

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

O *ansatz* do produto matricial: uma nova
abordagem para modelos exatamente solúveis

Matheus Jatkoske Lazo

*Tese apresentada ao Instituto de Física de
São Carlos, Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Doutor em Ciências:
Física Básica.*

OK

USP/IFSC/SBI



8-2-001724

Orientador: Francisco Castilho Alcaraz

São Carlos - 2006

IFSC-USP

SERVIÇO DE BIBLIOTECA
E INFORMACÃO

IFSC - SBI
CLASS. <i>Tese</i>
CUTTER.....
TOMBO. <i>1#24</i>

Lazo, Matheus Jatkoske

“O ansatz do produto matricial: uma nova abordagem para modelos exatamente solúveis”

Matheus Jatkoske Lazo – São Carlos, 2006

Tese (Doutorado) – Área de Física Básica do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo

2006 - Páginas: 139

Orientador: Prof. Dr. Francisco Castilho Alcaraz

1. Modelos Integráveis 2. Redes de Spin

I. Título



**MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO
DE MATHEUS JATKOSKE LAZO, APRESENTADA AO INSTITUTO
DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM
14/03/2006.**

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Francisco Castilho Alcaraz (Orientador e Presidente)

Prof. Dr. Roland Koberle (IFSC / USP)

Prof. Dr. Ronald Dickman (UFMG)

Prof. Dr. Ângela Foerster (UFRGS)

Prof. Dr. Itzhak Roditi (CBPF)

*A minha esposa Cristal por
seu amor e dedicação.*

i

IPSS-007 - SERVIÇO DE BIBLIOTECA E
INFORMACAC

Agradecimentos

- Ao caríssimo prof. Francisco Castilho Alcaraz pela orientação, dedicação e amizade.
- A minha esposa pela dedicada e minuciosa leitura deste trabalho.
- Aos meus pais, irmãs e tias por tudo que representam a mim.
- A todos os meus sinceros amigos, e especialmente aos companheiros de sala: Anderson, Gilberto e Willian.
- Ao meu querido amigo Anderson pelo apoio, sinceridade e pelas calorosas discussões sobre Física e sobre a vida.
- À Capes.

Resumo

Neste trabalho mostramos que uma grande variedade de modelos exatamente solúveis através do *ansatz* de Bethe coordenadas podem também ser resolvidos através de um *ansatz* do produto matricial. Estes modelos são descritos no caso unidimensional por cadeias quânticas, e por matrizes de transferência no caso de sistemas clássicos bi-dimensionais. Diferentemente do *ansatz* de Bethe, em que as auto-funções do modelo são escritas como uma combinação de ondas planas, no nosso *ansatz* do produto matricial elas são dadas por produtos de matrizes, onde as matrizes obedecem a uma álgebra associativa apropriada. Estas relações algébricas são obtidas impondo-se que as auto-funções escritas em termos do *ansatz* satisfaçam à equação de auto-valor do operador Hamiltoniano ou da matriz de transferência. A consistência das relações de comutatividade entre os elementos da álgebra implicam na exata integrabilidade do modelo. Além disso, o *ansatz* que propomos permite uma formulação simples e unificada para vários Hamiltonianos quânticos exatamente solúveis. Apresentamos nesta tese a formulação do nosso *ansatz* do produto matricial para uma grande família de redes quânticas, como os modelos anisotrópico de Heisenberg, Fateev-Zamolodchikov, Izergin-Korepin, Sutherland, t-J, Hubbard etc. Mais ainda, formulamos nosso *ansatz* para processos estocásticos de partículas com tamanhos e classes diferentes difundindo assimetricamente na rede. Por fim, com o objetivo de dar suporte a nossa conjectura de que todos os modelos exatamente solúveis através do *ansatz* de Bethe coordenadas, associados a Hamiltonianos quânticos unidimensionais ou matrizes de transferência bi-dimensionais, também podem ser resolvidos através de um *ansatz* do produto matricial, apresentamos a formulação do nosso *ansatz* para a matriz de transferência do modelo de seis-vértices com condição de contorno toroidal.

Abstract

In this work we show that a large family of exactly solved models through the coordinate Bethe *ansatz* can also be solved through a matrix product *ansatz*. The models are described in the one dimensional case by quantum Hamiltonians, and by transfer matrices in the case of two dimensional classical models. Differently from the Bethe *ansatz*, where the model's eigenfunctions are described by a plane wave combination, in our matrix product *ansatz* they are given by a matrix product, where the matrices obey a suitable associative algebra. These algebraic relations are obtained by imposing that the eigenfunctions described in terms of the *ansatz* satisfy the eigenvalue equation for the associated Hamiltonian or transfer matrix. The consistency of the commutativity relations among the elements of the algebra implies the exact integrability of the model. Furthermore, the matrix product *ansatz* we propose allows an unified and simple formulation for the solution of of several exact integrable quantum Hamiltonians. We present on this thesis the formulation of our matrix product *ansatz* for a huge family of quantum chains such as the anisotropic Heisenberg model, Fateev-Zamolodchikov model, Izergin-Korepin model, Sutherland model, t-J model, Hubbard model, etc. Moreover, we formulated our *ansatz* for stochastic process of particles with different sizes and classes diffusing asymmetrically on the lattice. Finally, in order to support our conjecture that all exactly solved models through the coordinate Bethe *ansatz*, associated to unidimensional quantum Hamiltonians or two-dimensional transfer matrices, can also be solved through a matrix product *ansatz*, we present the formulation of our *ansatz*, for the transfer matrix of the six-vertex model with toroidal boundary condition.

Lista de Figuras

5.1	Exemplos de configurações de moléculas com tamanhos distintos em uma rede de $L = 5$	77
6.1	As seis configurações de vértices e seus respectivos pesos de Boltzmann. Em (a) desenhamos todas as setas, e em (b) desenhamos por linhas sólidas as ligações onde as setas apontam para baixo e à esquerda.	106
A.1	Representação gráfica da matriz S (Fig. 6.1a) e da matriz de monodromia (Fig. 6.1b) com condição de contorno torcida.	122
A.2	Configuração gráfica da aplicação dos operadores $A(k)$, $D(k)$, e $B(k)$ no estado de referência.	124

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelos de spin $\frac{1}{2}$	9
2.1	O modelo XXZ generalizado com condição periódica de contorno .	9
2.1.1	O <i>ansatz</i> do produto matricial	11
2.1.2	Resolução do modelo	13
2.1.3	Auto-vetores: relação com o <i>ansatz</i> de Bethe	21
2.2	O modelo XXZ generalizado com condição de contorno aberto . .	22
2.2.1	O <i>ansatz</i> do produto matricial	23
2.2.2	Resolução do modelo	24
3	Modelos de Spin 1	32
3.1	Modelos de spin 1 com uma lei de conservação	32
3.1.1	O <i>ansatz</i> do produto matricial	33
3.1.2	Resolução do modelo	34
3.2	Modelos de spin 1 com duas leis de conservação	44
3.2.1	O <i>ansatz</i> do produto matricial	45
3.2.2	Resolução do modelo	46

4 Modelos de spins $\frac{3}{2}$	58
4.1 O Modelo de spin $\frac{3}{2}$ com duas leis de conservação	58
4.1.1 O <i>ansatz</i> do produto matricial	59
4.1.2 Resolução do modelo	61
5 Exclusão assimétrica de partículas com tamanho arbitrário	75
5.1 Exclusão assimétrica de partículas com tamanho arbitrário	75
5.1.1 O <i>ansatz</i> do produto matricial	80
5.1.2 Resolução do modelo	82
5.2 Difusão assimétrica com N classes de partículas	89
5.2.1 O <i>ansatz</i> do produto matricial para o caso particular	92
5.2.2 Resolução do modelo particular	94
5.2.3 O <i>ansatz</i> do produto matricial para o caso geral	100
5.2.4 Resolução do modelo geral	101
6 O modelo de seis-vértices	105
6.1 O modelo de seis-vértices assimétrico	105
6.1.1 O <i>ansatz</i> do produto matricial	107
6.1.2 Resolução do modelo	108
7 Conclusão	118
A Solução do modelo de seis-vértices inhomogêneo	121
A.1 Duas classes de partículas	121
A.2 N classes de partículas	128

Capítulo 1

Introdução

A história do surgimento e desenvolvimento de sistemas exatamente solúveis, contendo muitos corpos em interação, teve origem em diferentes áreas da Física. Como por exemplo, no estudo de redes de spins unidimensionais iniciado por Bethe nos anos 30, nos trabalhos de Onzanger e Baxter em mecânica estatística clássica em duas dimensões, e na teoria de espalhamento de muitos corpos com matriz S fatorizável (veja, por exemplo, [1]). Embora estes modelos exatamente solúveis sejam de natureza distintas, todos eles podem ser descritos por um *ansatz* apropriado. Este *ansatz* é tradicionalmente chamado de *ansatz* de Bethe, desde sua formulação original por Hans Bethe em 1931 [2]. Este *ansatz* foi posteriormente generalizado por Hulthen, Yang e Yang, Lieb, Sutherland, Baxter, Gaudin, e outros [3]-[6]. Um sistema de muitos corpos é considerado exatamente solúvel ou integrável, se existe um número infinito de cargas independentes conservadas. Por outro lado, o poder do *ansatz* de Bethe é tão grande que no jargão atual um modelo de muitos corpos é considerado exatamente solúvel se um número infinito de seus auto-estados puderem ser expressos pelo *ansatz* de Bethe no limite termo-

dinâmico. O *ansatz* de Bethe permite assim encontrar a solução exata de modelos de muitos corpos interagentes. Em um modelo livre, a dinâmica de muitos corpos se reduz à dinâmica de um único corpo. Enquanto isto, com o *ansatz* de Bethe o problema de muitos corpos interagentes se reduz ao problema de dois corpos. Isto significa que a matriz de espalhamento de muitas partículas é igual ao produto de matrizes de espalhamento de duas partículas. Este fato leva a necessidade de satisfazer uma relação de auto-consistência para a matriz de espalhamento de duas partículas. Esta relação é conhecida como equação de Yang-Baxter [7], sendo o ponto fundamental para a exata solubilidade dos modelos.

O *ansatz* de Bethe mostrou-se uma ferramenta importante nas mais diversas áreas da Física. Com este *ansatz* foi possível obter a solução dos mais diversos modelos, sendo que alguns destes modelos possuem aplicação física direta. Existem vários exemplos importantes de modelos que podem ser resolvidos pelo *ansatz* de Bethe. Exemplos famosos são o modelo de Kondo [8, 9], e o modelo de gás de Bose com interações pontuais entre as partículas [10, 11]. Outros exemplos importantes são o modelo t-J [12] e o modelo Hubbard [13], que estão relacionados à supercondutividade para altas temperaturas. Em um contexto diferente, o *ansatz* de Bethe forneceu importantes resultados em ótica não-linear onde emissões espontâneas de radiação puderam ser descritas por um modelo quântico integrável [14]. Mais recentemente, o *ansatz* de Bethe tornou-se uma ferramenta imprescindível para o estudo da teoria de cordas do tipo IIB no espaço $AdS^5 \times S^5$, e da teoria de campo $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, onde o operador de dilatação de um-*loop* dessas teorias foi identificado como um Hamiltoniano quântico integrável [15]. Estes modelos podem ser resolvidos pelo *ansatz* de Bethe tradicional, chamado

de *ansatz* de Bethe coordenadas.

Em desenvolvimento paralelo, o método do espalhamento inverso quântico foi descoberto em [16]-[18]. Este método relaciona o *ansatz* de Bethe à teoria das equações diferenciais completamente integráveis. Estas equações diferenciais, chamadas de equações de sólitons, podem ser resolvidas através do método do espalhamento inverso clássico, que pode ser visto como uma generalização não-linear da transformada de Fourier. Com este método muitas teorias em $1 + 1$ dimensões foram estudadas e exatamente resolvidas (veja, por exemplo [19]); além de explicar a natureza algébrica do *ansatz* de Bethe. Esse método permite reproduzir os resultados do *ansatz* de Bethe à partir da representação de Lax, que fornece as condições de comutatividade para os operadores diferenciais [20], e é diretamente relacionada a equação de Yang-Baxter. Baseado neste método foi formulado o *ansatz* de Bethe algébrico. Este *ansatz* também está relacionado à teoria da matriz S fatorizável de Zamolodchikov [21]; à teoria dos modelos de redes exatamente solúveis da mecânica estatística (veja, por exemplo, [3]); e à teoria de campos conforme [22, 23].

Uma outra formulação chamada de *ansatz* de Bethe funcional surgiu à partir da introdução dos operadores Q de Baxter. Este operador foi originalmente proposto por Baxter como um método alternativo para obter a solução do modelo de oito-vértices [3] da mecânica estatística. Este *ansatz* de Bethe funcional proposto por Sklyanin [24, 25] une a idéia central do método do espalhamento inverso quântico com a idéia de separação de variáveis (para uma revisão didática deste *ansatz* veja, por exemplo, [26]).

Desde o trabalho pioneiro de Bethe [2] para a resolução do modelo Heisenberg,

o *ansatz* de Bethe, assim como suas generalizações em diferentes formulações (coordenada, algébrico e funcional), provou ser uma ferramenta muito eficiente para a descrição dos auto-vetores de um grande número de cadeias quânticas unidimensionais, e matrizes de transferência bi-dimensionais para problemas muito mais complexos do que o do modelo de Heisenberg (para uma revisão veja, por exemplo, [1, 3, 27, 28]). Por outro lado, apesar de todo o sucesso do *ansatz* de Bethe na resolução desses problemas, um grande número de modelos de interesse físico não podem ser tratados de forma exata. No entanto, a partir de meados dos anos 80 [29]-[32], descobriu-se que vários desses modelos não exatamente solúveis têm a auto-função do seu estado fundamental exatamente descrita através de um *ansatz* chamado de *ansatz* do produto matricial. É importante frisar que, diferentemente do *ansatz* de Bethe, que descreve auto-vetores em geral, no caso do *ansatz* do produto matricial, apenas o estado fundamental do sistema pode ser exatamente descrito. Neste *ansatz*, as amplitudes do estado fundamental são expressas em termos de um produto de matrizes, ou mais geralmente em termos de um produto de geradores de álgebras quadráticas [33]. Em um contexto distinto, este *ansatz* do produto matricial também foi aplicado com sucesso no cálculo da solução exata para a distribuição estacionária de probabilidades de alguns modelos estocásticos uni-dimensionais [34]. Isto foi possível graças a similaridade entre a equação mestra, que descreve as flutuações temporais desses modelos, e a equação de Schrödinger com tempo Euclidiano. Tal similaridade permite associar um Hamiltoniano quântico a esses processos estocásticos. O exemplo mais simples de um desses processos estocásticos é o problema de difusão assimétrica de partículas excludentes em uma rede discreta unidimensional, onde o operador de

evolução temporal, que governa as flutuações temporais do modelo, coincide com o Hamiltoniano anisotrópico do modelo de Heisenberg [35]-[38], também chamado de modelo XXZ anisotrópico. Este modelo de exclusão assimétrica é exatamente solúvel pelo *ansatz* de Bethe, devido a sua relação com o modelo de Heisenberg. No entanto, em geral, os modelos de redes quânticas associados a processos estocásticos não são exatamente solúveis. Porém, mesmo assim, eles têm seus estados fundamentais descritos por um *ansatz* do produto matricial. Apesar desse *ansatz* descrever somente o estado estacionário, as propriedades de alguns desses modelos estocásticos mostraram importantes e interessantes resultados para uma grande variedade de problemas, como o crescimento de interfaces [39], transições de fases induzidas pelo contorno [34], [40]-[42], dinâmica de choques [43], e o fluxo de tráfico [44].

Do estudo dos processos estocásticos unidimensionais, surgiu recentemente uma formulação diferente de um *ansatz* do produto matricial, chamado de *ansatz* do produto matricial dinâmico [45]. Diferentemente do *ansatz* anterior, para os modelos onde ele puder ser aplicado, este *ansatz* permite escrever as distribuições de probabilidades, para tempos arbitrários, em termos de um produto de matrizes dependentes do tempo. Este *ansatz* do produto matricial dinâmico mostrou-se inicialmente válido no problema de difusão assimétrica de partículas na rede [45, 46], e mais recentemente [47, 48] sua validade foi também confirmada para os casos do modelo exatamente integrável de difusão assimétrica de duas espécies de partículas na rede.

A validade deste *ansatz* para sistemas exatamente solúveis, descrevendo auto-estados quaisquer em termos de um produto de matrizes dependentes do tempo,

motivou-nos a conjecturarmos que todos os Hamiltonianos unidimensionais e matrizes de transferências bi-dimensionais exatamente solúveis, relacionados ou não aos processos estocásticos, poderiam também ser resolvidos por um *ansatz* do produto matricial [49]-[52] apropriado. Neste nosso *ansatz*, diferentemente do *ansatz* do produto matricial dinâmico, as matrizes não dependem do tempo e sua validade é esperada para todos os modelos solúveis pelo *ansatz* de Bethe, descrevendo assim, quaisquer auto-funções em termos de produtos de matrizes. Produzimos nesta tese este *ansatz*. Usando este novo *ansatz* foi possível derivar resultados previamente obtidos através do *ansatz* de Bethe para um grande número de redes quânticas com uma ou duas leis de conservação globais, como por exemplo, o modelo XXZ; o modelo de spin-1 de Fateev-Zamolodchikov; o modelo de Izergin-Korepin; o modelo de Sutherland; o modelo t - J ; o modelo de Hubbard, e outros [49, 50]; assim como a solução exata do problema estocástico de exclusão assimétrica de partículas com tamanhos arbitrários [51] e generalizações. Mais ainda, obtivemos por este *ansatz* a solução exata da matriz de transferência do modelo de seis-vértices definido na rede quadrada [52]. Neste nosso *ansatz* do produto matricial, as componentes das auto-funções dos modelos exatamente solúveis que de acordo com o *ansatz* de Bethe são normalmente dadas por uma combinação de ondas planas, agora serão dadas por produtos de operadores, que chamaremos de matrizes, com propriedades algébricas apropriadas. Estas propriedades algébricas das matrizes que definem o *ansatz* são fixadas impondo a validade da equação de auto-valor. A maior vantagem do nosso *ansatz*, na solução e na busca de novos modelos exatamente solúveis, é sua simplicidade de ser implementado de forma unificada para os mais diversos problemas, como veremos neste trabalho.

Apresentaremos nos capítulos seguintes a solução dos diversos modelos citados à partir do nosso *ansatz* do produto matricial. Sendo assim, o capítulo 2 foi dedicado aos modelos de $\text{spin}-\frac{1}{2}$, e foi dividido em duas partes. Na primeira parte, apresentaremos a solução do modelo XXZ generalizado em uma rede periódica, onde diferente do modelo XXZ padrão [53], os spins para cima não estão na rede a uma distância inferior a s ($s = 0, 1, 2, \dots$), em unidades do espaçamento de rede. Na segunda parte, apresentaremos a solução do modelo XXZ generalizado no caso de condição de contorno aberta e com campo magnético na superfície [54]. Já no capítulo 3, apresentaremos a solução dos modelos mais gerais possíveis de $\text{spin}-1$, com uma ou duas leis de conservação global e condição periódica de contorno. Na solução destes problemas gerais identificamos vários modelos conhecidos na literatura. No caso de uma lei de conservação (simetria $U(1)$), verificamos que os modelos de Fateev-Zamolodchikov [55], Izergin-Korepin [56], e o modelo considerado em [57], estão contidos em nosso modelo geral. Da mesma forma, para duas leis de conservação ($U(1) \times U(1)$), verificamos que nossa solução geral contém os modelos de Sutherland anisotrópico [58], de Perk-Schultz para $\text{spin}-1$ [59], e o modelo fermiônico super-simétrico $t - J$ [12]. No capítulo 4, estudaremos o modelo mais geral de $\text{spin}-\frac{3}{2}$ com duas leis de conservação e condição periódica de contorno. Neste capítulo, verificamos que nosso modelo geral contém vários modelos conhecidos, como o Perk-Schultz para $\text{spin}-\frac{3}{2}$ [59], o modelo Essler-Korepin-Schoutens [60], o modelo de Hubbard [13], e o modelo integrável de dois parâmetros, introduzido em [61]. Por outro lado, no contexto de processos estocásticos, apresentaremos no capítulo 5 a solução através do nosso *ansatz* dos modelos de difusão assimétrica de partículas de várias espécies e com tamanhos

diferentes [62]-[64]. Obtivemos também a solução de um modelo mais geral do que o apresentado em [64], onde agora cada partícula de uma dada espécie poderá ter um tamanho diferente. Finalmente, com o objetivo de dar suporte a nossa conjectura de que todos os modelos exatamente solúveis através do *ansatz* de Bethe coordenada, associados a Hamiltonianos quânticos unidimensionais ou matrizes de transferência bi-dimensionais, também poderão ser resolvidos através de um *ansatz* do produto matricial; apresentamos no capítulo 6, através do nosso *ansatz*, a solução da matriz de transferência do modelo de seis-vértices [65]-[68], com condição de contorno toroidal. No capítulo 7 apresentamos a conclusão da tese juntamente com alguns problemas para futuras investigações.

Capítulo 2

Modelos de spin $\frac{1}{2}$

2.1 O modelo XXZ generalizado com condição periódica de contorno

Escolhemos o modelo de Heisenberg, ou XXZ, como primeira aplicação do nosso *ansatz* do produto matricial, por ser este modelo o exemplo clássico de sistemas de spin quântico integráveis; além de ser o de resolução mais simples. Este modelo de spin unidimensional foi proposto por Heisenberg em 1928 [69], para investigar transições de fase em sistemas com interações de curta distância, em uma tentativa de entender a origem do magnetismo de diversos materiais. A solução exata da versão isotrópica deste modelo foi obtida pela primeira vez em 1931, por Hans Bethe [2], com o *ansatz* que ficou conhecido por *ansatz* de Bethe coordenada, sendo também a primeira solução exata de um Hamiltoniano quântico de muitos corpos integrável ¹.

¹Um sistema de muitos corpos é considerado exatamente solúvel, ou integrável, se existe um número infinito de cargas independentes conservadas. Por outro lado, um Hamiltoniano

Para mostrar como nosso *ansatz* do produto matricial nos possibilita obter a solução de modelos integráveis generalizados, de forma simples, vamos resolver diretamente um modelo de Heisenberg anisotrópico com volume excludente arbitrário, ao invés de começar com o modelo XXZ tradicional. Nesta generalização do XXZ, consideramos que quaisquer dois spins para cima (na base σ^z), devido a uma interação de exclusão, não podem ocupar posições na rede a distâncias menores que s ($s = 1, 2, \dots$), em unidades do espaçamento de rede. Portanto, os spins para cima comportam-se como se tivessem um tamanho efetivo s , diferentemente dos spins para baixo, que têm somente exclusão no sítio ocupado. O Hamiltoniano generalizado XXZ, em uma rede com L sítios, é dado por:

$$H_s = -\mathcal{P}_s \sum_{i=1}^L \frac{1}{2} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y - \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+s}^z) \mathcal{P}_s, \quad (2.1)$$

onde $\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z$ são as matrizes de Pauli de spin-1/2 que atuam no j -ésimo sítio; Δ é a anisotropia e o projetor \mathcal{P}_s projeta para fora do espaço de Hilbert associado as configurações onde quaisquer dois spins para cima estão a distâncias menores que s . No caso particular onde $s = 1$, o projetor \mathcal{P}_s é o operador identidade, recuperando assim o modelo XXZ padrão. O Hamiltoniano (2.1), em termos dos operadores de levantamento e abaixamento para spin-1/2 ($\sigma^\pm = (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2$), é um caso particular do Hamiltoniano geral

$$H_s = -\mathcal{P}_s \sum_{i=1}^L \left[\epsilon_+ \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+ + \epsilon_- \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \frac{\Delta}{2} (\sigma_i^z \sigma_{i+s}^z - 1) \right] \mathcal{P}_s, \quad (2.2)$$

onde adicionamos os parâmetros $\epsilon_+ = \epsilon_- = 1$ e a constante $(+L\Delta/2)$. Vamos considerar as soluções deste último Hamiltoniano (2.2), para valores gerais de quântico é dito integrável se um número infinito de seus auto-vetores podem ser expressos pelo *ansatz* de Bethe no limite termodinâmico.

ϵ_+ , ϵ_- e Δ sem nenhuma dificuldade adicional. Interpretando os spins para cima como partículas e os spins para baixo como sítios vazios o Hamiltoniano (2.2) com a escolha de $\epsilon_+ + \epsilon_- = 1 = -2\Delta$ coincide, a menos de uma constante aditiva, com o operador do problema de difusão assimétrica (assimetria ϵ_+/ϵ_-) de partículas com tamanho s na rede [62]. Consideramos neste capítulo o caso em que a condição de contorno em (2.2) é a periódica, isto é,

$$\sigma_{L+1}^\pm = \sigma_1^\pm, \quad \sigma_{L+1}^z = \sigma_1^z. \quad (2.3)$$

Na seção 2.2, iremos considerar o caso particular onde $\epsilon_+ = \epsilon_- = 1$ e com condições de contorno abertas.

O Hamiltoniano (2.2) com a condição de contorno (2.3) tem simetria $U(1) \otimes Z_L$, devido sua comutação com o operador de spin total $S^z = \sum_{i=1}^L \sigma^z$, e o operador de translação espacial $\hat{T} = e^{i\hat{P}}$ na rede. Conseqüentemente o espaço de Hilbert associado à (2.2) pode ser separado em setores de blocos disjuntos nomeados pelo número n de spins para cima ($n = 0, 1, \dots, L$), e pelo auto-valor do operador momentum P ($P = \frac{2\pi}{L}l, l = 0, 1, \dots, L-1$).

2.1.1 O *ansatz* do produto matricial

Uma vez que a magnetização total é conservada, no setor de n spins para cima (base de σ^z), um conjunto de vetores de base que usamos para escrever de forma conveniente os auto-vetores do Hamiltoniano (2.2), é dado pelo ket que descreve a configuração dos spins em cada sítio da rede. Optamos pela notação simplificada $|x_1, \dots, x_n\rangle$, onde assinalamos apenas as posições dos sítios com spin para cima

(x_1, \dots, x_n) . Este ket é:

$$|x_1, \dots, x_n\rangle = |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \otimes \dots \otimes |+\rangle_{x_1} \otimes |-\rangle_{x_1+1} \otimes \dots \otimes |+\rangle_{x_2} \otimes \dots \otimes |+\rangle_{x_n} \otimes \dots \otimes |-\rangle_L, \quad (2.4)$$

onde $|\pm\rangle_j$ está associado a configuração do j -ésimo sítio em que $\sigma^z = +1$ e $\sigma^z = -1$. Em termos dos vetores de base (2.4), os auto-estados $|\Psi_{n,P}\rangle$ do Hamiltoniano (2.2) podem ser escritos como a combinação linear

$$|\Psi_{n,P}\rangle = \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}}^* f(x_1, \dots, x_n) |x_1, \dots, x_n\rangle, \quad (2.5)$$

onde os spins para cima estão localizados nas posições (x_1, \dots, x_n) . O coeficiente da combinação linear é $f(x_1, \dots, x_n)$, e o símbolo $(*)$ na soma denota a restrição aos conjuntos satisfazendo a exclusão de volume devido ao tamanho efetivo s dos spins para cima, isto é:

$$x_{i+1} \geq x_i + s, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad x_1 \geq 1, \quad s \leq x_n - x_1 \leq L - s. \quad (2.6)$$

O *ansatz* que propomos assume que qualquer amplitude $f(x_1, \dots, x_n)$ da auto-função $|\Psi_{n,P}\rangle$ (2.5) no setor com n spins para cima e momentum P , é dada pelo traço de um produto de matrizes

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} [E^{x_1-1} A^{(s)} E^{x_2-x_1-1} A^{(s)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A^{(s)} E^{L-x_n} \Omega_P]. \quad (2.7)$$

Diferentemente do *ansatz* de Bethe coordenadas onde a amplitude $f(x_1, \dots, x_n)$ é dada por uma combinação de ondas planas, agora ela é dado pela traço de um produto de matrizes. De fato, E , $A^{(s)}$ e Ω_P são objetos abstratos com relações de comutação apropriadas. Esses operadores a fim de oferecer amplitudes bem definidas para as auto-funções, devem ter um produto associativo; e como usual na literatura, são chamados simplesmente por matrizes. As matrizes E e $A^{(s)}$

são associadas a spins para baixo e para cima, respectivamente, representando a configuração do ket (2.4) em (2.5). O super-escrito s é justamente para lembrar que os spins para cima têm um tamanho efetivo s . A matriz Ω_P em (2.7) é introduzida para fixar o momentum P da auto-função $|\Psi_{n,P}\rangle$. Este momentum P implica que as auto-funções (2.5) devem ter razões de amplitudes dadas por

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1 + m, \dots, x_n + m)} = e^{-iPm} \quad (m = 0, 1, \dots, L - 1), \quad (2.8)$$

e usando a (2.7) nesta expressão temos:

$$\frac{\text{Tr} [E^{x_1-1} A^{(s)} E^{x_2-x_1-1} A^{(s)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A^{(s)} E^{L-x_n} \Omega_P]}{\text{Tr} [E^{x_1-1+m} A^{(s)} E^{x_2-x_1-1} A^{(s)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A^{(s)} E^{L-x_n-m} \Omega_P]} = e^{-iPm}. \quad (2.9)$$

Usando a propriedade cíclica do traço para qualquer valor de $m = 0, 1, \dots, L - 1$ nesta equação, obtemos as relações algébricas²:

$$E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E, \quad A^{(s)}\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P A^{(s)}. \quad (2.10)$$

O *ansatz* de produto matricial para $|\Psi_{n,P}\rangle$ irá funcionar se for possível obter relações algébricas consistentes entre E e $A^{(s)}$, que resolvam a equação de auto-valor

$$H_s|\Psi_{n,P}\rangle = \varepsilon_n|\Psi_{n,P}\rangle. \quad (2.11)$$

2.1.2 Resolução do modelo

Antes de considerar o caso de valores gerais de n , consideraremos os setores com $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ spins para cima.

$n = 0$. Neste caso, temos no setor apenas um auto-vetor com auto-valor nulo.

²No caso geral de condição de contorno torcida $\sigma_{L+1}^\pm = e^{\pm i\Phi} \sigma_1^\pm$, $\sigma_{L+1}^z = \sigma_1^z$ o *ansatz* também funciona com uma generalização apropriada de (2.10).

$\mathbf{n} = 1$. Para um único spin para cima, a equação de auto-valores (2.11) fornece as seguintes relações para as amplitudes da auto-função $|\Psi_{n,P}\rangle$ em (2.5):

$$\varepsilon_1 f(x) = -\varepsilon_+ f(x-1) - \varepsilon_- f(x+1) + 2\Delta f(x), \quad (2.12)$$

onde $x = 2, \dots, L-1$ é a posição do spin para cima na rede, e

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 f(1) &= -\varepsilon_+ f(L) - \varepsilon_- f(2) + 2\Delta f(1), \\ \varepsilon_1 f(L) &= -\varepsilon_+ f(L-1) - \varepsilon_- f(1) + 2\Delta f(L), \end{aligned} \quad (2.13)$$

para o spin para cima nas posições $x = 1$ e $x = L$, respectivamente. Essas relações (2.12) e (2.13) podem ser escritas de forma unificada através do nosso *ansatz* (2.7). Isto porque $A^{(s)}E^{-1}$ e $E^{-1}A^{(s)}$ comutam com a matriz Ω_P devido as relações de comutação (2.10). Inserindo (2.7) nas (2.12) e (2.13) obtemos então uma relação para o traço do produto de matrizes

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s)} E^{L-x} \Omega_P] &= -\varepsilon_+ \text{Tr} [E^{x-2} A^{(s)} E^{L-x+1} \Omega_P] \\ &\quad -\varepsilon_- \text{Tr} [E^x A^{(s)} E^{L-x-1} \Omega_P] + 2\Delta \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s)} E^{L-x} \Omega_P], \end{aligned} \quad (2.14)$$

que pode ser escrita em termos de um único produto de matrizes, usando a propriedade cíclica do traço e as relações (2.10) de comutação:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_+ e^{-iP} + \varepsilon_- e^{iP} - 2\Delta) \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s)} E^{L-x} \Omega_P] = 0. \quad (2.15)$$

O traço do produto de matrizes nesta última equação não pode ser zero, pois isto resultaria em um auto-vetor (2.5) de norma nula. Portanto, para satisfazer a (2.15) fixamos as auto-energias como:

$$\varepsilon_1 = -(\varepsilon_+ e^{-iP} + \varepsilon_- e^{iP} - 2\Delta), \quad (2.16)$$

onde $P = \frac{2\pi l}{L}$ ($l = 0, 1, \dots, L - 1$) é o momentum do estado. Uma solução alternativa (2.14) simples de generalizar para valores arbitrários de n é obtida substituindo-se

$$A^{(s)} = A_k^{(s)} E^{2-s}, \quad (2.17)$$

onde agora $A_k^{(s)}$ é uma matriz dependente de um parâmetro espectral, obedecendo a seguinte relação de comutação com a matriz E :

$$E A_k^{(s)} = e^{ik} A_k^{(s)} E. \quad (2.18)$$

Inserindo (2.17) na (2.14) e usando (2.18) obtemos a equação:

$$(\epsilon_1 + \epsilon_+ e^{-ik} + \epsilon_- e^{ik} - 2\Delta) \text{Tr} \left[E^{x-1} A_k^{(s)} E^{L-x+2-s} \Omega_P \right] = 0. \quad (2.19)$$

Portanto a energia ϵ_1 é:

$$\epsilon_1 = \epsilon(k) = -(\epsilon_+ e^{-ik} + \epsilon_- e^{ik} - 2\Delta). \quad (2.20)$$

Comparando (2.16) com (2.20), fixamos o parâmetro espectral k como o momentum P da auto-função de 1 partícula $|\Psi_{1,P}\rangle$, isto é, $k = P = \frac{2\pi l}{L}$ ($l = 0, 1, \dots, L - 1$). Este fato pode ser observado inserindo (2.17) em (2.9) e usando a (2.18).

n = 2. A equação de auto-valor (2.11) fornece para as amplitudes de $|\Psi_{2,P}\rangle$ dois tipos de relações, que dependem dos dois spins para cima localizados nas posições x_1 e x_2 estarem ou não na posição de maior proximidade (situação de “colisão”). As amplitudes correspondentes aos kets $|x_1, x_2\rangle$, onde $x_2 > x_1 + s$, dá a relação:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 f(x_1, x_2) = & -\epsilon_+ f(x_1 - 1, x_2) - \epsilon_- f(x_1 + 1, x_2) \\ & -\epsilon_+ f(x_1, x_2 - 1) - \epsilon_- f(x_1, x_2 + 1) + 4\Delta f(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

mais as relações vindas do contorno, com $x_1 = 1$ ou $x_2 = L$. Não escrevemos aqui estas últimas relações de contorno pois como no caso de $n = 1$, podemos escrevê-las de forma unificada, junto com a (2.21), usando nosso *ansatz* (2.7).

Inserindo (2.7) na (2.21), obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s)} E^{y-x-1} A^{(s)} E^{L-y} \Omega_P] &= -\varepsilon_+ \text{Tr} [E^{x-2} A^{(s)} E^{y-x} A^{(s)} E^{L-y} \Omega_P] \\ -\varepsilon_- \text{Tr} [E^x A^{(s)} E^{y-x-2} A^{(s)} E^{L-y} \Omega_P] &- \varepsilon_+ \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s)} E^{y-x-2} A^{(s)} E^{L-y+1} \Omega_P] \\ -\varepsilon_- \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s)} E^{y-x} A^{(s)} E^{L-y-1} \Omega_P] &+ 4\Delta \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s)} E^{y-x-1} A^{(s)} E^{L-y} \Omega_P]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

No caso apresentado, não podemos escrever a expressão em termos de um único produto de matrizes usando apenas a propriedade cíclica do traço e as relações de comutação (2.10), como feito no caso de $n = 1$; isto porque, a distância relativa entre as matrizes $A^{(s)}$ varia de traço para traço em (2.22). Uma forma possível e conveniente de resolver esta equação é obtida por uma generalização de (2.17) e (2.18). Identificando $A^{(s)}$ como composta por novas matrizes dependentes de parâmetros espectrais $A_{k_1}^{(s)}$ e $A_{k_2}^{(s)}$, isto é:

$$A^{(s)} = \sum_{i=1}^2 A_{k_i}^{(s)} E^{2-s}, \quad (2.23)$$

e que satisfazem as relações de comutação:

$$E A_{k_j}^{(s)} = e^{ik_j} A_{k_j}^{(s)} E, \quad \left(A_{k_j}^{(s)} \right)^2 = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.24)$$

Inserindo (2.23) em (2.22), e usando (2.24), podemos escrever (2.22) em termos de um único produto de matrizes, como fizemos para o caso de $n = 1$. Desta simplificação de (2.22), obtemos a expressão da energia:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2), \quad (2.25)$$

onde $\varepsilon(k)$ é dado pela (2.20). As relações (2.10) e (2.23) nos fornecem a comutação dessas novas matrizes $A_{k_i}^{(s)}$ com Ω_P , isto é:

$$A_{k_j}^{(s)}\Omega_P = e^{iP(1-s)}\Omega_P A_{k_j}^{(s)} \quad j = 1, 2. \quad (2.26)$$

Comparando como em (2.8) as amplitudes das configurações $|x_1, x_2\rangle$ e $|x_1+m, x_2+m\rangle$, e explorando a propriedade cíclica do traço, obtemos:

$$P = k_1 + k_2. \quad (2.27)$$

Temos ainda ao nosso dispor as relações de comutação de $A_{k_1}^{(s)}$ com $A_{k_2}^{(s)}$ a fim de resolver a equação de auto-valor, assim como os parâmetros espectrais k_1 e k_2 , que podem ser em geral números complexos. Essas relações de comutação são fixadas pelos termos da equação de auto-valor (2.11), relativos as configurações dos vetores de base $|x_1, x_2\rangle$, onde os spins para cima estão na posição de “colisão” $x_2 = x_1 + s$:

$$\varepsilon_2 f(x, x + s) = -\varepsilon_+ f(x - 1, x + s) - \varepsilon_- f(x, x + s + 1) + 2\Delta f(x, x + s), \quad (2.28)$$

onde $x = x_1 = 2, \dots, L - s - 1$. Não escrevemos as relações vindas do contorno, com $x = 1$ ou $L - s \leq x \leq L$ pois elas levam às mesmas relações que a (2.28) para as matrizes do *ansatz* (2.7). Queremos que a equação (2.28) seja satisfeita apenas pelas relações algébricas entre as matrizes $A_{k_1}^{(s)}$ e $A_{k_2}^{(s)}$, o que implica que, ao substituir o *ansatz* (2.7) em (2.28), esta relação seja satisfeita independentemente da operação do traço. Inserindo (2.7) em (2.28), obtemos:

$$\varepsilon_2 A^{(s)} E^{s-1} A^{(s)} = -\varepsilon_+ E^{-1} A^{(s)} E^s A^{(s)} - \varepsilon_- A^{(s)} E^s A^{(s)} E^{-1} + 2\Delta A^{(s)} E^{s-1} A^{(s)}, \quad (2.29)$$

Usando (2.23), (2.25) e as relações de comutação (2.24) nesta última expressão, temos:

$$\sum_{j,l=1}^2 [\epsilon_- + \epsilon_+ e^{-i(k_j+k_l)} - 2\Delta e^{-ik_j}] A_{k_j}^{(s)} A_{k_l}^{(s)} = 0. \quad (2.30)$$

Como não queremos fixar os parâmetros espectrais, essa relação implica em que as matrizes $A_{k_j}^{(s)}$ ($j = 1, 2$) devem obedecer

$$A_{k_j}^{(s)} A_{k_l}^{(s)} = S(k_j, k_l) A_{k_l}^{(s)} A_{k_j}^{(s)}, \quad (l \neq j), \quad \left(A_{k_j}^{(s)} \right)^2 = 0, \quad (j, l = 1, 2), \quad (2.31)$$

onde

$$S(k_j, k_l) = -\frac{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_l)} - 2\Delta e^{ik_j}}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_l)} - 2\Delta e^{ik_l}}. \quad (2.32)$$

Esta última relação no contexto da teoria de campo de $(1 + 1)$ dimensões é conhecida como álgebra de Zamolodchikov [70, 21].

