

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

FLÁVIO DE OLIVEIRA NETO

Hamiltoniano Intensity Dependent na teoria do laser

São Carlos
2016

FLÁVIO DE OLIVEIRA NETO

Hamiltoniano Intensity Dependent na teoria do laser

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef
Moussa

Versão Original

São Carlos
2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Oliveira Neto, Flávio de
Hamiltoniano Intensity Dependent na teoria do
laser / Flávio de Oliveira Neto; orientador Miled
Hassan Youssef Moussa -- São Carlos, 2016.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo, 2016.

1. Informação quântica. 2. Óptica quântica. 3.
Hamiltonianos não lineares. 4. Teoria do Laser. I.
Hassan Youssef Moussa, Miled, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Flávio de Oliveira Neto

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 22/02/2016

Comissão Julgadora

Dr(a). Diogo de Oliveira Soares Pinto

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Vivaldo Leiria Campo Júnior

Instituição: (UFSCar/São Carlos)

Dr(a). Norton Gomes de Almeida

Instituição: (UFG/Goiania)

Aos meus pais Rita de Cássia Melo de Oliveira e Oscar de Oliveira Neto, e minha irmã Mariana F. M. de Oliveira por todo o apoio e compreensão que tiveram para comigo.

AGRADECIMENTOS

Apesar de sempre ter, nem sempre intencionalmente, fugido dos padrões, devo me render nessa hora que chega. Como poderia agradecer primeiramente a alguém, por mais querido que seja, na frente da minha família? Portanto, entrego-me ao clichê de dizer: Obrigado, família. Obrigado mãe, pai, irmã e avô. Por todo o apoio que me forneceram nesses anos todos. Obrigado por sempre respeitar minhas decisões, por mais radicais que possam ter sido em algumas ocasiões, e me dar a segurança necessária para que eu abrisse meu próprio caminho. Certamente não foi fácil para uma mãe que sempre cuidou extremamente bem de seu filho, inclusive melhor do que dela mesma, ouvir que ele quer ser músico, em um país tão cego e surdo para cultura como o nosso. E ainda sim, agradeço por ter me apoiado, ter escutado (aqui devo dizer que algumas vezes forçadamente) meus ensaios (às vezes na madrugada. Já adiantei que não sigo os padrões. Lidem com isso) de violão, guitarra, flauta e recentemente violino. Sou muito grato também pelas vezes em que viajou comigo simplesmente para me ver em apresentações em outras cidades, à noite, enfrentando diversos obstáculos e medos, mas sem fraquejar. Nesse âmbito agradeço também ao meu pai por diversas vezes ter me levado às aulas tão longe de casa. E depois, quando as coisas pareceram “melhorar”, minha decisão de trocar um tão desejado (pela minha mãe pelo menos) curso de engenharia por um curso de física certamente custou alguns anos de minha pobre mãe. E ainda sim ela me apoiou e fez de tudo para que eu me sentisse confortável perante minha escolha (apesar de ter me dito baixinho: “Tem certeza, Neto? Aqui é tão bom!”).

É fundamental também que eu agradeça aos meus professores. Afinal, não é esta uma dissertação de mestrado? Se não fossem meus professores certamente eu não estaria aqui. Em ordem cronológica devo agradecer aos meus professores do ensino médio. Principalmente ao Luís Fernando (Física) por ter me mostrado quão interessante e apaixonante esse mágico ramo da ciência é. Também agradeço à Eunice (Matemática) por também ter despertado em mim a curiosidade e vontade de vencer desafios nessa linguagem tão importante que é a matemática. Também agradeço muito, como todo bom Padawan, ao meu eterno mestre Luiz Conrado (música) pelas lições não apenas musicais, mas também por me ensinar o valor da dedicação, do trabalho duro e da paixão pelo que se faz. E acima de tudo por ter me confirmado que a vida sem música não merece ser vivida. Posteriormente, agradeço ao professor Rodrigo Cuzinatto por ter aberto minha mente quanto à física e ter me encorajado a abandonar a engenharia em busca da realização como físico. Quanto aos professores da casa, meus mais

sinceros agradecimentos ao Reginaldo Napolitano (meu primeiro professor aqui, que esteve sempre disposto a tirar minhas dúvidas e contar as suas piadinhas infames), Marcassa (pelos “café da tarde com Marcassa” pós lab, e os conselhos sobre a carreira), Cleber (por ter me lembrado quando eu estava exausto quão maravilhosa a física é) e, claro, meu orientador, Miled, por todo o apoio, conselhos, paciência e respeito ao longo dos anos de iniciação e mestrado.

Também não deixo de agradecer aos funcionários que sempre me ajudaram nas horas de apuros, como a Edvane da graduação (desde antes mesmo de eu chegar aqui), Ricardo da pós graduação (esse tem paciência comigo, sempre quebrando meus galhos), o César da portaria (sempre simpático) e tantos outros que, infelizmente, minha memória falha em se lembrar agora.

Agradecimentos especiais aos meus colegas que sofreram por anos a fio o malogro da física: De Chico, Guilherme, Hugo, Rafael, Luiz Sato, Lucas, Felipe, Ramisés e Henry. Certamente se não fossem vocês teria sido muito mais difícil superar as “adversidades” do curso. Agradeço às companhias residenciais: Alemão Preto (Fernando Gotardo), Alemão Marrom (Kleber Cardoso) e Alemão Verde (Henry) pelos momentos de camaradagem. Além desses também agradeço aos meus colegas que muito contribuíram nessa dissertação: Hugo, Víctor, Pedrão, Rafael, Felipe e Millena.

Jamais deixaria de agradecer aos meus grandes amigos, que há anos me acompanham em diversas jornadas: Bruninho (Jão Valjão), Diego (Bardo), Logan (Logan), Fernanda (Japa), Neto (Aristides), Vitinho (Silver Tears), Hanna (Mont...), Eduardo (Cabeção), Otávio (Silvio Santos), Jéssica (Jeje) e, é claro, o melhor amigo que alguém pode ter: Luiz Otávio (Sandro). Muitíssimo obrigado a todos vocês pelas incontáveis horas de felicidade, pelas flechas (de fogo!!!) atiradas, pelas partidas de futebol, pelas viagens não planejadas, pelas competições de vídeo game, pelas sessões de R.P.G. e tantas outras atividades que me são extremamente preciosas.

Por fim, agradeço à minha namorada: Bruna Torres, que literalmente foi meu maior achado. Agradeço por todo o carinho, respeito e compreensão. Sou grato por sempre me incentivar em minhas empreitadas, me encorajar em minhas vontades e principalmente por fazer de mim a melhor pessoa que eu posso ser. Saiba que você me inspira muito, que lhe admiro profundamente e que mesmo que eu tivesse cinco vidas diferentes, eu... Bom, você sabe o resto, né?

Este trabalho foi financiado pela CAPES e posteriormente pela CNPQ

"Oh, um grande guerreiro você procura? Guerras não fazem ninguém grande..."

Mestre Yoda, em O Império Contra-Ataca

RESUMO

OLIVEIRA NETO, F. **Hamiltoniano Intensity Dependent na teoria do laser**. 2016. 73 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016

Tem-se como intuito desse projeto a construção e o desenvolvimento de um Hamiltoniano *intensity dependent*, cuja interação entre radiação-matéria dependa do número de fótons que residem dentro da cavidade do laser. O Hamiltoniano de Jaynes Cummings é tradicionalmente conhecido por descrever a interação radiação-matéria, e através de uma modificação efetuada no mesmo, criando um Hamiltoniano não-linear em termos dos operadores de criação e aniquilação, pretende-se obter uma nova distribuição do número de fótons dentro de tal cavidade, bem como uma nova estatística em relação ao modelo usual de laser. Para tal, faz-se uso de um modelo de átomo de dois níveis para a descrição da matéria dentro da cavidade, bem como conhecimentos de informação e óptica quântica para o desenvolvimento e análise dos resultados obtidos, como o fator Q de Mandel, juntamente com aplicações de Hamiltonianos não lineares, necessários para o entendimento do projeto. Finalmente, discute-se as consequências da nova distribuição; suas semelhanças e suas diferenças em relação à tradicional, focando nos papéis dos parâmetros do laser.

Palavras-chave: Informação quântica. Óptica quântica. Hamiltonianos não lineares. Teoria do laser.

ABSTRACT

OLIVEIRA NETO, F.. **Intensity dependent Hamiltonian in the laser theory**. 2016. 73 p.
Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo,
São Carlos, 2016

The purpose of this work is the construction and development of an intensity dependent Hamiltonian, whose interaction between radiation and matter depends on the photon number inside the laser cavity. The Jaynes Cummings's Hamiltonian is traditionally known because of its description of the radiation-matter interaction, and through a modification on this hamiltonian, building a non-linear hamiltonian in terms of the creation and annihilation operators, we intend to obtain a new distribution of the photon number inside the laser cavity, as well as a new statistics regarding the usual laser model. In order to do it, we use two levels atom model to describe the matter inside the cavity, as well as knowledge of quantum optical and quantum information to develop and analyze the obtained results, like the Mandel Q parameter, along with the non-linear hamiltonian applications, necessary to understand this project. Finally, we discuss the consequences of its new distribution, its similarities and differences about the traditionals, focusing on the roles of the laser parameters.

Keywords: Quantum information. Quantum optics. Non-linear Hamiltonians. Laser theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.2.1 -	a) Um átomo é excitado a partir do nível c em direção ao nível acima. A transição ocorre entre os níveis a e b. (b) Um feixe atômico chega na região de excitação onde os estados de Rydberg (micromaser) ou estados excitados (laser) são gerados ao entrar na cavidade (micromaser) ou participando na ação do laser.....	34
Figura 2.2.2 -	Estatística dos fótons no estado estacionário x_n , para os casos abaixo (a), no (b) e acima (c) do limiar.....	45
Figura 3.1 -	O funcionamento dos ganhos e das perdas do sistema, quando observado o número de fótons dentro da cavidade do laser, exibindo qual o responsável por cada perda ou ganho.....	61
Figura 3.2 -	Histograma da estatística de fótons da nova distribuição. Os parâmetros utilizados foram: $A = 2.106Hz$, $B = 4.108Hz$, $C = 10^3 Hz$. Obteve-se o desvio padrão $\sigma = 3,1$ e o fator Q de Mandel $Q = 1,0$	64
Figura 3.3 -	Histograma comparativo das populações dos lasers. Os valores relativos são $AB = 1,6$ e $AC = 5,0$. Aumento do número médio de aproximadamente 20%, Fator Q de Mandel da distribuição original, $Q_m = 1,19$ e da distribuição proposta, $Q_n = 1,01$	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA	21
1.2	SOBRE A TEORIA DA LUZ.....	23
2	REVISÃO SOBRE TÓPICOS RELEVANTES.....	27
2.1	CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MECÂNICA QUÂNTICA.....	27
2.1.1	<i>O formalismo do Operador Densidade.....</i>	<i>27</i>
2.1.2	<i>O Oscilador Harmônico.....</i>	<i>30</i>
2.2	TEORIA QUÂNTICA DO LASER	32
2.2.1	<i>Derivação da Equação Mestra na Teoria Quântica do laser</i>	<i>32</i>
2.2.2	<i>Discussão Heurística da estatística de Injeção.....</i>	<i>34</i>
2.2.3	<i>Equação Mestra para Estatística de Bombeio Generalizada</i>	<i>36</i>
2.2.4	<i>Laser com Bombeio aleatório ($p = 0$).....</i>	<i>39</i>
2.2.5	<i>Estatística dos fótons</i>	<i>41</i>
3	O HAMILTONIANO INTENSITY DEPENDENT	49
3.1	EQUAÇÃO MESTRA PARA O HAMILTONIANO INTENSITY DEPENDENT.....	49
3.2	DISCUSSÃO SOBRE A ESTATÍSTICA DE BOMBEIO	56
3.3	EQUAÇÃO MESTRA PARA BOMBEIO GENERALIZADO	56
3.4	A TEORIA QUÂNTICA DO LASER: BOMBEIO ALEATÓRIO ($p=0$).....	58
3.5	ESTATÍSTICA DOS FÓTONS	59
3.6	COMPARAÇÃO ENTRE AS ESTATÍSTICAS DOS FÓTONS	65
4	OBSERVAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS.....	69
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

1.1 Sobre a Mecânica Quântica

Um dos ramos mais importantes da física, a Mecânica Quântica, teve seus primeiros passos na segunda metade do século XIX, com o problema da radiação de corpo negro, estudado por Gustavo Kirchhoff, sendo posteriormente sugerido por Ludwig Boltzmann que os estados de energia de um sistema físico poderiam ser discretos. Anos depois, surgiu a hipótese de Planck, em 1900, de que toda a energia é irradiada e absorvida na forma de elementos discretos chamados quanta. Segundo Planck, cada um desses quanta tem energia proporcional à frequência ν da radiação eletromagnética emitida ou absorvida: $E = h\nu$. Mas talvez um dos momentos iniciais da Mecânica Quântica mais conhecidos seja o do átomo de Bohr, mesmo com todas as suas limitações e falhas em descrever diversos fenômenos. Nele se evidencia os níveis discretos de energia, assim como as órbitas bem conhecidas (entrando em contradição com o princípio de incerteza de Heisenberg). Apesar da simplicidade inicial, hoje a teoria conta com um alto grau de complexidade em seu formalismo matemático, descrevendo um certo sistema através de uma função de onda $|\psi\rangle = \sum_i C_i |\psi_i\rangle$, onde $C_i = \langle \psi_i | \psi \rangle$ e $|\psi_i\rangle$ é um dos possíveis estados para tal objeto de estudo. Nesse formalismo temos a probabilidade de obter-se o estado ψ_i em uma dada medição igual a $p_i = |C_i|^2$, revelando a natureza probabilística da teoria.

