UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Arnol Daniel García Orozco

Efeito da turbulência quântica na expansão livre de
um superfluido atômico

São Carlos

2018

Arnol Daniel García Orozco

**Efeito da turbulência quântica na expansão livre de
um superfluido atômico**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Salavador Bagnato

Versão original

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

García-Orozco, Arnol Daniel García Orozco

Efeito da turbulência quântica na expansão livre de um superfluido atômico / Arnol Daniel García Orozco García-Orozco; orientador Vanderlei Salvador Bagnato Bagnato -- São Carlos, 2018.

86 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Condensado de Bose-Einstein. 2. Turbulência. 3. Localização. I. Bagnato, Vanderlei Salvador Bagnato, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Arnol Daniel Garcia Orozco

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Básica.

Aprovado(a) em: 02/08/2018

Comissão Julgadora

Dr(a). Vanderlei Salvador Bagnato

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a). Antonio Vidiella Barranco

Instituição: (UNICAMP/Campinas)

Dr(a). Rodrigo Figueiredo Shiozaki

Instituição: (UFSCar/São Carlos)

*Com muito amor, para
a minha família.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por ter me dado as forças dia a dia.

Ao professor Vanderlei Salvador Bagnto, por ter acreditado e depositado sua confiança em mim ainda eu estado na Colômbia. Por ter me dado a oportunidade de conhecer o mundo dos átomos frios.

A minha família em especial a minha querida mãe, Maribeth, o meu pai, Herminio, meus irmãos, Atala e Camilo, meus afilhados, Angel David e Emmanuel Santiago, a minha prima, Key, as minhas tias, Maria Isabel e Rita e o meu tio Jairo. Obrigado pelo apoio sempre.

A Gisella Rodriguez por ter me apoiado tempo tudo ainda estando longe. Parte de este trabalho também é de você não esqueça.

Ao professor Francisco Juan Racedo, Paola Pacheco e Juan Alvarez por toda seu apoio, conselhos e motivação durante a graduação e ter acreditado em mim sempre.

Ao poderoso Time do *BEC-I*, ou melhor conhecido como "*Los caraca* de égua", Pedro Tavares, Franklin Vivando e Amilson Fritsch por ter me ensinado tudo no laboratório, além de me ensinar Português, do Brasil, como fazer café e como o experimento não pegar fogo. Em especial a Amilson, *Betty*, por ter muita paciência neste último ano, obrigado *Betty*. Aos novos integrantes do experimento, Marcos Miotti e Michal Hemmerling, por toda a ajuda prestada durante estos últimos meses.

Ao Gustavo Telles e a Kilvia Farias, por todas sua ajuda, conselhos, motivação e pelas valiosas contribuições.

Ao Edwin Pedrozo e ao Ruben Fonsenca, por ter me aconselhado tempo tudo, por me ensinado como é a vida no Brasil para um Barranquillero e por ter me deixado compartilhar com vocês e suas famílias.

Ao Emmanuel Gutierrez, *el Emma*, por ter me ajudado em todo na minha chegada ao Brasil.

Ao do Grupo de Óptica, em especial ao Bruno Pereira, Ramon Rosa, Rodrigo Mendes, André Cidrim, Thiago Santiago, Fabio Jr Pinto, Pedro Mazo e Raphael Caface,

por toda a colaboração.

Ao Aleksandr Novikov e ao Giocomo Roati, pelas colaboração e contribuições ao trabalho, tanto na parte experimental, tanto na parte teórica.

A Nathalia Aprile, *Masisol*, pelo sua ajuda desde o primeiro dia, em especial com o Português.

A meus amigos York Serge, Enzo Solis, Dylan Padilla, Rene Alvarez e Camila Tavares, uma parte da minha terra no Brasil.

Ao LIEPO, por tudo o suporte brindado para os equipamento, circuitos e eletrônica. Em especial ao João Marcelo, Roger Barros, Tayná Bertacine, Richard Mascarin e Luiz Damaceno.

Aos professores que tive durante minha formação obrigado pelos conhecimentos em especial ao Reginaldo Napolitano, além de electromagnetismos, aprendi muitas piadas e Português.

Às secretaria do Grupo de Óptica, Adriane Guilherme, Cristiane Cagnin, Maria Benedita de Souza Gomes da Silva, Benê, e Wagner Balsani.

Aos membros da biblioteca, em especial a Maria Neusa, pela sua enorme ajuda e dedicação incontestável em nos atender com muitos cuidados.

Ao membros do serviço de pós-graduação, Silvio Athayde e Ricardo Vital, obrigado por tudo o excelente trabalho e compromisso com os estudante de pós-graduação do IFSC.

Ao IFSC e a USP por participado e ajudado a melhorar minha formação.

Ao CNPq, CAPES e FAPESP pelo apoio financeiro.

A todas as pessoas que termine esquecendo, agradeço de coração.

*No suor do teu rosto comerás o teu pão,
até que te tornes à terra; porque dela foste tomado;
porquanto és pó e em pó te tornarás.*

Gênesis 3:19

RESUMO

GARCÍA-OROZCO, A. **Efeito da turbulência quântica na expansão livre de um superfluido atômico.** 2018. 86p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Neste trabalho, estudamos o efeito da turbulência quântica na expansão livre do condensado de Bose-Einstein de ^{87}Rb . O BEC é produzido em uma armadilha magnética tipo *QUIC*, em seguida o condensado é perturbado através da aplicação de um campo magnético. A superposição de campos magnéticos excita os modos coletivos em condições de baixa amplitude de excitação. No entanto para altas amplitudes de excitação, foi possível observar também outros efeitos, tais como: a variação do perfil de densidade e a diminuição na taxa de expansão dos átomos. A distribuição de momento dos átomos perturbados, indica a presença de turbulência quântica no superfluido caracterizada por uma cascata de energia dentro da faixa inercial. Os resultados da expansão livre do BEC mostram a variação do perfil de distribuição de densidade dos átomos evoluindo de um perfil Gaussiano a um perfil exponencial para altas amplitudes de excitação. O mesmo efeito foi observado ao aumentar o tempo de excitação na condição de baixas amplitudes de excitação. Além da variação do perfil de distribuição de densidade, a taxa da expansão dos átomos não perturbados é maior do que os átomos perturbados, apresentando a ocorrência de uma diminuição anisotrópica, significativa, da velocidade dos átomos durante a expansão livre. A diminuição da taxa de expansão pode estar relacionado com o fenômeno de localização durante a expansão livre dos átomos.

Palavras-chave: Condensado de Bose-Einstein, Turbulência, Localização.

ABSTRACT

GARCÍA-OROZCO, A. **Effect of quantum turbulence on the free expansion of an atomic superfluid.** 2018. 86p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

In this work, we study the effect of quantum turbulence on the free expansion of the Bose-Einstein condensate of ^{87}Rb . The BEC is produced in a quic magnetic trap, then the condensate is disturbed by the application of a magnetic field. Superposition of magnetic fields excites collective modes under conditions of low amplitude of excitation. However, for high amplitudes of excitation, it was possible to observe other effects, such as: the variation of the density profile and the decrease in the rate of expansion of the atoms. The momentum distribution of the perturbed atoms indicates the presence of quantum turbulence in the superfluid characterized by a cascade of energy within the inertial band. The results of the free expansion of the BEC show the variation of the density distribution profile of the atoms evolving from a Gaussian profile to an exponential profile for high excitation amplitudes. The same effect was observed by increasing the excitation time in the condition of low excitation amplitudes. In addition to the variation of the density distribution profile, the rate of expansion of the undisturbed atoms is greater than the perturbed atoms, with the occurrence of a significant anisotropic decrease in the velocity of the atoms during free expansion. The decrease in the rate of expansion may be related to the localization phenomenon during the free expansion of the atoms.

Keywords: Bose-Einstein condensate, Turbulence, Localization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modos coletivos do BEC em uma armadilha harmônica com simetria axial. Nos modos coletivos de baixas altitude temos: a) modo dipolar, b) modo normal e c) modo quadrupolar, para tempos distintos.	38
Figura 2 – Espectro de energia de um fluido clássico. Dentro da faixa inercial ($k_i \ll k \ll k_f$) a energia do sistema apresenta uma “cascata” de energia descrita pela lei de Kolmogorov.	41
Figura 3 – Representação esquemática da ramificação da turbulência quântica. Dois tipos de dinâmicas são identificadas: a turbulência hidrodinâmica e a turbulência de ondas.	42
Figura 4 – Decaimento exponencial de uma função de onda localizada em um potencial desordenado tipo <i>speckle</i> em uma dimensão. Os resultados analíticos são para $ \psi \propto x ^{3/2} \exp(- x /\xi)$	44
Figura 5 – Representação pictórica das três escalas que caracterizam uma rede cristalina desordenada: a) o comprimento de localização ξ , b) o caminho livre médio l e c) o periodicidade na rede d	44
Figura 6 – Esquema do sistema de vácuo em configuração de duplo-MOT. A primeira câmara contém os <i>dispensers</i> , os quais são a fonte de átomos do experimento. Os átomos são capturados em um MOT a partir vapor de de rubídio e transferidos com um feixe ressonante até a segunda câmara, onde são realizados todos os processos até a condensação.	50
Figura 7 – Esquema da mesa óptica, mostrando os lasers e os principais elementos ópticos necessários para preparar o feixes.	52
Figura 8 – O MOT esta formado por três pares de feixes contrapropagantes (com polarização circular) ortogonais uns aos outros e um campo campo magnético de quadrupolo em configuração anti-Helmholtz. Neste processo, os feixes de resfriamento (C) tem uma potência ~ 15 mW e os feixes de rebombeio (R) tem uma potência de ~ 4 mW, cada um deles.	53

Figura 9 – A armadilha magnética tipo QUIC esta formada pelas duas bobinas de quadrupolo e uma bobina de Ioffe perpendicular a elas. Nesta configuração, o mínimo é deslocado do centro geométrico das bobinas de quadrupolo e um <i>offset</i> no campo magnético é adicionado.	57
Figura 10 – Representação do resfriamento evaporativo. Os átomos mais quente são removidos da armadilha e os restantes termalizam numa temperatura mais baixa.	58
Figura 11 – Fração condensada em função da temperatura. Na medida em que a temperatura ($T < T_c$) do sistema diminui a fração condensada dele aumenta N_o/N	59
Figura 12 – Imagem ilustrativa da construção da imagem normalizada I_N . A imagem normalizada é obtida normalizando a imagem do feixe com (I_{sombra}) e sem o átomos (I_{feixe}) após ter removido o <i>background</i> (I_{back}) das duas imagens.	61
Figura 13 – Para perturbar o BEC, adicionamos duas bobinas paralelas à bobina de Ioffe. Uma corrente AC é aplicada nas bobinas de excitação, permitindo variar: a amplitude da corrente, a frequência e o tempo de excitação. . .	65
Figura 14 – Sequência temporal da excitação do BEC. Após evaporar, um campo magnético oscilatório é ligado com uma frequência f_{exc} , durante um tempo t_{exc} . Logo depois, a nuvem é deixado por um tempo t_{hold} dentro da armadilha, em seguida o campo magnético é desliga e a nuvem expande-se em TOF.	65
Figura 15 – BECs após terem sido excitados. Ao aumentar a amplitude de excitação, o formato da nuvem e o centro de massa dela são alterados.	68
Figura 16 – Distribuição de momentos $n(k)$ do BEC para diferentes amplitudes de excitação. Para altas amplitudes de excitação, o BEC apresenta uma lei de potência (linha vermelha tracejada) de $\gamma \approx -2.1$ dentro da faixa inercial.	69
Figura 17 – Perfil de densidade integrado na direção y . a) para um BEC sem perturbar ($Amp = 0.00$ Vpp) e b) para um BEC fortemente perturbado ($Amp = 0.85$ Vpp).	70

Figura 18 – Perfil de densidade das nuvens perturbadas. a) para um condensado sem excitação; b) para um condensado com baixa amplitude de excitação ($Amp = 0.40$ Vpp), o perfil não é alterado; c) para um condensado com alta amplitude de excitação ($Amp = 0.62$ Vpp), o perfil apresenta alterações em relação aos perfis a) e b); e d) o perfil de densidade apresenta um comportamento linear nos extremos da distribuição para uma amplitude de excitação alta ($Amp = 0.85$ Vpp).	71
Figura 19 – Perfil de densidade e <i>Fitting</i> das nuvens perturbadas. Para baixas amplitudes de excitação ($Amp = 0.00$ Vpp e $Amp = 0.40$ Vpp), a) e b), $\alpha = 2$. No entanto, para altas amplitudes de excitação ($Amp = 0.62$ Vpp e $Amp = 0.85$ Vpp), c) e d), $\alpha = 1$	72
Figura 20 – Comportamento de α em função da amplitude de excitação. A expoente apresenta claramente uma variação de α , passando de uma função Gaussiana ($\alpha = 2$) a uma função exponencial ($\alpha = 1$) com o aumento da amplitude excitação.	72
Figura 21 – Comportamento de α em função do tempo de excitação para diferentes amplitudes de excitação. Ao aumentar o tempo de excitação, tendo baixas amplitudes de excitação é possível observar a variação de função Gaussiana ($\alpha = 2$) à função exponencial ($\alpha = 1$).	73
Figura 22 – Comportamento de α em função do tempo de espera para duas amplitudes de excitação. Para amplitudes de excitação maiores, a variação do α acontece mais cedo.	74
Figura 23 – Comportamento de α e <i>Aspect ratio</i> em função do tempo de espera. Os gráficos, mostram uma dependência do perfil de densidade com o modo quadrupolar da nuvem.	75
Figura 24 – Comportamento de α em função da fração condensada inicial (N_o/N). Quando a $N_o/N > 0.55$, o perfil de densidade é bem descrito pela função exponencial.	76
Figura 25 – Comportamento do comprimento característico em função do tempo de voo. A taxa de expansão da nuvem sem perturbação ($Amp = 0.00$ Vpp) é maior em relação da nuvem perturbada ($Amp = 0.55$ Vpp), indicando uma supressão da expansão da nuvem perturbada.	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BEC	<i>Bose-Einstein condensate</i> (Condensado de Bose-Einstein)
GPE	<i>Gross-Pitaevskii equation</i> (Equação de Gross-Pitaevskii)
TF	Thomas-Fermi
TC	Turbulência clássica
TQ	Turbulência quântica
MOPA	<i>Master oscillator power amplifier</i> (Amplificador de potência do oscilador mestre)
MOT	<i>Magnetic-Optical trap</i> (Armadilha magneto-óptica)
MOT1	MOT da primeira câmara
MOT2	MOT da segunda câmara
QUIC	<i>Quadrupole-Ioffe configuration</i> (Configuração Quadrupolo-Ioffe)
PSD	<i>Phase-space density</i> (Densidade de espaço de fase)
RF	Radio frequência
CCD	<i>Charge-coupled device</i> (Dispositivo de carga acoplada)
OD	<i>Optical density</i> (Densidade óptica)
TOF	<i>Time-of-fly</i> (tempo de voo)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Estrutura da dissertação	24
2	CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN	27
2.1	Gás de Bose em um potencial harmônico	27
2.2	Equação de Gross-Pitaevskii	29
2.3	Aproximação de Thomas-Fermi	31
3	SUPERFLUIDEZ E DESORDEM EM CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN	35
3.1	Superfluidez	35
3.1.1	Critério de Landau para superfluidez	35
3.1.2	Superfluidez e BEC	36
3.2	Modos coletivos	37
3.3	Turbulência	39
3.3.1	Turbulência clássica	40
3.3.2	Turbulência quântica	41
3.4	Desordem em gases atômicos ultrafrios	43
3.4.1	Localização de Anderson	43
3.4.2	Desordem em condensados de Bose-Einstein no regime de interação fraca	45
4	PRODUÇÃO DE CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN	49
4.1	Visão geral do experimento	49
4.2	Sistema de vácuo, <i>laser</i> e controle	49
4.3	Armadilha magneto-óptica	51
4.4	Transferência para a armadilha magnética	54
4.5	Armadilha magnética	55
4.6	Resfriamento evaporativo induzido por radio-frequência	58
4.7	Imagem por absorção em tempo de voo	60
4.7.1	Imagem	60

4.7.2	<i>Fitting</i>	62
4.8	Excitação do BEC	64
5	EXPANSÃO LIVRE DE UM SUPERFLUIDO ATÔMICO	67
5.1	BEC em presença de campo magnético externo	67
5.2	Distribuição de momentos em um BEC perturbado	68
5.3	Expansão anômala de um BEC perturbado	70
6	CONCLUSÕES	79
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

Em 1925, Albert Einstein¹ ampliou o trabalho realizado por Satyendra Nath Bose² em radiação de corpo negro prevendo um novo estado da matéria, o condensado de Bose-Einstein (em inglês, *Bose-Einstein condensate*: BEC). De modo pictórico, Einstein propôs o resfriamento de átomos bosônicos (*spin* inteiro) a uma temperatura muito baixa, faria com que eles caíssem, ou condensassem, no estado quântico mais baixo acessível, obtendo como resultado um novo estado da matéria, o BEC.

