UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP-DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO APLICADA

“Problemas inversos associados a equações diferenciais impulsivas”

Patrícia Kyoe Fukushima

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Computação Aplicada.

Ribeirão Preto-SP

2019

Patrícia Kyoe Fukushima

“Problemas inversos associados a equações diferenciais impulsivas”

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Computação Aplicada.

Orientador: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

Ribeirão Preto–SP

2019

Fukushima, Patrícia Kyo

Problemas inversos associados a equações diferenciais impulsivas. Ribeirão Preto–SP, 2019.

93p. : il.; 30 cm.

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências,
Área: Computação Aplicada.

Orientador: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

1. Problemas inversos. 2. Identificação de parâmetros. 3. Equações diferenciais impulsivas.

Patrícia Kyoe Fukushima

Problemas inversos associados a equações diferenciais impulsivas

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Computação Aplicada.

Trabalho aprovado. Ribeirão Preto–SP, 07 de Fevereiro de 2019:

Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli
Orientadora

Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez
Convidado 1

Prof. Dr. Olavo Henrique Menin
Convidado 2

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Convidado 3

Ribeirão Preto–SP
2019

*Aos meus pais à quem dedico meus primeiros aprendizados,
que me fizeram chegar até esta conquista.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que conquistei e por ter me dado forças para superar todos meus obstáculos.

À minha família, pelo apoio incondicional, em especial meus pais Lourdes e Kenji por todo incentivo, carinho e educação que me proporcionaram.

À professora Vanessa Rolnik Artioli, pelos incontáveis ensinamentos, pelas contribuições em todos os estágios do projeto, pela atenção e paciência com que me orientou, e pela amizade. Muito obrigada!

Aos antigos amigos e aos novos conquistados ao longo desta trajetória, a minha eterna gratidão. Obrigada pelo apoio, companheirismo e bons momentos.

Ao meu namorado por todo companheirismo, amor, apoio e paciência.

A todos professores e professoras que contribuíram de forma significativa para minha educação. Agradeço também aos funcionários que me auxiliaram nesses anos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

"Sem a disciplina e a determinação, qualquer sonho não passará de devaneio"
Aristóteles

Resumo

As equações diferenciais impulsivas (EDIs) modelam fenômenos que são contínuos por partes, isto é, que evoluem continuamente mas em certos momentos sofrem mudanças abruptas (impulsos) consideradas instantâneas quando comparadas à duração total do processo. Surgem nas mais diversas áreas das ciências, como na modelagem de concentração de medicamentos no corpo humano e no impacto de propaganda nas vendas de uma empresa. O problema direto associado a uma EDI com instantes de impulsos pré-fixados consiste em, fornecidos a equação diferencial, a condição inicial, os momentos de impulso e os saltos, determinar a solução do problema. Por outro lado, as incógnitas dos problemas inversos associados são os saltos e/ou os momentos de impulso. Em geral, os problemas inversos não podem ser resolvidos diretamente por meio de técnicas convencionais. A abordagem funcional é uma alternativa baseada na minimização de um funcional de erro que confronta dados do fenômeno real e do modelo matemático. O mínimo global deste funcional corresponde à solução do problema inverso. O objetivo principal desta dissertação é investigar os problemas inversos de identificação dos parâmetros saltos e momentos de impulso. Buscamos descrever uma técnica que permita tratar de problemas inversos associados às EDIs de forma bem geral, que não utilize informações específicas da aplicação além das medidas no tempo inicial e final do processo. Para isso, desenvolvemos um programa computacional composto por uma função para solução numérica do problema direto usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, função esta que é chamada diversas vezes para cada resolução do problema direto com diferentes valores para as incógnitas; e pelo método de otimização *Simulated Annealing* que altera sistematicamente os valores das incógnitas. Os resultados mostram que resolver os problemas inversos que surgem das EDIs não é uma tarefa simples, que a técnica estudada é promissora e que pode ser aperfeiçoada.

Palavras-chave: Problemas inversos. Identificação de parâmetros. Equações diferenciais impulsivas.

Abstract

Impulsive differential equations (IDEs) model piecewise continuous phenomena, that is, that evolve continuously but at certain moments suffer abrupt changes (impulses) considered instantaneous when compared to the total duration of the process. They arise in several areas of science, such as the modeling of drug concentration in the human body and the impact of advertising on a company's sales. The direct problem associated with an IDE with impulses at fixed times consists of determining the solution to the problem, provided the differential equation, the initial condition, the moments of impulse and the jumps. On the other hand, the unknowns of the associated inverse problems are the jumps and/or the moments of impulse. In general, the inverse problems cannot be solved directly by conventional techniques. The functional approach is an alternative based on the minimization of an error functional that confronts data of the real phenomenon and the mathematical model. The global minimum of this functional corresponds to the solution of the inverse problem. The main objective of this dissertation is to investigate the inverse problems of jumps and moments of impulse parameters identification. We have attempted to describe a technique that allows treating of the inverse problems associated with IDEs in a general way, which does not use particular information of the application besides the measurements in the initial and final time of the process. For this, we developed a computer program composed by a function to solve the direct problem numerically using the fourth-order Runge-Kutta method, which is called several times for each resolution of the direct problem with different values for the unknowns; and by the *Simulated Annealing* optimization method which changes the values of the unknowns systematically. The results show that solving the inverse problems that arise from IDEs is not a simple task and that the technique studied is promising and can be improved.

Keywords: Inverse problems. Parameters identification. Impulsive differential equations.

Lista de figuras

Figura 1 – Evolução da solução de um sistema impulsivo até o instante $\tau_1 > t_0$. . .	34
Figura 2 – Evolução da solução de um sistema impulsivo até o instante $\tau_1 > t_0$ e salto em $t = \tau_1$ de $(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1))$ para $(\tau_1, \mathbf{x}_1^+)$	35
Figura 3 – Evolução da solução de um sistema impulsivo até o instante $\tau_2 > \tau_1$. . .	35
Figura 4 – Solução do PVI do Exemplo 1, sem impulso.	40
Figura 5 – Solução do Exemplo 1 com saltos constantes $I_1(x) = 1$ e $I_2(x) = 1$, calculados em $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$	41
Figura 6 – Solução do Exemplo 1 com saltos dependendo da solução $I_1(x) = x^2 + 1$ e $I_2(x) = \ln(x)$, calculados em $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$	42
Figura 7 – Solução do Exemplo 2 com condição inicial $x(0) = 1$, (a) sem impulso, solução para $t \geq 0$ e (b) com impulso, solução apenas em $[0, 1]$	43
Figura 8 – Solução do Exemplo 2 com condição inicial $x(0) = 2$, (a) sem impulso, solução para $t \geq 0$ e (b) com impulso, solução apenas em $[0, 2]$	43
Figura 9 – Solução do Exemplo 3 com condição inicial $x(0) = 0$, (a) sem impulso, solução existe para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e (b) com impulso, solução existe para $t \in [0, \infty)$	45
Figura 10 – Solução do Exemplo 1.49 sem considerar o efeito impulsivo em $t = 1$, (a) $x_1(t)$ e (b) $x_2(t)$	46
Figura 11 – Solução do Exemplo 1.49 com impulso em $t = 1$, (a) $x_1(t)$ e (b) $x_2(t)$. .	47
Figura 12 – Solução numérica e solução exata do Exemplo 5.	60
Figura 13 – Solução numérica e solução exata do Exemplo 7, (a) x_1 e (b) x_2	62
Figura 14 – Esquema da resolução do problema inverso de EDIs pela abordagem funcional.	70
Figura 15 – Superfícies de erro relacionadas ao Problema-teste 1a. em função de: (a) c_1 , (b) τ_1 , (c) c_1 e c_2 , em escala logarítmica, (d) τ_1 e τ_2 , em escala logarítmica, e (e) τ_2 e c_2 , em escala logarítmica.	79
Figura 16 – Superfícies de erro relacionadas ao Problema-teste 1b. em função de: (a) c_1 , (b) τ_1 , (c) c_1 e c_2 , em escala logarítmica, (d) τ_1 e τ_2 , em escala logarítmica e (e) τ_2 e c_2 , em escala logarítmica.	81
Figura 17 – Superfícies de erro relacionadas ao Problema-teste 2. em função de: (a) τ_1 e c_{22} , em escala logarítmica, (b) c_{11} e c_{21} , em escala logarítmica, e (c) c_{21} e c_{22} , em escala logarítmica.	83
Figura 18 – Superfície de erro do Problema-teste 1a. com 10 medidas redundantes.	86
Figura 19 – Superfície da função objetivo com penalização para o Problema-teste 1a, em escala logarítmica.	87

Lista de tabelas

Tabela 1	– Relação entre o número n de avaliações da função f por passo e a ordem dos métodos de Runge-Kutta.	56
Tabela 2	– Soluções numérica e analítica do Exemplo 5.	60
Tabela 3	– Soluções numérica e analítica do Exemplo 6.	61
Tabela 4	– Soluções numérica e analítica do Exemplo 7.	62
Tabela 5	– Resultados do Problema-teste 2. Teste 1, incógnitas τ_1 e c_{22}	85
Tabela 6	– Resultados do Problema-teste 2. Teste 2, incógnitas c_{11} e c_{21}	85
Tabela 7	– Resultados do Problema-teste 2. Teste 3, incógnitas c_{11} e c_{12}	85
Tabela 8	– Resultados do Problema-teste 2. Teste 4, com 5 incógnitas.	85
Tabela 9	– Medidas redundantes para o Problema 1a.	86

Sumário

	Introdução	23
1	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	27
1.1	Sistemas de equações diferenciais ordinárias	27
1.1.1	Existência, Unicidade e Continuação de soluções	30
1.2	Sistemas de equações diferenciais impulsivas	33
1.2.1	Sistemas com impulsos em tempos pré-fixados	37
1.3	Exemplos	39
2	SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	49
2.1	Métodos de passo simples	49
2.2	Método de Runge-Kutta de quarta ordem	53
2.2.1	Runge-Kutta de quarta ordem para sistemas de EDOs	56
2.3	Métodos de Runge-Kutta de quarta ordem para EDIs	57
3	PROBLEMAS INVERSOS	63
3.1	Problemas diretos X Problemas inversos	63
3.2	Identificação de parâmetros em EDIs	67
3.2.1	Abordagem funcional	68
3.2.2	<i>Simulated Annealing</i>	69
4	RESULTADOS	75
4.1	Superfícies de erro e busca exaustiva	76
4.2	Aplicando o método <i>Simulated Annealing</i>	83
5	CONCLUSÕES	89
	Referências	91

Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) modelam fenômenos de diversas áreas como Física, Biologia, Economia, Engenharias, Medicina, entre outras, considerando apenas processos contínuos. Entretanto, existem fenômenos em todas as áreas de aplicações que são descontínuos, caracterizados por mudança abrupta de estado em momentos que podem ser pré-fixados ou em tempos variáveis. Tais mudanças são de curta duração ou instantâneas em comparação à duração total do processo, ou seja, são consideradas como impulsos no processo. As ferramentas teóricas responsáveis por modelar fenômenos com impulsos são as Equações Diferenciais Impulsivas (EDIs).

Um exemplo clássico de aplicação de EDI é o modelo de Kruger-Thiemer (KRÜGER-THIEMER, 1966) que mede a variação temporal de concentração de uma determinada droga no corpo humano. A droga, que é administrada por via oral, tem sua concentração medida no ambiente gastrointestinal e no volume aparente (um ambiente amorfo constituído de sangue, músculos, tecidos etc.). Para se obter o efeito terapêutico esperado, é preciso que a concentração de droga no volume aparente de distribuição nunca fique abaixo de um nível mínimo durante o tempo de tratamento. Assim, em intervalos de tempo pré-fixados, a droga é ingerida e ocorre uma rápida elevação (impulso) em sua concentração no organismo.

Outro exemplo, estudado em Silva (2011), trata de um modelo impulsivo do tipo presa-predador aplicado à conservação biológica de duas espécies de peixes que compõem um sistema. A espécie de peixes considerada como presa é o único recurso de alimento da espécie predadora. Já a espécie predadora é capturada para consumo humano. O aumento da população da espécie predadora acima de um determinado patamar desequilibra o sistema, exterminando a espécie presa e, conseqüentemente, a predadora. O estudo busca estabelecer uma estratégia de cota estável para a pesca, de forma a preservar ambas as espécies de peixe. Neste caso, os impulsos (pesca) ocorrem em tempos variados, dependendo do crescimento da espécie predadora.

As EDIs modelam ainda problemas na Economia, com os modelos de controle ótimo (PLOTNIKOV; KITANOV, 2002); na medicina, com modelos de tratamentos quimioterapêuticos (LAKMECHE; ARINO, 2001); na física, com modelos de redes neurais (LI; BOHNER, 2010), entre outros.

A teoria de EDIs foi tratada extensivamente por Lakshmikantham et al. (1989) e Samoilenko e Perestyuk (1995), no que diz respeito à descrição da evolução da solução de EDIs e também resultados sobre existência, unicidade e continuação de soluções. A literatura apresenta diversos estudos de casos específicos nos quais o objetivo é analisar o comportamento das soluções das EDIs com efeito de impulso em tempos fixos e em tempos variáveis. Podemos citar, Baier e Donchev (2010), Corwin, Thompson e White (2008), Chen, Qi e Jin (2003), Frigon e O'Regan (1996), Hamzah et al. (2010), Li, Bohner e Wang (2015), Singh, Srivastava e Singh (2016), Srivastava e Sharma (2015).

De forma resumida, um sistema de equações diferenciais impulsivo é descrito por

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & t \neq \tau_k(\mathbf{x}), \\ \Delta \mathbf{x} = \mathbf{I}_k(\mathbf{x}), & t = \tau_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots \\ \mathbf{x}(t_0^+) = \boldsymbol{\eta} \end{cases}$$

onde $t = \tau_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots$ são os momentos de impulso e $\mathbf{I}_k(\mathbf{x})$ são operadores que determinam os saltos que a solução dará nos momentos de impulso. As funções e os parâmetros deste problema serão definidos no Capítulo 1.

O problema direto da EDI consiste em, dada a EDO $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$, a condição inicial $\boldsymbol{\eta}$, os momentos de impulso e os saltos, determinar a solução deste problema, ou seja, a função $\mathbf{x}(t)$. No entanto, existem situações em que o interesse está em obter algum parâmetro do problema, por exemplo, num sistema de EDIs, obter os saltos, $\mathbf{I}_k(\mathbf{x})$, e/ou os momentos de impulso $t = \tau_k(\mathbf{x})$, a partir do conhecimento da EDO e dos valores da solução nos extremos do intervalo de tempo considerado. Estes são chamados de problemas inversos.

Uma área de imediata aplicação é a de controle impulsivo. Um exemplo é o estudo de dosagem de medicamento, apresentado por Bellman (1971), que introduziu a ideia de controlar o nível do medicamento no organismo por meio da determinação dos tempos (discretos) ótimos para administração do medicamento bem como das doses ótimas em cada um desses tempos.

Um exemplo de controle de sistemas ecológicos estudado em (HUI; ZHU, 2006) e no contexto de controle impulsivo em (MARÃO, 2011) considera um sistema presa-predador dependente do consumo (inimigo natural das pragas). Pesticidas são aplicados e representados matematicamente pelos operadores impulsivos. O objetivo é determinar os momentos ótimos para se aplicar o pesticida e também as quantidades ótimas de pesticidas em cada momento a fim de erradicar a praga com economia de recursos.

Outro exemplo, na avaliação de estratégia de propaganda de empresa (SUN; QIAO; WU, 2005), o objetivo é que através do controle impulsivo traçar uma estratégia de propaganda eficiente com economia dos gastos em propaganda.

Os problemas inversos, em geral, são não lineares e não podem ser resolvidos

diretamente por meio de resolução convencional e técnicas analíticas. Dessa forma, para resolver problemas inversos adotamos uma abordagem funcional que consiste em confrontar informações do problema real com dados do modelo matemático, criando um funcional de erro. Em seguida, aplica-se um método de otimização para encontrar o ponto de mínimo global do funcional de erro. Se formulado adequadamente, o ponto de mínimo global deve corresponder à solução do problema inverso.

No entanto, as superfícies geradas pelo funcional de erro quando variamos as incógnitas, são bastante irregulares e costumam apresentar múltiplos mínimos locais, regiões quase planas e canais bastante estreitos, situações estas que representam dificuldades para o método de otimização. Assim, é necessário um método de otimização capaz de superar essas dificuldades, como os métodos estocásticos, por exemplo, o *Simulated Annealing*.

Além de um método de otimização adequado, pode ser necessário uma técnica de regularização para suavizar o funcional de erro. A técnica de regularização mais conhecida é a Tikhonov (TIKHONOV, 1963) embora muitos pesquisadores contornam essa dificuldade incluindo no problema informações conhecidas a priori vinculadas à aplicação (ROLNIK; SELEGHIMJR, 2006), o que não constitui uma técnica de alcance geral. A estratégia de tomar diversas medidas redundantes com vistas diferentes de um mesmo problema também contribuem para a regularização do funcional de erro, além de reduzir o efeito de ruídos nos dados obtidos experimentalmente.

Assim, o objetivo principal desta dissertação é investigar os problemas inversos de identificação dos parâmetros saltos e momentos de impulso. Buscamos descrever uma técnica que permita tratar de problemas inversos associados às EDIs de forma bem geral, que não utilize informações específicas da aplicação além das medidas no tempo inicial e final do processo.

Para isso, desenvolvemos um programa computacional composto por uma função para solução numérica do problema direto usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, função esta que é chamada diversas vezes para cada resolução do problema direto com diferentes valores para as incógnitas; e pelo método de otimização *Simulated Annealing* que altera sistematicamente os valores das incógnitas.

O método de Runge-Kutta já foi utilizado para resolver EDIs. Por exemplo, Randelovic, Stefanovic e Dankovic (2000) apresentaram um algoritmo, Liu, Liang e Yang (2007) investigaram a estabilidade das soluções das EDIs que são obtidas usando o método de Runge-Kutta com passos de tamanho variável, e Ran, Liu e Zhu (2008) analisaram a estabilidade para os passos de tamanho constante.

Já o *Simulated Annealing* foi escolhido por ser bastante intuitivo, de implementação simples, possuir poucos parâmetros de ajuste e por ser bastante utilizado no contexto de problemas inversos, como em Kim, Boo e Lee (2005), Menin, Martinez e Rolnik (2016) e

Menin e Bauch (2018).

Optamos ainda pelo estudo apenas dos sistemas de equações diferenciais com impulsos em tempos pré-fixados para delimitar o objeto de estudo, nos concentrando em descrever e resolver os problemas inversos para esta classe de sistemas, o que já constitui um grande desafio.

Realizamos testes numéricos explorando as superfícies de erro com objetivo de verificar a existência do ponto de mínimo global e analisar as dificuldades que o método de otimização enfrentará ao ser aplicado; realizamos buscas exaustivas para comprovar que o mínimo global corresponde à solução do problema inverso; aplicamos o método de otimização *Simulated Annealing* explorando diversos casos de problemas inversos. Para finalizar, incluímos alguns testes sobre regularização bem específicos. Os programas foram implementados em Matlab.