Os parâmetros espectrais complexos k_j ($j = 1, 2$), que até agora continuam livres, são fixados impondo que a razão das componentes $f(x_1, x_2)/f(x'_1, x'_2)$ devem ser unicamente relacionadas. A propriedade cíclica do traço junto com as relações algébricas (2.24), (2.25) e (2.31), nos dá:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[A_{k_l}^{(s)} A_{k_j}^{(s)} E^{L-2s+2} \Omega_P \right] &= e^{-i(L-2s+2)k_j} \text{Tr} \left[A_{k_l}^{(s)} E^{L-2s+2} A_{k_j}^{(s)} \Omega_P \right] \\ &= e^{-ik_j L} e^{i2k_j(s-1)} e^{-iP(s-1)} S(k_j, k_l) \text{Tr} \left[A_{k_l}^{(s)} A_{k_j}^{(s)} E^{L-2s+2} \Omega_P \right], \end{aligned} \quad (2.33)$$

ou de forma equivalente, desde que $P = k_1 + k_2$:

$$e^{ik_j L} = S(k_j, k_l) \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s-1}, \quad j = 1, 2 \quad (j \neq l). \quad (2.34)$$

As energias ε_2 e o momentum P do auto-vetor $|\Psi_{2,P}\rangle$ são obtidas inserindo-se as soluções de (2.34) em (2.25) e (2.27), respectivamente.

n geral. O cálculo anterior pode ser facilmente estendido para valores arbitrários de número n de spins para cima. A equação de auto-valor (2.11) quando

aplicada em amplitudes de $|\Psi_{n,P}\rangle$, correspondendo a configurações em que todos os n spins estão a distâncias maiores do que o volume de exclusão s , dá a generalização de (2.22):

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}-1} A^{(s)} E^{x_{i+1}-x_i-1} A^{(s)} \dots A^{(s)} E^{L-x_n} \Omega_P] = \\ - \sum_{i=1}^n \{ \varepsilon_+ \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}-2} A^{(s)} E^{x_{i+1}-x_i} A^{(s)} \dots A^{(s)} E^{L-x_n} \Omega_P] \\ + \varepsilon_- \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}-1} A^{(s)} E^{x_{i+1}-x_i-2} A^{(s)} \dots A^{(s)} E^{L-x_n+1} \Omega_P] \\ - 2\Delta \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}-1} A^{(s)} E^{x_{i+1}-x_i-1} A^{(s)} \dots A^{(s)} E^{L-x_n} \Omega_P] \}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

A solução desta última equação³ é obtida identificando a matriz $A^{(s)}$ como a combinação de n matrizes dependentes de parâmetros espectrais $\{A_{k_j}; j = 1, \dots, n\}$, isto é:

$$A^{(s)} = \sum_{j=1}^n A_{k_j}^{(s)} E^{2-s}, \quad (2.36)$$

com as relações de comutação com as matrizes E e Ω_P , dadas por:

$$E A_{k_j}^{(s)} = e^{ik_j} A_{k_j}^{(s)} E, \quad A_{k_j}^{(s)} \Omega_P = e^{iP(1-s)} \Omega_P A_{k_j}^{(s)} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.37)$$

A energia e o momentum são obtidos inserindo-se (2.36) em (2.35) e (2.9), e usando também as relações de comutação (2.37), temos:

$$\varepsilon_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon(k_j), \quad P = \sum_{j=1}^n k_j, \quad (2.38)$$

respectivamente. A equação de auto-valor (2.11) dá, para as configurações onde um par de spins para cima está na posição de "colisão" $x_{i+1} = x_i + s$, uma relação que coincide com (2.30)-(2.32), porém com $j, l = 1, \dots, n$. A relação vinda das

³A relação mais geral possível $A^{(s)} = \sum_{j=1}^n E^\alpha A_{k_j}^{(s)} E^\beta$ pode ser usada. No entanto, (2.36) é mais conveniente, pois senão as constantes de estrutura $S(k_i, k_j)$ em (2.32) dependerão do tamanho s .

configurações onde três partículas estão na posição de colisão $x_{i+1} = x_i + s$, $x_{i+2} = x_{i+1} + s$ é dada por:

$$\begin{aligned} & \sum_{j,l=1}^n (\epsilon_- + \epsilon_+ e^{-i(k_j+k_l)} - 2\Delta e^{-ik_j}) A_{k_j}^{(s)} A_{k_l}^{(s)} \sum_{t=1}^n A_{k_t}^{(s)} e^{ik_t} \\ & + \sum_{j=1}^n e^{-ik_j} A_{k_j}^{(s)} \sum_{l=1}^n e^{i(k_l+k_t)} (\epsilon_- + \epsilon_+ e^{-i(k_l+k_t)} - 2\Delta e^{-ik_t}) A_{k_l}^{(s)} A_{k_t}^{(s)} = 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

sendo automaticamente satisfeita pela relação (2.30), com $j, l = 1, \dots, n$, vinda da colisão de apenas duas partículas. Similarmente, as amplitudes com número arbitrário de partículas na posição de colisão são automaticamente satisfeitas se as matrizes E , $A_{k_j}^{(s)}$ ($j = 1, \dots, n$) e Ω_P obedecerem as relações algébricas (2.31), com $j, l = 1, \dots, n$ e (2.37). A associatividade da álgebra garante a existência de um valor bem definido para qualquer produto de matrizes, o que vem do fato de que as constantes de estrutura $S(k_i, k_j)$ em (2.31)-(2.32) serem números com a propriedade $S(k_i, k_j)S(k_j, k_i) = 1$ ($i, j = 1, \dots, n$).

A invariância cíclica do traço em (2.7) fixa os parâmetros espectrais k_j ($j = 1, \dots, n$), fornecendo valores bem definidos para as componentes de $|\Psi_{n,P}\rangle$, isto é:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[A_{k_1}^{(s)} \dots A_{k_j}^{(s)} \dots A_{k_n}^{(s)} E^{L-n(s-1)} \Omega_P \right] \\ & = e^{-ik_j[L-n(s-1)]} e^{iP(1-s)} \prod_{l=j+1}^n S(k_j, k_l) \times \\ & \quad \times \text{Tr} \left[A_{k_j}^{(s)} A_{k_1}^{(s)} \dots A_{k_{j-1}}^{(s)} A_{k_{j+1}}^{(s)} \dots A_{k_n}^{(s)} E^{L-n(s-1)} \Omega_P \right] \\ & = e^{-ik_j[L-n(s-1)]} e^{iP(1-s)} \prod_{l=1, l \neq j}^n S(k_j, k_l) \text{Tr} \left[A_{k_1}^{(s)} \dots A_{k_j}^{(s)} \dots A_{k_n}^{(s)} E^{L-n(s-1)} \Omega_P \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

com $j = 1, \dots, n$, ou equivalentemente:

$$e^{ik_j L} = (-1)^n \prod_{l=1}^n \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s-1} \frac{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_l)} - 2\Delta e^{ik_j}}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_l)} - 2\Delta e^{ik_l}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.41)$$

O conjunto aceitável $\{k_j; j = 1, \dots, n\}$ de parâmetros espectrais que define os auto-vetores $|\Psi_{n,P}\rangle$ são as soluções de (2.41), onde $k_i \neq k_j$ ($i, j = 1, \dots, n$). Como $(A_k^{(s)})^2 = 0$, soluções de (2.41) com raízes coincidentes dão estados de norma nula.

A equação (2.41) coincide com a equação do *ansatz* de Bethe derivada para o modelo (2.2), através do *ansatz* de Bethe coordenada [62]. A escolha $\epsilon_+ = \epsilon_- = 1$ com $s = 1$ dá a equação do *ansatz* de Bethe do modelo XXZ tradicional (2.1) [53].

2.1.3 Auto-vetores: relação com o *ansatz* de Bethe

Usando (2.36) podemos escrever uma componente arbitrária $f(x_1, \dots, x_n)$ da auto-função $|\Psi_{n,P}\rangle$, dada pelo *ansatz* (2.7), em termos das matrizes dependentes dos parâmetros espectrais $A_{k_j}^{(s)}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \text{Tr} \left[E^{x_1-1} A_{k_{i_1}}^{(s)} E^{x_2-x_1+1-s} A_{k_{i_2}}^{(s)} \dots E^{x_n-x_{n-1}+1-s} A_{k_{i_n}}^{(s)} E^{L-x_n+2-s} \Omega_P \right]. \quad (2.42)$$

Esta equação pode ser reescrita de forma a obtermos todas as amplitudes $f(x_1, \dots, x_n)$ escritas em termos de um único produto de matrizes. Usando as relações de comutação entre a matriz E e as $A_{k_j}^{(s)}$ (2.37), obtemos a expressão:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n e^{i[k_{i_1}(x_1-1) + \dots + k_{i_n}(x_n-1)]} \text{Tr} \left[A_{k_{i_1}}^{(s)} E^{1-s} A_{k_{i_2}}^{(s)} E^{1-s} \dots E^{1-s} A_{k_{i_n}}^{(s)} E^L \Omega_P \right]. \quad (2.43)$$

Definindo as novas matrizes

$$\tilde{A}_{k_j}^{(s)} = A_{k_j}^{(s)} E^{1-s} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.44)$$

É fácil de verificar a partir de (2.31), que as matrizes (2.44) satisfazem, para $j, l = 1, \dots, n$, as relação de comutação

$$\tilde{A}_{k_j}^{(s)} \tilde{A}_{k_l}^{(s)} = \tilde{S}(k_j, k_l) \tilde{A}_{k_l}^{(s)} \tilde{A}_{k_j}^{(s)}, \quad (j \neq l), \quad \left(\tilde{A}_{k_j}^{(s)}\right)^2 = 0, \quad (2.45)$$

onde

$$\tilde{S}(k_j, k_l) = S(k_j, k_l) \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s-1}. \quad (2.46)$$

Em termos dessas novas matrizes, (2.43) pode ser escrita explorando o fato de que $(\tilde{A}_{k_j}^{(s)})^2 = 0$, como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p_1, \dots, p_n} e^{i[k_{p_1}(x_1-1) + \dots + k_{p_n}(x_n-1)]} \text{Tr} \left[\tilde{A}_{k_{p_1}}^{(s)} \dots \tilde{A}_{k_{p_n}}^{(s)} E^L \Omega_P \right], \quad (2.47)$$

onde a soma é sobre as permutações $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dos inteiros não repetidos $(1, \dots, n)$. Este último resultado mostra que as amplitudes derivadas usando o *ansatz* do produto matricial (2.7) são dadas por uma combinação de ondas planas com números de onda complexos $\{k_i\}$, e reproduzem os resultados previamente obtidos [62] para o Hamiltoniano (2.2) através do *ansatz* de Bethe coordenada.

2.2 O modelo XXZ generalizado com condição de contorno aberto

Diferentemente da seção anterior, na qual a cadeia quântica era definida em uma rede periódica, consideraremos agora a formulação do *ansatz* do produto matricial para redes abertas. Vamos considerar o modelo XXZ generalizado definido na seção anterior 2.1, em uma rede aberta com campo magnético diagonal na direção z atuando somente nos pontos da superfície. O Hamiltoniano que

resolveremos é dado por:

$$H_s = -\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) + h_L \sigma_1^z + h_R \sigma_L^z \right\} \mathcal{P}_s, \quad (2.48)$$

onde $\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z$ são as matrizes de Pauli para spin $\frac{1}{2}$, que atuam no j -ésimo sítio; Δ é o parâmetro de anisotropia e h_L e h_R são os campos magnéticos atuando nos sítios 1 e L , respectivamente. O projetor \mathcal{P}_s , como na seção 2.1, projeta para fora do espaço de Hilbert associado as configurações onde quaisquer dois spins para cima estão a distâncias menores que s ($s = 1, 2, \dots$). A escolha $h_1 = h_L = 0$ corresponde ao caso de contorno livre.

A solução exata de (2.48) para o caso $s = 1$ foi obtida através do *ansatz* de Bethe coordenada em [54], e através do método do espalhamento inverso em [71]. É também interessante mencionar que no caso onde $s = 1$, o Hamiltoniano (2.48) tem simetria $SU(2)_q$ se a anisotropia e os campos na superfície forem dados por $\Delta = (q + 1/q)/2$, $h_L = q$, $h_R = 1/q$.

2.2.1 O *ansatz* do produto matricial

Como o Hamiltoniano (2.48) comuta apenas com o operador de spin total $S^z = \sum_{i=1}^L \sigma_i^z$, apenas o número de spins n é um bom número quântico. A situação agora é diferente do caso de condições periódicas de contorno, onde o Hamiltoniano também comuta com o operador de translação espacial $\hat{T} = e^{i\hat{P}}$. Queremos, portanto, resolver a equação de auto-valores:

$$H|\Psi_n\rangle = \varepsilon_n|\Psi_n\rangle \quad (2.49)$$

onde

$$|\Psi_n\rangle = \sum f(x_1, \dots, x_n) |x_1, \dots, x_n\rangle. \quad (2.50)$$

Aqui, como na seção anterior, x_1, \dots, x_n denota a configuração dos spins para cima na rede; $|x_1, \dots, x_n\rangle$ é o ket (2.4), e a soma se estende sobre todos os conjuntos de n inteiros satisfazendo

$$x_1 \geq 1, \quad x_n \leq L, \quad x_{i+1} \geq x_i + s, \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (2.51)$$

Para formular nosso *ansatz* do produto matricial, associamos as matrizes E e A com sítios ocupados por spins para baixo e para cima, respectivamente⁴. O *ansatz* que propomos assume que qualquer amplitude em (2.50) é dada por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = E^{x_1-1} A E^{x_2-x_1-1} A \dots A E^{x_n-x_{n-1}-1} A E^{L-x_n}. \quad (2.52)$$

Já aqui, diferentemente do caso de condição periódica de contorno da seção anterior, não tomamos o traço do produto de matrizes em (2.52), devido ao fato da condição de contorno não ser periódica. As matrizes E e A são operadores abstratos com um produto associativo. Uma auto-função bem definida (2.50) é obtida, a menos de uma constante de normalização, se todas as amplitudes forem unicamente relacionadas.

2.2.2 Resolução do modelo

Para obter a solução através do *ansatz* (2.52), vamos considerar inicialmente os casos de valores pequenos de n .

$n = 0$. Como no caso de contorno periódico, na seção 2.1.2, temos no setor apenas um auto-vetor com auto-valor nulo.

⁴Diferente da solução na rede periódica (veja (2.7) na seção 2.1.1) no caso presente não é necessário definir as matrizes A com o super-escrito s .

$n = 1$. Para um spin para cima a equação de auto-valores (2.49) dá três tipos de relações, dependendo se na configuração correspondente o spin para cima estiver nas posições $x = 2, \dots, L-1$, ou nas bordas $x = 1$ e $x = L$, teremos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 f(x) &= -f(x-1) - f(x+1) - \frac{1}{2} [(L-5)\Delta + h_L + h_R] f(x), \\ \varepsilon_1 f(1) &= -f(2) - \frac{1}{2} [(L-3)\Delta - h_L + h_R] f(1) \quad \text{e} \quad (2.53) \\ \varepsilon_1 f(L) &= -f(L-1) - \frac{1}{2} [(L-3)\Delta + h_L - h_R] f(L).\end{aligned}$$

Inserindo nestas expressões a (2.52), para o caso $n = 1$, obtemos para as matrizes A e E do *ansatz* as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 E^{x-1} A E^{L-x} &= -E^{x-1} (E^{-1} A E + E A E^{-1}) E^{L-x} \\ &- \frac{1}{2} [(L-5)\Delta + h_L + h_R] E^{x-1} A E^{L-x}, \quad x = 2, \dots, L-1 \quad (2.54)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 A E^{L-1} = -E A E^{L-2} - \frac{1}{2} [(L-3)\Delta - h_L + h_R] A E^{L-1} \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_1 E^{L-1} A = -E^{L-2} A E - \frac{1}{2} [(L-3)\Delta + h_L - h_R] E^{L-1} A. \quad (2.56)$$

A solução de todas essas equações é obtida identificando-se a matriz A como composta por duas outras matrizes B_k, C_k dependentes de um único parâmetro espectral complexo k , isto é:

$$A = (B_k - C_k) E^{2-s}, \quad (2.57)$$

com as seguintes relações de comutação com a matriz E

$$E B_k = e^{ik} B_k E, \quad E C_k = e^{-ik} C_k E. \quad (2.58)$$

Substituindo (2.57) em (2.54), e usando as relações (2.58) para escrever a (2.54) em termos de apenas um único produto de matrizes envolvendo B_k , e um outro

produto envolvendo C_k , obtemos a expressão da energia em função do parâmetro espectral k ,

$$\varepsilon_1 = -2 \cos(k) - \frac{1}{2} [(L-5)\Delta + h_L + h_R]. \quad (2.59)$$

Inserindo agora (2.59) e (2.57) nas equações do contorno (2.55) e (2.56), e usando as relações de comutação (2.58), obtemos as seguintes relações algébricas:

$$\alpha(k)e^{-ik}B_k - \alpha(-k)e^{ik}C_k = 0 \quad (2.60)$$

$$\beta(-k)e^{ik}B_k - \beta(k)e^{-ik}C_k = 0, \quad (2.61)$$

onde fatoramos o produto envolvendo apenas as matrizes E , e as funções $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ são dados por:

$$\alpha(k) = 1 + (h_L - \Delta)e^{ik}, \quad \beta(k) = [1 + (h_R - \Delta)e^{ik}]e^{-ik(L+1)}. \quad (2.62)$$

O parâmetro espectral complexo k , que até agora continua livre, é fixado pela compatibilidade das relações (2.60) e (2.61). Inserindo (2.60) em (2.61), obtemos:

$$\frac{\alpha(k)\beta(k)}{\alpha(-k)\beta(-k)} = 1. \quad (2.63)$$

Finalmente, a energia ε_1 do auto-vetor $|\Psi_1\rangle$ é obtida inserindo as soluções de (2.63) em (2.59).

n = 2. A equação de auto-valores produz quatro tipos de relações dependendo da localização x_1, x_2 dos sítios com spin para cima. As amplitudes relacionadas às configurações onde $x_1 > 1, L > x_2 > x_1 + s$ dão a relação abaixo após o uso do *ansatz* (2.52) para o caso de dois spins para cima:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 E^{x_1-1} A E^{x_2-x_1-1} A E^{L-x_2} &= -E^{x_1-1} (E^{-1} A E + E A E^{-1}) E^{x_2-x_1-1} E^{L-x_2} \\ &\quad - E^{x_1-1} A E^{x_2-x_1-1} (E^{-1} A E + E A E^{-1}) E^{L-x_2} \quad (2.64) \\ &\quad - \frac{1}{2} [(L-9)\Delta + h_L + h_R] E^{x_1-1} A E^{x_2-x_1-1} A E^{L-x_2}, \end{aligned}$$

enquanto as configurações onde as partículas estão na posição de colisão $x_1 > 1$, $L > x_2 = x_1 + s$ produzem as relações:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E^{x_1-1} A E^{s-1} A E^{L-x_1-s} &= -E^{x_1-2} A E^s A E^{L-x_1-s} \\ &- E^{x_1-1} A E^s A E^{L-x-s-1} - \frac{1}{2} [(L-5)\Delta + h_L + h_R] E^{x_1-1} A E^{s-1} A E^{L-x-s}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Por fim, as amplitudes onde uma das partículas está em uma das extremidades dão as seguintes relações, para $x_1 = 1$, $L > x_2 > x_1 + s$:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 A E^{x_2-2} A E^{L-x_2} &= -E A E^{x_2-3} A E^{L-x_2} - A E^{x_2-3} A E^{L-x_2+1} \\ &- A E^{x_2-1} A E^{L-x_2-1} - \frac{1}{2} [(L-7)\Delta - h_L + h_R] A E^{x_2-2} A E^{L-x_2}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

e para $1 < x_1 < L - s$, $x_2 = L$

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E^{x_1-1} A E^{L-x_1-1} A &- -E^{x_1-2} A E^{L-x_1} A - E^{x_1} A E^{L-x_1-2} A \\ &- E^{x_1-1} A E^{L-x_1-2} A E - \frac{1}{2} [(L-7)\Delta + h_L - h_R] E^{x_1-1} A E^{L-x_1-1} A. \end{aligned} \quad (2.67)$$

As relações vindas das amplitudes onde as partículas estão localizadas nos sítios $(x_1 = 1, x_2 = 1 + s)$ ou $(x_1 = L - s, x_2 = L)$ são automaticamente satisfeitas pelas soluções das (2.65)-(2.67). A solução das equações (2.65)-(2.67) é obtida pela generalização da (2.57), onde identificamos a matriz A como composta por $n = 2$ pares de matrizes dependentes de parâmetros espectrais $\{B_{k_j}, C_{k_j}\}$,

$$A = \sum_{j=1}^n (B_{k_j} - C_{k_j}) E^{2-s}, \quad (2.68)$$

obedecendo as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} E B_{k_j} &= e^{ik_j} B_{k_j} E, \quad E C_{k_j} = e^{-ik_j} C_{k_j} E \\ B_{k_j}^2 &= C_{k_j}^2 = B_{k_j} C_{k_j} = C_{k_j} B_{k_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Inserindo (2.68) em (2.65) e usando as relações de comutação (2.69), como fizemos no caso $n = 1$, obtemos a energia ϵ_2 em termos dos parâmetros espectrais k_1, k_2 :

$$\epsilon_n = -2 \sum_{j=1}^n \cos(k_j) - \frac{1}{2} [(L-1-4n)\Delta + h_L + h_R], \quad (2.70)$$

onde $n = 2$. Para resolver as relações (2.65) originadas dos termos de colisão, temos ainda ao nosso dispor as relações de comutação das matrizes $\{B_{k_j}, C_{k_j}\}$.

Após usarmos (2.68), (2.69) e (2.70) fixamos essas relações:

$$\begin{aligned} a(k_l, k_j) B_{k_j} B_{k_l} + a(k_j, k_l) B_{k_l} B_{k_j} &= 0, \\ a(-k_l, -k_j) C_{k_j} C_{k_l} + a(-k_j, -k_l) C_{k_l} C_{k_j} &= 0, \\ a(-k_l, k_j) B_{k_j} C_{k_l} + a(k_j, -k_l) C_{k_l} B_{k_j} &= 0 \quad (j \neq l = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.71)$$

com $n = 2$, onde a função $a(k, k')$ é dada por:

$$a(k, k') = 1 - 2\Delta e^{-ik'} + e^{-i(k+k')}. \quad (2.72)$$

Finalmente, usando (2.68) e (2.69) nas equações do contorno (2.66) e (2.67) obtemos as seguintes relações adicionais:

$$\alpha(k_j) e^{-ik_j} B_{k_j} B_{k_l} - \alpha(-k_j) e^{ik_j} C_{k_j} B_{k_l} = 0 \quad (2.73)$$

$$\alpha(-k_j) e^{ik_j} C_{k_j} C_{k_l} - \alpha(k_j) e^{-ik_j} B_{k_j} C_{k_l} = 0 \quad (2.74)$$

$$\beta(-k_l) e^{-ik_l s} B_{k_j} B_{k_l} - \beta(k_l) e^{ik_l s} B_{k_j} C_{k_l} = 0 \quad (2.75)$$

$$\beta(k_l) e^{ik_l s} C_{k_j} C_{k_l} - \beta(-k_l) e^{-ik_l s} C_{k_j} B_{k_l} = 0 \quad (j \neq l = 1, \dots, n), \quad (2.76)$$

com $n = 2$ e

$$\alpha(k) = 1 + (h_L - \Delta) e^{ik}, \quad \beta(k) = [1 + (h_R - \Delta) e^{ik}] e^{-ik(L+1)}. \quad (2.77)$$

Os parâmetros espectrais k_1 e k_2 , que até agora estão livres, são fixados impondo-se a compatibilidade das relações algébricas (2.71), ((2.73)-(2.76)). Usando sucessivamente (2.71), (2.73) e (2.75) obtemos:

$$\frac{\alpha(k_j)\beta(k_j)}{\alpha(-k_j)\beta(-k_j)} e^{2ik_j(s-1)} = \frac{\mathcal{B}(-k_j, k_l)}{\mathcal{B}(k_j, k_l)}, \quad j = 1, 2, \quad l \neq j \quad (2.78)$$

onde

$$\mathcal{B}(k, k') = a(k, k')a(k', -k). \quad (2.79)$$

Por fim, obtemos as energias para dois spins para cima na rede inserindo as soluções de (2.78) na expressão (2.70), com $n = 2$.

n geral. A equação de auto-valor aplicada às componentes correspondentes às configurações onde não existem spins para cima na posição de colisão ($x_{i+1} > x_i + s$; $i = 1, \dots, n-1$), produzem relações que generalizam (2.65). Estas relações são resolvidas identificando tal como em (2.68), a matriz A como composta por n pares de matrizes dependentes de parâmetros espectrais $\{B_k, C_k\}$, satisfazendo as relações algébricas (2.69). Em termos dos parâmetros espectrais k_1, \dots, k_n a energia é dada por (2.70). A equação de auto-valor (2.49) quando aplicada às componentes relacionadas às configurações onde dois spins para cima estão na posição de "colisão" $L > x_{i+1} = x_i + s > s$, dão a relação (2.71), para $j \neq l$, $j, l = 1, \dots, n$. As configurações onde temos um spin para cima em um dos

pontos extremos $x_1 = 1$ ou $x_n = L$ dão as relações adicionais:

$$\begin{aligned}
& [B_{k_{i_1}} B_{k_{i_2}} \alpha(k_{i_1}) e^{-ik_{i_1}} - C_{k_{i_1}} B_{k_{i_2}} \alpha(-k_{i_1}) e^{ik_{i_1}}] X_{k_{i_3}} \cdots X_{k_{i_n}} = 0, \\
& [C_{k_{i_1}} C_{k_{i_2}} \alpha(-k_{i_1}) e^{ik_{i_1}} - B_{k_{i_1}} C_{k_{i_2}} \alpha(k_{i_1}) e^{-ik_{i_1}}] X_{k_{i_3}} \cdots X_{k_{i_n}} = 0, \\
& X_{k_{i_1}} \cdots X_{k_{i_{n-2}}} \left[B_{k_{i_{n-1}}} B_{k_{i_n}} \beta(-k_{i_n}) e^{ik_{i_n}[(n-1)(1-s)-1]} \right. \\
& \quad \left. - B_{k_{i_{n-1}}} C_{k_{i_n}} \beta(k_{i_n}) e^{-ik_{i_n}[(n-1)(1-s)-1]} \right] = 0, \\
& X_{k_{i_1}} \cdots X_{k_{i_{n-2}}} \left[C_{k_{i_{n-1}}} C_{k_{i_n}} \beta(k_{i_n}) e^{-ik_{i_n}[(n-1)(1-s)-1]} \right. \\
& \quad \left. - C_{k_{i_{n-1}}} B_{k_{i_n}} \beta(-k_{i_n}) e^{ik_{i_n}[(n-1)(1-s)-1]} \right] = 0, \quad (2.80)
\end{aligned}$$

onde i_1, \dots, i_n é uma permutação qualquer dos inteiros $1, 2, \dots, n$; e X_{k_j} denota uma matriz B_{k_j} ou C_{k_j} . É interessante observar que enquanto as relações algébricas (2.71) somente relacionam dois produtos de duas matrizes, as relações (2.80) relacionam o produto de n matrizes.

O *ansatz* do produto matricial (2.52) funcionará somente se todas as amplitudes da auto-função (2.50) forem unicamente relacionadas. De fato, as relações algébricas (2.69), (2.71) e (2.80) permitem mostrar que qualquer amplitude dada pelo *ansatz* (2.52) é proporcional ao produto de matrizes $B_{k_1} \cdots B_{k_n} E^{L-n}$. Os parâmetros espectrais k_1, \dots, k_n são fixos ao impor a compatibilidade das relações algébricas (2.71) e (2.80). Para qualquer $j = 1, \dots, n$ temos:

$$\begin{aligned}
& B_{k_1} \cdots B_{k_j} \cdots B_{k_n} \quad (2.81) \\
& = \left[\prod_{l=j+1}^n \frac{a(k_j, k_l)}{a(k_l, k_j)} \right] \frac{\beta(k_j)}{\beta(-k_j)} e^{-2ik_j[(n-1)(1-s)-1]} B_{k_1} \cdots B_{k_{j-1}} B_{k_{j+1}} \cdots B_{k_n} C_{k_j} \\
& = e^{-2ik_j(n-1)(1-s)} \frac{\alpha(k_j)\beta(k_j)}{\alpha(-k_j)\beta(-k_j)} \prod_{l=1, l \neq j}^n \frac{a(k_j, k_l)a(k_l, -k_j)}{a(k_l, k_j)a(-k_j, k_l)} B_{k_1} \cdots B_{k_j} \cdots B_{k_n}
\end{aligned}$$

que dá:

$$\frac{\alpha(k_j)\beta(k_j)}{\alpha(-k_j)\beta(-k_j)} e^{2ik_j(n-1)(s+1)} = \prod_{l=1, l \neq j}^n \frac{\mathcal{B}(-k_j, k_l)}{\mathcal{B}(k_j, k_l)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.82)$$

Os auto-valores são dados pela (2.70) com os parâmetros espectrais obtidos pelas soluções de (2.82). As equações (2.70) e (2.82) para $s = 1$ coincidem com o resultado derivado em [54], através do *ansatz* de Bethe coordenada.

Capítulo 3

Modelos de Spin 1

3.1 Modelos de spin 1 com uma lei de conservação

Apresentamos nesta seção o *ansatz* do produto matricial apropriado para modelos de spin 1 com uma única lei de conservação global, como a rede do XXZ do capítulo anterior. Modelos integráveis dessa categoria são a cadeia quântica de Fateev-Zamolodchikov [55], o modelo Izergin-Korepin [56], e o modelo de spin 1 introduzido em [57].

Resolveremos o modelo mais geral de spin 1 com simetria $U(1)$ e interação de vizinhos próximos. Ao invés de escrever este modelo geral em termos de matrizes de Pauli para spin 1, é mais conveniente escrever o Hamiltoniano deste modelo em termos de matrizes de Weyl $E^{l,m}$ ($l, m = 0, 1, 2$) de dimensão 3×3 e com elementos i, j dados por $(E^{l,m})_{i,j} = \delta_{l,i} \delta_{m,j}$. Em cada sítio podemos ter zero partículas ($s_z = -1$), uma partícula ($s_z = 0$), ou duas partículas ($s_z = 1$). O

Hamiltoniano geral, que conserva o número de partículas, é dado por:

$$H_{s=1}^{U(1)} = - \sum_{i=1}^L h_{i,i+1} + L\Gamma_{00}^{00},$$

$$h_{i,i+1} = \sum_{k,l,m,n=0}^2 \Gamma_{m\ n}^{k\ l} E_i^{m,k} E_{i+1}^{n,l} \quad (i = 1, \dots, L) \quad (3.1)$$

onde estamos assumindo a condição periódica de contorno, e temos $\Gamma_{m\ n}^{k\ l} = 0$ se $k + l \neq m + n$ que reflete a conservação do número total de partículas.

O número total de partículas n ($0, 1, \dots, 2L$) e o momentum P ($\frac{2\pi l}{L}$, $l = 0, \dots, L - 1$) são bons números quânticos para o Hamiltoniano (3.1). As auto-funções nesses auto-setores são dadas por:

$$|\Psi_{n,P}\rangle = \sum_{\{x_1, \dots, x_n\}}^* f(x_1, \dots, x_n) |x_1, \dots, x_n\rangle \quad (3.2)$$

onde (x_1, \dots, x_n) são as coordenadas das partículas e o símbolo (*) significa restrição sobre os conjuntos de coordenadas com $\{x_{i+1} \geq x_i, x_{i+2} > x_i\}$.

3.1.1 O *ansatz* do produto matricial

Para formular um *ansatz* de produto matricial apropriado para (3.1) associamos, como no capítulo anterior, as matrizes E e A para sítios vazios ($s_z = -1$), e sítios ocupados por uma única partícula ($s_z = 0$); respectivamente. Os sítios com ocupação dupla de partículas ($s_z = 1$) são associados à matriz $BE^{-1}B$. Certamente, o Hamiltoniano (3.1) não é exatamente integrável para valores arbitrários de $\{\Gamma_{m\ n}^{k\ l}\}$. O *ansatz* proposto assume, no ramo exatamente integrável de (3.1), que qualquer auto-função $|\Psi_{n,P}\rangle$, no setor com n partículas e momentum P , terá suas componentes dadas em termos de traços de produtos de matrizes.

As amplitudes correspondentes às configurações onde não existe ocupação

dupla são dadas por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} [E^{x_1-1} A E^{x_2-x_1-1} A \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A E^{L-x_n} \Omega_P] \quad (3.3)$$

enquanto, se existe uma ocupação dupla na posição $x_{i+1} = x_i$, temos:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \text{Tr} [E^{x_1-1} A \dots E^{x_i-x_{i-1}-1} B E^{-1} B E^{x_{i+2}-x_i-1} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A E^{L-x_n} \Omega_P]. \quad (3.4)$$

Como no capítulo anterior, a matriz Ω_P e o traço são introduzidos para fixar o momentum $P = \frac{2\pi}{L}l$, ($l = 0, 1, \dots, L-1$) de $|\Psi_{n,P}\rangle$, o que implica nas imposições (veja (2.8)):

$$E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E, \quad A\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P A, \quad B\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P B. \quad (3.5)$$

As relações algébricas entre as matrizes E , A e B são obtidas impondo-se que (3.1) com o *ansatz* (3.2)-(3.4), são soluções da equação de auto-valor:

$$H_{s=1}^{U(1)} |\Psi_{n,P}\rangle = \varepsilon_n |\Psi_{n,P}\rangle. \quad (3.6)$$

3.1.2 Resolução do modelo

Vamos considerar inicialmente os casos com um número pequeno de partículas.

$n = 1$. A equação de auto-valor fornece para as amplitudes com uma única partícula na posição $x_1 = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \text{Tr} [E^{x_1-1} A E^{L-x_1} \Omega_P] &= -\Gamma_{01}^{10} \text{Tr} [E^{x_1-2} A E^{L-x_1+1} \Omega_P] \\ &- \Gamma_{10}^{01} \text{Tr} [E^{x_1} A E^{L-x_1-1} \Omega_P] + (2\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{10}^{10} - \Gamma_{01}^{01}) \text{Tr} [E^{x_1-1} A E^{L-x_1} \Omega_P]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como no capítulo anterior, uma solução conveniente é obtida introduzindo-se a matriz A_k dependente de um parâmetro espectral:

$$A = A_k E \quad \text{com} \quad E A_k = e^{ik} A_k E. \quad (3.8)$$

Inserindo (3.8) em (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = \varepsilon(k) &= - \left(\Gamma_{01}^{10} e^{-ik} + \Gamma_{10}^{01} e^{ik} - 2\Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{10}^{10} + \Gamma_{01}^{01} \right), \\ P = k &= \frac{2\pi l}{L} \quad (l = 0, \dots, L-1).\end{aligned}\quad (3.9)$$

$n = 2$. Neste caso a equação de auto-valor (3.5) produz relações distintas se (a) $x_2 > x_1 + 1$, (b) $x_2 = x_1 + 1$ ou (c) $x_2 = x_1$. As relações vindas de amplitudes onde as partículas não estão na posição de "colisão" $x_2 = x_1 + 1$ ou $x_2 = x_1$ ((b) ou (c)) são justamente uma generalização direta de (3.7) para duas partículas, e cuja solução é obtida identificando-se a matriz A como composta por duas matrizes dependentes de parâmetros espectrais A_{k_1}, A_{k_2} , isto é:

$$A = \sum_{j=1}^n A_{k_j} E, \quad (3.10)$$

satisfazendo as relações de comutação:

$$EA_{k_j} = e^{ik_j} A_{k_j} E, \quad (A_{k_j})^2 = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.11)$$

A energia e o momentum são dados por:

$$\varepsilon_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon(k_j) \quad \text{e} \quad P = \sum_{j=1}^n k_j, \quad (3.12)$$

com $\varepsilon(k)$ dado pela (3.9). A equação de auto-valor (3.6) fornece para as componentes $f(x_1, x_1 + 1)$ a equação

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \text{Tr} [E^{x_1-1} A A E^{L-x_1-1} \Omega_P] &= \\ &- \Gamma_{01}^{10} \text{Tr} [E^{x_1-2} A E A E^{L-x_1-1} \Omega_P] - \Gamma_{10}^{01} \text{Tr} [E^{x_1-1} A E A E^{L-x_1-2} \Omega_P] \\ &- \Gamma_{11}^{20} \text{Tr} [E^{x_1-1} B E^{-1} B E^{L-x_1} \Omega_P] - \Gamma_{11}^{02} \text{Tr} [E^{x_1} B E^{-1} B E^{L-x_1-1} \Omega_P] \\ &+ (3\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{10}^{10} - \Gamma_{01}^{01} - \Gamma_{11}^{11}) \text{Tr} [E^{x_1-1} A A E^{L-x_1-1} \Omega_P],\end{aligned}\quad (3.13)$$

enquanto as componentes $f(x_1, x_1)$ dão:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 \text{Tr} [E^{x_1-1} B E^{-1} B E^{L-x_1} \Omega_P] = & \quad (3.14) \\
& -\Gamma_{02}^{11} \text{Tr} [E^{x_1-2} A A E^{L-x_1} \Omega_P] - \Gamma_{20}^{11} \text{Tr} [E^{x_1-1} A A E^{L-x_1-1} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{02}^{20} \text{Tr} [E^{x_1-2} B E^{-1} B E^{L-x_1+1} \Omega_P] - \Gamma_{20}^{02} \text{Tr} [E^{x_1} B E^{-1} B E^{L-x_1-1} \Omega_P] \\
& + (2\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{20}^{20} - \Gamma_{02}^{02}) \text{Tr} [E^{x_1-1} B E^{-1} B E^{L-x_1} \Omega_P].
\end{aligned}$$

Ambas as equações (3.13) e (3.14) podem ser resolvidas usando (3.10) e escrevendo a matriz B também como uma combinação de duas matrizes dependentes de parâmetros espectrais B_{k_1}, B_{k_2} , isto é:

$$B = \sum_{j=1}^n B_{k_j} E \quad \text{com} \quad E B_{k_j} = e^{ik_j} B_{k_j} E, \quad (B_{k_j})^2 = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.15)$$

Nota-se que as matrizes A_{k_j} e B_{k_j} têm o mesmo conjunto $\{k_1, k_2\}$ de parâmetros espectrais complexos. Inserindo (3.10)-(3.12) e (3.15) em (3.13) e (3.14), obtemos:

$$\sum_{j,l=1}^n N(k_j, k_l) \text{Tr} [E^{x_1} A_{k_j} A_{k_l} E^{L-x_1} \Omega_P] = \sum_{j,l=1}^n C_1(k_j, k_l) \text{Tr} [E^{x_1} B_{k_j} B_{k_l} E^{L-x_1} \Omega_P] \quad (3.16)$$

e

$$\sum_{j,l=1}^n C_0(k_j, k_l) \text{Tr} [E^{x_1} B_{k_j} B_{k_l} E^{L-x_1} \Omega_P] = \sum_{j,l=1}^n C_2(k_j, k_l) e^{ik_l} \text{Tr} [E^{x_1} A_{k_j} A_{k_l} E^{L-x_1} \Omega_P] \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned}
N(k_j, k_l) &= \Gamma_{01}^{10} + (\Gamma_{10}^{10} + \Gamma_{01}^{01} - \Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{11}^{11}) e^{ik_l} + \Gamma_{10}^{01} e^{i(k_j+k_l)} \\
C_1(k_j, k_l) &= \Gamma_{11}^{20} + \Gamma_{11}^{02} e^{i(k_j+k_l)} \\
C_0(k_j, k_l) &= \Gamma_{01}^{10} (e^{ik_l} + e^{ik_j}) + \Gamma_{10}^{01} (e^{ik_l} + e^{ik_j}) e^{i(k_l+k_j)} \\
&+ (2\Gamma_{10}^{10} + 2\Gamma_{01}^{01} - \Gamma_{20}^{20} - \Gamma_{02}^{02} - 2\Gamma_{00}^{00}) e^{i(k_j+k_l)} - \Gamma_{02}^{20} - \Gamma_{20}^{02} e^{i2(k_j+k_l)} \\
C_2(k_j, k_l) &= \Gamma_{02}^{11} + \Gamma_{20}^{11} e^{i(k_j+k_l)}. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

As relações (3.16) e (3.17) implicam

$$N(k_j, k_l)A_{k_j}A_{k_l} + N(k_l, k_j)A_{k_l}A_{k_j} = C_1(k_j, k_l) (B_{k_j}B_{k_l} + B_{k_l}B_{k_j}) \quad (3.19)$$

e

$$C_0(k_j, k_l) (B_{k_j}B_{k_l} + B_{k_l}B_{k_j}) = C_2(k_j, k_l) (e^{ik_l}A_{k_j}A_{k_l} + e^{ik_j}A_{k_l}A_{k_j}), \quad (3.20)$$

com $k, l = 1, \dots, n$. Multiplicando (3.20) pela função simétrica $C_1(k_j, k_l)$, e usando (3.19), a última equação dá a relação:

$$A_{k_j}A_{k_l} = S(k_j, k_l)A_{k_l}A_{k_j} \quad (j \neq l), \quad (3.21)$$

$$S(k_j, k_l) = -\frac{C_0(k_j, k_l)N(k_l, k_j) - C_1(k_j, k_l)C_2(k_j, k_l)e^{ik_j}}{C_0(k_j, k_l)N(k_j, k_l) - C_1(k_j, k_l)C_2(k_j, k_l)e^{ik_l}}; \quad j, l = 1, 2.$$

Os parâmetros espectrais k_1 e k_2 são fixados pela propriedade cíclica do traço, definindo as amplitudes (3.3) e (3.4).

O uso da (3.19) permite substituir, em qualquer amplitude, as matrizes $\{B_k\}$ pelas matrizes $\{A_k\}$ devido ao fato de que a matriz B só aparecem na combinação:

$$BE^{-1}B = \left(\sum_{j,l=1}^n B_{k_j}B_{k_l} \right) E. \quad (3.22)$$

Então, uma amplitude arbitrária deve ser proporcional a $\text{Tr} [A_{k_l}A_{k_j}E^L\Omega_P]$. A propriedade cíclica do traço e as relações de comutação (3.5), (3.11) e (3.21) dão:

$$e^{ik_jL} = S(k_j, k_l) \quad (j \neq l = 1, 2), \quad (3.23)$$

com $S(k_j, k_l)$ dado pela (3.21). É interessante mencionar que obtemos para $n = 2$ partículas a integrabilidade para valores arbitrários de acoplamentos $\Gamma_{m n}^{k l}$ do Hamiltoniano (3.1). Certamente este não será o caso para $n > 2$ partículas.

