**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Nícolas André da Costa Morazotti

**Reversão temporal na linguagem operacional da
mecânica quântica e a evolução temporal de pacotes de
ondas para espalhamento**

São Carlos

2018

Nícolas André da Costa Morazotti

**Reversão temporal na linguagem operacional da
mecânica quântica e a evolução temporal de pacotes de
ondas para espalhamento**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

Versão corrigida
(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação Prof. Bernhard Gross, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S856m	<p>Morazotti, Nicolas André da Costa</p> <p>Reversão temporal na linguagem operacional da mecânica quântica e a evolução temporal de pacotes de ondas para espalhamento / Nicolas André da Costa Morazotti ; orientador Reginaldo de Jesus Napolitano. – São Carlos, 2018.</p> <p>77 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.</p> <p>Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2018.</p> <p>1. Teorema de Wigner. 2. Reversão temporal. 3. Pós-seleção. 4. Teoria da informação quântica. 5. Teorias probabilísticas-operacionais. 6. Pacotes de onda. I. Napolitano, Reginaldo de Jesus, orient. II. Título.</p>
-------	---

AGRADECIMENTOS

Penso que agradecimentos não são uma tarefa fácil, pois não serei capaz de citar a todos que tiveram importante parte em minha trajetória. Espero que isto sirva de desculpa caso eu ocasionalmente esqueça seu nome nesta lista de agradecimentos, caro leitor.

Inicio agradecendo ao meu orientador, o professor Reginaldo de Jesus Napolitano, pelas incomensuráveis horas de discussão, de física ou não, que tivemos juntos. Você é um modelo a ser seguido como cientista, pois até hoje não deixou abater a chama mais importante de um pesquisador: a curiosidade. Obrigado por toda a ajuda.

Agradeço à minha família. Aos meus pais, Wilson e Mônica, pela criação que me deram, que nunca faltou o essencial para se criar uma pessoa. Paciência, dedicação, disciplina e responsabilidade foram me passadas e não tenho a menor intenção de esquecê-las, mesmo que ocasionalmente eu seja um pouco teimoso. Aos meus irmãos, Gabriel e Murilo, por todas as conversas que jogamos fora e por todas as discussões, que ambas creio terem reforçado esse laço fraterno. À minha avó Alaide e à minha tia Fátima, por todo o suporte desde que me entendo por gente. Não tenho como ser mais grato que já sou por isso. Ao resto da minha família, tios, tias, primos, primas, que me são importantes nessa caminhada.

De extremíssima importância, sou grato à minha namorada e companheira Natalí. Com mais de 6 anos de namoro, preciso dizer que ela me completa. Desde a graduação, sempre pegou no meu pé para manter-me firme, e sempre digo a ela (embora ela não goste de admitir) que ela me carregou na graduação nas costas. Sempre comigo, não importando o que estivéssemos enfrentando, e nunca me deixou abater-me por qualquer motivo. Novamente, no mestrado, me ajuda a todo instante, me auxilia a escrever o texto, lê e me garante que faz sentido e me ajuda a guiar o trabalho de uma maneira que eu não conseguiria fazer sozinho. Sempre foi meu poço de confiança. Nosso futuro brilha à nossa frente! Eu te amo, Natalíssima!

Agradeço aos companheiros e ex-companheiros de sala, Carlos, Leonardo, Lucas e Felipe, pelas costumeiras conversas, de física, ciências, matemáticas ou do cotidiano, e companhias. Com vocês, esses dias na sala 27 do bloco G foram muito mais agradáveis. Agradeço ao Fabrício e ao Oscar pelas companhias de almoço.

Agradeço aos grupos não-acadêmicos que me acolheram em alguns momentos da vida. Ao meu professor de desenho, Reno, e às amizades que fiz por lá, sou grato. Aos treinos de kung-fu, ao mestre Daniel, e aos professores Pé-de-Pano e Zanka, bem como a todos que treinam conosco desde então. Aos companheiros nos anos de organização da SIFSC, por todo o trabalho duro realizado nessas duas grandes semanas de física, não

posso deixar de agradecê-los. Agradeço aos poucos, mas valiosos, amigos que tenho de antes da graduação, sejam da época do colégio, sejam de qualquer outro lugar.

Agradeço aos companheiros de graduação e pós-graduação, que sempre me ajudaram em discussões e claramente me encorajaram a seguir esta etapa: Natalí, Lucas, Edmilson, Murilos, Fábio, Noel, Gustavo, Augusto José, Sálvio, Pedro, Alfredo, Lício, Luiz Henrique e a todos os outros que eventualmente esqueci.

Agradeço aos professores do colégio que sempre me incentivaram buscar conhecimento, em particular ao Lin, professor de física. Creio que tenha sido a pessoa mais importante na escolha desta jornada, na época de vestibulando. Agradeço aos professores da graduação e pós-graduação: Rodrigo, Tito, Luis Nunes, Reginaldo, Leonardo, Schneider, Lidério, Agostinho e Fred, que me mostraram o quanto eu não sabia física, e, penso, o quanto ainda não sei e preciso atingir para poder dizer que sou, de fato, físico.

Finalizo agradecendo ao IFSC e à toda a infraestrutura do IFSC, que permitiu a realização deste trabalho, em particular às funcionárias da biblioteca, Maria Cristina Cavarette Dziabas e Maria Neusa de Aguiar Azevedo, pelas incontáveis ajudas, e aos funcionários da seção de Pós-Graduação do IFSC, Ricardo Vital do Prado e Silvio César Athayde, pelas ajudas em relação a toda a burocracia. Agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro. Agradeço à banca a disposição para completar este trabalho.

“The History of every major Galactic Civilization tends to pass through three distinct and recognizable phases, those of Survival, Inquiry and Sophistication, otherwise known as the How, Why, and Where phases. For instance, the first phase is characterized by the question ‘How can we eat?’, the second by the question ‘Why do we eat?’ and the third by the question ‘Where shall we have lunch?’ ”
The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy, Douglas Adams

“Ideas, and only ideas, can light the darkness.”
Ludwig von Mises

RESUMO

MORAZOTTI, N. A. da C. **Reversão temporal na linguagem operacional da mecânica quântica e a evolução temporal de pacotes de ondas para espalhamento**. 2018. 77p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

A mecânica quântica apresenta assimetria por reversão temporal. Podemos entender que a origem de tal assimetria é a forma como a medida é feita na mecânica quântica descrita usualmente. Em 1964, Aharonov, Bergmann e Lebowitz propõem a pós-seleção, instrumento capaz de torná-la simétrica no tempo, bem como argumentam a validade física de tal. Aqui é discutida uma outra saída, utilizando Teorias Probabilístico-Operacionais. Encontra-se uma forma mais geral do Teorema de Wigner. Além disso, se aplica esse novo formalismo, que vale em espaços de Hilbert de dimensão finita, no experimento de medida fraca descrito por Aharonov, Albert e Vaidman em 1988, em que preparamos um estado térmico dentro de uma caixa, estudamos seu comportamento e realizamos a reversão temporal do mesmo, confirmando que a probabilidade se mantém invariante sob tal transformação de simetria.

Palavras-chave: Teorema de Wigner. Reversão temporal. Pós-seleção. Teorias probabilísticas-operacionais. Teoria de colisões.

ABSTRACT

MORAZOTTI, N. A. da C. **Time reversal in the operational language of quantum theory and time evolution of wave packets for scattering.** 2018. 77p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Quantum mechanics presents a time-reversal asymmetry. We see the origin of such asymmetry is the way how we make measurements in the usually described quantum mechanics. In 1964, Aharonov, Bergmann and Lebowitz propose the post-selection, a tool able to make it time symmetric, as well as argues such physical validity of this tool. Here, we discuss another exit, using operational-probabilistic theories. We find a more general form of Wigner's Theorem. Moreover, we apply this new formalism, true in finite-dimensional Hilbert spaces, in Aharonov, Albert and Vaidman 1988 weak measure described experiment, in which we prepare a thermal state inside a box, study its behaviour and perform the time reversal of it, confirming that the probability is invariant under such symmetry transformation.

Keywords: Wigner's theorem. Time reversal. Post-selection. Operational-probabilistic theories. Collision theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo da transformação de reversão temporal atuando no spin. . .	25
Figura 2 – Exemplo de operação.	29
Figura 3 – Exemplos de (a) preparação e (b) medida.	30
Figura 4 – Circuitos fechados representam probabilidades.	30
Figura 5 – Reversão temporal de estado.	37
Figura 6 – Reversão temporal de efeito.	37
Figura 7 – Ilustração do aparato do exemplo. A linha pontilhada representa a trajetória do pacote de ondas e a seta azul a direção do estado inicial do spin.	43
Figura 8 – Ilustração do forno de átomos. O conjunto de átomos dentro do forno é representado pelo círculo interno, colorido.	48
Figura 9 – Procedimento de Stern-Gerlach como descrito na seção 4.1.	50

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CP	Completamente positivo
CPTP	Completamente positivo que preserva traço
OPT	Teoria Probabilístico-Operacional
POVM	Medidas a valores operacionais positivos
PS	Positivo semi-definido

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}_+$ $\equiv \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}^*$ $\equiv \{x \in \mathbb{Z} | x \neq 0\}$

$\mathbb{I}$ Matriz identidade

$\mathbb{I}^d$ Matriz identidade de dimensão d

$\mathcal{L}(\mathcal{H}^A)$ Conjunto de operadores lineares que atuam sobre o sistema $\mathcal{H}^A$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	História e revisão da mecânica quântica usual	20
1.2	A reversão temporal usual	22
1.3	Simetrizações anteriores da mecânica quântica	25
2	FRAMEWORK DE CIRCUITOS PARA OPTS	29
2.1	Formulação usual	29
2.2	Assimetria temporal	31
2.3	Formulação generalizada	32
3	REVERSÃO TEMPORAL E SIMETRIAS GERAIS	37
3.1	Reversão temporal e transformações de simetria na formulação generalizada de OPTs	37
3.2	Forma geral das transformações de simetria	39
4	APLICAÇÃO DO FORMALISMO A PACOTES DE ONDA E MEDIDAS FRACAS	43
4.1	Formulação usual	44
4.1.1	Vetor fraco	45
4.1.2	Estado Térmico	46
4.2	Pacote de onda nas OPTs	48
4.3	A reversão temporal aplicada	52
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	59
	REFERÊNCIAS	61
	APÊNDICES	63
	APÊNDICE A – DEFINIÇÕES NECESSÁRIAS	65
A.1	Probabilidade bayesiana e a probabilidade condicionada de Aharonov, Bergmann e Lebowitz	65
A.2	Positividade completa e preservação de traço	65
A.3	POVM	66
A.4	Combinação convexa	66
A.5	Isomorfismo	66

A.6	Granulação grosseira	67
A.7	Cones convexos	67
A.8	Operadores de Kraus	67
	APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÕES	69
B.1	Teorema da não-clonagem quântica	69
B.2	Atualização de informação	70
B.3	Forma geral das transformações de simetria	71
B.3.1	Mesmo $\bar{\rho}$ para dois estados leva a um mesmo $\bar{F}$ na imagem	71
B.3.2	Estados proporcionais implicam em efeitos proporcionais	72
B.3.3	Atuação da operação de simetria em estados e efeitos	74
B.4	Evolução temporal da matriz densidade e equação de von Neumann	76
B.5	Atuação da operação	77

1 INTRODUÇÃO

A “seta do tempo” é um conceito que persegue a física de modo geral. De um lado, temos leis microscópicas que são invariantes perante reversão temporal. Veja, por exemplo, a Segunda Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

Por ser uma derivada de segunda ordem, a substituição $t \rightarrow -t$ não afeta a equação ($\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d(-t)} \frac{d}{d(-t)} = (-1)(-1) \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}$). Entretanto, a Segunda Lei da Termodinâmica,

$$\delta S_{\text{universo}} \geq 0,$$

garante que a entropia S_{universo} nunca diminui. Se por ventura algum sistema gere diferença de entropia do universo, ele automaticamente não é reversível temporalmente. Casos cotidianos, como vidro se quebrando, mostram situações de assimetria.

Na mecânica quântica, a causa da assimetria é a medida (1-2): enquanto não há medida, em qualquer uma das representações - Schrödinger, Heisenberg ou interação - a evolução temporal é unitária, sendo assim simétrica. No entanto, quando realizamos uma medida, há “o colapso da função de onda”. Ou seja, saímos de um estado que é, em geral, uma mistura, e vamos para um auto-estado do operador relacionado à medida.

Desejamos, com este trabalho, adaptar a mecânica quântica, tradicionalmente assimétrica, para uma formulação simétrica no tempo. Tal descrição foi realizada no trabalho de [Oreshkov e Cerf \(3\)](#). O objetivo do citado trabalho é tratar de gravitação quântica, que não é de nosso atual interesse. Ao invés disso, o formalismo em questão será utilizado para descrever um problema já conhecido de teoria de colisões: uma generalização de um aparato de Stern-Gerlach, adicionando uma medida fraca, inicialmente apresentada por [Aharonov, Albert e Vaidman \(4\)](#).

Nas seguintes seções da [Introdução](#), apresentaremos uma revisão da mecânica quântica como mostrada da maneira usual, seguindo, entre outras, as referências (5-7). Além disso, apresentaremos o Teorema de Wigner, bem como ele nos permite encontrar qual o tipo da transformação referente à reversão temporal (6-7), e como encontrar uma forma para ela, utilizando essa forma na reversão temporal de um *spin*. Apresentaremos uma primeira tentativa da simetrização da reversão temporal, descrita por [Aharonov, Bergmann e Lebowitz \(8\)](#) em 1964.

No [Capítulo 2](#), explicamos todo o formalismo de circuitos para Teorias Probabilístico-Operacionais (OPTs), usando como base Hardy (9-10), bem como os artigos de Chiribella, D’Ariano e Perinotti (11-12). Discutiremos a assimetria temporal apresentada por [Oreshkov](#)

e Cerf (3) e apresentaremos uma generalização dessa teoria, que será importante para explicitar novos tipos de transformações de simetria em capítulos posteriores.

No Capítulo 3, seguindo também a referência (3), é apresentado o que significa uma transformação de simetria utilizando esse formalismo de circuitos para OPTs, bem como apresentar uma generalização para o Teorema de Wigner utilizando essa estrutura.

No Capítulo 4, colocaremos em prática todo o formalismo apresentado em capítulos anteriores. Para tal fim, utilizaremos as referências (4,13-14) para entender como funciona a interação fraca e a Teoria de Colisões. Além disso, uma vez que as transformações de simetria atuam apenas em sistemas com dimensão finita, precisaremos discretizar e truncar o espaço de Hilbert tratados.

Por fim, no Capítulo 5, concluímos o trabalho de acordo com os resultados obtidos, principalmente, no Capítulo 4. Discutiremos, também, rapidamente sobre possibilidades de continuidade deste trabalho.

Além disso, utilizaremos alguns apêndices para auxílio da dissertação, sem tirar o foco das partes mais importantes. No Apêndice A há uma lista de definições que serão importantes para entendimento do que se segue, enquanto que no Apêndice B serão incluídas demonstrações diversas de partes importantes do texto.

1.1 História e revisão da mecânica quântica usual

Nesta seção, apresentaremos uma introdução sobre a mecânica quântica usual. Os artigos originais e traduzidos, além de uma ampla discussão sobre tais, foram compilados por Haar (15) e são usados para toda a introdução da velha mecânica quântica no presente trabalho.

No final do século XIX, um dos grandes problemas em aberto era o da *radiação de corpo negro*. Seu comportamento não era completamente entendido, e havia modelos apenas para regiões específicas do espectro de radiação, mas não do espectro completo. Por exemplo, a lei de Rayleigh-Jeans explica o espectro para baixas frequências, falhando próximo do ultravioleta. Obter uma lei que descrevesse a curva a partir de primeiros princípios foi possível com Planck (15)[pp. 79-90], em 1900, que argumentou* que, por um *artifício matemático*, a matéria emitiria energia em *quanta*, com energias proporcionais à frequência:

$$E = h\nu,$$

onde E é a energia em questão, o fator de proporção h é conhecido como *constante de Planck* e ν é uma certa frequência de emissão. Com isso, Planck, utilizando física estatística, obteve a lei de radiação

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1},$$

onde $u(\nu, T)$ é a densidade de energia por frequência e temperatura, c é a velocidade da luz no vácuo e K_B é a constante de Boltzmann.

Também no século XIX, um fenômeno conhecido, o *efeito fotoelétrico*, não possuía explicação. Basicamente, ao iluminar um metal, escapam cargas elétricas dele. Espera-se que o que seja capaz de retirar o elétron do metal seja a energia incidente. O problema foi que, segundo o eletromagnetismo clássico, a densidade de energia por volume da radiação luminosa u é dada por

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right),$$

com ϵ_0 sendo a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 a permeabilidade magnética do mesmo. Bastaria, então, aumentar a intensidade de qualquer fonte de luz e ela seria capaz de retirar cargas do metal, o que não acontece. Na verdade, o observado é que há uma frequência de corte ν_{cut} a partir da qual qualquer intensidade dessa luz é capaz de retirar cargas elétricas. Em 1905, Einstein (15)[pp. 91-107] propõe não que a matéria absorva *quanta* de energia, mas sim que a energia é de natureza *corpuscular*, composta de diversos *quanta*, onde a energia de cada *quantum* é $E_{quantum} = h\nu$, sendo ν é a frequência dessa radiação. Tal proposição é capaz de explicar o efeito fotoelétrico. Anos depois, esses *quanta* foram denominados *fótons*.

Um terceiro problema do século XIX foi a estabilidade do átomo. Segundo o eletromagnetismo, cargas aceleradas emitem radiação. A partir do modelo de Rutherford, o elétron orbita o núcleo atômico, tendo aceleração, e portanto deveria ter sua energia reduzida com cada ciclo, irradiada, e logo esse caindo no núcleo. Em 1913, Bohr (15)[pp. 132-159] dá algumas “regras” de como o elétron deveria se mover ao redor do núcleo, que são capazes de resolver esse problema:

- A órbita eletrônica deve ser circular.
- Essas órbitas não são quaisquer; existem órbitas “estacionárias”, onde o elétron pode se mover sem perder energia. Essas órbitas têm distâncias “discretas” do núcleo, então há regiões proibidas que o elétron não pode ser encontrado. Tais órbitas tem *momentum* angular quantizado em números inteiros de $\hbar$, a constante de Planck dividida por 2π .
- O elétron pode mudar de distância, absorvendo ou emitindo energia, contanto que a energia relacionada com ambas as órbitas tenha $h\nu$ de diferença.

* Em verdade, segundo Haar (15), Planck não argumenta sobre a quantização da energia emitida, e sim dá outros argumentos que derivam da quantização, feito, segundo cartas trocadas na época, por um “ato de desespero”. A quantização da energia emitida foi afirmada em 1906, por Einstein, sobre os argumentos de Planck.

Tais problemas, dentre outros, precisaram de uma nova teoria, diferente da teoria clássica e da física já conhecida: a *mecânica quântica*. Em 1926, [Schrödinger \(16\)](#), inspirado pela ideia de de Broglie sobre a dualidade onda-partícula, propõe uma equação que seria capaz de dar a *função de onda* de uma dada partícula de massa m , submetida a um potencial $V(\mathbf{x})$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t). \quad (1.1)$$

Nesse caso, o módulo da função de onda dá a *amplitude de probabilidade* de encontrar a partícula numa certa posição $\mathbf{x} = (x, y, z)$, num certo instante de tempo t , segundo a *interpretação de Copenhague*. A probabilidade, então, de encontrar uma partícula no volume V , no instante t , é calculada da forma

$$P(t) = \int_V \psi^*(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

tal que

$$\int_U \psi^*(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = 1,$$

onde U é o universo, todo o domínio de $\psi(\mathbf{x},t)$ em $\mathbf{x}$. Como é uma probabilidade, $P(t) \in [0, 1]$, então precisamos que $\psi(\mathbf{x},t)$ seja *quadrado integrável*.