A dissertação está organizada da seguinte forma: o Capítulo 1 traz um breve estudo teórico das EDOs e das EDIs e apresenta alguns exemplos que são tratados sob diversos aspectos neste texto; o Capítulo 2 trata da solução numérica de problemas de valor inicial com EDOs e EDIs, em especial, do Método de Runge-Kutta de quarta ordem; o Capítulo 3 apresenta a formulação dos problemas inversos associados às EDIs e as dificuldades envolvidas na resolução; o Capítulo 4 mostra os resultados alcançados com a análise das superfícies de erro, com a busca exaustiva e com o *Simulated Annealing*; e por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões.

Sistemas de equações diferenciais

Este capítulo consiste de um breve estudo das EDOs e das EDIs baseados nas referências (BRAUER; NOHEL, 1969; LAKSHMIKANTHAM et al., 1989; BURDEN; FAIRES, 2008). Iniciamos relembando alguns conceitos sobre existência, unicidade e continuação de soluções de sistemas de EDOs de primeira ordem. Em seguida, descrevemos a evolução de uma EDI, em especial aquelas que possuem impulsos em tempos pré-fixados, e prosseguimos com resultados sobre existência, unicidade e continuação de soluções de sistemas de EDIs de primeira ordem. Finalizamos o capítulo apresentando quatro exemplos estudados sob o ponto de vista tanto de EDOs quanto de EDIs e que são abordados ao longo dos próximos capítulos.

1.1 Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Os sistemas de equações diferenciais de primeira ordem geralmente são escritos como

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f_1, f_2, \dots, f_n$ são n funções definidas em uma região $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com valores em $\mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as n funções desconhecidas, definidas de $J \subset \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$.

Quando impostas condições iniciais em um ponto $t_0 \in J$

$$x_1(t_0) = \eta_1, \quad x_2(t_0) = \eta_2, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = \eta_n, \quad (1.2)$$

onde $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ são números dados, o sistema (1.1) e as condições iniciais (1.2) formam um problema de valor inicial (PVI).

A solução do PVI (1.1)-(1.2) em um intervalo J é constituída por n funções $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, $\dots$, $x_n = \phi_n(t)$ contínuas tais que:

- (i) $\phi_1(t_0) = \eta_1$, $\phi_2(t_0) = \eta_2$, $\dots$, $\phi_n(t_0) = \eta_n$;
- (ii) $(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)) \in D$ para cada $t \in J$;
- (iii) $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\dots$, $\phi_n(t)$ são diferenciáveis em J ;
- (iv) $\phi'_j(t) = f_j(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$ para cada $t \in J$, $j = 1, 2, \dots, n$.

O processo de evolução é descrito graficamente por uma curva na região D , na qual cada ponto é dado pelas coordenadas $(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$, sendo que o ponto $(t_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ pertence à curva e $\phi'_j(t)$ é a componente do vetor tangente à solução no ponto t .

Apesar do estudo enfatizar as equações de primeira ordem, é comum problemas reais envolverem equações de ordem mais alta. Neste caso, é possível realizar uma mudança de variável e reduzir a equação de ordem superior a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Por exemplo, para a EDO de ordem n

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}), \quad (1.3)$$

sujeita às condições iniciais

$$x(t_0) = \eta_1, \quad x'(t_0) = \eta_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n, \quad (1.4)$$

fazendo a seguinte mudança de variável

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad y_3 = x'', \quad \dots, \quad y_n = x^{(n-1)},$$

o PVI (1.3)-(1.4) se reduz a

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (1.5)$$

com condições iniciais

$$y_1(t_0) = \eta_1, \quad y_2(t_0) = \eta_2, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = \eta_n$$

que é um caso particular de (1.1)-(1.2) com $f_1(t, y_1, \dots, y_n) = y_2$, $f_2(t, y_1, \dots, y_n) = y_3, \dots$, $f_{n-1}(t, y_1, \dots, y_n) = y_n$ e $f_n(t, y_1, \dots, y_n) = f(t, y_1, \dots, y_n)$.

O PVI (1.1)-(1.2) pode ser representado na forma vetorial

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $f_j(t, \mathbf{x}) = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$ e $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x}))$.

Reescrevendo na forma vetorial, uma solução do PVI (1.6) é uma função contínua ϕ de J em $\mathbb{R}^n$ tal que

- (i) $\phi(t_0) = \boldsymbol{\eta}$;
- (ii) $(t, \phi(t)) \in D$ para cada $t \in J$;
- (iii) $\phi(t)$ é diferenciável em J ;
- (iv) $\phi'(t) = \mathbf{f}(t, \phi(t))$ para cada $t \in J$.

O lema a seguir nos diz que supondo $\mathbf{f}$ contínua em D e que $(t_0, \boldsymbol{\eta})$ é um ponto arbitrário de D , o PVI (1.6) é equivalente ao problema de encontrar uma função contínua $\mathbf{x}(t)$, definida no intervalo J contendo t_0 , tal que $\mathbf{x}(t)$ satisfaz a equação integral

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds, \quad t \in J. \quad (1.7)$$

Esse resultado é estendido para EDIs na Seção 1.2.

Lema 1 *Se $\mathbf{x}(t)$ é uma solução do PVI (1.6) em um intervalo J então $\mathbf{x}(t)$ satisfaz (1.7) em J . Por outro lado, se $\mathbf{x}(t)$ é uma função contínua que é solução de (1.7) em algum intervalo J contendo t_0 então $\mathbf{x}(t)$ satisfaz (1.6).*

Demonstração: Considerando que $\mathbf{x} = \phi(t)$ é solução do PVI (1.6) em J ,

$$\phi'(t) = \mathbf{f}(t, \phi(t)).$$

Integrando ambos os membros de t_0 a qualquer t em J , obtemos

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \phi(s))ds.$$

Impondo a condição inicial $\phi(t_0) = \boldsymbol{\eta}$, obtemos (1.7).

Por outro lado, se $\mathbf{x}$ é uma função contínua então, pela continuidade da $\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))$ na integral (1.7), segue que $\mathbf{x}(t)$ é diferenciável e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\mathbf{x}(t)$ satisfaz

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad t \in J.$$

Substituindo $t = t_0$ em (1.7), temos $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t_0} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds = \boldsymbol{\eta}$. Isso completa a demonstração. ■

1.1 Existência, Unicidade e Continuação de soluções

Considere o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (1.6) e suponha que $\mathbf{f}$ seja contínua com respeito a t e com respeito às componentes de $\mathbf{x}$ em todos os pontos de D e que satisfaça uma condição de Lipschitz da forma

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq L |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (1.8)$$

para quaisquer pontos $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y})$ em D , sendo $L > 0$ a constante de Lipschitz.

Suponha ainda que, dado um ponto arbitrário $(t_0, \boldsymbol{\eta})$ em D , a “caixa”, em $n + 1$ dimensões,

$$\mathbf{B} = \{(t, \mathbf{x}) | |t - t_0| \leq a, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}| \leq b\}, \quad (1.9)$$

para $a > 0$ e $b > 0$ suficientemente pequenos, encontra-se inteiramente em D . Segue o teorema que garante a existência e a unicidade da solução de (1.6).

Teorema 1 *Seja $\mathbf{f}$ uma função contínua na caixa $\mathbf{B} = \{(t, \mathbf{x}) | |t - t_0| \leq a, |\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}| \leq b\} \subset D$, onde a e b são números positivos, e que satisfaz a condição de Lipschitz (1.8). Seja $M_f = \max_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{B}} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|$, α o menor dos números positivos, a e $\frac{b}{M_f}$, e as aproximações sucessivas*

$$\begin{cases} \phi_0(t) = \boldsymbol{\eta}, \\ \phi_{n+1}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \phi_n(s)) ds. \end{cases} \quad (1.10)$$

Então a sequência $\{\phi_j\}$ de aproximações sucessivas converge (uniformemente) no intervalo $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para uma solução $\phi(t)$ do PVI (1.6). Além disso, existe no máximo uma solução de (1.6) em J .

Demonstração: Como $\mathbf{f}$ é contínua e Lipschitz em $\mathbf{B}$, ela satisfaz as desigualdades

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq M_f \quad (1.11)$$

e

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq L |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (1.12)$$

para quaisquer pontos $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y})$ em $\mathbf{B}$.

Além disso, as aproximações sucessivas estão bem definidas, isto é, ϕ_j contínuas dadas por (1.10) são definidas para todos os pontos do intervalo $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e

$$|\phi_j(t) - \boldsymbol{\eta}| \leq M_f |t - t_0| \leq b, \quad t \in J, \quad j = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

A prova desta afirmação é feita por indução. Sabemos que $\phi_0(t)$ está definida em J e satisfaz (1.13) com $j = 0$ em J . Suponha que para qualquer $j = n \geq 1$, ϕ_n está definida e satisfaz (1.13) em J . Então por (1.10), ϕ_{n+1} está definida em J . Precisamos ainda mostrar que para $t \in J$, o gráfico de $\phi_{n+1}(t)$ pertence a $\mathbf{B}$, ou analiticamente que ϕ_{n+1} satisfaz (1.13)

com $j = n + 1$. A partir de (1.10), a hipótese de indução: $|\phi_n(t) - \eta| \leq M_f |t - t_0| \quad \forall t \in J$, e $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq M_f$, fornecem

$$|\phi_{n+1}(t) - \eta| = \left| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \phi_n(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{f}(s, \phi_n(s))| ds \right| \leq M_f |t - t_0| \leq M_f \alpha \leq b. \quad (1.14)$$

Agora, mostramos que a sequência $\{\phi_j\}$ é convergente. Note que podemos escrever $\phi_j(t)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= \phi_0(t) + [\phi_1(t) - \phi_0(t)] + \cdots + [\phi_j(t) - \phi_{j-1}(t)] \\ &= \phi_0(t) + \sum_{m=0}^{j-1} [\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Portanto, a sequência converge se, e somente se, a série $\sum_{m=0}^{\infty} [\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)]$ convergir.

Para mostrarmos que a série converge, desenvolvemos os termos da série e utilizamos as desigualdades (1.11) e (1.12), obtendo

$$|\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{M_f (L\alpha)^{m+1}}{L(m+1)!}. \quad (1.16)$$

Usando o teste de M. Weierstrass, como a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^{j+1}}{(j+1)!}$ é convergente, segue que a série $\sum_{m=0}^{\infty} [\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)]$ converge uniformemente, e então, a sequência é uniformemente convergente no intervalo J .

A convergência uniforme da sequência $\{\phi_j\}$ nos garante que a função limite ϕ é contínua no intervalo J . Por hipótese, a função $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{B}$, assim,

$$\phi(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\eta + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \phi_j(s)) ds \right] = \eta + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(s)) ds = \eta + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \phi(s)) ds,$$

e então, ϕ satisfaz a equação integral e consequentemente é solução do PVI.

Para mostrar que existe uma única solução, vamos supor que φ e ϕ sejam duas soluções do PVI (1.6). Como toda solução do PVI (1.6) também satisfaz a equação integral, temos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \eta + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \varphi(s)) ds \\ \phi(t) &= \eta + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \phi(s)) ds \end{aligned}$$

para todo t em J . Subtraindo as duas equações, obtemos

$$\varphi(t) - \phi(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \varphi(s)) - \mathbf{f}(s, \phi(s))] ds \quad (1.17)$$

e tomando a norma e a hipótese que $\mathbf{f}$ é Lipschitz temos

$$|\varphi(t) - \phi(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{f}(s, \varphi(s)) - \mathbf{f}(s, \phi(s))| ds \right| \quad (1.18)$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^t |\varphi(s) - \phi(s)| ds \right|. \quad (1.19)$$

Pela desigualdade de Gronwall¹ considerando $c = 0$, $\alpha = t_0$, $f(t) = |\varphi(s) - \phi(s)|$ e $g(t) = L$, concluímos que $|\varphi(t) - \phi(t)| \leq 0$. Como $|\varphi(t) - \phi(t)|$ é não negativo, temos $|\varphi(t) - \phi(t)| = 0$ para todo t em J , ou seja, $\varphi(t) = \phi(t)$ para t em J . Assim, não há outra solução do PVI (1.6) em J . A demonstração está completa. ■

Sobre a continuação à direita (a continuação à esquerda é análoga) da solução, considere o PVI (1.6) satisfazendo as hipóteses do Teorema 1, isto é, com garantia de solução única em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Agora, considere o novo problema de valor inicial com a mesma EDO

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1.20)$$

mas com a nova condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0 + \alpha) = \phi(t_0 + \alpha). \quad (1.21)$$

Como o ponto $(t_0 + \alpha, \phi(t_0 + \alpha))$ está em D , existem números positivos a_1 e b_1 de tal forma que a “caixa”

$$B_1 = \{(t, \mathbf{x}) \mid |t - (t_0 + \alpha)| \leq a_1, |\mathbf{x} - \phi(t_0 + \alpha)| \leq b_1\} \quad (1.22)$$

centrada em $(t_0 + \alpha, \phi(t_0 + \alpha))$ está contida em D . O Teorema 1 nos permite concluir que existe um número $\alpha_1 > 0$ e uma única solução ψ de (1.20)-(1.21) no intervalo $J_1 = [(t_0 + \alpha) - \alpha_1, (t_0 + \alpha) + \alpha_1]$. Além disso, pela unicidade temos

$$\psi(t) = \phi(t), \quad t_0 + \alpha - \alpha_1 \leq t \leq t_0 + \alpha. \quad (1.23)$$

Note que é possível definir uma função $\hat{\phi}$ da seguinte maneira

$$\hat{\phi}(t) = \phi(t), \quad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha, \quad (1.24)$$

$$\hat{\phi}(t) = \psi(t), \quad t_0 + \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha + \alpha_1. \quad (1.25)$$

A função $\hat{\phi}(t)$ é solução de (1.6) em um intervalo maior do que $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e é chamada de continuação à direita da solução $\phi(t)$ para o intervalo $[t_0 + \alpha, t_0 + \alpha + \alpha_1]$. O processo de continuação de solução descrito acima pode ser repetido, assumindo que o gráfico da solução permaneça na região onde $\mathbf{f}$ é contínua e Lipschitz e as caixas estiverem contidas em D . O Teorema 2 mostra as condições para que haja continuação da solução e até que intervalo ela pode ser estendida. Antes disso, o Lema 2 mostra que se a única solução de (1.6) está definida em um intervalo aberto, também está definida no mesmo intervalo fechado, desde que a função $\mathbf{f}$ seja limitada neste intervalo. A demonstração pode ser encontrada em (BRAUER; NOHEL, 1969).

¹ Seja c uma constante não negativa e sejam f e g funções contínuas não negativas em algum intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ satisfazendo a inequação $f(t) \leq c + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds$. Então $f(t) \leq c \cdot \exp\left(\int_{\alpha}^t g(s)ds\right)$.

Lema 2 Suponha $\mathbf{f}$ contínua e Lipschitz em uma dada região D e suponha que $\mathbf{f}$ seja limitada em D . Seja ϕ a única solução do PVI (1.6) existente em um intervalo finito e aberto $\gamma < t < \delta$. Então existem os limites

$$\lim_{t \rightarrow \delta^-} \phi(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \gamma^+} \phi(t).$$

Teorema 2 Suponha que $\mathbf{f}$ é contínua e Lipschitz em uma dada região D e suponha que $\mathbf{f}$ seja limitada em D . Seja $(t_0, \boldsymbol{\eta})$ um dado ponto de D . Então a única solução do PVI (1.6) pode ser estendida até que seu gráfico atinja a fronteira de D .

Demonstração: Suponha que a solução ϕ não possa ser estendida até o limite de D , mas pode ser estendida para a direita apenas para um intervalo $t_0 \leq t < \hat{t}$. Pelo Lema 2, $\phi(\hat{t}) = \lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} \phi(t)$ existe. Se $(\hat{t}, \phi(\hat{t}))$ for um ponto da fronteira de D , então o prolongamento está finalizado. Senão, existe uma caixa centrada em $(\hat{t}, \phi(\hat{t}))$ que está em D . Dessa forma, podemos estender a solução ϕ à direita de $\hat{t}$ pelo método anterior, resultando em uma contradição. Obtemos a prova de que ϕ também pode ser estendida para a esquerda, de modo análogo. Isso mostra que ϕ pode ser estendida até a fronteira de D e a prova está completa. ■

O intervalo máximo para o qual a solução pode ser estendida é chamado intervalo maximal de existência. Se $\hat{t} < \infty$, como $\mathbf{f}$ é assumida ser limitada em D , devemos ter que $\lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} |\phi(t)| < \infty$. Porém, é possível que $\hat{t} = +\infty$ e, neste caso, pode acontecer $\lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} |\phi(t)| = \infty$. Em muitos problemas, a hipótese de que $\mathbf{f}$ é limitada em D não é satisfeita. Dessa observação, segue o corolário.

Corolário 1 Se $D = \mathbb{R}^{n+1}$ for o espaço inteiro $(t, \mathbf{x})$ e se $\mathbf{f}$ for contínua e Lipschitz em D então a solução ϕ do PVI (1.6) pode ser unicamente estendida em ambas as direções enquanto $|\phi(t)|$ permanecer finita.

1.2 Sistemas de equações diferenciais impulsivas

Um sistema de equações diferenciais impulsivo é descrito, segundo Lakshmikantham et al. (1989), por

(i) uma equação diferencial

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1.26}$$

onde $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D = J \times \Omega$, J é um intervalo da reta e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto;

- (ii) conjuntos $M(t), N(t) \subset \Omega, t \in J$;
- (iii) uma família de operadores $A(t) : M(t) \rightarrow N(t), t \in J$.

O processo de evolução se comporta da seguinte forma: o ponto $P_t = (t, \mathbf{x}(t))$ começa o movimento em $P_{t_0} = (t_0, \boldsymbol{\eta}_0)$ e move-se ao longo da curva $\{(t, \mathbf{x}); t \geq t_0, \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)\}$ definida pela solução do sistema (1.26), $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \boldsymbol{\eta}_0)$, até um instante $\tau_1 > t_0$ quando o ponto P_t encontra o conjunto $(t, M(t))$, conforme ilustrado na Figura 1, para um caso unidimensional ($n = 1$).

Figura 1 – Evolução da solução de um sistema impulsivo até o instante $\tau_1 > t_0$.

Em $t = \tau_1$, o operador $A(t)$ transfere o ponto $P_{\tau_1} = (\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1))$ para $P_{\tau_1^+} = (\tau_1, \mathbf{x}_1^+)$, onde $\mathbf{x}_1^+ = A(\tau_1)\mathbf{x}_1 \in N(\tau_1)$, como mostra a Figura 2. Então o ponto P_t continua a se mover ao longo da curva com $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \tau_1, \mathbf{x}_1^+)$ como solução de (1.26), começando do ponto $P_{\tau_1} = (\tau_1, \mathbf{x}_1^+)$ até encontrar $(t, M(t))$ no próximo instante $\tau_2 > \tau_1$, como ilustrado na Figura 3. Em $t = \tau_2$, o ponto $P_{\tau_2} = (\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2))$ é transferido ao ponto $P_{\tau_2^+} = (\tau_2, \mathbf{x}_2^+)$, onde $\mathbf{x}_2^+ = A(\tau_2)\mathbf{x}(\tau_2) \in N(\tau_2)$. Como anteriormente, o ponto P_t continua a se mover com $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \tau_2, \mathbf{x}_2^+)$ como solução de (1.26) começando em $(\tau_2, \mathbf{x}_2^+)$. E assim sucessivamente, enquanto a solução de (1.26) existir.

