl. Phys. Lett.*, 23, 45-46, (1973).
11. Horiguchi M., "Spectral losses of low-OH-content Optical Fibers", *Electron. Lett.*, 12, 310-311, (1976).
12. Cozens J. R. and Boucouvalas A. C., "Coaxial optical coupler", *Electron. Lett.*, 18, 138-140, (1982).
13. Boucouvalas A. C., "Coaxial optical fiber Coupling", *J. Lightwave Technol.*, LT - 3, 1151-1158, (1985).
14. Celaschi S., Jesus J. T., Dini D., Juriollo A. and Arradi R., "Narrowband all-fiber spectral filters", *Proceedings of the International Workshop on Advanced Materials for Multifunctional Waveguides, CLEO Rim'95 ed.* (Ceramic Society Optoelectronic Industries and Technological Development Association, OITDA, Chiba, Japan, 76-79, (1995).
15. Allan W. Snyder and John D. Love, "Optical Waveguide Theory", *Chapman and Hall*, 1983, cap. 2.
16. M. J. Adams, "An Introduction to Optical Waveguides", pag. 223-233, *John Wiley & Sons*, (1981).
17. Jonh R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, "Fundamentos da Teoria eletromagnética", 3ª edição, *Editora Campus*, (1982).
18. Dietrich Marcuse, "Light Transmission Optics", Second Edition, *Van Nostrand Reinhold Company*, (1982).
19. George Arfken, "Mathematical Methods for Physicists", Third Edition, *Academic Press, INC*, (1995).

20. Cláudia Adriana de Sousa Melo, "Estudo e modelamento de fibras coaxiais", Tese de mestrado, Universidade Federal do Ceará, dezembro do 1994.
21. D. Gloge, "Weakly Guiding Fibers", Appl. Optics, Vol. 10, N° 10, pp 2252-2258, October, (1971).
22. F. D. Nunes, C. A. de Melo, H. F. da Silva, "Theoretical study of coaxial fibers", Appl. Opt., Vol. 35, N° 3, pp 388-399, 20 January, (1996).
23. Monerie M., "Propagation in Doubly Clad Single-Mode Fibers", IEEE J. Quantum Electron. QE-18, pp 535-542, (1982).
24. M. Abramowitz, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, 1965.
25. Ref. [16], página 272.
26. Samir F. Mahmoud and A M. Kharbat, "Transmission characteristics of a coaxial optical fiber line", Journal of Lightwave Technology, Vol. II, n° 11, pp 1777-1720 , november, (1993).
27. J. D. Love, W. M. Henry, W. J. Stewart, R. J. Black, S. Lacroix and F. Gauthier, "Tapered single-mode fibers and devices Part 1: Adiabaticity Criteria", IEE Proceedings-J, Vol. 138, n° 5, October, (1991).
28. Suzanne Lacroix, Roch Bourbonnais, François Gonthier and Jacques Bures, "Tapered monomode optical fibers: understanding large power transfer", Appl. Optics, Vol. 25, n° 23, 1 december, (1986).
29. Ref. [34], pp 355-433.

30. Ahmad Safaai-Jazi and Gar Lam Yip, "Cutoff conditions in three-layer cylindrical dielectric waveguides", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-26, No. 11, 898-903, November(1978).
31. A. Safaai-Jazi and G. L. Yip, "Classification of hybrid modes in cylindrical dielectric optical waveguides", Radio Science, Vol. 12, No. 4, 603-609, July-august, (1977).
32. A C. Boucouvalas, "Mode-cutoff frequencies of coaxial optical couples", Opt. Lett. , Vol. 10, N° 2, February, (1985).
33. Chinlon Lin, H. Kogelnik and L. G. Cohen, "Optical-pulse equalization of low-dispersion transmission in single-mode fibers in the 1.3-1.7 μm ", Opt. Lett. , Vol. 5, n° 11, November, (1980).
34. C. D. Poole, J. M. Wiesenfeld, A. R. McCormick and K. T. Nelson, "Broadband and dispersion compensation by using the higher-order spatial mode in a two-mode fiber", Opt. Lett. , Vol. 17, n° 14, 15 of July, (1992).
35. Ashish M. Vengsarker and W. A. Reed, "Dispersion-compensating single-mode fibers: efficient designs for first and second-order compensation", Opt. Lett., Vol.18, n° 11, 1 June, (1993).
36. A. Joseph Antos and David K. Smith, "Design and characterization of dispersion compensating fiber based on the LP₀₁ mode", Journal of Lightwave Technology, Vol. 12, n° 10, october, (1994).
37. V. Peschel, T. Peschel and F. Lederes, "A compact device for highly efficient dispersion compensation in fibers transmissions", Appl. Phys. Lett., 67(15), 9 october, (1995).
38. R. C. Youngquist, J. L. Brooks and H. J. Shaw, "Two-mode fiber modal coupler", Opt. Lett., Vol. 9, n° 5, may, (1984).