Durante a condensação de Bose-Einstein, o número de partículas que ocupam o estado fundamental aumenta ao diminuir a temperatura. Quando o comprimento de onda de De Broglie é da ordem da distância média dos átomos, as funções de ondas superpõem-se produzindo o BEC.

Em 1938, Fritz London³ sugeriu que a superfluidez observada por P. Kapitza⁴ e por J. F. Allen e A. D. Misener⁵ no ^4He está associada com a condensação de Bose-Einstein. Devido ao fato do ^4He ser isótopo bosônico do He, a superfluidez que este mostrou é consequência da condensação. Em 1941, Lev Landau⁶ mostrou que as excitações elementares do fluido satisfazem os critérios adequados para que o movimento do fluido não gere perdas de energia, superfluidez, suportando a hipótese de Fritz London de ter condensação no ^4He .

No entanto, apenas com o desenvolvimento das técnicas de aprisionamento e resfriamento para átomos alcalinos por William Phillips,⁷ Claude Cohen-Tannoudji⁸ e Steven Chu⁹ em 1997 foi possível atingir a condensação de Bose-Einstein em átomos alcalinos por Carl Wieman e Eric Cornell¹⁰ em ^{87}Rb , Wolfgang Ketterle¹¹ em ^{23}Na e Randall Hulet¹² em ^7Li . Sendo os primeiros trabalhos realizados, com ênfases no estudo da termodinâmica em torno da transição de fase do condensado e da dinâmica do condensado aprisionado sendo perturbado por um potencial externo.

Os efeitos da desordem no BEC têm sido muito estudados nos últimos anos, sendo os primeiros trabalhos realizados por Fort *et al*¹³ e por Clément *et al*,¹⁴ nos quais foi mostrado a supressão da expansão livre de uma nuvem em presença de um potencial desordenado. Por outro lado, os trabalhos realizados por Billy *et al*¹⁵ e por Roati *et al*,¹⁶

mostraram a localização de Anderson em BEC no regime de interação fraca.

Além da desordem, a turbulência também tem sido estudada no BEC. Em 2009, Henn *et al*¹⁷ apresentaram evidências de turbulência em BEC de ^{87}Rb usando um campo magnético oscilatório. Um dos trabalhos mais recentes na área de turbulência, foi realizado por Navon *et al*,¹⁸ mostrando cascata de energia em um gás de Bose. No trabalho de Navon, o BEC de ^{87}Rb é obtido em uma armadilha óptica. O sistema é perturbado usando um gradiente de campo magnético.

Em nosso grupo, os estudos em BEC começaram no ano 2004 com o condensado de ^{23}Na com Kilvia M. Farias¹⁹ e no ano de 2009 com o condensado de ^{87}Rb com Emanuel A. L. Henn.²⁰ Neste último o condensado de ^{87}Rb , ou *BEC-I*, tem sido realizados diversos trabalhos na área de: turbulência,^{17,21} vórtices²² e modos coletivos^{23,24}; sendo a turbulência um das linhas de pesquisa com maior interesse em grupo.

Com o objetivo de estudar os efeitos que tem a turbulência no gás de Bose, desenvolvemos esta dissertação focada no estudo da distribuição de densidades e da distribuição de momentos para ver os efeitos da turbulência durante a expansão livre de um superfluido.

Na seguinte seção, será feita uma descrição desta dissertação.

1.1 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: No Capítulo 2, realizaremos uma revisão teórica referente ao BEC em um potencial harmônico. Começando com uma revisão da condensação de Bose-Einstein para um gás de Bose confinado em um potencial harmônico, a equação de Gross-Pitaevskii, a qual descreve o comportamento dos átomos condensados. Finalizando, com a aproximação de Thomas-Fermi.

No Capítulo 3, será feita uma descrição da superfluidade no condensado e alguns fenômenos como: os modos coletivos, a turbulência e a desordem em superfluidos quânticos. Realizaremos uma descrição do conceito de superfluidade e ampliaremos. Também, estudaremos os modos coletivos induzidos no condensado e turbulência, começando com a definição para fluido clássico e sua analogia para o caso quântico. Por último, estudaremos os efeitos da desordem nas propriedades de transporte e para o caso específico de um condensado de Bose-Einstein.

No Capítulo 4, mostraremos os procedimentos envolvidos na captura e no resfriamento dos átomos até atingir a condensação de Bose-Einstein. Começaremos, com uma descrição geral do experimento e do sistema experimental. Seguido da captura dos átomos no MOT, os processos de resfriamento e preparação dos átomos para transferi-los à armadilha magnética. Após isso, realizaremos uma descrição da armadilha magnética e logo depois explicaremos o resfriamento evaporativo utilizando radio-frequência. Também, explicaremos como é obtida a imagem dos átomos e as análises realizadas nela. Finalizando, com a descrição do sistema experimental utilizado para excitar os átomos.

No Capítulo 5, mostraremos os resultados obtidos ao perturbar o condensado. Começaremos apresentaremos as variações do condensado ao ser excitado com um campo magnético oscilatório, mostrando variação na distribuição de momentos das nuvens ao aumentar a amplitude de excitação. Além da variação na distribuição de momento das nuvens, o perfil de densidade das nuvens mudam em função dos parâmetros de excitação. Os resultados obtidos são apresentados na Seção 5.3, onde mostraremos o comportamento do perfil de densidade em função da amplitude de excitação, tempo de excitação, tempo de espera e fração condensada; durante a expansão livre.

Para finalizar no Capítulo 6, apresentaremos as conclusões referente ao trabalho realizado.

2 CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN

Neste capítulo, será feita uma revisão da teórica relacionada ao condensado de Bose-Einstein, em especial para o gás de Bose sem interação em um potencial harmônico e algumas aproximações importantes, baseados nos livros-texto.^{25–27}

2.1 Gás de Bose em um potencial harmônico

Uma análise mais interessante da condensação de Bose-Einstein é considerar um gás de Bose confinando em um potencial harmônico, pois foi nesse tipo de potencial que a condensação de maneira experimental. Consideremos agora um gás de N bósons de massa m , sem interação confinados num potencial harmônico. A Hamiltoniana deste gás é dada por

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2) + \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} (\omega_x^2 x_i^2 + \omega_y^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2) \quad (2.1)$$

no qual $\omega_{x,y,z}$ são as frequências do potencial harmônico nas três direções. A energia deste sistema E_{n_x, n_y, n_z} é dada por

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar (\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z) + E_0, \quad (2.2)$$

no qual $n_{x,y,z} = 0, 1, 2, \dots$, são números inteiros e E_0 é a energia mínima da Hamiltoniana, dada por

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} (\omega_x + \omega_y + \omega_z). \quad (2.3)$$

Em equilíbrio termodinâmico, a distribuição das partículas para uma determinada energia (Equação 2.2) é descrita pela distribuição de Bose-Einstein

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}, \quad (2.4)$$

para o oscilador harmônico,

$$N_{n_x, n_y, n_z} = \frac{1}{e^{\beta(E_{n_x, n_y, n_z} - \mu)} - 1}. \quad (2.5)$$

O número total médio de partículas é dado por

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(E_{n_x, n_y, n_z} - \mu)} - 1}. \quad (2.6)$$

Quando $k_B T$ é muito grande, a diferença de energia entre os níveis mais altos é muito pequena. Nesta condição, podemos trocar a soma em n_x, n_y, n_z por uma integral do tipo

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \rightarrow N_0 + \int_0^{\infty} dE D(E) \dots, \quad (2.7)$$

na qual $D(E)$ é a densidade de estados e

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(E_0 - \mu)} - 1} \quad (2.8)$$

é o número de átomos no estado de mais baixa energia. Vamos considerar o caso mais simples no qual temos um potencial harmônico isotrópico ($\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$). Substituindo a Equação 2.7 na 2.6 e seguindo a análise das referências,^{25,28} temos

$$N = N_0 + \frac{1}{2(\hbar\bar{\omega})^3} \int_0^{\infty} \frac{E^2 dE}{e^{\beta(E+E_0-\mu)} - 1} + \frac{\gamma}{(\hbar\bar{\omega})^2} \int_0^{\infty} \frac{E dE}{e^{\beta(E+E_0-\mu)} - 1} \quad (2.9)$$

no qual $\bar{\omega} \equiv (\omega_x \omega_y \omega_z)^{\frac{1}{3}}$ é a média geométrica das frequências da armadilha e o termo γ é

$$\gamma \simeq \frac{\omega_x + \omega_y + \omega_z}{2\bar{\omega}}. \quad (2.10)$$

A solução da integral da Equação 2.9 é a função de Bose,

$$g_n(z) \equiv \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^n}, \quad (2.11)$$

no qual o termo $z \equiv e^{\beta(\mu - E_0)}$ é a fugacidade da partícula. O número total médio de partículas pode ser reescrito como

$$N = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 g_3(z) + \gamma \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^2 g_2(z). \quad (2.12)$$

no qual o segundo e o terceiro termo são os átomos nos estados excitados.

No caso que a fugacidade é $z = 1$, a função de Bose (Equação 2.11) torna-se a função zeta de Riemman.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(a) \zeta(a). \quad (2.13)$$

Para temperaturas muito baixas ($T < T_c$), o potencial químico obtém seu valor mais alto fazendo que a fugacidade tenha o valor máximo ($z = 1$). Neste ponto, podemos obter a temperatura crítica T_c do gás

$$k_B T_c = \hbar \bar{\omega} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.14)$$

Usando a Equação 2.12 e 2.14, podemos obter a fração condensada do gás em função da temperatura

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (2.15)$$

2.2 Equação de Gross-Pitaevskii

Para sistema com densidade de partículas muito alta ($\sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$) com temperatura muito baixa ($\sim \text{nK}$), a distância média entre as partículas é muito pequena, de modo que os efeitos de interação de dois ou mais corpos (aproximação de campo médio) começam a ter efeito no potencial. Consideremos um gás de N bósons de massa m , confinado em

um potencial harmônico. Neste caso, vamos a considerar que a densidade de partículas é muito alta, tal que não podemos desprezar a interação entre elas. A Hamiltoniana do gás é dada por

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V(\mathbf{r}_i) + \frac{U_0}{2} \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (2.16)$$

na qual o último termo representa a interação entre as partículas. A energia do sistema é dada por

$$E = \int \psi^* H \psi d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_i, \quad (2.17)$$

na qual ψ é o auto estado de cada uma das partículas do gás. Agora consideremos o caso que o gás sofre uma transição de fase e a maioria das partículas pode ser descrita por o estado de uma única partícula,

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \psi_1(\mathbf{r}_i), \quad (2.18)$$

na qual $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N)$ são os auto-estados das partículas e ψ_1 é o auto-estado de uma única partícula condensada, todos os auto-estados são normalizados e satisfazem a equação de Schrödinger. Substituindo a Equação 2.18 em 2.17, temos

$$E = N \int d\mathbf{r} \psi_1^*(\mathbf{r}) \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{U_0}{2} (N-1) |\psi_1(\mathbf{r})|^2 \right] \psi_1(\mathbf{r}). \quad (2.19)$$

Quando o número de partículas condensadas $N \gg 1$, e normalizando a função de onda do condensado $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \psi_1(\mathbf{r})$, temos

$$E[\psi] = \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}) \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (2.20)$$

A energia anterior (Equação 2.20) é conhecida como energia funcional de Gross-

Pitaesvkii e a partir dela podemos obter

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.21)$$

No caso estacionário, $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t}$, tal que

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}), \quad (2.22)$$

As interações entre os átomos são forte, mas apenas ocorrem quando a distancia entre eles é muito pequena. No caso do BEC, a densidade de partículas é muito alta pelo qual o termo de interação entre as partículas contribui na Hamiltoniana do sistema. A interação entre os átomos é obtida usando a aproximação de Born²⁹ para dois corpo. O termo g é a interação efetiva entre os átomos dado por

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a, \quad (2.23)$$

na qual a é o comprimento de espalhamento. A Equação de Gross-Pitaesvkii (em inglês, *Gross-Pitaesvkii Equation*: GPE) foi derivada independentemente por Eugene Gross³⁰ e Lev Pitaevskii³¹ para descrever vórtices quantizados em um gás de Bose. A GPE consegue descrever de maneira aproximada o comportamento do BEC usando uma única função de onda.

2.3 Aproximação de Thomas-Fermi

Consideremos o caso no qual a interação entre as partículas seja repulsiva. Nesta situação, o condensado expande-se, as flutuações na densidade são suprimidas e a contribuição da energia cinética é muito baixa ao aumentar o número de bósons N . Esse regime é conhecido como aproximação de Thomas-Fermi (TF). Na aproximação de TF, a energia do sistema é composta pela energia do potencial confinante $V(\mathbf{r})$ e a interação de campo médio entre os átomos.