A curva descrita por P_t é chamada *curva integral* e a função $\mathbf{x}(t)$ que define essa curva é a solução do sistema diferencial impulsivo. Os instantes $t = \tau_k$ nos quais essa curva integral atinge o conjunto $(t, M(t))$ são chamados momentos de impulso. A variação $\Delta \mathbf{x}(\tau_k) = \mathbf{x}(\tau_k^+) - \mathbf{x}(\tau_k^-)$ é chamada de salto.

A priori, um sistema impulsivo pode ter três tipos de soluções:

Figura 2 – Evolução da solução de um sistema impulsivo até o instante $\tau_1 > t_0$ e salto em $t = \tau_1$ de $(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1))$ para $(\tau_1, \mathbf{x}_1^+)$.

Figura 3 – Evolução da solução de um sistema impulsivo até o instante $\tau_2 > \tau_1$.

1. uma função contínua, se a curva integral do sistema não encontrar o conjunto $(t, M(t))$ ou o encontrar em pontos fixos² do operador $A(t)$;
2. uma função contínua por partes com um número finito de descontinuidades de primeira espécie³, se a curva integral encontrar $(t, M(t))$ em um número finito de

² x é um ponto fixo do operador $A(t)$ se $A(t)x = A(t)x$.

³ Um ponto $x = a$ é uma descontinuidade de primeira espécie de uma função f , se f é descontínua no ponto a e se existem os limites laterais $f(a^+)$ e $f(a^-)$.

pontos que não são pontos fixos do operador $A(t)$;

3. uma função contínua por partes com uma quantidade enumerável de descontinuidades de primeira espécie, se a curva integral encontrar $(t, M(t))$ em uma quantidade enumerável de pontos que não são pontos fixos de $A(t)$.

Dependendo das características dos impulsos, existem classes essencialmente diferentes de sistemas. Segundo os autores Lakshmikantham et al. (1989) e Samoilenko e Perestyuk (1995), uma classificação distingue os sistemas com impulso em tempos pré-fixados ou variáveis. Nos sistemas que apresentam efeitos impulsivos em tempos pré-fixados, o conjunto $M(t)$ representa uma sequência de planos $t = \tau_k$, onde $\{\tau_k\} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. A sequência de operadores será $A(k) : \Omega \rightarrow \Omega$, definida por

$$\mathbf{x} \mapsto A(k)\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{I}_k(\mathbf{x}),$$

onde $\mathbf{I}_k : \Omega \rightarrow \Omega$. O conjunto $N(t)$ também definido para $t = \tau_k$ é denotado por $N(k) = A(k)M(k)$. O modelo matemático de um sistema diferencial impulsivo com os impulsos em tempos pré-fixados é descrito como

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & t \neq \tau_k, \\ \Delta \mathbf{x} = \mathbf{I}_k(\mathbf{x}), & t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \mathbf{x}(t_0^+) = \boldsymbol{\eta}, \end{cases} \quad (1.27)$$

onde $\Delta \mathbf{x}(\tau_k) = \mathbf{x}(\tau_k^+) - \mathbf{x}(\tau_k^-)$, sendo $\mathbf{x}(\tau_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \mathbf{x}(\tau_k + h)$ e $\mathbf{x}(\tau_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbf{x}(\tau_k + h)$ os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente, e $\mathbf{x}(\tau_k) = \mathbf{x}(\tau_k^-)$.

Quando os impulsos ocorrem em tempos variáveis, consideramos uma sequência $\{S_k\}$ de superfícies dadas por $S_k : t = \tau_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots$ tais que $\tau_k(\mathbf{x}) < \tau_{k+1}(\mathbf{x})$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(\mathbf{x}) = \infty$. Então temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & t \neq \tau_k(\mathbf{x}), \\ \Delta \mathbf{x} = \mathbf{I}_k(\mathbf{x}), & t = \tau_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots \\ \mathbf{x}(t_0^+) = \boldsymbol{\eta}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Observe que ao invés da condição inicial usual para EDO $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$, para EDI geralmente escrevemos $\mathbf{x}(t_0^+) = \boldsymbol{\eta}$ pois pode ocorrer do ponto $(t_0, \boldsymbol{\eta})$ ser tal que $t_0 = \tau_k(\boldsymbol{\eta})$ para algum k . Quando $t_0 \neq \tau_k(\boldsymbol{\eta})$ para todo k , a condição inicial $\mathbf{x}(t_0^+) = \boldsymbol{\eta}$ se torna a solução usual $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$.

Sistemas com efeitos impulsivos em momentos variáveis são mais complicados comparados com os sistemas com momentos pré-fixados. Por exemplo, os momentos de impulso do sistema (1.28) dependem da solução, isto é, $\tau_k = \tau_k(\mathbf{x})$, para cada k . Portanto, soluções começando em pontos diferentes terão diferentes pontos de descontinuidade. Além disso, uma solução pode encontrar a mesma superfície $t = \tau_k(\mathbf{x})$ diversas vezes, comportamento

denominado “fenômeno de pulso”. Mais ainda, soluções diferentes podem coincidir após algum tempo e se comportarem como uma única solução a partir daí, comportamento denominado “confluência”. Para maiores detalhes consulte Lakshmikantham et al. (1989).

Na seção seguinte exploramos os sistemas diferenciais com impulsos em tempos pré-fixados, pois estes constituem nosso objeto de estudo, para os quais iremos descrever e resolver os problemas inversos.

1.2 Sistemas com impulsos em tempos pré-fixados

Vamos considerar o sistema (1.27) com $J = [t_0, a]$ sendo que neste intervalo há K momentos de impulsos τ_k , $k = 1, \dots, K$ sendo $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K < a$. Neste caso, como $t_0 \neq \tau_k$, para todo $k = 1, \dots, K$, podemos considerar a condição inicial usual $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$. Assim, reescrevemos (1.27) como

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & t \in [t_0, a], t \neq \tau_k, k = 1, 2, \dots, K \\ \Delta \mathbf{x}(\tau_k) = \mathbf{I}_k(\mathbf{x}(\tau_k)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Uma solução do sistema impulsivo (1.29) em $J = [t_0, a]$ é uma função $\boldsymbol{\phi} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz:

- (i) $\boldsymbol{\phi}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$;
- (ii) $(t, \boldsymbol{\phi}(t)) \in D$ para cada $t \in J$;
- (iii) $\boldsymbol{\phi}'(t)$ existe e satisfaz $\boldsymbol{\phi}'(t) = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\phi}(t))$ para cada $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, \dots, K - 1$;
- (iv) $\boldsymbol{\phi}(\tau_k^+) = \boldsymbol{\phi}(\tau_k) + \mathbf{I}_k(\boldsymbol{\phi}(\tau_k))$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Como consideramos um intervalo limitado $[t_0, a]$ com uma quantidade finita de momentos de impulsos, K , podemos dividir o sistema impulsivo em $K + 1$ PVI's clássicos da seguinte forma:

- para $t \in [t_0, \tau_1]$, temos

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0(t)), t \in [t_0, \tau_1], \\ \mathbf{x}_0(t_0) = \boldsymbol{\eta}, \end{cases} \quad (1.30)$$

que, satisfazendo as condições dos Teoremas 1 e 2 em $[t_0, \tau_1]$, possui solução única neste intervalo;

- em $t = \tau_1$ ocorre o primeiro salto $\mathbf{x}_0(\tau_1^+) = \mathbf{x}_0(\tau_1) + \mathbf{I}_1(\mathbf{x}_0(\tau_1))$, desde que o operador $\mathbf{I}_1$ esteja definido em $\mathbf{x}_0(\tau_1)$;

- para $t \in (\tau_1, \tau_2]$, temos

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1(t)), t \in (\tau_1, \tau_2], \\ \mathbf{x}_1(\tau_1) = \mathbf{x}_0(\tau_1^+), \end{cases} \quad (1.31)$$

que, satisfazendo as condições dos Teoremas 1 e 2 em $(\tau_1, \tau_2]$, possui solução única neste intervalo;

- em $t = \tau_2$ ocorre o segundo salto $\mathbf{x}_1(\tau_2^+) = \mathbf{x}_1(\tau_2) + \mathbf{I}_2(\mathbf{x}_1(\tau_2))$, desde que o operador $\mathbf{I}_2$ esteja definido em $\mathbf{x}_1(\tau_2)$;
- e assim, por diante, até o intervalo $(\tau_K, a]$, onde temos

$$\begin{cases} \mathbf{x}_K'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_K(t)), t \in (\tau_K, a], \\ \mathbf{x}_K(\tau_K) = \mathbf{x}_{K-1}(\tau_K^+), \end{cases} \quad (1.32)$$

que, satisfazendo as condições dos Teoremas 1 e 2 em $(\tau_K, a]$, possui solução única neste intervalo.

Unindo as soluções dos $K + 1$ PVIs (1.30)-(1.32), obtemos a solução do sistema impulsivo (1.29) em todo o intervalo $[t_0, a]$ dado por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_0(t), & t_0 \leq t \leq \tau_1, \\ \mathbf{x}_1(t), & \tau_1 < t \leq \tau_2, \\ \vdots \\ \mathbf{x}_K(t), & \tau_K < t \leq a. \end{cases} \quad (1.33)$$

Seguindo o mesmo raciocínio de construir a solução nos intervalos entre os momentos de impulso, podemos construir a equação integral, análoga a (1.7), equivalente ao problema (1.29), observando que $\mathbf{x}(t)$ contínua em $(t_0, \tau_1]$ é solução de (1.30) neste intervalo se, e somente se, é solução de

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds.$$

Para o intervalo $(\tau_1, \tau_2]$, $\mathbf{x}(t)$ é solução de (1.31) neste intervalo se, e somente se, é solução de

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(\tau_1^+) + \int_{\tau_1}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds \\ &= \mathbf{x}(\tau_1) + \mathbf{I}_1(\mathbf{x}(\tau_1)) + \int_{\tau_1}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds \\ &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds + \int_{\tau_1}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds + \mathbf{I}_1(\mathbf{x}(\tau_1)) \\ &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))ds + \mathbf{I}_1(\mathbf{x}(\tau_1)). \end{aligned}$$

Da mesma forma, para o intervalo $(\tau_2, \tau_3]$, $\mathbf{x}(t)$ é solução do PVI correspondente neste intervalo se, e somente se, é solução de

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(\tau_2^+) + \int_{\tau_2}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds \\ &= \mathbf{x}(\tau_2) + \mathbf{I}_2(\mathbf{x}(\tau_2)) + \int_{\tau_2}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds \\ &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds + \mathbf{I}_1(\mathbf{x}(\tau_1)) + \mathbf{I}_2(\mathbf{x}(\tau_2)) + \int_{\tau_2}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds \\ &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds + \mathbf{I}_1(\mathbf{x}(\tau_1)) + \mathbf{I}_2(\mathbf{x}(\tau_2)). \end{aligned}$$

E assim sucessivamente, supondo que a solução do sistema impulsivo (1.29) exista em todo o intervalo $[t_0, a]$, a equação integral equivalente é

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} \mathbf{I}_k(\mathbf{x}(\tau_k)), \quad t \in [t_0, a]. \quad (1.34)$$

O estudo de existência de solução para o sistema impulsivo (1.28) (observe que (1.28) engloba (1.29)) difere do estudo de existência de soluções de sistemas de EDOs pois a solução do problema impulsivo pode encontrar e permanecer sobre uma superfície S_k . Em particular, se $\boldsymbol{\eta} \in S_k$, o sistema impulsivo pode não ter solução. É preciso estabelecer condições sobre τ_k e $\mathbf{f}$ que garantam que a solução não permaneça sobre uma superfície de impulso. No entanto, assumindo que t_0 não é momento de impulso, é possível garantir a existência de solução pelo menos em um pequeno intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$, por exemplo, supondo a continuidade da $\mathbf{f}$.

A unicidade de solução de sistemas de EDIs (1.28) está garantida desde que a unicidade do sistema de EDOs clássico esteja (LAKSHMIKANTHAM et al., 1989). Já a continuação da solução à direita, além de precisarmos observar as condições do Teorema 2 ou o Corolário 1 em cada intervalo de (1.33), também precisamos verificar se o operador impulso $\mathbf{I}_k$ está bem definido para $\mathbf{x}(\tau_k)$.

Assim, concluímos que no caso estudado de sistemas com impulsos em tempos pré-fixados, (1.29), se a função $\mathbf{f} : [t_0, a] \times \Omega \rightarrow \Omega$ for contínua e Lipschitz em relação a $\mathbf{x}$ e se $\lim_{(t,y) \rightarrow (\tau_k^+, x)} |\mathbf{f}(t, y)|$ existe e é finito, então basta que cada operador impulsivo $\mathbf{I}_k : \Omega \rightarrow \Omega$ esteja definido para τ_k para que a solução exista e seja única em todo $[t_0, a]$.

1.3 Exemplos

Os exemplos apresentados nesta seção mostram a evolução de um processo impulsivo em comparação com a evolução de um processo de EDO clássico.

Exemplo 1 Seja o PVI, baseado em (BURDEN; FAIRES, 2008)

$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \geq 0 \\ x(0) = 0.5. \end{cases} \quad (1.35)$$

Observe que $f(t, x) = x - t^2 + 1$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, Lipschitz com constante $L = 1$ e limitada em qualquer conjunto fechado e limitado contido em $\mathbb{R}^2$. Logo, a existência e unicidade da solução está garantida para todo $t \in \mathbb{R}$.

A solução geral da EDO $x' = x - t^2 + 1$ é

$$x(t) = (t + 1)^2 + ce^t, \quad \text{com } t \in \mathbb{R} \quad (1.36)$$

Impondo uma condição inicial (t_0, η) , a solução particular do PVI é

$$x(t) = (t + 1)^2 + e^{t-t_0}[\eta - (t_0 + 1)^2]. \quad (1.37)$$

Para o problema (1.35), a condição inicial $(0, 0.5)$ fornece a solução

$$x(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t \quad (1.38)$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 – Solução do PVI do Exemplo 1, sem impulso.

Considere agora a equação diferencial de (1.35) no intervalo $[0, 3]$, com dois momentos de impulso, $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$, e que os saltos são de 1 unidade nos dois momentos. O problema fica

$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \in [0, 3], \quad t \neq 1, 2 \\ x(0) = 0.5 \\ I_1(x) = 1, \quad I_2(x) = 1. \end{cases} \quad (1.39)$$

No intervalo $[0, 1]$, a solução do sistema (1.39) coincide com a solução de (1.35), isto é, $x(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$. Em $t = 1$ ocorre o primeiro salto, $x(1^+) = x(1) + I_1(x(1)) = (1 + 1)^2 - 0.5e^1 + 1 = 5 - 0.5e^1 \approx 3.640859$.

No intervalo $(1, 2]$, a solução é (1.37) com a condição inicial $(1, 5 - 0.5e^1)$, de onde obtemos $x(t) = (t + 1)^2 + (e^{-1} - 0.5)e^t$. Em $t = 2$ ocorre o segundo salto, $x(2^+) = x(2) + I_2(x(2)) = (2 + 1)^2 + e^{2-1}(-0.5e^1 + 1) + 1 \approx 9.023754$.

No intervalo $(2, 3]$, a solução é (1.37) com a condição inicial $(2, 10 + e - 0.5e^2)$, de onde obtemos $x(t) = (t + 1)^2 + (-0.5 + e^{-1} + e^{-2})e^t$.

Assim, a solução do sistema (1.39) fica

$$x(t) = \begin{cases} (t + 1)^2 - 0.5e^t, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t + 1)^2 + (-0.5 + e^{-1})e^t, & 1 < t \leq 2 \\ (t + 1)^2 + (-0.5 + e^{-1} + e^{-2})e^t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (1.40)$$

e pode ser vista na Figura 5 que mostra, além da solução da EDI, em linha sólida, a solução das EDOs com as três diferentes condições iniciais impostas, para comparação com o efeito dos impulsos. Observe que $x(3) \approx 16.064569$.

Figura 5 – Solução do Exemplo 1 com saltos constantes $I_1(x) = 1$ e $I_2(x) = 1$, calculados em $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$.

As funções salto não precisam ser constantes, elas podem depender da solução x , por exemplo, $I_1(x) = x^2 + 1$ e $I_2(x) = \ln(x)$. Vamos resolver novamente o Exemplo 1, agora com esses saltos, ou seja,

$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \in [0, 3], \quad t \neq 1, 2 \\ x(0) = 0.5 \\ I_1(x) = x^2 + 1, \quad I_2(x) = \ln(x). \end{cases} \quad (1.41)$$

Para o intervalo $[0, 1]$, a solução do sistema (1.41) é (1.38). Em $t = 1$, $x(1^+) = x(1) + I_1(x(1)) = 4 - 0.5e^1 + (4 - 0.5e^1)^2 + 1 \approx 10.614996$. Para $t \in (1, 2]$, a solução é

(1.37) com a condição inicial $(1, 10.614996)$, de onde obtemos $x(t) \approx (t+1)^2 + 2.433521 e^t$. Em $t = 2$, $x(2^+) = x(2) + I_2(x(2)) \approx 26.981423$. E, finalmente, para $t \in (2, 3]$, a solução é (1.37) com a condição inicial $(2, 26.981423)$, de onde obtemos $x(t) \approx (t+1)^2 + 2.879471 e^t$.

Assim, a solução do sistema (1.39) fica

$$x(t) = \begin{cases} (t+1)^2 - 0.5 e^t, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t+1)^2 + 2.433521 e^t, & 1 < t \leq 2 \\ (t+1)^2 + 2.879471 e^t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (1.42)$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 6. Observe que $x(3) \approx 73.835718$.

Figura 6 – Solução do Exemplo 1 com saltos dependendo da solução $I_1(x) = x^2 + 1$ e $I_2(x) = \ln(x)$, calculados em $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$.

Exemplo 2 Considere o PVI, baseado em (LAKSHMIKANTHAM et al., 1989)

$$\begin{cases} x' = 0, & t \geq 0 \\ x(0) = c. \end{cases} \quad (1.43)$$

A função $f(t, x) = 0$ satisfaz as condições do Teorema 1 para todos os pontos do $\mathbb{R}^2$. Logo, possui solução única para todo $t \in \mathbb{R}$.

A solução $x(t) = c$ da equação diferencial ordinária $x' = 0$ com condição inicial $x(t_0) = \eta$ é

$$x(t) = \eta. \quad (1.44)$$

A solução (1.44) existe e é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$, para qualquer $\eta \in \mathbb{R}$ dado.

Considere a equação diferencial impulsiva com momentos de impulso $\tau_k = k$, $k = 1, 2, \dots$ e a função salto dada por $I_k(x) = \frac{1}{1-x}$.

$$\begin{cases} x' = 0, & 0 \leq t \neq k \quad k = 1, 2, \dots \\ \Delta x = \frac{1}{1-x}. \end{cases} \quad (1.45)$$

A solução do sistema (1.45) no intervalo $[0, 1]$ com condição inicial $x(0) = 1$ é $x(t) = 1$. Em $t = \tau_1(1)$ o operador impulso deve agir, porém, $I_1(x) = \frac{1}{1-x}$ não está definido para $x = x(1) = 1$ e, portanto, não há solução para $t > 1$.