1.2 A reversão temporal usual

Em 1931, Wigner ([7](#), pp. 233-236) propõe representações, no espaço de Hilbert, para transformações de simetria. ([17](#)) Grosseiramente, por transformação de simetria, entende-se ser uma transformação que mantenha invariante o que podemos observar. Em mecânica clássica, por exemplo, o que podemos observar é a dinâmica do sistema, regida pelas equações de Hamilton. ([18](#)) A classe de transformações de simetria que atuam na mecânica clássica é chamada de *transformação canônica*: elas transformam as variáveis de posição q e *momentum* p da forma $\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}$, mas preservam as equações

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

onde $\dot{q}$ é a derivada temporal da posição e $\dot{p}$, do momentum. Ao levar $\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}$, levamos $H \rightarrow \tilde{H}$, tendo então as novas equações da forma

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} \quad \text{e} \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}.$$

No caso da mecânica quântica, o que é mantido invariante é a *regra de Born* ([19](#), p. 863), que define a probabilidade de transição $p(\Phi, \Psi)$, dada por

$$p(\Phi, \Psi) = |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2.$$

Uma transformação de simetria T tal que $T|\Psi\rangle = |\Psi'\rangle$ e $T|\Phi\rangle = |\Phi'\rangle$ tem, portanto, a condição

$$|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = |\langle\Phi'|\Psi'\rangle|^2.$$

Teorema de Wigner. *Seja T uma transformação de simetria. Então, ela deve ser de um dos dois tipos possíveis:*

1. Linear e Unitária:

$$\begin{aligned}\langle T\Phi|T\Psi\rangle &= \langle\Phi|\Psi\rangle \text{ unitária,} \\ T(\alpha|\Psi\rangle) &= \alpha T|\Psi\rangle \text{ linear,}\end{aligned}$$

2. Antilinear e Antiunitária:

$$\begin{aligned}\langle T\Phi|T\Psi\rangle &= \langle\Phi|\Psi\rangle^* = \langle\Psi|\Phi\rangle \text{ antiunitária,} \\ T(\alpha|\Psi\rangle) &= \alpha^* T|\Psi\rangle \text{ antilinear.}\end{aligned}$$

Seguindo (6, pp. 284–297), vejamos o caso da reversão temporal de maneira usual da mecânica quântica.

Contrariamente ao nome sugestivo, a reversão temporal aplicada à equação de Schrödinger não leva $t \rightarrow -t$, pois t é apenas um parâmetro real, que não é afetado pelo operador. Um nome mais apropriado, usado pelo próprio Wigner em 1932, seria *reversão de movimento*, segundo Sakurai e Napolitano (6).

Se $\psi(\mathbf{x}, t)$ é solução da equação de Schrödinger, equação (1.1), $\psi(\mathbf{x}, -t)$ não é, graças à derivada primeira em relação a t . Contudo, tomando o complexo conjugado da equação (1.1),

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*(\mathbf{x}, t) + V^*(\mathbf{x})\psi^*(\mathbf{x}, t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

vemos claramente que fazer $t \rightarrow -t$ torna $\psi^*(\mathbf{x}, -t)$ solução da equação de Schrödinger caso $V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$. Esse complexo conjugado nos induz a pensar que um operador de reversão temporal, que denominaremos Θ , deve tomar um complexo conjugado, criando suspeitas de que ele seja antilinear.

Para descobrir se o operador Θ deve ser linear ou antilinear, precisaremos saber de antemão como ele deve afetar alguns vetores que são levados a operadores na mecânica quântica, usando para tal a mecânica clássica. Classicamente, $\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ é o *momentum* linear

e $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ é o *momentum* angular, o que implica em

$$\Theta^{-1}\mathbf{x}\Theta = \mathbf{x}, \quad (1.4)$$

$$\Theta^{-1}\mathbf{p}\Theta = -\mathbf{p}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}\mathbf{L}\Theta &= \Theta^{-1}(\mathbf{x} \times \mathbf{p})\Theta \\ &= (\Theta^{-1}\mathbf{x}\Theta) \times (\Theta^{-1}\mathbf{p}\Theta) \\ &= \mathbf{x} \times (-\mathbf{p}) \\ &= -\mathbf{L}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Essas relações serão importantes logo mais.

Suponha uma evolução temporal infinitesimal:

$$|\alpha(\delta t)\rangle \approx \left(\mathbb{I} - \frac{iH\delta t}{\hbar} \right) |\alpha(0)\rangle. \quad (1.7)$$

O que acontece quando evoluímos, temporal e infinitesimalmente, o estado reverso no tempo? Ou seja, o que significa calcular

$$\left(\mathbb{I} - \frac{iH\delta t}{\hbar} \right) \Theta |\alpha(0)\rangle? \quad (1.8)$$

Para que o estado dado pela expressão (1.8) obedeça a reversão de movimento, ele deve ser igual a $\Theta |\alpha(-\delta t)\rangle$. Assim,

$$\left(\mathbb{I} - \frac{iH\delta t}{\hbar} \right) \Theta |\alpha(0)\rangle = \Theta \left(\mathbb{I} - \frac{iH(-\delta t)}{\hbar} \right) |\alpha(0)\rangle \quad (1.9)$$

$$-iH\Theta |\alpha(0)\rangle = \Theta(iH) |\alpha(0)\rangle. \quad (1.10)$$

Se Θ for linear e unitário, ele não atua sobre o escalar complexo, o que leva a $-H\Theta = \Theta H \implies \Theta^{-1}H\Theta = -H$. Isso é impossível para um potencial qualquer, pois a parte livre do Hamiltoniano, $\frac{\mathbf{P}^2}{2m}$, é invariante por reversão de movimento. Podemos ver isso utilizando a equação (1.5):

$$\Theta^{-1}\frac{\mathbf{P}^2}{2m}\Theta = \frac{1}{2m}\Theta^{-1}\mathbf{P}\Theta \Theta^{-1}\mathbf{P}\Theta = \frac{1}{2m}(-\mathbf{P})(-\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m}.$$

Assim, Θ deve ser *antiunitário* e *antilinear*. Podemos obter isso também observando a equação (1.10) supondo Θ linear e unitário. Se $H\Theta |n\rangle = -\Theta H |n\rangle = -E_n\Theta |n\rangle$, então $\Theta |n\rangle$ é um auto-estado de H com auto-energia $-E_n$. Contudo, para uma partícula livre, $E_n \in [0, \infty)$. (6)

Queremos encontrar a forma da reversão temporal para um sistema com spin $\frac{1}{2}$, como um exemplo. Para isso, teremos uma reversão temporal antiunitária e antilinear. Qualquer operador antiunitário e antilinear pode ser escrito como o produto de um número qualquer de operadores unitários e lineares multiplicado pelo operador de conjugação

Figura 1 – Exemplo da transformação de reversão temporal atuando no spin.

Fonte: Elaborada pelo autor.

complexa, o que é feito aqui. Podemos, então, escrever $\Theta = RK_0$, onde K_0 é o operador de conjugação complexa.

Uma vez que o spin tem a mesma álgebra do *momentum* angular orbital ($[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$), queremos que ele se transforme da mesma maneira. Observando a atuação do operador de conjugação complexa:

- $K_0 S_x K_0 = S_x$,
- $K_0 S_y K_0 = -S_y$,
- $K_0 S_z K_0 = S_z$,

pois, na representação de matrizes de Pauli, apenas a componente S_y é complexa. Como $\Theta \mathbf{L} \Theta^{-1} = -\mathbf{L}$, falta inverter as componentes x e z , que pode ser feito por uma rotação de π em torno do eixo y , como mostrado na Figura 1. Como o gerador de rotações é o próprio *momentum* angular, então o operador de reversão temporal

$$\Theta = e^{i\pi \frac{S_y}{\hbar}} K_0 \quad (1.11)$$

para partículas de spin $\frac{1}{2}$.

1.3 Simetrizações anteriores da mecânica quântica

Antes de introduzir a maneira que será feita a formulação para simetrizar a mecânica quântica durante o trabalho, descreverei aqui uma forma já realizada por Aharonov, Bergmann e Lebowitz (8), que envolve o conceito de pós-seleção. Veja que o conceito de pós-seleção será utilizado posteriormente no trabalho, então é interessante entendermos como surgiu tal conceito.

Suponha que tenhamos um sistema sujeito a uma série de medidas que são capazes, cada uma, de determinar o estado quântico do sistema. Serão nomeados $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ nossos observáveis a serem medidos. Assuma que todos os autovalores são não-degenerados, por simplicidade. Indicaremos estes por d_k .

Por simplicidade, utilizaremos a representação de Heisenberg: as evoluções temporais não são feitas nos estados, mas sim nos operadores. Para uma medida feita em uma ordem

diferente de $1, 2, \dots, k, \dots$, colocaremos um superíndice no observável: A_k^m . Usando esta notação, suponha que faremos uma sequência de observações $A_m^{-M}, \dots, A_i^{j-1}$, nos resultando $d_m, \dots, d_i$. Então a probabilidade de que a próxima medida A_k^j nos resultará em d_k é

$$p(d_k | d_m, \dots, d_i) = |\langle d_i | d_k \rangle|^2 = \text{Tr}[D_i D_k], \quad (1.12)$$

onde $D_k = |d_k\rangle\langle d_k|$.

A probabilidade de que, tendo medido A_k^j , queiramos medir A_l^{j+1} resultando em d_j é

$$\begin{aligned} p(d_k, d_j | d_m, \dots, d_i) &= |\langle d_j | d_k \rangle|^2 |\langle d_k | d_i \rangle|^2 \\ &= \langle d_j | d_k \rangle \langle d_k | d_j \rangle \langle d_k | d_i \rangle \langle d_i | d_k \rangle \\ &= \langle d_j | d_k \rangle \langle d_k | d_i \rangle \langle d_i | d_k \rangle \langle d_k | d_j \rangle \\ &= \langle d_j | D_k D_i D_k | d_j \rangle \\ &= \text{Tr}[D_k D_i D_k D_j]. \end{aligned}$$

Podemos generalizar a probabilidade para uma sequência de medidas $A_k^j, A_l^{j+1}, A_n^{j+2}, \dots, A_r^{N-1}, A_s^N$, com resultados $d_k, d_l, d_n, \dots, d_r, d_s$, como

$$p(d_k, \dots, d_r, d_s | d_m, \dots, d_i) = \text{Tr}[D_s D_r \dots D_k D_i D_k \dots D_r]. \quad (1.13)$$

Veja que as equações (1.12) e (1.13) são independentes dos resultados das medidas $A_m^{-M}, \dots, A_h^{j-2}$, e também dos resultados subsequentes.

Por outro lado, consideremos o caso de medidas $J, A_k^{-M}, \dots, A_j^{-1}, A_i^0, A_l^1, A_m^2, \dots, A_n^N, F$, nesta ordem. Sejam J, F dois observáveis cujos autovalores são não-degenerados e iguais a a, b respectivamente. Realizaremos uma *pós-seleção*: ao invés de fixar apenas a medida inicial, como costume (“Prepare um sistema em que você mediu J e obteve a . Qual a probabilidade de obter os demais resultados nas seguintes medidas?”), fixamos ambos o valor inicial e o final (“Prepare um sistema em que você mediu J e obteve a . Qual a probabilidade de obter estes resultados nas seguintes medidas, sabendo que por fim você mediu F e obteve b ?”).

A probabilidade, então, de medir $A_k^{-M}, \dots, A_j^{-1}, A_i^0, A_l^1, A_m^2, \dots, A_n^N$, tendo preparado a e sabendo que vamos medir b por fim é dada por

$$\begin{aligned} p(d_k, \dots, d_n | a, b) &= \frac{p(d_k, \dots, d_n, b | a)}{p(b | a)} \\ &= \frac{\text{Tr}[A D_k \dots D_n B D_n \dots D_k]}{\sum_k \dots \sum_n \text{Tr}[A D_k \dots D_n B D_n \dots D_k]} \\ A &= |a\rangle\langle a|, B = |b\rangle\langle b| \end{aligned} \quad (1.14)$$

A equação (1.14) vem da probabilidade condicional de Bayes. Tal demonstração está feita na seção A.1. Essa expressão é simétrica no tempo: se invertermos a ordem das medidas, fixando somente os resultados de J e F , a probabilidade resulta na mesma. No caso $p(b|a) = 0$, $p(d_k, \dots, d_n|a, b)$ está indefinida. Se quisermos só alguns dos resultados d_i dentro de todos os testes que fizermos, basta tomar o marginal em relação às variáveis que não nos interessa. Aharonov afirma que a pós-seleção não é um problema do ponto de vista experimental. Em tradução livre:

Em física experimental, seleções são frequentemente baseadas em combinações de características iniciais e finais. Considere um feixe de partículas que adentra uma câmara de gás ou dispositivo similar controlado por um pulso mestre. Para que o dispositivo selecione um evento como pertencente à amostra para ser avaliada estatisticamente, a partícula deve entrar na câmara e, antes de ser manipulada por campos magnéticos, etc., satisfazer certos requisitos. Para que seja contada, a partícula também deve ativar os circuitos de contadores colocados sob a câmara; assim, fazemos uma seleção baseada tanto no estado inicial quanto no estado final. Em alguns experimentos até mesmo especificações intermediárias podem ser impostas adicionalmente às condições iniciais e finais. Assim, nosso tratamento formal em termos de estados iniciais e finais não é inconsistente com os procedimentos experimentais usados em algumas investigações.

Veja, a reversibilidade temporal acontece da seguinte forma: suponha que você realizará uma sequência de medidas de observáveis J, A, B, C, D, E, F , nesta sequência. Veja que a distribuição de probabilidades de, quando estamos num auto-estado de B , medir os auto-estados de C , depende apenas de B e de C . Se realizarmos a sequência de medidas na ordem inversa, F, E, D, C, B, A, J , a distribuição de probabilidades de se medir os auto-estados de C depende agora de D , e sendo portanto distinta.

Contudo, quando você conhece as próximas medidas, tanto no caso da direção direta do tempo, quanto na direção reversa do tempo (pré- e pós-seleção), as distribuições de probabilidades da medida de C passam a ser iguais, pois você conhece o início e o fim.

A partir do Capítulo 2, apresentaremos o *framework* alternativo, de Teorias Probabilístico-Operacionais, necessário para desenvolver a generalização da reversão temporal e posteriormente a simetrização da mecânica quântica sob tal transformação.

2 FRAMEWORK DE CIRCUITOS PARA OPTS

Coecke (20), em 2010, argumenta que há diversos resultados da mecânica quântica que são fáceis de se obter, mas que se demorou muito para descobri-los. Por exemplo, o *Teorema de não-clonagem quântica* demorou 50 anos para ser obtido, embora a demonstração seja simples (seção B.1).

Segundo ele, isso se deve ao fato de a mecânica quântica não ser intuitiva o suficiente. A partir da seção 2.1, é introduzida uma maneira que busca ser um pouco mais intuitiva da mecânica quântica, utilizando circuitos para esquematizar os sistemas físicos.

2.1 Formulação usual

Neste framework (9-10), com linguagem adaptada a (3) e inspirado por (20), nossa pedra angular será a operação. Para poder explicar o que são *operações*, precisamos da definição de *aparato*:

Definição: Um aparato $\mathcal{M}$ é um dispositivo físico contendo

1. uma forma de determinar o que constitui um único uso deste aparato;
2. aberturas que podem ser colocadas próximas de aberturas de outros aparatos;
3. resultados (por exemplo, a leitura de um medidor).

Operações são uma forma de se colocar uma estrutura por trás do *uso* de um aparato. Assim, operações são o uso de um aparato de medida em que

- podemos identificar *inputs* e *outputs* a partir das aberturas;
- restringimos nossa atenção a um conjunto $\mathcal{O}$ particular de resultados.

As operações são representadas, diagramaticamente, pela Figura 2, onde a caixa representa o aparato experimental, e os fios suas aberturas. Simbolizamos o circuito citado por $\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$: A é o sistema de *input*, B o sistema de *output* e o índice i representa

$$A - \boxed{\{\mathcal{M}_i\}} - B.$$

Figura 2 – Exemplo de operação.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3 – Exemplos de (a) preparação e (b) medida.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4 – Circuitos fechados representam probabilidades.

Fonte: Elaborada pelo autor.

qual dos resultados de $\mathcal{O}$ foi obtido na medida. Simplificaremos os desenhos ocultando o domínio do resultado, para tornar o desenho mais leve.

O sistema trivial, I , é representado sem fio. Operações cujo *input* é trivial são chamadas de preparações, representadas por $\{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}$; quando o *output* é trivial, são chamadas de medidas, escritas como $\{E_j^{A \rightarrow I}\}_{j \in \mathcal{Q}}$, como mostrado na Figura 3. Para representar melhor o sistema trivial como *input/output*, curvamos o lado cuja abertura é associada ao sistema trivial.

Ao compormos preparações, operações e medidas em um circuito - composição acíclica de operações sem fios abertos ($I \rightarrow I$) -, obtemos probabilidades conjuntas. Por exemplo, o circuito da Figura 4 dá a probabilidade $p(i, j, k | \{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}, \{\mathcal{M}_j^{A \rightarrow B}\}_{j \in \mathcal{Q}}, \{E_k^{B \rightarrow I}\}_{k \in \mathcal{R}})$. Uma vez que circuitos representam probabilidades, na Figura 4 temos as propriedades:

$$p(i, j, k | \{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}, \{\mathcal{M}_j^{A \rightarrow B}\}_{j \in \mathcal{Q}}, \{E_k^{B \rightarrow I}\}_{k \in \mathcal{R}}) \geq 0;$$

$$\sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{Q}} \sum_{k \in \mathcal{R}} p(i, j, k | \{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}, \{\mathcal{M}_j^{A \rightarrow B}\}_{j \in \mathcal{Q}}, \{E_k^{B \rightarrow I}\}_{k \in \mathcal{R}}) = 1.$$

De maneira geral, representaremos estados por *letras gregas* (ρ), efeitos por *letras romanas* (E) e operações por *letras caligráficas* ($\mathcal{M}$).

Uma Teoria Probabilístico-Operacional (OPT) é definida especificando todas as operações e as probabilidades possíveis para todos os circuitos. Basicamente, se $\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$ e $\{\mathcal{N}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$ podem ser trocados um pelo outro em todos os circuitos e, *ceteris paribus*, as probabilidades conjuntas são as mesmas, então $\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$ e $\{\mathcal{N}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$ são a mesma operação.

Cada elemento $\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \in \{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$ recebe o nome de *transformação*. No caso de preparações, $\rho_j^{I \rightarrow A}$ são chamados de *estados* e, no caso de medidas, $E_k^{A \rightarrow I}$ são *efeitos*. Assim, as probabilidades conjuntas de preparações e medidas são funções do estado e do efeito apenas, $p(i, j | \{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}, \{E_j^{A \rightarrow I}\}_{j \in \mathcal{Q}}) = p(\rho_i^{I \rightarrow A}, E_j^{A \rightarrow I})$, o que torna estados funções reais de efeitos e vice versa.

A teoria quântica é um caso especial de OPT, cujo sistema A equivale a um espaço de Hilbert, geralmente de dimensão finita d_A , $\mathcal{H}^A$. Além disso, uma transformação de A para B é um mapa linear $\mathcal{M}^{A \rightarrow B} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}^B)$ completamente positivo (CP) e que não aumenta traço. $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$ é o espaço de mapas lineares que atuam em $\mathcal{H}^X$. Para um entendimento melhor do que representa a positividade completa, mais informações estão na [seção A.2](#).

Uma operação quântica padrão é uma coleção de mapas CP $\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$, cuja soma de todas as transformações da coleção é completamente positiva que preserva traço (CPTP), representada por $\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B} = \sum_{i \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}$. Sobre preservação de traço, veja a [seção A.2](#).