$n = 3$. Neste caso temos vários tipos distintos de relações para as amplitudes $f(x_1, x_2, x_3)$ em (3.3) e (3.4). A equação de auto-valor quando aplicada em amplitudes onde não temos partículas na posição de "colisão", isto é.,

$x_3 > x_2 + 1 > x_1 + 2$ fornece a generalização direta de (3.7), para três partículas; e cuja solução é obtida identificando, como em (3.10), a matriz A como composta por três matrizes dependentes de parâmetros espectrais $A_{k_1}, A_{k_2}, A_{k_3}$. A energia e o momentum são dados pela (3.12) com $n = 3$. As componentes $f(x_1, x_2 = x_1, x_3)$, $f(x_1, x_2 = x_1 + 1, x_3)$ com $x_3 > x_2 + 1$ e $f(x_1, x_2, x_3 = x_2)$, $f(x_1, x_2, x_3 = x_2 + 1)$ com $x_1 < x_2 - 1$ dão generalizações de (3.19) e (3.20), para $n = 3$. Temos ainda novas relações quando a equação de auto-valor é aplicada em amplitudes correspondentes às três partículas na posição de colisão. Isto acontece para $f(x, x, x + 1)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3 \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B A E^{L-x-1} \Omega_P] = & \\
& -\Gamma_{02}^{11} \text{Tr} [E^{x-2} A A A E^{L-x-1} \Omega_P] - \Gamma_{10}^{01} \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B E A E^{L-x-2} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{02}^{20} \text{Tr} [E^{x-2} B E^{-1} B E A E^{L-x-1} \Omega_P] - \Gamma_{21}^{12} \text{Tr} [E^{x-1} A B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P] \\
& + (3\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{02}^{02} - \Gamma_{21}^{21} - \Gamma_{10}^{10}) \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B A E^{L-x-1} \Omega_P], \tag{3.24}
\end{aligned}$$

e para amplitudes $f(x, x + 1, x + 1)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3 \text{Tr} [E^{x-1} A B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P] = & \\
& -\Gamma_{20}^{11} \text{Tr} [E^{x-1} A A A E^{L-x-2} \Omega_P] - \Gamma_{01}^{10} \text{Tr} [E^{x-2} A E B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{20}^{02} \text{Tr} [E^{x-1} A E B E^{-1} B E^{L-x-2} \Omega_P] - \Gamma_{12}^{21} \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B A E^{L-x-1} \Omega_P] \\
& + (3\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{20}^{20} - \Gamma_{12}^{12} - \Gamma_{01}^{01}) \text{Tr} [E^{x-1} A B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P]. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Inserindo (3.10), (3.12) e (3.15) com $n = 3$ em (3.24) e (3.25), obtemos novas relações algébricas relacionando as três matrizes dependentes de parâmetros es-

pectrais. Usando (3.19) e (3.20) para simplificar estas expressões, obtemos:

$$\sum_{q,r,s=1}^3 (D_1(k_q, k_r, k_s) B_{k_q} B_{k_r} A_{k_s} + \Gamma_{20}^{11} e^{i(k_r+k_s)} A_{k_q} A_{k_r} A_{k_s} - \Gamma_{21}^{12} e^{i(k_r+k_s)} A_{k_q} B_{k_r} B_{k_s}) = 0, \quad (3.26)$$

$$\sum_{q,r,s=1}^3 (D_2(k_q, k_r, k_s) A_{k_q} B_{k_r} B_{k_s} + \Gamma_{02}^{11} e^{ik_s} A_{k_q} A_{k_r} A_{k_s} - \Gamma_{12}^{21} e^{ik_s} A_{k_q} B_{k_r} B_{k_s}) = 0, \quad (3.27)$$

onde

$$D_1(k_1, k_2, k_3) = \Gamma_{01}^{10} + e^{i(k_1+k_2+k_3)} \Gamma_{20}^{02} - e^{ik_3} (\Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{21}^{21} - \Gamma_{01}^{01} - \Gamma_{20}^{20}), \quad (3.28)$$

$$D_2(k_1, k_2, k_3) = \Gamma_{02}^{20} + e^{i(k_1+k_2+k_3)} \Gamma_{10}^{01} - e^{i(k_2+k_3)} (\Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{12}^{12} - \Gamma_{10}^{10} - \Gamma_{02}^{02}).$$

Diferente do caso $n = 2$, as novas relações (3.26) e (3.27) não são em geral consistentes com as relações (3.19) e (3.20). Isto restringe a integrabilidade do Hamiltoniano (3.1) para ramos especiais de constantes de acoplamentos Γ_m^k .

Como no caso $n = 2$, o uso de (3.22), com $n = 3$, implica em que uma amplitude arbitrária de $|\Psi_{3,P}\rangle$ seja proporcional à $\text{Tr} [A_{k_l} A_{k_j} A_{k_m} E^L \Omega_P]$. A propriedade cíclica do traço junto com as relações algébricas (3.5), (3.11) e (3.21) dão a relação que fixa, os até agora livres, parâmetros espectrais complexos $\{k_1, k_2, k_3\}$, isto é:

$$e^{ik_j L} = - \prod_{l=1}^n S(k_j, k_l), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3.29)$$

com $n = 3$ e $S(k_j, k_l)$ dados pela (3.21).

$n = 4$. As relações vindas das amplitudes com no máximo colisões de três partículas são resolvidas pelas (3.10) e (3.15), com energia e momentum dados pela (3.12). As relações algébricas obtidas são generalizações de (3.19), (3.20), (3.26) e (3.27). Uma nova expressão relacionando o produto de quatro matrizes tem origem em amplitudes $f(x, x, x+1, x+1)$, onde as quatro partículas estão

em posição de colisão:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_4 \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P] &= -\Gamma_{02}^{11} \text{Tr} [E^{x-2} A A B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P] \\
&- \Gamma_{20}^{11} \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B A A E^{L-x-2} \Omega_P] - \Gamma_{02}^{20} \text{Tr} [E^{x-2} B E^{-1} B E B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P] \\
&- \Gamma_{20}^{02} \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B E B E^{-1} B E^{L-x-2} \Omega_P] \\
&+ (3\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{02}^{02} - \Gamma_{20}^{20} - \Gamma_{22}^{22}) \text{Tr} [E^{x-1} B E^{-1} B B E^{-1} B E^{L-x-1} \Omega_P]. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Inserindo (3.10), (3.12) e (3.15) e usando (3.19) e (3.20) nesta última expressão, obtemos a relação algébrica para quatro matrizes dependentes de parâmetros espectrais:

$$\begin{aligned}
\sum_{q,r,s,t=1}^4 (D_4(k_q, k_r, k_s, k_t) B_{k_q} B_{k_r} B_{k_s} B_{k_t} \\
+ \Gamma_{20}^{11} e^{i(k_r+k_s+k_t)} A_{k_q} A_{k_r} B_{k_s} B_{k_t} + \Gamma_{02}^{11} e^{ik_t} B_{k_q} B_{k_r} A_{k_s} A_{k_t}) = 0, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

onde

$$D_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \Gamma_{02}^{20} + \Gamma_{20}^{02} e^{i(k_1+k_2+k_3+k_4)} - (\Gamma_{22}^{22} + \Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{02}^{02} - \Gamma_{20}^{20}) e^{i(k_3+k_4)}. \quad (3.32)$$

Esta relação impõe, juntamente com a (3.26) e (3.27), mais restrições para as constantes de acoplamento Γ_{mn}^{kl} do Hamiltoniano geral (3.1). Os parâmetros espectrais (k_1, \dots, k_4) , como no caso prévio, são fixados pela propriedade cíclica do traço, e são dados por (3.29) com $n = 4$.

n geral > 4. Todas as amplitudes produzem relações que são resolvidas pelas matrizes dependentes de parâmetros espectrais introduzidas em (3.10) e (3.15). Essas matrizes $\{A_{k_j}\}$ e $\{B_{k_j}\}$ ($j = 1, \dots, n$) devem obedecer o seguinte conjunto de relações algébricas:

$$(A_{k_j})^2 = (B_{k_j})^2 = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3.33)$$

$$\sum_{p^{(2)}} N(k_{p_1}, k_{p_2}) A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}} = \sum_{p^{(2)}} C_1(k_{p_1}, k_{p_2}) B_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}}, \quad (3.34)$$

$$\sum_{p^{(2)}} C_0(k_{p_1}, k_{p_2}) B_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}} = \sum_{p^{(2)}} C_2(k_{p_1}, k_{p_2}) e^{ik_{p_1}} A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}}, \quad (3.35)$$

$$\sum_{p^{(3)}} (D_1(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}) B_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}} A_{k_{p_3}} + \Gamma_{20}^{11} e^{i(k_{p_2}+k_{p_3})} A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}} A_{k_{p_3}} - \Gamma_{21}^{12} e^{i(k_{p_2}+k_{p_3})} A_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}} B_{k_{p_3}}) = 0, \quad (3.36)$$

$$\sum_{p^{(3)}} (D_2(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}) A_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}} B_{k_{p_3}} + \Gamma_{02}^{11} e^{ik_{p_3}} A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}} A_{k_{p_3}} - \Gamma_{21}^{12} e^{ik_{p_3}} A_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}} B_{k_{p_3}}) = 0, \quad (3.37)$$

$$\sum_{p^{(4)}} (D_4(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}, k_{p_4}) B_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}} B_{k_{p_3}} B_{k_{p_4}} + \Gamma_{20}^{11} e^{i(k_{p_2}+k_{p_3}+k_{p_4})} A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}} B_{k_{p_3}} B_{k_{p_4}} + \Gamma_{02}^{11} e^{ik_{p_4}} B_{k_{p_1}} B_{k_{p_2}} A_{k_{p_3}} A_{k_{p_4}}) = 0, \quad (3.38)$$

onde nas expressões acima as somas são sobre as permutações $p^{(m)}$ ($m = 2, 3, 4$) $\{p_1, \dots, p_m\}$ de m inteiros distintos (j_1, \dots, j_m) tomados do conjunto $(1, 2, \dots, n)$. Desde que o Hamiltoniano geral (3.1) tem somente interações entre vizinhos próximos, não obtemos novas relações. De fato, somente (3.37)-(3.38) produz vínculos para a integrabilidade de (3.1). Explorando o fato de que $C_1(k, k')$ é simétrica pela troca $k \leftrightarrow k'$, podemos usar (3.34) para eliminar as matrizes $\{B_k\}$ em (3.37)-(3.38):

$$\sum_{p^{(3)}} \{D_1(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}) N(k_{p_1}, k_{p_2}) C_1(k_{p_2}, k_{p_3}) + e^{i(k_{p_2}+k_{p_3})} [\Gamma_{20}^{11} C_1(k_{p_2}, k_{p_3}) - \Gamma_{21}^{12} N(k_{p_2}, k_{p_3})] C_1(k_{p_1}, k_{p_2})\} C_1(k_{p_1}, k_{p_3}) A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}} A_{k_{p_3}} = 0, \quad (3.39)$$

$$\sum_{p^{(3)}} \{D_2(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}) N(k_{p_2}, k_{p_3}) C_1(k_{p_1}, k_{p_2}) + e^{ik_{p_3}} [\Gamma_{02}^{11} C_1(k_{p_1}, k_{p_2}) - \Gamma_{12}^{21} N(k_{p_1}, k_{p_2})]\} C_1(k_{p_2}, k_{p_2}) C_1(k_{p_1}, k_{p_3}) A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}} A_{k_{p_3}} = 0, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p^{(4)}} \{ D_4(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}, k_{p_4}) N(k_{p_1}, k_{p_2}) N(k_{p_3}, k_{p_4}) + \\
& \quad \Gamma_{20}^{11} e^{i(k_{p_2} + k_{p_3} + k_{p_4})} C_1(k_{p_1}, k_{p_2}) N(k_{p_3}, k_{p_4}) + \Gamma_{02}^{11} e^{ik_{p_4}} N(k_{p_1}, k_{p_2}) C_1(k_{p_3}, k_{p_4}) \} \\
& \quad \times C_1(k_{p_1}, k_{p_3}) C_1(k_{p_1}, k_{p_4}) C_1(k_{p_2}, k_{p_3}) C_1(k_{p_2}, k_{p_4}) A_{k_{p_1}} A_{k_{p_2}} A_{k_{p_3}} A_{k_{p_4}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

As relações acima devem ser consistentes com as relações de comutação

$$A_{k_j} A_{k_l} = S(k_j, k_l) A_{k_l} A_{k_j} \quad (j \neq l), \quad (A_{k_j})^2 = 0 \quad (j, l = 1, 2, \dots, n), \tag{3.42}$$

para quaisquer valores de $k_j \in C$ ($j = 1, \dots, 4$). O uso de (3.42) em (3.40)-(3.42) possibilita expressar o lado esquerdo como um polinômio nas variáveis $e^{ik_{p_j}}$ ($j = 1, \dots, 4$). Uma condição suficiente de integrabilidade é obtida requerendo que todos os coeficientes desse polinômio sejam zero.

Embora neste trabalho não estejamos interessados em considerar o problema de encontrar todas as possíveis soluções de (3.40)-(3.42) com (3.42), verificamos que todas as redes conhecidas de spin 1 exatamente integráveis com uma lei de conservação, são soluções dessas equações; definindo de forma apropriada uma álgebra associativa. Estes são os casos dos seguintes modelos: o modelo Fateev-Zamolodchikov [55], onde:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{00}^{00} = \Gamma_{22}^{22} = 0, \quad \Gamma_{01}^{01} = \Gamma_{21}^{21} = \Gamma_{02}^{20} = \Gamma_{20}^{02} = -1, \quad \Gamma_{01}^{10} = \Gamma_{10}^{01} = \Gamma_{12}^{21} = \Gamma_{21}^{12} = 1, \\
& \Gamma_{02}^{11} = \Gamma_{11}^{02} = \Gamma_{11}^{20} = \Gamma_{20}^{11} = 2 \cos(\gamma), \quad \Gamma_{02}^{02} = \Gamma_{20}^{20} = -3 + 4 \sin^2(\gamma), \\
& \Gamma_{10}^{10} = \Gamma_{12}^{12} = -1 + 4 \sin^2(\gamma), \quad \Gamma_{11}^{11} = -2 + 4 \sin^2(\gamma),
\end{aligned} \tag{3.43}$$

e γ é um parâmetro livre; o modelo Izergin-Korepin [56], onde:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^{10} = \Gamma_{10}^{01} = \Gamma_{21}^{12} = \Gamma_{12}^{21} = 1, \quad \Gamma_{00}^{00} = \Gamma_{01}^{01} = \Gamma_{10}^{10} = 0, \quad (3.44) \\ \Gamma_{02}^{20} = \Gamma_{20}^{02} = \frac{\cosh(\gamma)}{\cosh(3\gamma)}, \quad \Gamma_{11}^{20} = \Gamma_{20}^{11} = \frac{\cosh(2\gamma)}{\cosh(3\gamma)} e^{2\gamma}, \quad \Gamma_{02}^{11} = \Gamma_{11}^{02} = -\frac{\cosh(2\gamma)}{\cosh(3\gamma)} e^{-2\gamma}, \\ \Gamma_{11}^{11} = 2 \frac{\cosh(\gamma) \cosh(2\gamma)}{\cosh(3\gamma)}, \quad \Gamma_{02}^{02} = \Gamma_{20}^{20} = \Gamma_{02}^{02} + 2\Gamma_{11}^{11} \sinh^2(\gamma), \\ \Gamma_{12}^{12} = \Gamma_{02}^{02} + \Gamma_{02}^{20} e^{-4\gamma}, \quad \Gamma_{21}^{21} = \Gamma_{02}^{02} + \Gamma_{02}^{20} e^{4\gamma}, \quad \Gamma_{22}^{22} = 2(\Gamma_{02}^{02} + \cosh(4\gamma)\Gamma_{02}^{20}), \end{aligned}$$

e γ é também um parâmetro livre; e o Hamiltoniano de spin 1 introduzido em [57], onde:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^{00} = \Gamma_{01}^{01} = \Gamma_{10}^{10} = 0, \quad \Gamma_{01}^{10} = \Gamma_{10}^{01} = -1, \quad \Gamma_{02}^{20} = \Gamma_{20}^{02} = -t, \quad \Gamma_{12}^{21} = \Gamma_{21}^{12} = -\varepsilon, \\ \Gamma_{11}^{11} = \varepsilon t, \quad \Gamma_{22}^{22} = -\frac{2-\varepsilon}{t}, \quad \Gamma_{11}^{20} = \Gamma_{20}^{11} = -e^{i\frac{\pi}{3}} \sqrt{t^2-1}, \\ \Gamma_{02}^{11} = \Gamma_{11}^{02} = \varepsilon e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt{t^2-1}, \quad \Gamma_{12}^{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2-\varepsilon}{t} - i\varepsilon\sqrt{3t} \right), \quad (3.45) \\ \Gamma_{21}^{21} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2-\varepsilon}{t} + i\varepsilon\sqrt{3t} \right), \quad \Gamma_{02}^{02} = \Gamma_{20}^{20} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2-\varepsilon}{t} + \varepsilon t \right), \end{aligned}$$

com $\varepsilon = \pm 1$ e t sendo parâmetros livres. Em todos esses casos as auto-energias e os momenta são dados pela (3.12), com $\{k_j\}$ dado pela (3.29), e com a matriz $S(k_j, k_l)$ apropriada dada pela (3.21); em concordância com as soluções do Bethe-ansatz desses modelos. Concluindo esta seção, mencionamos que de maneira análoga a generalização do XXZ apresentada no capítulo 2, podemos fazer uma generalização direta dos modelos (3.43)-(3.46), onde as partículas com spin 1 e spin 0 (base s^z) têm um tamanho efetivo s (1,2,...), diferentemente das partículas de tamanho 1 e com spin -1 . A escolha das matrizes como em (2.36), isto é:

$$A^{(s)} = \sum_{j=1}^n A_{k_j}^{(s)} E^{2-s}, \quad B^{(s)} = \sum_{j=1}^n B_{k_j}^{(s)} E^{2-s}, \quad (3.46)$$

dará as mesmas relações derivadas previamente, com a exceção de que os parâ-

metros espectrais ao invés de serem fixados pela (3.29), serão agora dados por:

$$e^{ik_j L} = \prod_{l=1, l \neq j}^n \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s-1} S(k_j, k_l), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.47)$$

3.2 Modelos de spin 1 com duas leis de conservação

Nesta seção formularemos nosso *ansatz* de produto matricial para modelos que descrevem a dinâmica de dois tipos de partículas na rede, onde o número total de partículas de cada tipo é conservado separadamente. Modelos integráveis dessa categoria são as cadeias de spin 1, como o modelo anisotrópico de Sutherland [58], ou como o modelo Perk-Schultz [59], ou como o modelo t-J [12], ou ainda como o Hamiltoniano estocástico, que surge do problema de difusão assimétrica de partículas hierarquicamente ordenadas [63].

Similarmente ao que fizemos no capítulo 2, para o modelo XXZ generalizado, a fim de ilustrar a versatilidade do nosso *ansatz* do produto matricial, vamos derivar a extensão dos modelos do parágrafo anterior, para o caso onde dois tipos de partículas (tipos 1 e 2, ou $s_z = 1$ e $s_z = 0$ na representação de spin do modelo) tenham interações de exclusão arbitrárias. Partículas da espécie 1 (2) têm um tamanho efetivo s_1 (s_2), que exclui a presença de partículas nos $s_1 - 1$ ($s_2 - 1$) sítios à sua direita, onde $s_1, s_2 = 1, 2, \dots$. Os modelos integráveis mencionados acima correspondem ao caso particular onde $s_1 = s_2 = 1$.

Vamos associar a cada sítio $i = 1, 2, \dots, L$ da rede, uma variável Q_i que assume o valor $Q_i = 0$, se o sítio está vazio; ou os valores $Q_i = 1$, $Q_i = 2$ se o sítio está ocupado por uma partícula dos tipos 1 (tamanho s_1) ou 2 (tamanho

s_2), respectivamente. O Hamiltoniano geral considerado tem simetria $U(1) \otimes U(1)$ e governa as flutuações das configurações $\{Q_1, \dots, Q_L\}$ em um anel de perímetro L :

$$\begin{aligned}
 H_{s_1, s_2}^{U(1) \otimes U(1)} &= - \sum_{j=1}^L H_j + L \Gamma_{00}^{00} \\
 H_j &= \mathcal{P} \left[\sum_{\alpha=1}^2 (\Gamma_{0\alpha}^{\alpha 0} E_j^{0,\alpha} E_{j+1}^{\alpha,0} + \Gamma_{\alpha 0}^{0\alpha} E_j^{\alpha,0} E_{j+1}^{0,\alpha}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha\beta} E_j^{\beta,\alpha} E_{j+s_\beta}^{\alpha,0} E_{j+s_\alpha}^{0,\beta} + \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} E_j^{\alpha,\alpha} E_{j+s_\alpha}^{\beta,\beta} \right] \mathcal{P}, \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

onde $E^{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) são as usuais matrizes de Weyl já definidas anteriormente; e Γ_{no}^{lm} são as constantes de acoplamento. O projetor \mathcal{P} em (3.48) projeta para fora do espaço das configurações as configurações nas quais as partículas ocupam posições proibidas devido aos seus tamanhos. A última soma em (3.48) é devida às interações “estáticas”, enquanto a primeira e segunda somas são os termos “cinéticos”, representando o movimento e a troca de posição entre as partículas, respectivamente. A simetria $U(1) \otimes U(1)$ juntamente com a condição periódica de contorno (3.48) implicam que o número total de partículas $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$ nas classes 1 e 2, e o momentum $P = \frac{2\pi l}{L}$ ($l = 0, 1, \dots, L-1$), são bons números quânticos.

3.2.1 O *ansatz* do produto matricial

Vamos formular o *ansatz* do produto matricial para os auto-vetores $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$ da equação de auto-valor

$$H_{s_1, s_2}^{U(1) \otimes U(1)} |\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle = \varepsilon_{n_1, n_2} |\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle \quad (3.49)$$

relativa ao auto-setor assinalado por (n_1, n_2, P) . Esses auto-vetores são dados por

$$|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle = \sum_{\{Q\}} \sum_{\{x\}} f(x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n) |x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n\rangle, \quad (3.50)$$

onde os kets $|x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n\rangle$ denotam as configurações com partículas do tipo Q_i ($Q_i = 1, 2$), localizadas nas posições x_i ($x_i = 1, \dots, L$). O número total de partículas é $n = n_1 + n_2$. A soma em $\{Q\} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ estende-se sobre todas as permutações desses n números $\{1, 2\}$ em que n_1 termos têm o valor 1 e n_2 o valor 2, enquanto a soma em $\{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ estende, para cada permutação $\{Q\}$, no conjunto crescente de inteiros, satisfazendo

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\geq x_i + s_{Q_i} = 1, \dots, n-1 \\ s_{Q_1} &\leq x_n - x_1 \leq L - s_{Q_n}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

O *ansatz* do produto matricial proposto assume, no ramo exatamente integrável, que as amplitudes de uma auto-função arbitrária (3.50) serão dadas em termos do traço de um produto de matrizes

$$\begin{aligned} f(x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n) &= \quad (3.52) \\ \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-1} Y^{(Q_2)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} Y^{(Q_n)} E^{L-x_n} \Omega_P]. \end{aligned}$$

As matrizes $Y^{(Q)}$ são associadas a partículas do tipo Q ($Q=1,2$). Como na seção anterior, a matriz E é associada a sítios vazios e a matriz Ω_P satisfaz

$$E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E, \quad Y^{(Q)}\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P Y^{(Q)} \quad (Q = 1, 2) \quad (3.53)$$

dando (veja (2.8)) o momentum $P = \frac{2\pi}{L}l$ ($l = 0, 1, \dots, L-1$) do auto-vetor.

3.2.2 Resolução do modelo

Vamos considerar inicialmente os casos simples de $n = 1$ e $n = 2$.

$\mathbf{n} = 1$. Temos equações distintas dependendo do tipo de partícula $Q = 1, 2$.

A equação de auto-valor (3.49) dá

$$\varepsilon^{(Q)} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q)} E^{L-x} \Omega_P] = -\Gamma_{0Q}^{Q0} \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(Q)} E^{L-x+1} \Omega_P] \quad (3.54)$$

$$-\Gamma_{Q0}^{0Q} \text{Tr} [E^x Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P] + \left(2\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{0Q}^{0Q} - \Gamma_{Q0}^{Q0} \right) \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q)} E^{L-x} \Omega_P],$$

onde $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_{1,0}$, $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{0,1}$ são os auto-valores. Como na seção anterior, uma solução conveniente é obtida introduzindo as matrizes dependentes de parâmetros espectrais

$$Y^{(Q)} = Y_k^{(Q)} E^{2-s_Q} \quad (Q = 1, 2), \quad (3.55)$$

com $k \in C$, que satisfaz as relações de comutação com a matriz E

$$E Y_k^{(Q)} = e^{ik} Y_k^{(Q)} E \quad (Q = 1, 2). \quad (3.56)$$

Inserindo (3.55) e (3.56) em (3.54), obtemos:

$$\varepsilon^{(Q)}(k) = - \left(\Gamma_{0Q}^{Q0} e^{-ik} + \Gamma_{Q0}^{0Q} e^{ik} - 2\Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{0Q}^{0Q} + \Gamma_{Q0}^{Q0} \right) \quad (Q = 1, 2)$$

$$P = k = \frac{2\pi}{L} l \quad (l = 0, 1, \dots, L-1). \quad (3.57)$$

$\mathbf{n} = 2$. Para duas partículas dos tipos Q_1 e Q_2 ($Q_1, Q_2 = 1, 2$) na rede temos dois tipos de relações. O equação de auto-valor para as componentes, onde as partículas de classe Q_1 e Q_2 estão nas posições (x_1, x_2) com $x_2 > x_1 + s_{Q_1}$, dão

generalizações da (3.55)

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(Q_1, Q_2)} \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P] = & \quad (3.58) \\
& -\Gamma_{0 Q_1}^{Q_1 0} \text{Tr} [E^{x_1-2} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{Q_1 0}^0 \text{Tr} [E^{x_1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-2} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{0 Q_2}^{Q_2 0} \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-2} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2+1} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{Q_2 0}^0 \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2-1} \Omega_P] \\
& + \left(4\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{0 Q_1}^0 - \Gamma_{Q_1 0}^{Q_1 0} - \Gamma_{0 Q_2}^0 - \Gamma_{Q_2 0}^{Q_2 0} \right) \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P],
\end{aligned}$$

enquanto as componentes onde as partículas estão na posições de colisão ($x_1 = x$, $x_2 = x_1 + s_{Q_1}$) dão

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(Q_1, Q_2)} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_1)} E^{s_{Q_1}-1} Y^{(Q_2)} E^{L-x-s_{Q_1}} \Omega_P] = & \quad (3.59) \\
& -\Gamma_{0 Q_1}^{Q_1 0} \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(Q_1)} E^{s_{Q_1}} Y^{(Q_2)} E^{L-x-s_{Q_1}} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{Q_2 0}^0 \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_1)} E^{s_{Q_1}} Y^{(Q_2)} E^{L-x-s_{Q_1}-1} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_2)} E^{s_{Q_2}-1} Y^{(Q_1)} E^{L-x-s_{Q_2}} \Omega_P] \\
& + \left(3\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{0 Q_1}^0 - \Gamma_{Q_2 0}^{Q_2 0} - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2} \right) \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_1)} E^{s_{Q_1}-1} Y^{(Q_2)} E^{L-x-s_{Q_1}} \Omega_P].
\end{aligned}$$

Consideremos inicialmente o caso onde as partículas são do mesmo tipo. Neste caso, temos exatamente a mesma situação que consideramos no caso do XXZ no capítulo 2, e a solução de (3.59)-(3.59) é obtida identificando $Y^{(Q)}$ como composta por duas matrizes dependentes de parâmetros espectrais $Y_{k_1}^{(Q)}$ e $Y_{k_2}^{(Q)}$, isto é:

$$Y^{(Q)} = \sum_{j=1}^n Y_{k_j}^{(Q)} E^{2-s_j} \quad \text{com} \quad EY_{k_j}^{(Q)} = e^{ik_j} Y_{k_j}^{(Q)} E, \quad \left(Y_{k_j}^{(Q)} \right)^2 = 0 \quad (Q = 1, 2), \quad (3.60)$$

com $n = 2$. Essa última relação, quando inserida em (3.59) dá a energia e o

momentum em termos dos parâmetros espectrais k_j ($j = 1, 2$)

$$\varepsilon^{(Q,Q)} = \sum_{j=1}^n \varepsilon^{(Q)}(k_j), \quad P = \sum_{j=1}^n k_j, \quad (3.61)$$

onde $n = 2$ e $\varepsilon^{(Q)}(k)$ é dado pela (3.57). Usando (3.60) e (3.61) em (3.59) obtemos as relações:

$$Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q)} = S_{Q Q}^{Q Q}(k_j, k_l) Y_{k_l}^{(Q)} Y_{k_j}^{(Q)} \quad (j \neq l), \quad \left(Y_{k_j}^{(Q)}\right)^2 = 0, \quad (1 \leq j, l \leq n) \quad (3.62)$$

onde

$$S_{Q Q}^{Q Q}(k_j, k_l) = - \frac{\Gamma_{0 Q}^{Q 0} + \Gamma_{Q 0}^{0 Q} e^{i(k_j+k_l)} - \left(\Gamma_{0 0}^{0 0} + \Gamma_{Q Q}^{Q Q} - \Gamma_{Q 0}^{Q 0} - \Gamma_{0 Q}^{0 Q}\right) e^{ik_j}}{\Gamma_{0 Q}^{Q 0} + \Gamma_{Q 0}^{0 Q} e^{i(k_j+k_l)} - \left(\Gamma_{0 0}^{0 0} + \Gamma_{Q Q}^{Q Q} - \Gamma_{Q 0}^{Q 0} - \Gamma_{0 Q}^{0 Q}\right) e^{ik_l}} \quad (Q = 1, 2). \quad (3.63)$$

Vamos considerar agora o caso onde as partículas são de espécies distintas. A distinguibilidade das partículas leva a dois tipos de soluções para (3.59)-(3.59). Temos a solução padrão como em (3.60) (caso a), onde cada uma das matrizes $Y^{(Q)}$ ($Q = 1, 2$) são compostas por duas matrizes dependentes dos mesmos parâmetros espectrais k_1, k_2 (veja (3.60)); ou alternativamente (caso b), podemos considerar uma solução especial onde cada $Y^{(Q)}$ é composta por uma simples matriz dependente de parâmetro espectral, com cada uma tendo um parâmetro espectral distinto, isto é,

$$Y^{(1)} = Y_{k_1}^{(1)} E^{2-s_1}, \quad Y^{(2)} = Y_{k_2}^{(2)} E^{2-s_2} \quad \text{com} \quad E Y_{k_j}^{(j)} = e^{ik_j} Y_{k_j}^{(j)} E \quad (j = 1, 2). \quad (3.64)$$

No caso b (3.59) temos a energia e o momentum como em (3.61), enquanto (3.59) dá duas equações independentes:

$$\left[- \left(\Gamma_{0 Q_2}^{Q_2 0} + \Gamma_{Q_1 0}^{0 Q_1} e^{i(k_1+k_2)} \right) + \left(\Gamma_{0 0}^{0 0} + \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2} - \Gamma_{Q_1 0}^{Q_1 0} - \Gamma_{0 Q_2}^{0 Q_2} \right) e^{ik_{Q_2}} \right] Y_{k_{Q_1}}^{(Q_1)} Y_{k_{Q_2}}^{(Q_2)} + \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} e^{ik_{Q_2}} Y_{k_{Q_2}}^{(Q_2)} Y_{k_{Q_1}}^{(Q_1)} = 0 \quad (Q_1 \neq Q_2 = 1, 2). \quad (3.65)$$

Desde que até este ponto desejamos manter k_1 e k_2 como parâmetros complexos livres, para satisfazer (3.65) é necessário uma escolha especial das constantes de acoplamento Γ_{kl}^{mn} da (3.48), por exemplo¹:

$$\Gamma_{02}^{20} = \Gamma_{10}^{01} = \Gamma_{12}^{21} = 0, \quad \Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{12}^{12} = \Gamma_{10}^{10} + \Gamma_{02}^{02}, \quad (3.66)$$

que dá:

$$\begin{aligned} Y_{k_1}^{(1)} Y_{k_2}^{(2)} &= S_{12}^{12}(k_1, k_2) Y_{k_2}^{(2)} Y_{k_1}^{(1)}, \\ Y_{k_2}^{(2)} Y_{k_1}^{(1)} &= S_{21}^{21}(k_2, k_1) Y_{k_1}^{(1)} Y_{k_2}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde

$$S_{12}^{12}(k_1, k_2) = \frac{1}{S_{21}^{21}(k_2, k_1)} = \frac{\Gamma_{01}^{10} + \Gamma_{20}^{02} e^{i(k_1+k_2)} - (\Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{21}^{21} - \Gamma_{20}^{20} - \Gamma_{01}^{01}) e^{ik_1}}{\Gamma_{21}^{12} e^{ik_1}}. \quad (3.68)$$

Vamos considerar agora o caso a. A solução de (3.59) e (3.59) onde $Y^{(Q)}$ ($Q = 1, 2$) é dada em termos de duas matrizes dependentes de parâmetros espectrais $\{Y_{k_j}^{(Q)}\}$ como em (3.60) é possível somente se essas matrizes satisfazem

$$Y_{k_j}^{(Q_1)} Y_{k_j}^{(Q_2)} = 0 \quad j = 1, 2 \quad (Q_1, Q_2 = 1, 2), \quad (3.69)$$

e o Hamiltoniano (3.48) tem suas constantes de acoplamento restritas a

$$\Gamma_{01}^{10} = \Gamma_{02}^{20}, \quad \Gamma_{10}^{01} = \Gamma_{20}^{02}. \quad (3.70)$$

Com (3.69) e (3.70) a energia e o momentum são dados por

$$\varepsilon^{(Q_1, Q_2)} = \varepsilon^{(Q_1)}(k_1) + \varepsilon^{(Q_2)}(k_2), \quad P = k_1 + k_2, \quad (3.71)$$

¹Outras escolhas equivalentes são obtidas pela troca $1 \leftrightarrow 2$ em (3.66)-(3.68).

respectivamente. Inserindo (3.60) e (3.71) em (3.59) obtemos relações algébricas que podem ser escritas na forma matricial

$$\sum_{l,m=1}^2 \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{l,m} + v_{Q_2,Q_1} e^{ikm} & \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} e^{ikm} \\ \Gamma_{Q_2 Q_1}^{Q_1 Q_2} e^{ikm} & \mathcal{D}_{l,m} + v_{Q_1,Q_2} e^{ikm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{k_l}^{(Q_1)} Y_{k_m}^{(Q_2)} \\ Y_{k_l}^{(Q_2)} Y_{k_m}^{(Q_1)} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.72)$$

onde

$$\mathcal{D}_{l,m} = -\left(\Gamma_{0 Q_1}^{Q_1 0} + \Gamma_{Q_1 0}^{0 Q_1} e^{i(k_l+k_m)} \right), \quad v_{Q_2,Q_1} = \Gamma_{0 0}^{0 0} + \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2} - \Gamma_{Q_1 0}^{Q_1 0} - \Gamma_{0 Q_2}^{0 Q_2} \quad (Q_1, Q_2 = 1, 2). \quad (3.73)$$

Esta última relação pode ser rearranjada diretamente (veja por exemplo [63]), dando ($Q_1 \neq Q_2$)

$$Y_{k_l}^{(Q_1)} Y_{k_m}^{(Q_2)} = S_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(Q_2)} Y_{k_l}^{(Q_1)} + S_{Q_2 Q_1}^{Q_1 Q_2}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(Q_1)} Y_{k_l}^{(Q_2)} \quad (3.74)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{Q_2 Q_1}^{Q_1 Q_2}(k_l, k_m) &= -\left\{ 1 - \frac{e^{ik_l} - e^{k_m}}{\Delta} \left[(\mathcal{D}_{l,m} + v_{Q_1,Q_2} e^{ikm}) v_{Q_2,Q_1} - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} \Gamma_{Q_2 Q_1}^{Q_1 Q_2} e^{ikm} \right] \right\} \\ S_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2}(k_l, k_m) &= -\left\{ 1 - \frac{e^{ik_l} - e^{k_m}}{\Delta} \left[(\mathcal{D}_{l,m} + v_{Q_1,Q_2} e^{ikm}) \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} v_{Q_1,Q_2} e^{ikm} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

e

$$\Delta = (\mathcal{D}_{l,m} + v_{Q_2,Q_1} e^{ikm}) (\mathcal{D}_{l,m} + v_{Q_1,Q_2} e^{ikm}) - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} \Gamma_{Q_2 Q_1}^{Q_1 Q_2} e^{i2km}. \quad (3.76)$$

Em todos esses casos, para $Q_1 = Q_2$ (veja (3.62) e (3.63)); ou $Q_1 \neq Q_2$ no caso b (veja (3.66)-(3.68)); e no caso a (veja (3.74)-(3.76)), a propriedade cíclica do traço do nosso *ansatz* do produto matricial (3.53) fixa os parâmetros espectrais. Ao invés de produzir essas equações para $n = 2$, vamos considerar o caso de valores n gerais.

n geral. Vamos considerar agora o caso de um número arbitrário n_1, n_2 de partículas dos tipos 1 e 2 ($n = n_1 + n_2$). A equação de auto-valor (3.49) quando

aplicada em componentes de auto-funções $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$, onde todas as partículas não estão em posição de colisão, fornece a generalização de (3.55) e (3.59), que podem ser resolvidas por dois caminhos distintos como no caso de $n = 2$. No caso b, onde as constantes de acoplamento satisfazem (3.66), identificamos as matrizes $Y^{(Q)}$ ($Q = 1, 2$) como compostas por matrizes dependentes de parâmetros espectrais

$$Y^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_1} Y_{k_j}^{(1)} E^{2-s_1}, \quad Y^{(2)} = \sum_{j=n_1+1}^n Y_{k_j}^{(2)} E^{2-s_2}, \quad (3.77)$$

onde $Y_{k_j}^{(Q)}$ satisfaz

$$EY_{k_j}^{(Q)} = e^{ik_j} Y_{k_j}^{(Q)} E, \quad \left(Y_{k_j}^{(Q)}\right)^2 = 0, \quad n_{Q-1} < j \leq n_Q + (Q-1)n_{Q-1}, \quad (Q = 1, 2), \quad (3.78)$$

com $n_0 = 0$. Por outro lado, no caso em que as constantes de acoplamento satisfazem (3.70), as matrizes $Y^{(Q)}$ são dadas por:

$$Y^{(Q)} = \sum_{j=1}^n Y_{k_j}^{(Q)} E^{2-s_Q}, \quad \text{com} \quad EY_{k_j}^{(Q)} = e^{ik_j} Y_{k_j}^{(Q)} E \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.79)$$

Nos casos a e b a energia e o momentum, em termos dos parâmetros espectrais $\{k_j\}$, são dados por:

$$\varepsilon_{n_1, n_2} = \sum_{j=1}^{n_1} \varepsilon^{Q_1}(k_j) + \sum_{j=n_1+1}^n \varepsilon^{Q_2}(k_j), \quad P = \sum_{j=1}^n k_j. \quad (3.80)$$

As amplitudes de $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$, onde um par de partículas dos tipos Q_1 e Q_2 estão localizadas na posição de colisão x_i e $x_{i+1} = x_i + s_{Q_1}$, dão as seguintes relações algébricas: no caso b, obtemos:

$$Y_{k_j}^{(Q_1)} Y_{k_l}^{(Q_2)} = S_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2}(k_j, k_l) Y_{k_l}^{(Q_2)} Y_{k_j}^{(Q_1)} \quad (Q_1, Q_2 = 1, 2) \quad (k_j \neq k_l), \quad (3.81)$$

$$n_{Q_1-1} < j \leq n_{Q_1} + (Q_1 - 1)n_{Q_1-1}, \quad n_{Q_2-1} < l \leq n_{Q_2} + (Q_2 - 1)n_{Q_2-1}, \quad n_0 = 0,$$

onde as constantes de estrutura algébricas são a matriz S diagonal com elementos não nulos dados por :

$$S_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2}(k_j, k_l) = -\frac{\Gamma_{0 Q}^{Q 0} + \Gamma_{Q, 0}^{0, Q} e^{i(k_j + k_l)} - \left(\Gamma_{0 0}^{0 0} + \Gamma_{Q Q}^{Q Q} - \Gamma_{Q 0}^{Q 0} - \Gamma_{0 Q}^{0 Q} \right) e^{i k_j}}{\Gamma_{0 Q}^{Q 0} + \Gamma_{Q, 0}^{0, Q} e^{i(k_j + k_l)} - \left(\Gamma_{0 0}^{0 0} + \Gamma_{Q Q}^{Q Q} - \Gamma_{Q 0}^{Q 0} - \Gamma_{0 Q}^{0 Q} \right) e^{i k_l}}, \quad (3.82)$$

$$S_{1 2}^{1 2}(k_j, k_l) = \frac{1}{S_{2 1}^{2 1}(k_l, k_j)} = \frac{\Gamma_{0 1}^{1 0} + \Gamma_{2 0}^{0 2} e^{i(k_j + k_l)} - \left(\Gamma_{0 0}^{0 0} + \Gamma_{2 1}^{2 1} - \Gamma_{2 0}^{2 0} - \Gamma_{0 1}^{0 1} \right) e^{i k_j}}{\Gamma_{2 1}^{1 2} e^{i k_j}};$$

e no caso a, onde as constantes de acoplamento satisfazem (3.70), obtemos:

$$Y_{k_l}^{(Q_1)} Y_{k_m}^{(Q_2)} = \sum_{Q'_1=1}^2 \sum_{Q'_2=1}^2 S_{Q'_2 Q'_1}^{Q_1 Q_2}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(Q'_1)} Y_{k_l}^{(Q'_2)} \quad (k_l \neq k_m), \quad 1 \leq l, m \leq n, \quad (3.83)$$

onde os elementos não nulos da matriz S não-diagonal são os seis valores dados em (3.75) e (3.63), com a escolha (3.66).