Para a condição inicial $x(0) = 2$, a solução do sistema (1.45) está definida para $0 \leq t < 2$. Ela sofre um efeito impulsivo em $t = 1$, saltando de $x(1) = 2$ para $x(1^+) = 2 - 1 = 1$. Em $t = 2$, o operador I_2 não está definido e a solução não pode ser continuada.

Este é um exemplo em que a EDO tem solução para todo $t \in \mathbb{R}$ porém, o mesmo pode não ocorrer com a EDI, dependendo do ponto inicial tomado. As Figuras 7 e 8 mostram os gráficos das soluções para as condições iniciais $x(0) = 1$ e $x(0) = 2$, respectivamente, (a) sem ação impulsiva e (b) com ação impulsiva.

Figura 7 – Solução do Exemplo 2 com condição inicial $x(0) = 1$, (a) sem impulso, solução para $t \geq 0$ e (b) com impulso, solução apenas em $[0, 1]$.

Figura 8 – Solução do Exemplo 2 com condição inicial $x(0) = 2$, (a) sem impulso, solução para $t \geq 0$ e (b) com impulso, solução apenas em $[0, 2]$.

Exemplo 3 *Seja o PVI, baseado em Lakshmikantham et al. (1989)*

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2, & t \geq 0 \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

A função $f(t, x) = 1 + x^2$ é contínua e Lipschitz em uma região fechada do $\mathbb{R}^2$, porém, a solução se torna ilimitada em $t = \frac{\pi}{2}$ e, portanto, só está definida em $[0, \frac{\pi}{2})$.

A solução $x(t)$ da EDO $x' = 1 + x^2$ é

$$x(t) = tg(t + c). \quad (1.47)$$

Impondo a condição inicial $x(0) = 0$, obtemos $x(t) = tg(t)$, para $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. O gráfico da solução pode ser visto na Figura 9 (a).

Considere agora momentos de impulso $\tau_k = \frac{k\pi}{4}$ e operadores de salto $I_k(x) = -1$, $k = 1, 2, \dots$. O problema (1.43) fica

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x^2, & t \neq \frac{k\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ x(0) = 0, \\ \Delta x = -1, & t = \frac{k\pi}{4}. \end{cases} \quad (1.48)$$

A solução de (1.48) de 0 até o primeiro momento de impulso $t = \tau_1 = \frac{\pi}{4}$ coincide com a solução do PVI (1.46), isto é $x(t) = tg(t)$. Em $t = \frac{\pi}{4}$ ocorre o salto, determinado pelo operador $I_1(x)$. Com isso, $x(\frac{\pi}{4}^+) = x(\frac{\pi}{4}) - I_1(x(\frac{\pi}{4})) = 1 - 1 = 0$.

A nova condição inicial é $x(\frac{\pi}{4}) = 0$ e a solução para $t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}]$ é $x(t) = tg(t - \frac{\pi}{4})$. O operador impulso age em $\tau_2 = \frac{2\pi}{4}$, $I_2(x(\frac{2\pi}{4})) = -1$, levando novamente a solução para 0.

Assim sucessivamente, concluímos que a solução da EDI (1.48) é $x(t) = tg(t - \frac{k\pi}{4})$, $t \in (\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4}]$, que é periódica com período $\frac{\pi}{4}$, como mostra a Figura 9 (b).

Observe que a equação diferencial $x' = 1 + x^2$ é autônoma, ou seja, a função $f(t, x) = 1 + x^2$ não depende explicitamente de t e, conseqüentemente, a solução, voltando ao ponto $x = 0$ deve ter o mesmo comportamento que a solução anterior.

Este é um exemplo em que a EDO tem solução apenas em um intervalo e a EDI tem solução em toda a reta.

Exemplo 4 *Considere o sistema impulsivo com duas equações diferenciais, baseado em*

Figura 9 – Solução do Exemplo 3 com condição inicial $x(0) = 0$, (a) sem impulso, solução existe para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e (b) com impulso, solução existe para $t \in [0, \infty)$.

Singh, Srivastava e Singh (2016),

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} & t \in [0, 2], \quad t \neq 1 \\ \mathbf{I}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3.6565 \\ 0 & -0.8020 \end{bmatrix} \mathbf{x}, & t = 1 \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.49)$$

Neste caso, considerando $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, temos que $f_1(t, x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ e $f_2(t, x_1, x_2) = -x_1$ são ambas contínuas e Lipschitz em $\mathbb{R}^2$. Logo possuem solução única qualquer que seja a condição inicial tomada. Além disso, como no Exemplo 3, o sistema é autônomo.

A solução geral do sistema de EDOs com a condição inicial imposta em $t = t_0$ qualquer é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -2c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Para a condição inicial $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = -2$, obtemos as constantes $c_1 = -\frac{4}{3}$ e $c_2 = -\frac{2}{3}$ e a solução fica $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t} \\ -\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t} \end{bmatrix}$ e pode ser vista na Figura 10.

Esta vai ser a solução do sistema impulsivo (1.49) para $t \in [0, 1]$, de onde calculamos $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 19.4588 \\ -10.0973 \end{bmatrix}$.

Em $\tau_1 = 1$ ocorre o primeiro salto na solução, $\mathbf{x}(1^+) = \mathbf{x}(1) + \mathbf{I}_1(\mathbf{x}(1))$, ou seja,

Figura 10 – Solução do Exemplo 1.49 sem considerar o efeito impulsivo em $t = 1$, (a) $x_1(t)$ e (b) $x_2(t)$.

$$\mathbf{x}(1^+) = \begin{bmatrix} 19.4588 \\ -10.0973 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3.6565 \\ 0 & -0.8020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.4588 \\ -10.0973 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

O sistema continua a evoluir, agora a partir dessa condição inicial $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ imposta em $\tau_1 = 1$. Fazendo $t_0 = 1$ em (1.50), encontramos $c_1 = -0.1804$ e $c_2 = -1.8122$ e a solução para $t \in (1, 2]$ fica

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.3609e^{2t} - 1.8122e^{-t} \\ -0.1804e^{2t} - 1.8122e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Assim a solução para o Exemplo 4 em $t \in [0, 2]$ é

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{8}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}, \\ x_2(t) = -\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ x_1(t) = 0.3609e^{2t} - 1.8122e^{-t}, \\ x_2(t) = -0.1804e^{2t} - 1.8122e^{-t}, & 1 < t \leq 2, \end{cases} \quad (1.51)$$

A Figura 11 mostra a solução do Exemplo 4 no intervalo $[0, 2]$.

Figura 11 – Solução do Exemplo 1.49 com impulso em $t = 1$, (a) $x_1(t)$ e (b) $x_2(t)$.

Solução numérica de equações diferenciais

Para resolver EDOs existem técnicas analíticas como integração, expansão em séries e transformada de Laplace. Tais técnicas encontram a resposta exata e exibem uma expressão (explícita ou implícita) para a solução. No entanto, resolvem apenas uma classe de equações, as lineares, com variáveis separáveis, exatas, entre outras. Não há uma técnica de alcance geral. Já os métodos numéricos podem ser aplicados a uma gama bem maior de equações diferenciais mas, em contrapartida, fornecem apenas um conjunto de valores que aproximam a solução em determinados pontos. Os métodos numéricos para resolver EDIs são adaptados dos métodos para EDOs. Neste capítulo discutimos os métodos de passo simples para EDOs e justificamos a escolha pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, com base na precisão dos resultados fornecidos e na complexidade do processo. Começamos a descrever o Runge-Kutta de quarta ordem pelos problemas com uma única equação, generalizamos para sistemas de EDOs e, na sequência, expandimos para as EDIs. Por fim, obtemos a solução numérica de alguns dos exemplos do capítulo anterior.

2.1 Métodos de passo simples

Vamos iniciar com um PVI formado por uma EDO escalar de primeira ordem e condição inicial da forma

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & \text{para } t_0 \leq t \leq a, \\ x(t_0) = \eta, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $t \in J = [t_0, a]$, x incógnita, $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\eta \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}$.

Os métodos numéricos encontram aproximações para solução de (2.1) em pontos discretos do intervalo $[t_0, a]$, que formam um conjunto denominado malha. Quando os pontos são igualmente espaçados por um tamanho de passo $h = (a - t_0)/N$, onde N é o

número de subintervalos que particiona $[t_0, a]$, podemos escrever a malha como

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Os métodos de passo simples para resolver (2.1) utilizam apenas a solução do ponto anterior para calcular a aproximação no ponto atual e são descritos por

$$\begin{cases} x_0 = \eta, \\ x_{i+1} = x_i + h\phi_N(t_i, x_i; h), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde x_i é a aproximação para a solução $x(t_i)$ e ϕ_N é uma função que define cada método numérico. Por exemplo, para o método de Euler (que é um Runge-Kutta de 1ª ordem) é a própria função f de (2.1), ou seja, $\phi_N(t_i, x_i; h) = f(t_i, x_i)$, e para o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)

$$\phi_N(t_i, x_i; h) = \frac{1}{6} \left[f(t_i, \bar{k}_1) + 2f(t_i + \frac{h}{2}, \bar{k}_2) + 2f(t_i + \frac{h}{2}, \bar{k}_3) + f(t_i + h, \bar{k}_4) \right], \quad (2.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= x_i, & \bar{k}_2 &= x_i + \frac{h}{2}f(t_i, \bar{k}_1), \\ \bar{k}_3 &= x_i + \frac{h}{2}f(t_i + \frac{h}{2}, \bar{k}_2), & \bar{k}_4 &= x_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, \bar{k}_3). \end{aligned}$$

Geometricamente, a fórmula (2.3) diz que para encontrar a aproximação x_{i+1} partimos da aproximação anterior x_i e caminhamos na direção $\phi_N(t_i, x_i; h)$ o correspondente a uma distância h na componente horizontal. Assim, para o método de Euler a direção é uma aproximação da derivada da solução $x'(t_i) \approx f(t_i, x_i)$ e para o RK4, a direção é uma média ponderada de valores de f em diferentes pontos no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

De acordo com o processo (2.3), não teremos a expressão da solução como uma função contínua definida no domínio $[t_0, a]$, teremos apenas um conjunto de pontos que descrevem a solução, o que em geral é bastante importante para as aplicações práticas. Caso seja necessário conhecer uma expressão para a solução, podemos utilizar técnicas de interpolação ou de ajustes de curvas.

O desejado é que a solução numérica encontrada esteja suficientemente próxima da solução exata. Para alcançar esse objetivo, o PVI deve ser bem posto e o método escolhido deve ser consistente, convergente e estável. Seguem as definições e teoremas, retirados de Burden e Faires (2008), que tratam das condições para alcançarmos uma solução numérica confiável.

A condição de um PVI ser bem posto é importante uma vez que a resolução numérica envolve arredondamento dos números durante os cálculos, seja manual ou pelo computador. Os problemas bem postos possuem uma única solução e tem a propriedade

de que pequenas variações ou perturbações nos dados iniciais bem como nas operações subsequentes introduzem variações correspondentemente pequenas na solução.

Definição 1 O problema de valor inicial (2.1) é considerado um problema **bem posto** se:

- Existir uma única solução $x(t)$ para o problema e
- existirem constantes $\epsilon_0 > 0$ e $k > 0$, tais que, para qualquer ϵ , com $0 < \epsilon < \epsilon_0$, sempre que $\delta(t)$ for contínua com $|\delta(t)| < \epsilon$ para todo t em $[t_0, a]$, e quando $|\delta_0| < \epsilon$, o PVI

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) + \delta(t), & \text{para } t_0 \leq t \leq a \\ z(t_0) = x_0 + \delta_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

tem uma única solução $z(t)$ que satisfaz $|z(t) - x(t)| < k\epsilon$, para todo $t \in [t_0, a]$.

O problema especificado por (2.5) é chamado de problema perturbado associado ao problema original (2.1). Ele admite a possibilidade de um erro $\delta(t)$ ser introduzido na expressão da equação diferencial, bem como de um erro δ_0 estar presente na condição inicial. O teorema a seguir especifica condições que asseguram que um problema de valor inicial seja bem posto. A demonstração pode ser encontrada em Brauer e Nohel (1969).

Teorema 3 Seja $D = \{(t, x) : t_0 \leq a \text{ e } -\infty < x < \infty\}$. Se f for contínua e satisfizer uma condição de Lipschitz na variável x no conjunto D então o problema de valor inicial (2.1) é bem posto.

O conceito de erro de truncamento local (ETL) de um método mede a quantidade, em um passo específico, pela qual a solução exata da equação diferencial deixa de satisfazer a equação de diferenças sendo usada para a aproximação.

Definição 2 O método de diferenças (2.3) tem um **erro de truncamento local**

$$E_{i+1}(h) = \frac{x_{i+1} - (x(t_i) + h\phi_N(t_i, x(t_i)))}{h} = \frac{x_{i+1} - x(t_{i+1})}{h} - \phi_N(t_i, x(t_i)), \quad (2.6)$$

para cada $i = 0, 1, \dots, N-1$.

A definição de consistência diz que um método de passo único é consistente quando a equação de diferença para o método se aproxima da equação diferencial, quando o tamanho do passo tende a zero.

Definição 3 Um método de equação de diferença de passo simples com erro de truncamento local $E_i(h)$ no i -ésimo passo é dito **consistente** com a equação diferencial que aproxima se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} |E_i(h)| = 0. \quad (2.7)$$

A respeito da convergência, um método é convergente quando a solução da equação de diferença se aproxima da solução da equação diferencial, quando o tamanho do passo h tende a zero.

Definição 4 Um método de equação de diferença de passo único é dito **convergente** com relação à equação diferencial que aproxima se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} |x_i - x(t_i)| = 0, \quad (2.8)$$

em que $x(t_i)$ denota o valor exato da solução da equação diferencial e x_i é a aproximação obtida a partir do método de diferença no i -ésimo passo.

Por último, o conceito de estabilidade de um método numérico é tomado no sentido de que pequenas variações ou perturbações nas condições iniciais e nas aritméticas subsequentes produzem mudanças correspondentemente pequenas na solução numérica. Na prática, resolvemos, ao invés de (2.3), um problema do tipo

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + h\phi_N(t_i, \hat{x}_i; h) + \delta_{i+1}, & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \hat{x}_0 = x(t_0) + \delta_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde δ_i representa um pequeno erro de arredondamento ocorrido no passo i do processo iterativo e cada δ_i é limitado por uma constante $|\delta_i| < \delta$ pequeno.

O conceito de estabilidade da equação de diferença de passo simples é de certa forma análogo à condição de uma equação diferencial ser bem posta, por isso a condição de Lipschitz aparece no teorema seguinte.

Teorema 4 Suponha que o problema de valor inicial (2.1) seja aproximado por um método de diferença de passo simples na forma (2.3). Suponha também que exista um número $h_0 > 0$ e que $\phi_N(t, x; h)$ seja contínua e satisfaça uma condição de Lipschitz na variável x com a constante de Lipschitz L no conjunto $D = \{(t, w, h) : t_0 \leq t \leq a, -\infty < w < \infty, 0 \leq h \leq h_0\}$. Então

(i) o método é estável;

(ii) o método de diferença é convergente, se e somente se, for consistente, o que é equivalente a

$$\phi_N(t, x, 0) = f(t, x), \quad \forall t_0 \leq t \leq a.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Gear (1971, p.57). Observe que a parte (i) diz respeito à estabilidade e a parte (ii) refere-se às condições suficientes para que um método consistente seja convergente.

Na seção seguinte introduzimos o método RK4 e então voltamos ao Teorema 4 para aplicá-lo a esse método.

2.2 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Os métodos de Runge-Kutta são derivados dos métodos de Taylor. Estes, por sua vez, são deduzidos a partir da expansão em série de Taylor da função x (solução do PVI) em torno de t_i e calculada em $t = t_{i+1}$. Para um método de Taylor de ordem p , a expansão da série estende-se até à derivada de ordem p , ficando o termo com derivada de ordem $p + 1$ para o erro, da seguinte forma

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hx'(t_i) + \dots + \frac{h^p}{p!}x^{(p)}(t_i) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}x^{(p+1)}(\xi_i),$$

para algum $t_i < \xi_i < t_{i+1}$.

As derivadas desta expressão não são conhecidas explicitamente, porém usando o fato de $x(t)$ satisfazer a EDO de (2.1) e que $x''(t), \dots, x^{(p)}(t)$ podem ser obtidas diferenciando a EDO sucessivamente, obtemos as fórmulas que envolvem implicitamente t_i e $x(t_i)$. Para fim de simplificação, adota-se a notação

$$x''(t) = f'(t, x(t)) = \frac{df}{dt}(t, x(t)),$$

$$x^{(3)}(t) = f''(t, x(t)) = \frac{d^2f}{dt^2}(t, x(t)),$$

e assim por diante. A aproximação de Taylor se torna

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + \frac{h^2}{2!}f'(t_i, x(t_i)) + \dots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(t_i, x(t_i)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p)}(\xi_i). \quad (2.10)$$

Descartando o termo do erro da Eq.(2.10) e estabelecendo a igualdade usando as soluções aproximadas, obtemos o Método de Taylor de ordem p . Escrevendo-o de acordo com a forma geral dos métodos de passo simples (2.3) temos

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0), \\ x_{i+1} = x_i + hT^{(p)}(t_i, x_i; h), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.11)$$

em que

$$T^{(p)}(t_i, x_i; h) = f(t_i, x_i) + \frac{h}{2!}f'(t_i, x_i) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{(p-1)}(t_i, x_i). \quad (2.12)$$

O erro de truncamento da série de Taylor é $\frac{h^{p+1}x^{(p+1)}(\xi_i)}{(p+1)!}$ enquanto que o erro de truncamento local é

$$E_{i+1}(h) = \frac{x_{i+1} - (x_i - hT^{(p)}(t_i, x_i))}{h} = \frac{h^p}{(p+1)!}x^{(p+1)}(\xi_i), \quad (2.13)$$

ou seja, se $x^{(p+1)}$ for limitada em $[t_0, a]$, digamos por M , $|E_{i+1}(h)| \leq \frac{h^p M}{(p+1)!}$ para todo $i = 0, 1, \dots, N$. Logo, o ETL é $O(h^p)$.

Na prática, os métodos de Taylor são raramente utilizados pela necessidade de calcular as derivadas de alta ordem da f . Para contornar essa dificuldade e ao mesmo tempo manter a ordem do ETL dos métodos de Taylor, utiliza-se os métodos de Runge-Kutta. Esses métodos substituem a função $T^{(p)}(t, x; h)$ por uma expressão que não depende das derivadas da f , porém que depende da própria f avaliada em diferentes pontos.

Por exemplo, para um Taylor de ordem 2, uma aproximação pode ser

$$f(t, x) + \frac{h}{2!}f'(t, x) \approx b_1 f(t, x) + b_2 f(t + \alpha h, x + \beta h f(t, x)),$$

gerando uma fórmula de Runge-Kutta de 2 estágios. Para manter a ordem do erro de truncamento em $O(h^2)$, há algumas opções, entre elas $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \beta = 1$.