Atualmente a teoria se tornou popular mesmo ao público leigo, principalmente devido ao delicado conceito de superposição coerente de estados distintos de um determinado sistema, tendo como exemplo o gato de Schrödinger. O conceito de que tal sistema pode estar simultaneamente em vários dos possíveis estados é deveras abstrato, e, seguindo a interpretação da Mecânica Quântica de Copenhague, após efetuada a medição a função de onda do sistema colapsa, não permitindo mais diversos estados distintos, mas sim unicamente aquele fornecido pelo ato da medição, alterando a função de onda instantaneamente para refletir tal resultado. Este é um ponto sensível que causa desconforto a qualquer cientista, tendo em vista que um sistema qualquer que está em um estado puro geral, ou seja, uma superposição linear de diferentes estados, tem sua evolução temporal regida pela equação de Schrödinger, que nos fornece um operador de evolução unitário, de forma que o processo de evolução é reversível. Todavia, quando uma medição é realizada, acarretando o colapso da função de onda, não é mais possível retroceder o sistema ao antigo estado de superposição,

perdendo então o caráter probabilístico e assumindo uma natureza determinística. Existem muitas outras interpretações que buscam sanar esse problema, além de outros não mencionados. Da coleção de interpretações da Mecânica Quântica emergem as principais como Interpretação de Muitos Mundos, Interpretação Transacional e Interpretação de Bohm que se diferenciam da Interpretação de Copenhague em diversas formas, tais como a quantidade de universos presentes, a existência de variáveis ocultas (a respeito do caráter probabilístico da Mecânica Quântica não ser fruto da falta de conhecimento de hipotéticas variáveis escondidas), determinismo, colapso da função de onda entre outros tópicos.

Outro produto marcante do formalismo quântico, além da superposição de estados, é que ele possibilita uma descrição não-local de eventos. Esse caráter não-local da Mecânica Quântica tem sido objeto de diversos debates ao longo dos anos. No ano de 1935, Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) (1) argumentam, com embasamento em um “experimento idealizado”, que a Mecânica Quântica seria uma teoria incompleta. Contudo, esse “experimento idealizado” de EPR possibilita, na hipótese de que a Mecânica Quântica fosse uma teoria completa, a presença de fenômenos não-locais. Se considerarmos um par correlacionado de EPR preparado inicialmente num estado do tipo singlete, por exemplo, a não-localidade revela-se através da medida, num dado estado, sobre uma das partículas que constitui o par. Esta medida projeta instantaneamente a outra partícula num estado ortogonal àquele da primeira partícula. Entretanto, na escassez de uma situação experimental palpável para provar a localidade na Mecânica Quântica, esta discussão sobre os fundamentos da teoria permaneceu, por muitos anos, no plano filosófico.

O cenário, todavia, mudou definitivamente quando, em 1964, J.S. Bell formulou o que se conhece hoje como “desigualdades de Bell”, (2) que seriam sempre verdadeiras para qualquer teoria que satisfizesse noções “intuitivamente razoáveis” de realidade e de localidade.

Entre o grande número de resultados derivados ao longo dos anos pela Mecânica Quântica, um dos mais fascinantes é que esta teoria viola as desigualdades de Bell, o que tem se comprovado ao longo das últimas décadas de experimentos, impulsionando o entendimento da natureza quântica.

O estímulo fornecido pelas desigualdades de Bell acarretou nas décadas seguintes o desenvolvimento de diversas técnicas experimentais para o controle minucioso de sistemas quânticos individuais. Por exemplo, métodos para o aprisionamento de um único íon atômico (3) têm permitido a realização de testes da natureza fundamental da Mecânica Quântica —

como por exemplo a não-localidade (4) e a decoerência de estados (5) - além de possibilitar uma plataforma singular para a implementação de operações lógicas quânticas. (6)

Principalmente ao longo das duas últimas décadas, diversos estudos teóricos e implementações experimentais envolvendo processos de interação radiação-matéria em íons aprisionados e eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC), têm sido realizados. Podemos citar como exemplo, a preparação de superposição de estados do tipo “gato de Schrödinger”, da forma $|\psi\rangle \propto (|ae^{i\phi}\rangle + |a^\dagger e^{-i\phi}\rangle)$, com $|a|^2 \approx 10$, em cavidades de alto fator de qualidade (alto-Q) (7) e em íons aprisionados (8), o que tem permitido a investigação da coerência quântica mesoscópica. Ademais, a preparação de uma variedade de estados não-clássicos foi reportada no âmbito da EQC (9-11) e de íons aprisionados. (12-13) A geração e a detecção de estados de Fock do campo de radiação foram demonstrados experimentalmente (14) e as oscilações de Rabi de átomos em estados circulares de Rydberg foram medidas, (15) revelando a natureza quântica do campo de radiação. (16)

Apesar de ainda ser uma teoria em andamento de formulação, sujeita à eventuais correções e novas interpretações, o sucesso da Mecânica Quântica certamente reside no seu êxito em explicar os mais diversos fenômenos de forma satisfatória, bem como a sua estrondosa gama de aplicações, fazendo parte desde campos de estudo microscópicos como partículas elementares até macroscópicos como supercondutividade, entre tantas outras áreas de conhecimento que são adicionadas a cada dia. Podemos considerar também que houve um grande salto tecnológico devido à conquista da computação quântica, que utiliza estados de superposição coerente para a construção de seu bit quântico, ou q-bit, que desta forma consegue processar mais informação, maximizando assim seu desempenho.

1.2 Sobre a Teoria da Luz

A natureza da luz tem sido discutida há milênios, e por muito tempo foi causadora de discussões calorosas entre cientistas contemporâneos. As primeiras ideias atomísticas surgiram na Grécia antiga, sugeridas pelo filósofo Lucrecio, no entanto a grande credibilidade do comportamento corpuscular da luz se dá devido ao famoso físico inglês Isaac Newton, cujo seguidores deram continuidade ao seu desenvolvimento a partir do século XVIII. Todavia, embora a competência e reputação de Newton fossem quase inquestionáveis, ainda sim seu trabalho sobre a natureza da luz sofreu diversas críticas de cientistas de renome, tais como Robert Hooke e Christiaan Huygens, que possuíam ideias opostas, acreditando no comportamento ondulatório da luz, sendo motivados, por exemplo, pelo fenômeno da

difração. Posteriormente foram realizados experimentos sobre interferência e difração, por Thomas Young e Augustin Fresnel, que demonstraram a existência de fenômenos ópticos, que eram incompatíveis com a teoria corpuscular da luz, sendo possíveis apenas através da teoria ondulatória. As novas descobertas continuaram a desbancar a teoria corpuscular, como a descoberta de J. B. L. Foucault, no século XIX, de que a luz se deslocava mais rápido no ar do que na água, o que contrariava a teoria corpuscular de Newton, que afirmava que a luz deveria ter uma velocidade maior na água do que no ar. Aos poucos a teoria corpuscular foi sendo rejeitada devido ao aperfeiçoamento da teoria ondulatória de Young e Fresnel.

É indubitavelmente digno de se notar a beleza contida no que se seguiu. Até então, a maior parte do conhecimento científico era empírico. Mesmo cientistas incontestavelmente competentes, como Michael Faraday, se apoiavam mais em seus instintos do que em uma sólida base matemática, e ainda assim auferiram realizar excitantes descobertas e até mesmo a compreensão de diversos fenômenos. Não obstante, “o melhor ainda estava por vir”. E veio justamente através de um jovem cientista, inspirado justamente pelo trabalho de Faraday: James Clerk Maxwell. O físico escocês foi capaz de relacionar os fenômenos elétricos aos magnéticos, que eram separados na época, fazendo uso de um pequeno conjunto de equações diferenciais. O que antes eram 20 equações com 20 variáveis diferentes, Maxwell, utilizando-se de um erudito conhecimento matemático, com sucesso formalizou toda a informação em apenas 4 equações; as conhecidas equações de Maxwell, que não apenas abrigavam sem perda de generalidade a bagagem anterior, mas também indicaram a existência de ondas feitas de campos elétricos e magnéticos oscilantes que viajam no espaço vazio à uma velocidade bem conhecida na época, a velocidade da luz. Em 1864 Maxwell ainda escreveu: "Os resultados apontam que luz e magnetismo são produtos de mesma origem, e que luz é um distúrbio eletromagnético propagado através do campo, regido pelas leis do eletromagnetismo".

Como resultado de tantos avanços por parte da teoria ondulatória, a teoria corpuscular foi quase abandonada, indicando que a natureza da luz era puramente ondulatória. Todavia, ao tentar incluir a emissão fotoelétrica, a então aclamada teoria ondulatória se mostrou contraditória, incapaz de explicar tal fenômeno. Entrou em cena, então, Albert Einstein, que fazendo uso das ideias de quantização de Max Planck, obtendo êxito em demonstrar que um feixe de luz é constituído de pequenos pacotes de energia, os fótons, como conhecemos hoje, foi capaz de explanar o fenômeno da emissão fotoelétrica. Desta maneira, o caráter corpuscular da luz ressurgiu, indicando uma dualidade na natureza da luz que perdura até hoje: A dualidade onda-partícula.

Anos depois, em 1953, Charles Hard Townes, James P. Gordon e Herbert J. Zeiger produziam o maser, um dispositivo similar ao laser, que produz microondas, em vez de luz visível, sendo foco de estudo de alguns anos depois. (17) No entanto, o maser de Townes não tinha capacidade de emitir as ondas de forma contínua, que só foi ser possível uma década depois, contribuição de Nikolai Basov e Aleksander Prokhorov, da União Soviética, ganhadores do Prêmio Nobel em 1964, que usaram duas fontes de energia com níveis diferentes para resolver o problema da emissão contínua. O termo LASER só foi introduzido no artigo: *The LASER, Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. (18) Hoje em dia, as áreas envolvidas, como fotônica e óptica, são umas das que mais contém possibilidades de aplicação tecnológica, atuando em campos que variam desde medicina em tratamento de doenças, instrumento de cauterização e/ou corte até ramos industriais, como gravação/leitura de dados e ferramenta de molde.

Apesar de suas incontáveis aplicações práticas, a teoria do laser continua sendo desenvolvida por diversos autores, como o estudo do laser de um átomo, (19-21) a fim de se encontrar e desenvolver novos estados da luz e/ou melhorias na intensidade, largura de linha etc.

2 REVISÃO SOBRE TÓPICOS RELEVANTES

2.1 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MECÂNICA QUÂNTICA

A seguir faremos uma revisão básica sobre alguns tópicos relevantes para este trabalho, de forma a deixar o leitor mais familiarizado, embora não aprofundado, com algumas técnicas e/ou conceitos que são fundamentais para o entendimento deste trabalho.