Na teoria quântica usual, estados e efeitos ($\rho^{I \rightarrow A}$ e $E^{A \rightarrow I}$) são isomorfos (definido na [seção A.5](#)) a operadores positivos semi-definidos $\rho^A, E^A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^A)$ (isomorfismo de Choi-Jamiolkowski (17)). Uma preparação é uma coleção de operadores positivo semi-definido (PS) com o vínculo $\sum_{i \in \mathcal{O}} \text{Tr}[\rho_i^A] = 1$ e uma medida é uma coleção de operadores PS cujo vínculo é $\sum_{j \in \mathcal{Q}} E_j = \mathbb{I}^A$, tal que a probabilidade conjunta de estados e efeitos é dada por

$$p(\rho_i^{I \rightarrow A}, E_j^{A \rightarrow I}) = \text{Tr}[\rho_i^A E_j^A]. \quad (2.1)$$

Tal medida é conhecida como *Positive-Operator Valued Measure* (POVM), apresentada na [seção A.3](#).

2.2 Assimetria temporal

Na formulação acima descrita, a mecânica quântica respeita causalidade. (12) Assim, as preparações realizadas são independentes dos resultados de medidas realizadas, embora as medidas possam depender dos resultados de preparações, tornando a mecânica quântica assimétrica. Como [Oreshkov e Cerf \(3\)](#) descrevem, em tradução livre,

Operações na formulação padrão da teoria quântica devem obedecer o axioma da causalidade (11-12), que diz que para toda preparação $\{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}$ composta com uma medida $\{E_j^{A \rightarrow I}\}_{j \in \mathcal{Q}}$, as probabilidades dos eventos de preparação não dependem da medida:

$$\sum_{j \in \mathcal{Q}} p(i, j | \{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}, \{E_j^{A \rightarrow I}\}_{j \in \mathcal{Q}}) = p(i | \{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}})$$

é a mesma para todo $\{E_j^{A \rightarrow I}\}_{j \in \mathcal{Q}}$.

A essência da assimetria pode ser entendida observando que uma operação padrão é feita sem pós-seleção: a ocorrência de uma operação é condicional a resultados passados, informações disponíveis em um tempo anterior ao sistema de *input*. Se fosse condicional a informações disponíveis no futuro, violaríamos o axioma.

Uma teoria simétrica no tempo deve descrever o que é observado nas duas direções temporais a partir das mesmas regras. Se operações padrões não aceitam pós-seleção,

apenas uma direção temporal tem eventos que correspondem a operações válidas. A única forma, assim, de obter uma teoria temporalmente simétrica, utilizando a linguagem de *OPTs*, deve deixar de lado a suposição de não poder-se utilizar pós-seleção.

Com isso em mente, introduzimos na [seção 2.3](#) uma generalização para essa formulação, cuja a ideia é de considerar apenas a informação disponível na caixa, sem levar em conta o tempo em que essa informação foi obtida.

2.3 Formulação generalizada

Uma operação válida é um conjunto de eventos possíveis obtidos por um procedimento local, dentro de uma caixa, sem assumirmos pré- ou pós-seleção. Caso algum conjunto defina uma operação válida, então qualquer subconjunto dele também define.

Considere uma caixa de preparação implementando a preparação padrão $\{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}}$, conectada, a partir do sistema A , a uma caixa de medida implementando a medida padrão $\{E_j^A\}_{j \in \mathcal{Q}}$. As probabilidades conjuntas dos resultados de preparação e medida são dadas, assim, pela [equação \(2.1\)](#).

Assumindo não nula a probabilidade de o evento de preparação pertencer, não apenas a $\mathcal{O}$, mas a um subconjunto $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, bem como o evento de preparação pertencer a $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ (descartamos localmente os casos que esses eventos não pertencem aos respectivos subconjuntos), obtemos

$$p(i, j | \{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}'}, \{E_j^A\}_{j \in \mathcal{Q}'}) = \frac{\text{Tr}[\rho_i^A E_j^A]}{\sum_{l \in \mathcal{O}', m \in \mathcal{Q}'} \text{Tr}[\rho_l^A E_m^A]} \quad (2.2)$$

como probabilidades conjuntas de duas novas operações conectadas entre si pelo sistema A .

A partir da [equação \(2.2\)](#), vemos que dois conjuntos de eventos de preparação descritos por $\{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}'}$ e $\{\sigma_i^A\}_{i \in \mathcal{O}'}$ resultam nas mesmas probabilidades caso difiram apenas por uma constante α positiva*: $\sigma_i = \alpha \rho_i$, $\forall i \in \mathcal{O}'$. O mesmo vale para eventos de medida. Assim, podemos admitir uma normalização que nos livre disso.

Definimos, então, eventos de preparação e medida equivalentes como operadores PS, com as condições:

$$\begin{aligned} \{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}}, \quad \sum_{i \in \mathcal{O}} \text{Tr}[\rho_i^A] &= 1 \\ \{E_j^A\}_{j \in \mathcal{Q}}, \quad \sum_{j \in \mathcal{Q}} \text{Tr}[E_j^A] &= d_A, \end{aligned}$$

onde d_A é a dimensão do sistema A .

* A constante α deve ser positiva pois ρ é PS, e uma constante negativa o tornaria negativo semi-definido.

Preparações são descritas como anteriormente. Contudo, as medidas estão mais gerais, pois a restrição antiga é de *POVM*, $\sum_{j \in \mathcal{Q}} E_j^A = \mathbb{I}^A$, que em particular satisfaz também a condição nova.

Podemos introduzir uma notação auxiliar:

$$\begin{aligned}\bar{\rho}^A &= \sum_{i \in \mathcal{O}} \rho_i^A \\ \bar{E}^A &= \sum_{j \in \mathcal{Q}} E_j^A\end{aligned}$$

e, como $\sum_i \sum_j \text{Tr}[A_i B_j] = \text{Tr}[\sum_i \sum_j A_i B_j]$, a [equação \(2.1\)](#) se torna:

$$p(i, j | \{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}}, \{E_j^A\}_{j \in \mathcal{Q}}) = \frac{\text{Tr}[\rho_i^A E_j^A]}{\text{Tr}[\bar{\rho}^A \bar{E}^A]}, \quad \forall i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q} \quad (2.3)$$

para qualquer combinação de preparação e medida com $\bar{E}^A \bar{\rho}^A \neq 0^A$, onde 0^A é a operação nula no sistema A, i.e., aquela que é incapaz de conectar o sistema A a qualquer outro sistema, inclusive o trivial. No caso $\bar{E}^A \bar{\rho}^A = 0^A$, $p(i, j | \{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}}, \{E_j^A\}_{j \in \mathcal{Q}}) \equiv 0$.

Agora, é fácil ver que classes de equivalência de eventos de preparação, denominados *estados*, são agora dados pelo par de operadores positivos semi-definidos $(\rho^A; \bar{\rho}^A)$ com $\text{Tr}[\bar{\rho}^A] = 1$. Por sua vez, classes de equivalência de eventos de medidas, *efeitos*, são descritas por um par de operadores positivos semi-definidos $(E^A; \bar{E}^A)$ tal que $\text{Tr}[\bar{E}^A] = d^A$.

Veja que esta nova definição para efeitos não satisfaz, de modo geral, a **combinação convexa**, definida na [seção A.4](#). Considere, no *framework* generalizado, os estados determinísticos (estados associados com o resultado de uma preparação de único-resultado) $(\bar{\rho}_1; \bar{\rho}_1)$ e $(\bar{\rho}_2; \bar{\rho}_2)$, com $\bar{\rho}_1 \neq \bar{\rho}_2$. Utilizando estados como funções nos efeitos, queremos encontrar um procedimento de preparação numa caixa fechada que nos dê uma combinação convexa como a [equação \(A.3\)](#). Assim, a combinação convexa desejada deve ser da forma $(\rho; \bar{\rho})$. A probabilidade de medir o estado escrito ao lado direito da equação, com um efeito qualquer $(E; \bar{E})$, é dada por:

$$\begin{aligned}p(\lambda \bar{\rho}_1 + (1 - \lambda) \bar{\rho}_2, E) &= \lambda p(\bar{\rho}_1, E) + (1 - \lambda) p(\bar{\rho}_2, E) \\ &= \lambda \frac{\text{Tr}[\bar{\rho}_1 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}_1 \bar{E}]} + (1 - \lambda) \frac{\text{Tr}[\bar{\rho}_2 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}_2 \bar{E}]}.\end{aligned}$$

Veja que, se $(\bar{\rho}_1; \bar{\rho}_1)$ e $(\bar{\rho}_2; \bar{\rho}_2)$ são estados, então $\text{Tr}[\bar{\rho}_1] = \text{Tr}[\bar{\rho}_2] = 1$. Tomando $\bar{E} = \mathbb{I}$, os denominadores se reduzem a este traço e então:

$$\begin{aligned}p(\lambda \bar{\rho}_1 + (1 - \lambda) \bar{\rho}_2, E) &= \lambda \text{Tr}[\bar{\rho}_1 E] + (1 - \lambda) \text{Tr}[\bar{\rho}_2 E] \\ &= \text{Tr}[(\lambda \bar{\rho}_1 + (1 - \lambda) \bar{\rho}_2) E].\end{aligned}$$

Fazendo $\rho = \bar{\rho} = \lambda \bar{\rho}_1 + (1 - \lambda) \bar{\rho}_2$ (que também é um estado), podemos escrever:

$$\frac{\text{Tr}[(\lambda \bar{\rho}_1 + (1 - \lambda) \bar{\rho}_2) E]}{\text{Tr}[(\lambda \bar{\rho}_1 + (1 - \lambda) \bar{\rho}_2) \bar{E}]} = \lambda \frac{\text{Tr}[\bar{\rho}_1 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}_1 \bar{E}]} + (1 - \lambda) \frac{\text{Tr}[\bar{\rho}_2 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}_2 \bar{E}]}.$$

Contudo, perceba que isso é apenas no caso $\bar{E} = \mathbb{I}$, que não é verdade no caso geral. Dessa forma, as probabilidades em geral não respeitam a combinação convexa. Isso quer dizer que, mesmo que concebamos a ideia de combinações convexas dessas funções, elas não correspondem necessariamente a eventos obtíveis por procedimentos locais em caixas de preparação e medidas.

Estados determinísticos são descritos pelo par de operadores densidade iguais $(\bar{\rho}; \bar{\rho})$. Graças a essa redundância, podemos parametrizar o espaço de estados determinísticos utilizando um único operador densidade, assim como na formulação usual. As probabilidades resultados de medida sobre um estado determinístico $\bar{\rho}^A$ são dadas, então, por

$$p(j|E_j^A, \bar{\rho}^A) = \begin{cases} \frac{\text{Tr}[\bar{\rho}^A E_j^A]}{\text{Tr}[\bar{\rho}^A \bar{E}^A]} & , \text{ para } \text{Tr}[\bar{\rho}^A \bar{E}^A] \neq 0 \\ 0 & , \text{ para } \text{Tr}[\bar{\rho}^A \bar{E}^A] = 0 \end{cases}.$$

Assim como classes de equivalência entre preparações e medidas, podemos definir classes de equivalência de *operações* e *eventos*. Classes de equivalência de operações são descritas por um conjunto de mapas CP com

$$\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}, \sum_{i \in \mathcal{O}} \text{Tr} \left[\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right] = 1, \quad (2.4)$$

que reduz à normalização de preparações e medidas nos casos limites respectivos. Definindo

$$\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B} = \sum_{i \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B},$$

vemos que eventos equivalentes, assim como preparações e medidas, são descritos por pares de mapas CP $(\mathcal{M}^{A \rightarrow B}; \bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B})$, com $\mathcal{M}^{A \rightarrow B}(\rho^A) \leq \bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B}(\rho^A)$, $\forall \rho^A \geq 0$ e $\text{Tr} \left[\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right] = 1$.

Uma composição de duas operações $\{\mathcal{N}_j^{B \rightarrow C}\}_{j \in \mathcal{Q}}$ e $\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$, quando são compatíveis entre si (ou seja, da mesma forma que preparações e medidas, não compõem o mapa nulo entre os sistemas A e C, i.e., $\bar{\mathcal{N}}^{B \rightarrow C} \circ \bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B} = 0^{A \rightarrow C}$), resulta na composição sequencial $\{\mathcal{L}_{ij}^{A \rightarrow C}\}$, que tem mapa CP da forma

$$\mathcal{L}_{ij}^{A \rightarrow C} = \frac{\mathcal{N}_j^{B \rightarrow C} \circ \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}}{\text{Tr} \left[\bar{\mathcal{N}}^{B \rightarrow C} \circ \bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]}, \quad i \in \mathcal{O}, \quad j \in \mathcal{Q}. \quad (2.5)$$

O símbolo $\circ$ representa a composição entre dois mapas. Ou seja, podemos escrever

$$(\mathcal{N}_j^{B \rightarrow C} \circ \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B})(\rho) = \mathcal{N}_j^{B \rightarrow C}(\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}(\rho)).$$

Como estamos olhando as possibilidades de uma dada caixa, irrestrito ao tempo que as informações de entrada ou saída são obtidas, é necessário introduzir a *atualização de informação*. Basicamente, precisamos atualizar a descrição de uma caixa quando se

recebe mais informações de seu resultado. Para uma operação da forma $\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$, $\text{Tr} \left[\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}_A}{d_A} \right) = 1 \right]$, sua versão atualizada pode ser escrita como:

$$\mathcal{M}_j^{A \rightarrow B} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{O}} T(i, j) \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}}{\sum_{i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q}} T(i, j) \text{Tr} \left[\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}_A}{d_A} \right) \right]}, \quad (2.6)$$

como apresentado na [seção B.2](#), em que $T(i, j)$ é um coeficiente real positivo. Podemos usar dois casos como exemplo: primeiro, vamos descartar toda a informação que temos. Nosso novo espaço C' tem como possível resultado $\mathcal{Q} = \{e\}$, um estado único, tal que $T(e, i) = 1, \forall i \in \mathcal{O}$. Assim, a operação $\{\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B}\}$ é determinística, bem como completa e grosseiramente granulada. Por outro lado, caso o resultado da operação faça parte de um subconjunto $\mathcal{O}' = \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}$, $T(i, i) = p > 0, \forall i \in \mathcal{Q}$ e $T(i, j) = 0$ para $i \neq j$. Assim, somos capazes de obter qualquer operação nesse novo formalismo a partir de uma operação padrão (uma cujos mapas CP somam um mapa CPTP) e com o uso de pós-seleção.

De maneira geral, eventos transformam sistemas em sistemas. Por exemplo, o evento $\mathcal{M}^{A \rightarrow B}$ representa uma operação que leva uma preparação do sistema A ao sistema B , que não necessariamente são sistemas isomorfos. Em geral, as dimensões dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}^A$ e $\mathcal{H}^B$ são distintas. Assim, precisamos descrevê-los utilizando *operadores de Kraus*, como apresentado na [seção A.8](#).

3 REVERSÃO TEMPORAL E SIMETRIAS GERAIS

3.1 Reversão temporal e transformações de simetria na formulação generalizada de OPTs

Oreshkov e Cerf (3) propõem novas formas de transformações de simetria, com maior variedade que as transformações de Wigner. Sob reversão temporal, esperamos que cada operação $\{\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}\}_{i \in \mathcal{O}}$ seja mapeada a uma operação $\{\tilde{\mathcal{M}}_i^{B \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}}$, tal que as probabilidades do circuito sejam mantidas invariantes. Em particular, estados são mapeados em efeitos e vice-versa, como ilustrado nas Figuras 5 e 6, mantendo a probabilidade conjunta preservada. Veja que em ambas as figuras, o rótulo dado à reversão temporal do estado não é o mesmo rótulo dado ao estado, bem como o rótulo dado à reversão temporal do efeito não é o mesmo rótulo dado ao efeito.

A reversão temporal, no entanto, é apenas um dos muitos mapas que satisfazem isso. Descreveremos todos os tipos de transformação de simetria antes de nos atentarmos à reversão temporal.

Um ponto crucial da análise é que estados e efeitos no mesmo sistema A são objetos distintos, que vivem em espaços distintos - que representaremos por St^A e Eff^A - mesmo que descrevamos ambos como operadores que atuam no mesmo espaço. No caso, os descrevemos como operadores graças a um isomorfismo que temos dos mapas, dado pela escolha de representação do pareamento dos objetos: $(\rho^{I \rightarrow A}, E^{A \rightarrow I}) = \text{Tr}[\rho^A E^A]$. Os próximos parágrafos tornarão expostas estas ideias de maneira mais técnica. Para não haver dúvidas, o termo *isomorfismo* está definido na [seção A.5](#).

As preparações $\{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}}$ são elementos do espaço vetorial $\mathcal{V}^A$ definido pelos mapas CP $\{\rho_i^{I \rightarrow A}\}_{i \in \mathcal{O}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}^A$, cujos elementos são isomorfos a $\mathcal{V}^A$. Medidas, da mesma forma,

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T} & \\ \text{---} \boxed{\rho_i} & \longrightarrow & \boxed{F_i} \text{---} \\ & \text{(reversão temporal)} & \end{array}$$

Figura 5 – Reversão temporal de estado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T} & \\ \boxed{E_j} \text{---} & \longrightarrow & \text{---} \boxed{\sigma_j} \\ & \text{(reversão temporal)} & \end{array}$$

Figura 6 – Reversão temporal de efeito.

Fonte: Elaborada pelo autor.

também são operadores de um espaço vetorial, o dual de $\mathcal{V}^A$, denominado $\mathcal{V}^{A*}$. Seus elementos serão representados por E^{A*} (que também são, na realidade, mapas lineares CP $\{E_j^{I \rightarrow A}\}_{j \in \mathcal{Q}} : \mathcal{V}^{A*} \rightarrow \mathbb{R}$). Veja que, se a dimensão de $\mathcal{V}^A$ for finita, então $\mathcal{V}^{A*}$ é isomorfo a $\mathcal{V}^A$. Não quer dizer, claro, que se a dimensão de $\mathcal{V}^A$ for infinita, não possa existir tal isomorfismo.

De maneira geral, podemos unir elementos dos dois espaços vetoriais. Esta união chamaremos de pareamento. Esse pareamento, (E^A, ρ^A) , neste caso nos dá um número: $(E^A, \rho^A) \in \mathbb{R}, \forall E^{A*} \in \mathcal{V}^{A*}, \forall \rho^A \in \mathcal{V}^A$, representado por $\text{Tr}[\rho^A E^A]$, onde $E^A \in \mathcal{V}^A$ corresponde, via isomorfismo, a E^{A*} . Esse isomorfismo nasce, de maneira geral, da forma que escolhemos o pareamento, e não da física envolvida.

No caso de reversão temporal, no entanto, também temos um isomorfismo entre dois espaços vetoriais (pela forma que a reversão temporal atua em preparações e medidas). Veja também que esse isomorfismo em particular não nasce graças ao pareamento dito anteriormente, e sim da física envolvida. Isso se dá pois a reversão temporal é uma transformação de simetria, e, portanto, mantém a regra de probabilidade (2.3) invariante.

Sob reversão temporal $\mathcal{T}$, conjuntos de vetores $\{\rho_i^A\}_{i \in \mathcal{O}} \in \mathcal{V}^A$ correspondentes a preparações válidas se tornam um conjunto de vetores $\{F_i^{A*}\}_{i \in \mathcal{O}}$ correspondentes a medidas válidas. Da mesma forma, o conjunto de operações $\{E_j^{A*}\}_{j \in \mathcal{Q}}$, que representa medidas, tem como imagem sob reversão temporal o conjunto $\{\sigma_j^{A*}\}_{j \in \mathcal{Q}}$ de preparações. Em outras palavras, isso equivale a uma bijeção, via $\mathcal{T}$, entre estados $(\rho^A; \bar{\rho}^A)$, $\rho^A, \bar{\rho}^A \in \mathcal{V}^A$ e efeitos $(E^{A*}; \bar{E}^{A*})$, $E^{A*}, \bar{E}^{A*} \in \mathcal{V}^{A*}$. Isso não significa, não obstante, que há de fato uma bijeção entre $\mathcal{V}^A$ e $\mathcal{V}^{A*}$ atuando a transformação independentemente em cada vetor no par $(\rho^A; \bar{\rho}^A)$.