Para amplitudes arbitrárias temos em nosso *ansatz* do produto matricial (3.53) um produto de n matrizes $\{Y_{k_j}^{(Q)}\}$. Nosso *ansatz* será válido somente se as relações (3.82) no caso b, ou (3.83) no caso a, fornecerem uma única relação entre esses produtos; de outra forma, $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$ não é propriamente definido. Isto significa, por exemplo, que os produtos $\dots Y_{k_1}^{(\alpha)} Y_{k_2}^{(\beta)} Y_{k_3}^{(\gamma)} \dots$ e $\dots Y_{k_3}^{(\gamma)} Y_{k_2}^{(\beta)} Y_{k_1}^{(\alpha)} \dots$ devem ser unicamente relacionados. Como podemos relacioná-los comutando as matrizes nesses produtos de duas formas, $\alpha\beta\gamma \rightarrow \beta\alpha\gamma \rightarrow \beta\gamma\alpha \rightarrow \gamma\beta\alpha$ ou $\alpha\beta\gamma \rightarrow \alpha\gamma\beta \rightarrow \gamma\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta\alpha$, as constantes de estrutura $S_{\gamma \gamma'}^{\alpha \alpha'}$ das relações algébricas (3.82) e (3.83) devem satisfazer

$$\sum_{\gamma, \gamma', \gamma''=1}^2 S_{\gamma \gamma'}^{\alpha \alpha'}(k_1, k_2) S_{\beta \gamma''}^{\gamma \alpha''}(k_1, k_3) S_{\beta' \beta''}^{\gamma' \gamma''}(k_2, k_3) = \sum_{\gamma, \gamma', \gamma''=1}^2 S_{\gamma' \gamma''}^{\alpha' \alpha''}(k_2, k_3) S_{\gamma \beta''}^{\alpha \gamma''}(k_1, k_3) S_{\beta \beta'}^{\gamma \gamma'}(k_1, k_2), \quad (3.84)$$

para $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' = 1, 2$. Esta última equação é justamente a relação de Yang-Baxter [68, 3] para a matriz S definida em (3.82) e (3.83). De fato, a

condição (3.84) é suficiente para garantir que qualquer produto dessas matrizes $\{Y_{k_j}^{(Q)}\}$ serão unicamente relacionados, e isso implica na associatividade da álgebra dos operadores $\{Y_{k_j}^{(Q)}\}$.

No caso b, a matriz S dada em (3.83) é diagonal, e a relação de Yang-Baxter (3.84) é trivialmente satisfeita; portanto, a única restrição para as constantes de acoplamento do Hamiltoniano (3.48) é dada por (3.66). No caso a, a matriz S dada em (3.63) e (3.75) é não-diagonal e a relação de Yang-Baxter (3.84) produz fortes restrições para os acoplamentos do Hamiltoniano (3.48).

Não consideramos neste trabalho o problema de encontrar todas as possíveis constantes de acoplamento Γ_{jl}^{mn} em (3.48) que gerem uma álgebra associativa (3.83), ou de forma equivalente, todas as possíveis soluções da relação de Yang-Baxter (3.84). É importante ressaltar que o nosso *ansatz* do produto matricial (3.53) produz as mesmas relações (3.83), independente do tamanho s_1 e s_2 das partículas de tipos 1 e 2, respectivamente. Soluções de (3.84) foram apresentadas na literatura ao longo do tempo, as quais são:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha\beta} &= 1 \quad (\alpha \neq \beta), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} = \epsilon_\alpha \cosh(\gamma), \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} &= \text{sign}(\alpha - \beta) \sinh(\gamma) \quad (\alpha \neq \beta),\end{aligned}\tag{3.85}$$

onde γ é um parâmetro livre e $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 = \pm 1$, corresponde ao modelo Perk-Schultz anisotrópico [59]. O modelo isotrópico, obtido fazendo-se $\gamma = 0$ e $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 = \pm 1$, possui simetria $SU(3)$, e é o chamado modelo de Sutherland [58]. A solução (3.85) com $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ resulta no modelo t-J anisotrópico super-simétrico ². Uma

²A fermionização de Jordan-Wigner do Hamiltoniano (3.48) com $s_1 = s_2 = 1$ e constantes de acoplamento (3.85), fornece o modelo t-J anisotrópico super-simétrico [12].

outra solução de (3.84) é também conhecida [64] para os casos onde

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = q^{\text{sign}(\alpha-\beta)} \quad (\alpha \neq \beta), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} = 0 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2), \quad (3.86)$$

com q real e $q \geq 1$. O Hamiltoniano (3.48) com os acoplamentos (3.86) descreve as flutuações temporais do problema de difusão assimétrica de duas espécies de partículas hierarquicamente ordenadas (assimetria q). A generalização desse problema pelo *ansatz* do produto matricial será tratada no capítulo 5.

Para completar as soluções através do *ansatz* do produto matricial (3.53) devemos fixar os parâmetros espectrais (k_1, \dots, k_n) . Estes parâmetros são fixos pela propriedade cíclica do traço. Usando as relações algébricas (3.78) ou (3.79), podemos escrever uma amplitude arbitrária na forma:

$$\text{Tr} \left[Y_{k_1}^{(1)} \dots Y_{k_{n_1}}^{(1)} Y_{k_{n_1+1}}^{(2)} \dots Y_{k_n}^{(2)} E^{L-n_1(s_1-1)-n_2(s_2-1)} \Omega_P \right]. \quad (3.87)$$

Vamos considerar o caso b, onde as constantes de acoplamento satisfazem (3.66). As relações de comutação (3.53), (3.78) e (3.82) dão:

$$\begin{aligned} e^{ik_j L} &= \left[\prod_{l=1}^{n_1} S_{11}^{11}(k_j, k_l) \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s_1-1} \right] \prod_{l=n_1+1}^n S_{12}^{12}(k_j, k_l) \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s_2-1} \quad (1 \leq j \leq n_1) \\ e^{ik_j L} &= \left[\prod_{l=n_1+1}^n S_{22}^{22}(k_j, k_l) \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s_2-1} \right] \prod_{l=1}^{n_1} S_{21}^{21}(k_j, k_l) \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{s_1-1} \quad (n_1 < j \leq n), \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde a matriz S é dada pela (3.83). A energia e o momentum são obtidos inserindo-se as soluções de (3.88) em (3.80). O Hamiltoniano (3.48) que é exatamente integrável no caso b (veja (3.66)), e é dado por:

$$\begin{aligned} H^{(b)} &= - \sum_{j=1}^L \mathcal{P} \left\{ \Gamma_{01}^{10} E_j^{01} E_{j+1}^{10} + \Gamma_{20}^{02} E_j^{20} E_{j+1}^{02} + \Gamma_{21}^{12} E_j^{21} E_{j+s_2}^{10} E_{j+s_1}^{02} \right. \\ &\quad + \Gamma_{11}^{11} E_j^{11} E_{j+s_1}^{11} + \Gamma_{22}^{22} E_j^{22} E_{j+s_2}^{22} + \Gamma_{01}^{01} E_j^{00} E_{j+1}^{11} + \Gamma_{10}^{10} E_j^{11} E_{j+s_1}^{00} + \Gamma_{02}^{02} E_j^{00} E_{j+1}^{22} \\ &\quad \left. + \Gamma_{20}^{20} E_j^{22} E_{j+s_2}^{00} + \Gamma_{21}^{21} E_j^{22} E_{j+s_2}^{11} + (\Gamma_{01}^{10} + \Gamma_{20}^{02}) E_j^{11} E_{j+s_1}^{22} \right\} \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde escolhemos $\Gamma_{00}^{00} = 0$, mas ainda temos 10 parâmetros livres! A escolha particular $s_1 = s_2 = 1$, $\Gamma_{21}^{12} = -\Gamma_{12}^{12} = \Gamma_{01}^{10} + \Gamma_{20}^{02}$, $\Gamma_{01}^{10} = -\Gamma_{10}^{10}$, $\Gamma_{20}^{02} = -\Gamma_{02}^{02}$, $\Gamma_{11}^{11} = \Gamma_{22}^{22} = \Gamma_{01}^{01} = \Gamma_{20}^{20} = 0$, resulta no Hamiltoniano relacionado ao problema estocástico da difusão totalmente assimétrica de duas classes de partículas, cuja solução exata foi obtida em [47] através do *anstaz* do produto matricial dinâmico.

Vamos retornar ao caso geral. A propriedade cíclica do traço em (3.87) e as relações de comutação (3.53), (3.79) e (3.83) dão:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[Y_{k_1}^{(Q_1)} \dots Y_{k_n}^{(Q_n)} E^{L-n_1(s_1-1)-n_2(s_2-1)} \Omega_P \right] &= e^{ik_j[L-n_1(s_1-1)-n_2(s_2-1)]} \quad (3.90) \\ &\times \sum_{Q'_1, \dots, Q'_n=1}^2 \langle Q_1, \dots, Q_n | T | Q'_1, \dots, Q'_n \rangle \text{Tr} \left[Y_{k_1}^{(Q'_1)} \dots Y_{k_n}^{(Q'_n)} E^{L-n_1(s_1-1)-n_2(s_2-1)} \Omega_P \right], \end{aligned}$$

onde usamos a identidade (veja (3.63) e (3.75))

$$\sum_{Q''_j, Q''_{j+1}} S_{Q''_j Q''_{j+1}}^{Q_j Q''_{j+1}}(k_j, k_j) = -1, \quad (3.91)$$

e

$$\begin{aligned} \langle Q_1, \dots, Q_n | T | Q'_1, \dots, Q'_n \rangle &= \quad (3.92) \\ &\sum_{Q''_1, \dots, Q''_n} \left\{ S_{Q'_1 Q''_1}^{Q_1 Q''_1}(k_1, k_j) \dots S_{Q'_j Q''_j}^{Q_j Q''_j}(k_j, k_j) \dots S_{Q'_n Q''_n}^{Q_n Q''_n}(k_n, k_j) e^{iP(s'_1-1)} \right\} \end{aligned}$$

é a matriz de transferência $2^n \times 2^n$ -dimensional de um modelo de seis-vértices inhomogêneo (inogeneidades $\{k_l\}$), com pesos de Boltzmann dados pela (3.63) e (3.75). Este modelo de seis vértices é definido em um cilindro transversal de perímetro n com uma “costura” (“*seam*”) ao longo de seu eixo, resultando em uma condição de contorno torcida

$$S_{Q'_n Q''_n}^{Q_n Q''_{n+1}}(k_n, k) = S_{Q'_n Q''_n}^{Q_n Q''_1}(k_n, k) \phi(s_{Q''_1}), \quad (3.93)$$

onde

$$\phi(s) = e^{iP(s-1)}, \quad (3.94)$$

e, como antes, P é o momentum do auto-estado (3.50). A relação (3.91) dá os vínculos para os parâmetros espectrais

$$e^{-ik_j(L+n-n_1s_1-n_2s_2)} = \Lambda(k_j, \{k_l\}) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3.95)$$

onde $\Lambda(k_j, \{k_l\})$ são os auto-valores da matriz de transferência (3.93). A condição (3.95) leva ao problema de se calcular os auto-valores da matriz de transferência inhomogênea (3.93). Isso pode ser feito através do *ansatz* de Bethe algébrico [72], ou pelo *ansatz* de Bethe coordenada (veja [63] e [64] por exemplo); apresentamos no apêndice A.1 este cálculo. Usando o resultado do apêndice A.1 obtemos:

$$\Lambda(k_j, \{k_l\}) = \phi(s_2) \prod_{l=1}^n S_{2\ 2}^{2\ 2}(k_l, k_j) \prod_{l=1}^{n_1} \frac{S_{2\ 2}^{2\ 2}(k_j, k_l^{(1)})}{S_{2\ 1}^{2\ 1}(k_j, k_l^{(1)})}, \quad (3.96)$$

onde os parâmetros $k_l^{(1)}$ ($l = 1, \dots, n_1$) são fixados pelas n_1 equações acopladas

$$\frac{\phi(s_1)}{\phi(s_2)} \prod_{l=1}^n \frac{S_{2\ 1}^{2\ 1}(k_l, k_j^{(1)})}{S_{2\ 2}^{2\ 2}(k_l, k_j^{(1)})} = \prod_{l=1}^{n_1} \frac{S_{2\ 2}^{2\ 2}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)})}{S_{1\ 1}^{1\ 1}(k_l^{(1)}, k_j^{(1)})} \frac{S_{2\ 1}^{2\ 1}(k_l^{(1)}, k_j^{(1)})}{S_{2\ 1}^{2\ 1}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)})}, \quad (3.97)$$

para $j = 1, \dots, n_1$. As equações (3.95)-(3.97) fixam os parâmetros espectrais $\{k_j; j = 1, \dots, n\}$ das matrizes $Y_{k_j}^{(Q)}$ introduzidas no nosso *ansatz* do produto matricial.

Capítulo 4

Modelos de spin $\frac{3}{2}$

4.1 O Modelo de spin $\frac{3}{2}$ com duas leis de conservação

Como no capítulo anterior, formularemos agora o nosso *ansatz* do produto matricial para modelos com simetria $U(1) \times U(1)$, que descreve a dinâmica de dois tipos de partículas na rede, onde o número total de cada tipo de partícula é conservado separadamente. No entanto, de forma distinta ao capítulo anterior, partículas de tipos diferentes podem ocupar o mesmo sítio na rede (ocupação dupla). Modelos desse tipo são: o s modelo de spin $\frac{3}{2}$ anisotrópico de Perk-Schultz [59], o modelo Essler-Korepin-Schoutens [60], o modelo de Hubbard [13], o Hamiltoniano derivado em [73] da matriz R introduzida em [74], e o modelo integrável de dois parâmetros introduzido em [61].

Para definir o Hamiltoniano destes modelos em uma rede com L sítios, associamos a cada sítio da rede uma variável Q_i ($i = 1, \dots, L$), que assume o valor

$Q_i = 0$ se o sítio está vazio, $Q_i = 1, 2$ se o sítio está ocupado por uma partícula do tipo 1 ou 2, respectivamente, e $Q_i = 3$ se o sítio tem ocupação dupla de partículas dos tipos 1 e 2. Na versão fermiônica desse modelo, as partículas dos tipos 1 e 2 são elétrons com diferentes polarizações de spin. O modelo mais geral com interação de vizinhos próximos e condição periódica de contorno é dado por:

$$H^{U(1) \times U(1)} = - \sum_{j=1}^L \left(\sum_{\alpha \neq \beta=0}^3 \sum_{\gamma \neq \nu=0}^3 \Gamma_{\gamma \nu}^{\alpha \beta} E_j^{\gamma \alpha} E_{j+1}^{\nu \beta} + \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=1}^3 \Gamma_{\alpha \beta}^{\alpha \beta} E_j^{\alpha \alpha} E_{j+1}^{\beta \beta} \right), \quad (4.1)$$

onde as constantes de acoplamento satisfazem $\Gamma_{\gamma \nu}^{\alpha \beta} = 0$ se $\alpha + \beta \neq \gamma + \nu$, $\Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha \alpha} = \Gamma_{\alpha \alpha}^{\beta \gamma} = 0$ a menos que $\alpha = \beta = \gamma$, e $E^{\alpha \beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) são as matrizes de Weyl 4×4 com elementos i, j dados por $(E^{\alpha \beta})_{i,j} = \delta_{\alpha,i} \delta_{\beta,j}$. Sem perda de generalidade podemos fazer $\Gamma_{00}^0 = 0$. A primeira e a segunda somas em (4.1) relacionam-se às interações cinéticas e estáticas. A simetria $U(1) \times U(1)$ e a simetria de translação, devido a condição periódica de contorno (4.1), implicam em que o número total de partículas n_1, n_2 ($0, 1, \dots$) dos tipos 1 e 2 e o momentum $P = \frac{2\pi l}{L}$ ($l = 0, 1, \dots, L-1$) serão conservados separadamente.

4.1.1 O *ansatz* do produto matricial

Formulamos o *ansatz* do produto matricial para os auto-vetores $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$ da equação de auto-valor

$$H^{U(1) \times U(1)} |\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle = \varepsilon_{n_1, n_2} |\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle \quad (4.2)$$

no auto-setor (n_1, n_2, P) . Uma auto-função arbitrária é dada por:

$$|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle = \sum_{\{Q\}} \sum_{\{x\}} f(x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n) |x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n\rangle, \quad (4.3)$$

onde $|x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n\rangle$ são as configurações onde a partícula do tipo $Q_i = 1, 2$ está localizada na posição $x_i = 1, \dots, L$ e $n = n_1 + n_2$. A soma em $\{Q\} =$

$\{Q_1, \dots, Q_n\}$ estende-se sobre todas as permutações de n números $\{1, 2\}$ em que n_1 termos têm o valor 1, e n_2 termos têm o valor 2. A soma $\{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ estende-se para cada permutação $\{Q\}$, e para inteiros crescentes onde $(x_{i+1} - x_i) \geq \delta_{Q_{i+1}, Q_i}$, permitindo dupla ocupação dos sítios de diferentes tipos de partículas.

Para formular o *ansatz* do produto matricial associamos aos sítios com $Q_i = 0, 1$ e 2 as matrizes $E, Y^{(1)}$ e $Y^{(2)}$, respectivamente. Analogamente ao capítulo anterior, associamos aos sítios com dupla ocupação ($Q_i = 3$) o produto de matrizes $Y^{(3)} = B^{(1)}E^{-1}B^{(2)}$. As amplitudes correspondentes às configurações sem ocupação dupla são dadas pelo *ansatz*

$$f(x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n) = \text{Tr} [E^{x_1-1}Y^{(Q_1)}E^{x_2-x_1-1}Y^{(Q_2)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1}Y^{(Q_n)}E^{L-x_n}\Omega_P], \quad (4.4)$$

enquanto as amplitudes relacionadas às configurações de dupla ocupação em $x_{i+1} = x_i$ são dadas pelo traço

$$f(x_1, Q_1; \dots; x_i, 1; x_i, 2; \dots; x_n, Q_n) = \text{Tr} [E^{x_1-1}Y^{(Q_1)} \dots E^{x_i-x_{i-1}-1}B^{(1)}E^{-1}B^{(2)}E^{x_{i+1}-x_i-1} \dots E^{L-x_n}\Omega_P]. \quad (4.5)$$

O caso geral é dado pela generalização de (4.4) e (4.5).

De forma similar ao que fizemos no capítulo anterior a matriz Ω_P satisfaz

$$E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E, \quad Y^{(Q)}\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P Y^{(Q)}, \quad B^{(Q)}\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P B^{(Q)} \quad (Q = 1, 2) \quad (4.6)$$

fixando (veja (2.8)) o momentum P do auto-vetor $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$.

Como nos capítulos anteriores, para satisfazer a equação de auto-valor (4.2) identificamos $Y^{(Q)}$ e $B^{(Q)}$ ($Q = 1, 2$) como compostas por n matrizes dependentes

de parâmetros espectrais ¹

$$Y^{(Q)} = \sum_{j=1}^n Y_{k_j}^{(Q)} E, \quad B^{(Q)} = \sum_{j=1}^n B_{k_j}^{(Q)} E \quad (Q = 1, 2), \quad (4.7)$$

satisfazendo as relações de comutação

$$Y_{k_j}^{(Q)} E = e^{ik_j} E Y_{k_j}^{(Q)}, \quad B_{k_j}^{(Q)} E = e^{ik_j} E B_{k_j}^{(Q)}, \quad (4.8)$$

$$\left[Y_{k_j}^{(Q)}, \Omega_P \right] = \left[B_{k_j}^{(Q)}, \Omega_P \right] = Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_j}^{(Q')} = B_{k_j}^{(Q)} B_{k_j}^{(Q')} = 0 \quad (Q, Q' = 1, 2),$$

onde k_j ($j = 1, \dots, n$) são parâmetros espectrais complexos.

4.1.2 Resolução do modelo

Vamos considerar inicialmente setores com pequenos valores de n .

n = 1. Temos equações distintas dependendo do tipo $Q = 1, 2$ da partícula.

A equação de auto-valor (4.2) resulta, para $Q = 1, 2$:

$$\varepsilon^{(Q)} \text{Tr} \left[E^{x-1} Y^{(Q)} E^{L-x} \Omega_P \right] = -\Gamma_{0Q}^{Q0} \text{Tr} \left[E^{x-2} Y^{(Q)} E^{L-x+1} \Omega_P \right] \quad (4.9)$$

$$-\Gamma_{Q0}^{0Q} \text{Tr} \left[E^x Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P \right] - \left(\Gamma_{0Q}^{0Q} + \Gamma_{Q0}^{Q0} \right) \text{Tr} \left[E^{x-1} Y^{(Q)} E^{L-x} \Omega_P \right].$$

Inserindo (4.7) com $n = 1$, e usando (4.9), obtemos a energia e o momentum como uma função do parâmetro espectral

$$\varepsilon^{(Q)}(k) = - \left(\Gamma_{0Q}^{Q0} e^{-ik} + \Gamma_{Q0}^{0Q} e^{ik} + \Gamma_{0Q}^{0Q} + \Gamma_{Q0}^{Q0} \right) \quad (Q = 1, 2),$$

$$P = k = \frac{2\pi}{L} l \quad (l = 0, 1, \dots, L-1). \quad (4.10)$$

n = 2. Para duas partículas dos tipos Q_1 , e Q_2 ($Q_1, Q_2 = 1, 2$) localizadas nas posições x_1 e x_2 a equação de auto-valor (4.2) produz relações distintas. As

¹Similarmente à solução (3.66) do capítulo 3, existem soluções especiais que por brevidade não consideraremos aqui, onde as matrizes $Y^{(1)}$, $B^{(1)}$ e $Y^{(2)}$, $B^{(2)}$ são compostas por conjuntos distintos de parâmetros espectrais $\{k_1, \dots, k_{n_1}\}$ e $\{k_{n_1+1}, \dots, k_{n_1+n_2}\}$, respectivamente.

componentes onde as partículas não estão na posição de “colisão”, $x_{i+1} > x_i + 1$, dão as relações

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(Q_1, Q_2)} \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P] = & \quad (4.11) \\
& -\Gamma_{0 Q_1}^{Q_1 0} \text{Tr} [E^{x_1-2} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{Q_1 0}^0 \text{Tr} [E^{x_1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-2} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{0 Q_2}^{Q_2 0} \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-2} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2+1} \Omega_P] \\
& -\Gamma_{Q_2 0}^0 \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2-1} \Omega_P] \\
& - \left(\Gamma_{0 Q_1}^0 + \Gamma_{Q_1 0}^{Q_1 0} + \Gamma_{0 Q_2}^0 + \Gamma_{Q_2 0}^{Q_2 0} \right) \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(Q_1)} E^{x_2-x_1-1} Y^{(Q_2)} E^{L-x_2} \Omega_P].
\end{aligned}$$

Inserindo (4.4) com $n = 2$ na última expressão, e usando (4.9), obtemos uma solução se as constantes de acoplamento em (4.1) satisfizerem

$$\Gamma_{10}^{01} = \Gamma_{20}^{02}, \quad \Gamma_{01}^{10} = \Gamma_{02}^{20}. \quad (4.12)$$

A energia e o momentum em termos dos parâmetros espectrais k_1 e k_2 são dados por

$$\varepsilon^{(Q_1, Q_2)} = \varepsilon^{(Q_1)}(k_1) + \varepsilon^{(Q_2)}(k_2), \quad P = k_1 + k_2, \quad (4.13)$$

onde $\varepsilon^{(Q)}(k)$ é dado pela (4.10).

Para proceder o cálculo, vamos considerar separadamente os casos onde $Q_1 = Q_2$ e $Q_1 \neq Q_2$. Se $Q_1 = Q_2$, (4.2) aplicada às amplitudes relacionadas às configurações onde $x_1 = x$, $x_2 = x + 1$, resulta:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(Q, Q)} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q)} Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P] = & \quad (4.14) \\
& -\Gamma_{0 Q}^Q \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(Q)} E Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P] - \Gamma_{Q 0}^0 \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q)} E Y^{(Q)} E^{L-x-2} \Omega_P] \\
& - \left(\Gamma_{0 Q}^0 + \Gamma_{Q 0}^Q + \Gamma_{Q Q}^Q \right) \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q)} Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P].
\end{aligned}$$

Inserindo (4.7) e (4.13) em (4.15) e usando (4.9) obtemos as relações algébricas entre as matrizes dependentes de parâmetros espectrais

$$Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q)} = S_{Q Q}^{Q Q}(k_j, k_l) Y_{k_l}^{(Q)} Y_{k_j}^{(Q)}, \quad (Q = 1, 2), \quad (4.15)$$

onde

$$S_{Q Q}^{Q Q}(k_j, k_l) = -\frac{\Gamma_{Q 0}^{0 Q} e^{i(k_j+k_l)} + \Gamma_{0 Q}^{Q 0} + \left(\Gamma_{0 Q}^{0 Q} + \Gamma_{Q 0}^{Q 0} - \Gamma_{Q Q}^{Q Q}\right) e^{ik_j}}{\Gamma_{Q 0}^{0 Q} e^{i(k_j+k_l)} + \Gamma_{0 Q}^{Q 0} + \left(\Gamma_{0 Q}^{0 Q} + \Gamma_{Q 0}^{Q 0} - \Gamma_{Q Q}^{Q Q}\right) e^{ik_l}} \quad (Q = 1, 2). \quad (4.16)$$

Se $Q_1 \neq Q_2$, aparecem relações distintas para configurações onde $x_1 = x_2 = x$ e $x_1 = x, x_2 = x + 1$. Para $x_1 = x_2 = x$ temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1,2)} \text{Tr} [E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x} \Omega_P] &= -\Gamma_{0 3}^{1 2} \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(1)} Y^{(2)} E^{L-x} \Omega_P] \quad (4.17) \\ &- \Gamma_{3 0}^{2 1} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(2)} Y^{(1)} E^{L-x-1} \Omega_P] - \Gamma_{0 3}^{2 1} \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(2)} Y^{(1)} E^{L-x} \Omega_P] \\ &- \Gamma_{3 0}^{1 2} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(1)} Y^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P] - \Gamma_{0 3}^{3 0} \text{Tr} [E^{x-2} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x+1} \Omega_P] \\ &- \Gamma_{3 0}^{0 3} \text{Tr} [E^x B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P] - (\Gamma_{0 3}^{3 0} + \Gamma_{3 0}^{3 0}) \text{Tr} [E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x} \Omega_P], \end{aligned}$$

enquanto para $x_1 = x, x_2 = x + 1$, e para $Q_1 \neq Q_2$ ($Q_1, Q_2 = 1, 2$), temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(Q_1, Q_2)} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_1)} Y^{(Q_2)} E^{L-x-1} \Omega_P] &= -\Gamma_{0 Q_1}^{Q_1 0} \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(Q_1)} E Y^{(Q_2)} E^{L-x-1} \Omega_P] \\ &- \Gamma_{Q_2 0}^{0 Q_2} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_1)} E Y^{(Q_2)} E^{L-x-2} \Omega_P] - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{3 0} \text{Tr} [E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x} \Omega_P] \\ &- \Gamma_{Q_1 Q_2}^{0 3} \text{Tr} [E^x B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P] - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_2)} Y^{(Q_1)} E^{L-x-1} \Omega_P] \\ &- \left(\Gamma_{0 Q_1}^{0 Q_1} + \Gamma_{Q_2 0}^{Q_2 0} - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2}\right) \text{Tr} [E^{x-1} Y^{(Q_1)} Y^{(Q_2)} E^{L-x-1} \Omega_P]. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Inserindo (4.7) e (4.13) em (4.18) e (4.18) e usando (4.9) obtemos as relações algébricas

$$\sum_{j,l=1}^2 C_0(k_j, k_l) B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)} = - \sum_{j,l=1}^2 e^{ik_l} \left[C'_1(k_j, k_l) Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} + C'_2(k_j, k_l) Y_{k_j}^{(2)} Y_{k_l}^{(1)} \right], \quad (4.19)$$

$$\sum_{j,l=1}^2 C_Q(k_j, k_l) B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)} = \sum_{j,l=1}^2 \left\{ \left[D(k_j, k_l) - \left(\Gamma_{Q_1 0}^{Q_1 0} + \Gamma_{0 Q_2}^{0 Q_2} - \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2} \right) e^{ik_l} \right] Y_{k_j}^{(Q_1)} Y_{k_l}^{(Q_2)} + \Gamma_{Q_1 Q_2}^{Q_2 Q_1} e^{ik_l} Y_{k_j}^{(Q_2)} Y_{k_l}^{(Q_1)} \right\}, \quad Q_1 \neq Q_2 \quad (Q_1 = 1, 2), \quad (4.20)$$

onde $C_0, C'_1, C'_2, C_1, C_2$ e D são as funções simétricas

$$\begin{aligned} C_0(k_j, k_l) &= -\Gamma_{0 1}^{1 0} (e^{ik_j} + e^{ik_l}) - \Gamma_{1 0}^{0 1} e^{i(k_j+k_l)} (e^{ik_j} + e^{ik_l}) \\ &\quad - \left(\Gamma_{1 0}^{1 0} + \Gamma_{0 1}^{0 1} + \Gamma_{2 0}^{2 0} + \Gamma_{0 2}^{0 2} - \Gamma_{0 3}^{0 3} - \Gamma_{3 0}^{3 0} \right) e^{i(k_j+k_l)} + \Gamma_{0 3}^{3 0} + \Gamma_{3 0}^{0 3} e^{i2(k_j+k_l)}, \\ C_1(k_j, k_l) &= -\Gamma_{1 2}^{3 0} - \Gamma_{1 2}^{0 3} e^{i(k_j+k_l)}, \quad C'_1(k_j, k_l) = \Gamma_{0 3}^{1 2} + \Gamma_{3 0}^{1 2} e^{i(k_j+k_l)}, \\ C_2(k_j, k_l) &= -\Gamma_{2 1}^{3 0} - \Gamma_{2 1}^{0 3} e^{i(k_j+k_l)}, \quad C'_2(k_j, k_l) = \Gamma_{0 3}^{2 1} + \Gamma_{3 0}^{2 1} e^{i(k_j+k_l)}, \\ D(k_j, k_l) &= -\Gamma_{0 1}^{1 0} - \Gamma_{1 0}^{0 1} e^{i(k_j+k_l)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Multiplicando as duas relações em (4.20) por $C_0(k_j, k_l)$, e usando (4.19), obtemos as relações algébricas expressas em forma matricial

$$\sum_{j \neq l=1}^2 \begin{bmatrix} \alpha_{j,l} & \beta_{j,l} \\ \gamma_{j,l} & \delta_{j,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} \\ Y_{k_j}^{(2)} Y_{k_l}^{(1)} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_{j,l} &= -C_1(k_j, k_l) C'_1(k_j, k_l) e^{ik_l} - C_0(k_j, k_l) \left[D(k_j, k_l) - \left(\Gamma_{1 0}^{1 0} + \Gamma_{0 2}^{0 2} - \Gamma_{1 2}^{1 2} \right) e^{ik_l} \right] \\ \beta_{j,l} &= - \left[C_1(k_j, k_l) C'_2(k_j, k_l) - C_0(k_j, k_l) \Gamma_{1 2}^{2 1} \right] e^{ik_l} \\ \gamma_{j,l} &= - \left[C_2(k_j, k_l) C'_1(k_j, k_l) - C_0(k_j, k_l) \Gamma_{2 1}^{1 2} \right] e^{ik_l} \\ \delta_{j,l} &= -C_2(k_j, k_l) C'_2(k_j, k_l) e^{ik_l} - C_0(k_j, k_l) \left[D(k_j, k_l) - \left(\Gamma_{0 1}^{0 1} + \Gamma_{2 0}^{2 0} - \Gamma_{2 1}^{2 1} \right) e^{ik_l} \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A equação matricial (4.22) pode ser facilmente rearranjada, dando:

$$Y_{k_l}^{(Q_1)} Y_{k_m}^{(Q_2)} = S_{Q_1 Q_2}^{Q_1 Q_2}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(Q_2)} Y_{k_l}^{(Q_1)} + S_{Q_2 Q_1}^{Q_1 Q_2}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(Q_1)} Y_{k_l}^{(Q_2)} \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned}
S_{21}^{12}(k_j, k_l) &= - \left(1 + \frac{\delta_{j,l}(\alpha_{l,j} - \alpha_{j,l}) - \beta_{j,l}(\gamma_{l,j} - \gamma_{j,l})}{\alpha_{j,l}\delta_{j,l} - \beta_{j,l}\gamma_{j,l}} \right), \\
S_{12}^{12}(k_j, k_l) &= - \frac{\delta_{j,l}\beta_{l,j} - \beta_{j,l}\delta_{l,j}}{\alpha_{j,l}\delta_{j,l} - \beta_{j,l}\gamma_{j,l}}, \\
S_{12}^{21}(k_j, k_l) &= - \left(1 + \frac{\alpha_{j,l}(\delta_{l,j} - \delta_{j,l}) - \gamma_{j,l}(\beta_{l,j} - \beta_{j,l})}{\alpha_{j,l}\delta_{j,l} - \beta_{j,l}\gamma_{j,l}} \right), \\
S_{21}^{21}(k_j, k_l) &= - \frac{\alpha_{j,l}\gamma_{l,j} - \gamma_{j,l}\alpha_{l,j}}{\alpha_{j,l}\delta_{j,l} - \beta_{j,l}\gamma_{j,l}}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Multiplicando (4.20) com $Q_1 = 1$ por C'_1 , e (4.19) por Γ_{12}^{12} , e subtraindo a expressão resultante, obtemos a relação que expressa as matrizes $B_k^{(Q)}$ em termos das $Y_k^{(Q)}$, isto é:

$$B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)} = \frac{D_3(k_j, k_l)}{\rho(k_j, k_l)} Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} \quad (j \neq l), \tag{4.26}$$

onde

$$\begin{aligned}
D_3(k_j, k_l) &= D(k_j, k_l) - (\Gamma_{10}^{10} - \Gamma_{12}^{12}) C'_2(k_j, k_l) - C'_1(k_j, k_l) \Gamma_{12}^{21} e^{ik_l}, \\
\rho(k_j, k_l) &= -\beta_{j,l} e^{-ik_l} = C_1(k_j, k_l) C'_2(k_j, k_l) - C_0(k_j, k_l) \Gamma_{12}^{21}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Como as matrizes $B_{k_j}^{(Q)}$ aparecem somente em pares $B_{k_j}^{(1)} B_{k_j}^{(2)}$ em nosso *ansatz* do produto matricial (4.4)-(4.5), a relação (4.26) permite expressar as amplitudes somente em termos das matrizes $Y_{k_j}^{(Q)}$ ($Q = 1, 2$). Conseqüentemente (4.15), (4.16) juntamente com (4.9) dão todas as relações algébricas para as matrizes do *ansatz* no setor com $n = 2$ partículas.

Os parâmetros espectrais k_1 e k_2 , como nos capítulos anteriores, são fixados pela propriedade cíclica do traço, definindo as amplitudes. Não vamos obter agora as equações que fixam os $\{k_j\}$ para $n = 2$, vamos considerar primeiro o caso de valores n gerais.

n geral. Consideraremos agora o caso de valores n_1, n_2 arbitrários de partículas dos tipos 1 e 2 ($n = n_1 + n_2$). A equação de auto-valores (4.2) quando aplicada

a componentes de $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$ sem partículas na posição de “colisão” ($x_{i+1} > x_i + 1$, $i = 1, \dots, n$), dá a generalização de (4.12), que é resolvida dando a energia como uma função de parâmetros espectrais. A energia e o momentum são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n_1, n_2} &= \sum_{j=1}^{n_1} \varepsilon^{(1)}(k_j) + \sum_{j=n_1+1}^n \varepsilon^{(2)}(k_j) = \sum_{j=1}^n (\Gamma_{01}^{10} e^{-ik_j} + \Gamma_{10}^{01} e^{ik_j}) \\ &+ n_1 (\Gamma_{10}^{10} + \Gamma_{01}^{01}) + n_2 (\Gamma_{20}^{20} + \Gamma_{02}^{02}), \quad P = \sum_{j=1}^n k_j. \end{aligned} \quad (4.28)$$

As amplitudes de $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$ onde um par de partículas dos tipos Q_1 e Q_2 estão localizadas na posição de colisão $x_{i+1} = x_i$ ou $x_{i+1} = x_i + 1$, dão as relações algébricas que generalizam (4.15) e (4.24),

$$\begin{aligned} Y_{k_j}^{(Q_1)} Y_{k_l}^{(Q_2)} &= \sum_{Q'_1, Q'_2=1}^2 S_{Q'_2 Q'_1}^{Q_1 Q_2}(k_j, k_l) Y_{k_l}^{(Q'_1)} Y_{k_j}^{(Q'_2)} \quad (k_j \neq k_l), \\ Y_{k_j}^{(Q_1)} Y_{k_j}^{(Q_2)} &= 0 \quad (j, l = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde os elementos não nulos da matriz S em (4.29) são dados em (4.16) e (4.25). Além disso, qualquer par de matrizes $B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)}$ ($j \neq l$; $j, l = 1, \dots, n$) são expressos em termos de $Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)}$ pela (4.26).

Para amplitudes arbitrárias o *ansatz* do produto matricial (4.4) e (4.5), depois de usar (4.26), contém um produto de n matrizes espectrais $\{Y_{k_j}^{(Q)}\}$. O *ansatz* só será válido se as relações algébricas entre as matrizes derem uma única relação entre esses produtos. Isto implica que produtos como $\dots Y_{k_1}^{(Q_1)} Y_{k_2}^{(Q_2)} Y_{k_3}^{(Q_3)} \dots$ e $\dots Y_{k_3}^{(Q_3)} Y_{k_2}^{(Q_2)} Y_{k_1}^{(Q_1)} \dots$ devem ser unicamente relacionados. Similarmente ao que foi discutido no capítulo anterior, esses produtos podem ser relacionados usando as relações de comutação através de diferentes caminhos. Usando as relações de comutação nas ordens $Q_1 Q_2 Q_3 \rightarrow Q_2 Q_1 Q_3 \rightarrow Q_2 Q_3 Q_1 \rightarrow Q_3 Q_2 Q_1$ e $Q_1 Q_2 Q_3 \rightarrow Q_1 Q_3 Q_2 \rightarrow Q_3 Q_1 Q_2 \rightarrow Q_3 Q_2 Q_1$ obtemos vínculos sobre as constantes

de estrutura $S_{Q_1 Q_2}^{Q'_1 Q'_2}$ das relações algébricas (4.16) e (4.25),

$$\begin{aligned} & \sum_{Q, Q', Q''=1}^2 S_{Q Q'}^{Q_1 Q'_1}(k_1, k_2) S_{Q_2 Q''}^{Q Q''_1}(k_1, k_3) S_{Q'_2 Q''_2}^{Q' Q''_2}(k_2, k_3) \\ &= \sum_{Q, Q', Q''=1}^2 S_{Q' Q''}^{Q'_1 Q''_1}(k_2, k_3) S_{Q_1 Q''_2}^{Q_1 Q''_2}(k_1, k_3) S_{Q_2 Q'_2}^{Q Q'_2}(k_1, k_2), \end{aligned} \quad (4.30)$$

para $Q_1, Q'_1, Q''_1, Q_2, Q'_2, Q''_2 = 1, 2$. Estes vínculos são justamente a equação de Yang-Baxter [53, 3] da matriz S definida em (4.16) e (4.25). De fato, a equação de Yang-Baxter (4.30) implica na associatividade da álgebra das matrizes $\{Y_{k_j}^{(Q)}\}$. Estas relações impõe restrições severas para as constantes de acoplamento $\Gamma_{n o}^{l m}$ do Hamiltoniano geral (4.1). No entanto, a equação de Yang-Baxter (4.30) não é suficiente para garantir que as auto-funções $|\Psi_{n_1, n_2, P}\rangle$ possam ser escritas pelo nosso *ansatz* do produto matricial, isto porque surgem novas relações entre as matrizes $\{Y_{k_j}^{(Q)}\}$ quando temos na rede 3 ou 4 partículas na posição de colisão. Essas novas relações aparecem porque no Hamiltoniano (4.1) existem termos de interação de até 4 partículas.