2.1.1 O formalismo do Operador Densidade

A teoria quântica é capaz de prever os resultados de uma medida e valores médios de observáveis a partir do conhecimento do estado em que o sistema de interesse se encontra. De maneira conveniente, escrevemos $|\psi\rangle$ utilizando a base de auto-estados comum aos observáveis que particularmente estamos interessados:

$$|\psi\rangle = \sum_k C_k |\phi_k\rangle \quad \langle\phi_j|\phi_k\rangle = \delta_{j,k} \quad (2.1.1)$$

Uma vez que possamos repetidas vezes preparar o sistema de interesse em qualquer superposição coerente de tais auto-estados, obteremos os respectivos auto-valores com probabilidade de ocorrência $|C_k|^2$. Tais características constituem a máxima informação possível acerca de um sistema quântico, o que faz com que estados como o da equação (2.1.1) sejam conhecidos como puros e possuam dinâmica governada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.1.2)$$

onde \mathcal{H} é o Hamiltoniano do sistema. (22)

Em sistemas quânticos abertos não há garantia de que as variáveis envolvidas durante a preparação do vetor de estado comutam entre si, o que conseqüentemente provoca incerteza sobre a medida dos observáveis de interesse. (23-24) Para caracterizar esta informação incompleta, associamos probabilidades p_n à estados puros $|\psi_n\rangle$, que são normalizados mas não necessariamente ortogonais, constituindo assim um ensemble de estados quânticos. Caso deseja-se calcular o valor esperado de um certo observável \mathcal{O} , é necessário ponderar a contribuição de cada um dos estados do ensemble:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | \mathcal{O} | \psi_n \rangle \quad \sum_n p_n = 1 \quad (2.1.3)$$

Quando um sistema físico não pode ser descrito através de um único $|\psi\rangle$, dizemos que o mesmo se encontra em uma mistura estatística de estados quânticos. (25)

Para uma descrição completa e coerente com a condição estatística de alguns sistemas quânticos, utilizamos o operador densidade (26):

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2.1.4)$$

Note que o estado puro é um caso particular, onde apenas um micro-estado possui probabilidade não nula. A escolha arbitrária de uma base nos permite dar ao operador densidade uma representação matricial em $\{|\phi_k\rangle\}$:

$$\langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle = \sum_n p_n C_i^{(n)} C_j^{*(n)} \quad (2.1.5)$$

onde os elementos diagonais ($i = j$) são positivos definidos e recebem o nome de populações. Esses elementos são interpretados como a probabilidade do sistema ser encontrado em um dos auto-estados do conjunto de observáveis que define a base. A

assinatura quântica da superposição de estados se apresenta por meio dos elementos não-diagonais ($i \neq j$), ou coerências. (27) Da equação (2.1.5) percebe-se claramente que ρ é hermitiano e que a probabilidade é conservada, ou seja $Tr\rho = 1$. Esta nova ferramenta traz consigo toda a informação sobre o ensemble de estados puros, facilitando o cálculo do valor esperado do observável \mathcal{O} :

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Tr\{\mathcal{O}\rho\} \quad (2.1.6)$$

Uma mistura estatística é diferente de uma superposição de estados, que por si só gera um estado puro. A medida de pureza mais utilizada para distinguir entre estas duas situações é definida através de $Tr\rho^2$:

$$\frac{1}{d} \leq Tr\rho^2 \leq 1 \quad (2.1.7)$$

onde d é a dimensão do espaço de Hilbert do sistema de interesse. Estados puros possuem naturalmente $Tr\rho^2 = 1$.

Se cada estado do ensemble evolui temporalmente segundo a equação (2.1.2), então teremos a seguinte equação dinâmica para o operador densidade:

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [\mathcal{H}, \rho(t)] \quad (2.1.8)$$

Em especial para Hamiltonianos independentes do tempo, a equação de Liouville-von Neumann (2.1.8) é solucionada por:

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0), \quad U(t, t_0) = e^{-i\mathcal{H}(t-t_0)/\hbar} \quad (2.1.9)$$

Onde $U(t, t_0)$ é o operador de evolução temporal e o instante arbitrário t_0 determina a condição inicial $U(t_0, t_0) = I$. Visto que a probabilidade deve ser conservada em qualquer

instante de tempo, chega-se à conclusão de que o sistema possui nesse caso dinâmica unitária: $U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = I$.

2.1.2 O Oscilador Harmônico

Sob o ponto de vista da formulação clássica do problema, um oscilador harmônico trata-se da solução aproximada para a dinâmica de uma partícula de massa m submetida à um potencial unidimensional $V(x)$ e suficientemente próxima à um de seus pontos de equilíbrio estável. Fixadas as suas condições iniciais de posição e momento, a partícula executará movimento harmônico simples em torno do equilíbrio, limitando-se aos pontos de retorno permitidos. O oscilador harmônico é frequentemente utilizado para modelar sistemas físicos que sob certas condições podem ser descritos por um Hamiltoniano da forma:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0 x^2}{2} \quad (2.1.10)$$

Onde ω_0 é a frequência natural de oscilação.

No contexto da Mecânica Quântica, costuma-se tratar o Hamiltoniano acima utilizando operadores não-hermitianos definidos em termos dos observáveis posição e momento (22):

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega_0}} p \right] \quad (2.1.11)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega_0}} p \right]$$

Lembrando que tais observáveis obedecem a regra de comutação $[x, p] = i\hbar$, reescrevemos a equação (2.1.10) de acordo com as definições acima de a e a^\dagger :

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (2.1.12)$$

Os estados que formam a base diagonal à \mathcal{H} são chamados de estados de número:

$$\{|n\rangle\}, \quad \langle m|n\rangle = \delta_{m,n} \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (2.1.13)$$

cujo nome provém da interpretação física do espectro de auto-valores de $N = a^\dagger a$ como sendo o número de excitações no sistema. (28) Logo, N também é conhecido como operador número. É possível mostrar que formam uma base completa:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \quad (2.1.14)$$

e que $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ também são auto-estados de N com seus respectivos auto-valores diminuído e aumentado. Tal resultado implica em

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.1.15)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Logo a e a^\dagger recebem os nomes de operador de destruição e criação. (29-30)

2.2 TEORIA QUÂNTICA DO LASER

Adiante faremos a demonstração da obtenção da equação mestra do operador densidade sob o contexto da teoria quântica do laser. Para descrever a interação entre o campo eletromagnético e átomos, a descrição Semi Clássica, que considera o comportamento quântico dos átomos, no entanto, prevalece a representação clássica do campo eletromagnético, pode ser apontada como suficiente para explicar a maior parte dos fenômenos clássicos. No entanto, sempre que se faz necessário considerar flutuações quânticas, como quando se deseja calcular largura de linha ou estatística de fótons, então se torna imprescindível considerar o campo eletromagnético totalmente quantizado.

2.2.1 Derivação da Equação Mestra na Teoria Quântica do laser

Dentro da cavidade do laser ocorre a interação entre os átomos do bombeio e o campo eletromagnético sobre elas irradiado. Portanto, é vital possuímos um mecanismo que nos descreva a interação entre o campo (radiação) e os átomos (matéria). O meio através do qual isso é possível é o Hamiltoniano de interação radiação-matéria, conhecido como Hamiltoniano de Jaynes Cummings:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \hbar\Omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \quad (2.2.1)$$

Para a obtenção de tal Hamiltoniano, fez-se uso da aproximação de dipolo e ondas girantes.

É conveniente dividirmos o Hamiltoniano em dois termos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \quad (2.2.2)$$

Onde os termos divididos são:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_z + \hbar\Omega a^\dagger a, \quad \mathcal{H}_2 = \frac{\hbar\Delta\Omega}{2}\sigma_z + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \quad (2.2.3)$$

Onde temos a dissintonia:

$$\Delta\Omega = \omega - \Omega \quad (2.2.4)$$

É fácil perceber que tal divisão do Hamiltoniano tem comutador nulo, $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] = 0$, e ao mudarmos para a representação de interação, a dinâmica do sistema será governada pelo operador $\mathcal{H}_2 = V$. O operador de evolução temporal pode ser calculado como:

$$U(\tau) = \exp\left(-i\frac{V\tau}{\hbar}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-i\tau}{\hbar}\right)^n}{n!} V^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\tau)^n}{n!} \begin{bmatrix} \frac{\Delta\Omega}{2} & ga \\ ga^\dagger & -\frac{\Delta\Omega}{2} \end{bmatrix}^n \quad (2.2.5)$$

Trabalhando com potências da matriz pertencente à equação (2.2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\Delta\Omega}{2} & ga \\ ga^\dagger & -\frac{\Delta\Omega}{2} \end{bmatrix}^{2m} &= \begin{bmatrix} (\varphi + g^2)^m & 0 \\ 0 & (\varphi)^m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\Delta\Omega}{2} & ga \\ ga^\dagger & -\frac{\Delta\Omega}{2} \end{bmatrix}^{2m+1} &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta\Omega}{2} (\varphi + g^2)^m & g(\varphi + g^2)^m a \\ ga^\dagger (\varphi + g^2)^m & -\frac{\Delta\Omega}{2} (\varphi)^m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Onde $\varphi \equiv g^2 a^\dagger a + \left(\frac{\Delta\Omega}{2}\right)^2$.

Dáí chegamos a:

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau\sqrt{\varphi + g^2}) - \frac{i\Delta\Omega \sin(\tau\sqrt{\varphi + g^2})}{2\sqrt{\varphi + g^2}} & -ig \frac{\sin(\tau\sqrt{\varphi + g^2})a}{\sqrt{\varphi + g^2}} \\ -iga^\dagger \frac{\sin(\tau\sqrt{\varphi + g^2})}{\sqrt{\varphi + g^2}} & \cos(\tau\sqrt{\varphi}) + \frac{i\Delta\Omega \sin(\tau\sqrt{\varphi})}{2\sqrt{\varphi}} \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

Se desejarmos evoluir o operador densidade, ρ , de um tempo inicial até um intervalo de tempo t , então devemos fazer $\rho(\tau) = U(\tau)\rho(0)U^\dagger(\tau) = U(\tau)\rho_f(0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^\dagger(\tau)$, onde já supomos que o átomo está inicialmente no estado excitado. Em consequente, verificamos que o operador densidade do campo eletromagnético pode ser descrito como:

$$\rho_f(\tau) = \cos(\lambda\tau)\rho_f\cos(\lambda\tau) + g^2a^\dagger\left[\frac{\sin\lambda\tau}{\lambda}\right]\rho_f(0)\left[\frac{\sin\lambda\tau}{\lambda}\right]a \equiv M(\tau)\rho_f(0) \quad (2.2.8)$$

Onde $\lambda \equiv \sqrt{a^\dagger a + 1}$. M é o super-operador atuante no operador densidade.

2.2.2 Discussão Heurística da estatística de Injeção

Para prosseguir na obtenção da nossa equação mestra, devemos agora estudar a injeção de átomos na cavidade do laser. Para tal, vamos supor que um fluxo denso de átomos passa por uma região de excitação, e cada um desses átomos que compõe o fluxo tem uma probabilidade p de ser excitado, abandonando o estado fundamental, aqui denotado por c , alcançando o estado excitado, a (como indicado na figura 1).

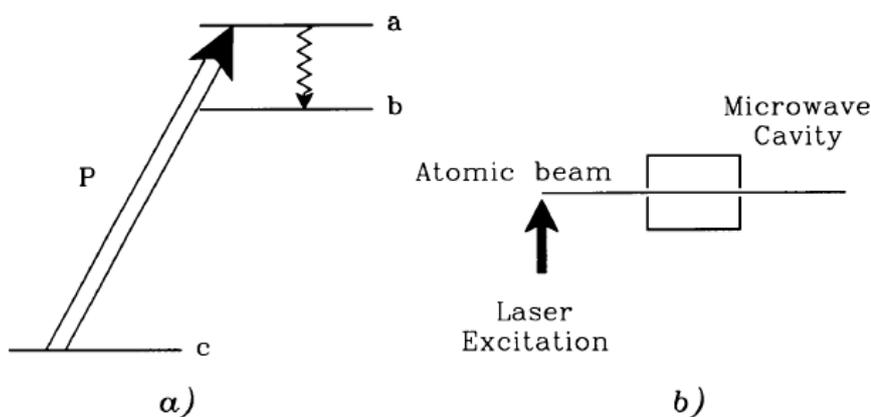


Figura 2.2. 1- (a) Um átomo é excitado a partir do nível c em direção ao nível a acima. A transição ocorre entre os níveis a e b . (b) Um feixe atômico chega na região de excitação onde os estados de Rydberg (micromaser) ou estados excitados (laser) são gerados ao entrar na cavidade (micromaser) ou participando na ação do laser.

Fonte: ORZAG (31)

Devemos agora supor que os níveis a e b estão envolvidos na transição do laser ou maser, e que o nível b permanece não-populado. Supomos também que o feixe tem uma distribuição regular antes de adentrar na região de excitação, de forma que o número K de átomos que atravessam essa região, durante um intervalo de tempo Δt , é dado por

$$K = R\Delta t \quad (2.2.9)$$

Onde R é a taxa de injeção e Δt é muito maior do que o intervalo de tempo entre dois átomos consecutivos adentrarem na região.