Uma vez que estados e efeitos estão em espaços distintos, e são objetos diferentes, transformações de simetria devem ser definidas atuando no produto cartesiano $\mathcal{S}^A : \text{St}^A \times \text{Eff}^A \rightarrow \text{St}^A \times \text{Eff}^A$, tanto no espaço de estados quanto no espaço de efeitos. Podemos, então, definir dois tipos de transformações de simetria: as de tipo I, que levam estados a estados e efeitos a efeitos, como por exemplo uma rotação espacial: não importa se você girar todo seu equipamento em conjunto, a preparação continua sendo a preparação e a medida continua sendo a medida. Por outro lado, também há as transformações de tipo II, que levam estados a efeitos e vice versa, como, por exemplo, reversão temporal.

No caso de transformações de tipo I, podemos pensar na transformação de simetria $\mathcal{S}^A$ consistindo de duas operações, uma que leva estados a estados, $\mathcal{S}_{s \rightarrow s}^A$ e outra que leva efeitos a efeitos, $\mathcal{S}_{e \rightarrow e}^A$. Já as transformações de tipo II constituem também de duas operações, $\mathcal{S}_{s \rightarrow e}^A : \text{St}^A \rightarrow \text{Eff}^A$ e $\mathcal{S}_{e \rightarrow s}^A : \text{Eff}^A \rightarrow \text{St}^A$.

Uma maneira coloquial, e não rigorosa, de entender o que é realizado na transformação de tipo II é pensar em dois conjuntos, um de bolas e um de cubos. Segundo a

mecânica quântica usual, a reversão temporal leva um estado final $|\Phi\rangle$ a um estado inicial $|\Psi\rangle$. Contudo, pela lógica apresentada nesta seção, o que entendemos por estado inicial é uma preparação (uma bola) e, por estado final, um efeito (um cubo). Não podemos simplesmente transportar uma bola ao conjunto de cubos (um estado ao conjunto de efeitos) e acreditar que o conjunto de cubos ainda é composto apenas de cubos. Da mesma maneira, não podemos transportar um cubo ao conjunto de bolas (um efeito ao conjunto de estados) e argumentar que o conjunto de bolas contém apenas bolas. Para isso, precisamos na verdade “cortar” a bola para que ela seja semelhante a um cubo, bem como “inflar” um cubo para que este se assemelhe a uma bola.

3.2 Forma geral das transformações de simetria

Utilizamos a maneira que operações são atualizadas ganhando-se ou descartando-se informação, a partir da [equação \(2.6\)](#), que deve ser invariante a partir de transformações de simetria. Observe, a princípio, que no caso de granulação grosseira ([seção A.6](#)), dois estados compartilham o mesmo $\bar{\rho}$ se e somente se suas transformações, que são efeitos, compartilharem o mesmo $\bar{F}$ ([subseção B.3.1](#)), bem como se dois efeitos compartilham o mesmo $\bar{E}$, suas transformações, que são estados, devem compartilhar o mesmo $\bar{\sigma}$.

Considere dois estados $(\rho_1; \bar{\rho})$ e $(\rho_2; \bar{\rho})$ cujas imagens em respeito à transformação de simetria são, respectivamente, $(F_1; \bar{F})$ e $(F_2; \bar{F})$. Tome, então, um estado qualquer $(\lambda; \bar{\rho}) = (q\rho_1 + (1-q)\rho_2; \bar{\rho})$, $q \in [0, 1]$. A partir da [equação \(2.3\)](#), a probabilidade conjunta de se obter esse estado com um efeito qualquer $(E; \bar{E})$ é dada por

$$\begin{aligned} p((\lambda; \bar{\rho}), (E, \bar{E})) &= \frac{\text{Tr}[q\rho_1 + (1-q)\rho_2 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}\bar{E}]} \\ &= q \frac{\text{Tr}[\rho_1 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}\bar{E}]} + (1-q) \frac{\text{Tr}[\rho_2 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}\bar{E}]} \end{aligned}$$

Percebendo que as razões dos traços são as probabilidades, reconhecemos então

$$p((\lambda; \bar{\rho}), (E, \bar{E})) = qp((\rho_1; \bar{\rho}), (E, \bar{E})) + (1-q) p((\rho_2; \bar{\rho}), (E, \bar{E})).$$

Da mesma forma, um efeito $(G; \bar{F}) = (qF_1 + (1-q)F_2; \bar{F})$, com o mesmo q , pareado com um estado qualquer $(\sigma; \bar{\sigma})$ deve ter sua probabilidade conjunta dada por

$$p((\sigma; \bar{\sigma}), (G, \bar{F})) = qp((\sigma; \bar{\sigma}), (F_1, \bar{F})) + (1-q)p((\sigma; \bar{\sigma}), (F_2, \bar{F})).$$

Contudo, se escolhermos $(\sigma; \bar{\sigma})$ como sendo a imagem de $(E; \bar{E})$, então as probabilidades acima devem ser iguais. Uma vez que os estados (efeitos) são completamente caracterizados pelas probabilidades conjuntas com todos os efeitos (estados), então temos que $(qF_1 + (1-q)F_2; \bar{F})$ deve ser a imagem de $(q\rho_1 + (1-q)\rho_2; \bar{\rho})$ por uma transformação que denominaremos por τ . Em outras palavras, para todo $\bar{\rho}$ fixo, τ transforma ρ , do estado $(\rho; \bar{\rho})$, por um mapa linear positivo, que possa depender de $\bar{\rho}$.

Utilizando agora o segundo caso de atualização de informação - quando o resultado faz parte de um certo subconjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{O}$ - vemos que dois estados têm ρ proporcional se e somente se suas imagens tiverem F proporcional também (ver [subseção B.3.2](#)). Com isso, podemos ver que a forma da transformação, em função de τ , deve ser:

$$\tau_s(\rho; \bar{\rho}) = d \frac{\tau_s(\rho; \mathbb{I}/d)}{\text{Tr}[\tau_s(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d)]}$$

para estados (onde d é a dimensão de ρ); e

$$\tau_e(E; \bar{E}) = \frac{\tau_e(E; \mathbb{I})}{\text{Tr}[\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]}$$

para efeitos, como apresentado na [subseção B.3.3](#).

Dessa forma, a transformação de tipo II para estados é dada, então, por

$$\hat{S}_{s \rightarrow e}(\rho; \bar{\rho}) = (F; \bar{F}) = \left(d \frac{\tau_s(\rho; \mathbb{I}/d)}{\text{Tr}[\tau_s(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d)]}; d \frac{\tau_s(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d)}{\text{Tr}[\tau_e(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d)]} \right). \quad (3.1)$$

Para efeitos, a transformação é da forma

$$\hat{S}_{e \rightarrow s}(E; \bar{E}) = (\sigma; \bar{\sigma}) = \left(\frac{\tau_e(E; \mathbb{I})}{\text{Tr}[\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]}; \frac{\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})}{\text{Tr}[\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]} \right). \quad (3.2)$$

Basta agora substituir τ pela sua operação em seus argumentos. Segundo [Wolf \(17\)](#), como $\hat{S}_{s \rightarrow e}$ atua como bijeção do espaço de estados ao espaço de efeitos, então τ mapeia o cone* de operadores PS sobre $\mathcal{H}$ nele mesmo. Em sua proposição 3.6, então, [Wolf \(17\)](#) afirma que isso torna τ_s ou da forma $\tau_s(\rho; \mathbb{I}/d) = S\rho S^\dagger$ ou da forma $\tau_s(\rho; \mathbb{I}/d) = S\rho^T S^\dagger$, com S inversível.

Para obter a transformação de efeitos, sabemos que a probabilidade condicional conjunta de estados e efeitos não é alterada; logo, $p(\hat{S}_{s \rightarrow e}(\rho; \bar{\rho}); \hat{S}_{e \rightarrow s}(E; \bar{E})) = p((\rho; \bar{\rho}), (E, \bar{E}))$.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{s \rightarrow e}(\rho; \bar{\rho}) &= \left(d \frac{S\rho S^\dagger}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger]}; d \frac{S\bar{\rho}S^\dagger}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger]} \right) \\ \hat{S}_{e \rightarrow s}(E; \bar{E}) &= \left(\frac{\tau_e(E; \mathbb{I})}{\text{Tr}[\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]}; \frac{\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})}{\text{Tr}[\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]} \right) \\ p((\rho; \bar{\rho}), (E, \bar{E})) &= \frac{\text{Tr}[\rho E]}{\text{Tr}[\bar{\rho} \bar{E}]} \\ p(\hat{S}_{s \rightarrow e}(\rho; \bar{\rho}); \hat{S}_{e \rightarrow s}(E; \bar{E})) &= \left(d \frac{\text{Tr}[S\rho S^\dagger \tau_e(E; \mathbb{I})]}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger] \text{Tr}[\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]} \right) \left(d \frac{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger \tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger] \text{Tr}[\tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]} \right)^{-1} \\ &= \frac{\text{Tr}[S\rho S^\dagger \tau_e(E; \mathbb{I})]}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger \tau_e(\bar{E}; \mathbb{I})]}. \end{aligned}$$

Veja que, para $\tau_e(E; \mathbb{I}) = S^{-1\dagger} E S^{-1}$,

$$p(\hat{S}_{s \rightarrow e}(\rho; \bar{\rho}); \hat{S}_{e \rightarrow s}(E; \bar{E})) = \frac{\text{Tr}[S\rho S^\dagger S^{-1\dagger} E S^{-1}]}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger S^{-1\dagger} \bar{E} S^{-1}]} \quad (3.3)$$

* Veja a [seção A.7](#) para uma definição de cones convexas.

Utilizando a propriedade de ciclicidade dos traços e que $S^\dagger(S^{-1})^\dagger = (S^{-1}S)^\dagger = \mathbb{I}$, temos

$$\begin{aligned} p(\hat{S}_{s \rightarrow e}(\rho; \bar{\rho}); \hat{S}_{e \rightarrow s}(E; \bar{E})) &= \frac{\text{Tr}[\rho E]}{\text{Tr}[\bar{\rho} \bar{E}]} \\ &= p((\rho; \bar{\rho}), (E, \bar{E})). \end{aligned}$$

As transformações, assim como as dos estados, podem ser feitas para E^T , que, pelos mesmos passos, nos levam a $\tau_e(E; \mathbb{I}) = S^{-1\dagger} E^T S^{-1}$.

Basta agora tratarmos de como deve ser a forma de S . Tudo o que foi pedido até agora é que S fosse inversível. De modo geral, S depende da base de transposição; assim, o operador específico S é determinado de acordo com a dinâmica do sistema e podemos encontrá-lo buscando as transformações de observáveis, assim como feito na [seção 1.2](#). (3) Além disso, a formulação generalizada permite S 's não-unitários.

Assim como descrevem [Oreshkov e Cerf \(3\)](#), a transformação de tipo II tem duas variantes: ambas são a [equação \(3.1\)](#), uma com $\tau_s(\rho; \mathbb{I}/d) = S\rho S^\dagger$ e outra com $\tau_s(\rho; \mathbb{I}/d) = S\rho^T S^\dagger$. Segundo os autores, podemos verificar qual das duas variantes o mapa de reversão temporal deve ser; no caso, será da segunda forma. O argumento segue nas seguintes linhas: considere, na mecânica quântica padrão, a evolução unitária de sistemas isolados, regida pela equação de Schrödinger [\(1.1\)](#) a partir de um Hamiltoniano H , e considere também, com o auxílio de Wigner [\(7\)](#), que o mesmo tipo de evolução deve ser feito sob reversão temporal por um Hamiltoniano com o mesmo espectro. Seja uma transformação geral $(\mathcal{M}^{A \rightarrow B}; \bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B})$, com $\mathcal{M}^{A \rightarrow B}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{d^A d^B} K_\alpha(\cdot) K_\alpha^\dagger$, $\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{d^A d^B} \bar{K}_\alpha(\cdot) \bar{K}_\alpha^\dagger$ (onde $(\cdot)$ representa o argumento de $\mathcal{M}^{A \rightarrow B}$), que sob reversão temporal $\mathcal{T}$, é transformada em

$$(\mathcal{M}^{A \rightarrow B}; \bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B}) \xrightarrow{\mathcal{T}} (\tilde{\mathcal{M}}^{B \rightarrow A}; \tilde{\bar{\mathcal{M}}}^{B \rightarrow A}) \quad (3.4)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}^{B \rightarrow A}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{d^A d^B} \tilde{K}_\alpha(\cdot) \tilde{K}_\alpha^\dagger, \quad (3.5)$$

$$\tilde{\bar{\mathcal{M}}}^{B \rightarrow A}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{d^A d^B} \tilde{\bar{K}}_\alpha(\cdot) \tilde{\bar{K}}_\alpha^\dagger. \quad (3.6)$$

Se $\mathcal{T}$ transforma estados e efeitos da primeira forma da reversão temporal, do requerimento de que a probabilidade de uma sequência de estado, transformações e efeito se mantenha invariante, precisamos de

$$\tilde{K}_\alpha = (S^B K_\alpha S^{A^{-1}})^\dagger / \lambda, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\bar{K}}_\alpha = (S^B \bar{K}_\alpha S^{A^{-1}})^\dagger / \lambda, \quad (3.8)$$

para todo $\alpha = 1, 2, \dots, d^A d^B$, onde λ é tal que

$$\text{Tr} \left[\sum_{\alpha=1}^{d^A d^B} \tilde{K}_\alpha^\dagger \tilde{K}_\alpha = d^B \right].$$

Contudo, assuma o caso em que A é do mesmo tipo que B e uma transformação unitária ($K_\alpha = \bar{K}_\alpha = \delta_{\alpha,1}U$, $U^\dagger U = \mathbb{I}$) é mapeada em uma transformação unitária ($\tilde{K}_\alpha = \bar{\tilde{K}}_\alpha = \delta_{\alpha,1}\tilde{U}$, $\tilde{U}^\dagger \tilde{U} = \mathbb{I}$), onde U tem o mesmo espectro de $\tilde{U} = (SUS^{-1})^\dagger$. Essa expressão, segundo [Oreshkov e Cerf \(3\)](#) é uma *transformação de similaridade*[†] e, portanto, U e $\tilde{U}$ têm o mesmo espectro, que é incompatível com uma evolução temporal unitária contínua não trivial a partir de um Hamiltoniano com espectro não-negativo.

Assim, a única possibilidade restante, com a mecânica quântica, de descrever a reversão temporal é da forma

$$\tau_s(\rho; \mathbb{I}/d) = S\rho^T S^\dagger$$

para estados e

$$\tau_e(E; \mathbb{I}) = S^{-1\dagger} E^T S^{-1}$$

para efeitos. Portanto, para operações de reversão temporal, será necessário transformar os estados e efeitos das seguintes formas:

$$\hat{S}_{s \rightarrow e}(\rho; \bar{\rho}) = \left(d \frac{S\rho^T S^\dagger}{\text{Tr}[S\bar{\rho}^T S^\dagger]}; d \frac{S\bar{\rho}^T S^\dagger}{\text{Tr}[S\bar{\rho}^T S^\dagger]} \right) \quad (3.9)$$

$$\hat{S}_{e \rightarrow s}(E; \bar{E}) = \left(\frac{S^{-1\dagger} E^T S^{-1}}{\text{Tr}[S^{-1\dagger} \bar{E}^T S^{-1}]}; \frac{S^{-1\dagger} \bar{E}^T S^{-1}}{\text{Tr}[S^{-1\dagger} \bar{E}^T S^{-1}]} \right) \quad (3.10)$$

Por sua vez, a reversão temporal atuando na transformação $\mathcal{M}^{A \rightarrow B}(\cdot)$ se dá nos mapas de Kraus da forma

$$\tilde{K}_\alpha = (S^B K_\alpha^* S^{A^{-1}})^\dagger / \lambda, \quad (3.11)$$

$$\bar{\tilde{K}}_\alpha = (S^B \bar{K}_\alpha^* S^{A^{-1}})^\dagger / \lambda. \quad (3.12)$$

Continuando com a discussão do artigo, a imagem de uma operação unitária é dada por

$$\tilde{U} = (SU^* S^{-1})^\dagger.$$

Se $S = V$ for unitário, $\tilde{U} = VU^T V^\dagger$ também será unitário e terá o mesmo espectro de U , já que U^T terá o mesmo espectro de U . Este caso será apresentado como um exemplo no [Capítulo 4](#), uma vez que a noção padrão de reversão temporal corresponde a este fato, embora esteja formulada como um mapa do espaço de estados nele mesmo.

Uma vez que foi feita a generalização da formulação padrão da mecânica quântica e das transformações de simetria, a princípio é possível conceber que em alguns regimes as leis da mecânica quântica podem não obedecer a equação de Schrödinger, usada no argumento anterior. Contudo, é razoável assumir que qualquer noção generalizada de reversão temporal seria das formas (3.9) e (3.10), que se reduziria de maneira contínua à padrão em regimes de mecânica quântica usual.

[†] Por transformação de similaridade, entende-se que duas matrizes $n \times n$, A e B , são *similares* se pudermos escrever, para alguma matriz P que seja $n \times n$ e inversível, $B = P^{-1}AP$.

4 APLICAÇÃO DO FORMALISMO A PACOTES DE ONDA E MEDIDAS FRACAS

Na presente seção, primeiramente, faremos um estudo das referências (13-14) na seção 4.1, sobre como preparar um estado quântico, inicialmente com posição e spin não emaranhados, para então submetê-lo a uma interação capaz de emaranhar ambos os graus de liberdade. Por não emaranhados, queremos dizer que o estado de *momentum* da partícula não depende do estado de spin dela: por exemplo, se o estado de *momentum* da partícula é $|\pi\rangle$ e o estado de spin da mesma é $|\sigma\rangle$, podemos escrever seu estado quântico $|\psi\rangle = |\pi\rangle \otimes |\sigma\rangle$. Caso os estados estivessem emaranhados, não poderíamos fazer a separação completa do estado de *momentum* e de spin.*

O experimento analisado é parecido com o Stern-Gerlach usual: preparamos um forno de átomos com spin $\frac{1}{2}$, cuja distribuição de estados é térmica. Faremos então um átomo da preparação passar por um magneto, que interage fracamente com o átomo e emaranha o spin do átomo com seu *momentum*. Por fim, ele atinge um magneto forte, e logo após isso um anteparo com uma abertura, capaz de selecionar o spin do átomo selecionando o *momentum* do mesmo. A Figura 7 ilustra aparato do exemplo.

Figura 7 – Ilustração do aparato do exemplo. A linha pontilhada representa a trajetória do pacote de ondas e a seta azul a direção do estado inicial do spin.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, na seção 4.2, traduziremos a matemática da colisão descrita para o formalismo apresentado na seção 2.3, obteremos a probabilidade de espalhamento[†] e compara-

* Caso interesse ao leitor, os estados com o maior emaranhamento possível são chamados de *estados de Bell*. Para um sistema de duas partículas livres de spin- $\frac{1}{2}$ com o spin emaranhado, podemos descrever o estado do sistema como $|\Phi_{\alpha,\beta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\alpha\rangle + (-1)^\beta|1\rangle|1-\alpha\rangle)$, com $\alpha = 0, 1$ e $\beta = 0, 1$.

† O interesse em particular da teoria de colisões.

remos com o resultado de (14). Aqui, faremos uma alteração: como visto na seção 3.2, a transformação de tipo II que leva estados a efeitos é multiplicada pela dimensão d do sistema em que a preparação se encontra. Desta forma, ao realizarmos a reversão temporal sobre um sistema de espectro contínuo, a transformação de reversão temporal divergirá (pois a equação (3.9) é proporcional à dimensão do sistema, e para um espectro contínuo a dimensão é infinita). Para corrigir isso, nosso sistema, ao invés de estar no espaço infinito, estará localizado numa caixa cúbica de lado L , tal que os estados de *momentum* são discretos. Além disso, limitaremos a energia disponível às partículas.

Por fim, estudaremos a reversão temporal do sistema. O procedimento será reverter a preparação, a operação e a medida, separadamente, e depois unir tudo num novo circuito, conferindo que a probabilidade se manteve constante.