A equação de auto-valor (4.2) aplicada nas amplitudes onde temos uma partícula do tipo Q em $x_1 = x$, e um par de partículas em $x_2 = x + 1$; e nas amplitudes com uma partícula Q em $x_1 = x + 1$, e um par de partículas em x

dão, respectivamente, as equações:

$$\begin{aligned}
& \left(\varepsilon^{(Q)} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \Gamma_0^0 Q + \Gamma_Q^Q 3 + \Gamma_3^3 0 \right) \text{Tr} \left[E^{x-1} Y^{(Q)} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P \right] = \\
& -\Gamma_0^Q 0 \text{Tr} \left[E^{x-2} Y^{(Q)} E B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_3^{Q'} 0 \text{Tr} \left[E^{x-1} Y^{(Q)} Y^{(Q')} Y^{(Q)} E^{L-x-2} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_3^Q 0 \text{Tr} \left[E^{x-1} Y^{(Q)} Y^{(Q)} Y^{(Q')} E^{L-x-2} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_3^0 3 \text{Tr} \left[E^{x-1} Y^{(Q)} E B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-2} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_Q^3 3 \text{Tr} \left[E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P \right], \quad Q \neq Q' \quad (Q, Q' = 1, 2),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\varepsilon^{(Q)} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \Gamma_0^0 3 + \Gamma_3^3 Q + \Gamma_Q^Q 0 \right) \text{Tr} \left[E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P \right] = \\
& -\Gamma_Q^0 0 \text{Tr} \left[E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E Y^{(Q)} E^{L-x-2} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_0^{Q'} 3 \text{Tr} \left[E^{x-2} Y^{(Q')} Y^{(Q)} Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_0^Q 3 \text{Tr} \left[E^{x-2} Y^{(Q)} Y^{(Q')} Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_0^3 0 \text{Tr} \left[E^{x-2} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E Y^{(Q)} E^{L-x-1} \Omega_P \right] \\
& -\Gamma_3^Q 3 \text{Tr} \left[E^{x-1} Y^{(Q)} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P \right], \quad Q \neq Q' \quad (Q, Q' = 1, 2).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Inserindo (4.7) e (4.28) nestas últimas equações, e usando a generalização das relações (4.19), para simplificar as expressões obtidas, temos as quatro relações algébricas

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,l,m=1}^3 \left\{ D^{(3,Q)}(k_j, k_l, k_m) Y_{k_j}^{(Q)} B_{k_l}^{(1)} B_{k_m}^{(2)} \right. \\
& \left. - e^{ik_m} \left(\Gamma_Q^3 3 B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)} Y_{k_m}^{(Q)} - \Gamma_0^{Q'} 3 Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q')} Y_{k_m}^{(Q)} - \Gamma_0^Q 3 Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q)} Y_{k_m}^{(Q')} \right) \right\} = 0, \\
& \sum_{j,l,m=1}^3 \left\{ D^{(Q,3)}(k_j, k_l, k_m) B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)} Y_{k_m}^{(Q)} \right. \\
& \left. - e^{i(k_l+k_m)} \left(\Gamma_3^Q 3 Y_{k_j}^{(Q)} B_{k_l}^{(1)} B_{k_m}^{(2)} - \Gamma_3^{Q'} 0 Y_{k_j}^{(Q')} Y_{k_l}^{(Q)} Y_{k_m}^{(Q)} - \Gamma_3^Q 0 Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q')} Y_{k_m}^{(Q)} \right) \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

onde $Q, Q' = 1, 2$ ou $Q, Q' = 21$, e

$$D^{(3,Q)}(k_j, k_l, k_m) = \Gamma_{Q0}^{0Q} e^{i(k_j+k_l+k_m)} + \left(\Gamma_{Q0}^{Q0} + \Gamma_{03}^{03} - \Gamma_{Q3}^{Q3} \right) e^{i(k_l+k_m)} + \Gamma_{03}^{30},$$

$$D^{(Q,3)}(k_j, k_l, k_m) = \Gamma_{30}^{03} e^{i(k_j+k_l+k_m)} + \left(\Gamma_{0Q}^{0Q} + \Gamma_{30}^{30} - \Gamma_{3Q}^{3Q} \right) e^{ik_m} + \Gamma_{0Q}^{Q0}. \quad (4.34)$$

no caso de $n = 4$ partículas a nova relação vem de amplitudes correspondentes a configurações onde temos dois pares de partículas nos sítios x e $x + 1$. A equação de auto-valor (4.2), quando aplicada nessas amplitudes dá

$$(2\varepsilon^{(1)} + 2\varepsilon^{(2)} + \Gamma_{03}^{03} + \Gamma_{33}^{33} + \Gamma_{30}^{30}) \text{Tr} [E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P] =$$

$$-\Gamma_{03}^{21} \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(2)} Y^{(1)} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P]$$

$$-\Gamma_{03}^{12} \text{Tr} [E^{x-2} Y^{(1)} Y^{(2)} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P]$$

$$-\Gamma_{30}^{12} \text{Tr} [E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} Y^{(1)} Y^{(2)} E^{L-x-2} \Omega_P] \quad (4.35)$$

$$-\Gamma_{30}^{21} \text{Tr} [E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} Y^{(2)} Y^{(1)} E^{L-x-2} \Omega_P]$$

$$-\Gamma_{03}^{30} \text{Tr} [E^{x-2} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-1} \Omega_P]$$

$$-\Gamma_{30}^{03} \text{Tr} [E^{x-1} B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E B^{(1)} E^{-1} B^{(2)} E^{L-x-2} \Omega_P].$$

Inserindo (4.7) e (4.28) nesta última equação e usando a generalização de (4.19) para simplificar a expressão resultante, obtemos:

$$\sum_{j,l,m,o=1}^4 \left\{ D^{(3,3)}(k_j, k_l, k_m, k_o) B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)} B_{k_m}^{(1)} B_{k_o}^{(2)} + e^{i(k_l+k_m+k_o)} \left(\Gamma_{30}^{21} Y_{k_j}^{(2)} Y_{k_l}^{(1)} \right. \right. \quad (4.36)$$

$$\left. \left. + \Gamma_{30}^{12} Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} \right) B_{k_m}^{(1)} B_{k_o}^{(2)} + e^{ik_o} B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)} \left(\Gamma_{03}^{21} Y_{k_m}^{(2)} Y_{k_o}^{(1)} + \Gamma_{03}^{12} Y_{k_m}^{(1)} Y_{k_o}^{(2)} \right) \right\} = 0,$$

onde

$$D^{(3,3)}(k_j, k_l, k_m, k_o) = \Gamma_{03}^{30} + \Gamma_{30}^{03} e^{i(k_j+k_l+k_m+k_o)} + \left(\Gamma_{30}^{30} + \Gamma_{03}^{03} - \Gamma_{33}^{33} \right) e^{i(k_m+k_o)}. \quad (4.37)$$

Desde que qualquer par $B_{k_j}^{(1)} B_{k_l}^{(2)}$ ($k_j \neq k_l$) é expresso em termos do par $Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)}$, através da (4.26), podemos escrever as expressões (4.34), (4.34) e (4.36) somente em termos das matrizes $\{Y_k^{(Q)}\}$. Multiplicando (4.34) pela função simétrica $\rho(k_j, k_l)\rho(k_l, k_m)\rho(k_m, k_j)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,l,m=1}^3 \left\{ D^{(3,Q)}(k_j, k_l, k_m) D_3(k_l, k_m) \rho(k_j, k_l) Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(1)} Y_{k_m}^{(2)} \right. \\
& - e^{ik_m} \Gamma_{3Q}^3 D_3(k_j, k_l) \rho(k_l, k_m) Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} Y_{k_m}^{(Q)} \\
& + \left(\Gamma_{03}^{Q'Q} Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q')} Y_{k_m}^{(Q)} + \Gamma_{03}^{QQ'} Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q)} Y_{k_m}^{(Q')} \right) e^{ik_m} \rho(k_j, k_l) \rho(k_l, k_m) \left. \right\} \rho(k_m, k_j) = 0, \\
& \sum_{j,l,m=1}^3 \left\{ D^{(Q,3)}(k_j, k_l, k_m) D_3(k_j, k_l) \rho(k_l, k_m) Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} Y_{k_m}^{(Q)} \right. \\
& - e^{i(k_l+k_m)} \Gamma_{3Q}^3 D_3(k_l, k_m) \rho(k_j, k_l) Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(1)} Y_{k_m}^{(2)} \\
& + \left(\Gamma_{30}^{Q'Q} Y_{k_j}^{(Q')} Y_{k_l}^{(Q)} Y_{k_m}^{(Q)} + \Gamma_{30}^{QQ'} Y_{k_j}^{(Q)} Y_{k_l}^{(Q')} Y_{k_m}^{(Q)} \right) e^{i(k_l+k_m)} \rho(k_j, k_l) \rho(k_l, k_m) \left. \right\} \rho(k_m, k_j) = 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

onde $(Q, Q') = (1, 2)$ ou $(2, 1)$. Multiplicando (4.37) pela combinação simétrica $\rho(k_j, k_l)\rho(k_l, k_o)\rho(k_o, k_m)\rho(k_m, k_j)\rho(k_l, k_m)\rho(k_j, k_o)$ obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,l,m,o=1}^4 \left\{ \left[(D^{(3,3)}(k_j, k_l, k_m, k_o) D_3(k_j, k_l) + \Gamma_{30}^1 e^{i(k_l+k_m+k_o)} \rho(k_j, k_l)) D_3(k_m, k_o) \right. \right. \\
& + \Gamma_{03}^1 e^{ik_o} D_3(k_j, k_l) \rho(k_m, k_o) \left. \right] Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} Y_{k_m}^{(1)} Y_{k_o}^{(2)} \\
& + \Gamma_{30}^2 e^{i(k_l+k_m+k_o)} D_3(k_m, k_o) \rho(k_j, k_l) Y_{k_j}^{(2)} Y_{k_l}^{(1)} Y_{k_m}^{(1)} Y_{k_o}^{(2)} \\
& + \Gamma_{03}^2 e^{ik_o} D_3(k_j, k_l) \rho(k_m, k_o) Y_{k_j}^{(1)} Y_{k_l}^{(2)} Y_{k_m}^{(2)} Y_{k_o}^{(1)} \left. \right\} \rho(k_l, k_o) \rho(k_m, k_j) \rho(k_l, k_m) \rho(k_j, k_o) = 0.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Para que o *ansatz* do produto matricial seja válido para o Hamiltoniano (4.1) as relações (4.39)-(4.40) devem ser consistentes com as relações de comutação (4.29), para quaisquer valores de $k_j \in C$ ($j = 1, \dots, 4$). O uso sucessivo de (4.29) em (4.39)-(4.40) permite reescrever o lado esquerdo dessas equações como um polinômio nas variáveis e^{ik_j} ($j = 1, \dots, 4$). Desde que não desejemos, até aqui, fixar os parâmetros espectrais $\{k_j\}$, devemos impor que todos os coeficientes

desses polinômios sejam identicamente nulos. Isto dá vínculos adicionais para as constantes de acoplamento $\Gamma_{no}^l m$; além dos vínculos impostos pela (4.12) e pela equação de Yang-Baxter.

Não surge nenhuma nova relação para $n > 4$. Embora não consideramos neste trabalho o problema de encontrar todas as possíveis soluções do Hamiltoniano geral satisfazendo (4.30) e (4.39)-(4.40), verificamos que essas equações são satisfeitas por vários modelos exatamente solúveis conhecidos. As soluções são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha\beta} &= 1, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = \text{sign}(\alpha - \beta) \sinh(\gamma) - \epsilon_0 \cosh(\gamma) \quad (\alpha \neq \beta) \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} &= (\epsilon_\alpha - \epsilon_0) \cosh(\gamma), \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 = \pm 1$ e γ é um parâmetro complexo livre, e dá o modelo anisotrópico de spin $\frac{3}{2}$ de Perk-Schultz. A versão fermiônica, obtida por uma transformação de Jordan-Wigner do Hamiltoniano (4.1) com a escolha (4.40) e com $\epsilon_0 = -\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$, é a versão anisotrópica do modelo Essler-Korepin-Schoutens.

A solução onde

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\nu}^{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha+\beta, \gamma+\nu} \quad (\alpha \neq \beta, \gamma \neq \nu), \\ \Gamma_{30}^03 &= \Gamma_{03}^30 = 0, \quad \Gamma_{\alpha3}^{\alpha3} = \Gamma_{3\alpha}^3\alpha = -\frac{U}{2} (1 + \delta_{\alpha,3}), \end{aligned} \quad (4.41)$$

com U sendo um parâmetro livre, após uma transformação de Jordan-Wigner, dá o bem conhecido modelo de Hubbard com interação coulombiana U [13]. As

soluções onde as constantes de acoplamento não nulas, são dadas por:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0\alpha}^{\alpha 0} = \Gamma_{\alpha 0}^0 &= 1 \quad (\alpha \neq 0), \quad \Gamma_{13}^{31} = \Gamma_{31}^{13} = \Gamma_{23}^{32} = \Gamma_{32}^{23} = \epsilon, \Gamma_{31}^{31} = \Gamma_{30}^{30} + \Gamma_{12}^{12}, \\
\Gamma_{12}^{30} = \Gamma_{30}^{12} &= \epsilon \Gamma_{03}^{21} = \epsilon \Gamma_{21}^{03} = \Gamma_{03}^{12} = \Gamma_{12}^{03} = \epsilon \Gamma_{21}^{30} = \epsilon \Gamma_{30}^{21} = \sin(\theta) \\
\Gamma_{12}^{21} = \Gamma_{21}^{12} &= -\epsilon \Gamma_{20}^{02} = -\epsilon \Gamma_{02}^{20} = -\frac{\epsilon}{2} \Gamma_{30}^{30} = \Gamma_{21}^{21} e^{2\eta} = \Gamma_{12}^{12} e^{-2\eta} = \cos(\theta) \\
\Gamma_{32}^{32} = \Gamma_{30}^{30} + \Gamma_{21}^{21}, \quad \Gamma_{13}^{13} = \Gamma_{12}^{12}, \quad \Gamma_{23}^{23} = \Gamma_{21}^{21}, \quad \Gamma_{33}^{33} = \Gamma_{30}^{30} + \Gamma_{21}^{21} + \Gamma_{12}^{12} & \quad (4.42)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0\alpha}^{\alpha 0} = \Gamma_{\alpha 0}^0 &= 1 \quad (\alpha \neq 0), \quad \Gamma_{13}^{31} = \Gamma_{31}^{13} = \Gamma_{23}^{32} = \Gamma_{32}^{23} = \epsilon, \\
\Gamma_{12}^{30} = \Gamma_{30}^{12} = \epsilon \Gamma_{03}^{21} = \epsilon \Gamma_{21}^{03} &= \epsilon e^{2\eta} \Gamma_{03}^{12} = \epsilon e^{2\eta} \Gamma_{12}^{03} = e^{-2\eta} \Gamma_{21}^{30} = e^{-2\eta} \Gamma_{30}^{21} = \sin(\theta) \\
\Gamma_{12}^{21} = \Gamma_{21}^{12} = -\epsilon \Gamma_{20}^{02} = -\epsilon \Gamma_{02}^{20} &= \Gamma_{21}^{21} e^{2\eta} = \Gamma_{12}^{12} e^{-2\eta} = \cos(\theta) \\
\Gamma_{30}^{30} = 2\Gamma_{02}^{20} + \sin^2(\theta) \frac{(e^\eta - \epsilon e^{-\eta})^2}{\cos(\theta)}, \quad \Gamma_{31}^{31} = \Gamma_{32}^{32} = \Gamma_{30}^{30} + \Gamma_{12}^{12}, \\
\Gamma_{13}^{13} = \Gamma_{23}^{23} = \Gamma_{21}^{21}, \quad \Gamma_{33}^{33} = \Gamma_{30}^{30} + \Gamma_{21}^{21} + \Gamma_{12}^{12}, & \quad (4.43)
\end{aligned}$$

onde $\epsilon = \pm 1$ e θ, η são parâmetros livres, dão os modelos integráveis de dois parâmetros introduzidos em [61]. É interessante mencionar que esses dois modelos contêm como caso especial o modelo de Hubbard, o modelo Essler-Korepin-Schoutens, assim como o modelo de Hubbard estendido q deformado, que foi introduzido em [73, 75].

Em todos esses casos os parâmetros espectrais (k_1, \dots, k_n) são fixados pela propriedade cíclica do traço. As relações (4.19), (4.15), (4.26) e (4.29) implicam que qualquer amplitude do *ansatz* do produto matricial (4.4)-(4.5) seja proporcional a $\text{Tr} \left[Y_{k_1}^{(Q_1)} \dots Y_{k_n}^{(Q_n)} E^L \Omega_P \right]$. A aplicação sucessiva das relações de comutação

(4.15), (4.29) e (4.6) dão

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[Y_{k_1}^{(Q_1)} \dots Y_{k_n}^{(Q_n)} E^L \Omega_P \right] &= e^{ik_j L} \sum_{Q'_1, \dots, Q'_n=1}^2 \langle Q_1, \dots, Q_n | T | Q'_1, \dots, Q'_n \rangle \\ &\times \text{Tr} \left[Y_{k_1}^{(Q'_1)} \dots Y_{k_n}^{(Q'_n)} E^L \Omega_P \right], \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde usamos a identidade

$$\sum_{Q'_j, Q''_{j+1}=1}^2 S_{Q'_j Q''_{j+1}}^{Q_j Q''_{j+1}}(k_j, k_j) = -1, \quad (4.45)$$

e

$$\langle Q_1, \dots, Q_n | T | Q'_1, \dots, Q'_n \rangle = \sum_{Q''_1, \dots, Q''_n=1}^2 \prod_{i=1}^n S_{Q'_i Q''_i}^{Q_i Q''_i}(k_i, k_j), \quad (4.46)$$

é a matriz de transferência de dimensão $2^n \times 2^n$ de um modelo inhomôgeo de seis-vértices (inhomogeneidades $\{k_j\}$ ao longo da vertical), com pesos de Boltzmann dados pelas (4.16) e (4.25). O modelo de vértice é definido em um cilindro de perímetro transversal n e condições de contorno periódicas

$$S_{Q'_n Q''_n}^{Q_n Q''_n}(k_n, k) = S_{Q'_n Q''_n}^{Q_n Q''_n}(k_n, k). \quad (4.47)$$

A relação (4.44) fixa os valores dos parâmetros espectrais $\{k_j\}$ como solução da equação

$$e^{-ik_j L} = \Lambda(k_j, \{k_l\}) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4.48)$$

onde $\Lambda(k_j, \{k_l\})$ são os auto-valores da matriz de transferência (4.46). Para completar nossa solução precisamos calcular os auto-valores da matriz de transferência inhomôgeo (4.46). Estamos em uma situação similar a do capítulo anterior, exceto que agora os vértices inhomôgeos são definidos em uma rede periódica. Os auto-valores $\Lambda(k_j, \{k_l\})$ são obtidos fazendo $\phi(s) = 1$ em (3.96) e (3.97). Os parâmetros espectrais k_1, \dots, k_n são então fixados pela equação

$$e^{-ik_j L} = \prod_{l=1}^n S_{22}^{22}(k_l, k_j) \prod_{l=1}^{n_1} \frac{S_{22}^{22}(k_j, k_l^{(1)})}{S_{21}^{21}(k_j, k_l^{(1)})}, \quad (4.49)$$

onde os parâmetros $k_l^{(1)}$ ($l = 1, \dots, n$) são fixados por

$$\prod_{l=1}^n \frac{S_{21}^{21}(k_l, k_j^{(1)})}{S_{22}^{22}(k_l, k_j^{(1)})} = \prod_{l=1}^{n_1} \frac{S_{22}^{22}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)}) S_{21}^{21}(k_l^{(1)}, k_j^{(1)})}{S_{11}^{11}(k_l^{(1)}, k_j^{(1)}) S_{21}^{21}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)})}, \quad (4.50)$$

para $j = 1, \dots, n_1$.

Capítulo 5

Exclusão assimétrica de partículas com tamanho arbitrário

5.1 Exclusão assimétrica de partículas com tamanho arbitrário

O modelo padrão de exclusão assimétrica é um modelo estocástico unidimensional que descreve as flutuações de partículas excludentes, difundindo assimetricamente em uma rede discreta. Denotando um sítio i ocupado na rede por $\sigma_i^z = +1$ e um sítio i vazio por $\sigma_i^z = -1$, o operador de evolução temporal para a distribuição de probabilidade das partículas é dado pelo seguinte Hamiltoniano XXZ assimétrico:

$$H = - \sum_{i=1}^L \left[\epsilon_+ \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+ + \epsilon_- \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \frac{1}{4} (\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - 1) \right], \quad (5.1)$$

onde L é o número de sítios na rede, e $\sigma^\pm = (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2$ são os operadores de levantamento e abaixamento de Pauli para spin $\frac{1}{2}$. Em (5.1) foi imposta a

condição periódica de contorno e ϵ_+ , e ϵ_- ($\epsilon_+ + \epsilon_- = 1$) são as probabilidades de transição relacionadas aos movimento para a direita e esquerda, respectivamente. É importante mencionar que esse Hamiltoniano, ao contrário do modelo XXZ quântico padrão, não é Hermitiano para $\epsilon_+ \neq \epsilon_-$. Tal propriedade, além de produzir auto-valores complexos, também produz regimes sem massa, em uma região onde o modelo XXZ padrão é massivo (espectro não contínuo), e cuja massa vai a zero no limite termodinâmico com $L^{-3/2}$ [76]-[78].

A generalização desse problema, que investigamos nesta seção, é obtida considerando que as partículas do sistema podem ter um volume de exclusão de s ($s = 0, 1, 2, \dots$) sítios, ao invés de terem um volume de exclusão do tamanho de um único sítio ($s = 1$), como no caso descrito por (5.1). É importante frisar ainda, que diferente do modelo de exclusão clássico, onde todas as partículas têm o mesmo tamanho $s = 1$, neste caso, cada partícula individual na rede pode ter um tamanho distinto s_i ($s_i = 0, 1, 2, \dots$). Partículas de tamanho s na rede são compostas por s monômeros de um sítio e podemos representar suas coordenadas dando a posição do seu monômero mais à esquerda. Na Fig. 5.1, mostramos alguns exemplos para configurações com $n = 5$ moléculas e algumas distribuições de tamanhos $\{s\}$ em uma rede com $L = 5$ sítios. Podemos notar que moléculas de tamanho $s = 0$ não têm volume excludente, e conseqüentemente, podemos ter um número arbitrário dessas partículas em um dado sítio. No entanto, devemos reforçar que apesar de não terem tamanho, elas devem manter suas ordens na distribuição de tamanhos na rede. Isso significa que se uma dada partícula de tamanho s está inicialmente entre partículas de tamanho s' e s'' , ela irá manter essa ordem relativa para tempos futuros.

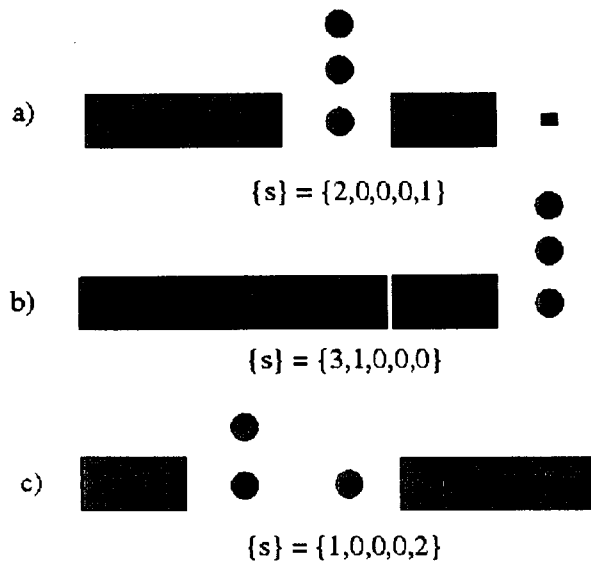


Figura 5.1: Exemplos de configurações de moléculas com tamanhos distintos em uma rede de $L = 5$.

Para descrevermos a ocupação de um dado sítio i ($1, 2, \dots, N$), vamos associar a esse sítio uma variável β_i que toma valores inteiros ($\beta_i \in \mathbf{Z}$). Se $\beta_i = 0$, o sítio está vazio (ou pode estar ocupado por um monômero de um molécula sem ser o monômero mais à esquerda). Se $\beta_i > 0$, temos um sítio com uma molécula de tamanho $s = \beta_i$ e conseqüentemente os sítios $j = i + 1, \dots, i + \beta_i - 1$ estarão vazios. Finalmente para $\beta_i = -n < 0$ temos, no sítio i , n moléculas de tamanho zero. As configurações permitidas denotadas por $\{\beta_i\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$ serão aquelas que satisfaçam os vínculos impostos pela exclusão, devido ao tamanho de cada molécula na rede periódica. Isso significa que para uma dada configuração $\{\beta_i\}$ em que temos $\beta_j \neq 0$ e $\beta_l \neq 0$, então, também devemos ter $l - j \geq \beta_l$ ou $j - l \geq \beta_j$ dependendo se $l > j$ ou $l < j$, respectivamente (veja Fig. 5.1).

A equação mestra para a distribuição de probabilidades em um dado

tempo t , $P(\{\beta\}, t)$, pode ser escrita de forma geral, como:

$$\frac{\partial P(\{\beta\}, t)}{\partial t} = -\Gamma(\{\beta\} \rightarrow \{\beta'\}) P(\{\beta\}, t) + \Gamma(\{\beta'\} \rightarrow \{\beta\}) P(\{\beta'\}, t) \quad (5.2)$$

onde $\Gamma(\{\beta\} \rightarrow \{\beta'\})$ é a taxa de transição quando a configuração $\{\beta\}$ muda para $\{\beta'\}$. No modelo consideramos que existem somente processos de difusão. Os movimentos permitidos, quando não temos partículas em posições em que seus tamanhos imponham vínculos de exclusão, serão os que uma dada partícula difunde à direita,

$$\begin{aligned} \beta_i \emptyset_{i+1} &\rightarrow \emptyset_i \beta_{i+1}, \quad \beta > 0 \\ \beta_i \gamma_{i+1} &\rightarrow (\beta + 1)_i (\gamma - 1)_{i+1}, \quad \beta < 0, \quad \gamma \leq 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

com taxa de transição ϵ_R , e difundem à esquerda,

$$\begin{aligned} \emptyset_i \beta_{i+1} &\rightarrow \beta_i \emptyset_{i+1}, \quad \beta > 0 \\ \gamma_i \beta_{i+1} &\rightarrow (\gamma - 1)_i (\beta + 1)_{i+1}, \quad \beta < 0, \quad \gamma \leq 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

com taxa de transição ϵ_L . A equação mestra (2.2) pode ser escrita como uma equação de Schrödinger com tempo euclidiano (veja [38] para aplicações gerais envolvendo processos de dois corpos)

$$\frac{\partial |P\rangle}{\partial t} = -H|P\rangle, \quad (5.5)$$

onde podemos interpretar $|P\rangle \equiv P(\{\beta\}, t)$ como uma função de onda associada. Se representamos β_i como $|\beta\rangle_i$, os vetores $|\beta\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\beta\rangle_N$ descrevem o espaço de Hilbert associado. O processo de difusão dado em (5.3) e (5.4) nos dá

o Hamiltoniano [38]

$$\begin{aligned}
H &= -D\mathcal{P} \sum_{i=1}^L (H_i^> + H_i^<) \mathcal{P}, \tag{5.6} \\
H_i^> &= \sum_{\beta=1}^{\infty} \left[\epsilon_+ (1 - E_i^{\beta,0} E_{i+1}^{0,\beta}) \mathcal{P} E_i^{0,\beta} E_{i+1}^{\beta,0} + \epsilon_- (1 - E_i^{0,\beta} E_{i+1}^{\beta,0}) \mathcal{P} E_i^{\beta,0} E_{i+1}^{0,\beta} \right], \\
H_i^< &= \sum_{\beta=-\infty}^{-1} \sum_{\gamma=-\infty}^0 \left[\epsilon_+ (E_i^{\beta+1,\beta} E_{i+1}^{\gamma-1,\gamma} - E_i^{\beta,\beta} E_{i+1}^{\gamma,\gamma}) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_- (E_i^{\gamma-1,\gamma} E_{i+1}^{\beta+1,\beta} - E_i^{\gamma,\gamma} E_{i+1}^{\beta,\beta}) \right],
\end{aligned}$$

com

$$D = \epsilon_R + \epsilon_L, \quad \epsilon_+ = \frac{\epsilon_R}{\epsilon_R + \epsilon_L}, \quad \epsilon_- = \frac{\epsilon_L}{\epsilon_R + \epsilon_L}, \tag{5.7}$$

e condição periódica de contorno. As matrizes $E^{\alpha,\beta}$ são de dimensões infinitas e com um único elemento não nulo $(E^{\alpha,\beta})_{i,j} = \delta_{\alpha,i} \delta_{\beta,j}$ ($\alpha, \beta, i, j \in \mathbf{Z}$). O projetor \mathcal{P} projeta para fora as configurações $\{\beta\}$, que não satisfazem os vínculos da exclusão para todos $\beta_i, \beta_j \neq 0 : (j - i) \geq s_i$ se $j > i$ ou $(i - j) \geq s_j$ se $i > j$. A constante D em (5.6) fixa a escala de tempo, e por simplicidade escolhemos $D = 1$. Uma simplificação de nosso modelo geral ocorre quando todas as partículas têm o mesmo tamanho $s > 0$. Neste caso as matrizes $E^{\alpha,\beta}$ podem ser substituídas por matrizes de Pauli para spin- $\frac{1}{2}$, e o Hamiltoniano é dado por:

$$H_{\{s_1=\dots=s_n=s\}} = -\mathcal{P}_s \left(\sum_{i=1}^L \epsilon_+ \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+ + \epsilon_- \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \frac{1}{4} (\epsilon_+ + \epsilon_-) (\sigma_i^z \sigma_{i+s}^z - 1) \right) \mathcal{P}_s, \tag{5.8}$$

onde agora \mathcal{P}_s projeta para fora as configurações onde dois spins para cima (na base de σ^z) estão a distâncias menores do que o tamanho $s > 0$ das partículas; o caso mais simples $s = 1$ é dado por $\mathcal{P}_s = 1$, e obtemos o Hamiltoniano de exclusão assimétrico padrão (5.1). Note que este Hamiltoniano (5.8) é um caso particular do modelo XXZ generalizado (2.2) do capítulo 2, com $2\Delta = \epsilon_+ + \epsilon_- =$

1. Para fazermos uma comparação com o modelo XXZ padrão, normalmente considerado no contexto de sistemas magnéticos, fazemos para $\epsilon_+, \epsilon_- \neq 0$ as seguintes transformações canônicas:

$$\sigma_i^\pm \rightarrow \left(\frac{\epsilon_-}{\epsilon_+}\right)^{\pm \frac{1}{2}} \sigma_i^\pm, \quad \sigma_i^z \rightarrow \sigma_i^z, \quad (i = 1, 2, \dots, L), \quad (5.9)$$

em (5.8), e obtemos:

$$H = -\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_+ \epsilon_-} \sum_{i=1}^L \mathcal{P}_s [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta (\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - 1)] \mathcal{P}_s, \quad (5.10)$$

$$\Delta = \frac{\epsilon_+ + \epsilon_-}{2 \sqrt{\epsilon_+ \epsilon_-}}.$$

Com exceção do projetor, este Hamiltoniano coincide com o modelo ferromagnético massivo de Heisenberg. No entanto agora, diferente de (2.14), a condição de contorno não é periódica, mas sim “torcida”

$$\sigma_{N+1}^\pm = \left(\frac{\epsilon_+}{\epsilon_-}\right)^{\pm \frac{L}{2}} \sigma_1^\pm, \quad \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z. \quad (5.11)$$

Desde que $\frac{\epsilon_+}{\epsilon_-} \neq 1$ este termo de contorno terá o mesmo grau de importância que o sistema todo e teremos um comportamento crítico induzido pela superfície, isto é, as massas tenderão a zero, contrariamente ao caso periódico da cadeia ferromagnética XXZ padrão.

5.1.1 O *ansatz* do produto matricial

A solução exata do problema de difusão assimétrica com exclusão generalizada foi derivada primeiramente através do *ansatz* de Bethe coordenada [62]. Nesta seção iremos “re-derivar” esta solução impondo um *ansatz* do produto matricial para as auto-funções do Hamiltoniano (5.6). Como veremos, esta derivação

mostra-se mais direta do que a obtida anteriormente através do *ansatz* de Bethe, que foi apresentada em [62].

Como o processo de difusão conserva o número de partículas, e a rede é periódica, o número total de partículas n e o momentum P são bons números quânticos. Conseqüentemente o espaço de Hilbert associado a (5.6) pode ser separado em setores de blocos disjuntos nomeados pelos valores n ($n = 0, 1, \dots$) e P ($P = \frac{2\pi l}{L}; l = 0, 12, \dots, L-1$). Além destas duas leis de conservação, a ordem dos tamanhos arbitrários $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ das n moléculas também é conservada pelo Hamiltoniano (5.6). Neste caso geral, cada partícula é conservada separadamente, e desde que no processo de difusão não são permitidas troca de posições entre as partículas, também a ordem $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ na qual as partículas aparecem, e suas permutações cíclicas, também são uma constante de movimento. A auto-função que corresponde a uma dada ordem $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, e com momentum P , pode ser escrita como:

$$|\Psi_{\{s_1, \dots, s_n\}, P}\rangle = \sum_{\{c\}} \sum_{\{x\}} f^{s_{c_1}, \dots, s_{c_n}}(x_1, \dots, x_n) |x_1, \dots, x_n\rangle, \quad (5.12)$$

onde $f^{s_{c_1}, \dots, s_{c_n}}(x_1, \dots, x_n)$ é a componente de uma configuração onde as partículas de tamanhos s_{c_1}, \dots, s_{c_n} estão localizadas nas posições x_1, \dots, x_n , respectivamente. A soma em $\{c\}$ estende-se sobre todas as permutações cíclicas $\{c_1, \dots, c_n\}$ dos inteiros $\{1, \dots, n\}$, e a soma em $\{x\}$ estende-se, para uma dada distribuição $\{s_{c_1}, \dots, s_{c_n}\}$ de moléculas, aos inteiros satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &\geq s_{c_i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ s_{c_1} &\leq x_n - x_1 \leq N - s_{c_n}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para formular nosso *ansatz* do produto matricial, associamos aos sítios ocu-

pados por partículas de tamanho s_j ($j = 1, \dots, n$) uma matriz $A^{(s_j)}$, e aos $L - n$ sítios restantes associamos à matriz E . Através do nosso *ansatz* as amplitudes das auto-funções (5.12) são dadas por:

$$f^{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} [E^{x_1-1} A^{(s_1)} E^{x_2-x_1-1} A^{(s_2)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A^{(s_n)} E^{L-x_n} \Omega_P], \quad (5.14)$$

onde, para garantir o momentum P do auto-estado, as matrizes $\{A^{(s)}\}$ devem satisfazer:

$$E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E, \quad A^{(s)}\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P A^{(s)}. \quad (5.15)$$

As propriedades algébricas das matrizes $\{A^{(s)}\}$ e E são fixadas impondo-se que as auto-funções $|\Psi_{\{s_1, \dots, s_n\}, P}\rangle$, que definem o *ansatz* (5.12), satisfaçam a equação de auto-valor

$$H|\Psi_{\{s_1, \dots, s_n\}, P}\rangle = \varepsilon_n |\Psi_{\{s_1, \dots, s_n\}, P}\rangle. \quad (5.16)$$

5.1.2 Resolução do modelo

Vamos considerar inicialmente nosso *ansatz* (5.12)-(5.15) para $n = 1$ e $n = 2$ moléculas.

n = 1. Para uma partícula de tamanho s , a equação de auto-valores (5.16) fornece:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \text{Tr} [E^{x_1-1} A^{(s)} E^{L-x_1} \Omega_P] &= -\varepsilon_+ \text{Tr} [E^{x_1-2} A^{(s)} E^{L-x_1+1} \Omega_P] \\ -\varepsilon_- \text{Tr} [E^{x_1} A^{(s)} E^{L-x_1-1} \Omega_P] &+ (\varepsilon_+ + \varepsilon_-) \text{Tr} [E^{x_1-1} A^{(s)} E^{L-x_1} \Omega_P]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Esta última equação pode ser escrita em termos de um único produto de matrizes usando a propriedade cíclica do traço e a álgebra (5.15). Fazendo isso, obtemos

a expressão da energia:

$$\varepsilon_1 = -(\epsilon_+ e^{-iP} + \epsilon_- e^{iP} - 1), \quad (5.18)$$

onde $P = \frac{2\pi l}{L}$ ($l = 0, 1, \dots, L-1$) é o momentum do estado. No entanto, como fizemos no capítulo 2 para o Hamiltoniano XXZ generalizado, podemos também resolver a equação (5.17) definindo a matriz $A^{(s)}$ em termos de uma nova matriz dependente de um parâmetro espectral:

$$A^{(s)} = A_k^{(s)} E^{2-s}, \quad (5.19)$$

onde A_k obedece a seguinte relação de comutação com a matriz E :

$$EA_k^{(s)} = e^{ik} A_k^{(s)} E. \quad (5.20)$$

Inserindo (5.19) em (5.17) e usando (5.20), obtemos:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(k) = -(\epsilon_+ e^{-ik} + \epsilon_- e^{ik} - 1), \quad (5.21)$$

onde usamos $\epsilon_+ + \epsilon_- = 1$.

Comparando (5.21) com (5.18), observamos que o parâmetro espectral k é igual ao momentum da auto-função $|\Psi_{s,P}\rangle$ de uma única partícula, isto é, $k = P = \frac{2\pi l}{L}$ ($l = 0, 1, \dots, L-1$).

n=2. Para duas partículas de tamanhos s_1 e s_2 , respectivamente, a equação de auto-valores (5.16) dá, para $|\Psi_{\{s_1, s_2\}, P}\rangle$, dois tipos de relações para as amplitudes, dependendo da localização relativa das partículas. As amplitudes que correspondem às configurações $|x, y\rangle$, onde $y > x + s_1$, fornecem a seguinte

relação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s_1)} E^{y-x-1} A^{(s_2)} E^{L-y} \Omega_P] &= -\varepsilon_+ \text{Tr} [E^{x-2} A^{(s_1)} E^{y-x} A^{(s_2)} E^{L-y} \Omega_P] \quad (5.22) \\ -\varepsilon_- \text{Tr} [E^x A^{(s_1)} E^{y-x-2} A^{(s_2)} E^{L-y} \Omega_P] &- \varepsilon_+ \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s_1)} E^{y-x-2} A^{(s_2)} E^{L-y+1} \Omega_P] \\ -\varepsilon_- \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s_1)} E^{y-x} A^{(s_2)} E^{L-y-1} \Omega_P] &+ 2 \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s_1)} E^{y-x-1} A^{(s_2)} E^{L-y} \Omega_P]. \end{aligned}$$

Para resolver esta equação identificamos as matrizes $A^{(s_j)}$ como compostas por duas outras matrizes dependentes de parâmetros espectrais $A_{k_1}^{(s_j)}$ $A_{k_2}^{(s_j)}$, isto é:

$$A^{(s_j)} = \sum_{l=1}^2 A_{k_l}^{(s_j)} E^{2-s_j}, \quad (j = 1, 2), \quad (5.23)$$

que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$E A_{k_l}^{(s_j)} = e^{ik_l} A_{k_l}^{(s_j)} E \quad \text{e} \quad A_{k_j}^{(s_j)} \Omega_P = e^{iP(1-s_j)} \Omega_P A_{k_j}^{(s_j)} \quad (j, l = 1, 2). \quad (5.24)$$

Inserindo (5.23) em (5.22) e usando (5.24), obtemos para a energia de duas partículas:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2), \quad (5.25)$$

onde $\varepsilon(k)$ é dada pela (5.21).

O momentum do auto-estado pode ser obtido através da razão entre as componentes associadas às configurações $|x, y\rangle$ e $|x+m, y+m\rangle$; e usando a propriedade cíclica do traço e a relação de comutação (5.24), obtemos:

$$P = k_1 + k_2. \quad (5.26)$$

Finalmente, se as duas partículas estão na menor distância $y = x + s_1$ (condição de “colisão”), da equação de auto-valores (5.16), obtemos a relação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s_1)} E^{s_1-1} A^{(s_2)} E^{L-x-s_1} \Omega_P] &= -\varepsilon_+ \text{Tr} [E^{x-2} A^{(s_1)} E^{s_1} A^{(s_2)} E^{L-x-s_1} \Omega_P] \\ -\varepsilon_- \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s_1)} E^{s_1} A^{(s_2)} E^{L-x-s_1-1} \Omega_P] &+ \text{Tr} [E^{x-1} A^{(s_1)} E^{s_1-1} A^{(s_2)} E^{L-x-s_1} \Omega_P]. \quad (5.27) \end{aligned}$$

Inserindo nesta última expressão a definição (5.23) e a expressão (5.25), e usando as relações algébricas (5.24), obtemos as relações de comutação para as matrizes $\{A_{k_j}^{(s_l)}\}$:

$$A_{k_j}^{(s_m)} A_{k_l}^{(s_r)} = S(k_j, k_l) A_{k_l}^{(s_m)} A_{k_j}^{(s_r)}, \quad (j \neq l; m, r = 1, 2), \quad A_{k_j}^{(s_1)} A_{k_j}^{(s_2)} = 0, \quad (5.28)$$

onde $S(k_j, k_l)$ é dado por:

$$S(k_j, k_l) = -\frac{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_l)} - e^{ik_j}}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_l)} - e^{ik_l}}. \quad (5.29)$$

É interessante notar que as constantes de estrutura $S(k_j, k_m)$ da álgebra definida em (5.28) são independentes dos super-escritos das matrizes $A_{k_j}^{(s_l)}$; como consequência deste fato, a álgebra das matrizes $\{A_{k_j}^{(s_l)}\}$ também serão independentes dos super-escritos. No entanto, os super-escritos destas matrizes não podem ser esquecidos, pois nas relações de comutação (5.28) eles não trocam de posição, e também porque a relação de comutação das matrizes $A_{k_j}^{(s_l)}$ com a matriz Ω_P depende do tamanho da partícula (veja a (5.24)). Vemos ainda, que essa constante de estrutura (5.29) coincide com a constante de estrutura (2.32) com $\Delta = \frac{1}{2}$ do modelo XXZ generalizado, tratado no capítulo 2. É bom lembrar que no caso particular $s_1 = s_2$ o processo estocástico pode ser descrito por um Hamiltoniano quântico (5.8) que coincide com o modelo XXZ (2.2) estudado no capítulo 2, com $\Delta = \frac{1}{2}$.