Usando a GPE (2.22) podemos obter a função de onda de TF. Na aproximação de

TF, o termo da energia cinética é desprezível, consequentemente a GPE torna-se

$$\phi_{TF}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{g}(\mu - V(\mathbf{r}))}. \quad (2.24)$$

No caso de ter um potencial harmônico isotrópico,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2, \quad (2.25)$$

a equação de TF (Equação 2.24) torna-se

$$\phi_{TF}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{g}\left(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2\right)}, \quad (2.26)$$

A função de onda de TF (Equação 2.26), não pode adquirir valores negativo devido que valores negativo da função de onda não tem significado físico. Igualando a zero a Equação 2.26, temos

$$\mu = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2, \quad (2.27)$$

na qual R é o raio característico do condensado. Substituindo a interação efetiva entre os átomos (Equação 2.23) e o raio característico do condensado (Equação 2.27) na Equação 2.26, temos

$$\phi_{TF}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{R^2 - \mathbf{r}^2}{8\pi a d_0^4}}, \quad (2.28)$$

na qual $d_0 = \sqrt{m\omega/\hbar}$ é o comprimento característico do oscilador harmônico. O potencial químico μ e o número de átomos N podem ser obtidos a partir da condição de normalização da função de onda de TF (Equação 2.28), $\int \psi_{TF}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N$. Assim, temos que

$$R = \left(\frac{15Na}{d_0}\right)^{\frac{1}{5}} d_0. \quad (2.29)$$

O potencial químico fica

$$\mu = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{15Na}{d_0} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (2.30)$$

enquanto o número de átomos é

$$N = \frac{d_0}{15Na} \left(\frac{2\mu}{\hbar\omega} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (2.31)$$

Um resultado interessante derivado da aproximação de TF é o *healing length* ou comprimento de correlação. Quando a densidade do sistema varia de modo abrupto, seja por perturbações locais devido a campos externos, seja defeitos topológicos associados a vórtices, seja variações abruptas no potencial confinante, o sistema tentará restaurar a densidade. O *healing length* é o comprimento característico sobre o qual a densidade local é restaurada.

Consideremos o caso de ter um BEC dentro de um potencial tipo caixa com paredes infinitas. Nas paredes, a função de onda deve desaparecer de forma que os átomos concentram-se no interior da caixa aumentando a densidade neste ponto. Perto das paredes a sistema é dominado pela energia de interação $\sim ng$ e a energia cinética. A variação espacial da energia cinética pode ser descrita pela variação de l_{heal} , de forma que a energia cinética por partícula é da ordem de

$$K = \frac{\hbar^2}{2ml_{heal}^2}. \quad (2.32)$$

A diferença entre a energia cinética e a energia de interação perto das paredes deve ser zero, então

$$\frac{\hbar^2}{2ml_{heal}^2} = ng, \quad (2.33)$$

substituindo o valor de g (Equação 2.23) na Equação 2.33, podemos encontrar o *healing length* (l_{heal})

$$l_{heal} = \frac{\hbar}{\sqrt{8\pi na}}. \quad (2.34)$$

3 SUPERFLUIDEZ E DESORDEM EM CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN

Neste capítulo, será feita uma descrição do conceito de superfluidez no BEC. Além disso, descrever alguns fenômenos como turbulência clássica e quântica, e sistemas fora do equilíbrio em superfluidos quânticos, baseados nos livros-texto.^{27,29,32,33}

3.1 Superfluidez

Um dos fenômenos fortemente relacionado com a superfluidez é a condensação de Bose-Einstein. O efeito de superfluidez está relacionado como a capacidade de fluir através de tubos muito finos (capilares) ou fendas muito estreitas sem dissipar energia (aquecer).

Os primeiros experimentos de superfluidez foram feitos em ^4He por P. Kapitza⁴ e por J. F. Allen e A. D. Misener⁵ em 1938, mas só em 1941 Lev Landau⁶ mostrou que as excitações elementares do fluido satisfazem os critérios adequados para que o movimento do fluido não gere perdas de energia.

3.1.1 Critério de Landau para superfluidez

A teoria proposta por Lev Landau para superfluidos baseia-se nas transformações de energia e de momento de Galileu para um fluido dentro de um capilar.²⁷ Consideremos um fluido de massa m com energia E e momento $\mathbf{P}$ em um sistema de referência K . No sistema de referência K' , o fluido tem uma energia E' e momento $\mathbf{P}'$, movendo-se com velocidade $\mathbf{V}$ em relação a K , dado por

$$E' = E - \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}mV^2; \quad \mathbf{P}' = \mathbf{P} - m\mathbf{V}. \quad (3.1)$$

Vamos considerar um fluido uniforme, com temperatura zero e fluindo através de um capilar. Consideremos apenas as excitações elementares do fluido ao tocar as paredes do capilar. No momento que o fluido toca a parede do capilar, uma pequena excitação de momento $\mathbf{p}$ e energia total $E_0 + \epsilon(\mathbf{p})$ é gerada, sendo E_0 a energia no estado fundamental e $\epsilon(\mathbf{p})$ a excitação. Considerando que o capilar está em repouso, o fluido está movendo-se

com uma velocidade $-\mathbf{v}$, energia E' e momento $\mathbf{P}'$. De acordo com a Equação 3.1, temos

$$E' = E_0 + \epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}mv^2; \quad \mathbf{P}' = \mathbf{p} - m\mathbf{v}. \quad (3.2)$$

O termo $\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{p}$ representa a troca de energia e do momento após da excitação. Para não ter variação de energia cinética no sistema, o fluido deve gerar de maneira espontânea uma excitação de energia negativa de valor

$$\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} < 0, \quad (3.3)$$

sendo possível se $v > \epsilon(\mathbf{p})/p$, permitindo ao fluido transferir momento ao capilar. Nesta situação, o fluido perde estabilidade, permite converter a energia cinética em calor. No caso que a velocidade seja menor que a velocidade crítica,

$$v_c = \min_{\mathbf{p}} \frac{\epsilon(\mathbf{p})}{p}, \quad (3.4)$$

o fluido não tem nenhuma excitação espontânea. Essa condição é conhecida como critério de Landau para superfluidez.

3.1.2 Superfluidez e BEC

O critério de superfluidez de Landau também pode ser usado no BEC. Consideremos um condensado uniforme com densidade condensada $|\Psi_0|^2$. A função de onda do condensado Ψ_0 não é invariante usando as transformações de Galileo devido ao fato de ganhar um fator de fase na função de onda do condensado.²⁷ Usando a GPE (Equação 2.21) com $g = 0$, podemos realizar uma transformação tal que

$$\Psi'(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t) e^{\frac{i}{\hbar}(m\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}mv^2t)}, \quad (3.5)$$

na qual $\mathbf{v}$ é um vetor constante.

A Equação 3.5, contém a transformação de Galileo do operador de campo que precisamos. Realizando um procedimento similar ao realizado na Equação 2.22, podemos definir um novo parâmetro de ordem (função de onda do condensado) para um fluido

movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$,

$$\Psi_0 = \sqrt{n_0} e^{iS} \quad (3.6)$$

na qual n_0 é a densidade de condensado e S é a nova fase, dada por

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\hbar} \left[m\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - \left(\frac{1}{2}mv^2 + \mu \right) t \right]. \quad (3.7)$$

A velocidade do superfluido $\mathbf{v}_s$ é proporcional ao gradiente da fase, tal que

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla S. \quad (3.8)$$

O resultado de $\mathbf{v}_s$ mostra a existência de uma irrotacionalidade do movimento no superfluido, no qual a fase do parâmetro de ordem (Equação 3.7) atua como um potencial de velocidade. Diferente das condições usadas por Landau para mostrar a superfluidez no ^4He , a temperatura no BEC não precisa ser zero.²⁷

Substituindo o novo parâmetro de ordem (Equação 3.6) na GPE (Equação 2.21)

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + V + gn_0 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_0}} \nabla^2 \sqrt{n_0} \right) = 0, \quad (3.9)$$

o último termo dentro do parênteses é a pressão quântica.²⁷ A Equação 3.9 é a equação Hidrodinâmica do BEC, equivalente à GPE.

3.2 Modos coletivos

Na aproximação de TF, a contribuição da energia cinética é muito baixa em comparação ao potencial confinante $V(\mathbf{r})$.²⁹ Considerando um número muito grande de partículas dentro da armadilha, o termo da pressão quântica é desprezível, de modo que a equação hidrodinâmica do BEC (Equação 3.9) reduz-se a

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + V + gn_0 \right) = 0. \quad (3.10)$$

Para estudo dos modos coletivos, consideraremos pequenas variações na densidade

Figura 1 – Modos coletivos do BEC em uma armadilha harmônica com simetria axial. Nos modos coletivos de baixas altitudes temos: a) modo dipolar, b) modo normal e c) modo quadrupolar, para tempos distintos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

do BEC, dadas por

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r}) + \delta n(\mathbf{r}, t), \quad (3.11)$$

na qual $n_0(\mathbf{r})$ é a densidade média e $\delta n(\mathbf{r}, t)$ são as flutuações na densidade dependente do tempo.

Os modos coletivos são obtidos usando a solução periódica da equação hidrodinâmica do BEC (Equação 3.10). Para o caso específico de um BEC em um potencial harmônico com simetria axial, os modos coletivos são descritos por

$$m\omega^2 \delta n(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left\{ \left[\mu - \frac{m}{2} (\omega_r^2 r^2 + \omega_x^2 x^2) \right] \nabla \delta n \right\}, \quad (3.12)$$

na qual ω_x é a frequência na direção radial e $\omega_y = \omega_z = \omega_r$ é a frequência na direção axial, tal que $r^2 = x^2 + y^2$. A solução da Equação 3.12 é dada por

$$\delta n(\mathbf{r}) \propto P(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.13)$$

na qual $P(r)$ é a parte radial, que tem solução $P(r) \sim r^l$, e $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos. Nesse caso, a solução é $m = \pm l, \pm(l-1)$, que resulta nas leis de dispersão.³⁴ A Figura 1, mostra os modos coletivos para um BEC confinado em um potencial harmônico, descritos pelo valor de l (lei de dispersão).

Para $l = 1$, temos o modo dipolar, com frequências $(\omega_{l,\pm m})$

$$\omega_{1,\pm 1} = \omega_r; \quad \omega_{1,0} = \omega_x, \quad (3.14)$$

que descreve o deslocamento do centro de massa na nuvem.

Para $l = 2$, temos o modo quadrupolar com frequências

$$\omega_{2,\pm 2} = \sqrt{2}\omega_r; \quad \omega_{2,\pm 1} = (\omega_r^2 + \omega_x^2); \quad \omega_{2,0} = \pm \omega_r \sqrt{2 + (3/2)\lambda^2 - (1/2)\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16}}, \quad (3.15)$$

que descrevem a mudança da forma da nuvem no tempo.

Por último, para $l = 0$ temos o modo monopolar com frequência

$$\omega_{0,0} = \pm \omega_r \sqrt{2 + (3/2)\lambda^2 + (1/2)\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16}}, \quad (3.16)$$

na qual ω_r e ω_x são as frequências da armadilha e $\lambda = \omega_x/\omega_r$. Quando uma armadilha com formato de “charuto” (*cigar-shaped*), no qual $\omega_r \gg \omega_x$, de modo que $\lambda \ll 1$, as frequências monopolar e quadrupolar são reduzidas a³⁵

$$\omega_{0,0} = 2\omega_r; \quad \omega_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{2}}\omega_r. \quad (3.17)$$

Ao induzir os modos coletivos no BEC, podemos tê-los todos ao mesmo tempo, dependendo da energia usada para induzir os modos coletivos e a frequência de excitação, podemos suprimir ou privilegiar alguns dos modos.

3.3 Turbulência

A turbulência é um dos fenômenos mais comuns na natureza (como o movimento do ar com o bater das asas de um beija-flor e o fluxo do ar atrás das asas de um avião). Compreender como ela é gerada e sua evolução faz dela um fenômeno de estudo na física atual.³⁶

Inicialmente, podemos identificar dois tipo de turbulência: a turbulência clássica

(TC) e a turbulência quântica (TQ). Os conceitos usados na QT são uma extrapolação dos conceitos da TC, no entanto há diferenças entre os fluidos clássicos e os fluidos quânticos (i.e., que apresentam superfluidez). Nas seguintes seções, ampliaremos os conceitos de TC e TQ.

3.3.1 Turbulência clássica

A turbulência clássica é formulada usando a equação de Navier-Stokes, que descreve a evolução espaço-temporal de um fluido incompressível tridimensional.³² Consideremos um fluido com um campo de velocidade $\mathbf{v}$, densidade ρ , pressão P e viscosidade η . No caso de aplicar uma força externa $\mathbf{f}$, a equação de Navier-Stokes pode-se escrever como

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla P + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (3.18)$$

na qual ν é a viscosidade cinética dada por $\nu = \eta/\rho$. A Equação de Navier-Stokes (Equação 3.18) consegue descrever muitos fenômenos na mecânica de fluidos, tendo aplicações em muitas áreas: engenharia, cosmologia, hemodinâmica, entre outras.³⁶

Em 1941, Andrey Nikolaevich Kolmogorov^{37,38} apresentou sua teoria para o estudo de turbulência usando uma descrição estatística das flutuações do fluido (sistema). A hipótese usada por Kolmogorov, foi propor um sistema estatisticamente isotrópico de escala muito pequena, no qual as propriedades dinâmicas do mesmo são descritas pela equação de Navier-Stokes (Equação 3.18) contando com a simetria da equação (simetria espacial de translação, a simetria de rotação e simetria de escala) e a invariância intrínseca dela.

Considerando uma faixa inercial definida entre $k_i \ll k \ll k_f$, a função de distribuição das velocidades $\delta v(l)$ depende da escala l e da energia de dissipação ϵ . Nesta faixa inercial, Kolmogorov define uma função de estrutura que pode ser descrita por uma lei de potência do tipo

$$S^{(p)}(l) = C_p \epsilon^{p/3} l^{p/3}, \quad (3.19)$$

na qual, C_p é a dimensionalidade, sendo universal e constante. Um resultado interessante da teoria proposta é a segunda ordem da função de estrutura (Equação 3.19) ou o espectro

Figura 2 – Espectro de energia de um fluido clássico. Dentro da faixa inercial ($k_i \ll k \ll k_f$) a energia do sistema apresenta uma “cascata” de energia descrita pela lei de Kolmogorov.

Fonte: Adaptada de: DAVISON, P. A.³⁶

de energia, dado por

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad (3.20)$$

na qual k é o número de onda obtido da transformada de Fourier do campo de velocidades. A energia do sistema é introduzida nos baixos momentos e dissipada nos altos momentos, descrevendo uma “cascata” de energia com uma inclinação de $\gamma = -5/3$ na escala $\log E(k)$ vs $\log k$. Na Figura 2, mostra-se o comportamento da energia em função do número de onda k dentro da faixa inercial.

3.3.2 Turbulência quântica

O conceito de turbulência quântica foi introduzido em 1955 por Richard Feynman³⁹ e comprovado experimentalmente em ^4He por H.E. Hall e por W. F. Vinen^{40,41} em 1956.