Esse modelo pode ainda descrever um sistema conhecido como micromaser, no qual temos um feixe de átomos de Rydberg em altos níveis de excitação atravessando uma cavidade de micro-ondas de alto fator de qualidade, com um par de níveis de energia ressonantes com o campo de micro-onda dentro da cavidade. Se supormos que τ representa o tempo de interação de cada átomo com o campo da cavidade, podemos, então, utilizar o mesmo modelo para descrever o processo de excitação de um laser, no qual τ pode ser relacionado com o tempo de vida do átomo nos níveis de laser.

Antigamente, era comum a negligência de estatística de bombeio. No entanto, experimentos posteriores em micromasers e lasers mostraram que ao controlar o ruído do bombeio é possível se obter uma considerável redução na flutuação do número de fótons. A probabilidade de k átomos serem excitados num intervalo de tempo Δt é dada por:

$$P(k, K) = \binom{K}{k} p^k (1-p)^{K-k} \quad (2.2.10)$$

O número médio de átomos excitados e a variância são dadas por:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{k=K} k P(k, K) = pK = r\Delta t, \quad (2.2.11)$$

$$\overline{\Delta k^2} = (1-p)\bar{k}$$

Com $r \equiv Rp$

2.2.3 Equação Mestra para Estatística de Bombeio Generalizada

Seja o tempo de interação entre o átomo e o campo ser denotado como τ . Além disso, vamos assumir que o j -ésimo átomo é injetado num tempo t_j . Então o campo, após a interação com o j -ésimo átomo, pode ser escrito como:

$$\rho(t_j + \tau) = M(\tau)\rho(t_j) \quad (2.2.12)$$

Agora, se k átomos forem excitados, temos:

$$p^{(k)}(t) = M^k(\tau)\rho(0) \quad (2.2.13)$$

Obviamente, se não conhecemos o número de átomos, mas apenas probabilisticamente pela (2.2.10), então nós temos:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} p^k (1-p)^{K-k} M^k(\tau)\rho(0) \\ &= [1 + p(M-1)]^K \rho(0) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Com $K = Rt$.

Diferenciando a equação (2.2.14) em respeito ao tempo, obtemos:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{r}{p} \ln[1 + p(M-1)]\rho(t) + L\rho(t) \quad (2.2.15)$$

A equação (2.2.15) é nossa equação mestra generalizada. Nela foi adicionado o termo de perda da cavidade, denotado por $L\rho(t)$. Esse termo também está presente na teoria quântica de dissipação, onde o oscilador é nosso único campo interagente com o reservatório, à temperatura zero.

Portanto,

$$L\rho(t) = \frac{C}{2}(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a), \quad (2.2.16)$$

$$C = \frac{1}{t_{cav}} = \frac{\Omega}{Q}$$

Onde Q é o fator de qualidade e t_{cav} é o tempo de vida do fóton dentro da cavidade.

Se a média do número de fótons é suficientemente grande, e a distribuição é estreita, é possível expandir a equação (2.2.15) e obter:

$$\frac{d\rho}{dt} = r(M-1)\rho(t) - \frac{1}{2}rp(M-1)^2\rho(t) + L\rho(t) \quad (2.2.17)$$

Fazendo uso da expressão do super-operador, acima definido na equação (2.2.8), então temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} = & r(1+p) \left\{ \cos(\lambda\tau) \rho_f \cos(\lambda\tau) + g^2 a^\dagger \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] \rho_f \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] a \right\} \quad (2.2.18) \\
& - r \left(1 + \frac{p}{2} \right) \rho \\
& - \frac{rp}{2} \left\{ \cos^2(\lambda\tau) \rho_f \cos^2(\lambda\tau) \right. \\
& + g^2 \cos(\lambda\tau) a^\dagger \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] \rho_f \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] a \cos(\lambda\tau) \\
& + g^2 a^\dagger \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] \cos(\lambda\tau) \rho_f \cos(\lambda\tau) \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] a \\
& \left. + g^4 a^\dagger \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] a^\dagger \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] \rho_f \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] a \left[\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} \right] a \right\} \\
& + L\rho
\end{aligned}$$

A partir da expressão acima, é possível calcular os elementos de matriz de ρ , ρ_{nm} e $\rho_{n,n+1}$ que irão nos fornecer a estatística dos fótons e também a largura de linha do laser.

Um olhar atento revela que existem dois casos extremos: $p = 0$, com $pR = cte$, o que faz com que a distribuição de Bernoulli se transforme em uma distribuição Poissoniana, correspondendo ao caso do bombeio randômico, e também a teoria do laser de Scully-Lamb, onde $p = 1$ corresponde ao bombeio regular de átomos.

A equação mestra generalizada (11.15) foi obtida a partir de pequenas aproximações. Primeiramente aproximamos $\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \approx \frac{d\rho}{dt}$, onde durante o intervalo de tempo Δt haviam muitos átomos na região de interação, o que é normalmente uma boa aproximação para lasers, mas pode desencadear problemas quando temos poucos fótons, como em um micromaser. A outra aproximação é que a perda é independente do ganho, o que pode inclusive levar a resultados equivocados quando $p \neq 0$.

2.2.4 Laser com Bombeio aleatório ($p = 0$)

No caso em que não existe dissintonia, o operador de evolução temporal (2.2.7) se torna

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(g\tau\sqrt{aa^\dagger}) & -i \left[\frac{\sin(g\tau\sqrt{aa^\dagger})a}{\sqrt{aa^\dagger}} \right] \\ -ia^\dagger \left[\frac{\sin(g\tau\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} \right] & \cos(g\tau\sqrt{aa^\dagger}) \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

E é possível escrever:

$$\begin{aligned} \rho_f(t + \tau) = & \cos(g\tau\sqrt{aa^\dagger}) \rho_f(t) \cos(g\tau\sqrt{aa^\dagger}) \\ & + a^\dagger \left[\frac{\sin(g\tau\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} \right] \rho(t) \left[\frac{\sin(g\tau\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} \right] a \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Para termos um modelo realístico de um laser, devemos assumir que os átomos possuem uma distribuição do tempo em que eles passam dentro da cavidade. No caso do modelo de átomo de dois níveis, como na própria teoria, os dois níveis decaem com uma taxa γ , e a distribuição no tempo é:

$$P(\tau) = \gamma e^{-\gamma\tau} \quad (2.2.21)$$

Uma vez em que $\Delta t \gg \langle \tau \rangle$, podemos então escrever

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho_f}{dt} \right)_{\text{ganho}} & \approx \frac{\rho_f(t + \Delta t) - \rho_f(t)}{\Delta t} = r[\rho_f(t + \Delta t) - \rho_f(t)] \\ & = -r\rho_f(t) + r \int_0^{\Delta t \rightarrow \infty} d\tau e^{-\gamma\tau} \left(\begin{aligned} & \cos(g\tau\sqrt{aa^\dagger}) \rho_f(t) \cos(g\tau\sqrt{aa^\dagger}) \\ & + a^\dagger \left[\frac{\sin(g\tau\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} \right] \rho(t) \left[\frac{\sin(g\tau\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} \right] a \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Para um laser comum, os argumentos do seno e cosseno são pequenos, de forma que é possível expandi-los (até quarta potência em g)

$$\cos(g\tau\sqrt{aa^\dagger}) \approx 1 - \frac{g^2\tau^2}{2}aa^\dagger + \frac{1}{24}g^4\tau^4aa^\dagger aa^\dagger \dots,$$

$$\frac{\sin(g\tau\sqrt{aa^\dagger})}{\sqrt{aa^\dagger}} \approx g\tau - \frac{(g\tau)^3aa^\dagger}{6} \dots$$

E então utilizar tais expansões na equação (2.2.22), chegando em:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_f(t)}{dt} = & -\frac{\mathcal{A}}{2} \left\{ aa^\dagger \left[\rho_f - \left(\frac{g}{\gamma}\right)^2 (aa^\dagger \rho_f + 3\rho_f aa^\dagger) \right] \right. \\ & + \left[\rho_f - \left(\frac{g}{\gamma}\right)^2 (\rho_f aa^\dagger + 3aa^\dagger \rho_f) \right] aa^\dagger \\ & \left. - 2a^\dagger \left[\rho_f - 2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2 (aa^\dagger \rho_f + \rho_f aa^\dagger) \right] a \right\} \\ & - \frac{C}{2} (aa^\dagger \rho_f + \rho_f a^\dagger a - 2a\rho_f a^\dagger) \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \frac{2rg^2}{\gamma^2} \\ B &\equiv \frac{4rg^2}{\gamma^2} \mathcal{A} \\ C &\equiv \frac{\Omega}{Q} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Através das integrais

$$\int d\tau \gamma \tau^2 e^{-\gamma\tau} = \frac{2}{\gamma^2}$$

$$\int d\tau \gamma \tau^4 e^{-\gamma\tau} = \frac{24}{\gamma^4}$$

Sendo o coeficiente \mathcal{A} o ganho, B a saturação e C a perda da cavidade.

2.2.5 Estatística dos fótons

Voltando à teoria não linear, faremos uso agora da equação (2.2.22), e seguir calculando os elementos de matriz, e calcular as integrais através de

$$\gamma \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} \begin{pmatrix} \cos(g\tau\sqrt{n+1}) \cos(g\tau\sqrt{m+1}) \\ \sin(g\tau\sqrt{n+1}) \sin(g\tau\sqrt{m+1}) \end{pmatrix} \quad (2.2.25)$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1+2(g/\gamma)^2(n+m+2) \\ 2(g/\gamma)^2\sqrt{(n+1)(m+1)} \end{pmatrix}}{1+2\left(g/\gamma\right)^2(n+m+2)+\left(g/\gamma\right)^4(n-m)^2}$$

Obtendo, então:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nm} = & -\frac{\mathcal{N}'_{nm}\mathcal{A}}{1+\mathcal{N}_{nm}\frac{B}{\mathcal{A}}}\rho_{nm} + \frac{\sqrt{nm}\mathcal{A}}{1+\mathcal{N}_{n-1,m-1}\frac{B}{\mathcal{A}}}\rho_{n-1,m-1} \\ & -\frac{C}{2}(n+m)\rho_{nm} + C\sqrt{(n+1)(m+1)}\rho_{n+1,m+1} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Onde definimos

$$\mathcal{N}'_{nm} = \frac{1}{2}(n+m+2) + \frac{\frac{1}{8}(n-m)^2 B}{\mathcal{A}} \quad (2.2.27)$$

$$\mathcal{N}_{nm} = \frac{1}{2}(n+m+2) + \frac{\frac{1}{16}(n-m)^2 B}{\mathcal{A}}$$

Onde incluímos também o termo de perda da cavidade. Esse modelo é conhecido como a teoria do laser de Scully-Lamb [4]

Para a estatística dos fótons, nós observamos os elementos da diagonal principal da equação (2.2.27), contemplando, então:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nm} = & -\frac{\mathcal{A}(n+1)}{1+(n+1)\frac{B}{\mathcal{A}}}\rho_{nm} + \frac{n\mathcal{A}}{1+n\frac{B}{\mathcal{A}}}\rho_{n-1,m-1} - \frac{C}{2}(n)\rho_{nm} \\ & + C(n+1)\rho_{n+1,m+1} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

O termo $\left[\frac{\mathcal{A}(n+1)}{1+(n+1)\frac{B}{\mathcal{A}}}\right]\rho_{nm}$ representa o ganho do elemento $\rho_{n+1,m+1}$, devido à emissão causada pela presença de átomos, e o termo $C(n+1)\rho_{n+1,m+1}$ designa a perda deste nível.

No estado estacionário $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nm} = 0$, e temos

$$\rho_{n+1,m+1} = \frac{\frac{\mathcal{A}}{C}}{1+(n+1)\frac{B}{\mathcal{A}}}\rho_{nm} \quad (2.2.29)$$

Cuja solução é

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{kB}{\mathcal{A}}\right)^{-1} \quad (2.2.30)$$

Quando temos $\frac{\mathcal{A}}{C} < 1$, o laser está abaixo do limiar, uma vez que ρ_{nn} está caindo monotonamente com n , e a condição de normalização nos fornece: $\left(\frac{k_B}{\mathcal{A}} \ll 1\right)$

$$\sum_n \rho_{nn} = 1 = \rho_{00} \sum_n \left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n = \frac{\rho_{00}}{1 - \frac{\mathcal{A}}{C}} \quad (2.2.31)$$

E ao definirmos $\frac{\mathcal{A}}{C} = e^{(-\hbar\Omega/k_bT)}$, obtemos:

$$\rho_{nn} = \left(1 - \frac{\mathcal{A}}{C}\right) \left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n \quad (2.2.32)$$

Se torna a estatística de Bose-Einstein de radiação de corpo negro. Ou seja, o laser abaixo do limiar se comporta como uma lâmpada incandescente, à uma certa temperatura.