Os parâmetros espectrais k_1 e k_2 são fixados pela propriedade cíclica do traço. Usando as relações algébricas (5.24) e (5.28), obtemos:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[A_{k_l}^{(s_1)} A_{k_j}^{(s_2)} E^{L-s_1-s_2+2} \Omega_P \right] = \\ & e^{-ik_j L} e^{ik_j(s_1+s_2-2)} e^{-iP(s_2-1)} S(k_j, k_l) \text{Tr} \left[A_{k_l}^{(s_2)} A_{k_j}^{(s_1)} E^{L-s_1-s_2+2} \Omega_P \right]. \quad (5.30) \end{aligned}$$

Se as partículas têm o mesmo tamanho $s_1 = s_2 = s$ obtemos o mesmo resultado (2.33) e (2.34), com $\Delta = \frac{1}{2}$, do capítulo 2; o que é esperado desde que neste caso o operador de evolução temporal do processo estocástico possa ser mapeado no Hamiltoniano do modelo XXZ generalizado do mesmo capítulo. No entanto, se as partículas forem de tamanhos diferentes a situação será nova. Diferentemente da equação (2.33), os traços dos lados esquerdo e direito da equação (5.30) não serão os mesmos se $s_1 \neq s_2$. Se repetirmos mais uma vez as comutações que levaram a (3.16), obtemos o mesmo traço em ambos os lados, conseqüentemente:

$$\left[e^{-ik_j L} e^{ik_j(s_1+s_2-2)} S(k_j, k_l) \right]^2 e^{-iP(s_1+s_2-1)} = 1. \quad (5.31)$$

desde que $P = k_1 + k_2$, esta última expressão será equivalente a:

$$e^{ik_j L} = e^{i\frac{2\pi}{2}m} \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{\bar{s}-1} S(k_j, k_l), \quad m = 0, 1; \quad j \neq l = 1, 2; \quad s_1 \neq s_2, \quad (5.32)$$

e

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2}{2} \quad (5.33)$$

é o tamanho médio das duas partículas. A expressão (5.32) generaliza a expressão (2.34) obtida para o caso de partículas de tamanhos iguais. No entanto, notamos que tendo $m = 0, 1$ em (5.32), chegamos a duas vezes mais soluções do que na equação (2.34) para partículas de tamanhos iguais. De fato, isto ocorre desde que para $s_1 \neq s_2$ as partículas são distinguíveis, e conseqüentemente, o número de auto-funções é dobrado quando comparado ao caso de partículas indistinguíveis $s_1 = s_2$.

n geral. Neste caso temos uma distribuição geral de partículas com tamanhos $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Portanto, as auto-funções correspondentes são dadas por (5.12)

e (5.14). A equação de auto-valores para as componentes de $|x_1, \dots, x_n\rangle$, quando todas as partículas não estiverem em posição de colisão, fornece a equação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}-1} A^{(s_i)} E^{x_{i+1}-x_i-1} A^{(s_{i+1})} \dots A^{(s_n)} E^{L-x_n} \Omega_P] = & \quad (5.34) \\ -\epsilon_+ \sum_{i=1}^n \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}-2} A^{(s_i)} E^{x_{i+1}-x_i} A^{(s_{i+1})} \dots A^{(s_n)} E^{L-x_n} \Omega_P] \\ -\epsilon_- \sum_{i=1}^n \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}} A^{(s_i)} E^{x_{i+1}-x_i-2} A^{(s_{i+1})} \dots A^{(s_n)} E^{L-x_n} \Omega_P] \\ +n \text{Tr} [\dots E^{x_i-x_{i-1}-1} A^{(s_i)} E^{x_{i+1}-x_i-1} A^{(s_{i+1})} \dots A^{(s_n)} E^{L-x_n} \Omega_P], \end{aligned}$$

cuja solução é obtida pela generalização das equações (5.23) e (5.24):

$$\begin{aligned} A^{(s_j)} = \sum_{l=1}^n A_{k_l}^{(s_j)} E^{2-s_j}, \quad A_{k_l}^{(s_j)} \Omega_P = e^{iP(1-s_j)} \Omega_P A_{k_l}^{(s_j)} & \quad (5.35) \\ EA_{k_l}^{(s_j)} = e^{ik_l} A_{k_l}^{(s_j)} E, \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Usando estas relações em (5.34), obtemos as expressões da energia e do momento:

$$\varepsilon_n = \sum_{j=1}^n (\epsilon_+ e^{-ik_j} + \epsilon_- e^{ik_j} - 1), \quad P = \sum_{j=1}^n k_j, \quad (5.36)$$

respectivamente. A equação de auto-valores para as componentes nas quais um par de partículas (x_i, x_{i+1}) está localizado na posição de colisão, $x_{i+1} = x_i + s_i$ dá a generalização de (5.28)

$$A_{k_j}^{(s_t)} A_{k_l}^{(s_u)} = S(k_j, k_l) A_{k_l}^{(s_t)} A_{k_j}^{(s_u)}, \quad A_{k_j}^{(s_t)} A_{k_j}^{(s_u)} = 0, \quad (j \neq l, t, u = 1, \dots, n). \quad (5.37)$$

A propriedade cíclica do traço em (5.14) fornece, usando (5.35) e (5.37), a generalização de (5.30). Temos para cada k_j :

$$\begin{aligned} \text{Tr} [A_{k_1}^{(s_1)} A_{k_2}^{(s_2)} \dots A_{k_{j-1}}^{(s_{j-1})} A_{k_j}^{(s_j)} \dots A_{k_n}^{(s_n)} E^{L-\sum_{i=1}^n (s_i-1)} \Omega_P] = & \\ e^{-ik_j L} e^{ik_j \sum_{i=1}^n (s_i-1)} e^{-iP(s_j-1)} \left(\prod_{l=1}^n S(k_j, k_l) \right) \times & \quad (5.38) \\ \text{Tr} [A_{k_1}^{(s_n)} A_{k_2}^{(s_1)} \dots A_{k_j}^{(s_{j-1})} A_{k_{j+1}}^{(s_j)} \dots A_{k_n}^{(s_{n-1})} E^{L-\sum_{i=1}^n (s_i-1)} \Omega_P]. \end{aligned}$$

Se todas as partículas tiverem o mesmo tamanho $s_1 = \dots = s_n = s$, obteremos as expressões (2.40) e (2.41) com $\Delta = \frac{1}{2}$; isto porque neste caso, o processo estocástico é similar ao modelo XXZ generalizado do capítulo 2. Similarmente a (5.30), os traços em ambos os lados desta última equação não são iguais. Isto porque temos as distribuições de tamanhos $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \neq \{s_n, s_1, \dots, s_{n-1}\}$. Mas podemos refazer as relações de comutação que levaram a (5.38) r vezes, até chegarmos à mesma distribuição de tamanhos nos dois lados da equação, onde r é o número mínimo de rotações cíclicas de $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, na qual a configuração inicial se repete. Neste caso obtemos:

$$\left[e^{-ik_j L} e^{ik_j \sum_{i=1}^n (s_i - 1)} \prod_{l=1}^n S(k_j, k_l) \right]^r e^{-iP \frac{r}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - 1)} = 1. \quad (5.39)$$

Desde que $P = \sum_{i=1}^n k_j$, podemos reescrever esta última expressão como:

$$e^{ik_j L} = e^{i\frac{2\pi}{r} m} \prod_{l=1}^n S(k_j, k_l) \left(\frac{e^{ik_j}}{e^{ik_l}} \right)^{\bar{s}-1}, \quad m = 0, 1, \dots, r-1, \quad j, l = 1, \dots, n, \quad (5.40)$$

onde como na (5.33):

$$\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i \quad (5.41)$$

é o tamanho médio das moléculas na distribuição $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Esta equação fornece um número de soluções da ordem de r vezes maior que o número correspondente ao caso em que todas as partículas têm o mesmo tamanho.

A equação (5.40) que fixa os parâmetros espectrais das matrizes coincide com a equação de Bethe derivada através do *ansatz* de Bethe em [62]. Similarmente, como fizemos na seção 2.1.3 para o caso do modelo XXZ generalizado, podemos mostrar que as auto-funções obtidas usando o nosso *ansatz* do produto matricial coincidem com as derivadas no contexto do *ansatz* de Bethe coordenada.

5.2 Difusão assimétrica com N classes de partículas

A extensão do modelo de exclusão simples no caso em que existam N classes distintas de partículas ($c = 1, 2, \dots, N$) difundindo assimetricamente não é em geral integrável. No entanto, a integrabilidade do problema pode ser preservada se as transições difusivas das várias espécies ocorrerem em ordem hierárquica. Este problema foi inicialmente considerado no caso de $N = 2$ como um modelo para descrever choques [79]-[81] fora do equilíbrio. As propriedades estacionárias dos casos de modelos com $N = 2$ [34] e $N = 3$ [82] também podem ser estudadas através de um *ansatz* do produto matricial. Em [64] foi considerada uma generalização desse problema em que as partículas das N classes ($c = 1, 2, \dots, N$) têm tamanhos distintos ($s_{c_1}, \dots, s_{c_N} = 0, 1, \dots$), respectivamente. A solução desse modelo generalizado foi obtida através do *ansatz* de Bethe coordenada [64]. Nesta seção mostraremos que a solução desse problema, similarmente ao que fizemos na seção anterior, também pode ser obtida através de um *ansatz* do produto matricial adequado.

Neste problema generalizado, consideramos que as partículas em uma dada classe c são compostas por s_c monômeros; portanto, ocupando s_c sítios na rede ($c = 1, 2, \dots$). Consideramos como posição da molécula a coordenada do seu monômero mais à esquerda. O volume excludente das partículas da classe c é dado por seus tamanhos s_c ($c = 1, 2, \dots, N$) em unidades de espaçamento da rede. As configurações das moléculas na rede são descritas definindo a cada sítio i da rede uma variável β_i ($i = 1, 2, \dots, L$), tomando os valores $\beta_i = 0, 1, \dots, N$. Enquanto

os valores $\beta_i = 1, \dots, N$, representam sítios ocupados por moléculas das classes $c = 1, 2, \dots, N$, respectivamente, os sítios com valor $\beta = 0$ ou estarão vazios ou serão sítios excluídos devido ao tamanho das partículas. Como exemplo, $\{\beta\} = \{1, 0, 2, 0, 2, 0\}$ representa a configuração na qual, em uma rede de $L = 6$ sítios, teremos uma partícula da classe 1 e tamanho $s_1 = 2$ no sítio 1, e duas partículas da classe 2 e tamanho $s_2 = 1$ localizadas nos sítios 3 e 5. As configurações permitidas são dadas, em geral, pelo conjunto $\{\beta_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, L$), onde para cada par $(\beta_i, \beta_j) \neq 0$ com $j > i$ temos $j - i > s_{\beta_i}$. Os processos estocásticos permitidos no problema são a troca de posições entre partículas e a difusão assimétrica, desde que o vínculo devido ao tamanho das partículas seja satisfeito. Os possíveis movimentos de uma dada molécula são:

difusão à direita:

$$\beta_i \emptyset_{i+1} \rightarrow \emptyset_i \beta_{i+1} \quad (\text{com taxa } \Gamma_R), \quad (5.42)$$

difusão à esquerda:

$$\emptyset_i \beta_{i+1} \rightarrow \beta_i \emptyset_{i+1} \quad (\text{com taxa } \Gamma_L), \quad (5.43)$$

e troca de partículas:

$$\begin{aligned} \beta_i \beta'_{i+s_\beta} &\rightarrow \beta'_i \beta_{i+s_{\beta'}} \quad (\beta < \beta') \quad (\text{com taxa } \Gamma_R), \\ \beta_i \beta'_{i+s_\beta} &\rightarrow \beta'_i \beta_{i+s_{\beta'}} \quad (\beta > \beta') \quad (\text{com taxa } \Gamma_L), \end{aligned} \quad (5.44)$$

com $\beta, \beta' = 1, 2, \dots, N$. Como vemos em (5.44), partículas da classe c trocam de posição com as partículas da classe $c' > c$, com a mesma taxa com que elas trocam de posição com sítios vazios (difusão). No entanto, o efeito efetivo desse movimento é diferente do processo de difusão, já que, trocando de posições, as

partículas se movem de s_c unidades da rede, acelerando suas difusões de $s_c > 1$.

A identificação da equação mestra com a equação de Schrödinger como em (5.5)

fornece o Hamiltoniano [64]:

$$\begin{aligned}
 H &= D\mathcal{P} \sum_{i=1}^L H_i \mathcal{P} \\
 H_i &= - \sum_{\alpha=1}^N [\epsilon_+ (1 - E_i^{\alpha,0} E_{i+1}^{0,\alpha}) \mathcal{P} E_i^{0,\alpha} E_{i+1}^{\alpha,0} + \epsilon_- (1 - E_i^{0,\alpha} E_{i+1}^{\alpha,0}) \mathcal{P} E_i^{\alpha,0} E_{i+1}^{0,\alpha}] \\
 &\quad + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \epsilon_{\alpha,\beta} (E_i^{\beta,\alpha} E_{i+s_\beta}^{\alpha,0} E_{i+s_\alpha}^{0,\beta} - E_i^{\alpha,\alpha} E_{i+s_\beta}^{0,0} E_{i+s_\alpha}^{\beta,\beta}), \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

com

$$D = \Gamma_R + \Gamma_L, \quad \epsilon_+ = \frac{\Gamma_R}{\Gamma_R + \Gamma_L}, \quad \epsilon_- = \frac{\Gamma_L}{\Gamma_R + \Gamma_L} \quad (\epsilon_+ + \epsilon_- = 1), \tag{5.46}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} \epsilon_+ & \alpha < \beta \\ 0 & \alpha = \beta \\ \epsilon_- & \alpha > \beta \end{cases} \tag{5.47}$$

e condição periódica de contorno. As matrizes $E^{\alpha,\beta}$ são de dimensão $(N+1) \times (N+1)$ com um único elemento não nulo $(E^{\alpha,\beta})_{ij} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j}$ ($\alpha, \beta, i, j = 0, \dots, N$). O projetor \mathcal{P} em (5.45) projeta para fora do espaço de configurações associado os vetores $|\{\beta\}\rangle$ representando configurações de moléculas em posições proibidas; estas posições proibidas são as que não satisfazem os vínculos devido aos tamanhos das partículas. Matematicamente esta condição significa que para todos i, j com $\beta_i, \beta_j \neq 0$ devemos ter $|i - j| \geq s_{\beta_i}$ ($j > i$). A constante D em (5.45) fixa a escala de tempo do problema, e a escolhemos $D = 1$ sem perda de generalidade. O Hamiltoniano (5.45) correspondente ao caso particular onde todas as moléculas têm tamanho $s = 1$, e é relacionado ao modelo de cadeia anisotrópica $SU(N+1)$ de spin- $\frac{N}{2}$ de Sutherland [58, 83] ou ao modelo $SU(N+1)$ de Perk-Schultz [59],

com condição de contorno torcida [38].

No final dessa seção vamos apresentar a solução de um problema ainda mais geral, cuja solução não foi obtida em [64]. A solução deste modelo é bastante complicada partindo do *ansatz* de Bethe coordenada. Como veremos, por outro lado, sua derivação não é difícil através do nosso *ansatz* do produto matricial. Nesta generalização, ao invés de termos todas as partículas de uma dada classe c com o mesmo tamanho s_c , cada partícula individualmente poderá ter um tamanho arbitrário. Neste caso as configurações da rede serão dadas por $\{\vec{\beta}\} = \{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_L\}$ onde $\vec{\beta}_i = (c, s)$ significa que o sítio i ($i = 1, 2, \dots, L$) da rede foi ocupado por uma partícula da classe c ($c = 1, 2, \dots, N$), tendo tamanho s ($s = 1, 2, \dots$). O Hamiltoniano relacionado a este processo estocástico é dado por uma generalização de (5.45), em que temos:

$$\begin{aligned}
 H &= DP \sum_{j=1}^L H_j \mathcal{P} \\
 H_j &= - \sum_{\vec{\beta}} \left[\epsilon_+ (1 - E_j^{\vec{\beta}, \vec{0}} E_{j+1}^{\vec{0}, \vec{\beta}}) \mathcal{P} E_j^{\vec{0}, \vec{\beta}} E_{j+1}^{\vec{\beta}, \vec{0}} + \epsilon_- (1 - E_j^{\vec{0}, \vec{\beta}} E_{j+1}^{\vec{\beta}, \vec{0}}) \mathcal{P} E_j^{\vec{\beta}, \vec{0}} E_{j+1}^{\vec{0}, \vec{\beta}} \right] \\
 &\quad + \sum_{\vec{\beta}=(c,s)} \sum_{\vec{\beta}'=(c',s')} \epsilon_{cc'} (E_j^{\vec{\beta}', \vec{\beta}} E_{j+s'}^{\vec{\beta}, \vec{0}} E_{j+s}^{\vec{0}, \vec{\beta}'} - E_j^{\vec{\beta}, \vec{\beta}} E_{j+s}^{\vec{0}, \vec{0}} E_{j+s'}^{\vec{\beta}', \vec{\beta}'}), \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

com ϵ_+ , ϵ_- e $\epsilon_{cc'}$ ($c, c' = 1, 2, \dots, N$) dados pela (5.46) e (5.47).

5.2.1 O *ansatz* do produto matricial para o caso particular

A solução exata do problema de difusão assimétrica com N classes de partículas, cujo Hamiltoniano relacionado é dado pela equação (5.46), foi obtida em [64] através do *ansatz* de Bethe coordenada. Nesta seção, obteremos esta solução através de um *ansatz* do produto matricial apropriado. Além disso, nossa solução permite extensões para os problemas mais gerais discutidos na seção

anterior e cujo Hamiltoniano é dado em (5.48).

Vamos considerar inicialmente o caso simples em que todas as partículas de uma dada classe ($c = 1, \dots, N$) tenham um tamanho único ($s_c = 1, 2, \dots$). Devido a conservação de partículas no processo de difusão e de troca de posições, o número total de partículas em cada classe é conservado separadamente. Portanto, o espaço de Hilbert associado pode ser separado em setores de blocos disjuntos em função dos números n_1, n_2, \dots, n_N ($n_i = 0, 1, \dots$) de partículas das classes i ($i = 1, 2, \dots, N$). Queremos obter as auto-funções $|n_1, \dots, n_N\rangle$ da equação de auto-valores:

$$H|n_1, \dots, n_N\rangle = \varepsilon_n |n_1, \dots, n_N\rangle, \quad (5.49)$$

onde

$$|n_1, \dots, n_N\rangle = \sum_{\{c\}} \sum_{\{x\}}^* f(x_1, c_1; \dots; x_n, c_n) |x_1, c_1; \dots; x_n, c_n\rangle. \quad (5.50)$$

O ket $|x_1, c_1; \dots; x_n, c_n\rangle$ representa as configurações em que temos uma partícula da classe c_i ($c_i = 1, \dots, N$) nas posição x_i ($x_i = 1, \dots, L$), e o número total de partículas é $n = n_1 + \dots + n_N$. A soma em $\{c\} = \{c_1, \dots, c_n\}$ estende-se sobre todas as permutações dos n números inteiros $\{1, 2, \dots, N\}$, em que n_i termos têm o valor i ($i = 1, \dots, N$); enquanto a soma em $\{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ estende-se, para cada permutação $\{c\}$, sobre o conjunto de inteiros, satisfazendo:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\geq x_i + s_{c_i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ s_{c_1} &\leq x_n - x_1 \leq L - s_{c_n}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

O *ansatz* do produto matricial que propomos assume que para uma auto-função arbitrária $|n_1, \dots, n_N\rangle$ com momentum P , poderemos escrever as

amplitudes de (5.50) em termos do traço de um produto de matrizes:

$$f(x_1, c_1; \dots; x_n, c_n) = \text{Tr}[E^{x_1-1}Y^{(c_1)}E^{x_2-x_1-1}Y^{(c_2)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1}Y^{(c_n)}E^{L-x_n}\Omega_P]. \quad (5.52)$$

As matrizes $Y^{(c)}$ ($c = 1, \dots, N$), E e Ω_P obedecem as relações algébricas que garantem a validade da equação de auto-valores (5.49). O momentum P do estado é obtido fazendo com que as matrizes do *ansatz* satisfaçam as relações:

$$E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E, \quad Y^{(c)}\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P Y^{(c)}, \quad c = 1, \dots, N. \quad (5.53)$$

5.2.2 Resolução do modelo particular

Vamos considerar os casos mais simples quando temos $n = 1$ e $n = 2$ partículas antes de tratarmos do caso de n geral.

n=1 Neste caso o problema é o mesmo da seção 5.1.2 e obtemos as energias dadas em (5.18).

n=2 Para duas partículas das classes c_1 e c_2 ($c_1, c_2 = 1, \dots, N$) na rede temos dois tipos distintos de relações dependendo se as amplitudes são relacionadas ou não às configurações em que as duas partículas estejam na posição de colisão $x_2 = x_1 + s_{c_1}$. A equação de auto-valores para as componentes em que as partículas das classes c_1 e c_2 estão nas posições (x_2, x_1) , tal que $x_2 > x_1 + s_{c_1}$, dá a relação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \text{Tr} [E^{x_1-1}Y^{(c_1)}E^{x_2-x_1-1}Y^{(c_2)}E^{L-x_2}\Omega_P] = \\ -\epsilon_+ \text{Tr} [E^{x_1-2}Y^{(c_1)}E^{x_2-x_1}Y^{(c_2)}E^{L-x_2}\Omega_P] - \epsilon_- \text{Tr} [E^{x_1}Y^{(c_1)}E^{x_2-x_1-2}Y^{(c_2)}E^{L-x_2}\Omega_P] \\ -\epsilon_+ \text{Tr} [E^{x_1-1}Y^{(c_1)}E^{x_2-x_1-2}Y^{(c_2)}E^{L-x_2+1}\Omega_P] - \epsilon_- \text{Tr} [E^{x_1-1}Y^{(c_1)}E^{x_2-x_1}Y^{(c_2)}E^{L-x_2-1}\Omega_P] \\ + 2\text{Tr} [E^{x_1-1}Y^{(c_1)}E^{x_2-x_1-1}Y^{(c_2)}E^{L-x_2}\Omega_P]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

A solução dessa equação é obtida identificando as matrizes $Y^{(c)}$ como compostas por novas matrizes dependentes de dois parâmetros espectrais, $Y_{k_1}^{(c)}$ e $Y_{k_2}^{(c)}$, isto é:

$$Y^{(c)} = \sum_{i=1}^2 Y_{k_i}^{(c)} E^{2-s_c}, \quad (5.55)$$

que satisfaz as relações de comutação:

$$EY_{k_j}^{(c)} = e^{ik_j} Y_{k_j}^{(c)} E, \quad Y_{k_j}^{(c)} \Omega_P = e^{iP(1-s_c)} \Omega_P Y_{k_j}^{(c)} \quad (j = 1, 2; \quad c = 1, \dots, N). \quad (5.56)$$

Em termos dos parâmetros espectrais ainda desconhecidos k_j ($j = 1, 2$), a energia e o momentum são dados por:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2), \quad P = k_1 + k_2, \quad (5.57)$$

onde $\varepsilon(k) = -(\epsilon_+ e^{-ik} + \epsilon_- e^{ik} - 1)$.

A equação de auto-valor (5.49) para as componentes de (5.50) na qual duas partículas estão na posição de colisão, isto é, $x_2 = x_1 + s_{c_1}$, fornece:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(c_1)} E^{s_{c_1}-1} Y^{(c_2)} E^{L-x_1-s_{c_1}} \Omega_P] &= -\epsilon_+ \text{Tr} [E^{x_1-2} Y^{(c_1)} E^{s_{c_1}} Y^{(c_2)} E^{L-x_1-s_{c_1}} \Omega_P] \\ &- \epsilon_- \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(c_1)} E^{s_{c_1}} Y^{(c_2)} E^{L-x_1-s_{c_1}-1} \Omega_P] - \epsilon_{c_2 c_1} \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(c_2)} E^{s_{c_2}-1} Y^{(c_1)} E^{L-x_1-s_{c_2}} \Omega_P] \\ &+ 2(1 + \epsilon_{c_1 c_2}) \text{Tr} [E^{x_1-1} Y^{(c_1)} E^{s_{c_1}-1} Y^{(c_2)} E^{L-x_1-s_{c_1}} \Omega_P]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Substituindo (5.55) e (5.57) nesta última expressão e usando (5.56) obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{l,m} \left\{ [-(\epsilon_+ e^{-i(k_l+k_m)} + \epsilon_-) + e^{-ik_l} (1 - \epsilon_{c_1, c_2})] \text{Tr} [E^{x_1} Y_{k_l}^{(c_1)} Y_{k_m}^{(c_2)} E^{L-x_1-s_{c_1}-s_{c_2}+2} \Omega_P] \right. \\ \left. + \epsilon_{c_2, c_1} e^{-ik_l} \text{Tr} (E^{x_1} Y_{k_l}^{(c_2)} Y_{k_m}^{(c_1)} E^{L-x_1-s_{c_1}-s_{c_2}+2} \Omega_P) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Esta última equação é satisfeita impondo as seguintes relações de comutação entre os operadores $\{Y_k^{(c)}\}$

$$\sum_l \sum_m \left\{ [D_{l,m} + e^{ik_m} (1 - \epsilon_{c_1, c_2})] Y_{k_l}^{(c_1)} Y_{k_m}^{(c_2)} + \epsilon_{c_2, c_1} e^{ik_m} Y_{k_l}^{(c_2)} Y_{k_m}^{(c_1)} \right\} = 0, \quad (5.60)$$

onde:

$$\mathcal{D}_{l,m} = -(\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_l+k_m)}). \quad (5.61)$$

É interessante considerar separadamente os casos onde as duas partículas são da mesma classe $c_1 = c_2$ ou de classes diferentes $c_1 \neq c_2$. Se $c_1 = c_2 = c$ ($c = 1, \dots, N$), desde que $\epsilon_{c,c} = 0$ e $\mathcal{D}_{l,m} + e^{ik_m} \neq \mathcal{D}_{m,l} + e^{ik_l}$ para $l \neq m$ obtemos em (5.60) e (5.61):

$$Y_{k_l}^{(c)} Y_{k_m}^{(c)} = S_{c,c}^{c,c}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(c)} Y_{k_l}^{(c)} \quad (l \neq m), \quad \left(Y_{k_l}^{(c)} \right)^2 = 0, \quad (5.62)$$

onde

$$S_{c,c}^{c,c}(k_l, k_m) = -\frac{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_l+k_m)} - e^{ik_l}}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_l+k_m)} - e^{ik_m}}, \quad (5.63)$$

e ($l, m = 1, 2$; $c = 1, \dots, N$). A relação (5.60) nos casos onde $c_1 \neq c_2$ fornece na forma matricial, as equações abaixo:

$$\sum_{l,m=1}^2 \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{l,m} + \epsilon_{c_2,c_1} e^{ik_m} & \epsilon_{c_2,c_1} e^{ik_m} \\ \epsilon_{c_1,c_2} e^{ik_m} & \mathcal{D}_{l,m} + \epsilon_{c_1,c_2} e^{ik_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{k_l}^{(c_1)} Y_{k_m}^{(c_2)} \\ Y_{k_l}^{(c_2)} Y_{k_m}^{(c_1)} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.64)$$

De forma similar ao que foi feito em [64], a equação acima pode ser rearranjada diretamente fornecendo as seguintes relações algébricas:

$$\begin{aligned} Y_{k_l}^{(c_1)} Y_{k_m}^{(c_2)} &= \sum_{c'_1, c'_2=1}^N S_{c'_1, c'_2}^{c_1, c_2}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(c'_2)} Y_{k_l}^{(c'_1)} \quad (k_l \neq k_m), \\ Y_{k_l}^{(c_1)} Y_{k_l}^{(c_2)} &= 0, \end{aligned} \quad (5.65)$$

onde ($l, m = 1, 2$), $c_1, c_2 = 1, \dots, N$ e as "constantes de estrutura" da álgebra são as componentes de uma matriz S cujas componentes não nulas são dadas por (5.63), e por:

$$\begin{aligned} S_{c_2, c_1}^{c_1, c_2}(k_1, k_2) &= [1 - \epsilon_{c_1, c_2} \Phi(k_1, k_2)] S_{c_1, c_1}^{c_1, c_1}(k_1, k_2) \quad (c_1, c_2 = 1, \dots, N), \\ S_{c_1, c_2}^{c_1, c_2}(k_1, k_2) &= \epsilon_{c_2, c_1} \Phi(k_1, k_2) S_{c_1, c_1}^{c_1, c_1}(k_1, k_2) \quad (c_1, c_2 = 1, \dots, N; \quad c_1 \neq c_2), \end{aligned} \quad (5.66)$$

onde

$$\Phi(k_1, k_2) = \frac{e^{ik_1} - e^{ik_2}}{e^{ik_1} - \epsilon_+ - \epsilon_- e^{i(k_1+k_2)}}. \quad (5.67)$$

Os parâmetros complexos (k_1, k_2) , que até agora estão livres, são fixados pela propriedade cíclica do traço em (5.52), e pelas relações algébricas (5.53), (5.55) e (5.56). Ao invés de obter a expressão para os parâmetros espectrais quando $n = 2$, vamos considerar diretamente o caso de n geral.

n geral. Neste caso a equação de auto-valor (5.49), para as componentes da auto-função correspondentes às configurações em que todas as partículas estão a distâncias maiores que a distância de colisão, fornece a generalização de (5.54); que é prontamente resolvida identificando, como em (5.55), as matrizes $Y^{(c)}$ como combinações de n novas matrizes dependentes de parâmetros espectrais, isto é:

$$Y^{(c)} = \sum_{i=1}^n Y_{k_i}^{(c)} E^{2-s_c}, \quad (5.68)$$

que devem satisfazer as seguintes relações algébricas com as matrizes E :

$$EY_{k_j}^{(c)} = e^{ik_j} Y_{k_j}^{(c)} E \quad (j = 1, \dots, n; \quad c = 1, 2, \dots, N), \quad (5.69)$$

e com (5.53):

$$Y_{k_j}^{(c)} \Omega_P = e^{iP(1-s_c)} \Omega_P Y_{k_j}^{(c)} E \quad (j = 1, \dots, n; \quad c = 1, 2, \dots, N). \quad (5.70)$$

A energia e o momentum em termos dos parâmetros espectrais $\{k_j\}$ são dados pela generalização de (5.57), em que temos:

$$\varepsilon_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon(k_j), \quad P = \sum_{j=1}^n k_j. \quad (5.71)$$

As componentes das auto-funções correspondentes a configurações onde um par de partículas das classes c_1 e c_2 estão localizadas na posição de colisão, x_i e $x_{i+1} = x_i + s_{c_1}$, fornecem relações que reproduzem (5.65) - (5.67).

Desde que no caso geral tenhamos o produto de n operadores $\{Y_{k_j}^{(c)}\}$, as relações algébricas (5.53), (5.56) e (5.65) devem fornecer uma única relação entre estes produtos. Por exemplo, o produto $\dots Y_{k_1}^{(\alpha)} Y_{k_2}^{(\beta)} Y_{k_3}^{(\gamma)} \dots$ pode ser relacionado ao produto $\dots Y_{k_3}^{(\gamma)} Y_{k_2}^{(\beta)} Y_{k_1}^{(\alpha)} \dots$ por dois caminhos distintos; podemos fazer comutações, ou pela ordem $\alpha\beta\gamma \rightarrow \beta\alpha\gamma \rightarrow \beta\gamma\alpha \rightarrow \gamma\beta\alpha$, ou pela ordem $\alpha\beta\gamma \rightarrow \alpha\gamma\beta \rightarrow \gamma\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta\alpha$. Conseqüentemente, devemos ter:

$$\sum_{\gamma, \gamma', \gamma''=1}^N S_{\gamma, \gamma'}^{\alpha, \alpha'}(k_1, k_2) S_{\beta, \gamma''}^{\gamma, \alpha''}(k_1, k_3) S_{\beta', \beta''}^{\gamma', \gamma''}(k_2, k_3) = \sum_{\gamma, \gamma', \gamma''=1}^N S_{\gamma', \gamma''}^{\alpha', \alpha''}(k_2, k_3) S_{\gamma, \beta''}^{\alpha, \gamma''}(k_1, k_3) S_{\beta, \beta'}^{\gamma, \gamma'}(k_1, k_2), \quad (5.72)$$

para $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' = 1, \dots, N$. Esta última relação é justamente a relação de Yang-Baxter [68, 3] para a matriz S definida em (5.63) e (5.66). De fato, a condição (5.72) é suficiente para garantir que qualquer produto de matrizes será unicamente relacionado, o que implica na associatividade da álgebra dos operadores $\{Y_{k_j}^{(c)}\}$. Podemos verificar que a relação de Yang-Baxter (5.72), com S dado por (5.63) e (5.66), é satisfeita para um número N arbitrário de espécies distintas de partículas. É interessante reforçar que nossa solução, em comparação a apresentada em [64] através do *ansatz* de Bethe coordenada, tem a vantagem de derivar uma matriz S que não depende dos tamanhos das partículas, e conseqüentemente, a condição de associatividade, ou relação de Yang-Baxter (5.72), será mais fácil de ser verificada, desde que ela é sempre a mesma, independentemente dos tamanhos das partículas.

Os parâmetros espectrais $\{k_j\}$ são fixados pela propriedade cíclica do traço em (5.52). Para cada parâmetro espectral k_j ($j = 1, \dots, n$) as relações de comutação (5.53), (5.55) e (5.56) aplicadas j vezes, permite mover o operador

$Y_{k_j}^{(c_j)}$ à esquerda:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[Y_{k_1}^{(c_1)} \dots Y_{k_{j-1}}^{(c_{j-1})} Y_{k_j}^{(c_j)} \dots Y_{k_n}^{(c_n)} E^{L-\sum_{j=1}^N n_j s_j + n} \Omega_P] &= e^{ik_j(L-\sum_{j=1}^N n_j s_j + n)} \\ &\sum_{c'_{j-1}, c''_{j-1}} \sum_{c'_{j-2}, c''_{j-2}} \dots \sum_{c'_1, c''_1} \left\{ e^{iP(s''_1-1)} S_{c'_1, c''_1}^{c_1, c''_2}(k_1, k_j) \dots S_{c'_{j-2}, c''_{j-2}}^{c_{j-2}, c''_{j-1}}(k_{j-2}, k_j) S_{c'_{j-1}, c''_{j-1}}^{c_{j-1}, c_j}(k_{j-1}, k_j) \right. \\ &\times \text{Tr}[Y_{k_j}^{(c'_1)} Y_{k_1}^{(c'_1)} \dots Y_{k_{j-1}}^{(c'_{j-1})} Y_{k_{j+1}}^{(c_{j+1})} \dots Y_{k_n}^{(c_n)} E^{L-\sum_{i=1}^N n_i s_i + n} \Omega_P] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Usando a propriedade cíclica do traço e movendo agora o operador $Y_{k_j}^{(c'_1)}$ por cima das matrizes E e Ω_P , e depois por mais $n-j$ vezes à esquerda; e usando a identidade:

$$\sum_{c'_j, c''_{j+1}=1}^N S_{c'_j, c''_j}^{c_j, c''_{j+1}}(k_j, k_j) = 1, \quad (5.74)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[Y_{k_1}^{(c_1)} \dots Y_{k_n}^{(c_n)} E^{L-\sum_{j=1}^N n_j s_j + n} \Omega_P] &= e^{ik_j(L-\sum_{j=1}^N n_j s_j + n)} \\ &\sum_{c'_1, \dots, c'_n} \langle c_1, \dots, c_n | T | c'_1, \dots, c'_n \rangle \text{Tr}[Y_{k_1}^{(c'_1)} \dots Y_{k_n}^{(c'_n)} E^{L-\sum_{j=1}^N n_j s_j + n} \Omega_P], \end{aligned} \quad (5.75)$$

onde

$$\langle \{c\} | T | \{c'\} \rangle = \sum_{c'_1, \dots, c'_n} \left\{ S_{c'_1, c''_1}^{c_1, c''_2}(k_1, k_j) \dots S_{c'_j, c''_j}^{c_j, c''_{j+1}}(k_j, k_j) \dots S_{c'_n, c''_n}^{c_n, c''_1}(k_n, k_j) e^{iP(s''_1-1)} \right\}. \quad (5.76)$$

Identificamos (5.76) $T(k_j; \{k_l\})$ como uma matriz de transferência de dimensão $N^n \times N^n$ de um modelo de vértices inomogêneo (inogeneidades $\{k_l\}$), com pesos de Boltzmann dados em (5.63) e (5.66). O modelo é definido em um cilindro de perímetro n com uma “costura” ao longo dos seus eixos, produzindo uma condição de contorno torcida:

$$S_{c'_n, c''_n}^{c_n, c''_{n+1}}(k_n, k) = S_{c'_n, c''_n}^{c_n, c''_1}(k_n, k) e^{iP(s''_1-1)}, \quad (5.77)$$

onde, como sempre, P é o momentum do auto-estado. A relação (5.76) fornece

as condições que fixam os parâmetros espectrais:

$$e^{-ik_j(L+n-\sum_{i=1}^N n_i s_i)} = \Lambda(k_j, \{k_l\}) \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.78)$$

onde $\Lambda(k_j, \{k_l\})$ são os auto-valores da matriz de transferência (5.76). O problema de se fixar todos os parâmetros espectrais $\{k_j\}$ se reduz ao cálculo dos auto-valores da matriz de transferência (5.76). Isto pode ser feito diretamente através do *ansatz* de Bethe como em [64]. No apêndice A.2 apresentamos o cálculo dos auto-valores desta matriz de transferência.

5.2.3 O *ansatz* do produto matricial para o caso geral

Vamos considerar o Hamiltoniano mais geral dado pela equação (5.48), em que agora cada molécula tem um tamanho arbitrário, independentemente dos tamanhos das outras moléculas da sua mesma classe. A solução deste problema não foi obtida através do *ansatz* de Bethe coordenada, porque ele não é simples de ser tratado na formulação deste *ansatz*. O Hamiltoniano (5.48) é composto por auto-setores de blocos disjuntos em função da classe e do tamanho de cada uma das partículas $\{c_1, s_1; \dots; c_n, s_n\}$ ($c_j = 1, \dots, N$; $s_j = 1, 2, \dots$; $j = 1, \dots, n$) na rede. Uma auto-função arbitrária de (5.48) é dada pela generalização de (5.50), em que temos:

$$|c_1, s_1; \dots; c_n, s_n\rangle = \sum_{\{c, s\}} \sum_{\{x\}^*} f(x_1, c_1, s_1; \dots; x_n, c_n, s_n) |x_1, c_1, s_1; \dots; x_n, c_n, s_n\rangle, \quad (5.79)$$

onde $|x_1, c_1, s_1; \dots; x_n, c_n, s_n\rangle$ denota a configuração da partícula localizada na posição x_i ($i = 1, \dots, L$), que pertence a classe c_i ($c_i = 1, \dots, N$), e tem tamanho s_i ($s_i = 1, 2, \dots$). A soma em $\{c, s\} = \{c_{p_1}, s_{p_1}; \dots; c_{p_n}, s_{p_n}\}$ estende-se sobre

todas as permutações das partículas, e a soma em $\{x\}^* = \{x_1, \dots, x_n\}^*$ estende-se para cada permutação $\{c, s\}$ no conjunto dos inteiros, satisfazendo:

$$\begin{aligned} x_{i_1} &\geq x_i + s_i \quad i = 1, \dots, n-1 \\ s_1 &\leq x_n - x_1 \leq L - s_n. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Nosso *ansatz* do produto matricial fornece para as amplitudes de uma auto-funções com momentum P a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f(x_1, c_1, s_1; \dots; x_n, c_n, s_n) = & \quad (5.81) \\ \text{Tr}[E^{x_1-1} Y^{(c_1, s_1)} E^{x_2-x_1-1} Y^{(c_2, s_2)} \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} Y^{(c_n, s_n)} E^{L-x_n} \Omega_P], & \end{aligned}$$

onde as matrizes E são associadas a sítios vazios, e as matrizes $Y^{(c_j, s_j)}$ a sítios ocupados por uma partícula da classe c_j com tamanho s_j ($j = 1, \dots, n$). A matriz Ω_P , como antes, fixa o momentum P do auto-estado:

$$E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E, \quad Y^{(c, s)}\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P Y^{(c, s)}. \quad (5.82)$$

5.2.4 Resolução do modelo geral

A solução deste problema geral segue a derivação feita para o modelo particular, em que as partículas de uma mesma classe tinham o mesmo tamanho (5.54)-(5.78). A energia e o momentum do auto-estado é dado em (5.71), onde os parâmetros espectrais são introduzidos pela generalização de (5.68):

$$Y^{(c, s)} = \sum_{i=1}^n Y_{k_i}^{(c, s)} E^{2-s}, \quad (5.83)$$

onde as matrizes dependentes de parâmetros espectrais $Y_{k_j}^{(c, s)}$ satisfazem às relações algébricas:

$$E Y_{k_j}^{(c, s)} = e^{k_j} Y_{k_j}^{(c, s)} E \quad (j = 1, \dots, n; \quad c = 1, 2, \dots, N; \quad s = 1, 2, \dots), \quad (5.84)$$

e de (5.82):

$$Y_{k_j}^{(c,s)} \Omega_P = e^{iP(1-s)} \Omega_P Y_{k_j}^{(c,s)} \quad (j = 1, \dots, n; \quad c = 1, 2, \dots, N; \quad s = 1, 2, \dots). \quad (5.85)$$

As relações algébricas entre as matrizes $\{Y_{k_j}^{(c,s)}\}$ são dadas pela generalização de (5.65), e temos:

$$\begin{aligned} Y_{k_l}^{(c_1, s_1)} Y_{k_m}^{(c_2, s_2)} &= \sum_{c'_1, c'_2=1}^N S_{c'_1, c'_2}^{c_1, c_2}(k_l, k_m) Y_{k_m}^{(c'_2, s_1)} Y_{k_l}^{(c'_1, s_2)} \quad (k_l \neq k_m), \\ Y_{k_l}^{(c_1, s_1)} Y_{k_l}^{(c_2, s_2)} &= 0, \end{aligned} \quad (5.86)$$

onde $(l, m = 1, \dots, n)$, $c_1, c_2 = 1, \dots, N$ e $S_{c'_1, c'_2}^{c_1, c_2}(k_l, k_m)$ são as componentes da mesma matriz S definida em (5.63), (5.66) e (5.67). É interessante observar que a condição de existência de uma única relação entre os produtos $\dots Y_{k_1}^{(\alpha, s_1)} Y_{k_2}^{(\beta, s_2)} Y_{k_3}^{(\gamma, s_3)} \dots$ e $\dots Y_{k_3}^{(\gamma, s_1)} Y_{k_2}^{(\beta, s_2)} Y_{k_1}^{(\alpha, s_3)} \dots$ reproduz, como antes, a relação de Yang-Baxter (5.72).

