

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

**Método dos Elementos de Contorno para
Tomografia de Impedância Elétrica**

Olavo Henrique Menin

Ribeirão Preto
2009

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

Método dos Elementos de Contorno para Tomografia de Impedância Elétrica

Olavo Henrique Menin

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez

Ribeirão Preto, 2009.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA DOCUMENTO, POR MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Menin, Olavo H.

Método dos Elementos de Contorno para Tomografia de Impedância Elétrica / Olavo Henrique Menin; orientador Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez. – Ribeirão Preto/SP, 2009.

71 p.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

Imagem Médica, Tomografia de Impedância Elétrica, Método dos Elementos de Contorno, Problema Direto

Resumo

MENIN, OLAVO H.. **Método dos Elementos de Contorno para Tomografia de Impedância Elétrica**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2009.

A Tomografia de Impedância Elétrica (TIE) é uma técnica relativamente nova e que tem se mostrado bastante promissora na obtenção de imagens do interior de um corpo explorando as diferenças entre as propriedades elétricas (condutividade e permissividade) dos diferentes materiais que o constituem. A técnica se baseia na aplicação de um perfil de potencial elétrico ou de corrente elétrica no contorno da seção do corpo e na medição da resposta. A partir da relação entre os dados da excitação e da resposta, estima-se a distribuição de condutividade no interior do domínio, o que pode ser traduzido, computacionalmente, como uma imagem dessa seção. Apesar de promissora, a TIE ainda apresenta dificuldades, principalmente no que se refere à resolução da imagem e ao elevado tempo computacional necessário para sua reconstrução. A reconstrução de uma imagem na TIE é uma tarefa realizada em duas etapas: primeiro deve-se resolver o *problema direto*, que se resume na determinação dos potenciais elétricos no interior do domínio e das respostas no contorno a partir dos dados da excitação; segundo, deve-se resolver o *problema inverso*, que é a determinação da condutividade dos pontos internos do domínio a partir da relação entre os dados de excitação e resposta no contorno. Dependendo do método utilizado para a resolução do problema inverso, deve-se resolver o problema direto iterativamente inúmeras vezes, onerando computacionalmente o processo. Esse trabalho se propõe a aplicar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) como técnica de resolução numérica do problema direto. A vantagem é que o MEC requer apenas a discretização do contorno e não de todo o domínio, como ocorre com os outros métodos. Essa redução na dimensão do problema diminui consideravelmente o tamanho do sistema linear a ser resolvido a cada resolução do *problema direto*, o que pode reduzir satisfatoriamente o tempo computacional empregado na reconstrução de cada imagem. Para isso, foi implementado um programa em linguagem C que resolve o problema direto da TIE, especificamente para um domínio bidimensional, utilizando o MEC. O programa, a princípio, aceita formas genéricas de geometria do domínio e de condições de contorno. Foram realizados testes com domínios quadrado e circular e com diferentes tipos e valores para as condições de contorno. Os resultados obtidos foram comparados tanto com resultados analíticos como obtidos na literatura e foram bastante satisfatórios.

Palavras-chave: Imagem Médica, Tomografia de Impedância Elétrica, Método dos Elementos de Contorno, Problema Direto

Abstract

MENIN, OLAVO H.. **Boundary Element Method for Electrical Impedance Tomography.** Dissertation (Master) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2009.

The Electrical Impedance Tomography (EIT) is a quite new technique and has proved to be promising in obtaining inner body images exploring the differences between electric qualities (conductivity and permittivity) of different materials that constitute it. The technique is based on applying an electric potential profile or electric current on the boundary of the body section and by measuring the response. From the relation of data of excitement and response, the distribution of conductivity in the interior of the domain is assessed, what may be translated, computationally, as an image of that section. Although being promising, the EIT still presents difficulties, especially regarding image definition and the long time taken to its reconstruction. A EIT image reconstruction is a task done in two phases: first, one must solve the direct problem which is basically the determination of electrical potentials in the interior of the domain and the responses on the boundary from the excitation data; second, the inverse problem must be solved, which is the determination of conductivity of the inner points of the domain from the relation between the excitation data and the response on the boundary. Depending on the method used to solve the inverse problem, the direct problem must be iteratively solved countless times, burdening the process computationally. This work has the purpose of applying the Boundary Element Method (BEM) as numeric resolution technique of the direct problem. The advantage is that the BEM requires only the discretization of the boundary and not of the whole domain, as it occurs with the other methods. This decrease in the problem dimension reduces the size of the linear system to be solved at each resolution of the direct problem, what may reduce satisfactorily the computational time employed on the reconstruction of each image. For that, a C language program was implemented, which solves the direct problem of the EIT, particularly for a two dimensional domain, using the BEM. The program, at first, accepts generic forms of the domain geometry and of boundary conditions. Tests were performed with square and circular and with different types and values for the boundaries conditions. The obtained results were compared to analytic results as well as the ones obtained from literature and were quite satisfactory.