4.1 Formulação usual

Segundo a seção 2 de Castro, Brasil e Napolitano (14), consideremos o emaranhamento entre dois subsistemas quânticos, um com espaço de Hilbert contínuo e outro com espaço de Hilbert discreto. Representaremos esse sistema por um vetor de estado de posição, contínuo, $|\Phi\rangle$ e um vetor relacionado ao estado de spin, discreto, $|\chi\rangle$. Utilizaremos, *a priori*, que os estados não estão emaranhados entre si:

$$|\Psi_i\rangle = |\Phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle. \quad (4.1)$$

Aqui, i representa o estado inicial. O átomo é considerado como tendo spin 1/2, e então qualquer observável de $|\chi\rangle$ deve ser uma combinação linear das matrizes de Pauli:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{m}}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{m}}, \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{\mathbf{x}} + \sigma_y \hat{\mathbf{y}} + \sigma_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.3)$$

e $\hat{\mathbf{m}}$ é um versor real qualquer.

Os operadores serão identificados por letras maiúsculas, enquanto seus autovalores serão pelas respectivas letras em minúsculo. Por exemplo, $\mathbf{R}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle$, onde $\mathbf{R}$ é o operador de posição. O mesmo vale para o *momentum*: $\mathbf{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle$.

Com essa notação, o estado inicial do grau de liberdade translacional pode ser escrito tanto na base de auto-estados das posições ($|\mathbf{r}\rangle$), quanto na base dos auto-estados dos *momenta* ($|\mathbf{p}\rangle$). Assim,

$$|\Phi_i\rangle = \int_{V_r^\infty} \phi_i(\mathbf{r}) |\mathbf{r}\rangle d^3r \quad (4.4)$$

$$= \int_{V_p^\infty} \varphi_i(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle d^3p, \quad (4.5)$$

onde V_r^∞ e V_p^∞ são os universos das posições e dos *momenta*, respectivamente. Os auto-estados da base do observável $\sigma_{\hat{\mathbf{m}}}$ são representados pelo conjunto ortonormal $\{|0\rangle_m, |1\rangle_m\}$,

e

$$\sigma_{\hat{\mathbf{m}}} |s\rangle_{\hat{\mathbf{m}}} = (-1)^s |s\rangle_{\hat{\mathbf{m}}}.$$

Podemos escrever $|\chi_i\rangle$ em função da base $\{|0\rangle_m, |1\rangle_m\}$:

$$|\chi_i\rangle = \sum_{s=0}^1 \chi_i^{(s)} |s\rangle_{\hat{\mathbf{m}}}, \quad \sum_{s=0}^1 |\chi_i^{(s)}|^2 = 1, \quad (4.6)$$

Considerando o acoplamento $H_{int(t)}$ entre a posição e o spin para o átomo, assim como descreve von Neumann, citado em (14), da forma

$$H_{int}(t) = -\hbar\eta g(t) \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.7)$$

onde $\eta \in \mathbb{R}_+$, cuja dimensão é o inverso de comprimento e de tempo, que podemos considerar pequena quando estudamos uma medida fraca, e $g(t)$ é uma função positiva, adimensional, com suporte compacto. $g(t)$ determina a duração da interação; assumimos que o suporte da função está completamente contido dentro do período de tempo passado entre a pré- e a pós-seleção. $\overleftrightarrow{\mathbf{H}}$ é um tensor que une os operadores de posição e spin, usualmente (mas não obrigatoriamente) escolhido como $\overleftrightarrow{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}$.

Com tempo final $t = \tau_f$, começando do estado $|\Psi_i\rangle$ com $t = -\tau_i$, utilizando a equação (4.1) e realizando uma evolução unitária com o Hamiltoniano descrito na equação (4.7), temos

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau_f)\rangle &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\tau_f}^{\tau_i} dt H_{int}(t) \right] |\Psi_i\rangle \\ &= \exp(i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) |\Psi_i\rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tal exponencial da equação (4.8) pode ser escrita pois o Hamiltoniano comuta consigo mesmo a quaisquer dois tempos diferentes. Normalizamos $g(t)$ com $T = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$, que é equivalente à duração temporal da interação se $g(t)$ for igual a 1 em seu suporte.

4.1.1 Vetor fraco

Após a preparação, desejamos realizar uma pós-seleção: claramente, não seria de utilidade alguma selecionarmos todo o estado final; descartaremos assim o sistema exceto se a medida de *spin* for o estado $|\chi_f\rangle$. Assim, chamaremos esse estado de *estado relativo*:

$$\text{rel}_{|\chi_f\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle \equiv C \langle \chi_f | \Psi(\tau_f) \rangle, \quad (4.9)$$

tal que $C = |\langle \chi_f | \Psi(\tau_f) \rangle|^{-1}$ para normalizar o estado. Utilizando a equação (4.8) e expandindo a exponencial $e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$ em série de Taylor, temos que a equação (4.9) se torna

$$\text{rel}_{|\chi_f\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle = C \langle \chi_f | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\eta T)^n (\mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^{\otimes n} |\Phi_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle. \quad (4.10)$$

Representamos $A^{\otimes n}$ como n produtos tensoriais de um operador A qualquer. Uma vez que o operador $\mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ tem tanto o operador $\mathbf{R}$ quanto o operador $\boldsymbol{\sigma}$, que atuam em espaços de Hilbert distintos, precisamos fazer esse produto tensorial. Seguindo, novamente, [Castro, Brasil e Napolitano \(14\)](#), podemos reescrever essa equação como

$$\text{rel}_{|\chi_f\rangle} |\Psi(\tau_f)\rangle = C \langle \chi_f | \chi_i \rangle e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w} |\Phi_i\rangle + O(\eta^2), \quad (4.11)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_w \equiv \frac{\langle \chi_f | \boldsymbol{\sigma} | \chi_i \rangle}{\langle \chi_f | \chi_i \rangle}, \quad (4.12)$$

chamando-o $\boldsymbol{\sigma}_w$ de *vetor fraco*[‡]. A correção surge quando identificamos a primeira ordem de η associada ao vetor fraco. Utilizando a expansão de $|\Phi_i\rangle$ segundo a [equação \(4.5\)](#), temos a equação (12) da referência (14).

4.1.2 Estado Térmico

Consideremos que realizamos o experimento dentro de uma caixa cúbica de lado L . Assim, os estados de $\mathbf{p}$ são escritos como auto-estados de partícula livre numa caixa. Além disso, vamos limitar o *momentum* em cada direção, onde o máximo é representado com $|n_i| = N$. As auto-energias se tornam

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

com $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ e $\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$, com $n_i \in \mathbb{Z}^*$, $n_i \in [-N, N]$, onde m é a massa da partícula em questão.

Como descrito na [seção 4.1](#), precisamos descrever como será o estado preparado; lá, fizemos com que o estado de *momentum* inicial fosse dado por uma distribuição qualquer. Aqui, vamos fazer da seguinte maneira: os átomos que saem do forno fazem parte de um *estado térmico*. Assim, a matriz densidade $\bar{\rho}'$ é descrita por

$$\bar{\rho}' = \frac{e^{-\beta H_0}}{Z}, \quad (4.13)$$

com a função partição $Z = \text{Tr}[e^{-\beta H_0}]$ e $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Definindo

$$H_0 = \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \frac{\hbar \pi \mathbf{n}^2}{2mL^2} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|$$

(uma partícula livre saindo do forno), temos $\langle \mathbf{n} | \mathbf{m} \rangle = \delta_{n_x, m_x} \delta_{n_y, m_y} \delta_{n_z, m_z}$. Podemos expandir a exponencial da [equação \(4.13\)](#) como

$$e^{-\beta H_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \beta^j H_0^j. \quad (4.14)$$

[‡] O nome vem do fato de que realizamos uma medida “fraca” no *spin*, i.e., não colapsa o estado da função de onda.

Precisamos encontrar a forma do operador H_0^j . Para isso, utilizaremos de recorrência:

$$\begin{aligned}
H_0^2 &= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n'_x=-N}^N \sum_{n'_y=-N}^N \sum_{n'_z=-N}^N \frac{(\hbar\pi\mathbf{n})^2}{2mL^2} \frac{(\hbar\pi\mathbf{n}')^2}{2mL^2} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|\mathbf{n}'\rangle \langle \mathbf{n}'| \\
&= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \left[\frac{(\hbar\pi\mathbf{n})^2}{2mL^2} \right]^2 |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \\
H_0^3 &= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n''_x=-N}^N \sum_{n''_y=-N}^N \sum_{n''_z=-N}^N \left[\frac{(\hbar\pi\mathbf{n})^2}{2mL^2} \right]^2 \frac{(\hbar\pi\mathbf{n}'')^2}{2mL^2} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|\mathbf{n}''\rangle \langle \mathbf{n}''| \\
&= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \left[\frac{(\hbar\pi\mathbf{n})^2}{2mL^2} \right]^3 |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \\
\Rightarrow H_0^j &= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \left[\frac{(\hbar\pi\mathbf{n})^2}{2mL^2} \right]^j |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Reescrevemos, enfim, a equação [equação \(4.14\)](#), utilizando o resultado da [equação \(4.15\)](#), como

$$\begin{aligned}
e^{-\beta H_0} &= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \beta^j \left[\frac{(\hbar\pi\mathbf{n})^2}{2mL^2} \right]^j |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \\
&= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \exp \left(\frac{\beta \hbar^2 \pi^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Uma vez que $Z = \text{Tr}[e^{-\beta H_0}]$, temos

$$\begin{aligned}
Z &= \text{Tr} \left[\sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \exp \left(-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \right] \\
&= \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \exp \left(-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2} \right). \tag{4.17}
\end{aligned}$$

O termo que devemos calcular na [equação \(4.17\)](#) é da forma

$$\left(\sum_{n=-N}^N e^{-An^2} \right)^3, \tag{4.18}$$

mas esta soma não pode ser escrita de forma fechada. Aproximemos esta soma por uma integral, tomando o limite de $N \rightarrow \infty$. Assim, vemos que a soma se torna uma integral de gaussiana, com resultado analítico:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dn e^{-An^2} \right)^3 = \left(\frac{\pi}{A} \right)^{3/2}, \tag{4.19}$$

com $A = \frac{\beta \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$. Esse cálculo nos leva a

$$Z \approx \frac{V}{\hbar^3} \left(\frac{2m}{\beta\pi} \right)^{3/2}, \tag{4.20}$$

Figura 8 – Ilustração do forno de átomos. O conjunto de átomos dentro do forno é representado pelo círculo interno, colorido.

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde $V = L^3$. Logo, nossa preparação terá $\bar{\rho}'$ da forma

$$\bar{\rho}' = \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|. \quad (4.21)$$

Contudo, estes são apenas os estados de *momentum*. Como as partículas tem o grau de liberdade interno de *spin*, precisamos tomar o produto tensorial de $\bar{\rho}'$ com o estado de *spin*. Vamos considerar o estado de *spin* como puro. Então,

$$\bar{\rho} = \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i|, \quad (4.22)$$

utilizando $|\chi_i\rangle\langle\chi_i| = \sum_{s=0}^1 (|\chi_i^{(s)}|^2 |s\rangle\langle s| + \chi_i^{(s)} \chi_i^{(1-s)*} |s\rangle\langle 1-s|)$, tal que $\sum_{s=0}^1 |\chi_i^{(s)}|^2 = 1$.

4.2 Pacote de onda nas OPTs

Com certa facilidade, somos capazes de traduzir a [subseção 4.1.1](#) para a linguagem de circuitos de [Oreshkov e Cerf \(3\)](#). Para que fique claro, observe a [Figura 7](#). O que será utilizado como preparação $\bar{\rho}$, no sentido probabilístico-operacional, é a preparação da figura em si. A operação $\bar{\mathcal{M}}$ representa o aparato de Stern-Gerlach de gradiente fraco, e apenas este. Ambos o aparato de Stern-Gerlach de gradiente forte e o detector são compactados como a medida E . Posteriormente, será mostrado como é escrito o experimento em questão utilizando um diagrama de circuitos das OPTs.

Considere o estado inicial descrito na [subseção 4.1.2](#), dado pela [equação \(4.22\)](#). Podemos, utilizando ele, obter $(\rho; \bar{\rho})$. Para isto, suponha que um átomo com *spin* indefinido sai do forno. Assim, há apenas uma pequena quantidade de *momenta*, com ângulos que permitam a saída do átomo do forno, apresentado na [Figura 8](#). Considere então que o forno é esférico e tem uma abertura pequena para colimar o feixe, ou seja, garantir que a dispersão dos *momenta* nas direções perpendiculares à propagação sejam pequenas. Suponha que apenas os *momenta* cujos $\mathbf{n}$ estejam dentro de um certo intervalo Σ sejam capazes de proporcionar a saída do átomo do forno. Esperamos que a preparação, nesse

caso, seja dada por

$$(\rho; \bar{\rho}) = \left(\frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i|; \bar{\rho} \right). \quad (4.23)$$

Passaremos esse sistema por um aparato $\mathcal{M}$, que descreve o H_{int} descrito na [seção 4.1](#). Utilizaremos a forma da [equação \(4.7\)](#), mas já integrado no tempo, uma vez que não nos interessa o tempo da evolução, mas o sistema resultante. No fim das contas, queremos evoluir o estado $(\rho; \bar{\rho})$ utilizando esse aparato. Uma vez que o sistema é fechado, a evolução é unitária e, portanto,

$$\mathcal{M}(\rho) = \bar{\mathcal{M}}(\rho) = U\rho U^\dagger, \quad (4.24)$$

com $U = \exp[-\frac{i}{\hbar} \int dt' H_{int}(t')]$. Veja que estamos ignorando a parte de partícula livre da evolução do sistema[§]. Como, na base dos *momenta* a matriz densidade ρ é diagonal, e o Hamiltoniano também é diagonal, temos, pela equação de von Neumann ([B.14](#)) ([seção B.4](#)),

$$[H_0, \rho] = 0.$$

O outro lado da equação resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0.$$

Assim, podemos descartar as evoluções que se dão pelo Hamiltoniano de partícula livre, bem como utilizar só a interação para descrever a evolução da matriz densidade. Assim, a operação transforma nossa preparação como

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}(\rho) = & \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \vec{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \\ & |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i| e^{-i\eta T \mathbf{R} \cdot \vec{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}(\bar{\rho}) = & \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \vec{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \\ & |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i| e^{-i\eta T \mathbf{R} \cdot \vec{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por fim, a medida é composta de uma medida de *momentum* e de uma medida de *spin*. Queremos, no entanto, não apenas um único *momentum*, mas um intervalo de $\mathbf{n}$ que chamamos de Δ .

$$E = \frac{\hbar^3\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{m}| \otimes |\chi_f\rangle\langle\chi_f|, \quad (4.27)$$

onde o termo $\frac{\hbar^3\pi^3}{V}$ é um fator de normalização que aparece ao transformar a distribuição de *momenta* em uma distribuição dos números de onda. Desta vez, temos uma certa dispersão

[§] Ou seja, ignoramos o termo H_0 na descrição do Hamiltoniano: $H = H_0 + H_{int}$.

Figura 9 – Procedimento de Stern-Gerlach como descrito na [seção 4.1](#). Perceba que poderíamos desenhar com apenas um fio *neste caso específico*, já que a transformação $\mathcal{M}$ atua em ambos os sistemas de *momentum* e *spin* ao mesmo tempo; contudo, poderíamos ter operações que não acoplassem os sistemas de *momentum* e *spin*. Por isso, é necessário ter dois fios.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de todos os *momenta* que podemos medir: mantemos a regra de $\text{Tr}[\bar{E}] = d$, mas não temos necessariamente $\bar{E} = \mathbb{I}_d$ [¶]. Escolheremos

$$\bar{E} = \frac{\hbar^3 \pi^3}{V} \sum_{m_x \in -N}^N \sum_{m_y \in -N}^N \sum_{m_z \in -N}^N \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi_f\rangle \langle \chi_f|. \quad (4.29)$$

Isso faz com que possamos adaptar $\omega(\mathbf{m})$ de forma que ele se transcreva como peso dependente do *momentum* escolhido a ser medido. A dimensão dos *momenta* é de $(2N+1)$ para cada direção, se tornando $(2N+1)^3$, e 2 no *spin*, totalizando $d = 2(2N+1)^3$. A normalização, então, segue

$$2(2N+1)^3 = \text{Tr}[\bar{E}] = 2 \frac{\hbar^3 \pi^3}{V} \sum_{m_x \in -N}^N \sum_{m_y \in -N}^N \sum_{m_z \in -N}^N \omega(\mathbf{m}). \quad (4.30)$$

Veja que estamos fazendo a pós-seleção na qual o *spin* final deva ser igual a $|\chi_f\rangle$. Uma restrição sobre $\omega(\mathbf{m})$ é que ele compõe os termos da diagonal da medida; como a medida é composta de operadores hermitianos, sua diagonal é completamente real. Assim, $\omega(\mathbf{m}) \in \mathbb{R}$.

Podemos ver todo esse procedimento utilizando a linguagem de circuitos: veja que a preparação é sobre um sistema de *momentum* em composição com o sistema de *spin*. Veja também que o nosso evento atua de forma a acoplar o *momentum* e o *spin*. Além disso, nossa medida é feita em relação a ambos os sistemas. Desta forma, o circuito pode ser representado pela [Figura 9](#).

Assim, a probabilidade de se preparar $(\rho; \bar{\rho})$, passar por um aparato $(\bar{\mathcal{M}}; \bar{\mathcal{M}})$ e se medir $(E; \bar{E})$ é

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Tr}[\bar{\mathcal{M}}(\rho)E]}{\text{Tr}[\bar{\mathcal{M}}(\bar{\rho})\bar{E}]}. \quad (4.31)$$

[¶] Sempre que falarmos da matriz identidade neste sistema, ela pode ser escrita da forma

$$\mathbb{I} = \sum_{n_x=-N}^N |n_x\rangle \langle n_x| \otimes \sum_{n_y=-N}^N |n_y\rangle \langle n_y| \otimes \sum_{n_z=-N}^N |n_z\rangle \langle n_z| \otimes \sum_{s=0}^1 |s\rangle \langle s|. \quad (4.28)$$

O traço de $\mathbb{I}$ é, então, o produto dos traços parciais de cada produto externo. No caso, $\text{Tr}[\mathbb{I}] = 2(2N+1)^3$.

Pela ciclicidade dos traços, podemos inverter a ordem de E e $\bar{\mathcal{M}}(\rho)$, e temos que $E\bar{\mathcal{M}}(\rho) = \frac{\hbar^3\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{m}| \otimes |\chi_f\rangle\langle\chi_f| \bar{\mathcal{M}}(\rho)$. Logo, aplicamos essa ciclicidade em conjunto à equação (4.26) e obtemos

$$E\bar{\mathcal{M}}(\rho) = \frac{\hbar^3\pi^3}{V} \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} \omega(\mathbf{m}) (|\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{m}| \otimes |\chi_f\rangle\langle\chi_f|) \\ \times e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \exp \left(-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i| e^{-i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.32)$$

Utilizando o resultado da equação (4.11), podemos escrever $e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \approx e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w} + O(\eta^2)$, com $\boldsymbol{\sigma}_w = \langle\chi_f|\chi_i\rangle^{-1} \langle\chi_f|\boldsymbol{\sigma}|\chi_i\rangle$.