Os parâmetros espectrais $\{k_j\}$, também como antes, são fixados pela propriedade cíclica do traço e pelas relações algébricas dadas por (5.82)-(5.86). Usando essas relações podemos mover a matriz $Y_{k_j}^{(c_j, s_j)}$ à esquerda, como em (5.73)-(5.76), e obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[Y_{k_1}^{(c_1, s_1)} Y_{k_2}^{(c_2, s_2)} \dots Y_{k_n}^{(c_n, s_n)} E^{L - \sum_{j=1}^N (s_j - 1)} \Omega_P] &= e^{ik_j[L - \sum_{j=1}^N (s_j - 1)]} e^{iP(s_1 - 1)} \\ \sum_{c'_1, \dots, c'_n} \langle c_1, \dots, c_n | \tilde{T} | c'_1, \dots, c'_n \rangle &\text{Tr}[Y_{k_1}^{(c'_1, s_2)} Y_{k_2}^{(c'_2, s_3)} \dots Y_{k_n}^{(c'_n, s_1)} E^{L - \sum_{j=1}^N (s_j - 1)} \Omega_P], \end{aligned} \quad (5.87)$$

onde agora

$$\langle \{c\} | \tilde{T} | \{c'\} \rangle = \sum_{c'_1, \dots, c'_n} \left\{ S_{c'_1, c'_1}^{c_1, c'_1}(k_1, k_j) \dots S_{c'_n, c'_n}^{c_n, c'_n}(k_n, k_j) \right\} \quad (5.88)$$

é diferente de (5.76), pois a matriz de transferência, do modelo de vértices correspondente, é definida em um cilindro de perímetro n sem "costura" (condição de

contorno periódica). Refazemos $n - 1$ vezes o procedimento usado para derivar a (5.87), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[Y_{k_1}^{(c_1, s_1)} Y_{k_2}^{(c_2, s_2)} \dots Y_{k_n}^{(c_n, s_n)} E^{L - \sum_{j=1}^n (s_j - 1)} \Omega_P] &= e^{ik_j [L - \sum_{j=1}^n (s_j - 1)]} e^{iP \sum_{j=1}^n (s_j - 1)} \\ \sum_{c'_1, \dots, c'_n} \langle c_1, \dots, c_n | \tilde{T}^n | c'_1, \dots, c'_n \rangle &= \text{Tr}[Y_{k_1}^{(c'_1, s_1)} \dots Y_{k_n}^{(c'_n, s_n)} E^{L - \sum_{j=1}^n (s_j - 1)} \Omega_P]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Conseqüentemente, os parâmetros espectrais $\{k_j\}$ devem satisfazer:

$$e^{-ik_j(L+n-\sum_{i=1}^n s_i)} = e^{i\frac{2\pi}{n}r} e^{iP(\bar{s}-1)} \tilde{\Lambda}(k_j, \{k_l\}) \quad (j = 1, \dots, n; \quad r = 0, 1, \dots, n-1), \quad (5.90)$$

onde $\tilde{\Lambda}(k_j, \{k_l\})$ é um auto-valor da matriz de transferência \tilde{T} dada em (5.88), e $\bar{s} = \sum_{j=1}^n \frac{s_j}{n}$ é o tamanho médio das partículas. Os auto-valores $\tilde{\Lambda}(k_j, \{k_l\})$ podem ser obtidos através da diagonalização de (5.88) pelo *ansatz* de Bethe como feito em [64]. No apêndice A.2 apresentamos este cálculo dos auto-valores da matriz de transferência. Finalmente, extraíndo a expressão do auto-valor do apêndice A.2, fazendo $\Phi(s_\alpha) = 1$, e usando a matriz S definida em (5.63), (5.66) e (5.67), obtemos a condição que fixa os parâmetros espectrais desse modelo geral:

$$\begin{aligned} e^{-ik_j[L+n-\sum_{j=1}^n s_j]} &= (-1)^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}r} e^{iP(\bar{s}-1)} \prod_{j'=1}^n \frac{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_{j'})} - e^{ik_j}}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_j+k_{j'})} - e^{ik_{j'}}} \\ &\times \prod_{l=1}^{m_1} \frac{\epsilon_+ (e^{ik_l^{(1)}} - e^{ik_j})}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_l^{(1)}+k_j)} - e^{ik_j}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (5.91)$$

onde os parâmetros auxiliares complexos $\{k_j^{(l)}, l = 0, \dots, N-1; j = 1, \dots, m_l\}$ são fixados pelas equações:

$$\begin{aligned} \prod_{\beta=1}^{m_l} \frac{\epsilon_+ (e^{ik_\alpha^{(l+1)}} - e^{ik_\beta^{(l)}})}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_\alpha^{(l+1)}+k_\beta^{(l)})} - e^{ik_\beta^{(l)}}} &= (-1)^{m_{l+1}} \prod_{\delta=1}^{m_{l+2}} \frac{\epsilon_+ (e^{ik_\delta^{(l+2)}} - e^{ik_\alpha^{(l+1)}})}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_\delta^{(l+2)}+k_\alpha^{(l+1)})} - e^{ik_\alpha^{(l+1)}}} \\ &\times \prod_{\alpha'=1}^{m_{l+1}} \frac{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_\alpha^{(l+1)}+k_{\alpha'}^{(l+1)})} - e^{ik_\alpha^{(l+1)}}}{\epsilon_+ + \epsilon_- e^{i(k_\alpha^{(l+1)}+k_{\alpha'}^{(l+1)})} - e^{ik_{\alpha'}^{(l+1)}}} \quad (l=0, 1, \dots, N-2; \quad \alpha=1, \dots, m_l), \end{aligned} \quad (5.92)$$

onde n_j ($j = 1, \dots, N$), como antes, é o número de partículas na classe j e $m_l = \sum_{j=1}^{N-l} n_j$, $l = 0, \dots, N$; $m_0 = n, m_N = 0$, e $k_j^{(0)} = k_j$. A energia e o momentum são dados em termos dos $\{k_j\}$ por (5.71). Podemos ver nas equações (5.91) e (5.92), que para cada valor de r ($r = 0, 1, \dots, n - 1$) teremos soluções distintas; e o número de soluções será maior que o do modelo anterior. Isto é esperado desde que as partículas sejam agora completamente distinguíveis.

Capítulo 6

O modelo de seis-vértices

6.1 O modelo de seis-vértices assimétrico

O modelo de seis-vértices, definido em uma rede quadrada, é um modelo de rede clássico e bi-dimensional da mecânica estatística, que foi introduzido para tentar explicar qualitativamente a entropia residual do gelo [65]-[68]. Vamos considerar aqui a versão assimétrica do modelo de seis-vértices definido em uma rede quadrada com M linhas e N colunas, e condição de contorno toroidal. A cada ligação horizontal (vertical) da rede associamos uma seta apontando à direita ou à esquerda (para cima ou para baixo). Estas configurações das setas podem ser descritas de forma equivalente através das configurações dos vértices da rede. A configuração de um dado sítio (centro de um vértice) é formada pelas quatro setas associadas às suas ligações. As possíveis configurações de um vértice são aquelas que satisfazem as regras do gelo: sempre existem duas setas apontando para fora e duas para dentro do centro do vértice. Devido a esta regra existem apenas 6 possíveis configurações. Essas configurações são mostradas nas fig. 6.1a. Através

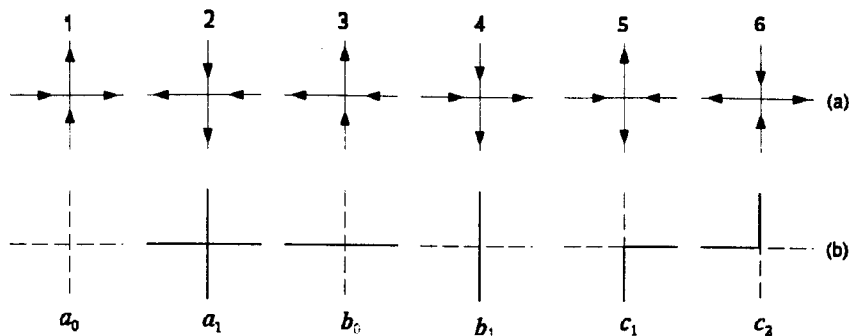


Figura 6.1: As seis configurações de vértices e seus respectivos pesos de Boltzmann. Em (a) desenhamos todas as setas, e em (b) desenhamos por linhas sólidas as ligações onde as setas apontam para baixo e à esquerda.

da fig. 6.1b, introduzimos uma notação mais conveniente, na qual representamos por uma linha sólida (linha pontilhada) as ligações que têm setas apontando à esquerda e para baixo (à direita e para cima) do centro que define o vértice. Chamando as sucessivas M linhas horizontais da rede por $m = 1, 2, \dots, M$ e por $\{x^m\}$ as posições das linhas sólidas nas ligações verticais da linha m ; a função de partição pode ser escrita como:

$$Z = \sum_{\{x^1\}} \sum_{\{x^2\}} \cdots \sum_{\{x^M\}} T(\{x^1\}, \{x^2\}) T(\{x^2\}, \{x^3\}) \cdots T(\{x^M\}, \{x^1\}) = \text{Tr}(T^M), \quad (6.1)$$

onde T é a matriz de transferência de dimensões $2^N \times 2^N$, e com elementos dados por:

$$T(\{y\}, \{x\}) = \sum e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \cdots + n_6 \epsilon_6)}, \quad (6.2)$$

onde a soma é sobre todos os possíveis arranjos de linhas nas ligações verticais e n_j ($j = 1, \dots, 6$) são os números de vértices dos tipos $(1, \dots, 6)$ formados

pelas configurações. Por conveniência, chamamos os pesos de Boltzmann de $a_0, a_1, b_0, b_1, c_1, c_2$, associados aos vértices como na fig. 6.1. É também importante mencionar que o número de linhas sólidas na vertical e na horizontal é conservado, formando caminhos contínuos e que não se cruzam através da rede. Por outro lado, a matriz de transferência, devido a condição toroidal de contorno, é invariante por translações. Como consequência dessas simetrias, a matriz de transferência separa-se em setores de blocos disjuntos associados ao número n de linhas sólidas verticais ($n = 0, \dots, N$) e ao auto-valor do operador momentum P ($P = \frac{2\pi}{N}l, l = 0, 1, \dots, N - 1$).

6.1.1 O *ansatz* do produto matricial

Nosso *ansatz* do produto matricial parte do pressuposto de que qualquer auto-função $|\Psi_{n,P}\rangle$ da matriz de transferência (6.2), no setor com n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) linhas verticais, e momentum P ($P = \frac{2\pi}{N}l, l = 0, 1, \dots, N - 1$), pode ser escrita em termos de um produto de matrizes, isto é, suas amplitudes são dadas pelo traço do seguinte produto de matrizes:

$$|\psi_{n,P}\rangle = \sum_{x_1, \dots, x_n}^* \text{Tr}[E^{x_1-1} A E^{x_2-x_1-1} A \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A E^{L-x_n} \Omega_P] |x_1, \dots, x_n\rangle, \quad (6.3)$$

onde $|x_1, \dots, x_n\rangle$ denota as configurações com linhas sólidas verticais nas posições (x_1, \dots, x_n) , e o símbolo $(*)$ na somatória significa restrições às configurações onde $L \geq x_{i+1} > x_i \geq 1$. Os objetos A, E e Ω_P são matrizes abstratas, ou operadores, com um produto associativo cujas relações de comutação serão fixadas ao se impor a validade da equação de auto-valores da matriz de transferência (6.2). As matrizes A e E são associadas aos sítios onde temos ou não linhas verticais

sólidas, e a matriz Ω_P é introduzida para fixar o momentum P da auto-função $|\Psi_{n,P}\rangle$. O fato de que $|\psi_{n,P}\rangle$ tem momentum P implica em que a razão entre as amplitudes correspondentes às configurações $|x_1, \dots, x_n\rangle$ e $|x_1 + 1, \dots, x_n + 1\rangle$ seja e^{-iP} , isto é:

$$\frac{\text{Tr}[F^{x_1-1} A F^{x_2-x_1-1} A \dots F^{x_n-x_{n-1}-1} A F^{L-x_n} \Omega_P]}{\text{Tr}[E^{x_1} A E^{x_2-x_1-1} A \dots E^{x_n-x_{n-1}-1} A E^{L-x_n-1} \Omega_P]} = e^{-iP}, \quad (6.4)$$

e conseqüentemente de (6.3) obtemos as seguintes relações de comutação:

$$A\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P A, \quad E\Omega_P = e^{-iP}\Omega_P E. \quad (6.5)$$

O *ansatz* do produto matricial será válido se as relações algébricas entre as matrizes A , E e Ω_P forem consistentes com os vínculos impostos pela equação de auto-valores:

$$T|\psi_{n,P}\rangle = \Lambda_n|\psi_{n,P}\rangle. \quad (6.6)$$

6.1.2 Resolução do modelo

Começaremos de maneira usual considerando os casos mais simples onde $n = 0, 1$ e 2 antes de considerar o caso geral.

$n = 0$. Neste caso a solução da equação de auto-valores (6.6) é trivial já que não temos linhas verticais entre duas linhas horizontais sucessivas. Existem somente dois possíveis arranjos de linhas horizontais, que são: ou todas as ligações têm uma linha sólida ou todas estarão vazias. Neste caso, os vértices são todos ou do tipo 1 ou do tipo 3 (veja a fig. 6.1), e conseqüentemente o auto-valor será dado por:

$$\Lambda_0 = a_0^N + b_0^N, \quad (6.7)$$

onde a_0 e b_1 são os pesos de Boltzmann dos vértices dos tipos 1 e 3, respectivamente (veja fig. 6.1).

$n = 1$. Neste caso temos apenas uma linha vertical sólida entre duas linhas horizontais. A matriz de transferência liga uma linha sólida vertical na posição y ($y = 1, \dots, N$), acima de uma linha horizontal da rede, à uma linha sólida vertical em qualquer posição x ($x = 1, \dots, N$), abaixo desta mesma linha horizontal da rede. Os elementos da matriz de transferência $T(y, x)$ neste setor com momentum P são dados pela equação (6.2), e eles são dados pelo produto dos pesos de Boltzmann dos vértices contidos na linha horizontal. Se a posição x da linha vertical é menor (maior) que y , a configuração dos vértices desses sítios serão dos tipos 5 e 6 (6 e 5), e todos os outros vértices serão dos tipos 3 (1) e 1 (3) dependendo se os vértices estarão ou não entre as posições x e y . No caso em que temos $x = y$, este vértice será do tipo 4 ou 2 com todos os vértices restantes sendo dos tipos 1 ou 3, respectivamente. Conseqüentemente, a equação de auto-valores (6.6) para a matriz de transferência (6.2), associada às componentes de $|\psi_{n,P}\rangle$ (6.3), e com $n = 1$ e momentum P , fornece as relações:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \text{Tr}[E^{x-1} A E^{N-x} \Omega_P] &= \sum_{y=x+1}^N a_0^{N-y+x-1} b_0^{y-x-1} c_1 c_2 \text{Tr}[E^{y-1} A E^{N-y} \Omega_P] + \\ &\quad \sum_{y=1}^{x-1} a_0^{x-y-1} b_0^{N-x+y-1} c_1 c_2 \text{Tr}[E^{y-1} A E^{N-y} \Omega_P] + \\ &\quad (a_0^{N-1} b_1 + b_0^{N-1} a_1) \text{Tr}[E^{x-1} A E^{N-x} \Omega_P]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

A equação (6.8) pode ser simplificada de forma a expressar todos os produtos de matrizes em termos de um único produto. Isto é possível usando-se a propriedade cíclica do traço juntamente com as relações de comutação (6.5). Isso permite

fatorizar o produto de matrizes da seguinte forma:

$$\Lambda_1 = \sum_{y=x+1}^N a_0^{N-y+x-1} b_0^{y-x-1} c_1 c_2 e^{-iP(y-x)} + \sum_{y=1}^{x-1} a_0^{x-y-1} b_0^{N-x+y-1} c_1 c_2 e^{-iP(y-x)} + (a_0^{N-1} b_1 + b_0^{N-1} a_1). \quad (6.9)$$

Efetuada a soma (6.9) obtemos:

$$\Lambda_1 = a_0^N L(P) + b_1^N M(P) + b_1^N \frac{c_1 c_2}{a_0} \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{-x} \frac{e^{-iP(1-x)}}{a_0 - b_1 e^{-iP}} (1 - e^{-iNP}), \quad (6.10)$$

onde

$$L(P) = \frac{a_0 b_2 + (c_1 c_2 - b_1 b_2) e^{-iP}}{a_0^2 - a_0 b_1 e^{-iP}} \quad \text{e} \quad M(P) = \frac{a_0 a_1 - c_1 c_2 - a_1 b_1 e^{-iP}}{a_0 b_1 - b_1^2 e^{-iP}}. \quad (6.11)$$

Para satisfazer (6.6), o auto-valor Λ_1 em (6.10) deve ser independente da posição x da linha vertical. Portanto, o último termo do lado direito de (6.10) deverá ser nulo. A única forma de cancelar este termo, para valores não nulos dos pesos de Boltzmann, é impondo-se o seguinte vínculo para o momentum P

$$e^{iNP} = 1, \quad (6.12)$$

que é automaticamente satisfeito, desde que $P = \frac{2\pi}{N} l$ $l = 0, 1, \dots, N - 1$. O auto-valor (6.10) é então dado por:

$$\Lambda_1 = a_0^N L(P) + b_1^N M(P). \quad (6.13)$$

Uma solução alternativa de (6.8), cuja generalização será conveniente para valores arbitrários de n , é obtida expressando as matrizes A em termos de um produto envolvendo uma matriz E e uma nova matriz dependente de um parâmetro espectral:

$$A = A_k E, \quad (6.14)$$

com A_k satisfazendo

$$EA_k = e^{ik} A_k E. \quad (6.15)$$

Como conseqüência de (6.5) e (6.15), a matriz A_k também satisfaz

$$A_k \Omega_P = \Omega_P A_k. \quad (6.16)$$

O parâmetro espectral k é fixado pela equação de auto-valor (6.8). Inserindo (6.14) em (6.8), e usando a relação de comutação (6.15), obtemos (6.9) com k no lugar de P . Portanto:

$$\Lambda_1 = a_0^N L(k) + b_1^N M(k), \quad (6.17)$$

com

$$e^{iNk} = 1, \quad k = \frac{2\pi}{N}l \quad (l = 0, 1, \dots, N-1). \quad (6.18)$$

Comparando (6.12) e (6.13) às equações (6.17) e (6.18), verificamos a igualdade $k = P$. Esta relação também pode ser diretamente obtida inserindo (6.14) em (6.4), e usando (6.15).

Precisamos ainda verificar se as relações algébricas entre as matrizes A_k , E e Ω_P (6.5), (6.15) e (6.16) são consistentes em relação à propriedade cíclica do traço. Estas equações dão:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[A_k E^N \Omega_P] &= e^{-iNk} \text{Tr}[E^N A_k \Omega_P] = e^{-iNk} \text{Tr}[E^N \Omega_P A_k] \\ &= e^{-iNk} \text{Tr}[A_k E^N \Omega_P], \end{aligned} \quad (6.19)$$

que satisfazem à ciclicidade do traço devido a (6.18). Já que nenhum novo vínculo é obtido para as matrizes A_k , E e Ω_P , e para o parâmetro espectral k , com $k = P$, o *ansatz* do produto matricial é consistente.

$n = 2$. Neste setor, existem duas linhas verticais sólidas na linha horizontal. Temos em geral dois tipos de relações, as primeiras são relações nas quais no mínimo uma das linhas verticais (y_1, y_2) coincide com (x_1, x_2) ; e as segundas são relações em que as posições y_1 e y_2 estão interlaçadas à x_1 e x_2 ($x_1 < y_1 < x_2 < y_2$ ou $y_1 < x_1 < y_2 < x_2$). Então, a equação de auto-valores (6.6) implica:

$$\Lambda_2 \text{Tr}[E^{x_1-1} A E^{x_2-x_1-1} A E^{N-x_2} \Omega_P] = \quad (6.20)$$

$$\sum_{y_1=x_1}^{x_2} \sum_{y_2=x_2}^{N*} a_0^{N-y_2+x_1-1} c_2 f(x_1, y_1) g(y_1, x_2) f(x_2, y_2) \times$$

$$\text{Tr}[E^{y_1-1} A E^{y_2-y_1-1} A E^{N-y_2} \Omega_P] +$$

$$\sum_{y_1=1}^{x_1} \sum_{y_2=x_1}^{x_2*} b_1^{N-x_2+y_1-1} c_1 g(y_1, x_1) f(x_1, y_2) g(y_2, x_2) \times$$

$$\text{Tr}[E^{y_1-1} A E^{y_2-y_1-1} A E^{N-y_2} \Omega_P],$$

onde o símbolo $*$ nas somatórias significa que termos com $y_1 = y_2$ são excluídos,

e:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{b_2}{c_2} & \text{se } x = y \\ c_1 b_1^{y-x-1} & \text{se } y > x \end{cases} \quad \text{e} \quad g(y, x) = \begin{cases} \frac{a_1}{c_1} & \text{se } x = y \\ c_2 a_0^{x-y-1} & \text{se } x > y \end{cases} \quad (6.21)$$

A relação (6.20) conecta configurações onde os arranjos das linhas verticais acima de uma linha horizontal não apresentam as mesmas distâncias entre si em relação às linhas verticais abaixo dessa mesma linha horizontal. Em outras palavras, as distâncias entre as linhas de entrada $y_2 - y_1$ são em geral diferentes das distâncias das linhas de saída $x_2 - x_1$. Como consequência, é impossível resolver a equação de auto-valores somente usando a propriedade cíclica do traço em (6.3), como foi feito previamente no caso $n = 1$. Precisamos agora usar uma generalização das relações algébricas (6.14) para o caso de duas linhas. A generalização de (6.14) é

obtida escrevendo as matrizes A em termos de duas novas matrizes dependentes de parâmetros espectrais:

$$A = \sum_{j=1}^2 A_{k_j} E, \quad (6.22)$$

com as relações de comutação

$$E A_{k_j} = e^{ik_j} A_{k_j} E \quad \text{and} \quad A_{k_j} \Omega_P = \Omega_P A_{k_j} \quad (j = 1, 2), \quad (6.23)$$

onde os parâmetros espectrais k_1 e k_2 são, até aqui, números complexos desconhecidos.

Inserindo (6.22) em (6.20), e usando nesta expressão (6.23) e (6.11), obtemos depois de uma manipulação similar a que fizemos para o caso $n = 1$, a seguinte relação:

$$\begin{aligned} & \sum_{j,l=1}^2 [\Lambda_2 - a_0^N L(k_j) L(k_l) - b_1^N M(k_j) M(k_l)] e^{-ik_j x_1} e^{-ik_l x_2} \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] \\ & - \sum_{j,l=1}^2 a_0^N \left[L(k_l) M(k_j) - \frac{a_1 b_2}{a_0 b_1} \right] \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{x_2 - x_1} e^{-i(k_j + k_l) x_2} \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] \\ & - \sum_{j,l=1}^2 b_1^N \left[L(k_l) M(k_j) - \frac{a_1 b_2}{a_0 b_1} \right] \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{x_1 - x_2} e^{-i(k_j + k_l) x_1} \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] \\ & + \sum_{j,l=1}^2 b_1^N \frac{c_1^2 c_2^2 [e^{-iNk_l} e^{-ik_j x_1} - e^{-ik_l x_1}] e^{-i(k_j + k_l) x_2}}{a_0^2 (a_0 - b_1 e^{-ik_j})(a_0 - b_1 e^{-ik_l})} \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{-x_2} \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] \\ & - \sum_{j,l=1}^2 b_1^N \frac{c_1^2 c_2^2 [e^{-i(N+1)k_l} e^{-ik_j x_2} - e^{-ik_j} e^{-ik_l x_2}] \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{-x_1}}{a_0 b_1 (a_0 - b_1 e^{-ik_j})(a_0 - b_1 e^{-ik_l})} \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] \\ & + \sum_{j,l=1}^2 b_1^N c_1 c_2 b_2 \left[\frac{e^{-i(N+1)k_l} e^{-ik_j x_1}}{a_0^2 (a_0 - b_1 e^{-ik_l})} - \frac{-e^{-ik_j} e^{-ik_l x_1}}{a_0^2 (a_0 - b_1 e^{-ik_j})} \right] \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{-x_2} \times \\ & \quad \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] \\ & + \sum_{j,l=1}^2 b_1^N c_1 c_2 a_1 \left[\frac{e^{-i(N+1)k_l} e^{-ik_j x_2}}{a_0 b_1 (a_0 - b_1 e^{-ik_l})} - \frac{-e^{-ik_j} e^{-ik_l x_2}}{a_0 b_1 (a_0 - b_1 e^{-ik_j})} \right] \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{-x_1} \times \\ & \quad \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] = 0, \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde $1 \leq x_1 < x_2 \leq N$. Esta relação somente poderá ser satisfeita se cada soma

for identicamente nula. Além disso, o auto-valor Λ_2 deve ser independente de x_1 ou x_2 . Uma possível solução de (6.24) é obtida impondo-se que:

$$\Lambda_2 = a_0^N L(k_1)L(k_2) + b_1^N M(k_1)M(k_2). \quad (6.25)$$

As relações algébricas entre as matrizes A_{k_1} e A_{k_2} são obtidas impondo-se que ambos os segundo e terceiro termos em (6.24) sejam independentemente nulos, isto é:

$$A_{k_j} A_{k_l} = -S(k_j, k_l) A_{k_l} A_{k_j} \quad (l \neq j) \quad (A_{k_j})^2 = 0 \quad (j, l = 1, 2), \quad (6.26)$$

onde

$$S(k_j, k_l) = \frac{L(k_j)M(k_l) - \frac{a_1 b_2}{a_0 b_1}}{L(k_l)M(k_j) - \frac{a_1 b_2}{a_0 b_1}}, \quad (6.27)$$

com $L(k)$ e $M(k)$ dados em (6.11). Finalmente, a anulação dos últimos quatro termos de (6.24) fornece as relações que fixam os valores possíveis dos parâmetros espectrais k_1 e k_2 . Estas equações são obtidas explorando as relações algébricas (6.26), em que temos:

$$e^{iNk_l} = -S(k_j, k_l) \quad (l, j = 1, 2 \text{ e } l \neq j). \quad (6.28)$$

Os auto-valores e auto-vetores são obtidos inserindo-se as soluções (k_1, k_2) desta última equação em (6.25) e (6.27), respectivamente. O momentum P é obtido usando (6.22) e (6.23) em (6.4), isto é, $P = k_1 + k_2$.

A consistência entre as relações algébricas (6.22), (6.23) e (6.27) em relação à propriedade cíclica do traço em (6.3), como no caso $n = 1$, pode ser facilmente

verificada, resultando em:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P] &= -S(k_j, k_l) \text{Tr}[A_{k_l} A_{k_j} E^N \Omega_P] \\
&= -S(k_j, k_l) e^{-iNk_j} \text{Tr}[A_{k_l} E^N A_{k_j} \Omega_P] \\
&= -S(k_j, k_l) e^{-iNk_j} \text{Tr}[A_{k_j} A_{k_l} E^N \Omega_P]. \quad (6.29)
\end{aligned}$$

n geral. Os cálculos anteriores podem ser estendidos para valores n arbitrários de linhas verticais. A matriz de transferência (6.2) quando aplicada às amplitudes de $|\psi_{n,P}\rangle$ fornecem para a equação de auto-valor relações que ligam um arranjo de linhas verticais nas posições x_1, \dots, x_n a um arranjo y_1, \dots, y_n , onde $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq y_n$ e $y_1 \leq x_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq x_n$. Para resolver esta equação de auto-valor precisamos estender a definição (6.22) e as relações de comutação (6.23) para valores de n gerais, isto é:

$$A = \sum_{j=1}^n A_{k_j} E \quad (6.30)$$

com

$$EA_{k_j} = e^{ik_j} A_{k_j} E \quad \text{e} \quad A_{k_j} \Omega_P = \Omega_P A_{k_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.31)$$

onde k_j ($j = 1, \dots, n$) são, em geral, números complexos desconhecidos, e que serão fixados pela equação de auto-valor (6.6). Na verdade, assim como no caso do modelo XXZ generalizado apresentado no capítulo 2, a definição (6.30) não é a única possível. A definição mais geral e que possibilita resolver a equação de auto-valor é $A = \sum_{j=1}^n E^\alpha A_{k_j} E^{1+\beta}$, onde α e β são números inteiros. No entanto, (6.30) é mais conveniente, caso contrário, a matriz S em (6.32) e a equação de Bethe (6.33) dependeriam dos parâmetros α e β . Inserindo (6.30) na equação de auto-valor (6.6), e usando as relações de comutação (6.31) obtemos de forma

similar ao que fizemos no caso $n = 2$, as seguintes relações de comutação entre as matrizes $\{A_{k_j}\}$:

$$A_{k_j}A_{k_l} = -S(k_j, k_l)A_{k_l}A_{k_j} \quad \text{e} \quad (A_{k_j})^2 = 0 \quad (j \neq l = 1, \dots, n), \quad (6.32)$$

onde $S(k_j, k_l)$ é dada por (6.27) e os parâmetros espectrais k_j ($j = 1, \dots, n$) são fixados pela equação:

$$e^{iNk_l} = (-1)^{n-1} \prod_{l=1}^n \prod_{(l \neq j)} S(k_j, k_l) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.33)$$

Não surgem novas relações para as matrizes $\{A_{k_j}\}$, e a associatividade da álgebra (6.31) e (6.32) segue da propriedade $S(k_j, k_l)S(k_l, k_j) = 1$. Os auto-valores da matriz de transferência (6.2), no setor com n geral, é dado por:

$$\Lambda_2 = a_0^N L(k_1)L(k_2) \cdots L(k_n) + b_1^N M(k_1)M(k_2) \cdots M(k_n), \quad (6.34)$$

onde $L(k)$ e $M(k)$ são dados por (6.11), e os parâmetros espectrais $\{k_j\}$ são soluções de (6.33). Os auto-valores (6.34) e as equações para os parâmetros espectrais coincidem com as equações correspondentes obtidas através do *ansatz* de Bethe [67, 68].

Finalmente, o momentum P segue de (6.4) e (6.31):

$$P = \sum_{j=1}^n k_j. \quad (6.35)$$

A consistência entre as relações algébricas das matrizes, definindo o *ansatz* do produto matricial (6.3) com a propriedade cíclica do traço em (6.3), pode ser diretamente verificada como nos casos de $n = 1$ e $n = 2$. Portanto, o *ansatz* do produto matricial é consistente, e um número infinito de auto-vetores da matriz de transferência (6.2) pode ser escrito através de (6.3), no limite termodinâmico.

É importante mencionar que enquanto nos casos de Hamiltonianos quânticos unidimensionais a consistência entre as relações algébricas com a propriedade cíclica do traço é quem fixa os parâmetros espectrais, no caso das matrizes de transferência, essa consistência é automaticamente satisfeita.

Capítulo 7

Conclusão

Concluimos e mostramos neste trabalho que uma grande variedade de modelos exatamente solúveis através do *ansatz* de Bethe coordenada, tal como os Hamiltonianos quânticos unidimensionais, associados ou não a processos estocásticos, e as matrizes de transferência bi-dimensionais, podem também ser resolvidos através de um *ansatz* do produto matricial apropriado. Diferentemente do *ansatz* de Bethe, em que as auto-funções do modelo são escritas como uma combinação de ondas planas, no nosso *ansatz* do produto matricial elas são dadas por produtos de matrizes com uma álgebra associativa apropriada. Estas relações algébricas são obtidas impondo-se a validade da equação de auto-valor para as auto-funções escritas em termos do *ansatz*. Por outro lado, a associatividade desta álgebra é necessária para garantir que exista apenas uma única relação entre os dois produtos das matrizes no *ansatz*, e é uma condição necessária para a solubilidade do modelo, sendo equivalente à relação de Yang-Baxter.

Através do nosso *ansatz* do produto matricial obtemos a solução de diversos modelos de Hamiltonianos quânticos, como o modelo XXZ generalizado com

condições de contorno fechadas e abertas; e os modelos gerais de spin-1 e spin- $\frac{3}{2}$, com condição periódica de contorno. Estes últimos modelos contém outros diversos modelos conhecidos na literatura. Para spin-1 temos os modelos de Fateev-Zamolodchikov [55], de Izergin-Korepin [56], o modelo considerado em [57], o de Sutherland anisotrópico [58], o de Perk-Schultz para spin-1 [59], e o modelo fermiônico supersimétrico $t - J$ [12]; e para spin- $\frac{3}{2}$, temos os modelos de Perk-Schultz para spin- $\frac{3}{2}$ [59], o de Essler-Korepin-Schoutens [60], o de Hubbard [13], e o modelo integrável de dois parâmetros introduzido em [61]. Por outro lado, nosso *ansatz* permite uma derivação simples de problemas extremamente complicados de serem resolvidos com o *ansatz* de Bethe, como no caso do processo estocástico de N classes de partículas difundindo assimetricamente, onde cada partícula poderá ter um tamanho distinto. Obtemos também, a solução de diversos processos estocásticos de partículas com tamanhos, e também de partículas de classes diferentes [62]-[64]. É importante frisar que mesmo nestes casos de partículas com tamanhos, ou no caso do modelo XXZ generalizado, em que os spins para cima têm um volume de exclusão, nosso *ansatz* do produto matricial fornece matrizes S independentes do tamanho das partículas; em contraste com o *ansatz* de Bethe no qual a matriz S depende dos tamanhos de exclusão. Finalmente, para completar nossa conjectura de que qualquer sistema exatamente solúvel através do *ansatz* de Bethe coordenada também poderá ser resolvido através de um *ansatz* do produto matricial apropriado, apresentamos a formulação do nosso *ansatz* para a matriz de transferência do modelo de seis-vértices [65]-[68], com condição de contorno toroidal. Em suma, nossos resultados corroboram a validade de nossa conjectura. Mais ainda nossos resultados mostram que o nosso

ansatz permite obter de forma simples, elegante e unificada a solução dos mais variados modelos exatamente solúveis, constituindo uma importante ferramenta para a busca de soluções de novos modelos integráveis.

Encerramos este trabalho com algumas propostas para futuros estudos. No contexto de estender a validade do nosso *ansatz* do produto matricial para outros problemas exatamente solúveis pelo *ansatz* de Bethe, seria interessante formular nosso *ansatz* para cadeias quânticas sem leis de conservação globais, como os modelos XYZ [84], ou como a matriz de transferência do oito-vértices [84]-[87], ou também como o caso em que a rede quântica possui condições de contorno não diagonais [88]. Além de verificar a validade do nosso *ansatz* nestes casos, outro objeto de pesquisa muito promissor é a procura de novos modelos integráveis baseados na simplicidade de formulação do nosso *ansatz*, mesmo em casos de problemas complexos, como por exemplo, o feito na formulação de novos modelos de vértices com interações de longa distância [89]. Em um contexto diferente, a impressionante similaridade entre a estrutura do nosso *ansatz* com a estrutura dos operadores BMN [90], na teoria de campo $\mathcal{N} = 4$ SYM e na teoria de cordas no espaço $AdS_5 \times S^5$, permite estudar a estrutura integrável desses operadores sem recorrer a uma analogia com modelos de spins da matéria condensada [15]. Este estudo é de fundamental importância para uma melhor compreensão da conjectura *AdS/CFT* proposta por Maldacena [91]-[93], além de permitir compreender como a integrabilidade surge nessas teorias e qual sua implicação para a estrutura dos operadores escalares.

Apêndice A

Solução do modelo de seis-vértices inomogêneo

A.1 Duas classes de partículas

Vamos diagonalizar a matriz de transferência do modelo de seis-vértices inomogêneo com condição de contorno torcida, definida nos capítulos 3 e 4:

$$T(k)_{\{Q'\}}^{\{Q\}} = \sum_{Q'_1, \dots, Q'_n}^2 \left(\prod_{l=1}^n S_{Q'_l, Q'_l}^{Q_l, Q_{l+1}}(k_{p_l}, k) \right), \quad (\text{A.1})$$

com condição de contorno torcida

$$S_{Q'_n, Q'_n}^{Q_n, Q_{n+1}}(k_{p_n}, k) = S_{Q'_n, Q'_n}^{Q_n, Q'_1}(k_{p_n}, k) \phi(s_{Q'_1}), \quad (\text{A.2})$$

com a fase

$$\phi(s) = e^{i(s-1) \sum_{j=1}^n k_j}. \quad (\text{A.3})$$

Para diagonalizar a matriz de transferência (A.1), vamos introduzir a matriz de monodromia $\mathcal{M}(k)$ que difere da matriz de transferência (A.1) por não ser

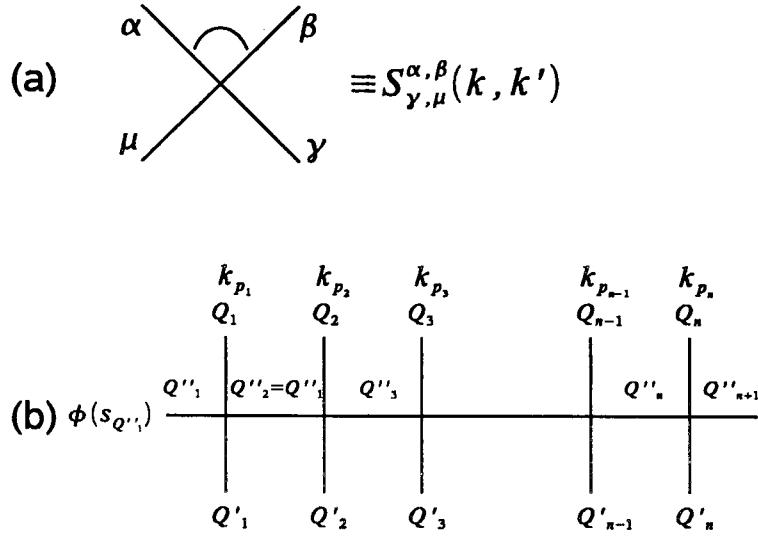


Figura A.1: Representação gráfica da matriz S (Fig. 6.1a) e da matriz de monodromia (Fig. 6.1b) com condição de contorno torcida.

periódica. A primeira e a última ligação na horizontal é fixada pelos valores μ_1 e μ_{n+1} ($\mu_1, \mu_{n+1} = 1, 2$), respectivamente. Nas Fig. 6.1a e 6.1b vemos as representações gráficas da matriz S e da matriz monodromia. Temos:

$$\mathcal{M}_{\{Q'\}, \mu_1}^{\{Q\}, \mu_{n+1}} = \sum_{\mu_2, \dots, \mu_n} S_{Q'_1, \mu_1}^{Q_1, \mu_2}(k_{p_1}, k) S_{Q'_2, \mu_2}^{Q_2, \mu_3}(k_{p_2}, k) \cdots S_{Q'_{n-1}, \mu_{n-1}}^{Q_{n-1}, \mu_n}(k_{p_{n-1}}, k) S_{Q'_n, \mu_n}^{Q_n, \mu_{n+1}}(k_{p_n}, k). \quad (\text{A.4})$$

A matriz de monodromia $\mathcal{M}_{\{Q'\}, \mu_1}^{\{Q\}, \mu_{n+1}}$ tem coordenadas $\{Q\}, \{Q'\}$ no espaço vertical (2^n dimensões), e coordenadas μ_1, μ_{n+1} no espaço vertical (4 dimensões). Esta matriz satisfaz a seguinte relação:

$$S_{\nu'_1, \mu'_1}^{\nu'_1, \mu'_1}(k', k) \mathcal{M}_{\{\alpha\}, \mu'_1}^{\{\gamma\}, \mu_{n+1}}(k) \mathcal{M}_{\{\gamma\}, \nu'_1}^{\{\beta\}, \nu_{n+1}}(k') = \mathcal{M}_{\{\alpha\}, \nu_1}^{\{\gamma\}, \nu'_{n+1}}(k') \mathcal{M}_{\{\gamma\}, \mu_1}^{\{\beta\}, \mu'_{n+1}}(k) S_{\nu'_{n+1}, \mu'_{n+1}}^{\nu_{n+1}, \mu_{n+1}}(k', k). \quad (\text{A.5})$$

Esta equação impõe relações para as componentes da matriz de monodromia.