Na teoria, R. Feynman mostra que é possível ter turbulência em um fluido quântico (i.e., que apresenta superfluidez), gerando pequenos anéis de vórtices para logo emaranhar e decair em turbulência. No entanto, nos experimentos de H.E. Hall e de W. F. Vinen, a turbulência foi gerada introduzindo um fluxo de calor no ^4He , o que induz atrito entre o ^4He normal e o ^4He superfluido, formando desordem entre as linhas de vórtices. A primeira evidência experimental de turbulência em BECs foi apresentada em 2009 por Henn *et al.*,¹⁷

Figura 3 – Representação esquemática da ramificação da turbulência quântica. Dois tipos de dinâmicas são identificadas: a turbulência hidrodinâmica e a turbulência de ondas.

Fonte: Adaptada de: SANTOS, A. C.⁴²

mostrando também evidências de emaranhamento de vórtices.

Embora a definição de turbulência quântica exposta por Feynman,³⁹ apresenta uma descrição qualitativa do problema e dos experimentos realizados na década de 60; esta definição só tem sido relevante para alguns casos específicos. No entanto, as comparações feitas entre a turbulência clássica e a quântica têm deixado como resultado uma ramificação nessa última. Na atualidade, podemos identificar dois tipos de dinâmica: a turbulência hidrodinâmica e a turbulência de ondas. Na Figura 3, a ramificação da dinâmica da turbulência quântica é mostrada.⁴²

A turbulência hidrodinâmica é caracterizada por ter vórtices como mecanismo de geração. Dependendo da orientação e quantização deles, podemos ter dois tipos de turbulência: a turbulência do tipo Kolmogorov ou quase-clássica, que é caracterizada por um fluxo de larga escala; e a turbulência do tipo Vinen ou ultra-quântica, caracterizada por um fluxo aleatório de vórtices.

Por outro lado, os fluidos quânticos também podem ser comprimidos igual aos fluidos clássicos. Ao comprimir o fluido quântico, estamos produzindo uma variação de densidade, gerando ondas de matéria. Dependendo do tipo de interação, que pode ser ou fraca ou forte, podemos ter turbulência de onda forte ou turbulência de onda fraca, respectivamente.

Os efeitos da turbulência, seja hidrodinâmica, seja de onda, têm sido objeto de

estudo em física atômica nos últimos anos, possivelmente, devido ao alto controle que se pode ter neste tipo de experimento (número de átomos, potencial confinante, entre outros parâmetros). Muitos experimentos^{17,18,43} e trabalhos teóricos^{44,45} já foram realizados para caracterizar a turbulência quântica em BECs.

3.4 Desordem em gases atômicos ultrafrios

Na natureza, é muito comum encontrar impurezas, defeitos e descontinuidades nos sistemas, e na maioria das vezes estes fatores geram desordem dentro deles. Em sistemas de átomos ultrafrios, os fenômenos de transporte são estudados em presença da desordem. Neste tipo de sistema, a desordem pode ser introduzida de modo controlado, permitindo estudar e caracterizar de forma contínua.³³

3.4.1 Localização de Anderson

Em 1958, Philp Warren Anderson⁴⁶ apresentou o fenômeno de localização em um sistema quântico devido à desordem. Este fenômeno é chamado localização de Anderson ou de localização forte e baseia-se na supressão no movimento devido à presença de impurezas no meio.

A teoria considera uma perturbação fraca em um cristal, a qual só tem efeito nas fases das funções de onda dos elétrons (os elétrons são descritos usando uma função de Bloch). No caso da perturbação fraca, a função de onda mantém a forma de onda plana para deslocamentos muito pequenos. No entanto, para um deslocamento maior da onda, a função de onda desvia-se levemente de uma onda plana.

Se incrementamos a perturbação, a fase da função de onda e possivelmente suas amplitude serão afetados. Se o caminho livre médio l (definido como a distância média entre duas dispersões consecutivas da partícula) é da ordem do comprimento de coerência e a perturbação for a grande suficiente, a amplitude da função de onda também mudará. Para altas perturbações, a amplitude da função de onda é descrita por um decaimento exponencial da forma

$$|\psi| \propto \exp(-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|/\xi), \quad (3.21)$$

na qual ξ é o comprimento de localização.

Figura 4 – Decaimento exponencial de uma função de onda localizada em um potencial desordenado tipo *speckle* em uma dimensão. Os resultados analíticos são para $|\psi| \propto |x|^{3/2} \exp(-|x|/\xi)$.

Fonte: Adaptada de: LEWENSTEIN, M.; SANPERA, A.; AHUFINGER, V.³³

Figura 5 – Representação pictórica das três escalas que caracterizam uma rede cristalina desordenada: a) o comprimento de localização ξ , b) o caminho livre médio l e c) o periodicidade na rede d .

Fonte: Adaptada de: LEWENSTEIN, M.; SANPERA, A.; AHUFINGER, V.³³

No limite de espalhamentos fortes, as múltiplas interferências podem interromper completamente a propagação das ondas dentro do meio desordenado. Na figura 4, o comportamento da densidade $|\psi|^2$ em função da posição na presença de um potencial desordenado do tipo *speckle* é mostrado.

Na teoria da localização de Anderson para uma rede cristalina desordenada, existem três escalas que descrevem o sistema: o comprimento de localização ξ , o caminho livre médio l e a periodicidade da rede d . Na figura 5 temos uma representação delas.

3.4.2 Desordem em condensados de Bose-Einstein no regime de interação fraca

A dinâmica dentro de um BEC perturbado pode ser descrita usando a GPE (Equação 2.21) com um termo adicional V_d ³³

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + V_d(\mathbf{r}, t) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (3.22)$$

na qual V é o potencial confinante e V_d é o potencial aleatório ou quase periódico.

Os primeiros experimentos envolvendo BECs dentro de um potencial de *speckle*, mostravam supressão no transporte devido a reflexões clássicas. Alguns experimentos^{14, 47–49} mais recentes nos quais a desordem é da ordem do regime da localização de Anderson (i.e., comprimento de correlação da ordem do caminho médio) mostram variações na densidade do BEC após ter sido deixado em um potencial *speckle*. Os resultados destes experimentos mostram a existência de regimes dependentes do potencial de *speckle*, V_d :

- i) Para $V_d \ll \mu$. O perfil de densidade não apresenta variações, mantendo seu perfil característico de TF.⁴⁹
- ii) Para $V_d \sim \mu$. O perfil de densidade da nuvem expandida apresenta faixas (estrias) no perfil. As faixas só ocorrem durante o tempo de voo, devido à modulação de fase da onda induzida pela modulação inicial na densidade.¹⁴
- iii) Para $V_d \gg \mu$. Os efeitos de tunelamento entre os mínimos de um potencial harmônico são fortemente suprimidos, fazendo com que o condensado se rompa em fragmentos “independentes”. As imagens obtidas por tempo de voo, mostram que não há interferência entre os BECs.⁵⁰

Os efeitos da desordem nos modos coletivos têm sido estudados fortemente. Lye *et al*⁴⁷ estudo os efeitos da desordem nos modos coletivos. Nesse experimento, o BEC foi obtido em uma armadilha magnética e logo depois de evaporado foi adicionado o potencial de *speckle* V_d . O V_d foi gerado por um feixe de $\lambda = 822$ nm com uma dessintonia respeito à linha D₁ do Rb. Os resultados mostram, uma variação no perfil de distribuição devido ao V_d . Além disso, a nuvem mostrou supressão no modo dipolar dentro da armadilha magnética para valores altos de V_d , enquanto que no modo quadrupolar só induziu um

deslocamento da frequência em função de V_d . Um efeito semelhante foi obtido no grupo²³ ao excitar com um potencial oscilatório.

No entanto, as propriedades de transporte também são afetadas pela desordem. Fort *et al*¹³ e Clément *et al*¹⁴ mostraram a supressão na expansão de uma nuvem em presença de um potencial de *speckle*. A dinâmica da nuvem muda totalmente, a expansão na direção axial e o movimento do centro de massa da nuvem são inibidos quando temos um potencial de *speckle* suficientemente alto. Embora as nuvens apresentem um efeito de localização, este não é do tipo da localização de Anderson. Algumas das explicações pela qual não tem localização de Anderson, nesses tipo de sistema são³³: a atenuação do potencial de desordem, comprimento de correlação do desordem muito maior do que o *healing length*, e valores da desordem muito grande.

Sanchez-Palencia *et al*⁵¹ estudo a localização de Anderson durante a expansão de um BEC-1D em um potencial tipo *speckle*. Nesse trabalho, a localização de Anderson foi analisada em função do comprimento de correlação σ_R do potencial de *speckle*. Quando o comprimento de correlação (σ_R) é maior que o *healing length* (l_{heal}) ($l_{heal} > \sigma_R$), a localização é exponencial. No caso contrario $l_{heal} < \sigma_R$, a localização é algébrica. A descrição do BEC-1D foi baseada na GPE com um potencial externo (Equação 3.22). Os resultados analíticos e numéricos apresentados mostraram supressão na expansão da nuvem devido ao potencial de *speckle*.

Billy *et al*¹⁵ foram os primeiros em mostrar o efeito de localização de Anderson em BEC interagente. Nesse experimento, a localização é devido as múltiplas reflexões quânticas para valores muito baixos do potencial de *speckle*. O BEC é obtido em uma armadilha híbrida anisotrópica com número de átomos condensados muito baixo, pelo qual o termo de interação é quase desprezível. Após evaporar, os átomos expandem-se dentro do potencial de tipo *speckle* por alguns milissegundos e logo a armadilha é desligada. Em tempo de voo, os átomos começam a expandir, mas detém-se rapidamente.

Roati *et al*¹⁶ também mostraram o efeito de localização de Anderson em BEC não interagente, dentro de um potencial quase periódico. Os resultados obtidos mostram claramente uma variação nas propriedades de transporte e na distribuição espacial e do momento nos átomos. Para baixos níveis de perturbação, a expansão da nuvem descreve um perfil balística ($\alpha = 2$), no entanto para altos níveis de perturbação a expansão da

nuvem muda para um perfil exponencial ($\alpha = 1$).

A localização de Anderson não só tem sido estudada em BEC. Kondov *et al*⁵² viram a localização de Anderson em um gás ultrafrio de Férmions (^{41}K). Nesse experimento, os átomos foram capturados e resfriados em uma armadilha óptica. A temperatura da nuvem esta na faixa de 150 a 1500 nK. O potencial de *speckle* foi gerado por um feixe de $\lambda = 532\text{ nm}$. O perfil de densidade da nuvem mostram um decaimento exponencial após expandir alguns milissegundos. Uma das diferenças em contraste aos experimentos de Lye *et al*⁴⁷ e Clément *et al*¹⁴ foi o uso de um potencial de *speckle* tridimensional em lugar de um potencial de *speckle* unidimensional.

4 PRODUÇÃO DE CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN

Neste capítulo, será feita uma descrição geral de nosso sistema experimental e dos processos envolvidos na produção de BEC de ^{87}Rb no estados $|2, 2\rangle$ e $|1, -1\rangle$. Para mais detalhes do sistema experimental recomendamos consultar a dissertação⁵³ e as teses de doutorado.^{54–56}

4.1 Visão geral do experimento

São muitas as técnicas e configurações desenvolvidas na área de física atômica para a captura e resfriamento de amostras atômicas.^{7–9} Uns dos resultados mais chamativos usando estas técnicas é a condensação de Bose-Einstein.^{10,11} Para atingir a condensação de Bose-Einstein é necessário capturar e resfriar átomos de temperatura de mK até nK, atingindo densidades na nuvem atômica da ordem $\sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$.

São muitos e diversos os processos realizados para atingir o BEC, podem variar desde a captura e desaceleração dos átomos até os processos de resfriamento.^{56,57} Resumindo, os átomos são capturados em um MOT-3D, onde são resfriados até o limite sub-Doppler ($T \sim 50 \mu\text{K}$) e posteriormente preparados em um estado magneticamente aprisionável, para serem transferido a uma armadilha harmônica puramente magnética, onde será realizados o processo de resfriamento evaporativo.

O objetivo principal de nosso experimento é estudar algumas das propriedades do BEC, tais como: termodinâmica,⁵⁵ vórtices, sistemas fora-do-equilíbrio⁵⁴ e modos coletivos.^{53,56} Nas seguintes seções, será feita uma descrição mais detalhada do sistema experimental e dos processos de captura e resfriamento para produzir o BEC.

4.2 Sistema de vácuo, *laser* e controle

Nosso sistema experimental pode ser dividido em três partes: o sistema de vácuo, o sistema de *lasers* e o sistema de controle. O funcionamento adequado de todos eles permite a reprodutibilidade do BEC.

Durante os processo de resfriamento, os átomos armadilhados e aqueles que não conseguimos capturar pode colidir o que faria aquecer os átomos capturados na armadilha.

Figura 6 – Esquema do sistema de vácuo em configuração de duplo-MOT. A primeira câmara contém os *dispensers*, os quais são a fonte de átomos do experimento. Os átomos são capturados em um MOT a partir vapor de de rubídio e transferidos com um feixe ressonante até a segunda câmara, onde são realizados todos os processos até a condensação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As colisões entre os átomos tornaria impossível o resfriamento. Dito o anterior, nosso sistema de vácuo está dividido em três regiões diferentes de vácuo: duas câmaras e uma região diferencial, como se mostra na Figura 6. A primeira região é uma câmara fabricada em quartzo, a qual contém nossa fonte de átomos, que são os *dispensers* * de átomos de rubídio. Esta primeira região é chamada MOT1. A segunda região é uma conexão entre as duas câmaras feita por um tubo estreito que junta as duas câmaras. Por último, a terceira região é uma câmara de quartzo, chamada MOT2, onde são realizados todos os processos de resfriamento até a condensação. Os átomos são transferidos usando um feixe ressonante que empurra os átomos do MOT1 até o MOT2. A câmara 1, onde é produzido o MOT1, tem uma pressão de $\sim 10^{-9}$ Torr, enquanto a câmara 2, onde é produzido o MOT2, tem uma pressão de $\sim 10^{-12}$ Torr.

O sistema de *lasers* está composto por: um *laser Toptica DLX100*, um *laser Toptica TApró* e um amplificador MOPA (em inglês, *Master Oscillator Power Amplifier*). O

* Os *dispenser* são filamentos metálicos de cromato de rubídio (Rb_2CrO_4), os quais ao ser aquecidos $\sim 600^\circ\text{C}$ usando uma corrente elétrica e uma reação química liberam vapor de rubídio.

comprimento de onda dos *lasers* é 780 nm com largura de linha 1 MHz, ressonante com a transição D_2 do ^{87}Rb .⁵⁸ A Figura 7, mostra um esquema da nossa mesa óptica com alguns dos componente mais importante na preparação dos feixes.

O *laser Toptica TApró* (resfriamento) esta encarregado de gerar os feixes de resfriamento usados no MOT2 e MOT1, o feixe de transferência, um dos feixe de bombeamento óptico e o feixe de imagem, usado para interrogar o estados dos átomos. O *laser Toptica DLX100* (rebombeio) é usado para gerar o feixes de rebombeio e um dos feixes de bombeamento óptico. Os feixes de resfriamento usados no MOT1 são amplificados no MOPA, de um feixe de luz proveniente do laser de resfriamento. Para realizar o experimento é preciso estabilizar os *lasers* em duas transições da linha D_2 : o laser de resfriamento na transição $F = 1 \rightarrow F' = 2$ e o laser de rebombeio na transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$, para isso usamos a técnica de absorção saturada.