Para o caso em que $\mathcal{A}/C > 1$, nós usamos a equação exata (2.2.29) e obtemos:

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \left(\frac{\mathcal{A}}{C}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k_B}{\mathcal{A}}\right)^{-1} = \rho_{00} \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{\mathcal{A}}{B} + k\right)^{-1} \quad (2.2.33)$$

Assim podemos calcular o número de fótons médio, como se segue:

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle &= \sum_n n \rho_{nn} = \rho_{00} \sum_n \left(n - \frac{\mathcal{A}}{B} + \frac{\mathcal{A}}{B} \right) \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC} \right)^n \prod_{k=1}^{k=n} \left[\frac{1}{\left(k + \frac{\mathcal{A}}{B} \right)} \right] & (2.2.34) \\
&= \rho_{00} \frac{\mathcal{A}^2}{BC} \sum_n \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC} \right)^{n-1} \prod_{k=1}^{k=n-1} \left[\frac{1}{\left(k + \frac{\mathcal{A}}{B} \right)} \right] - \frac{\mathcal{A}}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{nn} \\
&= \frac{\mathcal{A}^2}{BC} - \frac{\mathcal{A}}{B} (1 - \rho_{00}) = \frac{\mathcal{A}}{B} \left(\frac{\mathcal{A}}{C} - 1 \right) + \frac{\mathcal{A}}{B} \rho_{00}
\end{aligned}$$

Muito além do limiar, vemos que $\langle n \rangle \rightarrow \frac{\mathcal{A}^2}{BC}$ e a estatística de fótons fica:

$$\rho_{nn} \approx \frac{e^{-\langle n \rangle} (\langle n \rangle)^n}{n!} \quad (2.2.35)$$

Que corresponde à estatística de Poisson.

A mudança na estatística de fótons abaixo e acima do limiar é ilustrada através da figura 2.2.2

Nota-se que para $\frac{B}{\mathcal{A}} \ll 1$, $\rho_{nn} = \rho_{00} \prod_{k=1}^n \left[\frac{\mathcal{A}^2}{BC \left(\frac{\mathcal{A}}{B} + k \right)} \right]$

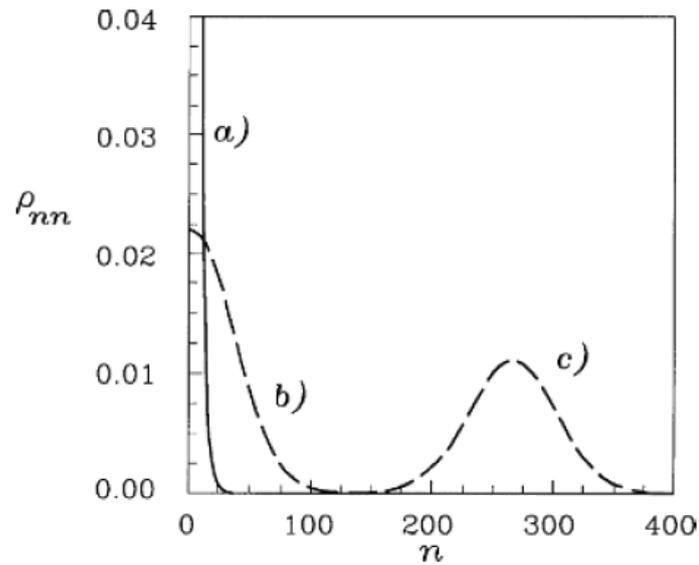


Figura 2.2. 2 - Estatística dos fótons no estado estacionário $x n$, para os casos abaixo (a), no (b) e acima (c) do limiar.

Fonte: ORZAG (31)

Ainda é possível calcular a solução exata de ρ_{nn} , como se segue:

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{kB}{\mathcal{A}}\right)^{-1} \quad (2.2.33)$$

Abrindo o produtório, temos a seguinte equação:

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \frac{\mathcal{A}/\mathcal{C}}{1 + B/\mathcal{A}} \cdot \frac{\mathcal{A}/\mathcal{C}}{1 + 2B/\mathcal{A}} \cdot \frac{\mathcal{A}/\mathcal{C}}{1 + 3B/\mathcal{A}} \dots \quad (2.2.36)$$

Multiplicando a equação (2.2.36) pelo parâmetro do ganho, \mathcal{A} , e posteriormente dividindo pelo parâmetro de saturação, B , chegamos em

$$\begin{aligned}
\rho_{nn} &= \rho_{00} \frac{\mathcal{A}^2/C}{\mathcal{A} + B} \cdot \frac{\mathcal{A}^2/C}{\mathcal{A} + 2B} \cdot \frac{\mathcal{A}^2/C}{\mathcal{A} + 3B} \cdots \\
&= \rho_{00} \frac{\mathcal{A}^2/C}{1 + \mathcal{A}/B} \cdot \frac{\mathcal{A}^2/C}{2 + \mathcal{A}/B} \cdot \frac{\mathcal{A}^2/C}{3 + \mathcal{A}/B} = \rho_{00} \prod_{k=1}^n \frac{\left(\mathcal{A}^2/BC\right)^n}{k + \mathcal{A}/B}
\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Finalmente obtemos a expressão fechada para ρ_{nn} :

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \frac{(\mathcal{A}/B)! (\mathcal{A}^2/BC)^n}{(n + \mathcal{A}/B)!} \tag{2.2.38}$$

Podemos ainda calcular o fator Q de Mandel, como se segue:

$$Q_f = \frac{(\Delta n)^2}{\langle n \rangle} = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1 \tag{2.2.39}$$

Para tal, é necessário calcular o termo $\langle n^2 \rangle$:

$$\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2 + \mathcal{A}^2/BC \tag{2.2.40}$$

Logo, fazendo-se uso da equação (2.2.34):

$$Q_f = \frac{\mathcal{A}^2}{BC \langle n \rangle} - 1 = \frac{\mathcal{A}^2}{BC \left[\mathcal{A}/C \left(\frac{\mathcal{A} - C}{B} \right) + \frac{\mathcal{A}}{B} \rho_{00} \right]} - 1 = \frac{C - C\rho_{00}}{(\mathcal{A} - C) + C\rho_{00}} \tag{2.2.41}$$

Finalmente, chegamos ao resultado

$$Q_f = \frac{C(1 - \rho_{00})}{(\mathcal{A} - C) + C\rho_{00}} \tag{2.2.42}$$

Se tivermos um laser com relação $\mathcal{A} > C$, temos então $Q_f > 0$, o que constitui uma luz clássica.

Se a relação $\mathcal{A} \gg C$, com $\rho \ll 1$, então temos $Q_f = \frac{C}{\mathcal{A}-C} \rightarrow 0$

3 O HAMILTONIANO INTENSITY DEPENDENT

Em seguida analisaremos o Hamiltoniano cuja interação radiação-matéria está vinculada ao número de fótons, de onde tiramos o nome; *intensity dependent*. Esse tipo de hamiltoniano vem sendo estudado (32-33) há algum tempo em diversas áreas, e seus resultados são promissores em seus respectivos ramos. Iremos partir do Hamiltoniano modificado, agora não linear, em termos de a e a^\dagger em direção à equação mestra que governa a evolução dos estados, em busca de uma distribuição inédita para os fótons dentro da cavidade do laser. Uma vez obtido tal estatística, então estudaremos suas consequências, e por fim, faremos uma comparação com o modelo já conhecido.

3.1 EQUAÇÃO MESTRA PARA O HAMILTONIANO INTENSITY DEPENDENT

O capítulo anterior foi dedicado à dedução da equação mestra mediante à teoria quântica do laser, onde a descrição Semi-Clássica do comportamento dos átomos e a representação quântica do campo eletromagnético se mostrou necessária. No entanto, o mais importante no que difere este capítulo, anteriormente foi utilizado o Hamiltoniano de Jaynes Cummings para descrever a interação entre a radiação (campo eletromagnético) e a matéria (átomos na cavidade). A partir destas ferramentas, foi possível construir a equação mestra, bem como a estatística dos fótons, além de outros parâmetros, como o número médio de fótons na cavidade e o fator Q de Mandel.

A seguir, reformularemos a interação entre radiação e matéria, propondo um Hamiltoniano que seja sensível ao número de fótons presentes. Em outras palavras, buscamos um Hamiltoniano que dependa da intensidade da radiação.

Da quantização do campo eletromagnético, sabe-se que o número de fótons é auto valor do operador número, N:

$$N|n\rangle = a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle \quad (3.1)$$

Então a edificação de tal Hamiltoniano *Intensity Dependent* requer a inserção do termo $a^\dagger a$ em seu cerne.

O Hamiltoniano de Jaynes Cummings (2.2.1) tem o termo de interação dado por:

$$\mathcal{H} = \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$$

Existem duas formas de se introduzir o operador $a^\dagger a$:

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \hbar g(aa^\dagger a\sigma_+ + a^\dagger aa^\dagger\sigma_-) \\ \hbar g(a^\dagger aa\sigma_+ + a^\dagger a^\dagger a\sigma_-) \end{cases} \quad (3.2)$$

Um olhar atento nota que ambos foram construídos de forma a serem Hermitianos.

O segundo Hamiltoniano possui auto valor nulo quando operado em um estado cujo número de fótons seja zero. A propagação desse Hamiltoniano exibe uma distribuição do número de fótons que se iniciada sem fótons na cavidade, não consegue ter nenhuma troca de população, ficando, assim, estagnada no estado de vácuo. Portanto, a seguir o Hamiltoniano de interesse será o primeiro.

Então, nosso Hamiltoniano modificado *intensity dependent* é descrito como se segue:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(aa^\dagger a\sigma_+ + a^\dagger aa^\dagger\sigma_-) \quad (3.3)$$

Onde já sintonizamos a frequência do campo eletromagnético com a frequência da transição atômica.

Mais uma vez é conveniente fazer uso da representação de interação, que nos permitirá manter o foco na nova interação. Sendo assim, dividimos o Hamiltoniano (3.3) em duas partes:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V \quad (3.4)$$

$$\mathcal{H}_o = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a \quad (3.5)$$

$$V = \hbar g(aa^\dagger a\sigma_+ + a^\dagger aa^\dagger\sigma_-) \quad (3.6)$$

Uma vez em que estamos agora lidando com operadores não lineares em termos de a^\dagger e a , naturalmente aparecerão expressões de alta complexidade descritas por esses operadores, de forma que, por praticidade, é interessante já calcularmos alguns comutadores que nos serão úteis.

Primeiramente devemos lembrar de uma importante identidade matemática da qual faremos uso, bem como alguns comutadores básicos:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (3.7)$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger$$

$$[N, a] = -a$$

$$\frac{1}{2} [\sigma_z, \sigma_+ + \sigma_-] = \sigma_+ - \sigma_-$$

Dando continuidade, o primeiro comutador é:

$$[a^\dagger a, aa^\dagger a] = [N, aN] = [N, a]N + [N, N]a = -aN \quad (3.8)$$

$$[a^\dagger a, a^\dagger aa^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger a]a + [a^\dagger a, a^\dagger]a^\dagger a = a^\dagger N$$

Podemos agora, então, calcular o comutador entre as duas partes do Hamiltoniano original, onde as constantes \hbar , ω e g não interferem no resultado, de forma que podemos negligenciá-las, e uma vez em que os operadores atuam apenas no campo eletromagnético,

enquanto que os operadores bosonianos, atuam na matéria (átomo) eles comutam entre si, nos permitindo escrever:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{H}_0, V] &= \left[\frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a, \hbar g(aa^\dagger a\sigma_+ + a^\dagger a a^\dagger \sigma_-) \right] \quad (3.9) \\
 &= \frac{1}{2} [\sigma_z, aa^\dagger a\sigma_+ + a^\dagger a a^\dagger \sigma_-] + [a^\dagger a, aa^\dagger a\sigma_+ + a^\dagger a a^\dagger \sigma_-] \\
 &= \frac{1}{2} [\sigma_z, \sigma_+] aa^\dagger a\sigma_+ + \frac{1}{2} a^\dagger a a^\dagger [\sigma_z, \sigma_-] + [a^\dagger a, aa^\dagger a]\sigma_+ \\
 &\quad + [a^\dagger a, a^\dagger a a^\dagger a]\sigma_-
 \end{aligned}$$

Fazemos uso agora dos comutadores anteriormente calculados, obtendo, finalmente:

$$[\mathcal{H}_0, V] = -aN\sigma_+ + Na^\dagger\sigma_- + aN\sigma_+ - Na^\dagger\sigma_- = 0 \quad (3.10)$$