Uma fórmula de Runge-Kutta explícita com s estágios, obtida do Método de Taylor de ordem s , tem a expressão geral a seguir, com diversos parâmetros a determinar. Os detalhes da dedução serão omitidos e podem ser encontrada em livros de Análise Numérica, como Atkinson, Han e Stewart (2009) e Burden e Faires (2008).

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= x_i, \\ \bar{k}_2 &= x_i + h a_{2,1} f(t_i, \bar{k}_1), \\ \bar{k}_3 &= x_i + h [a_{3,1} f(t_i, \bar{k}_1) + a_{3,2} f(t_i + c_2 h, \bar{k}_2)], \\ &\vdots \\ \bar{k}_s &= x_i + h [a_{s,1} f(t_i, \bar{k}_1) + a_{s,2} f(t_i + c_2 h, \bar{k}_2) + \dots + a_{s,s-1} f(t_i + c_{s-1} h, \bar{k}_{s-1})], \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h [b_1 f(t_i, \bar{k}_1) + b_2 f(t_i + c_2 h, \bar{k}_2) + \dots \\ &\quad + b_{s-1} f(t_i + c_{s-1} h, \bar{k}_{s-1}) + b_s f(t_i + c_s h, \bar{k}_s)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mais sucintamente, podemos escrever o método de s estágios como

$$\begin{aligned} \bar{k}_j &= x_i + h \sum_{l=1}^{j-1} a_{j,l} f(t_i + c_l h, \bar{k}_l), \quad j = 1, \dots, s, \\ x_{i+1} &= x_i + h \sum_{l=1}^s b_l f(t_i + c_l h, \bar{k}_l). \end{aligned} \quad (2.16)$$

A denominação s estágios indica que os cálculos terão s cálculos intermediários $\bar{k}_1$ até $\bar{k}_s$ antes do cálculo da próxima aproximação x_{i+1} . Os coeficientes $\{c_j, a_{j,l}, b_l\}$ de

(2.16) são determinados por meio de extensos cálculos de forma a garantir o menor erro de truncamento possível.

Por exemplo, tomando $s = 4$,

$$\bar{k}_1 = x_i,$$

$$\bar{k}_2 = x_i + ha_{2,1}f(t_i, \bar{k}_1),$$

$$\bar{k}_3 = x_i + h[a_{3,1}f(t_i, \bar{k}_1) + a_{3,2}f(t_i + c_2h, \bar{k}_2)],$$

$$\bar{k}_4 = x_i + h[a_{4,1}f(t_i, \bar{k}_1) + a_{4,2}f(t_i + c_2h, \bar{k}_2) + a_{4,3}f(t_i + c_3h, \bar{k}_3)] \text{ e}$$

$$x_{i+1} = x_i + h[b_1f(t_i, \bar{k}_1) + b_2f(t_i + c_2h, \bar{k}_2) + b_3f(t_i + c_3h, \bar{k}_3) + b_4f(t_i + c_4h, \bar{k}_4)].$$

Para o RK4, os parâmetros são

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = a_{2,1} = \frac{1}{2},$$

$$c_3 = \underbrace{a_{3,2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{a_{3,1}}_0 = \frac{1}{2},$$

$$c_4 = \underbrace{a_{4,1}}_0 + \underbrace{a_{4,2}}_0 + \underbrace{a_{4,3}}_1 = 1,$$

$$b_1 = b_4 = \frac{1}{6} \text{ e } b_2 = b_3 = \frac{1}{3},$$

originando a Eq.(2.4). Tais coeficientes garantem que o ETL seja $O(h^4)$, desde que a solução tenha até a quinta derivada, todas contínuas e que a quinta derivada seja limitada no intervalo $[t_0, a]$.

Além disso, reorganizando o processo do RK4 da forma

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0), \\ k_1 = hf(t_i, x_i), \\ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 = hf(t_i + h, x_i + k_3), \\ x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.17)$$

podemos observar que em cada iteração é necessário avaliar quatro vezes a função f em pontos diferentes.

Segundo Butcher (1985), há uma relação entre o número de avaliação da f por passo e a ordem do ETL, como mostra a Tabela 1. Ainda seguindo o raciocínio do autor, não há combinação de coeficientes que garanta que o erro de truncamento seja $O(h^s)$ para os métodos de ordem $s > 4$. Dessa forma, comparando os métodos de Runge-Kutta, percebe-se que o método RK4 é o preferível por apresentar o melhor custo $\times$ benefício.

Voltando ao Teorema 4, observamos que a função $\phi_N(t, x; h)$ de (2.4) é contínua se

Avaliações f por passo	1	2	3	4	$5 \leq n \leq 7$	$8 \leq n \leq 9$	$n \geq 10$
Melhor ETL possível	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

Tabela 1 – Relação entre o número n de avaliações da função f por passo e a ordem dos métodos de Runge-Kutta.

a função f do PVI (2.1) for contínua. Além disso, é Lipschitz se f for Lipschitz, conforme contas a seguir. Considere que f seja Lipschitz com constante L , então

$$\begin{aligned}
|\phi_N(t, x; h) - \phi_N(t, z; h)| &\leq \frac{1}{6} [|f(t, x) - f(t, z)| \\
&+ 2 \left| f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f(t, z)\right) \right| \\
&+ 2 \left| f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f(t, z)\right)\right) \right| \\
&+ \left| f\left(t + h, x + hf\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)\right)\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - f\left(t + h, z + hf\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f(t, z)\right)\right)\right) \right|] \\
&\leq \left(L + \frac{h}{2}L^2 + \frac{h^2}{6}L^3 + \frac{h^3}{24}L^4 \right) |x - z|.
\end{aligned}$$

Escolhendo $L_f = L + \frac{h}{2}L^2 + \frac{h^2}{6}L^3 + \frac{h^3}{24}L^4$, temos que a condição de Lipschitz é satisfeita.

Assim, basta tomar h suficientemente pequeno ($h \leq h_0$) para que as hipóteses do Teorema 4 sejam satisfeitas.

Com isso, concluímos que o RK4 é estável para PVI's bem postos, nos quais f é contínua e Lipschitz em $[t_0, a]$. Fazendo $h = 0$ na Eq. (2.4), concluímos que o RK4 é consistente e, portanto, convergente. Mais ainda, que o erro será $O(h^4)$ para uma solução que tenha até a quarta derivada, todas contínuas, e que a quinta derivada seja limitada no intervalo $[t_0, a]$.

2.2 Runge-Kutta de quarta ordem para sistemas de EDOs

Seja um PVI com n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e n condições iniciais como (1.6), repetido aqui.

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), & t \in [t_0, a], \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}. \end{cases} \quad (2.18)$$

A extensão do RK4, processo iterativo (2.17), para o sistema (2.18) fica

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}^{(i)}), \\ \mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}^{(i)} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}^{(i)} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Consideramos o índice referente às soluções discretas na parte superior de $\mathbf{x}$ para evitar confusão com as coordenadas do próprio vetor. De forma mais detalhada, cada solução $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, é aproximada pelos valores $x_j^{(i)}$, $i = 0, \dots, N$, ou seja, $x_j(t)$ é a solução analítica e $x_j^{(i)}$ é a solução numérica. O processo (2.19) fica

$$\begin{cases} x_j^{(0)} = \eta_j, \\ k_{1,j} = hf_j(t_i, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \\ k_{2,j} = hf_j(t_i + \frac{h}{2}, x_1^{(i)} + \frac{1}{2}k_{1,1}, x_2^{(i)} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, x_n^{(i)} + \frac{1}{2}k_{1,n}) \\ k_{3,j} = hf_j(t_i + \frac{h}{2}, x_1^{(i)} + \frac{1}{2}k_{2,1}, x_2^{(i)} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, x_n^{(i)} + \frac{1}{2}k_{2,n}) \\ k_{4,j} = hf_j(t_i + h, x_1^{(i)} + k_{3,1}, x_2^{(i)} + k_{3,2}, \dots, x_n^{(i)} + k_{3,n}) \\ x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + \frac{1}{6}(k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}) \end{cases} \quad (2.20)$$

com $j = 1, 2, \dots, n$.

É importante observar que no processo de iteração todos os valores de $k_{1,j}$, $j = 1, \dots, n$ devem ser calculados antes de prosseguirmos com os cálculos dos valores de $k_{2,j}$ e assim sucessivamente.

2.3 Métodos de Runge-Kutta de quarta ordem para EDIs

Retomamos o problema (1.29), repetido aqui

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & t \in [t_0, a], t \neq \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ \Delta \mathbf{x}(\tau_k) = \mathbf{I}_k(\mathbf{x}(\tau_k)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}. \end{cases} \quad (2.21)$$

A teoria exposta na Seção 1.2 divide o sistema (2.21) em $K + 1$ subproblemas de valor inicial, conforme (1.30)-(1.32). Do ponto de vista de solução numérica, supondo que o sistema (2.21) tenha uma única solução em $[t_0, a]$, os métodos de passo simples, incluindo o RK4, podem ser aplicados.

Existem pacotes computacionais que resolvem equações diferenciais. No Matlab, existem, por exemplo, as funções `ode23` e `ode45`. Porém, como nosso objetivo é que a resolução numérica das EDIs seja apenas uma parte do programa computacional desenvolvido, optamos por desenvolver um programa próprio.

Optamos também por criar uma malha em todo o intervalo $[t_0, a]$ ao invés de criar uma malha para cada subproblema. Consideramos que a primeira opção abrange mais casos de EDIs e pode ser facilmente estendida para sistemas com tempo variável como (1.28). Além disso, a malha fica uniformemente espaçada por h e o erro nas aproximações fica controlado. Por outro lado, essa opção não traz garantia de que os momentos de impulso τ_k sejam pontos da malha t_i .

Assim, o procedimento adotado na resolução numérica da EDI foi o de percorrer os pontos da malha, aplicando o método RK4, até que o próximo momento de impulso seja alcançado. Então inserimos o impulso e seguimos aplicando o método.

Resumidamente, a solução é obtida pelos seguintes passos.

Dados de entrada:

η : vetor das condições iniciais
 t_0 : início do intervalo de resolução
 a : fim do intervalo de resolução
 τ : vetor dos momentos de impulso
 I : vetor de valores dos saltos em cada momento de impulso ou K funções
 f : função da equação diferencial

Passo 1. Inicialização das variáveis:

$h = (a - t_0)/N$: tamanho do passo
 $t^{(0)} = t_0$: vetor dos tempos discretos
 $x^{(0)} = \eta$: vetor das aproximações da solução
 (armazena os saltos)
 $x_{saída}^{(0)} = x^{(0)}$: vetor das aproximações da solução
 (saída do programa)
 $k = k + 1$: contador para o momento de impulso

Passo 2. Para i de 1 a N faça

aplica o processo (2.19) obtendo $x^{(i+1)}$

$$x_{saída}^{(i+1)} = x^{(i+1)}$$

Passo 2.1. Se $t_i < k$ e $t_i + h \geq \tau_k$ então aplica o salto

$$x^{(i+1)} = x^{(i+1)} + I_k(x^{(i+1)})$$

$$k = k + 1;$$

$$t^{(i+1)} = t^{(i)} + h$$

Saída: vetor $x_{saída}$

Seguem dois exemplos: o Problema (1.39) que tem como solução analítica (1.40) e o Problema (1.49) que tem como solução analítica (1.51), que agora serão resolvidos pelo RK4.

Para explorarmos a solução numérica, implementamos o método de RK4 utilizando o software Matlab e resolvemos os exemplos a seguir

Exemplo 5 Considere a EDI

$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \in [0, 3], \quad t \neq 1, 2 \\ x(0) = 0.5 \\ I_1(x) = 1, \quad I_2(x) = 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Escolhendo o tamanho do passo $h = 0.25$, discretizamos o domínio em 13 pontos igualmente espaçados. Os valores das soluções exata e numérica, e o erro, que é a diferença entre as duas são mostrados na Tabela 2. A Figura 12 mostra a solução numérica calculada (asteriscos) e a solução exata (linha contínua).

Os resultados obtidos mostram que a solução numérica apresenta um erro muito pequeno, mesmo com um passo grande. Para tamanho de passo $h = 0.1$, o resultado em $t = 3$ é 16.06454135 com erro 0.00002812 e, para o tamanho de passo $h = 0.01$, o resultado em $t = 3$ é 16.06456946 com erro da ordem de 10^{-8} .

Exemplo 6 Considere a EDI

$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \in [0, 3], \quad t \neq 1, 2 \\ x(0) = 0.5 \\ I_1(x) = x^2 + 1, \quad I_2(x) = \ln(x) \end{cases} \quad (2.23)$$

Escolhendo o tamanho do passo $h = 0.25$ como no exemplo anterior, os valores das soluções exata e numérica e o erro são mostrados na Tabela 3.

Tabela 2 – Soluções numérica e analítica do Exemplo 5.

t	x_{num}	x_{exata}	$erro$
0.00	0.50000000	0.50000000	0.000000
0.25	0.92047119	0.92048729	0.00001610
0.50	1.42560380	1.42563936	0.00003557
0.75	2.00394098	2.00399999	0.00005902
1.00	2.64077195	2.64085909	0.00008714
1.00 ⁺	3.64077195	3.64085909	0.00008714
1.25	4.60122476	4.60135394	0.00012918
1.50	5.65769444	5.65787674	0.00018230
1.75	6.80194928	6.80219868	0.00024939
2.00	8.02341966	8.02375378	0.00033412
2.00 ⁺	9.02341966	9.02375378	0.00033412
2.25	10.59255090	10.59300046	0.00044956
2.50	12.28856552	12.28916336	0.00059785
2.750	14.11199843	14.11278675	0.00078832
3.000	16.06353648	16.06456947	0.00103299

Figura 12 – Solução numérica e solução exata do Exemplo 5.

Os resultados mostram que a solução numérica está bem próxima da exata, porém, ligeiramente maior que o Exemplo 5, onde os impulsos são constantes. Neste exemplo, o erro devido ao método numérico cometido no valor da solução influencia no valor do salto.

Para passos menores, por exemplo, $h = 0.1$, o resultado em $t = 3$ é 73.83550767 com erro 0.00021342 e, para o tamanho de passo $h = 0.01$, o resultado em $t = 3$ é 73.83571754 com erro 0.00000355.

Tabela 3 – Soluções numérica e analítica do Exemplo 6.

t	x_{num}	x_{exata}	$erro$
0.00	0.50000000	0.50000000	0.000000
0.25	0.92047119	0.92048729	0.00001610
0.50	1.42560380	1.42563936	0.00003557
0.75	2.00394098	2.00399999	0.00005902
1.00	2.64077195	2.64085909	0.00008714
1.00 ⁺	10.61444844	10.61499591	0.00005475
1.25	13.55554341	13.55632288	0.00077947
1.50	17.15519116	17.15628447	0.00109331
1.75	21.56492970	21.56644646	0.00151676
2.00	26.97933641	26.98142319	0.00208678
2.00 ⁺	30.27440766	30.27657275	0.00216509
2.25	37.87917921	37.88216020	0.00298099
2.50	47.32505815	47.32913807	0.00407992
2.750	59.09944803	59.10500487	0.00555684
3.000	73.82818328	73.83572109	0.00753781

Exemplo 7 Considere o sistema impulsivo com duas equações diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \quad t \in [0, 2] \\ I_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 3.6565 \\ 0 & -0.8020 \end{bmatrix} x, \\ x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Considerando $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ e escolhendo o tamanho do passo $h = 0.25$, discretizamos o domínio em 13 pontos igualmente espaçados. Os valores das soluções exata e numérica, e o erro, que é a diferença entre as duas é mostrada na Tabela 4. A Figura 13 mostra a solução numérica calculada (asteriscos) e a solução exata (linha contínua).

Tabela 4 – Soluções numérica e analítica do Exemplo 7.

t	x_{1num}	x_{2num}	x_{1exata}	x_{2exata}	Erro x_1	Erro x_2
0.00	2.000000	-2.000000	2.000000	-2.000000	0.000000	0.000000
0.25	3.876627	-2.717495	3.877389	-2.717495	0.000761	0.000373
0.50	6.841894	-4.028729	6.844397	-4.028729	0.002503	0.001239
0.75	11.630080	-6.290496	11.636259	-6.290496	0.006179	0.003075
1.00	19.445324	-10.097327	19.458896	-10.097327	0.013571	0.006771
1.00 ⁺	2.000000	-2.000000	2.000000	-2.000000	0.000000	0.000000
1.25	3.867995	-2.713324	3.873402	-2.716108	0.005406	0.002784
1.50	6.827965	-4.020929	6.838175	-4.026091	0.010210	0.005161
1.75	11.607353	-6.276371	11.626275	-6.285872	0.018922	0.009500
2.00	19.408042	-10.072160	19.442648	-10.089490	0.034606	0.017330

(a)

(b)

Figura 13 – Solução numérica e solução exata do Exemplo 7, (a) x_1 e (b) x_2 .

Problemas inversos

Iniciamos este capítulo discutindo possíveis definições de problemas inversos e contrapondo-os com os problemas diretos. Apresentamos os problemas inversos associados às EDIs e as dificuldades envolvidas na resolução. Descrevemos as técnicas de solução para os problemas inversos empregadas neste trabalho, ou seja, a abordagem funcional e o método de otimização *Simulated Annealing*.

3.1 Problemas diretos X Problemas inversos

“Problemas inversos” constitui uma relativamente recente área de pesquisa em Matemática, interessada em formular modelos, baseados em aplicações; estabelecer uma sólida teoria, principalmente quanto às condições que garantam que os modelos inversos sejam bem postos; e desenvolver técnicas de solução.

Considere um processo qualquer que tenha uma causa e um efeito. O problema direto está relacionado à determinação do efeito a partir do conhecimento da causa e do processo. Esquemáticamente,

$$\text{Causa} \longrightarrow \text{Processo} \longrightarrow ?$$

No entanto, podemos estar interessados em descobrir a causa, conhecendo-se o processo e o efeito

$$? \longrightarrow \text{Processo} \longrightarrow \text{Efeito}$$

ou ainda, em descobrir o processo que transforma a causa no efeito

$$\text{Causa} \longrightarrow ? \longrightarrow \text{Efeito}$$

Estes dois últimos esquemas representam os problemas inversos. Quando a causa é desconhecida, é chamado de *problema inverso de causalidade* e quando o processo é desconhecido, é chamado de *problema inverso tomográfico*.

Denominando $\mathfrak{S}$ o processo, x a causa e y o efeito, em termos matemáticos, o problema direto é expresso por um operador $\mathfrak{S}$ que, ao ser aplicado em x fornece y , ou seja,

$$\mathfrak{S}(x) = y. \quad (3.1)$$

Os problemas inversos podem ser representados por

$$\mathfrak{S}^{-1}(y) = x \quad (\text{causalidade}) \quad (3.2)$$

e

$$(x, y) = \mathfrak{S} \quad (\text{tomográfico}). \quad (3.3)$$

A definição de problemas inversos ainda não é um consenso entre os pesquisadores da área. Engl, Hanke e Neubauer (1996) define problema inverso como “o problema de determinar causas baseado na observação de seus efeitos”, ou seja, o processo causa $\rightarrow$ efeito refere-se ao problema direto enquanto que o processo efeito $\rightarrow$ causa refere-se ao problema inverso.