Por último, o sistema de controle esta composto por duas placas da *National Instruments*: PCI 6259 e PXI 6733, as quais nos permite gerar todos os sinais analógicos e digitais usados durante o experimento com uma resolução temporal de 5 μs . A sequência temporal do experimento esta programada em *LabVIEW* e *Python*.

4.3 Armadilha magneto-óptica

O primeiro passo no caminho ao BEC é a armadilha magneto-óptica (em inglês, *Magnetic-Optical trap*: MOT). O MOT é uma combinação da força exercida pela luz nos átomos e a força de dispersão experimentada pelos átomos por um campo magnético não-homogêneo. O MOT é formado por três pares de feixes contrapropagantes ortogonais com polarização circular e um par de bobinas de quadrupolo como mostra a Figura 8. Para maiores detalhes teóricos e experimentais recomendamos consultar as referências.^{7-9,59-61}

Os feixes do MOT são formados por dois feixes de diferente frequências. Um feixe de resfriamento e um feixe de rebombeio, o feixe de resfriamento tem uma dessintonia de 20 MHz para o vermelho da transição $5^2S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 3)$, enquanto que o feixe de rebombeio é ressonante na transição $5^2S_{1/2}(F = 1) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 2)$.

O campo magnético do MOT é gerado por: duas bobinas em configuração anti-Helmholtz chamadas bobinas de quadrupolo e três pares de bobinas de compensação em configuração Helmholtz. As bobinas de quadrupolo geram um gradiente de campo

Figura 8 – O MOT está formado por três pares de feixes contrapropagantes (com polarização circular) ortogonais uns aos outros e um campo magnético de quadrupolo em configuração anti-Helmholtz. Neste processo, os feixes de resfriamento (C) têm uma potência ~ 15 mW e os feixes de rebombeio (R) têm uma potência de ~ 4 mW, cada um deles.

Fonte: Elaborada pelo autor.

magnético com zero de campo magnético no centro da armadilha.

O gradiente de campo magnético e os feixes de resfriamento geram uma força restauradora que permite desacelerar os átomos. Devido às transições indesejadas alguns átomos podem decair no estado $F = 1$, usando o feixe de rebombeio estes podem ser levados à armadilha. A combinação dos feixes de resfriamento e rebombeio com o campo magnético formam uma armadilha.

O gradiente de campo magnético usado durante o MOT é de 10 G/cm. No MOT1, usamos 270 mW nos feixes de resfriamento e 30 mW nos feixes de rebombeio, capturando ao redor de 3×10^8 átomos com uma temperatura de $\sim 320 \mu\text{K}$. No MOT2, usamos 100 mW nos feixes de resfriamento e 40 mW nos feixes de rebombeio, recapturando ao redor de 2×10^9 átomos com uma temperatura similar ao MOT1. O MOT2 é carregado em sua totalidade em, aproximadamente, 25 s, após disso os átomos são preparados para serem transferidos a uma armadilha puramente magnética.

Na seguinte seção, será feita uma descrição dos processos envolvidos para a transferência dos átomos na armadilha magnética.

4.4 Transferência para à armadilha magnética

Um das etapas mais críticas é a transferência para à armadilha magnética. O objetivo durante este processo é transferir a maior quantidade de átomos com temperatura muito baixa. São três os processos realizados nesta etapa: a compressão do MOT, o *molasses* e o bombeamento óptico.

Ao longo da transferência, são vários os fatores que comprometem a eficiência do processo. O formato e tamanho da armadilha magnética são muito diferente do MOT, enquanto a armadilha magnética tem um formato de elipsoide com um radio médio de ~ 0.5 mm, o MOT tem um formato irregular devido a pequenos desbalanços na potência dos feixes de resfriamento com um raio médio de ~ 2.5 mm. Além de variar o formato do MOT, um desbalanço na potência dos feixes, pode deslocar o centro do MOT do centro da armadilha magnética, afetado a transferência dos átomos de uma armadilha à outra.

O primeiro passo na transferência dos átomos é a compressão do MOT, demonstrada em 1994 por Petrich *et al.*⁶² Neste processo, o feixes de resfriamento são dessintonizados ainda mais para o vermelho; diminuindo a taxa de espalhamento dos fótons e acumulando os átomos no centro da armadilha. Durante o experimento, a dessintonia dos feixes de resfriamento é aumentada de $\Delta = -20$ MHz até $\Delta = -60$ MHz, mantendo constante o gradiente de campo magnético. A duração deste processo é 5 ms.

O seguinte passo é o *molasses* ou resfriamento sub-Doppler⁶³ que é usado para diminuir a temperatura da nuvem. Durante o *molasses*, o campo magnético é desligado permitindo a expansão da nuvem dentro dos feixes de MOT. A dessintonia dos feixes de resfriamento é aumentada até $\Delta = -70$ MHz, fazendo que os átomos se expandam num meio viscoso durante 3 ms. O resultado final deste processo é uma nuvem de ~ 50 μ K.

O passo final na transferência é o bombeamento óptico.⁶⁴ Neste estágio, os átomos são deixados num estado de *spin* magneticamente aprisionável. O ^{87}Rb tem dois estado fundamentais, $F = 2$ e $F = 1$. Para $F = 2$, os átomos podem-se encontrar em qualquer um dos 5 subníveis: $|2, 2\rangle$, $|2, 1\rangle$, $|2, 0\rangle$, $|2, -1\rangle$ e $|2, -2\rangle$, enquanto para $F = 1$, os átomos pode-se encontrar em qualquer um dos 3 subníveis: $|1, 1\rangle$, $|1, 0\rangle$, $|1, -1\rangle$ [†]. Na armadilha magnética nem todos os estados são magneticamente aprisionáveis, para $F = 2$ são aprisionáveis:

[†] $|\mathbf{F}, m_{\mathbf{F}}\rangle$, representa o estado hiperfino do átomo. $\mathbf{F}$ é o valor resultante do acople do momento nuclear do átomo com o acople *spin*-órbita. $m_{\mathbf{F}}$ são os subníveis Zeeman para cada um dos estados hiperfinos. Para mais detalhes pode-se consultar a referência.⁶⁵

$|2, 2\rangle$ e $|2, 1\rangle$; enquanto para $F = 1$ só é aprisionável $|1, -1\rangle$.

Para promover os átomos num estado de *spin* magneticamente aprisionável, são usados feixes com polarização circular para a direita (σ^+) ou circular para a esquerda (σ^-), ressonante numa transição do átomo[‡].

Durante o bombeamento óptico, os feixes de MOT são desligado e um campo magnético homogêneo de 1 G é ligado, separando os subníveis Zeeman da nuvem. Para melhorar a eficiência deste processo, realizamos um pre-bombeamento óptico. Este pre-bombeamento óptico consiste em manter ligado um dos feixes de MOT um tempo maior para promover os átomos num estado desejado. Para $F = 2$, desligamos 500 μs depois o feixe de resfriamento, enquanto para $F = 1$, o feixe de rebombeio é desligado 500 μs depois.

Para bombear os átomos no estado $|2, 2\rangle$, primeiro é ligado um feixe ressonante na transição $5^2S_{1/2}(F = 1) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 2)$ durante 120 μs . O segundo feixe é ressonante na transição $5^2S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 2)$ e ligamos ele durante 25 μs , ambos feixes com polarização σ^+ . Neste processo, a eficiência durante a população pode ser de até 70 %.

Para bombear os átomos no estado $|1, -1\rangle$ o processo é similar, primeiro ligamos um feixe na transição $5^2S_{1/2}(F = 1) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 1)$ durante 80 μs , seguido de um feixe ressonante na transição $5^2S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 2)$, o qual mantemos ligado durante 1.2 ms, ambos com polarização σ^+ . Neste processo, a eficiência durante a população pode ser de até 50 %.

Ao finalizar todos os processo envolvidos na preparação dos átomos para a transferência, todos os feixes do MOT2 são desligado e a nuvem esta pronta para ser capturada numa armadilha puramente magnética.

4.5 Armadilha magnética

O funcionamento da armadilha magnética baseia-se na interação do momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ do átomo com o campo magnético $\mathbf{B}$. Um dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ alinhado a um campo magnético $\mathbf{B}$, tem energia⁵⁹

$$V = m_F g_f \mu_B B. \quad (4.1)$$

[‡] Um feixe de polarização σ^+ , realiza uma transição de m_F a $m_F + 1$, enquanto que um feixe de σ^- , faz uma transição de m_F a $m_F - 1$.

A interação do átomo com o campo magnético depende do estado hiperfino (subnível Zeeman, m_F), do magneton de Bohr μ_B e do fator de lande g_F ; este último varia para cada estado fundamental do ^{87}Rb . Para $F = 2$, o fator de lande é $g_F = 1/2$, enquanto para $F = 1$, o fator de lande é $g_F = -1/2$. Através da Equação 4.1, vemos que só é possível manter na armadilha magnética os átomos no estado $|2, 2\rangle$, $|2, 1\rangle$ e $|1, -1\rangle$, pois nesses casos $V > 0$.

Após o bombeamento óptico, os átomos estão preparados para ser capturados na armadilha puramente magnética. Inicialmente, as bobinas de quadrupolo têm um gradiente de 10 G/cm. Para capturar os átomos na armadilha magnética logo depois do bombeamento óptico, aumentamos o gradiente de 10 G/cm, valor de captura de MOT, até 75 G/cm, de modo abrupta em poucos milissegundos, capturando um grande número de átomos.

Logo depois de capturar os átomos é preciso aumentar o gradiente de campo magnético para melhorar a taxa de colisão durante o resfriamento evaporativo. O gradiente é aumentado de 75 G/cm até 330 G/cm, usando uma rampa linear em 400 ms, mantendo este último valor de gradiente até finalizar a sequência.

A armadilha magnética de quadrupolo tem alta eficiência na captura dos átomos, mas nesta configuração atingir a condensação é um fato impossível. Nesta configuração, temos um mínimo de potencial com zero de campo magnético. O zero de campo magnético faz que os átomos possam ser expulsos da armadilha, este fenômeno é conhecido como *Majorana spin flips*.⁶⁶

Existe muitas configurações possíveis para remover o zero de campo magnético, alguns delas adicionam um potencial óptico^{67,68} ou mudam a configuração do campo magnético.^{69–71} Para eliminar o zero de campo magnético no mínimo do potencial, usamos uma configuração similar à Esslinger *et al*,⁷⁰ acrescentando uma bobina perpendicular às bobinas de quadrupolo chamada bobina de Ioffe, como se mostra na Figura 9. Ao sobrepor o campo magnético das bobinas de quadrupolo e o campo magnético da bobina de Ioffe, geramos um novo potencial magnético. Esta configuração é conhecida como *Quadrupolo-Ioffe configuration* (QUIC), proposta inicialmente por Pritchard em 1983⁷² para capturar átomos neutros.

No experimento, as bobinas de quadrupolo e a bobina de Ioffe estão ligadas em série, a corrente que passa pela bobina de Ioffe é controlada por um MOFEST. Inicialmente

Figura 9 – A armadilha magnética tipo QUIC esta formada pelas duas bobinas de quadrupolo e uma bobina de Ioffe perpendicular a elas. Nesta configuração, o mínimo é deslocado do centro geométrico das bobinas de quadrupolo e um *offset* no campo magnético é adicionado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

a corrente que passa pela bobina de Ioffe é zero. Logo depois de ter capturado os átomos usando as bobinas de quadrupolo, aumentamos a corrente na bobina de Ioffe de zero a 25 A em 600 ms, adicionando um campo magnético perpendicular ao gradiente gerado pelas bobinas de quadrupolo. Durante este processo, a nuvem é deslocada 8 mm do centro geométrico das bobinas de quadrupolo. Ao finalizar, temos um potencial harmônico com um *offset* de campo magnético que pode ser descrito por

$$V(x, y, z) = V_o + \frac{1}{2}m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (4.2)$$

na qual V_o é o valor mínimo do potencial magnético, m é a massa do rubídio e ω_x , ω_y e ω_z são as frequências do potencial harmônico nas três direções. As frequências podem ser medidas induzindo o modo dipolar na nuvem,⁵⁶ as quais variam de acordo com o estado fundamental. Para $F = 2$ as frequências são $\omega_x = 2\pi \times 21.4$ Hz, $\omega_y = 2\pi \times 190.5$ Hz e $\omega_z = 2\pi \times 190.5$ Hz, enquanto para $F = 1$ as frequências são $\omega_x = 2\pi \times 15.2$ Hz, $\omega_y = 2\pi \times 137.7$ Hz e $\omega_z = 2\pi \times 137.7$ Hz. A razão entre as frequências radiais (ω_y, ω_z) e a frequência longitudinal (ω_x) da armadilha é $\omega_r/\omega_x \approx 10$, tendo nossa armadilha um

Figura 10 – Representação do resfriamento evaporativo. Os átomos mais quente são removidos da armadilha e os restantes termalizam numa temperatura mais baixa.

Fonte: Elaborada pelo autor.

formato de charuto alongado na direção da bobina de Ioffe.

Ao finalizar todos esse processos, temos uma nuvem com $\sim 4 \times 10^8$ átomos com $\sim 450 \mu\text{K}$ no estado $F = 2$ e ao redor $\sim 2.5 \times 10^8$ átomos com $\sim 250 \mu\text{K}$ no estado $F = 1$. O último processo para conseguir condensar a nuvem é o resfriamento evaporativo. Na seguinte seção, será feita uma descrição deste.

4.6 Resfriamento evaporativo induzido por radio-frequência

Em nuvens atômicas aprisionadas, o resfriamento evaporativo consiste em retirar os átomos com maior energia cinética (os átomos mais quentes), de maneira seletiva usando radio-frequência (RF), permitindo que os átomos restantes possam termalizar em uma temperatura mais baixa. O funcionamento do resfriamento evaporativo pode-se assemelhar à esfriar uma xícara de café soprando o ar quente que fica no topo dela. Uma excelente representação deste processo mostra-se na Figura 10, os átomos com maior velocidade são removidos da nuvem, enquanto os átomos restantes termalizam numa temperatura mais baixa.

O resfriamento evaporativo baseia-se na remoção dos átomos mais energéticos de maneira seletiva. Em armadilhas puramente magnética isto é possível pela dependência da energia entre dois níveis Zeeman consecutivos com o campo magnético. A separação

Figura 11 – Fração condensada em função da temperatura. Na medida em que a temperatura ($T < T_c$) do sistema diminui a fração condensada dele aumenta N_o/N .