Denotando as componentes no espaço horizontal por:

$$\begin{aligned} A(k) &= A(k)_{\{\alpha_l\}}^{\{\gamma_l\}} = \mathcal{M}_{\{\alpha_l\},1}^{\{\gamma_l\},1}(k), & B(k) &= B(k)_{\{\alpha_l\}}^{\{\gamma_l\}} = \mathcal{M}_{\{\alpha_l\},1}^{\{\gamma_l\},2}(k), \\ C(k) &= C(k)_{\{\alpha_l\}}^{\{\gamma_l\}} = \mathcal{M}_{\{\alpha_l\},2}^{\{\gamma_l\},1}(k), & D(k) &= D(k)_{\{\alpha_l\}}^{\{\gamma_l\}} = \mathcal{M}_{\{\alpha_l\},2}^{\{\gamma_l\},2}(k). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como a matriz de transferência é definida em uma rede periódica, em termos das componentes (A.6) ela é dada por:

$$T(k) = A(k) + D(k). \quad (\text{A.7})$$

Como consequência da equação (A.6), as matrizes $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ e $D(k)$ satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[B(k), B(k')] = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$A(k)B(k') = \frac{S_{1,1}^{1,1}(k, k')}{S_{1,2}^{1,2}(k, k')} B(k')A(k) - \frac{S_{2,1}^{1,2}(k, k')}{S_{1,2}^{1,2}(k, k')} B(k)A(k'), \quad (\text{A.9})$$

$$D(k)B(k') = \frac{S_{2,2}^{2,2}(k', k)}{S_{1,2}^{1,2}(k', k)} B(k')D(k) - \frac{S_{1,2}^{2,1}(k', k)}{S_{1,2}^{1,2}(k', k)} B(k)D(k'). \quad (\text{A.10})$$

Usaremos estas relações para diagonalizar a matriz de transferência (A.1) pelo *ansatz* de Bethe algébrico. Para isso, primeiro identificamos o estado de referência, que deve ser um auto-estado da matriz $A(k)$, e da matriz $D(k)$, mas não será auto-vetor da matriz $B(k)$. Um estado de referência conveniente é o estado $|\Omega\rangle = |\{\alpha_l = 1\}\rangle_{l=1,\dots,n}$, que corresponde ao de só termos partículas da primeira classe. A aplicação das matrizes (A.6) neste estado de referência é dada por:

$$\begin{aligned} A(k)|\Omega\rangle &= a(k)|\Omega\rangle, & D(k)|\Omega\rangle &= d(k)|\Omega\rangle, \\ C(k)|\Omega\rangle &= 0, & B(k)|\Omega\rangle &= \sum_{i=1}^n b_i(k)|\Omega^{(i)}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

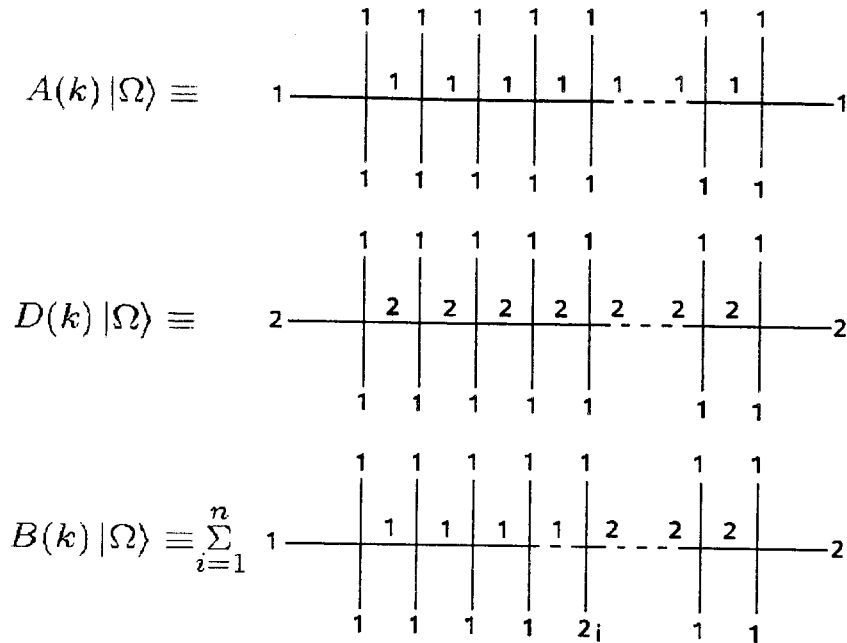


Figura A.2: Configuração gráfica da aplicação dos operadores $A(k)$, $D(k)$, e $B(k)$ no estado de referência.

onde

$$a(k) = \phi(s_1) \prod_{i=1}^n S_{1,1}^{1,1}(k_{p_i}, k), \quad d(k) = \phi(s_2) \prod_{i=1}^n S_{1,2}^{1,2}(k_{p_i}, k), \quad (\text{A.12})$$

$$b_i(k) = \prod_{l=1}^{i-1} S_{1,1}^{1,1}(k_{p_l}, k) \prod_{l=i+1}^n S_{1,2}^{1,2}(k_{p_l}, k) S_{2,1}^{1,2}(k_{p_i}, k).$$

Na Fig 6.2 vemos as representações gráficas das relações (A.11). A matriz $B(k)$ atua no estado de referência como um “operador de criação”, isto é, ela cria partículas da segunda classe em um mar de partículas de primeira classe $|\Omega\rangle$. O *ansatz* de Bethe algébrico assume que um auto-vetor geral da matriz de transferência

(A.7), no setor com n_2 partículas da segunda classe, poderá ser escrito como:

$$|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle = B(k_1^{(1)})B(k_2^{(1)}) \cdots B(k_{n_2}^{(1)})|\Omega\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Os números $\{k_i^{(1)}\}$, $i = 1, \dots, n_2$, desempenham aqui o mesmo papel que os parâmetros espectrais $\{k_i\}$ no *ansatz* de Bethe coordenada. Estes novos parâmetros são fixados pela equação de auto-valor

$$T(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle = (A(k) + D(k))|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle = \Lambda(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle. \quad (\text{A.14})$$

Antes de considerar o caso mais geral, vamos analisar os casos onde $n_2 = 1$ e $n_2 = 2$.

$n_2 = 1$. Usando as relações (A.9) e (A.10) em (A.14), obtemos:

$$\begin{aligned} T(k)|\Psi_{k_1^{(1)}}\rangle &= \left[a(k) \frac{S_{1,1}^{1,1}(k, k_1^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_1^{(1)})} + d(k) \frac{S_{2,2}^{2,2}(k_1^{(1)}, k)}{S_{1,2}^{1,2}(k_1^{(1)}, k)} \right] |\Psi_{k_1^{(1)}}\rangle \\ &\quad - \left[a(k_1^{(1)}) \frac{S_{2,1}^{1,2}(k, k_1^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_1^{(1)})} + d(k_1^{(1)}) \frac{S_{1,2}^{2,1}(k_1^{(1)}, k)}{S_{1,2}^{1,2}(k_1^{(1)}, k)} \right] B(k)|\Omega\rangle = \Lambda(k)|\Psi_{k_1^{(1)}}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

que é satisfeita se o coeficiente de $B(k)|\Omega\rangle$ for nulo. Esta condição fixa o parâmetro $k_1^{(1)}$:

$$\frac{\phi(s_2)}{\phi(s_1)} \prod_{j=1}^n \frac{S_{1,2}^{1,2}(k_{p_j}, k_1^{(1)})}{S_{1,1}^{1,1}(k_{p_j}, k_1^{(1)})} = 1, \quad (\text{A.16})$$

onde usamos a relação

$$\frac{S_{2,1}^{1,2}(k, k')}{S_{1,2}^{1,2}(k, k')} = -\frac{S_{1,2}^{2,1}(k', k)}{S_{1,2}^{1,2}(k', k)}, \quad (\text{A.17})$$

que é válida para a matriz S em questão. O auto-valor é dado por:

$$\Lambda(k) = \phi(s_1) \frac{S_{1,1}^{1,1}(k, k_1^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_1^{(1)})} \prod_{j=1}^n S_{1,1}^{1,1}(k_{p_j}, k) + \phi(s_2) \frac{S_{2,2}^{2,2}(k_1^{(1)}, k)}{S_{1,2}^{1,2}(k_1^{(1)}, k)} \prod_{j=1}^n S_{1,2}^{1,2}(k_{p_j}, k). \quad (\text{A.18})$$

$n_2 = 2$. Neste caso, a aplicação dos operadores $A(k)$ e $D(k)$ no *ansatz* (A.13)

fornece as relações:

$$\begin{aligned}
 A(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}}\rangle &= \frac{S_{1,1}^{1,1}(k, k_1^{(1)})S_{1,1}^{1,1}(k, k_2^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_1^{(1)})S_{1,2}^{1,2}(k, k_2^{(1)})} a(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}}\rangle \\
 &\quad - \frac{S_{2,1}^{1,2}(k, k_1^{(1)})S_{1,1}^{1,1}(k_1^{(1)}, k_2^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_1^{(1)})S_{1,2}^{1,2}(k_1^{(1)}, k_2^{(1)})} a(k_1^{(1)})B(k)B(k_2^{(1)})|\Omega\rangle \\
 &\quad - \frac{S_{2,1}^{1,2}(k, k_2^{(1)})S_{1,1}^{1,1}(k_2^{(1)}, k_1^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_2^{(1)})S_{1,2}^{1,2}(k_2^{(1)}, k_1^{(1)})} a(k_2^{(1)})B(k)B(k_1^{(1)})|\Omega\rangle,
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

e

$$\begin{aligned}
 D(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}}\rangle &= \frac{S_{2,2}^{2,2}(k_1^{(1)}, k)S_{2,2}^{2,2}(k_2^{(1)}, k)}{S_{1,2}^{1,2}(k_1^{(1)}, k)S_{1,2}^{1,2}(k_2^{(1)}, k)} d(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}}\rangle \\
 &\quad - \frac{S_{1,2}^{2,1}(k_1^{(1)}, k)S_{2,2}^{2,2}(k_2^{(1)}, k_1^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k_1^{(1)}, k)S_{1,2}^{1,2}(k_2^{(1)}, k_1^{(1)})} d(k_1^{(1)})B(k)B(k_2^{(1)})|\Omega\rangle \\
 &\quad - \frac{S_{1,2}^{2,1}(k_2^{(1)}, k)S_{2,2}^{2,2}(k_1^{(1)}, k_2^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k_2^{(1)}, k)S_{1,2}^{1,2}(k_1^{(1)}, k_2^{(1)})} d(k_2^{(1)})B(k)B(k_1^{(1)})|\Omega\rangle,
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

onde usamos as relações (A.8), (A.9) e (A.10). Das equações (A.19) e (A.20), a equação do auto-valor (A.14) fornece:

$$\Lambda(k) = \phi(s_1) \prod_{j=1}^n S_{1,1}^{1,1}(k_{p_j}, k) \prod_{\alpha=1}^2 \frac{S_{1,1}^{1,1}(k, k_\alpha^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_\alpha^{(1)})} + \phi(s_2) \prod_{j=1}^n S_{1,2}^{1,2}(k_{p_j}, k) \prod_{\alpha=1}^2 \frac{S_{2,2}^{2,2}(k_\alpha^{(1)}, k)}{S_{1,2}^{1,2}(k_\alpha^{(1)}, k)}, \tag{A.21}$$

com a seguinte condição que fixa os parâmetros $k_1^{(1)}$ e $k_2^{(1)}$:

$$\frac{\phi(s_2)}{\phi(s_1)} \prod_{j=1}^n \frac{S_{1,2}^{1,2}(k_{p_j}, k_\alpha^{(1)})}{S_{1,1}^{1,1}(k_{p_j}, k_\alpha^{(1)})} = \prod_{\beta=1 (\neq \alpha)}^2 \frac{S_{1,1}^{1,1}(k_\alpha^{(1)}, k_\beta^{(1)})S_{1,2}^{1,2}(k_\beta^{(1)}, k_\alpha^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k_\alpha^{(1)}, k_\beta^{(1)})S_{2,2}^{2,2}(k_\beta^{(1)}, k_\alpha^{(1)})} \quad (\alpha = 1, 2), \tag{A.22}$$

onde usamos novamente a relação (A.17).

n_2 **geral**. Procedendo como nos casos de $n_2 = \Gamma$ e $n_2 = 2$, da equação de

auto-valores (A.14) obtemos:

$$\begin{aligned}
A(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle &= \Lambda^{(A)}(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \Lambda_i^{(A)}|\Psi_{k, k_1^{(1)}, \dots, k_{i-1}^{(1)}, k_{i+1}^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle, \\
D(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle &= \Lambda^{(D)}(k)|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \Lambda_i^{(D)}|\Psi_{k, k_1^{(1)}, \dots, k_{i-1}^{(1)}, k_{i+1}^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}}\rangle,
\end{aligned} \tag{A.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(A)}(k) &= \phi(s_1) \prod_{j=1}^n S_{1,1}^{1,1}(k_{p_j}, k) \prod_{\alpha=1}^{n_2} \frac{S_{1,1}^{1,1}(k, k_\alpha^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_\alpha^{(1)})}, \\
\Lambda^{(D)}(k) &= \phi(s_2) \prod_{j=1}^n S_{1,2}^{1,2}(k_{p_j}, k) \prod_{\alpha=1}^2 \frac{S_{2,2}^{2,2}(k_\alpha^{(1)}, k)}{S_{1,2}^{1,2}(k_\alpha^{(1)}, k)}, \\
\Lambda_j^{(A)}(k) &= a(k_j^{(1)}) \frac{S_{2,1}^{2,1}(k, k_j^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_j^{(1)})} \prod_{l=1 (\neq j)}^{n_2} \frac{S_{1,1}^{1,1}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)})}, \\
\Lambda_j^{(D)}(k) &= d(k_j^{(1)}) \frac{S_{1,2}^{2,1}(k_j^{(1)}, k)}{S_{1,2}^{1,2}(k_j^{(1)}, k)} \prod_{l=1 (\neq j)}^{n_2} \frac{S_{2,2}^{2,2}(k_l^{(1)}, k_j^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k_l^{(1)}, k_j^{(1)})}.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Então, o auto-valor $\Lambda(k) = \Lambda^{(A)}(k) + \Lambda^{(D)}(k)$ é:

$$\Lambda(k) = \phi(s_1) \prod_{j=1}^n S_{1,1}^{1,1}(k_{p_j}, k) \prod_{\alpha=1}^{n_2} \frac{S_{1,1}^{1,1}(k, k_\alpha^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k, k_\alpha^{(1)})}, \tag{A.25}$$

onde usamos o fato de que $S_{1,2}^{1,2}(k, k) = 0$ para a matriz S em questão. Finalmente, a condição que fixa os parâmetros $\{k_j^{(1)}\}$ é dada por:

$$\Lambda_j^{(A)}(k) + \Lambda_j^{(D)}(k) = 0 \quad (j = 1, \dots, n_2). \tag{A.26}$$

Usando (A.24) nesta última expressão, obtemos:

$$\frac{\phi(s_2)}{\phi(s_1)} \prod_{j=1}^n \frac{S_{1,2}^{1,2}(k_{p_j}, k_\alpha^{(1)})}{S_{1,1}^{1,1}(k_{p_j}, k_\alpha^{(1)})} = \prod_{\beta=1 (\neq \alpha)}^{n_2} \frac{S_{1,1}^{1,1}(k_\alpha^{(1)}, k_\beta^{(1)}) S_{1,2}^{1,2}(k_\beta^{(1)}, k_\alpha^{(1)})}{S_{1,2}^{1,2}(k_\alpha^{(1)}, k_\beta^{(1)}) S_{2,2}^{2,2}(k_\beta^{(1)}, k_\alpha^{(1)})} \quad (\alpha = 1, \dots, n_2). \tag{A.27}$$

A.2 N classes de partículas

Vamos diagonalizar a matriz de transferência do modelo de seis-vértices inhomôneo com condição de contorno torcida, para o caso geral de N classes de partículas definido no capítulos 5:

$$T(k)_{\{Q'\}}^{\{Q\}} = \sum_{Q''_1, \dots, Q''_n} \left(\prod_{l=1}^n S_{Q'_l, Q''_l}^{Q_l, Q''_{l+1}}(k_{p_l}, k) \right), \quad (\text{A.28})$$

com condição de contorno torcida

$$S_{Q'_n, Q''_n}^{Q_n, Q''_{n+1}}(k_{p_n}, k) = S_{Q'_n, Q''_n}^{Q_n, Q''_1}(k_{p_n}, k) \phi(s_{Q''_1}), \quad (\text{A.29})$$

com a fase

$$\phi(s) = e^{i(s-1) \sum_{j=1}^n k_j}. \quad (\text{A.30})$$

Para diagonalizar a matriz de transferência (A.28) procedemos como no caso de duas classes de partículas distutido na seção A.1. A matriz de monodromia $\mathcal{M}(k)$ agora é dada por:

$$\mathcal{M}_{\{Q'\}, \mu_1}^{\{Q\}, \mu_{n+1}} = \sum_{\mu_2, \dots, \mu_n} S_{Q'_1, \mu_1}^{Q_1, \mu_2}(k_{p_1}, k) S_{Q'_2, \mu_2}^{Q_2, \mu_3}(k_{p_2}, k) \cdots S_{Q'_{n-1}, \mu_{n-1}}^{Q_{n-1}, \mu_n}(k_{p_{n-1}}, k) S_{Q'_n, \mu_n}^{Q_n, \mu_{n+1}}(k_{p_n}, k), \quad (\text{A.31})$$

e satisfaz a seguinte relação:

$$S_{\nu_1, \mu_1}^{\nu'_1, \mu'_1}(k', k) \mathcal{M}_{\{\alpha_i\}, \mu'_1}^{\{\gamma_i\}, \mu_{n+1}}(k) \mathcal{M}_{\{\gamma_i\}, \nu'_1}^{\{\beta_i\}, \nu_{n+1}}(k') = \mathcal{M}_{\{\alpha_i\}, \nu_1}^{\{\gamma_i\}, \nu'_{n+1}}(k') \mathcal{M}_{\{\gamma_i\}, \mu_1}^{\{\beta_i\}, \mu'_{n+1}}(k) S_{\nu'_{n+1}, \mu'_{n+1}}^{\nu_{n+1}, \mu_{n+1}}(k', k). \quad (\text{A.32})$$

Como na seção anterior, esta equação impõe relações para as componentes da matriz de monodromia. Denotando as componentes no espaço horizontal por

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{\beta}(k) &= \mathcal{M}_{\{\alpha_i\}, \alpha}^{\{\gamma_i\}, \beta}(k), & B^{\alpha}(k) &= \mathcal{M}_{\{\alpha_i\}, N}^{\{\gamma_i\}, \alpha}(k), \\ C^{\alpha}(k) &= \mathcal{M}_{\{\alpha_i\}, \alpha}^{\{\gamma_i\}, N}(k), & D(k) &= \mathcal{M}_{\{\alpha_i\}, N}^{\{\gamma_i\}, N}(k). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Como a matriz de transferência é definida em uma rede periódica, em termos das componentes (A.33), ela é dada por:

$$T(k) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} A_{\alpha}^{\alpha}(k) + D(k). \quad (\text{A.34})$$

Como consequência da equação (A.32), as matrizes $A(k)$, $B(k)$ e $D(k)$ satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$A_{\alpha}^{\beta}(k)B^{\gamma}(k') = \sum_{\alpha',\beta'=1}^{N-1} \frac{S_{\alpha',\beta'}^{\gamma,\beta}(k',k)}{S_{N,\alpha}^{N,\alpha}(k',k)} B^{\alpha'}(k')A_{\alpha}^{\beta'}(k) - \frac{S_{N,\alpha}^{\alpha,N}(k',k)}{S_{N,\alpha}^{N,\alpha}(k',k)} B^{\beta}(k)A_{\alpha}^{\gamma}(k'), \quad (\text{A.35})$$

$$D(k)B^{\alpha}(k') = \frac{S_{N,N}^{N,N}(k,k')}{S_{N,\alpha}^{N,\alpha}(k,k')} B^{\alpha}(k')D(k) - \frac{S_{\alpha,N}^{N,\alpha}(k,k')}{S_{N,\alpha}^{N,\alpha}(k,k')} B^{\alpha}(k)D(k'). \quad (\text{A.36})$$

Usaremos estas relações para diagonalizar a matriz de transferência (A.28) pelo *ansatz* de Bethe algébrico. Para isso, primeiro identificamos o estado de referência, que deve ser um auto-estado da matriz $A_{\alpha}^{\alpha}(k)$, e da matriz $D(k)$, mas não será auto-vetor da matriz $B(k)$. Um estado de referência conveniente é o estado $|\Omega\rangle = |\{\alpha_l = N\}\rangle_{l=1,\dots,n}$, que corresponde ao de só termos partículas da classe N . A aplicação das matrizes (A.33) neste estado de referência é dada por:

$$A_{\alpha}^{\beta}(k)|\Omega\rangle = a_{\alpha}^{\beta}(k)|\Omega\rangle, \quad D(k)|\Omega\rangle = d(k)|\Omega\rangle, \quad (\text{A.37})$$

$$C^{\alpha}(k)|\Omega\rangle = 0, \quad B^{\alpha}(k)|\Omega\rangle = \sum_{i=1}^n b_i^{\alpha}(k)|\Omega_{\alpha}^{(i)}\rangle,$$

onde

$$a(k) = \delta_{\alpha,\beta}\phi(s_{\alpha}) \prod_{i=1}^n S_{N,\alpha}^{N,\alpha}(k_{p_i},k), \quad d(k) = \phi(s_N) \prod_{i=1}^n S_{N,N}^{N,N}(k_{p_i},k), \quad (\text{A.38})$$

$$b_i(k) = \prod_{l=1}^{i-1} S_{N,N}^{N,N}(k_{p_l},k) \prod_{l=i+1}^n S_{N,\alpha}^{N,\alpha}(k_{p_l},k) S_{\alpha,N}^{N,\alpha}(k_{p_i},k),$$

e $|\Omega_{\alpha}^{(i)}\rangle = |\{\alpha_{l \neq i} = N\}, \alpha_i = \alpha\rangle$. As matrizes $B^{\alpha}(k)$ atuam no estado de referência como “operadores de criação”, isto é, elas criam partículas da classe α em um mar

de partículas da classe N . O *ansatz* de Bethe algébrico assume que um auto-vetor geral da matriz de transferência (A.28), no setor com m_1 ($1, 2, \dots, n$) partículas de classes distintas da classe N , pode ser escrito como:

$$|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}; F}\rangle = \sum_{\{\beta\}} F_{\beta_1, \dots, \beta_{m_1}} B^{\beta_1}(k_1^{(1)}) B^{\beta_2}(k_2^{(1)}) \dots B^{\beta_{m_1}}(k_{m_1}^{(1)}) |\Omega\rangle, \quad (\text{A.39})$$

onde os números $\{k_i^{(1)}\}$, $i = 1, \dots, n_2$, e F , são fixados pela equação de auto-valor:

$$T(k) |\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{m_1}^{(1)}; F}\rangle = \Lambda(k) |\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{m_1}^{(1)}; F}\rangle. \quad (\text{A.40})$$

As relações (A.35) e (A.36) quando usadas em (A.39) e (A.40) fornecem:

$$\begin{aligned} T(k) |\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}; F}\rangle &= \quad (\text{A.41}) \\ & \frac{\prod_{j=1}^n S_{N,1}^{N,1}(k_j, k)}{\prod_{j=1}^{m_1} S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(1)}, k)} \sum_{\{\beta\}} \sum_{\{\alpha'\}} T_1(k)_{\{\alpha'\}}^{\{\beta\}} F_{\{\beta\}} B^{\alpha'}(k_1^{(1)}) \dots B^{\alpha'_{m_1}}(k_{m_1}^{(1)}) |\Omega\rangle \\ & + \phi(s_N) \prod_{i=1}^n S_{N,N}^{N,N}(k_i, k) \sum_{\{\beta\}} \prod_{l=1}^{m_1} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k, k_l^{(1)})}{S_{N,\beta_l}^{N,\beta_l}(k, k_l^{(1)})} F_{\{\beta\}} B^{\beta'}(k_1^{(1)}) \dots B^{\beta'_{m_1}}(k_{m_1}^{(1)}) |\Omega\rangle \\ & + \text{termos não desejados} \\ & = \Lambda(k) |\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}; F}\rangle, \end{aligned}$$

onde os termos indesejados não satisfazem a equação de auto-valor (A.40), e impõe vínculos que fixam os parâmetros $\{k_i^{(1)}\}$ e $F_{\{\beta\}}$; e onde

$$T_1(k)_{\{\alpha'\}}^{\{\beta\}} = \sum_{\alpha'} \phi(s_\alpha) \sum_{\beta'_1, \dots, \beta'_{m_1}=1}^{N-1} S_{\alpha'_1, \beta'_1}^{\beta_1, \alpha}(k_1^{(1)}, k) \left(\prod_{i=1}^{m_1-1} S_{\alpha'_i, \beta'_{i+1}}^{\beta_i, \beta'_i}(k_i^{(1)}, k) \right) S_{\alpha'_{m_1}, \alpha}^{\beta_{m_1}, \beta'_{m_1-1}}(k_{m_1}^{(1)}, k) \quad (\text{A.42})$$

é uma matriz de transferência de dimensão $(N-1)^{m_1}$ de um modelo de vértices inonogêneo, com inomogeneidades $\{k_{m_1}^{(1)}, k_{m_1-1}^{(1)}, \dots, k_1^{(1)}\}$, e condição de contorno torcida (fase da contorno $\phi(s_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N-1$). Diagonalizando esta outra matriz de transferência obtemos de (A.41):

$$\Lambda(k) = \frac{\prod_{j=1}^n S_{N,1}^{N,1}(k_j, k)}{\prod_{j=1}^{m_1} S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(1)}, k)} \Lambda^{(1)}(k) + \phi(s_N) \prod_{i=1}^n S_{N,N}^{N,N}(k_i, k) \prod_{l=1}^{m_1} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k, k_l^{(1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k, k_l^{(1)})}. \quad (\text{A.43})$$

Para provar que $\Lambda(k)$ e $|\Psi_{k_1^{(1)}, \dots, k_{n_2}^{(1)}; F}\rangle$ são os auto-valores e auto-vetores da matriz de transferência $T(k)$, devemos fixar os parâmetros $\{k_1^{(1)}, \dots, k_{m_1}^{(1)}\}$ zerando os termos indesejados em (A.41). Para o caso $N = 2$, feito na seção anterior, este cálculo é simples, mas para N arbitrário o cálculo é extremamente complicado. Vamos seguir uma forma alternativa para obter o auto-valor $\Lambda^{(1)}(k_j^{(1)})$ seguindo o método apresentado em [4, 94]. Como a expressão (A.43) para os auto-valores deve ser válida para valores arbitrários de k , e para $k = k_j^{(1)}$ o denominador em (A.43) zera ($S_{N,l}^{N,l}(k_j^{(1)}, k_j^{(1)}) = 0$, $l \neq N$); e para obtermos um resultado finito, devemos impor a condição:

$$\Lambda^{(1)}(k_j^{(1)}) = \phi(s_N) \prod_{i=1}^n \frac{S_{N,N}^{N,N}(k_i, k_j^{(1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_i, k_j^{(1)})} \prod_{l=1, (\neq j)}^{m_1} \frac{S_{N,1}^{N,1}(k_l^{(1)}, k_j^{(1)}) S_{N,N}^{N,N}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(1)}, k_l^{(1)})}. \quad (\text{A.44})$$

Notamos que o resultado (A.44) não depende da ordenação das variáveis $k_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, m_1$). Podemos então inverter o ordenamento destas variáveis na matriz de transferência (A.42). Isto significa que o auto-valor $\Lambda(k) = \Lambda^{(0)}(k)$ da matriz de transferência do problema com N classes de partículas com inhomogeneidades $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_n^{(0)}) \equiv (k_1, k_2, \dots, k_n)$, está relacionado ao auto-valor $\Lambda^{(1)}(k)$ do problema com $N - 1$ classes de partículas e inhomogeneidades $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_{m_1}^{(1)}$.

Iterando este cálculo obtemos a generalização das relações (A.43) e (A.44):

$$\Lambda^{(l)}(k) = \frac{\prod_{\nu=1}^{m_l} S_{N,1}^{N,1}(k_\nu^{(l)}, k)}{\prod_{\nu=1}^{m_{l+1}} S_{N,1}^{N,1}(k_\nu^{(l+1)}, k)} \Lambda^{(l+1)}(k) + \phi(s_{N-l}) \prod_{\nu=1}^{m_l} S_{N,N}^{N,N}(k_\nu^{(l)}, k) \prod_{\nu=1}^{m_{l+1}} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k, k_\nu^{(l+1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k, k_\nu^{(l+1)})}, \quad (l = 0, 1, \dots, N - 1), \quad (\text{A.45})$$

$$\Lambda^{(l+1)}(k_j^{(l+1)}) = \phi(s_{N-l}) \prod_{\nu=1}^{m_l} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k_\nu^{(l)}, k_j^{(l+1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_\nu^{(l)}, k_j^{(l+1)})} \times \prod_{\nu=1, (\neq j)}^{m_{l+1}} \frac{S_{N,1}^{N,1}(k_\nu^{(l+1)}, k_j^{(l+1)}) S_{N,N}^{N,N}(k_j^{(l+1)}, k_\nu^{(l+1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(l+1)}, k_\nu^{(l+1)})}, \quad (\text{A.46})$$

que conecta os auto-valores da matriz de transferência inhomogênea $T_l(k)$ com os da matriz $T_{l+1}(k)$, com inhomogeneidades $\{k_j^{(l)}\}$ e $\{k_j^{(l+1)}\}$, relacionadas aos problemas de $N - l$ e $N - l - 1$ classes de partículas, respectivamente.

Para a matriz S em questão temos $S_{N,l}^{N,l}(k, k) = 0$, portanto as equações (A.43)

se reduzem a:

$$\Lambda(k) = \phi(s_N) \prod_{i=1}^n S_{N,N}^{N,N}(k_i, k) \prod_{l=1}^{m_1} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k, k_l^{(1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k, k_l^{(1)})}. \quad (\text{A.47})$$

Por outro lado, usado (A.45) com $l = 1$ e $S_{N,l}^{N,l}(k, k) = 0$ na (A.44), obtemos a relação:

$$\begin{aligned} \phi(s_{N-1}) \prod_{\nu=1}^{m_1} S_{N,N}^{N,N}(k_\nu^{(1)}, k_j^{(1)}) \prod_{\nu=1}^{m_2} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k_j^{(1)}, k_\nu^{(2)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(1)}, k_\nu^{(2)})} = \\ \phi(s_N) \prod_{\nu=1}^n \frac{S_{N,N}^{N,N}(k_\nu, k_j^{(1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_\nu, k_j^{(1)})} \prod_{\nu=1, (\neq j)}^{m_1} \frac{S_{N,1}^{N,1}(k_\nu^{(1)}, k_j^{(1)}) S_{N,N}^{N,N}(k_j^{(1)}, k_\nu^{(1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(1)}, k_\nu^{(1)})}, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

onde agora precisamos encontrar as relações que fixam os parâmetros $k_j^{(2)}$. Finalmente, iterando este processo encontramos a generalização de (A.48), que fixa todos os parâmetros espectrais, e fornece os auto-valores (A.47) da matriz de transferência (A.28):

$$\begin{aligned} \phi(s_{N-l}) \prod_{\nu=1}^{m_l} S_{N,N}^{N,N}(k_\nu^{(l)}, k_j^{(l)}) \prod_{\nu=1}^{m_{l+1}} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k_j^{(l)}, k_\nu^{(l+1)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(l)}, k_\nu^{(l+1)})} = \phi(s_{N-(l-1)}) \prod_{\nu=1}^{m_{l-1}} \frac{S_{N,N}^{N,N}(k_\nu^{(l-1)}, k_j^{(l)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_\nu^{(l-1)}, k_j^{(l)})} \\ \times \prod_{\nu=1, (\neq j)}^{m_l} \frac{S_{N,1}^{N,1}(k_\nu^{(l)}, k_j^{(l)}) S_{N,N}^{N,N}(k_j^{(l)}, k_\nu^{(l)})}{S_{N,1}^{N,1}(k_j^{(l)}, k_\nu^{(l)})} \quad (j = 1, 2, \dots, m_l; l = 0, 1, \dots, N - 2). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Referências Bibliográficas

- [1] V. E. Korepin, A. G. Izergin and N. M. Bogoliubov, 1992 *Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions and Algebraic Bethe Ansatz* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [2] H. A. Bethe, 1931 *Z. Phys.* **71**, 205.
- [3] R. J. Baxter, 1982 *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (New York: Academic).
- [4] M. Gaudin, 1983 *La Fonction d'Onde de Bethe* (Paris: Masson).
- [5] E. H. Lieb and D. C. Mattis, 1966 *Mathematical Physics in One Dimension* (New York-London: Academic Press).
- [6] C. N. Yang, 1983 *Selected Papers 1945-1980 with Commentary* (New York: W. H. Freeman and Co.).
- [7] M. Jimbo, 1990 *Yang Baxter Equation in Integrable Systems, Advanced Series in Mathematical Physics* **10** (Singapore: World Scientific).
- [8] A. Andrei, K. Furuya and J. H. Lowenstein, 1983 *Rev. Mod. Phys.* **55**, 331.
- [9] A. M. Tselick and P. B. Wiegmann, 1983 *Adv. Phys.* **32**, 453.

- [10] E. H. Lieb and W. Liniger, 1963 *Phys. Rev.* **130**, 1605.
- [11] H. Lieb, 1963 *Phys. Rev.* **130**, 1616.
- [12] P. Schlottmann, 1987 *Phys. Rev. B* **36**, 5177.
- [13] E. H. Lieb and F. Y. Wu, 1968 *Phys. Rev. Lett.* **20** 1445.
- [14] V. I. Rupasov and V. I. Yudson, 1984 *Sov. Phys. JETP* **60** 927.
- [15] J. A. Minahan and K. Zarembo, 2003 *JHEP* **0303** 013.
- [16] E. K. Sklyanin, L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, 1980 *Theor. Math. Phys.* **40** 688.
- [17] E. K. Sklyanin and L. D. Faddeev, 1978 *Sov. Phys. Dokl.* **23** 902.
- [18] E. K. Sklyanin, 1982 *J. Sov. Math.* **19** 1546.
- [19] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, 1987 *Hamiltonian Methods in Soliton Theory* (Springer).
- [20] P. D. Lax, 1968 *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, 467.
- [21] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov 1979 *Ann. Phys. NY* **120** 253.
- [22] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, 1984 *Nucl. Phys.* **B241**, 333.
- [23] C. Itzykson, H. Saleur and J. B. Zuber, 1986 *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics* (Singapore: World Scientific).

- [24] E. K. Sklyanin, 1985 *Lecture Notes in Physics* **226** 196 (Berlin: Springer).
- [25] E. K. Sklyanin, 1985 *J. Sov. Math.* **31** 3417.
- [26] E. K. Sklyanin, 1992 *Quantum inverse scattering method. Selected topics*, hep-th/9211111.
- [27] F. H. L. Essler and V. E. Korepin, 1994 *Exactly Solvable Models of Strongly Correlated Electrons* (Singapore: World Scientific).
- [28] P. Schlottmann, 1977 *Int. J. Mod. Physics B* **11** 355.
- [29] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb and H. Tasaki, 1988 *Commun. Math. Phys.* **115** 477,
- [30] D. P. Arovas, A. Auerbach and F. D. M. Haldane, 1998 *Phys. Rev. Lett.* **60** 531.
- [31] M. Fannes, B. Nachtergaele and R. F. Werner, 1992 *Commun. Math. Phys.* **144** 443.
- [32] A. Kluemper, A. Schadschneider and J. Zittarz, 1992 *Z. Phys. B* **87** 281;
1993 *Europhys. Lett.* **24** 293.
- [33] F. C. Alcaraz, S. Dasmahapatra and V. Rittenberg, 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 845.
- [34] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** 1493.
- [35] B. Derrida, 1988 *Physics Reports* **301** 65.

- [36] T. M. Liggett, 1999 *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Process* (Springer Verlag).
- [37] G. M. Schütz, 2000 in *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 19, ed C. Domb and J. Lebowitz (London: Academic).
- [38] F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel and V. Rittenberg, 1994 *Ann. Phys. (N.Y.)* **230** 250.
- [39] J. Krug and H. Spohn, 1991 *Solids Far From Equilibrium* ed C. Godrèche (Cambridge: Cambridge University Press).
- [40] B. Derrida, E. Domany and D. Mukamel, 1992 *J. Stat. Phys.* **69** 667.
- [41] R. Domany and E. Schütz, 1993 *J. Stat. Phys.* **72** 277.
- [42] M. R. Evans, D. P. Foster, C. Godrèche and D. Mukamel, 1995 *J. Stat. Phys.* **80** 69.
- [43] B. Derrida, J. L. Lebowitz and E. R. Speer, 1997 *J. Stat. Phys.* **89** 135.
- [44] K. Nagel and M. Schreckenberg, 1992 *J. Physique* **2** 2221.
- [45] R. B. Stinchcombe and G. M. Schütz, 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 140; 1995 *Europhys. Lett.* **29** 663.
- [46] T. Sasamoto and M. Wadati, 1999 *J. Phys. Soc. Japan* **66** 2618.
- [47] V. Popkov, M. E. Fouladvand and G. M. Schütz, 2002 *J. Phys. A: Math. Gen* **35** 7187.
- [48] V. Popkov and G. M. Schütz, 2002 *Mat. Fiz. Anal. Geom.* **9** 401.

- [49] F. C. Alcaraz and M. J. Lazo, 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, L1.
- [50] F. C. Alcaraz and M. J. Lazo, 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 4149.
- [51] F. C. Alcaraz and M. J. Lazo, 2003 *Braz. J. Phys.* **33**, 533.
- [52] M. J. Lazo, submetido à publicação.
- [53] C. N. Yang and C. P. Yang, 1966 *Phys. Rev.* **150** 321.
- [54] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter and G. R. W. Quispel, 1987 *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** 6397.
- [55] A. B. Zamolodchikov and V. Fateev, 1980 *Sov. J. Nucl. Phys.* **32** 298.
- [56] A. G. Izergin and V. E. Korepin, 1981 *Commun. Math. Phys.* **79** 303.
- [57] F. C. Alcaraz and R. Z. Bariev, 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** L467.
- [58] B. Sutherland, 1975 *Phys. Rev. B* **12** 3795.
- [59] J. H. H. Perk and C. L. Schultz, 1981 *Phys. Lett. A* **84** 407.
- [60] F. H. L. Essler, V. E. Korepin and K. Schoutens, 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 2960; 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 73.
- [61] F. C. Alcaraz and R. Z. Bariev, 1999 *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** L483.
- [62] F. C. Alcaraz and R. Z. Bariev, 1999 *Phys. Rev. E* **60** 79.
- [63] F. C. Alcaraz and R. Z. Bariev, 2000 *Braz. J. Phys.* **30** 13.
- [64] F. C. Alcaraz and R. Z. Bariev, 2000 *Braz. J. Phys.* **30** 655.
- [65] E. H. Lieb, 1967 *Phys. Rev.* **162**, 162.

- [66] B. Sutherland, 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19**, 103.
- [67] C. P. Yang, 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19**, 586.
- [68] C. N. Yang, 1968 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312.
- [69] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **49**, 619 (1928).
- [70] A. B. Zamolodchikov, 1979 *Comm. Math. Phys.* **69** 165.
- [71] E. K. Sklyanin, 1988 *J. Phys.A: Math. Gen* **21** 2375.
- [72] P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, 1981 *Sov. Phys. -JETP* **53** 108.
- [73] M. J. Martins and P. B. Ramos, 1997 *Phys. Rev. B* **56** 6376.
- [74] T. Deguchi, A. Fujii and K. Ito, 1990 *Phys. Lett. B* 238.
- [75] M. D. Gould, J. R. Links and Y. Z. Zhang, 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**
4313.
- [76] L. H. Gwa and H. Spohn, 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68**, 725; 1992 *Phys. Rev. A*
46, 844.
- [77] D. Kim, 1995 *Phys. Rev. E* **52**, 3512.
- [78] D. Kim, 1997 *J. Phys. A* **30**, 3817.
- [79] C. Boldrighini, G. Cosimi, S. Frigio, and G. Nuñez, 1989 *J. Stat. Phys.* **55**,
611.
- [80] P. A. Ferrari, C. Kipnis and E. Saada, 1991 *Ann. Prob.* **19**, 226.
- [81] P. A. Ferrari, 1992 *Prob. Theory Relat. Fields* **91**, 81.

- [82] K. Mallick, S. Mallick and N. Rajewsky, 1999 *J. Phys. A* **32**, 48.
- [83] S. V. Pokrovskii and A. M. Tsvetick, 1987 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **93**, 2232
(1987 *Sov. Phys.-JETP* **66**, 6).
- [84] B. Sutherland, 1970 *J. Math. Phys.* **11**, 3183.
- [85] R. J. Baxter, 1973 *Ann. Phys.* **76** 1.
- [86] R. J. Baxter, 1973 *Ann. Phys.* **76** 25.
- [87] R. J. Baxter, 1973 *Ann. Phys.* **76** 48.
- [88] H. J. de Vega and A. González-Ruiz, 1993 *J. Phys.* **A26** L519.
- [89] F. C. Alcaraz and A. A. Ferreira, a ser submetido à publicação.
- [90] D. Berenstein, J. M. Maldacena and H. Nastase, 2002 *JHEP* **0204** 013.
- [91] J. M. Maldacena, 1998 *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231.
- [92] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, 1998 *Phys. Lett.* **B428**
105.
- [93] E. Witten, 1998 *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253.
- [94] P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, 1981 *Eksp. Teor. Fiz.* **80**, 214; C. L.
Schultz, 1983 *Physica A* **122**, 71.