No entanto, a distinção entre qual é o problema direto ou o inverso pode não ser clara. Por exemplo, no modelo matemático expresso por $\mathfrak{S}(x) = y$, o problema inverso pode ser representado por $\mathfrak{S}^{-1}(y) = x$. Por outro lado, se for possível inverter o operador $\mathfrak{S}$, definimos $\mathcal{G} = \mathfrak{S}^{-1}$ e então $\mathcal{G}(y) = x$ pode ser visto como o problema direto e $\mathcal{G}^{-1}(x) = y$ como o inverso.

Assim, Velho (2001) defende que o problema direto é aquele em que o estudo antecedeu-se historicamente. Ainda seguindo o raciocínio do autor, os problemas diretos requerem um conhecimento completo e preciso das causas para determinação dos efeitos enquanto que os problemas inversos, em geral, estão baseados em observações imprecisas (dados contaminados com ruídos ou erros experimentais) e incompletas. Sendo assim, os problemas diretos, em geral, são bem-postos (no sentido de que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados de entrada) e os inversos mal-postos.

Quando o operador $\mathfrak{S}$ é linear em um espaço de dimensão finita, $\mathfrak{S}$ pode ser escrita como uma matriz, digamos, de dimensões $m \times n$. Se $m = n$ e $\mathfrak{S}$ for inversível, o problema está resolvido por inversão direta. Para um operador quase singular ou singular, o procedimento de inversão não pode ser aplicado. Neste caso, podemos usar decomposição em valores singulares ou o método dos mínimos quadrados.

O exemplo de Menin, Martinez e Rolnik (2016) que tem como objetivo determinar os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 de uma função quadrática $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, pode ser pensado

como um problema inverso do tipo tomográfico. Usando apenas um ponto (x_1, y_1) como causa e efeito, não há unicidade de solução. Já usando três pontos distintos, (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, obtemos um sistema linear $\mathfrak{S}(a) = y$ onde

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

o qual possui uma única solução (a_0, a_1, a_2) .

No entanto, se os dados estiverem contaminados por ruídos, a solução não será a esperada e pode, inclusive, não estar próxima à esperada. Uma estratégia, amplamente utilizada, para contornar essa dificuldade, é efetuar mais medidas do que o necessário obtendo $n > 3$ pontos distintos, (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, e utilizar o método dos mínimos quadrados para minimizar o funcional

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)]^2, \quad (3.4)$$

que mede as diferenças entre os dados y_i e o modelo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Neste caso, como a função de ajuste $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ é linear nos parâmetros a_0 , a_1 e a_2 , derivando E em relação a cada parâmetro e igualando a zero, isto é, $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$, obtemos um sistema linear com três equações e três incógnitas, cuja solução única é exatamente um ponto de mínimo do funcional E . Para mais detalhes sobre o Método dos Mínimos Quadrados, veja, por exemplo, Gilat e Subramaniam (2009) e Franco (2006).

A estratégia de efetuar mais medidas do que o necessário do mesmo problema é chamada de estratégia de medidas redundantes e é amplamente utilizada. Por exemplo, no exame de Tomografia Computadorizada, do ponto de vista matemático, tal exame nada mais é do que a reconstrução do operador (seção do corpo humano) que atenua os raios X emitidos (causas) que são medidos nos receptores (efeito). Os raios X são emitidos ao redor de toda a seção que se deseja conhecer o interior, efetuando uma quantidade de medidas suficientes para possibilitar a reconstrução e amenizar os efeitos dos ruídos nas medidas.

Mais próximo aos problemas inversos em EDIs tratados neste texto, encontramos, dois exemplos em EDOs em Menin, Martinez e Rolnik (2016), aplicados a um sistema massa-mola. Os autores consideram o modelo

$$\begin{cases} x'' + cx' + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

sendo que no primeiro exemplo o objetivo é determinar os parâmetros c e k da equação, dados x_0 , y_0 e uma tabela de medidas (t_i, x_i) acometidas por ruídos e, no segundo exemplo, determinar x_0 e v_0 , dadas as demais informações.

Especificamente em EDIs, os problemas inversos estão relacionados à identificação dos parâmetros momentos de impulso τ_k e saltos na solução $I_k(x(\tau_k))$. Este assunto foi explorado, por exemplo, no trabalho de Bellman (1971) citado na Introdução. A variável u representa a concentração do medicamento em um organismo no tempo $t > 0$. A absorção do medicamento pelo organismo é modelada por uma equação diferencial ordinária linear $u'(t) = -au(t) + v(t)$ onde $u(t)$ representa a concentração de uma droga no organismo no tempo $t > 0$, com a condição inicial $u(0) = c$, onde a é a taxa de absorção do medicamento, c é a concentração inicial e $v(t)$ é a taxa de injeção do medicamento. O número de doses é fixo igual a N . O problema é descobrir quais os tempos ótimos bem como as doses ótimas em cada tempo. É desejado que a concentração do medicamento no organismo se mantenha o mais próximo possível do nível desejado u_D durante o intervalo $[0, T]$. Para isso, o problema de controle ótimo é descrito por: minimizar o funcional de erro $J(u) = \int_0^T (u - u_D)^2 dt$ enquanto que o controle impulsivo pode ser visto como minimizar o funcional

$$J(u) = \sum_{i=1}^N (u - u_D)^2.$$

Para as aplicações em que o operador $\mathfrak{F}$ é linear existe uma teoria bastante desenvolvida. A resolução se torna mais complicada quando o operador é não linear nos parâmetros e não há possibilidade de realizar sua inversão. Segundo Karr, Yakushin e Nocolosi (2000), existem diversas abordagens para resolver problemas inversos em geral incluindo linearização, layer-stripping, aproximações sucessivas, porém a mais robusta é a abordagem funcional. Esta baseia-se na mesma ideia do Método dos Mínimos Quadrados, ou seja, consiste em medir a discrepância entre dados disponíveis do problema e dados obtidos pelo modelo matemático. Um funcional de erro, que depende das incógnitas do problema inverso, é responsável pela medida da discrepância. Por fim, um método de otimização deve ser aplicado para que se alcance o mínimo global do funcional de erro. Espera-se que este ponto seja a solução do problema inverso.

No entanto, como os problemas inversos são conhecidos por serem problemas intrinsecamente mal postos, não se tem a garantia de unicidade ou estabilidade da solução na presença de erros experimentais. A questão da existência de solução está resolvida pois o problema real apresenta solução e então procuramos por uma solução aproximada. Quanto à unicidade, se não for satisfeita, deve-se procurar outras restrições adicionais que garantam a unicidade. A questão mais complicada é a dependência contínua dos dados de entrada, e o efeito desse mau condicionamento é amenizado por técnicas de regularização, sendo a mais famosa a regularização de Tikhonov (TIKHONOV, 1963), ou pela estratégia de medidas redundantes.

O funcional de erro é, na maioria das aplicações, não convexo, apresentando múltiplos mínimos locais. Assim, sua minimização requer um método de otimização robusto, capaz de escapar dos mínimos locais e encontrar o mínimo global. Existem

diversos métodos de otimização na literatura e estão divididos em dois grupos: métodos determinísticos e métodos estocásticos. No caso dos métodos determinísticos, as soluções candidatas são geradas por algum método iterativo que, a cada iteração, direcione as buscas para o menor/maior valor da função objetivo. Entre os métodos determinísticos, os mais conhecidos são, o método da inclinação máxima, método de Newton e Gradiente Conjugado. Estes métodos são baseados na inclinação do gradiente da função e, portanto, são de busca local. Convergem para o mínimo global apenas sob condições favoráveis como uma boa aproximação inicial e convexidade da função em uma vizinhança do mínimo.

Por outro lado, nos métodos estocásticos, a busca pela nova solução é gerada e aceita de forma aleatória por meio de uma distribuição de probabilidade pré-definida. Dessa forma, a estocasticidade permite que o processo de buscas escape de mínimos locais e tenha maior probabilidade de convergir para o mínimo global. Os métodos estocásticos mais conhecidos são, Algoritmos Genéticos, Colônia de formigas, *Simulated Annealing* e Busca Tabu. Todos estes métodos são, em geral, estáveis, mas requerem alto tempo de processamento computacional e podem eventualmente cair em pontos de mínimo locais que não representam a melhor solução possível para o problema.

Para este trabalho, optamos pelo *Simulated Annealing* por ser bastante utilizado em problemas inversos, por exemplo no recente artigo (MENIN; BAUCH, 2018) e por possuir uma quantidade relativamente pequena de parâmetros para ser ajustado com objetivo de conseguir uma alta taxa de convergência em um tempo de processamento razoável.

Ressaltamos que o objetivo do nosso trabalho é tratar o problema matemático desvinculado da aplicação prática que gerou o modelo. Assim, as técnicas adotadas nos levam a um método que a princípio pode ser aplicado em qualquer problema inverso associado às EDIs. Frente a uma aplicação específica, qualquer informação adicional conhecida poderá ser incluída no método, aperfeiçoando-o e levando a soluções mais precisas.

3.2 Identificação de parâmetros em EDIs

Retomamos o sistema de equações diferenciais impulsivas com impulsos em tempos pré-fixados, Eq. (1.29), repetido aqui

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & t \in [t_0, a], t \neq \tau_k, k = 1, 2, \dots, K \\ \Delta \mathbf{x}(\tau_k) = \mathbf{I}_k(\mathbf{x}(\tau_k)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}. \end{cases} \quad (3.5)$$

O problema direto de (3.5) consiste na determinação da solução do sistema de EDIs, isto é, uma função contínua por partes, $\mathbf{x}(t)$, $t \in [t_0, a]$, ou simplesmente o valor da solução no último ponto do intervalo $\mathbf{x}(a)$, a partir do conhecimento da equação diferencial,

das condições iniciais $(t_0, \boldsymbol{\eta})$, dos momentos do impulso τ_k e dos saltos $\mathbf{I}_k$. O operador (3.1) fica

$$\mathfrak{S}(\mathbf{f}, t_0, a, \boldsymbol{\eta}, I_1, \dots, I_K, \tau_1, \dots, \tau_K) = \mathbf{x}(a). \quad (3.6)$$

Podemos observar ao menos três problemas inversos associados a este problema direto. São eles:

- (a) Problema de identificação dos saltos na solução: dada a equação diferencial, o intervalo de estudo, os momentos do impulso e a solução no ponto final, determinar os saltos da solução

$$\mathfrak{S}^{-1}(\mathbf{f}, t_0, a, \boldsymbol{\eta}, \tau_1, \dots, \tau_K, \mathbf{x}(a)) = \{I_1, \dots, I_K\}; \quad (3.7)$$

- (b) Problema de identificação dos momentos de impulso: dada a equação diferencial, o intervalo de estudo, os saltos e a solução no ponto final, determinar os momentos corretos de aplicação dos saltos

$$\mathfrak{S}^{-1}(\mathbf{f}, t_0, a, \boldsymbol{\eta}, I_1, \dots, I_K, \mathbf{x}(a)) = \{\tau_1, \dots, \tau_K\}; \quad (3.8)$$

- (c) Problema de identificação dos momentos de impulso e dos saltos: ambos conjuntos saltos e momentos de impulso são desconhecidos

$$\mathfrak{S}^{-1}(\mathbf{f}, t_0, a, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}(a)) = \{\tau_1, \dots, \tau_K, I_1, \dots, I_K\}. \quad (3.9)$$

Observe que em todos os casos estamos considerando fixa a quantidade de momentos de impulso. Um problema inverso mais completo seria o de determinar também essa quantidade.

Para facilitar a notação, vamos separar os parâmetros que são conhecidos dos parâmetros que são incógnitas usando dois vetores $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\xi}$, respectivamente. Se as incógnitas são os saltos, por exemplo, temos $\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{f}, t_0, a, \boldsymbol{\eta}, \tau_1, \dots, \tau_K)$ e $\boldsymbol{\xi} = (I_1, \dots, I_K)$. Dessa forma, (3.6) é reescrito por

$$\mathfrak{S}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}(a), \quad (3.10)$$

enquanto que, de forma geral, os problemas inversos são reescritos por

$$\mathfrak{S}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}(a)) = \boldsymbol{\xi}. \quad (3.11)$$

3.2 Abordagem funcional

Com a finalidade de estimar os parâmetros referentes ao problema considerado (3.7), (3.8) ou (3.9), construímos um funcional de erro que confronta informações do problema real com dados do modelo matemático.

Para os dados reais, consideramos as soluções exatas dos exemplos, obtidas por meio da solução analítica dos problemas de valor inicial de EDIs, vista na Seção 1.3, supomos que numa aplicação prática essas informações possam ser medidas experimentalmente. Denominamos essa informação por $\mathbf{x}_{real}$, que no nosso caso, $\mathbf{x}_{real} = \mathbf{x}(a)$.

Para os dados do modelo matemático, resolvemos o problema direto (3.6) pelo Método de Runge-Kutta de quarta ordem, descrito na Seção 2.3, com valores aproximados para as incógnitas, obtendo uma aproximação $\mathbf{x}_{num}$ de $\mathbf{x}_{real}$. Os valores aproximados são chamados de prospectivos e vamos denotá-los pelo vetor $\boldsymbol{\xi}_{prosp}$. Assim, $\mathbf{x}_{num}$ é obtido por

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}_{prosp}) = \mathbf{x}_{num}. \quad (3.12)$$

Essas duas medidas são confrontadas no funcional de erro definido pela soma dos valores absolutos da diferença entre as coordenadas delas, ou seja,

$$E(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_{real} - \mathbf{x}_{num}^{(i)}|. \quad (3.13)$$

A Figura 14 mostra um esquema para o processo de resolução do problema inverso (3.11). Supõe o conjunto de parâmetros com valores aproximados, $\boldsymbol{\xi}_{prosp}$, com esses valores resolvemos o problema direto, obtendo a solução $\mathbf{x}_{num}$. O funcional de erro compara esse valor obtido com a solução $\mathbf{x}_{real}$. Um algoritmo de otimização modifica o conjunto de valores aproximados para as incógnitas e inicia-se o processo novamente. O processo é interrompido segundo os critérios de parada do método de otimização. O resultado encontrado $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ é o valor ótimo para o problema em questão.

É de se esperar que se $\mathbf{x}_{num} \approx \mathbf{x}_{real}$, $\bar{\boldsymbol{\xi}} \approx \boldsymbol{\xi}_{real}$, isto é, o conjunto de parâmetros obtidos pela resolução do problema inverso é uma boa aproximação para o respectivo conjunto de parâmetros real.

3.2 *Simulated Annealing*

Simulated Annealing (SA), traduzido para o português como Recozimento Simulado, é um método estocástico de otimização global apresentado por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983).

Annealing é um processo utilizado para fundir um metal, em que este é aquecido a uma temperatura elevada seguido de um gradual resfriamento. O processo de aquecimento do metal até seu ponto de fusão altera a energia da estrutura, permitindo que os átomos do sistema se desloquem aleatoriamente através de energias mais altas enquanto que o resfriamento lento e gradativo, permite que o sistema se reorganize e forme uma estrutura uniforme com energia mínima.

Figura 14 – Esquema da resolução do problema inverso de EDIs pela abordagem funcional.

Em analogia com o processo físico, no algoritmo SA a energia corresponde a função objetivo $E(\xi)$ do problema de otimização (3.13) e o vetor ξ representa uma dada configuração dos átomos do sistema. Assim, temos o problema

$$\min_{\xi} E(\xi), \quad \xi \in S, \quad (3.14)$$

onde $E : S \rightarrow \mathbb{R}$ e S é o espaço de busca. Em termos práticos, estamos sempre trabalhando em um espaço métrico de dimensão finita, $S \subset \mathbb{R}^n$, n número de incógnitas.

O processo de minimização é realizado por níveis, simulando os níveis de temperatura no resfriamento. Em cada nível, dado um ponto $\xi_{prosp} \in S$, vários pontos na vizinhança de ξ_{prosp} são gerados e o correspondente valor de E é calculado. Cada ponto gerado é aceito ou rejeitado de acordo com uma certa probabilidade. Após um número fixo de pontos na vizinhança, modifica-se o nível, ou seja, a temperatura é resfriada e o processo iterativo de busca por novos pontos se reinicia.

O ajuste adequado dos parâmetros e operadores do SA são importantes para que

o método tenha uma alta porcentagem de sucesso, com soluções precisas e em tempo computacional aceitável. Entre eles estão

- a escolha da temperatura inicial;
- o cronograma de resfriamento da temperatura;
- a geração de novas aproximações para a solução (visitação);
- a quantidade de novas soluções a cada temperatura;
- a probabilidade de aceitação de novas soluções.

As escolhas para estes parâmetros foram e ainda têm sido bastante estudadas (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016). Vamos nos ater a descrever apenas as nossas escolhas que foram baseadas no método original e na simplicidade de implementação.

O processo parte de uma temperatura T_0 pré-definida. A solução inicial ξ_{old} é gerada aleatoriamente em S com distribuição uniforme. As demais soluções são geradas por meio de uma distribuição normal com média em ξ_{old} e um desvio padrão dado pela visita σ , que pode ser constante ao longo do processo ou diminuir com o resfriamento da temperatura, ou seja,

$$\xi_{new} = N(\xi_{old}, \sigma), \quad (3.15)$$

desde que $\xi_{new} \in S$.

A aceitação de novas soluções segue o critério de Metropolis (METROPOLIS et al., 1953). As soluções que diminuem o valor da função objetivo são aceitas com probabilidade 1. Já as soluções que aumentam o valor da função objetivo são aceitas dependendo da diferença entre os valores retornados pela função objetivo para as soluções ξ_{old} e ξ_{new} , $\Delta E = E(\xi_{new}) - E(\xi_{old})$, e da temperatura atual do processo T . Com isso, a nova solução é aceita com probabilidade

$$p(\xi_{old} \leftarrow \xi_{new}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta E \leq 0, \\ e^{-\frac{\Delta E}{T}}, & \text{se } \Delta E > 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Quando $E(\xi_{new}) > E(\xi_{old})$, é possível notar que, quanto maior for o aumento na função objetivo devido à nova solução, menor será a probabilidade dela ser aceita. Já em relação à temperatura, quando a temperatura é alta, a probabilidade de aceitar soluções que aumentam a função objetivo é maior e o algoritmo consegue realizar uma busca mais ampla no espaço de soluções. À medida que a temperatura diminui, essa probabilidade torna-se menor e a busca fica cada vez mais local. Por fim, quando a temperatura for suficientemente pequena ($T \rightarrow 0$), nenhuma solução que aumente a função objetivo é mais aceita.

O cronograma de resfriamento assume um papel fundamental no algoritmo SA. De fato, uma diminuição excessivamente rápida da temperatura acaba restringindo a busca e consequentemente há mais chances do processo ficar preso em um mínimo local. Por outro lado, um resfriamento muito lento pode onerar computacionalmente o processo de busca (SCHNEIDER; PUCHTA, 2010). Com isso, a escolha de um resfriamento adequado torna o algoritmo capaz de escapar de mínimos locais e encontrar o mínimo global num tempo computacionalmente aceitável. O cronograma de resfriamento adotado foi o geométrico proposto por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983). Neste, a temperatura $T^{(t)}$ cai exponencialmente com o tempo t

$$T^{(t)} = \alpha^t T^{(0)}, \quad (3.17)$$

onde $T^{(0)}$ é a temperatura inicial e $\alpha \in (0, 1)$ é a taxa de resfriamento. Dessa forma, a escolha de α também se torna importante.