Fonte: Elaborada pelo autor.

entre dois níveis Zeeman m_F e $m_{F\pm 1}$ depende da posição deles no potencial magnético. Quando a separação entre eles é ressonante com a RF (ω_{RF}), o átomo com maior energia é expulso da armadilha e o átomo que fica termaliza a uma temperatura mais baixa. Este processo é realizado de maneira contínua, conseguindo a remoção dos átomos mais energia (mais quentes), uma diminuição rápida da temperatura dos átomos (mais frios) restante e o aumento na densidade nos níveis mais baixos de energia. A geração da RF é feita através de uma antena circular e é localizada abaixo dos átomos. Para mais detalhes da teoria recomendamos consultar a referência.⁷³

Durante a evaporação, o objetivo é aumentar a PSD. Em palavras simples, aumentar a densidade de átomos nos níveis menos energéticos. Quando a PSD alcança um valor maior ou igual a 2.612, a transição de fase é atingida, há o aparecimento de átomos condensados e a medida que aumentamos a PSD a fração condensada aumenta.

Nossa rampa de evaporação foi construída e otimizada, maximizando a PSD durante o processo. Ketterle e Druten,⁷³ fazem uma descrição detalhada dos parâmetros a otimizar durante a evaporação, dado por

$$\gamma = \frac{\ln(PSD_{final}/PSD_{inicial})}{\ln(N_{final}/N_{inicial})}, \quad (4.3)$$

na qual γ é taxa de colisões elástica. A PSD (Equação 2.15) é proporcional ao número de átomos N e temperatura T . Na Figura 11 mostra o comportamento da fração condensada em função da temperatura.

No experimento, usamos uma rampa de evaporação exponencial. O valor inicial da rampa é o valor máximo de RF a partir do qual os átomos são expulsos da armadilha, enquanto o valor final é obtido em base ao mínimo do campo magnético. Nossa rampa de evaporação inicia em 28 MHz e finaliza em 1.6 MHz, a duração da rampa depende de qual estado ($F = 1$ ou $F = 2$) estamos interessados. Para $F = 2$ tem uma duração de 21 s, enquanto que para $F = 1$ a duração é 18 s.

Ao finalizar o resfriamento evaporativo, conseguimos um BEC de fração condensada $\sim 80\%$ com ao redor 2.5×10^5 átomos para $F = 2$ e 3.5×10^5 átomos para $F = 1$. O seguinte passo é a obtenção da imagem dos átomos, o qual será feita uma descrição detalhada deste na seguinte seção.

4.7 Imagem por absorção em tempo de voo

A imagem dos átomos é obtida excitando eles com um feixe de luz ressonante. A sombra gerada pelos átomos é capturada com uma câmara CCD (em inglês, Charge-coupled device). Este método chama-se imagem por absorção e consiste em construir uma imagem dos átomos usando três imagens.⁷⁴

A partir da imagem dos átomos podemos obter muita informação, por exemplo: número de átomos condensado (N_{BEC}), número de átomos térmicos (N_{th}), tamanho do condensado (R_x, R_y) e na nuvem térmica (σ_x, σ_y), centro de massa da nuvem atômico (x_o, y_o) e temperatura.

Nas seguintes subseções, será feita uma descrição mais detalhada de como obtemos a imagem dos átomos e como é obtida as informações a partir dela.

4.7.1 Imagem

A densidade do BEC aprisionado é muito alta, fato que dificulta a realização da imagem de absorção “*in situ*”. Para resolver este inconveniente, realizamos a imagem da nuvem atômica em tempo de voo (em inglês, *Time-of-flight*: TOF). A ideia os átomos é deixar expandir em queda livre por alguns milissegundo, para diminuir a densidade da nuvem.

Para construir a imagem da nuvem atômica, usamos três imagens. A primeira imagem é da sombra gerado pelos átomos com o feixe de imagem (I_{sombra}), a segunda

Figura 12 – Imagem ilustrativa da construção da imagem normalizada I_N . A imagem normalizada é obtida normalizando a imagem do feixe com (I_{sombra}) e sem o átomos (I_{feixe}) após ter removido o *background* (I_{back}) das duas imagens.

Fonte: Elaborada pelo autor.

imagem é do feixe de imagem (I_{feixe}) sem nuvem atômica e a última é sem feixe de luz, usada para obter informação do *background* luminoso (I_{back}).

O feixe de imagem é ressonante na transição $5^2S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 3)$, interagindo com átomos que estão no estado $F = 2$. Caso queremos realizar a imagem dos átomos no estado $F = 1$, precisamos fazer um bambeamento, ligando o feixe de rebombeio, para levar os átomos ao estado $F = 2$. A duração dos feixe de imagem (I_{sombra} , I_{feixe} e I_{back}) é de $40 \mu s$ com uma potência de $\sim 800 \mu W$. A intensidade dos feixes é capturada por uma câmara CCD *Stingray*, enviada ao PC para construir uma imagem normalizada dos átomos. A duração do feixe de imagem e a sincronização com a *Stingray* é controlada via PC.

A imagem normalizada dos átomos I_N é construída a partir das três imagens como se mostra na Figura 12, usando a expressão

$$I_N = \frac{I_{sombra} - I_{back}}{I_{feixe} - I_{back}}. \quad (4.4)$$

A partir de imagem normalizada nós calculamos a densidade óptica da nuvem, de onde extraímos as informações pertinentes à nuvem. Para obter a densidade óptica,

usamos a lei de Beer que descreve a absorção de luz pelos átomos,

$$I(x, y) = I_o(x, y)e^{-OD(x, y)}, \quad (4.5)$$

na qual $I_{(x, y)}$ é a intensidade da luz propagada na direção z , I_o é a intensidade inicial do feixe de imagem e $OD(x, y)$ é a distribuição da densidade óptica (em inglês, *Optical density*: OD) da nuvem (BEC e/ou térmica) dada por

$$OD(x, y) = \sigma_o \int n(z, y, z) dz, \quad (4.6)$$

na qual σ_o é a seção de choque do átomo, para o ^{87}Rb a $\sigma_o \approx 1.36 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-2}$. A OD pode ser obtida usando a lei de Beer (Equação 4.5),

$$OD(x, y) = \ln \frac{I(x, y)}{I_o(x, y)}, \quad (4.7)$$

no qual I/I_o é a imagem normalizada (Equação 4.4). No experimento, depois de construir a imagem normalizada esta é enviada a *Python*, o qual calcula a $OD(x, y)$ e extrai ao realizar um *fitting* da OD.

4.7.2 Fitting

Numa armadilha harmônica, os átomos condensados apresentam uma distribuição inversa ao potencial confinante, enquanto que os átomos térmicos são descritos pela distribuição de Maxwell-Boltzmann. Após produzir o BEC, podemos ter átomos condensados e térmicos. Para descrever a nuvem como um todo, usamos uma função bimodal que contém a contribuição dos átomos condensados e a dos átomos térmicos.

Para o BEC, a distribuição é descrita usando uma função Thomas-Fermi,

$$OD_{TF}(x, y) = OD_{TF}^{pico} \max \left[\left(1 - \frac{(x - x_o)^2}{R_x^2} - \frac{(y - y_o)^2}{R_y^2} \right)^{3/2}, 0 \right], \quad (4.8)$$

na qual OD_{TF}^{pico} é o valor no pico da distribuição de Thomas-Fermi, x_o e y_o são as posições do centro de massa da nuvem (em referência ao origem da imagem) e R_x e R_y são os raios do BEC.

Para a nuvem térmica, a distribuição é descrita por uma gaussiana,

$$OD_{gauss} = OD_{gauss}^{pico} \exp \left[-\frac{(x - x_o)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - y_o)^2}{\sigma_y^2} \right], \quad (4.9)$$

na qual OD_{gauss}^{pico} é o valor no pico da distribuição da Gaussiana e σ_x e σ_y são as larguras da nuvem térmica.

A partir da OD do BEC e da nuvem térmica podemos determinar o número de átomos,

$$N = \int n(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{\sigma_o} \int OD(x, y) dx dy. \quad (4.10)$$

Resolvendo a integral, obtemos o número de átomos para cada distribuição. Para o BEC,

$$N_{BEC} = \frac{2}{5} \frac{\pi OD_{TF}^{pico}}{\sigma_o} R_x R_y, \quad (4.11)$$

enquanto que para a nuvem térmica,

$$N_{th} = 2 \frac{\pi OD_{gauss}^{pico}}{\sigma_o} \sigma_x \sigma_y. \quad (4.12)$$

Assim, o número total de átomos na nuvem atômica é

$$N_{total} = N_{th} + N_{BEC} = 2 \frac{\pi OD_{gauss}^{pico}}{\sigma_o} \sigma_x \sigma_y + \frac{2}{5} \frac{\pi OD_{TF}^{pico}}{\sigma_o} R_x R_y \quad (4.13)$$

A temperatura da nuvem é obtida usando o valores de σ_x e σ_y da nuvem térmica em TOF, usando a equação da energia,

$$\frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} m v^2, \quad (4.14)$$

na qual T é a temperatura da nuvem térmica em equilíbrio com o BEC, v é a velocidade de expansão da nuvem e m é a massa do átomo. Nos primeiros milissegundo, o BEC e a

nuvem térmica estão juntos na armadilha, após alguns milissegundos § a nuvem térmica expande-se com velocidade,

$$\sigma_i = \sigma_{io} + v_i t, \quad (4.15)$$

usando a Equação 4.14 e 4.15, temos que

$$T = \frac{m}{k_B} \left(\frac{\sigma}{t} \right)^2, \quad (4.16)$$

e para valores de t no qual, $\sigma_{io} \ll \sigma_i$ temos que $\sigma_x \approx \sigma_y = \sigma$. Na seguinte seção, será feita uma descrição do sistema usado para excitar os átomos.

4.8 Excitação do BEC

O estudo do BEC em um potencial externo é um das linha de pesquisa de interesse em nosso experimento. Vários trabalhos já foram realizados, alguns deles em turbulência,^{17,43,54,75} modos colectivos,^{23,24,56} termodinamica⁵⁵ e vórtices.^{21,22,76}

Para induzir perturbações na nuvem, usamos um campo magnético oscilatório gerado por duas bobinas paralelas à bobina de Ioffe, chamadas bobinas de excitação. As bobinas de excitação estão em configuração anti-Helmholtz e localizadas como mostra a Figura 13.

Ao sobrepor o campo da armadilha magnética (QUIC) e o gerado pelas bobinas de excitação, conseguimos perturbar a nuvem permitindo: rotar, deslocar, comprimir e descomprimir ela ao mudar a forma do potencial da armadilha. A corrente que passa pelas bobinas de excitação é dada por

$$I_{bobinas} = I_o [1 - \cos(2\pi f_{exc} t_{exc})], \quad (4.17)$$

na qual i_o é a corrente máxima nas bobinas, f_{exc} é a frequência de excitação e t_{exc} é o tempo de excitação do BEC.

Logo depois de evaporar, a nuvem atômica é perturbada com as bobinas de excitação

---

§ Na armadilha harmônica, só é valido para $t_i > 1/\omega_i$, na qual ω_i é a frequência na direção i da armadilha.

Figura 13 – Para perturbar o BEC, adicionamos duas bobinas paralelas à bobina de Ioffe. Uma corrente AC é aplicada nas bobinas de excitação, permitindo variar: a amplitude da corrente, a frequência e o tempo de excitação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Sequência temporal da excitação do BEC. Após evaporar, um campo magnético oscilatório é ligado com uma frequência f_{exc} , durante um tempo t_{exc} . Logo depois, a nuvem é deixada por um tempo t_{hold} dentro da armadilha, em seguida o campo magnético é desligado e a nuvem expande-se em TOF.

Fonte: Elaborada pelo autor.

usando uma frequência f_{exc} , durante um tempo excitação t_{exc} . Após desligar as bobinas de excitação, a nuvem é deixada na armadilha magnética durante um tempo de espera t_{hold} para logo o campo magnético da armadilha ser desligado e obter a imagens por absorção deles. O valor da frequência de excitação (f_{exc}), o tempo de excitação (t_{exc}), o tempo de espera (t_{hold}) e a corrente das bobinas de excitação (i_o), podem ser mudados para estudar o comportamento em função deles. A Figura 14, mostra uma representação da sequência temporal usado para excitar a nuvem.

5 EXPANSÃO LIVRE DE UM SUPERFLUIDO ATÔMICO

Neste capítulo, será feita uma discussão dos resultados obtidos ao excitar um BEC com um campo magnético oscilatório. Observamos variações nas propriedades de transporte da nuvem em função dos parâmetros de excitação (i.e., tempo de excitação, amplitude de excitação, etc). Os resultados mostram supressão no movimento dos átomos usando certos parâmetros de excitação.

5.1 BEC em presença de campo magnético externo

Ao excitar o BEC com um campo magnético externo podemos induzir diferentes efeitos, por exemplo: modos coletivos^{23,24} e vórtices.^{21,22}

Usando um campo magnético oscilatório é possível induzir os modos coletivos no BEC. Ao sobrepor o campo magnético oscilatório ao campo magnético da armadilha, conseguimos gerar o efeito de pressionar e soltar a nuvem,²⁴ induzindo o modo quadrupolar, além de deslocar o centro de massa dela,²³ modo dipolar.

Por outro lado, também é possível imprimir vórtices em condensados usando campo magnético. Invertendo o *bias* de campo magnético na armadilha é possível imprimir uma fase topológica no condensado.^{77,78} Outro modo de gerar vórtices em um BEC é usando um campo magnético oscilatório. Um campo magnético oscilatório, além comprimir e deslocar o BEC também pode fazer induzir sua rotação.²²

Na Figura 15, mostra-se uma sequência típica de condensados após terem sido excitados com diversas amplitudes * do campo magnético oscilatório. Os parâmetros usados durante o experimento foram: $f_{exc} = 189.5 \text{ Hz}$, $t_{exc} = 31.6 \text{ ms}$ (6 ciclos de excitações), $t_{hold} = 47.6 \text{ ms}$ e $TOF = 27 \text{ ms}$. Ao aumentar a amplitude de excitação os modos coletivos na nuvem são induzidos em função da amplitude. Podemos classificar as observações em três regimes:

a) $0.00 \text{ Vpp} \leq Amp \leq 0.40 \text{ Vpp}$: As nuvens não apresentam variações significativas

---

* No experimento, a amplitude de excitação é controlada em função da Voltagem pico a pico do circuito de controle das bobinas de excitação. Em unidades de campo magnético $1 \text{ Vpp} \approx 470 \text{ mG/cm}$

Figura 15 – BECs após terem sido excitados. Ao aumentar a amplitude de excitação, o formato da nuvem e o centro de massa dela são alterados.

Fonte: Elaborada pelo autor.

no formato, têm apenas pequenos deslocamentos do centro de massa, acoplados ao modo dipolar.

- b) $0.40 \text{ Vpp} < \text{Amp} \leq 0.60 \text{ Vpp}$: Além do deslocamento do centro de massa, as nuvens apresentam mudanças no formato, o que corresponde ao modo quadrupolar.
- c) $\text{Amp} > 0.60 \text{ Vpp}$: O formato das nuvens muda totalmente em relação ao formato inicial ($\text{Amp} = 0.00 \text{ Vpp}$).

Parte da energia fornecida pelas bobinas é usada para induzir os modos coletivos da nuvem, seja o modo dipolar, seja o modo quadrupolar. Fica evidente pela Figura 15 que para altos valores de excitação ($\text{Amp} > 0.60 \text{ Vpp}$) além dos modos coletivos da nuvem, temos outras contribuições, como o aumento da energia cinética. Um comportamento semelhante pode ser observado ao aumentar o tempo de excitação utilizando baixas amplitudes de excitação.