Podemos ver que, após nossa expansão, nossa equação (4.32) pode ser alterada utilizando a equação (12) de Castro, Brasil e Napolitano (14), como apresentado no apêndice, na seção B.5, com a diferença de que, ao invés de $\varphi(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|$, temos $\varphi(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|$, com $\varphi(\mathbf{n}) = \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\beta \hbar^2 \pi^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2} \right)$. Assim,

$$e^{i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w} \rho e^{-i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w} \approx \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i|. \quad (4.33)$$

Portanto,

$$E\bar{\mathcal{M}}(\rho) = \frac{\hbar^3\pi^3}{V} \langle\chi_f|\chi_i\rangle \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \omega(\mathbf{m}) \\ \times \varphi(\mathbf{m} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_f\rangle\langle\chi_i|. \quad (4.34)$$

Devemos analisar como tratar essa delta. Veja que os intervalos de soma são distintos: Σ e Δ . Basicamente, no intervalo da soma em que $\mathbf{m}$ não pertença ao intervalo Σ , essa soma é nula. Da mesma maneira, caso o *momentum* $\mathbf{n}$ não pertença ao intervalo Δ , o resultado é também nulo. Assim, a soma só pode ser não nula no intervalo $\Sigma \cap \Delta$. Portanto,

$$E\bar{\mathcal{M}}(\rho) = \frac{\hbar^3\pi^3}{V} \langle\chi_f|\chi_i\rangle \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma \cap \Delta} \omega(\mathbf{n}) \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_f\rangle\langle\chi_i|. \quad (4.35)$$

O traço da equação (4.35) contém $\text{Tr}[|\chi_f\rangle\langle\chi_i|]$, que depende de como escolhemos os estados inicial e final de *spin*. Contudo, podemos reescrever $\text{Tr}[|\chi_f\rangle\langle\chi_i|] = \sum_s \langle s|\chi_f\rangle \langle\chi_i|s\rangle = \sum_s \langle\chi_i|s\rangle \langle s|\chi_f\rangle = \langle\chi_i|\chi_f\rangle$. Desta forma,

$$\text{Tr}[E\bar{\mathcal{M}}(\rho)] = \frac{\hbar^3\pi^3}{V} |\langle\chi_f|\chi_i\rangle|^2 \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma \cap \Delta} \omega(\mathbf{n}) \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w). \quad (4.36)$$

Já o denominador da expressão da probabilidade (4.31) conta com

$$\begin{aligned}
\bar{E}\bar{\mathcal{M}}(\bar{\rho}) &= \frac{\hbar^3\pi^3}{V} \langle \chi_f | \chi_i \rangle \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \sum_{m_x=-N}^N \sum_{m_y=-N}^N \sum_{m_z=-N}^N \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \omega(\mathbf{m}) \\
&\quad \times \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{n}| \otimes |\chi_f\rangle \langle \chi_i| \\
&= \frac{\hbar^3\pi^3}{V} \langle \chi_f | \chi_i \rangle \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \omega(\mathbf{n}) \\
&\quad \times \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \otimes |\chi_f\rangle \langle \chi_i|.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Tomando o traço da equação (4.37), escrevemos

$$\text{Tr}[\bar{E}\bar{\mathcal{M}}(\bar{\rho})] = \frac{\hbar^3\pi^3}{V} |\langle \chi_f | \chi_i \rangle|^2 \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \omega(\mathbf{n}) \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w). \tag{4.38}$$

Ambos os termos $|\langle \chi_i | \chi_f \rangle|^2$ e $\frac{\hbar^3\pi^3}{V}$ se cancelam na razão (4.39). Assim, obtemos o resultado usual:

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Tr}[E\bar{\mathcal{M}}(\rho)]}{\text{Tr}[\bar{E}\bar{\mathcal{M}}(\bar{\rho})]} = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \Sigma \cap \Delta} \omega(\mathbf{n}) \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)}{\sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \omega(\mathbf{n}) \varphi(\mathbf{n} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)}, \tag{4.39}$$

com exceção de que agora nossa medida é mais geral que uma POVM. Observe que se $\omega(\mathbf{n}) = 1, \forall \mathbf{n}$, teríamos o resultado que já conhecemos. Veja também que o resultado de (14) é a amplitude de transição entre os estados inicial e final. Tomando o módulo quadrado daquele resultado, recuperamos a equação (4.39).

4.3 A reversão temporal aplicada

Para podermos aplicar a reversão temporal, precisaremos saber como será a transformação S . Podemos utilizar a mecânica quântica usual para tratar isso. Como temos spin $\frac{1}{2}$, precisamos da reversão temporal tratada na seção 1.2, dada pela equação (1.11).

Veja que $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$, que implica em $e^{i\pi\frac{S_y}{\hbar}} = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_y} = i\sigma_y$. Assim, chamemos $S = i\sigma_y K_0$ como sendo o operador relativo à essa transformação de tipo II. Precisaremos de $S^\dagger$, dado por $S^\dagger = -K_0 i\sigma_y$.

Com $(2N+1)^3$ sendo a dimensão do espaço de $\mathbf{n}$ e 2 a dimensão do espaço de spins, a reversão temporal se torna natural. Vamos chamar a reversão temporal do estado $(\rho; \bar{\rho})$ de $(F; \bar{F})$, e a reversão temporal do efeito $(E; \bar{E})$ como $(\lambda; \bar{\lambda})$. A reversão temporal de $(\bar{\mathcal{M}}; \bar{\mathcal{M}})$ será denominada $(\bar{\mathcal{N}}; \bar{\mathcal{N}})$. Primeiramente, veja que $\rho^T = \rho$ e $\bar{\rho}^T = \bar{\rho}$. Isso acontece pois o sistema não é puro, mas uma mistura. Precisamos de $\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger]$:

$$\begin{aligned}
S\bar{\rho}S^\dagger &= i\sigma_y K_0 \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \\
&\quad |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle \langle \chi_i| K_0(-i\sigma_y).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

O operador de conjugação complexa, K_0 , não atua sobre ρ , uma vez que este é real. Ademais, vamos nomear a atuação de $i\sigma_y$ em $|\chi_i\rangle$ como $|\chi'_i\rangle$. Ou seja, $|\chi'_i\rangle \equiv i\sigma_y |\chi_i\rangle$. Além disso, $\text{Tr}[|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|] = 1$. Com isso, o traço da equação (4.40) toma a forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger] &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m}\right)^{3/2} \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \cdot \text{Tr}[i\sigma_y |\chi_i\rangle\langle\chi_i| (-i\sigma_y)] \\ &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m}\right)^{3/2} \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \cdot \text{Tr}[|\chi_i\rangle\langle\chi_i|] \\ &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m}\right)^{3/2} \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Veja que o resultado da referência equação (4.41) contém a expressão (4.17). Portanto, podemos reescrevê-la como

$$\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger] = 1. \quad (4.42)$$

A atuação de $S\rho S^\dagger$ é da mesma forma. Assim,

$$\begin{aligned} S\rho S^\dagger &= i\sigma_y \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m}\right)^{3/2} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i| (-i\sigma_y) \\ &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m}\right)^{3/2} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \\ &\quad \times |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi'_i\rangle\langle\chi'_i|. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Unindo as equações (4.42) e (4.43),

$$\begin{aligned} F &= d \frac{S\rho S^\dagger}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger]} = 2(2N+1)^3 \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m}\right)^{3/2} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \\ &\quad \times |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi'_i\rangle\langle\chi'_i|. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Podemos aplicar a lógica para, também, $S\bar{\rho}S^\dagger$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \bar{F} &= d \frac{S\bar{\rho}S^\dagger}{\text{Tr}[S\bar{\rho}S^\dagger]} = 2(2N+1)^3 \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m}\right)^{3/2} \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \\ &\quad \times |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |\chi'_i\rangle\langle\chi'_i|. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Claramente, por construção, $\text{Tr}[\bar{F}] = d = 2(2N+1)^3$.

Atuamos a mesma transformação de simetria no efeito. Para isso, sabemos que $\lambda = (S^{-1\dagger} E S^{-1}) / \text{Tr}[S^{-1\dagger} \bar{E} S^{-1}]$. Como $S = i\sigma_y K_0$, e $SS^{-1} = \mathbb{I}$, temos que $S^{-1} = -K_0 i\sigma_y$. Ademais, $S^{-1\dagger} = S$. Da mesma maneira que anteriormente, definiremos $|\chi'_f\rangle \equiv i\sigma_y |\chi_f\rangle$. O

denominador de λ contém

$$\begin{aligned}
S\bar{E}S^{-1} &= i\sigma_y K_0 \frac{\hbar^3 \pi^3}{V} \sum_{m_z=-N}^N \sum_{m_x=-N}^N \sum_{m_y=-N}^N \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi_f\rangle \langle \chi_f| K_0(-i\sigma_y) \\
&= \frac{\hbar^3 \pi^3}{V} \sum_{m_z=-N}^N \sum_{m_x=-N}^N \sum_{m_y=-N}^N \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f| \\
&= \frac{\hbar^3 \pi^3}{V} \sum_{m_z=-N}^N \sum_{m_x=-N}^N \sum_{m_y=-N}^N \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Por fim, tomamos o traço da expressão (4.46). Usando $\text{Tr}[|\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}|] \equiv 1$, $\text{Tr}[|\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|] \equiv 1$, resumimos tal expressão por

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[S\bar{E}S^{-1}] &= \frac{2\hbar^3 \pi^3}{V} \underbrace{\sum_{m_z=-N}^N \sum_{m_x=-N}^N \sum_{m_y=-N}^N \omega(\mathbf{m})}_{\equiv (2N+1)^3, \text{ segundo a equação (4.30)}} \\
&= 2(2N+1)^3 \frac{\hbar^3 \pi^3}{V}. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Calculamos também o numerador da reversão temporal do efeito, ou seja, o numerador de λ , dado pela expressão (4.48),

$$SES^{-1} = \frac{\hbar^3 \pi^3}{V} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|. \tag{4.48}$$

Unindo, por fim, as equações (4.47) e (4.48), nosso efeito revertido temporalmente, $(\lambda; \bar{\lambda})$, se torna

$$\lambda = \frac{SES^{-1}}{\text{Tr}[S\bar{E}S^{-1}]} = \frac{1}{2(2N+1)^3} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|, \tag{4.49}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{S\bar{E}S^{-1}}{\text{Tr}[S\bar{E}S^{-1}]} = \frac{1}{2(2N+1)^3} \sum_{m_z=-N}^N \sum_{m_x=-N}^N \sum_{m_y=-N}^N \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|. \tag{4.50}$$

Precisamos também da reversão temporal de $(\bar{\mathcal{M}}; \bar{\mathcal{M}})$, que chamaremos de $(\bar{\mathcal{N}}; \bar{\mathcal{N}})$. Segundo [Oreshkov e Cerf \(3\)](#), a transformação do mapa $\bar{\mathcal{M}}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{d_A d_B} \bar{K}_\alpha(\cdot) \bar{K}_\alpha^\dagger$ se dá por

$$\bar{\mathcal{N}}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{d_A d_B} \tilde{\bar{K}}_\alpha(\cdot) \tilde{\bar{K}}_\alpha^\dagger, \tag{4.51}$$

com

$$\tilde{\bar{K}}_\alpha = \frac{(S^B \bar{K}_\alpha^* S^{A^{-1}})^\dagger}{\Lambda}, \tag{4.52}$$

tal que Λ torna a relação $\text{Tr}[\sum_{\alpha}^{d_A d_B} \tilde{\bar{K}}_\alpha^\dagger \tilde{\bar{K}}_\alpha] = d_B$ verdadeira. Aqui, então, como o sistema A e o sistema B são os mesmos sistemas, então $S^A = S^B = S$. Vamos considerar $S = i\sigma_y K_0$, uma vez mais. Consideraremos a evolução unitária U já aproximada como $e^{i\eta \text{TR} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \sigma_w}$.

Como feito na [seção 3.2](#), transformações unitárias são aquelas tais que $K_\alpha = \bar{K}_\alpha = \delta_{\alpha,1}U$, $U^\dagger U = \mathbb{I}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{1}{\Lambda} [i\sigma_y K_0 U^* K_0 (-i\sigma_y)]^\dagger \\ &= \frac{1}{\Lambda} [i\sigma_y U (-i\sigma_y)]^\dagger.\end{aligned}\tag{4.53}$$

Veja que U comuta com $i\sigma_y$, pois o único operador em U é o operador posição, e este atua em um espaço de Hilbert distinto de $i\sigma_y$. Então,

$$\tilde{U} = \frac{U^\dagger}{\Lambda},\tag{4.54}$$

$$\tilde{U}^\dagger = \frac{U}{\Lambda}.\tag{4.55}$$

Precisamos calcular o fator de normalização Λ . Como ele deve ser definido a partir da normalização do traço, vamos obtê-lo utilizando $\text{Tr}[\tilde{U}^\dagger \tilde{U}] = 2(2N+1)^3$. Assim,

$$\tilde{U}^\dagger \tilde{U} = \frac{1}{\Lambda^2} U U^\dagger.\tag{4.56}$$

Tomando, por fim, o traço da [equação \(4.56\)](#), obtemos

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\tilde{U}^\dagger \tilde{U}] &= \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr}[U U^\dagger] \\ &= \frac{\text{Tr}[U U^\dagger]}{\Lambda^2}.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Na [equação \(4.57\)](#), podemos utilizar a propriedade de ciclicidade do traço, chegando na expressão

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\tilde{U}^\dagger \tilde{U}] &= \frac{2(2N+1)^3}{\Lambda^2} \\ \implies \Lambda^2 &= 1.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Podemos calcular a operação $\bar{\mathcal{N}}(\lambda)$:

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \frac{1}{2(2N+1)^3} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} U^\dagger \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| U \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|.\tag{4.59}$$

Podemos adaptar o resultado já usado na [seção 4.2](#) para trabalhar sobre o termo $U^\dagger \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| U$. Consideremos

$$\omega(\mathbf{m}) = \psi(\mathbf{m}) \psi^*(\mathbf{m}).\tag{4.60}$$

O motivo de expandir com o complexo conjugado é que, por mais que $\omega(\mathbf{m})$ seja real, sua expansão pode não ser, e ainda assim o resultado é invariante. Veja, portanto, que pelo

resultado (4.33),

$$U^\dagger \psi(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle = \psi(\mathbf{m} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{m}\rangle \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{m} | \psi^*(\mathbf{m}) U &= [U^\dagger \psi(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle]^\dagger \\ &= \langle \mathbf{m} | \psi^*(\mathbf{m} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Assim sendo,

$$U^\dagger \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| U = \omega(\mathbf{m} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}|. \quad (4.63)$$

É importante dizer que aqui, quem atua à esquerda de $\omega(\mathbf{m})$ é $U^\dagger$ e não U , cujo argumento da exponencial tem o sinal trocado. Assim, o *shift* é de $+\hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w$ e, portanto,

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \frac{1}{2(2N+1)^3} \sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \omega(\mathbf{m} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f| \quad (4.64)$$

$$\bar{\mathcal{N}}(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2(2N+1)^3} \sum_{m_z=-N}^N \sum_{m_x=-N}^N \sum_{m_y=-N}^N \omega(\mathbf{m} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|. \quad (4.65)$$

A probabilidade conjunta, então, de se preparar $(\lambda; \bar{\lambda})$, passar por uma operação $(\bar{\mathcal{N}}; \bar{\mathcal{N}})$ e realizar uma medida $(F; \bar{F})$ é dada por

$$\mathcal{P}' = \frac{\text{Tr}[F \bar{\mathcal{N}}(\lambda)]}{\text{Tr}[\bar{F} \bar{\mathcal{N}}(\bar{\lambda})]}. \quad (4.66)$$

Para calcular o argumento dos traços, vamos analisar para um dado valor de $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$, que chamarei de $f\bar{\mathcal{N}}'(\lambda)$, sem considerar as somas. A distinção entre o argumento do traço do numerador e do denominador será o limite de cada uma das somas. Desta forma,

$$\begin{aligned} f\bar{\mathcal{N}}'(\lambda) &= 2(2N+1)^3 \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \\ &\quad \times \frac{1}{2(2N+1)^3} \omega(\mathbf{m} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) \\ &\quad \times (|\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \otimes |\chi'_i\rangle \langle \chi'_i|) (|\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_f\rangle \langle \chi'_f|) \\ f\bar{\mathcal{N}}'(\lambda) &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \langle \chi'_i | \chi'_f \rangle \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \omega(\mathbf{m} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) \\ &\quad \times \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{m}| \otimes |\chi'_i\rangle \langle \chi'_f|. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Veja que, uma vez que $i\sigma_y$ é um operador unitário, o produto escalar $\langle \chi'_i | \chi'_f \rangle = \langle \chi_i | \chi_f \rangle$.

O argumento do traço do denominador é simples: uma vez que os limites dos somatórios são os mesmos, podemos substituir $\mathbf{m}$ por $\mathbf{n}$. Ficamos então com

$$\begin{aligned} \bar{F}\bar{\mathcal{N}}(\bar{\lambda}) &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \langle \chi'_i | \chi'_f \rangle \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2}\right) \omega(\mathbf{n} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \otimes |\chi'_i\rangle \langle \chi'_f|, \end{aligned} \quad (4.68)$$

cujos traço é

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\bar{F}\bar{\mathcal{N}}(\bar{\lambda})] &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{s=0}^1 \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N |\langle \chi'_i | \chi'_f \rangle|^2 \\ &\times \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \omega(\mathbf{n} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w). \end{aligned} \quad (4.69)$$

No numerador, temos o traço de

$$\sum_{\mathbf{m} \in \Delta} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma} f\bar{\mathcal{N}}'(\lambda), \quad (4.70)$$

que contém $\delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}$. Como na [seção 4.2](#), as deltas das componentes dos *momenta* (δ_{n_x, m_x} , δ_{n_y, m_y} e δ_{n_z, m_z}) são diferentes de zero apenas quando existe um mesmo *momentum* do intervalo Σ no intervalo Δ . Assim, a delta é não-nula apenas para *momenta* na *intersecção* dos dois intervalos. Além disso, trocamos $\langle \chi'_i | \chi'_f \rangle$ por $\langle \chi_i | \chi_f \rangle$. O numerador tem, então, o traço de

$$\sum_{\mathbf{n} \in \Sigma \cap \Delta} f\bar{\mathcal{N}}'(\lambda), \quad (4.71)$$

que é

$$\begin{aligned} \text{Tr}[F\bar{\mathcal{N}}(\lambda)] &= \frac{\hbar^3}{V} \left(\frac{\beta\pi}{2m} \right)^{3/2} \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma \cap \Delta} |\langle \chi_i | \chi_f \rangle|^2 \\ &\times \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \omega(\mathbf{n} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Podemos unir as equações (4.69) e (4.72) na expressão (4.66) para obtermos a probabilidade

$$\mathcal{P}' = \frac{|\langle \chi_i | \chi_f \rangle|^2 \sum_{\mathbf{n} \in \Sigma \cap \Delta} \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \omega(\mathbf{n} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)}{|\langle \chi_i | \chi_f \rangle|^2 \sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \omega(\mathbf{n} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)}. \quad (4.73)$$

Veja que o termo $|\langle \chi_i | \chi_f \rangle|^2$ se cancela na divisão. Assim, a expressão final para a probabilidade $\mathcal{P}'$ é

$$\mathcal{P}' = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \Sigma \cap \Delta} \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \omega(\mathbf{n} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)}{\sum_{n_z=-N}^N \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \exp \left(-\frac{\beta\hbar^2\pi^2\mathbf{n}^2}{2mL^2} \right) \omega(\mathbf{n} + \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)}. \quad (4.74)$$

Pode parecer que não recuperamos o resultado (4.39), discretizado e truncado. Contudo, considere que não tenhamos expandido a reversão temporal

$$U^\dagger \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| U.$$

Temos que o argumento do traço contém

$$\varphi(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| U^\dagger \omega(\mathbf{m}) |\mathbf{m}\rangle \langle \mathbf{m}| U.$$

Como está num traço, e o traço é mantido invariante por movimentos cíclicos dos argumentos, podemos jogar o U do final para o começo (que passa por todas as somas e constantes), alcançando então

$$U\varphi(\mathbf{n})|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|U^\dagger\omega(\mathbf{m})|\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{m}|,$$

que é a mesma expansão na direção para frente no tempo. Com esse formalismo, então, verificamos que a probabilidade de transição em ambas as direções temporais, para frente e para trás, são iguais.

Veja, porém, que o exemplo foi ilustrado para entender como é utilizada a teoria em um caso prático; como a teoria é aplicada. Existe ainda muito espaço a ser explorado pela ferramenta, que não foi alcançado no exemplo apresentado. Uma continuação do trabalho é estudar como expandir essa ferramenta para problemas mais complexos.

Por exemplo, veja que poderíamos ter colocado uma interação, ao invés do exemplo $H_{int} = -\hbar\eta g(t)\mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, ruidosa no espalhamento em si. Como as interações, neste formalismo, são moldadas a partir de mapas de Kraus, que de modo geral são matrizes não-quadradas (ou seja, servem para levar um sistema de dimensão d_A a um sistema de dimensão d_B , usualmente $d_A \neq d_B$), conseguimos descrever ruídos reduzindo o sistema A para um sistema B .