Sendo assim, nosso termo de interação é representado por V , enquanto que o operador de transformação é dado por

$$\mathcal{U}(\tau) = e^{-i\mathcal{H}_0\tau/\hbar} \quad (3.11)$$

Levando o termo de interação para a nova representação e utilizando o resultado da equação (3.10), vemos que:

$$V_i = e^{i\mathcal{H}_0\tau/\hbar} V e^{-i\mathcal{H}_0\tau/\hbar} = V \Rightarrow V_i = V \quad (3.12)$$

Ainda nos resta obter o operador de evolução na representação de interação:

$$U(\tau) = e^{-iV\tau/\hbar} \quad (3.13)$$

A seguir faremos a expansão em série de Taylor em termos de V da equação (3.13):

$$U(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-iV\tau}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \quad (3.14)$$

Verifica-se então o interesse em calcular o termo $\left(\frac{V}{\hbar}\right)^n$. Para isso, usaremos os operadores fermianos σ_+ e σ_- :

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Temos, então:

$$\frac{V}{\hbar} = g(aa^\dagger a\sigma_+ + a^\dagger aa^\dagger \sigma_-) = g \begin{pmatrix} 0 & aa^\dagger a \\ a^\dagger aa^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Com facilidade podemos escrever os termos de potências pares e ímpares de $\frac{V}{\hbar}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{\hbar}\right)^{2m} &= g^{2m} \begin{pmatrix} (aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger)^m & 0 \\ 0 & (a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a)^m \end{pmatrix} \\ \left(\frac{V}{\hbar}\right)^{2m+1} &= g^{2m+1} \begin{pmatrix} 0 & aa^\dagger a(a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a)^m \\ (a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a)^m a^\dagger aa^\dagger & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

A partir da expansão do operador evolução temporal, descrita pela equação (3.14), juntamente com a forma matricial expostas pelas equações (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned} U(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-iV\tau}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-iV\tau}{\hbar}\right)^{2m} \frac{1}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-iV\tau}{\hbar}\right)^{2m+1} \frac{1}{(2m+1)!} = \\ &\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m} \frac{g^{2m}}{(2m)!} (aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger)^m & \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m+1} \frac{g^{2m+1}}{(2m+1)!} aa^\dagger a(a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a)^m \\ \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m+1} \frac{g^{2m+1}}{(2m+1)!} (a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a)^m a^\dagger aa^\dagger & \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m} \frac{g^{2m}}{(2m)!} (a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a)^m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Através de uma simples modificação na equação (3.18), podemos escrever o operador evolução temporal em termos de seno e cosseno:

$$\begin{aligned}
 U(\tau) &= \left(\begin{array}{cc} \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m} \frac{g^{2m}}{(2m)!} (\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger})^{2m} & \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m+1} \frac{g^{2m+1}}{(2m+1)!} \frac{aa^\dagger a (\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a})^{2m+1}}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \\ \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m+1} \frac{g^{2m+1}}{(2m+1)!} \frac{(\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a})^{2m+1} a^\dagger aa^\dagger}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} & \sum_{m=0}^{\infty} (-i\tau)^{2m} \frac{g^{2m}}{(2m)!} (\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger})^{2m} \end{array} \right) \quad (3.19) \\
 &= \left(\begin{array}{cc} \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) & -iaa^\dagger a \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \\ -i \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau) a^\dagger aa^\dagger}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} & \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Para simplificação, vamos chamar os termos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 A &= \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \quad (3.20) \\
 B &= -iaa^\dagger a \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \\
 C &= \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \\
 D &= -i \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau) a^\dagger aa^\dagger}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}}
 \end{aligned}$$

Para definirmos o operador densidade do sistema, devemos lembrar que o mesmo pode ser escrito como $\rho = \rho_{\text{átomo}} \times \rho_{\text{campo}}$.

Como já fizemos no capítulo anterior, no estado inicial vamos supor que o átomo se encontra no estado excitado dentro da cavidade, de forma que $\rho_{\text{átomo inicial}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Assim, escrevemos: $\rho(0) = \rho_f \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde a partir de agora designaremos o operador densidade do campo como ρ_f . Assim, para evoluir tal operador, fazemos $\rho(\tau) = U(\tau)\rho(\tau)U^\dagger(\tau)$. Utilizando a expressão (3.19), obtemos:

$$\begin{aligned}
\rho(\tau) &= \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix} \rho_f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\dagger & D^\dagger \\ B^\dagger & C^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix} \rho_f \begin{pmatrix} A^\dagger & D^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A\rho_f A^\dagger & A\rho_f D^\dagger \\ D\rho_f A^\dagger & D\rho_f D^\dagger \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Uma vez em que nosso interesse reside no comportamento dos fótons, isso é, do campo eletromagnético, devemos efetuar o traço na equação (3.20) em relação ao átomo, como adiante:

$$\begin{aligned}
\rho_f(\tau) &= Tr \rho(\tau) = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \rho(\tau) | \alpha \rangle = \langle e | \rho(\tau) | e \rangle + \langle g | \rho(\tau) | g \rangle \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\rho_f A^\dagger & A\rho_f D^\dagger \\ D\rho_f A^\dagger & D\rho_f D^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\rho_f A^\dagger & A\rho_f D^\dagger \\ D\rho_f A^\dagger & D\rho_f D^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= A\rho_f A^\dagger + D\rho_f D^\dagger
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Utilizando o resultado obtido pela equação (3.20), podemos definir nosso super operador, $M(\tau)$, que carrega no tempo o operador densidade, de um dado instante até um acréscimo temporal de τ , como explícito abaixo:

$$\begin{aligned}
\rho(\tau) &= \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \rho_f \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \\
&\quad + \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger}} a^\dagger aa^\dagger \rho_f aa^\dagger a \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger}} \\
&\equiv M(\tau) \rho(0)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

3.2 DISCUSSÃO SOBRE A ESTATÍSTICA DE BOMBEIO

No capítulo anterior, mais especificamente na seção 2.2.2; “Discussão Heurística da Estatística de Injeção”, estudamos o mecanismo de injeção dos átomos dentro da cavidade do laser. No presente capítulo, iremos considerar os mesmos efeitos, sem alterações teóricas. Naturalmente, a distribuição, a taxa de injeção, as probabilidades de excitação e o número médio de átomos excitados no intervalo de tempo Δt podem ter valores diferentes das do capítulo anterior, no entanto a teoria se mantém.

3.3 EQUAÇÃO MESTRA PARA BOMBEIO GENERALIZADO

Nesta seção prosseguiremos com o tratamento teórico da seção anterior, aplicando seus resultados na obtenção da equação com estatística de bombeio generalizada. O estudo aqui é idêntico ao da seção análoga, 2.2.3, e apenas se difere quando introduzimos o superoperador da equação (3.23). Então, da mesma forma como demonstrada no capítulo anterior, através de sucessivas aplicações do super operador $M(\tau)$, obtemos o operador densidade num tempo t :

$$p^{(k)}(t) = M^k(\tau)\rho(0) \quad (3.24)$$

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} p^k (1-p)^{K-k} M^k(\tau)\rho(0) = [1 + p(M-1)]^K \rho(0)$$

Através da diferenciação da equação (3.24) em respeito ao tempo, e da adição do Liouvilliano, que denota a perda da cavidade, obtemos:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{r}{p} \ln[1 + p(M-1)]\rho(t) + L\rho(t) \quad (3.25)$$

Que é a nossa equação mestra generalizada, com:

$$L\rho(t) = \frac{C}{2}(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \quad (3.26)$$

$$C = \frac{1}{t_{cav}} = \frac{\Omega}{Q}$$

Onde Q é o fator de qualidade e t_{cav} é o tempo de vida do fóton dentro da cavidade.

Se a média do número de fótons é suficientemente grande, e a distribuição é estreita, é possível expandir a equação (3.26) e obter:

$$\frac{d\rho}{dt} = r(M-1)\rho(t) - \frac{1}{2}rp(M-1)^2\rho(t) + L\rho(t) \quad (3.27)$$

A partir de agora os resultados serão diferentes dos obtidos na seção 2.2.3, uma vez em que usaremos o novo super operador para obter a evolução do operador densidade, que nos permite calcular os elementos de matriz, ρ , ρ_{nn} e $\rho_{n,n+1}$, como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= r(1+p) \left\{ \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \rho \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) + \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] a^\dagger aa^\dagger \rho aa^\dagger a \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] \right\} \\ &- r \left(1 + \frac{p}{2}\right) \rho \\ &- \frac{rp}{2} \left\{ \cos^2(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \rho \cos^2(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \right. \\ &+ \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] a^\dagger aa^\dagger \rho aa^\dagger a \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \\ &+ \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] a^\dagger aa^\dagger \cos^2(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \rho \cos^2(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) aa^\dagger a \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] \\ &\left. + \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] a^\dagger aa^\dagger \left(\left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] a^\dagger aa^\dagger \rho aa^\dagger a \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] \right) aa^\dagger a \left[\frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right] \right\} + L\rho \end{aligned} \quad (3.28)$$

Novamente podemos verificar que existem dois casos extremos: $p = 0$, com $pR = cte$, o que faz com que a distribuição de Bernoulli se transforme em uma distribuição Poissoniana, correspondendo ao caso do bombeio randômico, e também a teoria do laser de Scully-Lamb, onde $p = 1$ corresponde ao bombeio regular de átomos.

Como anteriormente mencionado, algumas pequenas aproximações foram necessárias para a obtenção da equação (3.28). Entre elas a aproximação de $\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \approx \frac{d\rho}{dt}$, e também dizer que a perda é independente do ganho, o que pode inclusive levar a resultados equivocados quando $p \neq 0$.

3.4 A TEORIA QUÂNTICA DO LASER: BOMBEIO ALEATÓRIO ($p=0$)

Assumiremos agora que os átomos possuem uma distribuição do tempo em que eles passam dentro da cavidade. No caso do modelo de átomo de dois níveis, os dois níveis decaem com uma taxa γ , e a distribuição no tempo é igual à equação (2.2.21):

$$P(\tau) = \gamma e^{(-\gamma\tau)}$$

Uma vez em que $\Delta t \gg \langle \tau \rangle$, podemos então escrever

$$\left(\frac{d\rho_f}{dt}\right)_{\text{ganho}} \approx \frac{\rho_f(t + \Delta t) - \rho_f(t)}{\Delta t} = r[\rho_f(t + \Delta t) - \rho_f(t)] \quad (2.2.22)$$

Substituindo o operador densidade pelo da equação (3.23), obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\rho_f}{dt}\right) \quad (3.29) \\ & = -r\rho_f(t) \\ & + r \int_0^{\Delta t \rightarrow \infty} d\tau \gamma e^{(-\gamma\tau)} \left(\cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \rho_f \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \right. \\ & \left. + \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} a^\dagger aa^\dagger \rho_f aa^\dagger a \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} \right) \end{aligned}$$

3.5 ESTATÍSTICA DOS FÓTONS

A seguir omitiremos o índice indicativo do operador densidade do campo (field) por simplificação, e também desenvolveremos a perda da cavidade, $L\rho$, em termos dos operadores a e a^\dagger . Para prosseguir com o cálculo da obtenção da equação mestra devemos, então, resolver as integrais dadas pela equação (3.28). No entanto, antes de fazê-lo, iremos calcular primeiramente os elementos de matriz do operador densidade. Como estamos interessados na estatística dos fótons, iremos observar os elementos da diagonal principal de ρ , uma vez em que são estes que nos dizem as probabilidades de ocupação de seus respectivos estados:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm} & \quad (3.30) \\ &= -r\rho_{nm}(t) - \left\langle n \left| \frac{C}{2} (a^\dagger a \rho_f + \rho_f a^\dagger a - 2a \rho_f a^\dagger) \right| n \right\rangle \\ &+ r \int_0^{\Delta t \rightarrow \infty} d\tau e^{-\gamma\tau} \left(\langle n | \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) \rho_f \cos(g\sqrt{aa^\dagger aa^\dagger aa^\dagger} \tau) | n \rangle \right. \\ &\left. + \langle n | \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} a^\dagger aa^\dagger \rho_f aa^\dagger a \frac{\sin(g\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a} \tau)}{\sqrt{a^\dagger aa^\dagger aa^\dagger a}} | n \rangle \right) \end{aligned}$$