39. J. N. Blake, B. Y. Kim and H. J. Shaw, "Fiber-optic modal coupler using periodic microbending", *Opt. Lett.* , Vol. 11, nº 3, march, (1986).
40. K. Thyagarajan, R. K. Varshney, P. Palai, A. K. Ghatak and I. C. Goyal, "A Novel design of a dispersion compensating fiber", *IEEE Photonics Technology Lett.*, Vol. 8, nº 11, november, (1996).
41. F. D. Nunes, H. F. da Silva, S. C. Zilio, "Design considerations on a dispersion compensating coaxial fiber" , *Brazilian Journal of Physics*, Vol. 28, nº 2, June, (1998).
42. Ref. [18], cap. 12, pag. 483.
43. Govind P. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", Second Edition, Academic Press, (1995), pag. 45.
44. Govind P. Agrawal, "Fiber-Optic Communication Systems", Second Edition, John Wiley&Sons, INC, (1997).
45. William S. Dorn e Daniel D. McCracken, "Cálculo numérico com estudos de casos em fortran IV", Editora Campus LTDA, RJ, 1978, página 299.
46. Tabela 7.3 da Referência [4] do primeiro capítulo, páginas 244-245.
47. Ref. [20], Cap. (1).
48. E. G. Neumann, "Single-mode fibers : Fundamentals", Berlin-Germany: Springer Verlag, 1988, Cap. 5, página 126.

49. Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., Chapter 15.
50. Brice Carnahan, H. A Luther, James O. Wilkes, "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, INC, 1969, Chapters 2 e 3.
51. Philip J. Davis, "Interpolation & Approximation", Dover Publications, INC, 1975, Chapter 10.
52. Humberto F. da Silva, "Estudos sobre a difusão de Ti em LiNbO_3 ", dissertação de mestrado, UFC – Depto. de Física, setembro de 1994. As referências encontradas neste texto fazem uma revisão bibliográfica completa do método da colocação ortogonal para uma equação diferencial.
53. H. F. da Silva, F. D. Nunes, S. C. Zilio, "Modelling Ti in-diffusion in LiNbO_3 ", J. Phys.: Condens. Matter, nº 9, pp 357-364, (1997).
54. Referência [11], página 774.
55. John Villadsen and Michael L. Michelsen, "Solution of differential equation models by polynomial approximation", Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, (1978).
56. Elena A. Ostrovskaya and Yuri S. Kivshar, "Nonlinear theory of soliton-induced waveguides", Opt. Lett., Vol. 23, Nº 16, pp 1268-1270, 15 August, (1998).
57. Ref. [15], Cap. (19).
58. J. D. Love, W. M. Henry, W. J. Stewart, R. J. Black, S. Lacroix and F. Gauthier, "Tapered single-mode fibres and devices. Part 1: Adiabaticity criteria", IEE Proceedings-J, Vol. 138, nº 5, pp 343-345, october, (1991).

59. Suzanne Lacroix, Roch Bourbonnais, François Ganthier and Jacques Bures, "Tapered monomode optical fibers: understanding large power transfer", Appl. Opt. , Vol. 25, n° 23, pp 4421-4425, 1 december, (1986).
60. François Gonthier, Jean Lapierre, Christian Veilleux, Suzanne Lacroix and Jacques Bures, "Investigation of power oscillations along tapered monomode fibers", Appl. Opt., Vol. 26, n° 3, pp 444-449, 1° February, (1987).
61. Suzanne Lacroix, Richard J. Black, Christian Veilleux and Jean Lapierre, "Tapered single-mode fibers: external refractive-index dependence", Appl. Opt. , Vol. 25, n° 15, pp 2468-2469, 1 August 1986.
62. Ref. [15], cap. (31).
63. Govind P. Agrawal, "Nonlinear fiber Optics", Academic Press, Second Edition, 1995, Cap. (2).