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, nos propusemos a estudar como é a reversão temporal no contexto usual da mecânica quântica, verificando seus problemas intrínsecos à sua formulação, e como reformulá-la para corrigir tais problemas, bem como a matemática associada a tal reformulação. O objetivo da dissertação foi desenvolver a teoria apresentada ao longo do trabalho, estudando-a sistematicamente.

Na [Introdução](#), apresentamos o Teorema de Wigner, que descreve os possíveis tipos de transformação de simetria, e verificamos também que, da maneira usual, a medida torna a mecânica quântica assimétrica temporalmente. Uma das soluções apresentadas, proposta por [Aharonov, Bergmann e Lebowitz](#) (8), dá o conceito de pós-seleção, capaz de tornar a mecânica quântica simétrica no tempo.

No [Capítulo 2](#), estudamos um *framework* que seria importante para, de maneira alternativa a Wigner, descrever a reversão temporal na mecânica quântica, tornando-a simétrica de maneira distinta à modificação apresentada por Aharonov. Para isto, foi estudado o formalismo das Teorias Probabilístico-Operacionais, capaz de sintetizar experimentos de maneira mais intuitiva. Graças à estrutura causal das OPTs usuais, foi necessário generalizar o *framework* para algo que fosse irrespectivo ao tempo, que é feito na referência (3).

Seguindo com o [Capítulo 3](#), com o formalismo generalizado em mãos, pudemos descrever as transformações de simetria de maneira generalizada, mais gerais que Wigner. Pudemos verificar que, graças ao formalismo de OPTs, estados e efeitos são objetos que vivem em espaços isomorfos, mas distintos. Por isso, a transformação de simetria não pode atuar apenas em um deles de cada vez, mas sim no produto cartesiano de ambos os espaços. Assim, $\mathcal{S} : \text{St} \times \text{Eff} \rightarrow \text{St} \times \text{Eff}$.

Uma vez que a transformação de simetria atua no produto cartesiano, podemos descrever dois tipos de transformação: as transformações de tipo I, que leva estados a estados e efeitos a efeitos; e as transformações de tipo II, que leva estados a efeitos e efeitos a estados. A transformação generalizada de reversão temporal é de tipo II, pois o que é uma preparação na direção temporal usual se torna uma medida na direção reversa do tempo; uma medida na direção temporal usual, por sua vez, se apresenta como uma preparação na direção temporal reversa.

Por fim, no [Capítulo 4](#), apresentamos um exemplo concreto para utilizar o formalismo descrito ao longo da dissertação: utilizamos a Teoria de Colisões para esquematizar como é feito o cálculo da probabilidade condicional do circuito segundo a formulação generalizada da OPT segundo [Oreshkov e Cerf](#) (3). Assim como na referência (14), não

limitamos a energia do sistema e tampouco fechamos o sistema numa caixa.

Ao realizar a reversão temporal, fez-se certo que seria necessário truncar e discretizar a descrição do sistema, uma vez que, como apresentado durante a [Capítulo 3](#), a transformação geral de simetria aplica-se apenas a sistemas de dimensão finita e discretos. Para tal, colocamos o sistema em uma caixa, discretizando os níveis de energia, e limitamos a energia, truncando a energia máxima do sistema. Após o truncamento, apresentamos como são as preparações, as operações e as medidas reversas no tempo e, por fim, verificamos que a probabilidade condicional manteve-se invariante sob transformação de simetria.

Este trabalho almeja, em uma possível continuação, tratar de situações em teoria de colisões mais gerais do que a apresentada aqui. Veja que, com mapas de Kraus, podemos descrever ruídos. Assim, podemos descrever uma colisão ruidosa, bem como realizar a reversão temporal de tal. Espera-se tratar também, com o formalismo apresentado, emaranhamento temporal.

REFERÊNCIAS

- 1 NEUMANN, J. V. **Mathematical foundations of quantum mechanics**. Princeton: Princeton University Press, 1955. (Investigations in physics).
- 2 BOHM, D. **Quantum theory**. Prentice: Prentice-Hall, 1951. (Dover books in science and mathematics).
- 3 ORESHKOV, O.; CERF, N. J. Operational formulation of time reversal in quantum theory. **Nature Physics**, v. 11, n. 10, p. 853–858, 2015.
- 4 AHARONOV, Y.; ALBERT, D. Z.; VAIDMAN, L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. **Physical Review Letters**, v. 60, n. 14, p. 1351–1354, Apr. 1988.
- 5 BALLENTINE, L. **Quantum mechanics:: a modern development**. Singapore: World Scientific, 1998.
- 6 SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. **Modern quantum mechanics**. London: Pearson Education, 2014.
- 7 WIGNER, E.; MASSEY, H. **Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra**. New York: Elsevier Science, 2013.
- 8 AHARONOV, Y.; BERGMANN, P. G.; LEBOWITZ, J. L. Time symmetry in the quantum process of measurement. **Physical Review**, v. 134, n. 6B, p. 1410, 1964.
- 9 HARDY, L. **Operational structures as a foundation for probabilistic theories**. 2009. Disponível em: <<http://pirsa.org/09060015>> Acesso em: 13 set. 2018.
- 10 _____. **Reformulating and reconstructing quantum theory.**, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1104.2066v3>>. Acesso em: 19 set. 2018.
- 11 CHIRIBELLA, G.; D'ARIANO, G. M.; PERINOTTI, P. Probabilistic theories with purification. **Physical Review A - atomic, molecular, and optical physics**, v. 81, n. 6, p. 1–40, 2010.
- 12 _____. Informational derivation of quantum theory. **Physical Review A**, v. 84, n. 1, p. 12311, jul 2011.
- 13 DUCK, I. M.; STEVENSON, P. M.; SUDARSHAN, E. C. G. The sense in which a "weak measurement" of a spin- particle's spin component yields a value 100. **Physical Review D**, v. 40, n. 6, p. 2112–2117, Sept. 1989.
- 14 CASTRO, L. A. de; BRASIL, C. A.; NAPOLITANO, R. de J. Weak values in collision theory. **Annals of Physics**, v. 392, p. 272–286, May 2018.
- 15 HAAR, D. **The old quantum theory**. New York: Elsevier Science, 2016.
- 16 SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. **Physical Review**, v. 28, p. 1049–1070, Dec. 1926.

- 17 WOLF, M. **Quantum channels & operations: guided tour**. 2012. p. 170.
Disponível em: <<http://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M5/Allgemeines/MichaelWolf/QChannelLecture.pdf>> Acesso em: 13 set. 2018.
- 18 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. Boston: Addison Wesley, 2002.
- 19 BARGMANN, V. Note on Wigner's Theorem on symmetry operations. **Journal of Mathematical Physics**, v. 5, n. 7, p. 862–868, 1964.
- 20 COECKE, B. Quantum pictorialism. **Contemporary Physics**, v. 51, n. 1, p. 59–83, 2010.
- 21 NIELSEN, M.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**: 10th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

Apêndices

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES NECESSÁRIAS

O presente apêndice fornece algumas definições que serão necessárias para o desenvolvimento e entendimento das contas e do texto como um todo.

A.1 Probabilidade bayesiana e a probabilidade condicionada de Aharonov, Bergmann e Lebowitz

A lei de probabilidade bayesiana nos ensina como calcular a probabilidade de um certo evento ocorrer dado que outro evento ocorreu. Caso tenhamos dois eventos, A e B , e desejemos saber a probabilidade de B ocorrer dado que A ocorreu, representada por $P(B|A)$, podemos utilizar a expressão

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}, \quad (\text{A.1})$$

chamada *probabilidade condicional* ou *probabilidade bayesiana*. Aqui, $P(A)$ e $P(B)$ são as probabilidades *a priori* dos eventos A e B , sem que um ou outro tenha necessariamente ocorrido, e $P(A|B)$ é a probabilidade de que A ocorra dado que B ocorreu.

Na expressão (A.1), podemos substituir a probabilidade $P(A) = \sum_{B'} P(A|B')P(B')$. Assim,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{\sum_{B'} P(A|B')P(B')}. \quad (\text{A.2})$$

Caso não conheçamos nada sobre os eventos B' , a probabilidade apriorística dos eventos do conjunto B' são iguais, e assim $P(B') = P(B), \forall B'$. Desta forma, substituímos na equação (A.2) e obtemos

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{\sum_{B'} P(A|B')P(B')} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(B) \sum_{B'} P(A|B')} \\ &= \frac{P(A|B)}{\sum_{B'} P(A|B')}. \end{aligned}$$

A.2 Positividade completa e preservação de traço

Por diversas vezes, trataremos de mapas lineares *completamente positivos*: *CPs*. Um mapa $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é dito positivo se, para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \geq 0$, $\mathcal{T}(A) \geq 0$. Mais do que isso, um mapa $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é dito *completamente positivo* se, para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \geq 0$, $\mathcal{T} \otimes \mathbb{I}_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{I}_n$ é o operador identidade no sistema de dimensão n .

Precisaremos de mais do que isso, de mapas que sejam completamente positivos e *preservem traço*. Assim, se diz que estes mapas são *CPTP*. Um mapa $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ preserva traço se e somente se, para todo $A \in \mathcal{A}$, $\text{Tr}[\mathcal{T}(A)] = \text{Tr}[A]$.

A.3 POVM

Medidas, da maneira que são usualmente feitas, o são utilizando medidas projetivas. No entanto, é necessário expandir o conceito de medida. Assim, definimos as *POVMs*: *positive operator-valued measures*. Por POVM, entende-se um conjunto de operadores Hermitianos PS com as seguintes propriedades:

- Para um conjunto $\mathcal{O}$ de elementos de uma POVM $\{F_i\}_{i \in \mathcal{O}}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$,

$$\sum_{i \in \mathcal{O}} F_i = \mathbb{I}_{\mathcal{H}};$$

- Para qualquer $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$,

$$0 \leq \langle \phi | F_i | \phi \rangle \leq 1, \quad \forall i \in \mathcal{O}.$$

Veja que, da maneira que é formulada, uma POVM é mais geral que as medidas projetivas: para medidas projetivas, temos um conjunto $\{P_i\}_{i \in \mathcal{O}}$ tal que $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$. Ou seja, as medidas projetivas são compostas de operadores ortogonais, o que não é necessariamente verdade para POVMs; a única restrição sobre seus operadores é de que somem a identidade. Veja também que essa definição implica que, para medidas projetivas, temos um número de elementos igual à dimensão do espaço de Hilbert. Isso não é verdade para POVMs.

A.4 Combinação convexa

Por definição, uma combinação para cada par de estados $\rho_1, \rho_2 \in \text{St}^A$ e para cada probabilidade $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$ é dita *convexa* se e somente se

$$\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2 \tag{A.3}$$

é normalizado. (12, p. 7)

A.5 Isomorfismo

Para dois espaços vetoriais U e V , chamamos de *isomorfismo* um mapa que leva todo elemento $u \in U$ a um e apenas um elemento $v \in V$, tal que todo v é imagem de um u . Quando existe esse *isomorfismo* entre ambos os espaços, dizemos que são *isomorfos*.

A.6 Granulação grosseira

Uma operação é dita *granulada grosseiramente* quando unimos alguns de seus resultados. Dizemos que a operação $\{\mathcal{N}_j\}_{j \in \mathcal{Q}}$ é uma granulação grosseira da operação $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in \mathcal{O}}$ se há uma partição disjunta $\{\mathcal{O}_j\}_{j \in \mathcal{Q}}$ de $\mathcal{O}$ tal que

$$\mathcal{N}_j = \sum_{i \in \mathcal{O}_j} \mathcal{M}_i,$$

como apresentado em (12, p. 5).

A.7 Cones convexos

Segundo Wolf (17), se o conjunto Γ de matrizes tem como elemento M , então para qualquer $c \in \mathbb{R}_+$, cM também é elemento de Γ . Desta forma, Γ é chamado de *cone* de matrizes.

A.8 Operadores de Kraus

Suponha que temos uma matriz densidade $\rho \in \mathcal{H}$, onde $\dim(\mathcal{H}) = d^{\mathcal{H}}$. Desejamos fazer uma transformação CP $\Phi : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{G}$, onde $\dim(\mathcal{G}) = d^{\mathcal{G}}$. O *teorema de Kraus* caracteriza completamente o mapa Φ , garantindo que sua atuação possa ser sempre escrita como

$$\Phi(\rho) = \sum_{\alpha=1}^{d^{\mathcal{H}}d^{\mathcal{G}}} K_{\alpha} \rho K_{\alpha}^{\dagger}, \quad (\text{A.4})$$

tal que $\sum_{\alpha=1}^{d^{\mathcal{H}}d^{\mathcal{G}}} K_{\alpha}^{\dagger} K_{\alpha} = \mathbb{I}$. (21, cap. 8) Desta forma, os operadores $\{K_{\alpha}\}_{\alpha=1, \dots, d^{\mathcal{H}}d^{\mathcal{G}}}$ são denominados *operadores de Kraus*.

APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÕES

Aqui, serão realizadas algumas demonstrações utilizadas durante o texto, omitidas com o intuito de tornar o mesmo mais fluido, de modo que o leitor mais interessado tenha em mãos passagens importantes da presente dissertação. Em particular, tanto a [seção B.2](#) quanto a [seção B.3](#) são importantes na dedução do teorema principal de [Oreshkov e Cerf \(3\)](#). A [seção B.5](#) é importante do ponto de vista da aplicação da teoria em si. O restante das seções são para que o leitor goze de uma explicação clara de como obter alguns resultados.

B.1 Teorema da não-clonagem quântica

Suponha dois sistemas A e B com um espaço de Hilbert comum, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$. Suponha que o sistema A se encontra em um estado $|\phi\rangle_A$. Queremos, utilizando um estado inicialmente desconhecido, $|e\rangle_B$, fazer uma cópia de $|\phi\rangle_A$ no sistema B. Ou seja, queremos levar $|\phi\rangle_A |e\rangle_B$ a $|\phi\rangle_A |\phi\rangle_B$. Veja que há duas maneiras de se manipular esse sistema: podemos observar o estado $|\phi\rangle_A$ em uma componente de alguma base, o que causaria o colapso dele e perderíamos o restante da informação necessária. Outra maneira seria controlando o Hamiltoniano, e assim a evolução temporal unitária.

Podemos enunciar o teorema da não-clonagem quântica como:

“Não existe uma evolução temporal unitária U que atua em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tal que, para todos os estados normalizados em $\mathcal{H}$, $U(|\phi\rangle_A |e\rangle_B) = e^{i\alpha(\phi,e)} |\phi\rangle_A |\phi\rangle_B$ para algum $\alpha(\phi,e) \in \mathbb{R}$.”

Para demonstrá-lo, escolhamos dois estados, $\phi_A, \psi_A \in \mathcal{H}$, arbitrários. Uma vez que U é unitário,

$$\begin{aligned} (\langle\phi|_A \langle e|_B)(|\psi\rangle_A |e\rangle_B) &= (\langle\phi|_A \langle e|_B)U^\dagger U(|\psi\rangle_A |e\rangle_B) \\ &= (\langle\phi|_A \langle\phi|_B)e^{-i\alpha(\phi,e)}e^{i\alpha(\psi,e)}(|\psi\rangle_A |\psi\rangle_B) \\ &= e^{-i(\alpha(\phi,e)-\alpha(\psi,e))} \langle\phi|\psi\rangle^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\langle\phi|_A \langle e|_B)(|\psi\rangle_A |e\rangle_B) &= \langle\phi|\psi\rangle \langle e|e\rangle \\ &= \langle\phi|\psi\rangle, \end{aligned}$$

pois $|e\rangle$ é normalizado. Assim,

$$|\langle\phi|\psi\rangle| = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \implies |\langle\phi|\psi\rangle| = 1 \text{ ou } |\langle\phi|\psi\rangle| = 0.$$

Os únicos casos possíveis são $|\phi\rangle = e^{i\beta} |\psi\rangle$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$, ou $\langle\phi|\psi\rangle = 0$. Contudo, esse não pode ser o caso para dois estados *arbitrários*. Desta forma, um único U não gera um estado quântico qualquer. $\square$

B.2 Atualização de informação

Para obter a forma das operações após atualizar a informação disponível, acoplaremos a operação desejada $A \rightarrow B$ a um sistema C , com base $\{|i\rangle^C\}_{i \in \mathcal{O}}$, da forma:

$$\mathcal{M}^{A \rightarrow BC} = \sum_{i \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \otimes |i\rangle\langle i|^C. \quad (\text{B.1})$$

No sistema adicionado, que nos referiremos como sistema “ponteiro”, utilizaremos uma medida usual de von Neumann. De forma geral, isso corresponde a um mapa CP diagonal. O resultado estará, possivelmente, correndo em outro conjunto de possibilidades, tal que o sistema resultante será nomeado C' . Então C' descreve o sistema apontador após essa operação. Seja $\{|j\rangle^{C'}\}_{j \in \mathcal{Q}}$ uma base para esse novo sistema. Sabemos que um *mapa de Kraus* levará $C \rightarrow C'$:

$$\mathcal{N}^{C \rightarrow C'}(\cdot) = \sum_{i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q}} T(i, j) |j\rangle^{C'} \langle i|^C (\cdot) |i\rangle^C \langle j|^{C'},$$

onde $T(i, j)$ é um coeficiente e $|j\rangle^C \langle i|^{C'}$ é um elemento de matriz não necessariamente quadrada. Como não queremos alterar o sistema B , apenas atualizar a informação disponível na caixa, somente alongamos sua saída, ou seja, utilizamos a operação $\mathcal{I}^{B \rightarrow B}$, que na representação de operadores de Kraus, é o operador identidade no sistema B , $\mathbb{I}^B$. Então,

$$\mathcal{M}^{A \rightarrow BC'} = (\mathbb{I}^B \otimes \mathcal{N}^{C \rightarrow C'}) \circ \mathcal{M}^{A \rightarrow BC}.$$

Veja que as operações envolvidas são determinísticas: tanto $\mathcal{M}^{A \rightarrow BC}$ quanto $\mathcal{N}^{C \rightarrow C'}$ são definidas por meio de somas, então todas as suas saídas já estão inclusas no símbolo sem barra; a identidade claramente também é determinística. Composto as operações,

utilizando a equação (2.5),

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{A \rightarrow BC'} &= \frac{\sum_{i \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \otimes \mathcal{N}^{C \rightarrow C'} (|i\rangle\langle i|^C)}{\text{Tr} \left[(\mathbb{I}^B \otimes \mathcal{N}^{C \rightarrow C'}) \circ \mathcal{M}^{A \rightarrow BC} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q}, k \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \otimes T(k, j) |j\rangle\langle j|^{C'} \langle k|i\rangle \langle i|k\rangle \langle j|^{C'}}{\text{Tr} \left[(\mathbb{I}^B \otimes \mathcal{N}^{C \rightarrow C'}) \circ \mathcal{M}^{A \rightarrow BC} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q}, k \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \otimes T(k, j) \delta_{i,k} |j\rangle\langle j|^{C'}}{\text{Tr} \left[(\mathbb{I}^B \otimes \mathcal{N}^{C \rightarrow C'}) \circ \mathcal{M}^{A \rightarrow BC} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]} \\
&= \frac{\sum_{i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q}} T(i, j) \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \otimes |j\rangle\langle j|^{C'}}{\sum_{i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q}} T(i, j) \text{Tr} \left[\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]} \\
&= \sum_{j \in \mathcal{Q}} \mathcal{M}_j'^{A \rightarrow B} \otimes |j\rangle\langle j|^{C'},
\end{aligned}$$

com

$$\mathcal{M}_j'^{A \rightarrow B} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{O}} T(i, j) \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}}{\sum_{i \in \mathcal{O}, j \in \mathcal{Q}} T(i, j) \text{Tr} \left[\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]}. \quad \square \quad (\text{B.2})$$

B.3 Forma geral das transformações de simetria

B.3.1 Mesmo $\bar{\rho}$ para dois estados leva a um mesmo $\bar{F}$ na imagem

Com a equação (2.6) em conjunto com o fato de que, ao descartar toda a informação sobre o resultado, $Q = \{e\}$ e $T(e, i) = 1, \forall i \in \mathcal{O}$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'^{A \rightarrow B} &= \frac{\sum_{i \in \mathcal{O}} \mathcal{M}_i^{A \rightarrow B}}{\sum_{i \in \mathcal{O}} \text{Tr} \left[\mathcal{M}_i^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]} \\
&= \frac{\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B}}{\text{Tr} \left[\bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B} \left(\frac{\mathbb{I}^A}{d_A} \right) \right]} \\
&= \bar{\mathcal{M}}^{A \rightarrow B}.
\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Como preparações são operações que atuam no sistema trivial, podemos escrevê-las em função de sua operação. Veja que, ao descartar toda a informação, levamos o estado $(\rho, \bar{\rho})$ ao estado $(\bar{\rho}, \bar{\rho})$.