Lembrando-se das relações básicas dos operadores de criação e aniquilação do campo eletromagnético: $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ e $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, chegamos às integrais que devem ser resolvidas:

$$\gamma \int_0^{\Delta t \rightarrow \infty} d\tau e^{-\gamma\tau} \rho_{nn} \cos^2(g\sqrt{(n+1)^3} \tau) = \frac{\gamma^2 + 2g^2(n+1)^3}{\gamma^2 + 4g^2(n+1)^3} \rho_{nn} \quad (3.31)$$

$$\gamma \int_0^{\Delta t \rightarrow \infty} d\tau e^{-\gamma\tau} \rho_{n-1,n-1} \sin^2(g\sqrt{n^3} \tau) = \frac{2g^2 n^3}{\gamma^2 + 4g^2 n^3} \rho_{n-1,n-1} \quad (3.32)$$

Então, através das integrais dadas pelas equações (3.31) e (3.32), modificamos a equação (3.29) e assim obtemos, finalmente, a nossa equação mestra:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm} = & -r\rho_{nm} + \left[\frac{1 + 2(g/\gamma)^2 (n+1)^3}{1 + 4(g/\gamma)^2 (n+1)^3} \right] r\rho_{nn} \\ & + \left[\frac{2(g/\gamma)^2 n^3}{1 + 4(g/\gamma)^2 n^3} \right] r\rho_{n-1,n-1} - Cn\rho_{nn} + C(n+1)\rho_{n+1,n+1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ainda podemos simplificar a equação mestra ao fazer uso das definições usuais do laser, mencionadas anteriormente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \frac{2rg^2}{\gamma^2} \\ B &\equiv \frac{4rg^2}{\gamma^2} \mathcal{A} \\ C &\equiv \frac{\Omega}{Q} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Desta maneira ficamos com:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm} = & - \left[\frac{\mathcal{A}(n+1)^3}{1 + (B/\mathcal{A})(n+1)^3} \right] \rho_{nn} + \left[\frac{\mathcal{A}n^3}{1 + (B/\mathcal{A})n^3} \right] \rho_{n-1,n-1} - Cn\rho_{nn} \\ & + C(n+1)\rho_{n+1,n+1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Devemos atentar aos elementos de matriz da equação mestra, e o que eles significam.

O primeiro termo, $\left[\frac{\mathcal{A}(n+1)^3}{1 + (B/\mathcal{A})(n+1)^3} \right] \rho_{nn}$, representa a troca de população do estado contendo n fótons, alcançando o estado que possui $(n+1)$ fótons. Ou seja, o primeiro termo ilustra o ganho de um fóton. O termo seguinte, $\left[\frac{\mathcal{A}n^3}{1 + (B/\mathcal{A})n^3} \right] \rho_{n-1,n-1}$, analogamente, desempenha a saída do estado compreendido com $(n-1)$ fótons, que ao ganhar um fóton, salta para o estado com n fótons. Estes são os termos que representam os ganhos do nosso sistema, em termos do número de fótons.

Por outro lado, temos também os termos responsáveis por perda, ou destruição, de fótons. O terceiro termo da equação mestra, $Cn \rho_{nn}$, simboliza a passagem do estado detentor de n fótons que perde um fóton, caindo assim para o estado com $(n - 1)$ fótons. Por fim, o último termo, $C(n + 1)\rho_{n+1,n+1}$, é responsável por destruir um fóton do estado em que há $(n + 1)$ fótons, levando-o para o estado que dispõe de n fótons.

Podemos fazer a substituição $\rho_{nn} = p_n$ para designar o elemento de matriz, que corresponde à probabilidade de termos n fótons. O esquema abaixo ilustra o mecanismo de ganho e perda do sistema:

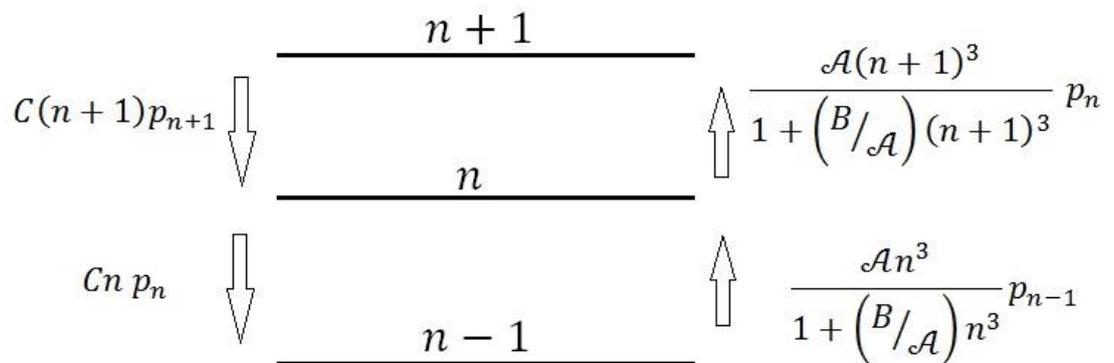


Figura 3. 1 - O funcionamento dos ganhos e das perdas do sistema, quando observado o número de fótons dentro da cavidade do laser, exibindo qual o responsável por cada perda ou ganho.
Fonte: Elaborada pelo autor

Uma vez já conhecidos os termos da equação mestra, podemos focar atenção nos estados estacionários do problema, onde temos $\frac{d\rho_{nn}}{dt} = 0$. Em tais estados, as taxas de perda e ganho se equivalem, em outras palavras, quando um fóton é absorvido, simultaneamente outro fóton é criado, de maneira que não podemos notar diferença no sistema.

Isto nos permite igualar as taxas de perda e ganho para o mesmo n , segundo a figura (3.1):

$$\begin{cases} \left[\frac{\mathcal{A}(n+1)^3}{1 + (B/\mathcal{A})(n+1)^3} \right] p_n = C(n+1)p_{n+1} \\ \left[\frac{\mathcal{A}n^3}{1 + (B/\mathcal{A})n^3} \right] p_{n-1} = Cn p_n \end{cases} \quad (3.35)$$

Através da equação (3.35), obtemos:

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{(\mathcal{A}/C)(n+1)^2}{1 + (B/\mathcal{A})(n+1)^3} p_n \\ p_n = \frac{(\mathcal{A}/C)n^2}{1 + (B/\mathcal{A})n^3} p_{n-1} \end{cases} \quad (3.36)$$

Que são as relações de recorrência para a distribuição de probabilidade do estado de número de fótons do sistema.

Utilizando a primeira equação acima, podemos calcular:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{(\mathcal{A}/C)}{1 + (B/\mathcal{A})} p_0 \\ p_2 = \frac{4(\mathcal{A}/C)}{1 + 8(B/\mathcal{A})} p_1 = \frac{4(\mathcal{A}/C)^2}{[1 + 8(B/\mathcal{A})][1 + (B/\mathcal{A})]} p_0 \\ \vdots \\ p_n = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC} \right)^n p_0 \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(\mathcal{A}/B) + k^3} \end{cases} \quad (3.37)$$

Como pode-se observar, o termo geral, p_n , é dotado de alta complexidade, uma vez em que possui um produtório de difícil cálculo. No entanto, nas condições usuais, o termo \mathcal{A}/B é pequeno, em torno de 10^{-2} , de maneira que podemos fazer uma aproximação:

$$\prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(\mathcal{A}/B) + k^3} \approx \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{k^3} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} \quad (3.38)$$

Tal aproximação é justificada, pois o confronto entre o termo \mathcal{A}/B e k^3 , de início, já tem duas ordens de grandeza de diferença. Além disso, como k^3 cresce extremamente rápido, acaba por validar ainda mais nossa acareação.

Então, a partir das equações (3.37) e (3.38), podemos escrever a nossa nova distribuição:

$$p_n = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n p_0 \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(\mathcal{A}/B) + k^3} = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n p_0 \frac{1}{n!} \quad (3.39)$$

Da condição de normalização, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n p_0 \frac{1}{n!} = p_0 e^{\mathcal{A}^2/BC} \quad (3.40)$$

Dispondo da nossa distribuição devidamente normalizada, podemos calcular o número médio de fótons, como se segue:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n \frac{1}{n!} e^{-\mathcal{A}^2/BC} \quad (3.41)$$

$$\langle n \rangle = \frac{\mathcal{A}^2}{BC} \quad (3.42)$$

Podemos fazer um gráfico da distribuição acima, verificando o número médio de fótons, bem como como são distribuídas as probabilidades de ocupação do sistema de fótons:

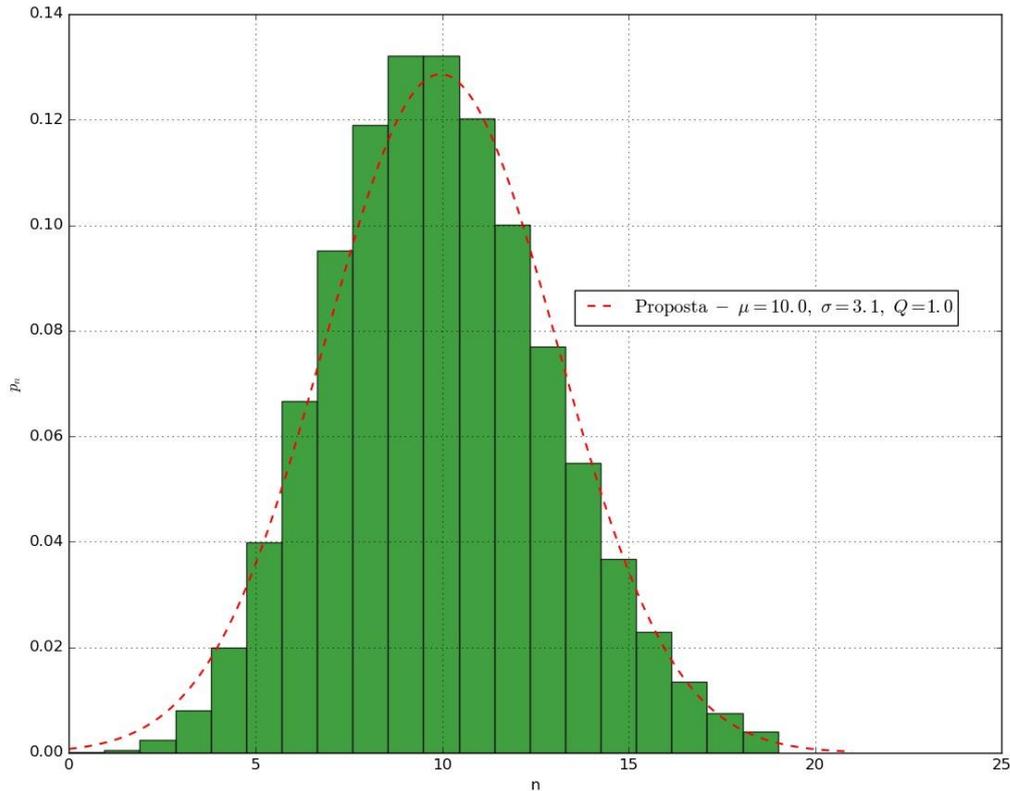


Figura 3. 2 - Histograma da estatística de fótons da nova distribuição. Os parâmetros utilizados foram: $\mathcal{A} = 2 \cdot 10^6 \text{ Hz}$, $B = 4 \cdot 10^8 \text{ Hz}$, $C = 10^3 \text{ Hz}$. Obteve-se o desvio padrão $\sigma = 3,1$ e o fator Q de Mandel $Q = 1,0$.

Fonte: Elaborada pelo autor

Verifica-se, portanto, a coerência dos resultados obtidos para o número médio de fótons, bem como a validade das aproximações no regime indicado, onde a saturação supera em ordens de grandeza o ganho.

O resultado da equação (3.42) é familiar ao leitor atento, uma vez que já apareceu no capítulo anterior, sendo o resultado aproximado obtido para o laser tradicional quando o mesmo se encontra muito além do limiar ($\mathcal{A} \gg C$), em outras palavras, quando o ganho é muito maior do que a perda. No entanto, há de se reparar que durante a dedução da equação (3.42) não houve a necessidade de fazer tal aproximação, o que equivale a dizer que para o

laser com acoplamento dependente do número de fótons não existe a mesma preocupação quanto à perda (em relação ao ganho) que é fundamental no laser comum. Uma vez em que não precisamos de tal competição entre ganho e perda, destaca-se uma vantagem em tal acoplamento.