O SA percorre todos os níveis de temperatura, de $t = 1$ até um $t = t_{max}$, número inteiro dado. Este é o único critério de parada que utilizamos, embora é comum a utilização de critérios que levem em conta a falta de movimentação das soluções após um certo período de tempo.

Existem estudos teóricos sobre o SA que tratam da convergência da sequência de soluções para o mínimo global, por exemplo, olhando para essa sequência como uma cadeia de Markov homogênea. Mais detalhes em Haeser e Ruggiero (2008). Este não é o foco do nosso trabalho. Também não é o foco obter um método de otimização ideal. Pretendemos com o SA apenas apresentar uma opção para encontrar o ponto de mínimo global. Em estudos posteriores, será necessária uma análise mais profunda desta etapa de resolução dos problemas inversos para explorar problemas diferenciados.

Resumidamente, os passos de um programa computacional que busca a solução de um problema inverso associado a uma EDI, pelo método *Simulated Annealing*, são os seguintes.

Dados de entrada:

dim: quantidade de variáveis a serem otimizadas

S: matriz que delimita o espaço de busca, formada por *dim* linhas e 2 colunas, armazena em cada linha *i* um intervalo que contenha a solução da variável *i*, sendo na primeira coluna o valor mínimo e na segunda coluna o máximo, isto é, $\xi^{(i)} \in [S(i, 1), S(i, 2)]$

direto: é uma função que recebe os valores prospectivos das incógnitas e retorna o erro, função objetivo

α : parâmetro do cronograma de resfriamento
 r : quantidade de novas soluções geradas a cada temperatura
 $T0$: temperatura inicial
 t_{max} : quantidade de níveis de temperatura
 σ : desvio-padrão para geração de novas soluções

Passo 1. Inicialização das variáveis

$T_v = T0$: temperatura em cada nível

X : variável aleatória

Para p de 1 a dim (Geração da solução inicial)

$rand$ = número aleatório entre 0 e 1, dist. uniforme

$$\xi_{old}^{(p)} = S(p, 1) + (S(p, 2) - S(p, 1)) * rand$$

fim

$f_{old} = direto(\xi_{old})$ (cálculo da função objetivo)

Passo 2. Percorre os níveis de temperatura

Para t de 1 a t_{max}

Para i de 1 a r

Passo 2.1. Gera r soluções

Para p de 1 a dim

$$\xi_{new}^{(p)} = N(\xi_{old}^{(p)}, \sigma) \text{ e } \xi_{new}^{(p)} \in [S(p, 1), S(p, 2)]$$

fim

$f_{new} = direto(\xi_{new})$

$$\Delta_f = f_{new} - f_{old}$$

Passo 2.2. Aplica o critério de aceitação

Se $\Delta_f \leq 0$ ou $\exp(-\Delta_f/T_v) > X$

$$\xi_{old} = \xi_{new}$$

$$f_{old} = f_{new}$$

fim

$$T_v = \alpha^t * T0$$

fim

Saída: vetor ξ_{old} e escalar f_{old}

O *Simulated Annealing* foi implementado em Matlab seguindo os passos acima. Para a função *direto*, implementamos o algoritmo da Seção 2.3 substituindo os vetores t e x por variáveis escalares e descartando o vetor x_{saida} , uma vez que o único valor que precisa retornar é o último valor de x que corresponde ao valor da solução no último ponto do intervalo considerado. Essa função também calcula o funcional de erro pela fórmula (3.13).

Os resultados obtidos estão no capítulo seguinte.

Resultados

Neste capítulo, apresentamos os testes numéricos realizados. Primeiramente exploramos as superfícies de erro com objetivo de verificar a existência do ponto de mínimo global e analisar as dificuldades que o método de otimização enfrentará ao ser aplicado. Em seguida, aplicamos o método de otimização *Simulated Annealing* descrito na Seção 3.2.2. Para finalizar, incluímos alguns testes sobre regularização bem específicos. Os programas foram implementados em Matlab.

Vamos explorar três problemas impulsivos. Os dois primeiros baseado no Exemplo 1, com uma equação diferencial e dois momentos de impulso. O segundo problema, baseado no Exemplo 4 que possui duas equações diferenciais e apenas um momento de impulso.

Problema-teste 1a.

$$\begin{cases} x' = x - t^2 + 1, & t \in [0, 3] \quad t \neq \tau_1, \tau_2, \\ x(0) = 0.5, \\ I_1(x(\tau_1)) = c_1, \quad I_2(x(\tau_2)) = c_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Encontrar valores aproximados para τ_1 , τ_2 , c_1 e c_2 , dada a informação real disponível, $x(3) = 16.064541$, referente à solução exata obtida com os momentos de impulso, $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$, e os operadores impulsivos $I_1(x) = 1$ e $I_2(x) = 1$.

Em termos dos operadores direto (3.6) e inverso (3.9), temos

$$\mathfrak{S}(\mathbf{f}, t_0, a, \boldsymbol{\eta}, \tau_1, \tau_2, c_1, c_2) = \mathbf{x}(a)$$

e

$$\mathfrak{S}^{-1}(\mathbf{f}, t_0, a, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}(a)) = (\tau_1, \tau_2, c_1, c_2),$$

ou mais especificamente,

$$\mathfrak{S}(x - t^2 + 1', 0, 3, 0.5, 1, 2, 1, 1) = 16.064541 \quad (4.2)$$

e

$$\mathfrak{S}^{-1}(x - t^2 + 1', 0, 3, 0.5, 16.064541) = (1, 2, 1, 1). \quad (4.3)$$

Problema-teste 1b.

Encontrar valores aproximados para τ_1 , τ_2 , c_1 e c_2 , dada a informação real disponível, $x(3) = 73.835718$, referente à solução exata (1.42) obtida com os momentos de impulso, $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$, e os operadores impulsivos $I_1(x) = x^2 + 1$ e $I_2(x) = \ln(x)$. De onde tiramos os valores reais $c_1 = I_1(x(1)) \approx (2.640859)^2 + 1 \approx 7.974137$ e $c_2 = I_2(x(2)) \approx \ln(26.981423) \approx 3.295149$.

Em termos dos operadores direto e inverso, temos

$$\mathfrak{S}(x - t^2 + 1', 0, 3, 0.5, 1, 2, x^2 + 1', \ln(x)') = 73.835718 \quad (4.4)$$

e

$$\mathfrak{S}^{-1}(x - t^2 + 1', 0, 3, 0.5, 73.835718) = (1, 2, 7.974137, 3.295149). \quad (4.5)$$

Observe que este exemplo é bem mais complicado que o anterior, uma vez que os operadores impulsivos dependem da solução calculada nos momentos de impulso, ou seja, quando variamos os momentos de impulso, estamos também variando as incógnitas c_1 e c_2 .

Problema-teste 2.

$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x & t \in [0, 2] \\ I_1(x(\tau_1)) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} x, \\ x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.6)$$

Encontrar valores aproximados para τ_1 , c_{11} , c_{12} , c_{21} e c_{22} , dada as informações reais disponíveis, $x_1(2) = 19.4592$ e $x_2(2) = -10.0948$, referentes à solução exata (1.49) obtida com o momento de impulso, $\tau_1 = 1$ e o operador impulsivo $I_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 3.6565 \\ 0 & -0.8020 \end{bmatrix}$.

Em termos dos operadores direto e inverso, temos

$$\mathfrak{S}\left(\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, 0, 2, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, 1, \begin{bmatrix} 1 & 3.6565 \\ 0 & -0.8020 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 19.4592 \\ -10.0948 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e

$$\mathfrak{S}^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, 0, 2, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19.4592 \\ -10.0948 \end{bmatrix}\right) = (1, 1, 3.6565, 0, -0.8020). \quad (4.8)$$

4.1 Superfícies de erro e busca exaustiva

As superfícies de erro são construídas variando as incógnitas dos problemas inversos em um espaço de busca discreto, formado por uma malha de pontos, calculando o valor da função objetivo, Eq. (3.13), em cada ponto e plotando esses pontos.

Já a busca exaustiva, consiste em calcular todos os valores da função objetivo dentro de uma região e tomar o valor mínimo encontrado. Aqui, realizamos a busca no mesmo espaço de busca discreto utilizado na construção das superfícies de erro.

No Problema-teste 1a, como não é possível plotar a superfície de erro variando as quatro incógnitas ao mesmo tempo, vamos observar cortes da superfície variando uma ou duas incógnitas e tomando as demais em seu valor exato. Consideramos como funcional de erro (3.13)

$$E^{(j)}(\boldsymbol{\xi}^{(j)}) = |x_{num}^{(j)} - 16.064541| \quad (4.9)$$

onde $x_{num}^{(j)}$ é obtido resolvendo um problema direto para cada vetor prospectivo, $\boldsymbol{\xi}^{(j)}$, de um vetor de incógnitas $\boldsymbol{\xi}$, sendo $j = 1, \dots, j_f$ e j_f é o número de ponto da malha. Usamos em geral um passo 0.1, em cada direção, para discretizar a região de busca. Para resolver os problemas diretos, usamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h = 0.01$ em todos os testes.

São exemplos dos problemas diretos prospectivos utilizados neste capítulo:

$$\Im('x - t^2 + 1', 0, 3, 0.5, 1, 2, c_{1,prosp}^{(j)}, 1) = x_{num}^{(j)} \quad (4.10)$$

para quando variamos apenas uma incógnita,

$$\Im('x - t^2 + 1', 0, 3, 0.5, 1, \tau_{2,prosp}^{(j_1)}, 1, c_{2,prosp}^{(j_2)}) = x_{num}^{(j)}, \quad (4.11)$$

para quando variamos duas incógnitas, e assim por diante.

A busca exaustiva do problema de minimização (3.14) para o funcional (4.9) fica

$$\min_{j=1, \dots, j_f} E^{(j)}.$$

Os testes realizados estão descritos a seguir, juntamente com os resultados das buscas exaustivas.

- 1) $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$ e $c_2 = 1$ fixos e c_1 variando no espaço de busca $[0, 5]$;

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.9123×10^{-9} , posição na malha = 11, que corresponde ao valor $c_1 = 1$;

- 2) $\tau_2 = 2$, $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$ fixos e τ_1 variando no espaço de busca $[0.1, 2]$;

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.9123×10^{-9} , posição na malha = 10, que corresponde ao valor $\tau_1 = 1$;

- 3) $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$ fixos e c_1 e c_2 variando no espaço de busca $[0, 5] \times [0, 5]$;

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.9123×10^{-9} , posição na malha = (11,11), que corresponde ao valores $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$;

- 4) $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$ fixos e τ_1 e τ_2 variando no espaço de busca $[0.1, 1.5] \times [1.6, 3]$;
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.9123×10^{-9} , posição na malha = (10,5), que corresponde ao valores $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$;
- 5) $\tau_1 = 1$ e $c_1 = 1$ fixos e τ_2 e c_2 variando no espaço de busca $[1.6, 3] \times [0, 2]$;
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.9123×10^{-9} , posição na malha = (5,11), que corresponde ao valores $\tau_2 = 2$ e $c_2 = 1$;
- 6) Variando as quatro incógnitas simultaneamente em $[0.1, 1.5] \times [1.6, 3] \times [0, 2] \times [0, 2]$.
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.9123×10^{-9} , posição na malha = (10,5,11,11), que corresponde ao valores $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$.

As superfícies de erro são apresentados na Figura 15, onde é possível observar a presença do mínimo global bastante pronunciado.

Para o Problema-teste 1b, repetimos os testes anteriores, alterando o funcional de erro para

$$E^{(j)}(\boldsymbol{\xi}^{(j)}) = |x_{num}^{(j)} - 73.835718|$$

e os espaços de busca de forma a ficarem compatíveis a este caso. Para c_1 incógnita, o espaço de busca é $[6.5, 9]$, para c_2 , $[2, 4.5]$, para τ_1 , $[0.1, 1.5]$, e para τ_2 , $[1.6, 3]$.

Repetimos os testes acima e incluímos mais alguns. Os resultados foram as seguintes:

- 1) $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$ e $I_2(x) = \ln(x)$ conhecidos
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 0.1981, posição na malha = 16, que corresponde ao valor $c_1 = 8.0$;
- 2) $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$ e $I_1(x) = x^2 + 1$ conhecidos
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 0.0132, posição na malha = 14, que corresponde ao valor $c_2 = 3.3$;
- 3) $\tau_2 = 2$, $I_1(x) = x^2 + 1$ e $I_2(x) = \ln(x)$ conhecidos
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.13×10^{-4} , posição na malha = 10, que corresponde ao valor $\tau_1 = 1$;
- 4) $\tau_1 = 1$, $I_1(x) = x^2 + 1$ e $I_2(x) = \ln(x)$ conhecidos
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 2.13×10^{-4} , posição na malha = 5, que corresponde ao valor $\tau_2 = 2$;
- 5) $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$ conhecidos
 Resultado: valor mínimo da função objetivo = 0.009, posição na malha = (15,16), que corresponde ao valores $c_1 = 7.9$ e $c_2 = 3.5$;

Figura 15 – Superfícies de erro relacionadas ao Problema-teste 1a. em função de: (a) c_1 , (b) τ_1 , (c) c_1 e c_2 , em escala logarítmica, (d) τ_1 e τ_2 , em escala logarítmica, e (e) τ_2 e c_2 , em escala logarítmica.

6) $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$ conhecidos

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 3.6×10^{-6} , posição na malha = (10,5), que corresponde ao valores $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 2$;

7) $\tau_2 = 2$ e $I_2(x) = x^2 + 1$ conhecidos

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 0.0886, posição na malha = (11,24), que corresponde ao valores $\tau_1 = 1.1$ e $c_1 = 8.8$;

8) $\tau_1 = 1$ e $I_1(x) = x^2 + 1$ conhecidos

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 0.0072, posição na malha = (3,8), que corresponde ao valores $\tau_2 = 1.8$ e $c_2 = 2.7$;

9) Variando as quatro incógnitas simultaneamente

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 1.8×10^{-4} , posição na malha = (8,10,5,15), que corresponde ao valores $\tau_1 = 0.8$, $\tau_2 = 2.5$, $c_1 = 6.9$ e $c_2 = 3.4$.

As superfícies de erro são apresentados na Figura 16, onde é possível observar a presença de um mínimo global bastante pronunciado e múltiplos mínimos locais. O interesse aqui está em observar se os impulsos dependendo da solução alteram o comportamento do funcional de erro.

No teste 1) observamos que a resposta está entre 7.9 e 8 (o tamanho do passo é 0.1), porém em 8 o valor do funcional de erro é menor. O mesmo acontece no teste 2) em que a resposta está entre 3.2 e 3.3, sendo que em 3.3 o valor do funcional de erro é menor. Como consequência dos valores exatos de c_1 e c_2 não serem pontos da malha, a solução é apenas uma aproximação e os valores encontrados para o funcional de erro são consideravelmente maiores quando comparando com o teste 1) do Problema 1a).

Nos testes 3), 4) e 6), os valores de τ_1 e τ_2 foram obtidos exatamente. A explicação para o valor do erro ser ligeiramente maior quando comparado com o teste 2) do Problema 1a) são decorrentes do número de casas decimais utilizado nos cálculos.

Nos testes 5), 7), 8) e 9), a combinação dos valores das incógnitas leva a uma solução aproximada, de certo modo, distante da exata. No entanto, com o espaço de busca disponível com espaçamento entre os pontos de 0.1, os resultados apresentados nestes testes correspondem às combinações que possuem menor valor para o funcional de erro.

Refinando a malha para o espaço de busca, com passo 0.01, obtemos $c_1 = 7.98$ e $c_2 = 3.27$ com valor da função objetivo 0.0077 e, com passo 0.001, $c_1 = 7.977$ e $c_2 = 3.2810$ com valor da função objetivo 7.6×10^{-5} , o que indica que podemos utilizar um método de otimização em um espaço de busca real para encontrar aproximações para estes valores. No entanto, diferentemente do Problema 1a, este não terá a solução exata encontrada pois c_1 e c_2 são números irracionais, já que vêm de uma soma de parcelas com o número e .

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Figura 16 – Superfícies de erro relacionadas ao Problema-teste 1b. em função de: (a) c_1 , (b) τ_1 , (c) c_1 e c_2 , em escala logarítmica, (d) τ_1 e τ_2 , em escala logarítmica e (e) τ_2 e c_2 , em escala logarítmica.

Também podemos observar que o problema (4.5) possui poucas informações conhecidas e, proporcionalmente, uma grande quantidade de incógnitas, o que faz com que diversas combinações entre as incógnitas satisfaçam o problema inverso. É um caso de não unicidade de solução, pelo menos dentro de uma margem de erro.

Para o Problema-teste 2, utilizamos o funcional de erro

$$E^{(j)}(\boldsymbol{\xi}^{(j)}) = |x_{1,num}^{(j)} - 19.4592| + |x_{2,num}^{(j)} - (-10.0948)|$$

e consideramos $\tau_1 \in [0, 2]$ e os elementos da matriz, $a_{ij} \in [-1, 4]$, $i, j = 1, 2$.

As dificuldades encontradas aqui foram semelhantes às do Problema 1b, uma vez que o salto depende da solução. As combinações de incógnitas para gerar as superfícies de erro e a busca exaustiva são:

- 1) incógnitas τ_1 e c_{11} ou τ_1 e c_{12} ou τ_1 e c_{21} ou τ_1 e c_{22} ;

Resultado: em todos os casos a busca exaustiva chegou o mais próximo possível da solução com uma casa decimal.

- 2) incógnitas estão na mesma coluna c_{11} e c_{21} ou c_{12} e c_{22} (uma no operador I_1 e outra no operador I_2);

Resultado: nos dois casos a busca exaustiva chegou o mais próximo possível da solução com uma casa decimal.

- 3) incógnitas estão na mesma linha (ambas no mesmo operador) c_{11} e c_{12} ou c_{21} e c_{22}

Resultado: no primeiro caso, a solução encontrada foi $c_{11} = 0.4$ e $c_{12} = 2.5$ enquanto que no segundo caso, a solução encontrada foi $c_{21} = 0$ e $c_{22} = -0.8$, melhor solução possível com uma casa decimal.

- 4) As 5 incógnitas variando simultaneamente

Resultado: valor mínimo da função objetivo = 0.037006692626404, que corresponde aos valores $c_{11} = 0.5$, $c_{12} = 3$, $c_{21} = -0.5$, $c_{22} = -1.5$ e $\tau_1 = 0.5$.

A matriz que aparece no operador impulsivo, pode ser desmembrada em dois operadores, $I_1(x_1, x_2) = x_1 + 3.6565x_2$ e $I_2(x_1, x_2) = -0.8020x_2$. Quando as incógnitas estão na coluna da matriz, o problema inverso tem informação parcial de cada operador porém, quando as duas incógnitas estão na mesma linha, conhecemos um operador mas não sabemos nada a respeito do outro. Isso pode explicar o erro ocorrido na tentativa de encontrar simultaneamente c_{11} e c_{12} .