Keywords: Medical Image, Electrical Impedance Tomography, Boundary Element Method, Direct Problem

DEDICATÓRIA

*Ao início, meus pais Gilberto e Alice,
ao presente, minha esposa Carol,
e à eternidade, meus filhos Thales e Sofia*

*Meu desenho não representava um chapéu. Representava uma jibóia digerindo um elefante.
Desenhei então o interior da jibóia, a fim de que as pessoas grandes pudessem entender.*

("O Pequeno Príncipe" de Antoine de Saint-Exupéry)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e aos meus pais, Gilberto e Alice, por me concederem o milagre da vida.

À minha esposa e companheira de sempre e para sempre, Carol, pelo amor, apoio e compreensão nos momentos difíceis.

Aos meus filhos, Thales e Sofia, por toda felicidade que proporcionaram durante as fases mais árduas do trabalho e por dar sentido à minha vida.

Às minhas irmãs, Rita, Josélia e Adriana, companheiras desde que me conheço por gente e das quais me orgulho e me espelho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez, que me acolheu como orientando e sempre confiou no meu trabalho.

À Prof. Dra. Vanessa Rolnik Artioli, fundamental em tudo que foi realizado neste trabalho.

À todos professores e professoras que até hoje contribuíram para minha educação.

Aos colegas da pós-graduação, Leandro, Juliana, Breno, Marcelo, Rafael, Matheus, entre outros pela ajuda que prestaram durante as dificuldades.

À Nilza e todos do DFM pela ajuda e pelos esclarecimentos.

Ao colega André Botelho, que me incentivou a iniciar esse projeto.

Aos coordenadores das escolas em que trabalho, Gula, Denise, David, Ruth, Regina, Samuel e André pelos galhos quebrados durante esses dois anos.

Às minhas funcionárias, Fátima, Simone e Larissa, por darem a estrutura necessária em casa para a realização do trabalho.

Sumário

Resumo	p. 1
Abstract	p. 2
Lista de Abreviações	p. 8
Lista de Figuras	p. 9
Lista de Tabelas	p. 11
1 Introdução	p. 12
2 Imageamento em Medicina	p. 15
2.1 Raio-X	p. 16
2.2 Tomografia Computadorizada	p. 17
2.3 Ressonância Magnética Nuclear	p. 18
2.4 Ultra-sonografia	p. 19
2.5 Tomografia de Impedância Elétrica	p. 21
3 Formulação Matemática da TIE	p. 27
3.1 A equação principal da TIE	p. 27
3.2 As condições de contorno	p. 30
3.3 Problema direto e problema inverso	p. 33
4 O Método dos Elementos de Contorno	p. 39
4.1 O MEC aplicado a TIE	p. 39

<i>Sumário</i>	7
4.2 A formulação matemática	p.41
4.3 A equação integral sobre o contorno	p.44
5 Discretização e Implementação Computacional	p.47
5.1 A discretização do problema	p.47
5.2 O sistema linear	p.49
5.3 A solução analítica de F_1 e F_2	p.51
5.4 Implementação computacional	p.53
6 Simulações Numéricas e Resultados	p.56
7 Conclusões	p.66
Referências	p.68

Lista de Abreviações

TIE Tomografia de Impedância Elétrica

MEC Método dos Elementos de Contorno

MDF Método da Diferenças Finitas

MEF Método dos Elementos Finitos

TC Tomografia Computadorizada

US Ultra-sonografia

RMN Ressonância Magnética Nuclear

TEP Tomografia por Emissão de Pósitron

EDP Equação Diferencial Parcial

CC Condições de Contorno

PVC Problema de Valor de Contorno

Lista de Figuras

2.1	Imagem por raio-X da mão da esposa de Röntgen	p. 16
2.2	Esquema da Tomografia Computadorizada	p. 17
2.3	Ressonância Magnética Nuclear	p. 19
2.4	Esquema de um exame clínico de ultrasonografia	p. 20
2.5	Esquema de um exame usando Tomografia de Impedância Elétrica	p. 22
2.6	Tipos de campo de sensoriamento	p. 25
3.1	Domínio do problema da TIE	p. 30
3.2	Principais padrões de excitação/resposta	p. 32
3.3	Metodos numéricos para resolução de EDP	p. 34
3.4	Modos de discretização do domínio	p. 36
3.5	Esquema de otimização do funcional de erro	p. 38
4.1	Duas abordagens para o problema da TIE	p. 40
4.2	Domínio simples do MEC	p. 41
5.1	Domínio discretizado	p. 48
5.2	Domínio discretizado com inclusão interna	p. 55
6.1	Domínio quadrado de lado unitário discretizado pelo MDF	p. 57
6.2	Domínio dos PVCs	p. 59
6.3	Relação entre o erro relativo e o número de elementos de contorno	p. 60
6.4	Posição real da inclusão no interior do domínio	p. 61
6.5	Perfil triangular de potencial aplicado sobre o contorno	p. 62
6.6	Deslocamento da inclusão de prospecção ao longo da diagonal do domínio	p. 62
6.7	Valor normalizado do funcional de erro e para as oito posições da inclusão de prospecção	p. 63