3.6 COMPARAÇÃO ENTRE AS ESTATÍSTICAS DOS FÓTONS

Como já observamos (18), o número médio de fótons obtido para ambos os lasers é o mesmo em certas circunstâncias. Devemos, então, estudar o caso em que eles divergem. Vamos começar pelo laser usual, cujo número médio de fótons, $\langle m \rangle$, é regido pela equação (2.2.34):

$$\langle m \rangle = \frac{\mathcal{A}}{B} \left(\frac{\mathcal{A}}{C} - 1 \right) + \frac{\mathcal{A}}{B} p_0 = \frac{\mathcal{A}}{B} \left[\frac{\mathcal{A}}{C} - (1 - p_0) \right] = \frac{\mathcal{A}}{B} \left(\frac{\mathcal{A}}{C} - 1 \right) \quad (3.43)$$

Verifica-se que quando a razão \mathcal{A}/C é grande, caímos na aproximação que nos leva ao resultado da sessão anterior, $\mathcal{A}^2/B C$. Vamos prosseguir com a equação (3.37) sem fazer uso da aproximação $\mathcal{A}/B \ll 1$. Para isso, escreveremos o produtório da seguinte forma:

$$\prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(\mathcal{A}/B) + k^3} = \prod_{k=1}^5 \frac{k^2}{(\mathcal{A}/B) + k^3} \cdot \prod_{k=6}^n \frac{1}{k}$$

Para assegurarmos que a aproximação continua válida, mesmo lidando com um regime diferente, contabilizamos, por exemplo, 5 termos exatos do produtório, para só então, desprezarmos \mathcal{A}/B em confronto com k^3 .

Podemos reescrever a distribuição dada pela equação (3.37) da seguinte forma:

$$p_n = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n p_0 \prod_{k=1}^5 \frac{k^2}{(\mathcal{A}/B) + k^3} \cdot \prod_{k=6}^n \frac{1}{k} = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n p_0 f(5) \left(\frac{5!}{n!}\right) \quad (3.44)$$

Onde $f(5)$ é o resultado do produtório de 1 até 5, enquanto o último termo é o resultado do produtório de 6 até n .

Normalizando a distribuição, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{e^{-\mathcal{A}^2/BC}}{5! f(5)} \quad (3.45)$$

O que nos permite calcular também o número médio de fótons:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\mathcal{A}^2}{BC}$$

Ou seja, recuperamos o resultado descrito pela equação (3.42).

É interessante verificar que apenas o p_0 exibe dependência de nossas aproximações, fato ilustrado pela função de apoio, $f(5)$, que indica quantos termos exatos consideramos na nossa aproximação. No entanto, o número médio não demonstra a mesma sensibilidade no que se refere à nossas idiosincrasias.

Iremos adiante efetuar comparações em relação ao número médio dos fótons. Como abordado anteriormente, não iremos nos limitar ao regime muito além do limiar, onde o ganho

supera em várias ordens de grandeza a perda e a distribuição do laser usual se reduz à do laser modificado.

As duas distribuições são:

$$\begin{cases} p_n = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^n p_0 \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(\mathcal{A}/B) + k^3} \\ p_m = \left(\frac{\mathcal{A}^2}{BC}\right)^m p_0 \prod_{k=1}^m \frac{1}{(\mathcal{A}/B) + k} \end{cases} \quad (3.46)$$

Podemos construir um gráfico para efetuar uma comparação entre as duas distribuições:

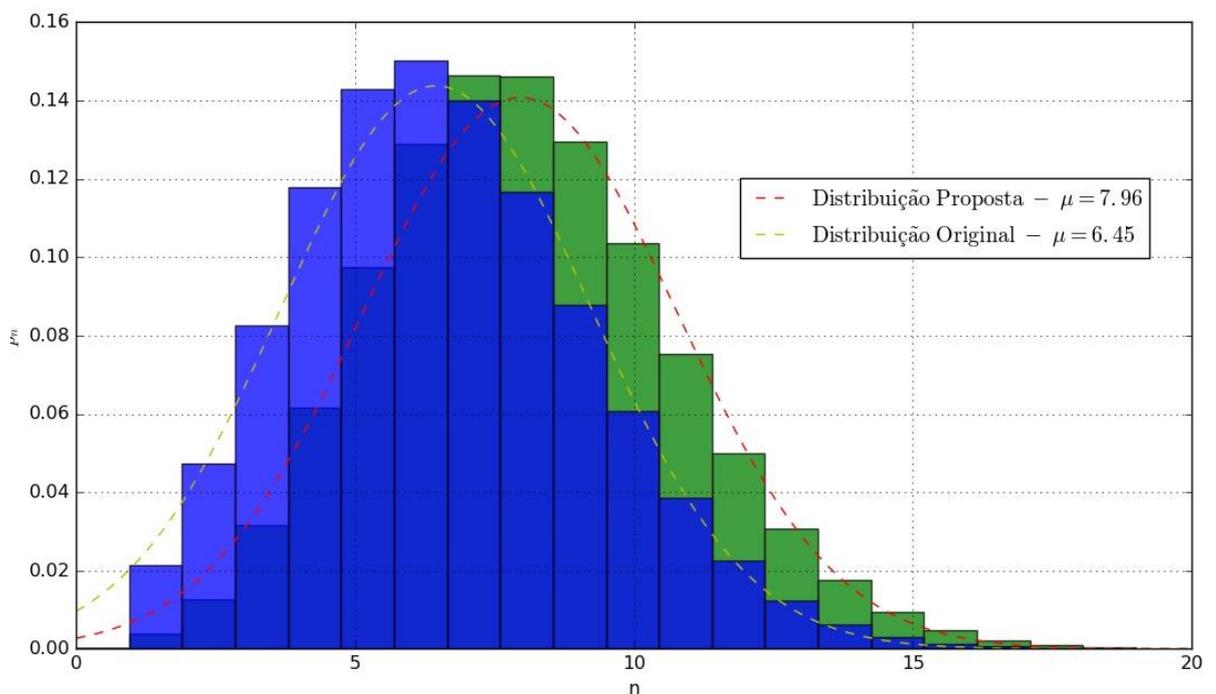


Figura 3. 3 - Histograma comparativo das populações dos lasers. Os valores relativos são $\mathcal{A}/B = 1,6$ e $\mathcal{A}/C = 5,0$. Aumento do número médio de aproximadamente 20%, Fator Q de Mandel da distribuição original, $Q_m = 1,19$ e da distribuição proposta, $Q_n = 1,01$.

Fonte: Elaborada pelo autor

Como pode-se observar, a distribuição referente à interação dependente do número de fótons apresenta um número médio de fótons aproximadamente 20% maior do que o da distribuição usual, valor obtido utilizando os mesmos parâmetros para ambos.

4 OBSERVAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

No presente trabalho, mergulhamos em uma abrangente área da física, o estudo da luz, dotado de incontáveis aplicações tecnológicas. Para a maior compreensão dos fenômenos imersos em tal esfera de conhecimento, revimos importantes conceitos e formalismos ao longo do capítulo 2, tais como o essencial uso do Operador Densidade, o Oscilador Harmônico, a Teoria Quântica da Radiação, Estatística de Bombeio, Átomo de dois níveis, o Hamiltoniano de Jaynes Cummings e outros. Vimos como funciona a interação entre a radiação e a matéria, e como utilizar um super-operador para descrever a evolução do sistema, culminando na estatística dos fótons, e outras análises do comportamento da luz laser, como largura de linha e fator Q de Mandel. Em seguida trabalhamos com um Hamiltoniano não Linear, adentrando campos ainda não muito explorados, e seguindo o mesmo objetivo de obter a estatística dos fótons, agora mediante uma interação dependente do número de fótons, percorremos um caminho similar até a obtenção de uma nova equação mestra, que nos forneceu a sua respectiva estatística.

Como resultado, observamos uma notável semelhança entre as duas distribuições, regadas à certo regime (muito além do limiar). Mas foi apenas quando rompemos esse regime que vimos a diferenciação das distribuições, onde, mediante os mesmos parâmetros, obtivemos um aumento significativo de aproximadamente 20% no número médio dos fótons da cavidade para o Hamiltoniano *Intensity Dependent*. O fator Q de Mandel da nova distribuição é mais baixo do que o fornecido pela distribuição usual, o que quer dizer que ele tem uma maior aproximação de estados de luz clássica do que o tradicional. Vimos também que a distribuição obtida para o Hamiltoniano *Intensity Dependent* nos fornece um número médio de fótons que não demonstra sensibilidade no que diz respeito a aproximações oriundas dos parâmetros do laser; ganho, saturação e perda, diferentemente do número médio da distribuição original. Esse fato ilustra uma notável vantagem do laser *Intensity Dependent* em comparação ao usual, uma vez em que não precisamos nos preocupar com uma alta taxa de ganho em relação às perdas naturais do sistema.

REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A.; PODOLSKI, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, v. 47, n. 10, p. 0777-0780, 1935.
- 2 BELL, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physics**, v. 1, n. 3, p. 195-200, 1964.
- 3 LEIBFRIED, D. et al. Quantum dynamics of single trapped ions. **Reviews for Modern Physics**, v. 75, n. 1, p. 281-324, 2003.
- 4 TURCHETTE, Q. A. et al. Deterministic entanglement of two trapped ions. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 17, p. 3631-3634, 1998.
- 5 MEEKHOF, D. M. et al. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 11, p. 1796-1799, 1996.
- 6 MONROE, C. et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. **Physical Review Letters**, v. 75, n. 25, p. 4714-4717, 1995.
- 7 BRUNE, M. et al. Observing the progressive decoherence of the "meter" in a quantum measurement. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 24, p. 4887-4890, 1996.
- 8 MONROE, C. et al. Schrodinger cat superposition state of an an atom. **Science**, v. 272, n. 5265, p. 1131-1136, 1996.
- 9 SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM Journal on Computing**, v. 26, n. 5, p. 1484-1509, 1997.
- 10 VANDERSYPEN, L. M. K. et al. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. **Nature**, v. 414, n. 6866, p. 883-887, 2001.
- 11 BENNETT, C. D.; DIVICENZO, D. P. Quantum computing - towards an engineering era. **Physical Review Letters**, v. 377, n. 6548, p. 389-390, 1995.
- 12 WOOTTER, W. K.; ZUREK, W. H. A single quatum cannot be cloned. **Nature** , v. 299, n. 5886, p. 802-803, 1982.
- 13 MOUSSA, M. H. Y. Teleportation with identity interchange of quatum states. **Physical Review A**, v. 98, n. 25, p. 253005-1-25305-4, 2007.
- 14 BRATTKE, S.; VARCOE, B. T. H.; WALTHER, H. Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 16, p. 3534-3537, 2001.

- 15 BRUNE, M. et al. Quantum rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 11, p. 1800-1803, 1996.
- 16 KNIGHT, P. Discrete charm of the photon. **Nature**, v. 330, n. 6573, p. 392-393, 1996.
- 17 MARLAN, O. S.; WILLIS, E. L. J. Quantum theory of an optical maser. I. general theory. **Physical Review**, v. 159, n. 2, p. 208-226, 1967.
- 18 GOULD, G. The laser, light amplification by stimulated emission of radiation. In: CONFERENCE ON OPTICAL PUMPING, 1959, Michigan: Ann Arbor. **Proceedings**...Michigan:1959.
- 19 LARIONOV, N. V.; MIKHAIL, I. K. Analytical results from the quantum theory of a single-emitter nanolaser. **American Physical Society**, v. 84, n. 5, p. 4, 2011.
- 20 ASHHAB, S. et al. Single-artificial-atom lasing using a voltage-biased superconducting charge qubit. **New Journal of Physics**, v. 11, n. 2, p. 23-30, 2009.
- 21 MU, Y.; SAVAGE, C. M. One-atom lasers. **Physical Review A**, v. 46, n. 9, p. 42-55, 1992.
- 22 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern quantum mechanics**. San Francisco: Addison-Wesley Publishing Company, 2010.
- 23 COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley, 1977.
- 24 MERZBACHER, E. **Quantum mechanics**. New York: John Wiley Sons, 1998.
- 25 BALIAN, R. **From microphysics to macrophysics: methods and applications of statistical physics**. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- 26 BLUM, K. **Density matrix theory and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- 27 OLIVEIRA, I. et al. **NMR quantum information processing**. Amsterdam: Elsevier Science Technology Books, 2007.
- 28 LOUISSEL, W. H. **Quantum statistical properties of radiation**. New York: John Willey Sons, 1990.
- 29 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. **Quantum optics**. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

30 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, S. **Quantum optics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

31 ORSZAG, M. **Quantum optics**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007.

32 RODRIGUEZ-LARA, B. An intensity-dependent quantum Rabi model: spectrum, SUSY partner and optical simulation. **Journal of the Optical Society of America**, v. 31, n. 7, 2014. doi: 10.1364/JOSAB.31.001719.

33 CARDINOMA, D. A. et al. Quantum collapses and revivals in a nonlinear Jaynes-Cummings model. **Physical Review A**, v. 43, n. 7, p. 3710-3723, 1991.