5.2 Distribuição de momentos em um BEC perturbado

Na teoria de Kolmogorov^{32,37,38} para a turbulência em um fluido clássico (Subseção 3.3.1), a inclinação da cascata de energia é $-5/3$ na escala $\log E(k)$ vs $\log k$ dentro da faixa inercial de energia. No entanto, para um fluido quântico γ é diferente.^{18,54} No condensado, ao excitar a nuvem não só teremos a turbulência, mas também, os modos coletivos serão induzidos, fazendo com que na distribuição de momentos tenhamos alguma contribuição proveniente dos modos coletivos.

Figura 16 – Distribuição de momentos $n(k)$ do BEC para diferentes amplitudes de excitação. Para altas amplitudes de excitação, o BEC apresenta uma lei de potência (linha vermelha tracejada) de $\gamma \approx -2.1$ dentro da faixa inercial.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A lei de potência dentro da faixa inercial é a assinatura da turbulência de acordo com a teoria de Kolmogorov. Ao ter turbulência dentro do superfluido, as propriedades de transporte dele podem ser alteradas.⁷⁹

Nos experimentos com átomos frios, a distribuição de momentos da nuvem não é tão fácil de ser obtida,²⁷ no entanto é possível obter a distribuição espacial das partículas no espaço real $n(\mathbf{r}) = |\psi_o(\mathbf{r})|^2$ que no tempo de voo reflete a distribuição de momentos. Considerando que a nuvem descreve uma expansão balística é possível determinar $n(k)$. Realizando uma análise como se mostra no trabalho de doutorando de Franklin Vivanco⁵⁴ podemos extrair o valor de γ usando $n(k)$ vs k a partir da imagem por absorção em TOF da nuvem.

Na Figura 16, mostra-se a distribuição de momentos $n(k)$ para uma nuvem em expansão livre. Para baixas amplitudes de excitação, o BEC não apresenta lei de potência na sua distribuição, no entanto ao aumentar a amplitude de excitação ($Amp = 0.85$ Vpp) estabelece-se a lei de potência (linha vermelha tracejada) dentro da faixa inercial. Para um gás quântico em uma armadilha harmônica, o limite inferior da faixa inercial é obtido a partir da largura média da TF (Equação 2.29) e o limite superior a partir do *healing length* (Equação 2.34).

Figura 17 – Perfil de densidade integrado na direção y . a) para um BEC sem perturbar ($Amp = 0.00$ Vpp) e b) para um BEC fortemente perturbado ($Amp = 0.85$ Vpp).

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 Expansão anômala de um BEC perturbado

O perfil de densidade de um BEC sem perturbar é descrito pela função bimodal (Subseção 4.7.2), a qual está composta pela contribuição dos átomos condensados (Equação 4.8) e dos átomos térmicos (Equação 4.9). No entanto, o perfil de densidade de um BEC fortemente perturbado é totalmente diferente do perfil de um condensado em equilíbrio. Na Figura 17, mostra-se o perfil de densidade integrado na direção y para duas situações: um BEC sem perturbação e um BEC fortemente perturbado.

Ao aumentar a amplitude de excitação, o perfil de densidade das nuvens é alterado. Na Figura 18, mostra-se os perfis de densidade para quatro amplitudes de excitação em dois regimes de excitação: para baixas amplitudes e para altas amplitudes.

Os átomos condensados em todos os perfis podem ser descritos pela função de Thomas-Fermi. No entanto, para os átomos que não se enquadram no perfil parabólico, podemos identificar dois tipos de comportamentos. Para baixas amplitudes, os átomos são bem descritos pela função Gaussiana. Enquanto que para altas amplitudes, os átomos são bem descritos pela função exponencial. Este comportamento pode ser aproximado usando a seguinte função,¹⁶

$$f_{\alpha}(x) = A \exp(-|x/\xi|^{\alpha}), \quad (5.1)$$

na qual α é parâmetro de *fitting* que descreve o comportamento dos átomos não condensados e ξ é o comprimento característico. Quando $\alpha = 2$, a função é uma Gaussiana, enquanto que para $\alpha = 1$ a função é uma exponencial.

Figura 18 – Perfil de densidade das nuvens perturbadas. a) para um condensado sem excitação; b) para um condensado com baixa amplitude de excitação ($Amp = 0.40$ Vpp), o perfil não é alterado; c) para um condensado com alta amplitude de excitação ($Amp = 0.62$ Vpp), o perfil apresenta alterações em relação aos perfis a) e b); e d) o perfil de densidade apresenta um comportamento linear nos extremos da distribuição para uma amplitude de excitação alta ($Amp = 0.85$ Vpp).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao removermos a parte central do perfil de densidade, a qual corresponde aos átomos condensados, podemos aproximar a densidade dos átomos restantes usando a função $f_\alpha(x)$ (Equação 5.1). Na Figura 19, mostra-se o perfil de densidade e o *fitting* para quatro amplitudes de excitação.

No regime de baixas amplitudes de excitação ($0.00 \text{ Vpp} \leq Amp \leq 0.40 \text{ Vpp}$), o expoente da função f_α é 2 sendo $f_\alpha(x)$ uma função Gaussiana. No entanto, para altas amplitudes de excitação ($0.60 \text{ Vpp} > Amp$), o expoente estabelece-se em 1 acima de certa amplitude de excitação mostrando uma alteração no comportamento dos átomos. Desta forma, a distribuição dos átomos passa de uma função Gaussiana para uma função exponencial.

O comportamento do expoente de $f_\alpha(x)$ toma diferentes valores em relação à amplitude de excitação. Na Figura 20, mostra-se α para diferentes amplitudes de excitação. Os parâmetros usados foram: $f_{exc} = 189.5 \text{ Hz}$, $t_{exc} = 35.2 \text{ ms}$, $t_{hold} = 47.6 \text{ ms}$ e $TOF = 27 \text{ ms}$.

Um efeito semelhante acontece ao variar o tempo de excitação. A energia fornecida

Figura 19 – Perfil de densidade e *Fitting* das nuvens perturbadas. Para baixas amplitudes de excitação ($Amp = 0.00$ Vpp e $Amp = 0.40$ Vpp), a) e b), $\alpha = 2$. No entanto, para altas amplitudes de excitação ($Amp = 0.62$ Vpp e $Amp = 0.85$ Vpp), c) e d), $\alpha = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Comportamento de α em função da amplitude de excitação. A expoente apresenta claramente uma variação de α , passando de uma função Gaussiana ($\alpha = 2$) a uma função exponencial ($\alpha = 1$) com o aumento da amplitude excitação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Comportamento de α em função do tempo de excitação para diferentes amplitudes de excitação. Ao aumentar o tempo de excitação, tendo baixas amplitudes de excitação é possível observar a variação de função Gaussiana ($\alpha = 2$) à função exponencial ($\alpha = 1$).

Fonte: Elaborada pelo autor.

ao sistema depende do tempo de excitação, da amplitude de excitação e da frequência de excitação. Na Figura 21, mostra-se o comportamento de α em função do tempo de excitação ao utilizar diferentes amplitudes de excitação. Os parâmetros foram, $f_{exc} = 189.5$ Hz, $t_{hold} = 47.6$ ms e $TOF = 30$ ms.

Quando não temos nenhum campo magnético externo ($Amp = 0.00$ Vpp), o perfil de densidade do BEC não apresenta variação, desta forma, α (linha azul) não varia ao aumentar o tempo de excitação.

Para baixas amplitudes de excitação, também é possível ter a variação de α em função do tempo de excitação. Para $Amp = 0.25$ Vpp (linha laranja), o expoente de $f_{\alpha}(x)$ mostra variação acima de $t_{exc} = 30$ ms. O expoente estabelece-se em ~ 1.2 para $t_{exc} \geq 70$ ms.

Para altas amplitudes de excitação a variação do expoente acontece mais cedo. Para $Amp = 0.60$ Vpp (linha roxa), a variação do expoente é bem mais rápida. A variação do expoente α começa para tempo de excitação maiores que 5 ms e logo após 25 ms o expoente se estabelece em 1.

Para que a distribuição de densidade da nuvem mude é preciso fornecer certa quantidade de energia ao sistema. Ao bombear pouca energia à nuvem, só induzidos os modos coletivos, deslocando o centro de massa da nuvem e mudando o formato dela,

Figura 22 – Comportamento de α em função do tempo de espera para duas amplitudes de excitação. Para amplitudes de excitação maiores, a variação do α acontece mais cedo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

mas a distribuição de densidade não varia. No entanto, ao bombear uma quantidade de energia maior além dos modos coletivo da nuvem teremos turbulência quântica a qual é caracterizada por uma lei de potência na distribuição de momentos $n(k)$ da nuvem.

Ao excitar a nuvem, o sistema precisa certo tempo para distribuir a energia fornecida pelas bobinas. Na Figura 22, mostra-se o comportamento do expoente em função do tempo de espera na armadilha para duas amplitudes de excitação. Os parâmetros usados foram $f_{exc} = 189.5$ Hz, $t_{exc} = 35.2$ ms, e $TOF = 27$ ms.

Para tempos de esperas curtos na armadilha, o α mantém-se constante em 2 para as duas amplitudes de excitação ($Amp = 0.60$ Vpp - círculos azuis e $Amp = 0.70$ Vpp - quadrados laranjas). Ao aumentar o tempo de espera na armadilha, temos que após certo tempo é possível ter mudanças no valor do expoente. O tempo mínimo para ter variação no expoente está acoplado com à amplitude e o tempo de excitação. Ao aumentar a amplitude de excitação a variação do perfil de densidade é mais cedo.

Na armadilha harmônica, os modos coletivos da nuvem sempre serão induzidos ao excitar a nuvem.²⁹ No entanto, é possível identificar o efeito deles na distribuição de densidades. Ao induzir o modo quadrupolar, só teremos variação no formato da nuvem, mantendo a distribuição da nuvem. Na Figura 23, mostra-se o comportamento α e a razão entre o raio na direção y e o raio na direção x da nuvem em função do tempo de espera.

Figura 23 – Comportamento de α e *Aspect ratio* em função do tempo de espera. Os gráficos, mostram uma dependência do perfil de densidade com o modo quadrupolar da nuvem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o *aspect ratio* adquire o valor máximo ($r_y \gg r_x$), o valor de α é 1. No entanto, ao diminuir o *aspect ratio* ($r_y > r_x$), o valor de α é 2. Para $r_y \gg r_x$, além da distribuição de densidade ser uma função exponencial, a distribuição de momentos mostra uma lei de potência. Os modos coletivos podem tornar difícil a visualização da turbulência e a variação do perfil.

Além dos parâmetros de excitação, a quantidade de átomos condensado na nuvem, também influencia no perfil de densidade. Antes de excitar a nuvem, temos certa fração de átomos condensados, após a excitação obter a fração condensada é difícil. Na Figura 24, mostra-se o comportamento de α em função da fração condensada (N_o/N) antes de excitar a nuvem. Os parâmetros usados foram, $f_{exc} = 170.5$ Hz, $t_{exc} = 35.2$ ms, $t_{hold} = 45.8$ ms e $TOF = 28$ ms.

Para $N_o/N < 0.2$ após a excitação, a nuvem é bem descrita por uma função Gaussiana, sendo um resultado esperado pelo fato da nuvem estar formada na sua maior parte por átomos térmicos. Ao aumentar a fração para $N_o/N > 0.2$, o expoente toma valores < 2 , enquanto que para $N_o/N > 0.55$, o valor do expoente mantém-se constante em 1.

Ao ter turbulência no superfluido, acreditamos que além das variações na densidade dentro da nuvem pela turbulência, temos desordem. A desordem da nuvem é caracterizado

Figura 24 – Comportamento de α em função da fração condensada inicial (N_o/N). Quando a $N_o/N > 0.55$, o perfil de densidade é bem descrito pela função exponencial.

Fonte: Elaborada pelo autor.

por ter amplitude e fase aleatória, semelhante à desordem gerado por um potencial tipo *speckle*. A necessidade de ter frações condensadas mais altas na nuvem é bastante clara, já que frações mais altas suportam um núcleo turbulento robusto como um centro de espalhamento. Uma baixa fração condensada implica uma grande componente térmica que pode não ser mais dispersivo como o núcleo, e sim mais um simples espalhamento entre si como efeito dominante.

Ao aumentar a fração condensada na nuvem, aumentamos os efeitos por espalhamento multiplex que ocorrem durante a expansão da nuvem. Quando temos desordem dentro de um sistema as propriedades de transporte dele mudam, obtendo um efeito de localização. Um exemplo de isso em sistemas quânticos é a localização de Anderson (Subseção 3.4.1), onde a presença de impurezas dentro do cristal freia o movimento dos elétrons. O efeito de localização é caracterizado por apresentar decaimento exponencial da distribuição de densidade,³³ além de diminuir a velocidade de propagação da onda.

A localização de Anderson em BECs foi mostrada experimentalmente por Billy *et al*¹⁵ e Roati *et al*.¹⁶ No entanto, nossa distribuição de densidade descreva um decaimento exponencial ($\alpha = 1$), não poderíamos afirmar que seja um caso de localização de Anderson.

Um dos motivos pelo qual não temos localização de Anderson é o tipo de potencial usado. Ao acreditar que a desordem em nosso sistema é gerado pela turbulência e não

Figura 25 – Comportamento do comprimento característico em função do tempo de voo. A taxa de expansão da nuvem sem perturbação ($Amp = 0.00$ Vpp) é maior em relação da nuvem perturbada ($Amp = 0.55$ Vpp), indicando uma supressão da expansão da nuvem perturbada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

usando um potencial tipo *speckle* como os experimentos realizados por Billy *et al* e Roati *et al*, a localização é devido em grande parte ao potencial e não a os multiplex espalhamento durante a expansão. Efeito semelhante foram observado nos trabalhos de Fort *et al*⁵⁹ e Clément *et al*.¹⁴

Quando α é 2, o comprimento característico pode-se relacionar com a largura da nuvem térmica ($\sigma_{x,y}$). Na nuvem térmica, o σ está relacionado com a velocidade com que os átomos se expandem em queda livre. Nesta situação, podemos considerar a velocidade com que a densidade expande-se. Usando um raciocínio semelhante, quando α for 1 o comprimento característico pode-se relacionar com a velocidade com que a densidade expande-se. Na Figura 25, mostra-se o comportamento do comprimento característico em função do tempo de voo para duas amplitudes de excitação, $Amp = 0.00$ Vpp (sem perturbação) e $Amp = 0.55$ Vpp (com perturbação). Os parâmetros usados foram, $f_{exc} = 170.5$ Hz, $t_{exc} = 35.2$ ms, $t_{hold} = 45.2$ ms.