Suponha, então, dois estados: $(\rho_1, \bar{\rho})$ e $(\rho_2, \bar{\rho})$. Queremos mostrar que suas imagens deverão ser da forma $(F_1, \bar{F}_1)$ e $(F_2, \bar{F}_2)$, respectivamente, com $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$. Como as probabilidades são invariantes perante transformação de simetria, para um efeito qualquer $(E, \bar{E})$ com imagem $(\sigma, \bar{\sigma})$,

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Tr}[\rho_1 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho} \bar{E}]} &= \frac{\text{Tr}[\sigma F_1]}{\text{Tr}[\bar{\sigma} \bar{F}_1]}, \\
\frac{\text{Tr}[\rho_2 E]}{\text{Tr}[\bar{\rho} \bar{E}]} &= \frac{\text{Tr}[\sigma F_2]}{\text{Tr}[\bar{\sigma} \bar{F}_2]}.
\end{aligned}$$

No entanto, a reversão temporal do descarte completo de informação de um estado é o descarte completo de informação de um efeito; i.e., se descartamos a informação do estado $(\rho_1; \bar{\rho})$, levando-o a $(\bar{\rho}; \bar{\rho})$, sua imagem sob reversão temporal, $(F_1; \bar{F}_1)$ será levada, ao descartar a informação, a $(\bar{F}_1; \bar{F}_1)$. O mesmo vale para $(\rho_2; \bar{\rho})$ e $(F_2; \bar{F}_2)$. Como a probabilidade é invariante pela transformação de simetria,

$$\frac{\text{Tr}[\bar{\rho}E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}\bar{E}]} = \frac{\text{Tr}[\sigma\bar{F}_1]}{\text{Tr}[\bar{\sigma}\bar{F}_1]}$$

e

$$\frac{\text{Tr}[\bar{\rho}E]}{\text{Tr}[\bar{\rho}\bar{E}]} = \frac{\text{Tr}[\sigma\bar{F}_2]}{\text{Tr}[\bar{\sigma}\bar{F}_2]},$$

o que implica em

$$\frac{\text{Tr}[\sigma\bar{F}_1]}{\text{Tr}[\bar{\sigma}\bar{F}_1]} = \frac{\text{Tr}[\sigma\bar{F}_2]}{\text{Tr}[\bar{\sigma}\bar{F}_2]}$$

para todo $(\sigma; \bar{\sigma})$. Escolhendo $\bar{\sigma} = \mathbb{I}/d$, por exemplo, temos

$$\frac{\text{Tr}[\sigma\bar{F}_1]}{\text{Tr}[\bar{F}_1]} = \frac{\text{Tr}[\sigma\bar{F}_2]}{\text{Tr}[\bar{F}_2]}.$$

Como $\bar{F}_1$ e $\bar{F}_2$ são efeitos, por definição $\text{Tr}[\bar{F}_1] = \text{Tr}[\bar{F}_2] = d$. Assim, nos resta

$$\text{Tr}[\sigma\bar{F}_1] = \text{Tr}[\sigma\bar{F}_2].$$

Expandindo o traço em uma base de auto-estados $\{|i\rangle\}_{i \in \mathcal{O}}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{O}} \langle i | \sigma \bar{F}_1 | i \rangle &= \sum_{i \in \mathcal{O}} \langle i | \sigma \bar{F}_2 | i \rangle \\ \sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{O}} \langle i | \sigma | j \rangle \langle j | \bar{F}_1 | i \rangle &= \sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{O}} \langle i | \sigma | j \rangle \langle j | \bar{F}_2 | i \rangle \\ \implies 0 &= \sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{O}} \langle i | \sigma | j \rangle \left(\langle j | \bar{F}_1 | i \rangle - \langle j | \bar{F}_2 | i \rangle \right) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{O}} \langle i | \sigma | j \rangle \langle j | (\bar{F}_1 - \bar{F}_2) | i \rangle, \end{aligned}$$

para todo σ . Como σ é positivo semi-definido, $\langle i | \sigma | j \rangle \geq 0$. Não obstante, $\text{Tr}[\bar{\sigma}] = 1$ (pois σ é um estado). Veja então que existem elementos de σ diferentes de 0. Por conseguinte, a única maneira dos traços serem iguais é para

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2. \quad \square$$

B.3.2 Estados proporcionais implicam em efeitos proporcionais

Consideremos o caso de atualização de informação que a nova informação faz parte do subconjunto $\mathcal{O}' = \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}$. Com isso, $T(i, i) = p > 0, \forall i \in \mathcal{O}'$ e $T(j, i) = 0, \forall i \neq j$. Em

outras palavras, $T(j, i) = p\delta_{i,j}, \forall i, j \in \mathcal{Q}, p > 0$. Então, podemos reescrever a equação (2.6) como:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_j'^{I \rightarrow A} &= \frac{\sum_{i \in \mathcal{Q}} T(j, i) \mathcal{M}_i^{I \rightarrow A}}{\sum_{i \in \mathcal{Q}} \sum_{j \in \mathcal{Q}} T(j, i) \text{Tr} \left[\mathcal{M}_i^{I \rightarrow A} \left(\frac{\mathbb{I}^I}{d_I} \right) \right]} \\ &= \frac{p \mathcal{M}_j^{I \rightarrow A}}{\sum_{j \in \mathcal{Q}} p \text{Tr} \left[\mathcal{M}_j^{I \rightarrow A} \left(\frac{\mathbb{I}^I}{d_I} \right) \right]} \\ &= \frac{\mathcal{M}_j^{I \rightarrow A}}{\sum_{j \in \mathcal{Q}} \text{Tr} \left[\mathcal{M}_j^{I \rightarrow A} \left(\frac{\mathbb{I}^I}{d_I} \right) \right]}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

Escrevamos, então, dois estados: um definido por

$$\rho_1 = (\rho; \bar{\rho})\tag{B.5}$$

e outro definido por

$$\rho_2 = (\alpha\rho; \mathbb{I}/d),\tag{B.6}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}_+$, tal que os estados ρ_1 e ρ_2 sejam proporcionais. Como podemos caracterizar completamente o estado a partir de suas probabilidades conjuntas com todos os efeitos, utilizemos então um efeito $(E, \bar{E})$. A regra de probabilidade conjunta se escreve para o primeiro estado como

$$p(\rho_1, E) = \frac{\text{Tr}[\rho E]}{\text{Tr}[\bar{\rho} \bar{E}]}.$$

Para o segundo estado, ela pode ser escrita como

$$p(\rho_2, E) = \frac{\alpha \text{Tr}[\rho E]}{d \text{Tr}[\bar{E}]}.$$

Quando fazemos a atualização de informação seguindo a equação (B.4), sabemos que levamos o estado $(\rho; \bar{\rho}) \rightarrow \left(\frac{\rho}{\text{Tr}[\rho]}; \frac{\bar{\rho}}{\text{Tr}[\bar{\rho}]} \right)$. Isso por que a atualização para um estado ρ_j é

$$\rho_j' = \frac{\rho_j}{\sum_{j \in \mathcal{Q}} \text{Tr}[\rho_j]},$$

Considerando o conjunto $\mathcal{Q} = \{1\}$ (medimos apenas este ρ ; ou seja, $T(1, 1) = p$), obtemos

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{\rho}{\text{Tr}[\rho]} \\ &= \bar{\rho}'.\end{aligned}$$

Ao fazer a mesma atualização de informação para o estado ρ_2 , cada ρ é acompanhado de um α , que é cancelado na fração, resultando em $(\alpha\rho; \mathbb{I}/d) \rightarrow \left(\frac{\rho}{\text{Tr}[\rho]}; \frac{\bar{\rho}}{\text{Tr}[\bar{\rho}]} \right)$. Veja que, após a

atualização de informação, nossa preparação se torna *a mesma*. Se, por reversão temporal, as imagens de ρ_1 e ρ_2 forem, respectivamente,

$$\begin{aligned} (\rho; \bar{\rho}) &\rightarrow (F; \bar{F}) \\ &\text{e} \\ (\alpha\rho; \mathbb{I}/d) &\rightarrow (F'; \bar{F}'), \end{aligned}$$

ao fazermos a atualização de informação do efeito, que vem do estado transformado, chegaremos em

$$\begin{aligned} (F; \bar{F}) &\rightarrow \left(\frac{F}{\text{Tr}[F]}; \frac{F}{\text{Tr}[F]} \right) \text{ para } \rho_1; \\ (F'; \bar{F}') &\rightarrow \left(\frac{F'}{\text{Tr}[F']}; \frac{F'}{\text{Tr}[F']} \right) \text{ para } \rho_2. \end{aligned}$$

Observe, no entanto, que se atualizarmos a informação e, após isso, aplicarmos a transformação reversão temporal, teremos que as transformações de $(F; \bar{F})$ e $(F'; \bar{F}')$ devem ser, também, *a mesma coisa*. Assim, temos

$$\frac{F'}{\text{Tr}[F']} = \frac{F}{\text{Tr}[F]},$$

ou ainda,

$$F' = \frac{\text{Tr}[F']}{\text{Tr}[F]} F. \quad \square$$

B.3.3 Atuação da operação de simetria em estados e efeitos

Vamos, agora, considerar a operação de simetria dos estados (B.5) e (B.6). Note que é feita aqui a operação que leva estados a efeitos e efeitos a estados, denominada de tipo II. Para o tipo I, basta seguir a mesma lógica, utilizando operações que levam estados a estados e efeitos a efeitos. Veja que, se τ for a operação desejada, temos

$$\begin{aligned} F &= \tau(\rho; \bar{\rho}), \quad \bar{F} = \tau(\bar{\rho}; \bar{\rho}), \\ F' &= \tau(\alpha\rho; \mathbb{I}/d), \quad \bar{F}' = \tau(\mathbb{I}/d; \mathbb{I}/d). \end{aligned}$$

Aqui, nossa notação de $\tau(\rho; \bar{\rho})$ representa a notação de [Oreshkov e Cerf \(3\)](#), $\hat{\tau}_{\bar{\rho}}(\rho)$, de maneira mais explícita. Dessa forma, utilizando o resultado obtido na [subseção B.3.2](#),

$$\tau(\rho; \bar{\rho}) = \underbrace{\frac{\text{Tr}[F]}{\text{Tr}[F']}}_{\equiv f/\alpha} \tau(\alpha\rho; \mathbb{I}/d),$$

onde f expressa a proporcionalidade dos dois efeitos.

Como τ é linear e positivo no primeiro elemento, temos que

$$\begin{aligned}\tau(\rho; \bar{\rho}) &= \frac{f}{\alpha} \tau(\alpha\rho; \mathbb{I}/d) \\ &= f\tau(\rho; \mathbb{I}/d),\end{aligned}\tag{B.7}$$

onde f pode depender de $\bar{\rho}$. Assim, $\tau(\rho, \bar{\rho}) = f(\bar{\rho})\tau(\rho, \mathbb{I}/d)$.

Olhando o caso de um estado determinístico $(\bar{\rho}; \bar{\rho})$, sua transformação o leva necessariamente ao efeito determinístico $(\bar{F}; \bar{F})$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\tau(\bar{\rho}; \bar{\rho}) &= f(\bar{\rho})\tau(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d) \\ &= \bar{F}.\end{aligned}$$

Tomando o traço em ambos os lados, e utilizando a propriedade de efeitos $\text{Tr}[\bar{F}] = d$, temos

$$\begin{aligned}d &= f(\bar{\rho})\text{Tr}[\tau(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d)] \\ f(\bar{\rho}) &= \frac{d}{\text{Tr}[\tau(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d)]}.\end{aligned}$$

Portanto, reescrevemos a equação (B.7) como

$$\tau(\rho; \bar{\rho}) = d \frac{\tau(\rho; \mathbb{I}/d)}{\text{Tr}[\tau(\bar{\rho}; \mathbb{I}/d)]}.\tag{B.8}$$

Para efeitos, podemos realizar o mesmo procedimento: preparamos

$$\begin{aligned}E_1 &= (E; \bar{E}), \\ E_2 &= (\beta E; \mathbb{I}),\end{aligned}$$

com $\beta \in \mathbb{R}_+$, onde a diferença para o caso antigo é que devemos tomar $\text{Tr}[\bar{\sigma}]$, que é 1 e não d , como no caso dos estados. Seguindo o mesmo raciocínio, vemos que, após a atualização de informação, ambos os efeitos são levados a

$$\left(\frac{E}{\text{Tr}[E]}; \frac{E}{\text{Tr}[E]} \right).$$

Fazendo a transformação de simetria,

$$\begin{aligned}E_1 &\rightarrow (\sigma; \bar{\sigma}), \\ E_2 &\rightarrow (\sigma'; \bar{\sigma}'),\end{aligned}$$

cujas imagens após a atualização de informação são, respectivamente a E_1 e E_2 ,

$$\left(\frac{\sigma}{\text{Tr}[\sigma]}; \frac{\sigma}{\text{Tr}[\sigma]} \right)$$

e

$$\left(\frac{\sigma'}{\text{Tr}[\sigma']}; \frac{\sigma'}{\text{Tr}[\sigma']} \right),$$

que devem ser iguais. Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\text{Tr}[\sigma]} &= \frac{\sigma'}{\text{Tr}[\sigma']} \\ \implies \sigma' &= \frac{\text{Tr}[\sigma']}{\text{Tr}[\sigma]} \sigma. \end{aligned}$$

Podemos fazer o mesmo tipo de análise que a anterior, sobre a atuação da operação de simetria sobre E e βE , obtendo

$$\begin{aligned} \tau(E; \bar{E}) = \sigma &= \frac{\text{Tr}[\sigma]}{\text{Tr}[\sigma']} \sigma' = \frac{f}{\beta} \tau(\beta E; \mathbb{I}) \\ \implies \tau(E; \bar{E}) &= f \tau(E; \mathbb{I}). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Para encontrar f , fazemos o mesmo procedimento: tomamos $\tau(\bar{E}; \bar{E}) = \bar{\sigma}$, substituímos na [equação \(B.9\)](#) e calculamos o traço da equação:

$$\begin{aligned} \tau(\bar{E}; \bar{E}) &= \bar{\sigma} = f \tau(\bar{E}; \mathbb{I}) \\ \text{Tr}[\tau(\bar{E}; \bar{E})] &= \underbrace{\text{Tr}[\bar{\sigma}]}_1 = f \text{Tr}[\tau(\bar{E}; \mathbb{I})] \\ \implies f &= \frac{1}{\text{Tr}[\tau(\bar{E}; \mathbb{I})]}. \end{aligned}$$

Assim, a operação que atua sobre os efeitos deve ter a forma

$$\tau(E; \bar{E}) = \frac{\tau(E; \mathbb{I})}{\text{Tr}[\tau(\bar{E}; \mathbb{I})]}. \tag{B.10}$$

B.4 Evolução temporal da matriz densidade e equação de von Neumann

Podemos mostrar que a evolução temporal da matriz densidade ρ sai naturalmente da equação de Schrödinger. Consideremos dois casos: o primeiro, a matriz densidade de um estado puro, $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$. A equação de Schrödinger para o estado $|\psi\rangle \equiv |\psi(t)\rangle$ é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle. \tag{B.11}$$

Tomando o hermitiano conjugado da [equação \(B.11\)](#),

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi| = \langle\psi| H. \tag{B.12}$$

Multiplicando a [equação \(B.11\)](#) por $\langle\psi|$ pela direita e a [\(B.12\)](#) por $|\psi\rangle$ pela esquerda, bem como trocando o sinal da segunda equação, temos o sistema

$$\begin{cases} i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \right) \langle\psi| = H |\psi\rangle \langle\psi| \\ i\hbar |\psi\rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi| = - |\psi\rangle \langle\psi| H \end{cases}. \tag{B.13}$$

Somando ambas as equações do sistema (B.13), vemos que do lado direito temos $[H, |\psi\rangle\langle\psi|]$. Do lado esquerdo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle\right) \langle\psi| + |\psi\rangle \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi| = \frac{\partial}{\partial t} (|\psi\rangle\langle\psi|).$$

Identificando $|\psi\rangle\langle\psi| = \rho(t)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]. \quad (\text{B.14})$$

Por outro lado, no segundo caso, considere que o estado seja misto, não puro. Portanto, nossa matriz densidade tem a forma $\rho(t) = \sum_j p_j |\phi_j(t)\rangle\langle\phi_j(t)|$. Poderíamos ter feito com uma base contínua, mas por simplicidade escolhi uma discreta. Aplicando a equação de Schrödinger para o estado $|\varphi_j\rangle \equiv \sqrt{p_j} |\phi_j(t)\rangle$, e seguindo os mesmos procedimentos, chegamos em

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_j |\phi_j(t)\rangle\langle\phi_j(t)|) = -\frac{i}{\hbar} [H, p_j |\phi_j(t)\rangle\langle\phi_j(t)|]. \quad (\text{B.15})$$

Realizando a soma sobre j na equação (B.15), chegamos novamente na equação (B.14). A equação (B.14) é chamada de *equação de von Neumann*. $\square$

B.5 Atuação da operação

Desejamos verificar como realizar a operação $U\varphi(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|U^\dagger$, com

$$U = \exp\left(i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w\right).$$

Expandindo a exponencial como uma série de potências, temos

$$\exp\left(i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\eta T)^n}{n!} (\mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)^n.$$

Substituindo $\mathbf{R} = i\hbar\nabla_p$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}$, unindo à definição $\sigma_{\hat{\mathbf{v}}} \equiv \boldsymbol{\sigma}_w \cdot \hat{\mathbf{v}}$, chegamos a

$$\exp\left(i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hbar\eta T)^n}{n!} [\nabla_p \cdot \hat{\mathbf{u}}]^n \sigma_{\hat{\mathbf{v}}}^n. \quad (\text{B.16})$$

Para atuar em $\varphi(\mathbf{p})$, podemos expandi-lo (por ser real) como $\varphi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p})\psi^*(\mathbf{p})$. Utilizando a equação (B.16), podemos calcular $U\psi(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle$, obtendo

$$\exp\left(i\eta T \mathbf{R} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w\right) \psi(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hbar\eta T \sigma_{\hat{\mathbf{v}}})^n}{n!} [\nabla_p \cdot \hat{\mathbf{u}}]^n \psi(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle. \quad (\text{B.17})$$

Claramente, $(-\hbar\eta T \sigma_{\hat{\mathbf{v}}}) = [(\mathbf{p} - \hbar\eta T \sigma_{\hat{\mathbf{v}}}) - \mathbf{p}]$. A expressão (B.17) se torna então a expansão de Taylor de $\psi(\mathbf{p} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)|\mathbf{p}\rangle$. Da mesma maneira,

$$\langle\mathbf{p}|\psi^*(\mathbf{p})U^\dagger = \langle\mathbf{p}|\psi^*(\mathbf{p} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w). \quad (\text{B.18})$$

Por fim, unimos as equações (B.17) e (B.18) e obtemos

$$\begin{aligned} U\psi(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\psi^*(\mathbf{p})U^\dagger &= \psi(\mathbf{p} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)\psi^*(\mathbf{p} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| \\ &= \varphi(\mathbf{p} - \hbar\eta T \overleftrightarrow{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_w)|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$