Algumas superfícies de erro do Problema-teste 2 estão ilustradas na Figura 17. Pode-se observar que, como nos demais problemas, a superfície apresenta vários tipos de dificuldades para o método de otimização alcançar o mínimo global. Possui, por exemplo,

Figura 17 – Superfícies de erro relacionadas ao Problema-teste 2. em função de: (a) τ_1 e c_{22} , em escala logarítmica, (b) c_{11} e c_{21} , em escala logarítmica, e (c) c_{21} e c_{22} , em escala logarítmica.

múltiplos mínimos locais, regiões quase planas e um estreito canal contendo o mínimo global.

4.2 Aplicando o método *Simulated Annealing*

Implementamos o *Simulated Annealing* conforme descrito na Seção 3.2.2 e buscamos pelos pontos de mínimo global dos testes da Seção 4.1. Para os Problemas-testes 1a e 1b, fizemos uma análise quantitativa, executando cada teste 100 vezes e calculando a porcentagem de êxito na resposta, sendo considerado êxito quando a distância euclidiana entre a solução encontrada e a exata ficou abaixo de 10^{-1} . Para o Problema-teste 2, fizemos uma análise qualitativa, observando se a solução obtida pelo programa está tendendo à solução exata.

Em geral, utilizamos os seguintes parâmetros: o número máximo de iterações $t_{max} = 300$, número de tentativas de novas soluções a cada iteração $r = 100$, taxa de resfriamento $\alpha = 0.9$ e temperatura inicial $T^{(0)} = 50$.

Problema-teste 1a.

Seguindo a numeração dos testes realizados na Seção 4.1, os resultados obtidos são:

- 1) 100% de êxito, melhor valor encontrado é $c_1 = 1.0000$, com valor da função objetivo 3.1276×10^{-5} e distância = 4.2332×10^{-6} .
- 2) 100% de êxito, melhor valor encontrado é $\tau_1 = 0.9996$, com valor da função objetivo 2.9123×10^{-9} e distância = 3.8433×10^{-4} .
- 3) 75% melhor valor encontrado é $c_1 = 1.0002$ e $c_2 = 1.0003$, com valor da função objetivo 2.8294×10^{-3} e distância = 4.3087×10^{-4} .
- 4) 100% de êxito, melhor valor encontrado é $\tau_1 = 0.9949$ e $\tau_2 = 1.9958$, com valor da função objetivo 2.9123×10^{-9} e distância = 6.6×10^{-3} .
- 5) 90% de êxito, melhor valor encontrado é $\tau_2 = 1.999$ e $c_2 = 1.0000$, com valor da função objetivo 9.9×10^{-5} e distância = 6.6×10^{-3} .
- 6) O melhor conjunto de valores encontrado é $\tau_1 = 0.7323$, $\tau_2 = 1.9429$, $c_1 = 1.0547$ e $c_2 = 1.0699$, com valor da função objetivo 4.8218×10^{-5} e distância = 0.2877.

Problema-teste 1b.

Apresentamos resultados para 5 dos 9 testes realizados na Seção 4.1, seguindo a numeração prévia.

- 1) 100% de êxito, melhor valor encontrado é $c_1 = 7.9741$, com valor da função objetivo 3.1629×10^{-5} e distância = 4.3002×10^{-6} .
- 3) 100% de êxito, melhor valor encontrado é $\tau_1 = 0.9990$, com valor da função objetivo menor que 10^{-10} e distância menor que 10^{-3} .
- 5) 90% de êxito, melhor valor encontrado é $c_1 = 7.9427$ e $c_2 = 3.3812$, com valor da função objetivo 1.3893×10^{-3} e distância = 9.1614×10^{-2} .
- 6) 100% de êxito, melhor valor encontrado é $\tau_1 = 0.9985$ e $\tau_2 = 1.9935$, com valor da função objetivo menor que 10^{-10} e distância = 6.6708×10^{-3} .
- 8) 75% de êxito, melhor valor encontrado é $\tau_2 = 2.0088$ e $c_2 = 3.3288$, com valor da função objetivo 1.3411×10^{-3} e distância = 3.4783×10^{-2} .

Problema-teste 2.

Como as soluções não atingiram o nosso patamar de êxito, apresentamos quatro soluções típicas de cada teste nas Tabelas 5 - 8.

Tabela 5 – Resultados do Problema-teste 2. Teste 1, incógnitas τ_1 e c_{22} .

Teste 1	τ_1	c_{22}	função objetivo
sol.1	0.947633	-0.779876	0.059635612748
sol.2	1.054872	-0.824890	0.084939944253
sol.3	1.020228	-0.813716	0.043051034281
sol.4	1.048301	-0.821230	0.071026208837

Tabela 6 – Resultados do Problema-teste 2. Teste 2, incógnitas c_{11} e c_{21} .

Teste 2	c_{11}	c_{21}	função objetivo
sol.1	1.0364	0.0387	0.43321
sol.2	1.0077	0.0078	0.10273
sol.3	1.0078	0.0085	0.10145
sol.4	1.0378	0.0407	0.42896

Tabela 7 – Resultados do Problema-teste 2. Teste 3, incógnitas c_{11} e c_{12} .

Teste 3	c_{11}	c_{12}	função objetivo
sol.1	0.0451	-0.7149	0.000230
sol.2	-0.0875	-0.9705	0.000230
sol.3	0.0205	-0.7624	0.000229
sol.4	-0.0562	-0.9103	0.000230

Tabela 8 – Resultados do Problema-teste 2. Teste 4, com 5 incógnitas.

Teste 4	τ_1	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	função objetivo
sol.1	1.2420	1.3671	4.4159	0.0252	-0.7854	0.012690
sol.2	0.9185	1.3343	4.2727	0.2562	-0.2988	0.016396
sol.3	0.5225	1.0550	3.4238	-0.0519	-0.8386	0.196033
sol.4	0.7884	0.8138	3.2377	-0.0190	-0.7948	0.042091

Nos Problemas-teste 1a e 1b, os resultados foram bastante satisfatórios. Em relação ao Teste 6) do Problema 1a, apesar das soluções não terem atingido a distância estabelecida de 0.1 em nenhuma execução, as soluções encontradas apresentaram resultados razoáveis. No Problema-teste 2, as soluções também não atingem a distância estabelecida. Todavia, ao executarmos cada teste 4 vezes observamos que as soluções encontradas estão relativamente próximas da solução exata.

Além dos passos descritos na Seção 3.2.2, fizemos algumas variações do *Simulated Annealing* na tentativa de obter resultados mais precisos. Entre elas, inserimos uma busca inicial gerando r soluções aleatórias com distribuição uniforme pelo espaço todo. Dessas, tomamos a de menor valor da função objetivo para iniciar o *Simulated Annealing*. Observamos que são geradas soluções próximas à solução exata porém, não são escolhidas ou são trocadas por outras em outras regiões mas com valor menor da função objetivo. Isto acontece porque a bacia de atração do mínimo global é estreita e pontos ao redor do mínimo global possuem função objetivo maior. Em outras palavras, este problema inverso

é bastante sensível e mal condicionado.

Também fizemos um teste aplicando a técnica de medidas redundantes no Problema-teste 1a em uma tentativa de regularizar o funcional de erro, de forma que o mínimo global tenha mais destaque e suavize os mínimos locais. Calculamos a solução para dez condições iniciais diferentes, simulando um problema real no qual podemos obter tais medidas experimentalmente. As informações estão na Tabela 9 e a superfície de erro podem ser vista na Figura 18.

Tabela 9 – Medidas redundantes para o Problema 1a.

η	$x(3)$	η	$x(3)$
0.00	6.021801	1.25	31.128722
0.25	11.043185	1.50	36.150106
0.50	16.064541	1.75	41.171491
0.75	21.085954	2.00	46.192875
1.00	26.107338	2.25	51.214259

Figura 18 – Superfície de erro do Problema-teste 1a. com 10 medidas redundantes.

A função objetivo para dez medidas redundantes fica

$$E(c_1, c_2) = \frac{\sum_{red=1}^{10} |x_{num,red}(c_1, c_2) - x(3)_{red}|}{10}. \quad (4.12)$$

De fato, o ponto de mínimo global de (4.12) é o $(1, 1)$ e a função objetivo atinge 10^{-14} neste ponto. Porém, esta estratégia não trouxe alterações visuais na superfície de erro quando comparada com a Figura 15 (c), que utiliza apenas uma medida. Aplicado o *Simulated Annealing* no Problema 1a. Teste 3) com a função objetivo (4.12), entre os 100

testes executados, o melhor resultado encontrado é $c_1 = 0.9994$ e $c_2 = 1.0014$, com valor da função objetivo 5.4495×10^{-4} e distância $= 1.4770 \times 10^{-3}$. Esta solução não é melhor que a melhor encontrada no Teste 3) com apenas uma medida. Além disso, a porcentagem de êxitos ficou nos mesmos 75%. Portanto, a estratégia não surtiu o efeito desejado.

Observe que este foi o único teste com medidas redundantes realizado neste trabalho e que um estudo mais aprofundado neste sentido seria importante pois esta estratégia também tem a função de reduzir o efeito de ruídos em dados experimentais. Por exemplo, os dados da Tabela 9 foram arredondados após quatro casas decimais, o que pode ser visto como a situação em que dados experimentais estão contaminados por ruídos.

Uma estratégia de regularização bem específica que pode ser usada no Problema-teste 1a, é requerer que as incógnitas c_1 e c_2 estejam mais próximas possíveis, penalizando as que estiverem distantes. Fazemos isso acrescentando uma parcela na função objetivo (4.9)

$$E(c_1, c_2) = |x_{num}(c_1, c_2) - 16.064541| + |c_1 - c_2|. \quad (4.13)$$

A superfície de erro, Figura 19, não possui mínimos locais e possui uma bacia de atração do mínimo global mais definida e propícia para convergência do método de otimização. Este resultado mostra que a inclusão de informações exerce uma contribuição bastante positiva na resolução do problema.

É importante destacar que o *Simulated Annealing* obteve 100% de êxito na resolução do Teste 3) do Problema 1a. com o funcional de erro (4.13).

Figura 19 – Superfície da função objetivo com penalização para o Problema-teste 1a, em escala logarítmica.

Este tipo de informação é bastante particular mas pode ser encontrada em aplicações como na administração de medicamentos onde as doses (saltos) são em geral iguais. Porém,

a inclusão de informações particulares contradiz a proposta deste trabalho de descrevermos uma técnica desvinculada da aplicação. Além disso, essa condição é inútil quando os saltos são diferentes.

Conclusões

Neste trabalho, descrevemos as EDIs, em especial aquelas que possuem impulsos em tempos pré-fixado, revimos a teoria de EDOs no que diz respeito à existência, unicidade e continuação de soluções de sistemas de EDOs de primeira ordem para, em seguida, expandimos estes conceitos para sistemas de EDIs de primeira ordem. Também revisamos a teoria de métodos de passo simples para solução numérica de EDOs e nos aprofundamos no Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Este foi então adaptado para EDIs.

Apresentamos os problemas inversos associados às EDIs de uma forma geral e detalhada que não se encontra na literatura. Discutimos as dificuldades envolvidas na resolução dos problemas e revimos o método de otimização *Simulated Annealing*.

Apresentamos exemplos de problemas inversos para EDIs com quantidade finita de impulsos em momentos pré-fixados, onde o objetivo é encontrar aproximações para os saltos e/ou momentos de impulso. Para isso, um programa computacional foi totalmente desenvolvido no software Matlab.

Utilizamos o programa em três problemas-testes de naturezas diferentes e em três etapas, sendo as etapas:

- 1) visualização da superfície de erro, onde observamos em todos os testes a presença de um mínimo global bastante pronunciado porém, existem regiões quase planas, múltiplos mínimos locais e canais estreitos, que dificultam a convergência do método de otimização;
- 2) busca exaustiva, onde observamos que o mínimo global em geral corresponde à solução do problema inverso porém, como estamos restritos a uma malha discreta de pontos, o mínimo global pode não pertencer a esta malha e o resultado é um ponto de mínimo local que pode não estar próximo da solução procurada;
- 3) busca pelo mínimo global pelo *Simulated Annealing*, onde conseguimos resultados precisos para uma única incógnita, resultados satisfatórios na obtenção dos momentos

de impulso e resultados que estão relativamente próximas das soluções exatas quando as incógnitas são saltos.

Concluimos que a técnica apresentada para resolução dos problemas inversos associados às EDIs utilizando a abordagem funcional e o *Simulated Annealing* é promissora mas não é uma tarefa simples.

A técnica e os resultados obtidos ao longo deste estudo proporcionaram uma gama de possibilidades a serem trabalhadas em estudos futuros. Talvez a mais imediata seja a busca em outras bibliografias, novos estudos a fim de incrementar e refinar o desempenho do *Simulated Annealing* de forma a podermos incluir mais incógnitas no problema inverso.

Após isso, verificar a possibilidade de incluir técnicas de regularização, incluindo as clássicas e as medidas redundantes que possam auxiliar ou refinar o espaço de busca e assim levar a soluções mais precisas.

Outra possibilidade bem interessante é estender os conceitos e adaptá-los aos problemas com impulso em tempos variáveis.

Por fim, é importante avaliar a técnica em aplicações na área de Física, Química, Biologia, entre outras.

Referências

- ATKINSON, K.; HAN, W.; STEWART, D. E. *Numerical solution of ordinary differential equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- BAIER, R.; DONCHEV, T. Discrete approximation of impulsive differential inclusions. *Numerical functional analysis and optimization*, Taylor & Francis, v. 31, n. 6, p. 653–678, 2010.
- BELLMAN, R. Topics in pharmacokinetics, iii: Repeated dosage and impulse control. *Mathematical Biosciences*, Elsevier, v. 12, n. 1-2, p. 1–5, 1971.
- BRAUER, F.; NOHEL, J. A. *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*. [S.l.]: Benjamin, New York/Amsterdam, 1969.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise numérica*. [S.l.]: Cengage Learning, 2008.
- BUTCHER, J. C. The non-existence of ten stage eighth order explicit runge-kutta methods. *BIT Numerical Mathematics*, Springer, v. 25, n. 3, p. 521–540, 1985.
- CHEN, S.; QI, J.; JIN, M. Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments. *Computers & Mathematics with Applications*, Pergamon, v. 46, n. 8-9, p. 1281–1287, 2003.
- CORWIN, S.; THOMPSON, S.; WHITE, S. Solving odes and ddes with impulses. *JNAIAM J. Numer. Anal. Indust. Appl. Math*, v. 3, p. 139–149, 2008.
- ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. *Regularization of inverse problems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996. v. 375.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. [S.l.]: Pearson, 2006.
- FRIGON, M.; O'REGAN, D. Impulsive differential equations with variable times. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 26, n. 12, p. 1913–1922, 1996.
- GEAR, C. W. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 1971.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.
- HAESER, G.; RUGGIERO, M. G. Aspectos teóricos de simulated annealing e um algoritmo duas fases em otimização global. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 9, n. 3, p. 395–404, 2008.

- HAMZAH, N. et al. Impulsive differential equations by using euler method. *Appl. Math. Sci.*, v. 4, p. 3219–3232, 2010.
- HUI, J.; ZHU, D. Dynamic complexities for prey-dependent consumption integrated pest management models with impulsive effects. *Chaos, Solutions e Fractals*, v. 29, n. 2, p. 233–251, 2006.
- KARR, C. L.; YAKUSHIN, I.; NOCOLOSI, K. Solving inverse initial-value, boundary-value problems via genetic algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 13, p. 625–633, 2000.
- KIM, H.-C.; BOO, C.-J.; LEE, Y.-J. Image reconstruction using simulated annealing algorithm in eit. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, v. 3, n. 2, p. 211–216, 2005.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983.
- KRÜGER-THIEMER, E. *Formal theory of drug dosage regimens. I.* [S.l.]: Elsevier, 1966. v. 13. 212–235 p.
- LAKMECHE, A.; ARINO, O. Nonlinear mathematical model of pulsed-therapy of heterogeneous tumors. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 455–465, 2001.
- LAKSHMIKANTHAM, V. et al. *Theory of impulsive differential equations.* [S.l.]: World scientific, 1989. v. 6.
- LI, X.; BOHNER, M. Exponential synchronization of chaotic neural networks with mixed delays and impulsive effects via output coupling with delay feedback. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 52, n. 5-6, p. 643–653, 2010.
- LI, X.; BOHNER, M.; WANG, C.-K. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications. *Automatica*, Elsevier, v. 52, p. 173–178, 2015.
- LIU, M.; LIANG, H.; YANG, Z. Stability of runge-kutta methods in the numerical solution of linear impulsive differential equations. *Applied mathematics and computation*, Elsevier, v. 192, n. 2, p. 346–357, 2007.
- MARÃO, J. A. P. F. Controle impulsivo em sistemas dinâmicos: usando impulso para direcionar trajetórias de sistemas dinâmicos. 2011.
- MENIN, O. H.; BAUCH, C. T. Solving the patient zero inverse problem by using generalized simulated annealing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 490, p. 1513–1521, 2018.
- MENIN, O. H.; MARTINEZ, A. S.; ROLNIK, V. *Tomografia de impedância elétrica: métodos computacionais.* [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2016.
- METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, AIP, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953.

PLOTNIKOV, V.; KITANOV, N. On continuous dependence of solutions of impulsive differential inclusions and impulse control problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, Springer, v. 38, n. 5, p. 759–771, 2002.

RAN, X.; LIU, M.; ZHU, Q. Numerical methods for impulsive differential equation. *Mathematical and computer modelling*, Elsevier, v. 48, n. 1-2, p. 46–55, 2008.

RANDELOVIC, B.; STEFANOVIC, L.; DANKOVIC, B. Numerical solution of impulsive differential equations. *Facta Univ. Ser. Math. Inform*, Citeseer, v. 15, p. 101–111, 2000.

ROLNIK, V.; SELEGHIMJR, P. A specialized genetic algorithm for the electrical impedance tomography of two phase flows. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 28, n. 4, p. 378–390, 2006.

SAMOILENKO, A. M.; PERESTYUK, N. *Impulsive differential equations*. [S.l.]: world scientific, 1995.

SCHNEIDER, J. J.; PUCHTA, M. Investigation of acceptance simulated annealing—a simplified approach to adaptive cooling schedules. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 389, n. 24, p. 5822–5831, 2010.

SILVA, T. R. V. d. A influência de uma ação impulsiva no comportamento de soluções de equações diferenciais. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.

SINGH, P.; SRIVASTAVA, S. K.; SINGH, D. *Impulsive differential equations by using RK method of fourth order*. [S.l.]: Proceedings of the World Congress on Engineering, 2016.

SRIVASTAVA, S. K.; SHARMA, J. Solution of impulsive differential equations by using improved euler & runge kutta method. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, v. 24, 2015.

SUN, J.; QIAO, F.; WU, Q. Impulsive control of a financial model. *Physics Letters A*, v. 335, p. 282–288, 2005.

TIKHONOV, A. N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. In: *Dokl. Akad. Nauk*. [S.l.: s.n.], 1963. v. 151, p. 1035–1038.

VELHO, H. F. C. Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações—minicurso. *IV Encontro de Modelagem Computacional*. Nova Friburgo, RJ: IPRJ–UERJ, p. 1–17, 2001.