A taxa de expansão da nuvem sob ambas situações é totalmente diferente. Sem perturbação (linha laranja), a taxa de expansão da nuvem ($v_{\alpha=2}$) é $6.5 \mu\text{m/ms}$, enquanto que a taxa de expansão da nuvem perturbada (linha azul) ($v_{\alpha=1}$) é $2.8 \mu\text{m/ms}$. A diferença da taxa de expansão da nuvem sem perturbação com a nuvem perturbada pode estar

ligada ao fato na nuvem perturbada ser turbulenta. A dinâmica do sistema é afetada ao ter turbulência no sistema. A razão entre as taxas de expansão é $v_{\alpha=2}/v_{\alpha=1} \approx 2.3$, a nuvem sem perturbação expande-se bem mais rápido. Esta supressão na expansão livre da nuvem suporta a ideia de ter o efeito de localização, nesta situação induzido pela turbulência.

6 CONCLUSÕES

No grupo, são muitos os trabalhos já realizados caracterizando a turbulência em superfluidos quânticos. No entanto, nesta dissertação mostramos como a presença da turbulência afeta as propriedades de transporte do superfluido. Usando o perfil de densidade da nuvem e a distribuição de momentos foi possível caracterizar certos regimes, nos quais estas duas quantidades são alteradas.

Quando fornecemos pouca energia ao sistema, seja usando baixas amplitudes de excitação, seja tempos de excitação muito curtos, só os modos coletivos da nuvem são induzidos, enquanto que quando aumentamos a energia fornecida ao sistema, além dos modos coletivos outros efeitos são observados na nuvem.

Quando estamos fornecendo energia suficiente ao sistema, observamos claramente uma variação no perfil de densidade e na distribuição de momentos das nuvens. Neste caso, conseguimos identificar duas situações.

Quando a energia fornecida é baixa, o perfil de densidade dos átomos, tirando os átomos condensados, é descrito por uma função Gaussiana e sua distribuição de momentos não mostra uma lei de potência. No entanto quando a energia fornecida é alta, o perfil de densidade é bem descrito por uma função exponencial e a distribuição de momentos da nuvem apresenta uma lei de potência na faixa inercial.

Além de fornecer certa quantidade de energia ao sistema, também é preciso ter certa fração condensada na nuvem e esperar certo tempo para poder observar a variação do perfil de densidade e da distribuição de momentos dentro da nuvem.

Durante a expansão da nuvem, vemos uma diminuição na taxa de expansão da nuvem perturbada em relação a nuvem sem perturbação. Para as nuvens sem perturbação a taxa de expansão é o dobro se comparando com as nuvens sem perturbar. A distribuição de momento da nuvem perturbada apresenta uma lei de potência e o perfil de densidade dos átomos não condensados é bem descrito por uma função exponencial. Sendo esta última, o perfil exponencial dos átomos, uma característica de sistemas que apresentam localização.

REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A. Quantentheorie des einatomigen idealen gases - zweite abhandlung (quantum theory of monatomic ideal gases, part two). **Sitzungsberchte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, v. 1, n. 3, 1925.
- 2 BOSE, S. N. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. **Zeitschrift für Physik**, v. 26, p. 178–181, 1924.
- 3 LONDON, F. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. **Nature**, v. 141, n. 3571, p. 643, 1938.
- 4 KAPITZA, P. Viscosity of liquid helium below the λ -point. **Nature**, v. 141, n. 3558, p. 74, 1938.
- 5 ALLEN, J. F.; MISENER, A. D. Flow of liquid helium II. **Nature**, v. 141, n. 3558, p. 75, 1938.
- 6 LANDAU, L. Theory of the superfluidity of helium II. **Physical Review**, v. 60, n. 4, p. 356–358, 1941.
- 7 PHILLIPS, W. D. Nobel lecture: laser cooling and trapping of neutral atoms. **Reviews of Modern Physics**, v. 70, n. 3, p. 721–741, 1998.
- 8 COHEN-TANNOUDJI, C. N. Nobel lecture: manipulating atoms with photons. **Reviews of Modern Physics**, v. 70, n. 3, p. 707–719, 1998.
- 9 CHU, S. Nobel lecture: the manipulation of neutral particles. **Reviews of Modern Physics**, v. 70, n. 3, p. 685–706, 1998.
- 10 CORNELL, E. A.; WIEMAN, C. E. Nobel lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. **Reviews of Modern Physics**, v. 74, n. 3, p. 875–893, 2002.
- 11 KETTERLE, W. Nobel lecture: when atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. **Reviews of Modern Physics**, v. 74, n. 4, p. 1131–1151, 2002.
- 12 BRADLEY, C. C. et al. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. **Physical Review Letter**, v. 75, n. 9, p. 1687–1690, 1995.
- 13 FORT, C. et al. Effect of optical disorder and single defects on the expansion of a Bose-Einstein condensate in a one-dimensional waveguide. **Physical Review Letter**, v. 95, n. 17, p. 170410, 2005.
- 14 CLÉMENT, D. et al. Density modulations in an elongated Bose-Einstein condensate released from a disordered potential. **Physical Review A**, v. 77, n. 3, p. 033631, 2008.
- 15 BILLY, J. et al. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. **Nature**, v. 453, n. 7197, p. 891, 2008.

- 16 ROATI, G. et al. Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate. **Nature**, v. 453, n. 7197, p. 895, 2008.
- 17 HENN, E. A. L. et al. Emergence of turbulence in an oscillating Bose-Einstein condensate. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 4, p. 045301, 2009.
- 18 NAVON, N. et al. Emergence of a turbulent cascade in a quantum gas. **Nature**, v. 539, n. 7627, p. 72, 2016.
- 19 MAGALHÃES, K. M. F. **Obtenção da degenerescência quântica em sódio aprisionado**. 2004. 102 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- 20 HENN, E. A. L. **Produção experimental de excitações topológicas em um condensado de Bose-Einstein**. 2008. 126 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- 21 HENN, E. A. L. et al. Generation of vortices and observation of quantum turbulence in an oscillating Bose-Einstein condensate. **Journal of Low Temperature Physics**, v. 158, n. 3, p. 435, 2009.
- 22 HENN, E. A. L. et al. Observation of vortex formation in an oscillating trapped Bose-Einstein condensate. **Physical Review A**, v. 79, n. 4, p. 043618, 2009.
- 23 TAVARES, P. E. S. et al. Out-of-phase oscillation between superfluid and thermal components for a trapped Bose condensate under oscillatory excitation. **Laser Physics Letters**, v. 10, n. 4, p. 045501, 2013.
- 24 FRITSCH, A. R. et al. Nonlinear dependence observed in quadrupolar collective excitation of a trapped bec. **Journal of Low Temperature Physics**, v. 180, n. 1–2, p. 144–152, 2015.
- 25 UEDA, M. **Fundamentals and new frontiers of Bose-Einstein condensation**. Singapore: World Scientific, 2010.
- 26 GREINER, W. et al. **Thermodynamics and statistical mechanics**. New York: Springer-Verlag, 1995. (Classical theoretical physics).
- 27 PITAEVSKII, L.; STRINGARI, S. **Bose-Einstein Condensation and Superfluidity**. Oxford: Oxford University Press, 2016. (International series of monographs on physics 164).
- 28 BAGNATO, V.; PRITCHARD, D. E.; KLEPPNER, D. Bose-Einstein condensation in an external potential. **Physical Review A**, v. 35, n. 10, p. 4354–4358, 1987.
- 29 PETHICK, C. J.; SMITH, H. **Bose-Einstein condensation in dilute gases**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- 30 GROSS, E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems. **Il Nuovo Cimento**, v. 20, n. 3, p. 454–477, 1961.
- 31 PITAEVSKII, L. Vortex lines in an imperfect Bose gas. **Soviet Physics JETP**, v. 13, n. 2, p. 451–454, 1961.

- 32 VULPIANI, A.; LIVI, R. **The Kolmogorov legacy in physics**. New York: Springer, 2003. (Lecture notes in physics).
- 33 LEWENSTEIN, M.; SANPERA, A.; AHUFINGER, V. **Ultracold atoms in optical lattices**. Oxford: Oxford University Press, 2012. 2007 p.
- 34 STRINGARI, S. Collective excitations of a trapped Bose-Condensed gas. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 12, p. 2360–2363, 1996.
- 35 MEWES, M.-O. et al. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 6, p. 988–991, 1996.
- 36 DAVIDSON, P. A. **Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers**. Oxford: Oxford University Press, 2004.
- 37 KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 30, n. 4, p. 299–303, 1941.
- 38 KOLMOGOROV, A. N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 32, n. 1, p. 16–18, 1941.
- 39 FEYNMAN, R. Chapter II application of quantum mechanics to liquid helium. **Progress in Low Temperature Physics**, v. 1, p. 17–53, 1955.
- 40 HALL, H. E.; VINEN, W. F. The rotation of liquid helium II I. experiments on the propagation of second sound in uniformly rotating helium II. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 238, n. 1213, p. 204–214, 1956.
- 41 HALL, H. E.; VINEN, W. F. The rotation of liquid helium II II. the theory of mutual friction in uniformly rotating helium II. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 238, n. 1213, p. 215–234, 1956.
- 42 SANTOS, A. C. **Quantum turbulence and multicharged vortices in trapped atomic superfluids**. 2017. 109 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- 43 SEMAN, J. A. et al. Route to turbulence in a trapped Bose-Einstein condensate. **Laser Physics Letters**, v. 8, n. 9, p. 691, 2011.
- 44 CIDRIM, A. et al. Vinen turbulence via the decay of multicharged vortices in trapped atomic Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, v. 96, n. 2, p. 023617, 2017.
- 45 CIDRIM, A. et al. Controlled polarization of two-dimensional quantum turbulence in atomic Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, v. 93, n. 3, p. 033651, 2016.
- 46 ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. **Physical Review**, v. 109, n. 5, p. 1492–1505, 1958.
- 47 LYE, J. E. et al. Bose-Einstein condensate in a random potential. **Physical Review Letter**, v. 95, n. 7, p. 070401, 2005.

- 48 CHEN, Y. P. et al. Phase coherence and superfluid-insulator transition in a disordered Bose-Einstein condensate. **Physical Review A**, v. 77, n. 3, p. 033632, 2008.
- 49 SCHULTE, T. et al. Routes towards Anderson-like localization of Bose-Einstein condensates in disordered optical lattices. **Physical Review Letter**, v. 95, n. 17, p. 170411, 2005.
- 50 HADZIBABIC, Z. et al. Interference of an array of independent Bose-Einstein condensates. **Physical Review Letter**, v. 93, n. 18, p. 180403, 2004.
- 51 SANCHEZ-PALENCIA, L. et al. Anderson localization of expanding Bose-Einstein condensates in random potentials. **Physical Review Letter**, v. 98, n. 21, p. 210401, 2007.
- 52 KONDOV, S. et al. Three-dimensional Anderson localization of ultracold matter. **Science**, v. 334, n. 6052, p. 66–68, 2011.
- 53 TAVARES, P. E. S. **Consequências das excitações oscilatórias em condensados de Bose-Einstein**. 2012. 103 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- 54 VIVANCO, F. A. J. **Investigations on momentum distributions and disorder in strongly out-of-equilibrium trapped Bose gases**. 2017. 114 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- 55 FRITSCH, A. R. **Thermodynamics of a Bose gas: sound velocity from global variables and equivalence with other approaches**. 2016. 106 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- 56 TAVARES, P. E. S. **Excitations in Bose-Einstein condensates: collective modes, quantum turbulence and matter wave statistics**. 2016. 128 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- 57 PEDROZO-PENAFIEL, E. **Production of a Bose-Einstein condensate of sodium atoms and investigation considering non-linear atom-photon interaction**. 2016. 175 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- 58 STECK, D. A. **Rubidium 87 D line data**. 2015. Disponível em: <<http://steck.us/alkalidata/>>. Acesso em: 17 abril 2018.
- 59 FOOT, C. J. **Atomic physics**. Oxford: Oxford University Press, 2005. (Oxford master series in physics, atomic, optical, and laser physics, 7).
- 60 METCALF, P. v. d. S. H. J. **Laser cooling and trapping**. Berlin: Springer, 1999. (Graduate texts in contemporary physics).
- 61 PRITCHARD, D. E. et al. Light traps using spontaneous forces. **Physical Review Letters**, v. 57, n. 3, p. 310–313, 1986.

- 62 PETRICH, W. et al. Behavior of atoms in a compressed magneto-optical trap. **Journal of the Optical Society of America B**, v. 11, n. 8, p. 1332–1335, 1994.
- 63 CHU, S. et al. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. **Physical Review Letters**, v. 55, n. 1, p. 48–51, 1985.
- 64 METCALF, H. J.; STRATEN, P. Laser cooling and trapping of atoms. **Journal of the Optical Society of America B**, v. 20, n. 5, p. 887–908, 2003.
- 65 ZETTILI, N. **Quantum mechanics: concepts and applications**. 2. ed. New York: Wiley, 2009.
- 66 BRINK, D. M.; SUKUMAR, C. V. Majorana spin-flip transitions in a magnetic trap. **Physical Review A**, v. 74, n. 3, p. 035401, 2006.
- 67 DAVIS, K. B. et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. **Physical Review Letters**, v. 75, n. 22, p. 3969–3973, 1995.
- 68 LIN, Y.-J. et al. Rapid production of ^{87}Rb Bose-Einstein condensates in a combined magnetic and optical potential. **Physical Review A**, v. 79, n. 6, p. 063631, 2009.
- 69 PETRICH, W. et al. Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 17, p. 3352–3355, 1995.
- 70 ESSLINGER, T.; BLOCH, I.; HÄNSCH, T. W. Bose-Einstein condensation in a quadrupole-ioffe-configuration trap. **Physical Review A**, v. 58, n. 4, p. R2664–R2667, 1998.
- 71 MEWES, M.-O. et al. Bose-Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 3, p. 416–419, 1996.
- 72 PRITCHARD, D. E. Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy. **Physical Review Letters**, v. 51, n. 15, p. 1336–1339, 1983.
- 73 KETTERLE, W.; DRUTEN, N. J. V. Evaporative cooling of trapped atoms. **Advances in Atomic Molecular and Optical Physics**, v. 37, p. 181–236, 1996.
- 74 KETTERLE, W.; DURFEE, D. S.; STAMPER-KURN, D. M. **Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates**. 1999. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/cond-mat/9904034>>. Acesso em: 16 maio 2018.
- 75 SHIOZAKI, R. F. et al. Transition to quantum turbulence in finite-size superfluids. **Laser Physics Letters**, v. 8, n. 5, p. 393, 2011.
- 76 SEMAN, J. A. et al. Three-vortex configurations in trapped Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, v. 82, n. 3, p. 033616, 2010.
- 77 LEANHARDT, A. E. et al. Imprinting vortices in a Bose-Einstein condensate using topological phases. **Physical Review Letter**, v. 89, n. 19, p. 190403, 2002.
- 78 TELLES, G. et al. **Twisted unwinding of multi-charged quantum vortex and generation of turbulence in atomic Bose-Einstein condensates**. 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1505.00616v2>>. Acesso em: 06 junho 2018.

- 79 ERMANN, L.; VERGINI, E.; SHEPELYANSKY, D. L. Kolmogorov turbulence defeated by Anderson localization for a Bose-Einstein condensate in a sinai-oscillator trap. **Physical Review Letter**, v. 119, n. 5, p. 054103, 2017.