6.8	Posição da inclusão de prospecção que minimiza o funcional de erro	p. 63
6.9	Perfil duplamente triangular de potencial aplicado sobre o contorno	p. 64
6.10	Tempo de execução do programa em função do número de elementos de contorno . .	p. 65
6.11	Tempo de execução do programa em função do número de pontos internos avaliados	p. 65
6.12	Tempo de execução do programa por ponto interno avaliado	p. 65

Lista de Tabelas

2.1	Impedância acústica de alguns materiais e tecidos biológicos	p. 21
2.2	Comparação entre a resistividade elétrica e o coeficiente de atenuação de raio-X . . .	p. 23
3.1	Unidades principais do problema da TIE no S.I.	p. 31
6.1	Distribuição de temperaturas calculada pelo MDF	p. 57
6.2	Distribuição de temperaturas calculada pelo MEC	p. 57
6.3	Decréscimo do erro relativo com o número de elementos de contorno	p. 59

1 *Introdução*

Não é uma tarefa fácil encontrar adjetivos que possam qualificar o grande desenvolvimento nas áreas de ciência e tecnologia ocorrido durante o século XX. Particularmente na área de saúde e medicina, os avanços produziram uma grande melhora na qualidade de vida e, conseqüentemente, um aumento significativo na expectativa de vida. Dentre as diversas áreas da medicina que contribuíram em maior ou menor grau para essa melhora, uma de fundamental importância foi a de diagnósticos por imagem. Intimamente vinculadas aos desenvolvimentos de outras áreas da ciência, como a física, a matemática e a computação, as técnicas para produzir imagens médicas têm atingido níveis de qualidade e confiabilidade surpreendentes. Como exemplo, atualmente dispomos da Ressonância Magnética Nuclear (RMN), Ultra-sonografia (US), Tomografia Computadorizada (TC), Tomografia por Emissão de Pósitron (TEP), entre outras que fornecem imagens cada vez mais precisas e detalhadas de tecidos e órgãos do corpo, permitindo diagnosticar patologias e monitorar tratamentos com maior segurança.

Uma técnica que tem se mostrado bastante promissora e que tem atraído a atenção de um número cada vez maior de pesquisadores nos últimos anos é a Tomografia de Impedância Elétrica (TIE)¹. A idéia é explorar as diferenças entre as propriedades elétricas (condutividade e permissividade) dos diferentes tecidos biológicos. Resumidamente, a técnica se baseia na aplicação de um perfil de potencial elétrico ou de corrente elétrica através de eletrodos posicionados no contorno da seção do corpo e na medição da resposta. A partir da relação entre os dados da excitação (potencial/corrente) e da resposta (corrente/potencial), estima-se a distribuição de condutividade no interior do domínio, o que pode ser traduzido, computacionalmente, como uma imagem dessa seção.

Pode-se citar vários motivos para essa expectativa em relação à TIE. Primeiramente, sabe-se que os tecidos apresentam diferenças relativamente grandes de condutividade e resistividade elétricas, o que, em princípio, permite uma boa diferenciação para a reconstrução da imagem. Segundo, a TIE leva uma grande vantagem em relação a outras técnicas por ser não invasiva e por não necessitar de nenhum tipo de radiação ionizante, não produzindo, portanto, efeitos

¹ *Electrical Impedance Tomography* (EIT), em inglês

colaterais. Técnicas de imageamento que utilizam raio-X, como a TC, não podem ser aplicadas com frequência em um mesmo paciente, pois o excesso de radiação pode produzir sérios danos à sua saúde. Já a TIE não oferece esse tipo de restrição, podendo ser aplicada dias seguidos em um mesmo paciente, o que permite uma monitoração constante do tecido ou órgão de interesse. Além disso, um aparelho de TIE é relativamente pequeno, o que o torna portátil, podendo ser transportado e instalado ao lado do leito de um paciente, diferentemente dos aparelhos de TC e RMN que são equipamentos grandes e não portáteis. Finalmente, seu custo estimado é consideravelmente menor do que o de um tomógrafo computadorizado ou de um aparelho de ressonância magnética.

No entanto, apesar de ser uma técnica promissora e das intensas pesquisas feitas nas últimas décadas, a TIE ainda não atingiu um grau de confiabilidade a ponto de ser extensivamente utilizada na prática. Isso se deve principalmente à baixa resolução das imagens, o que não permite um diagnóstico seguro, e ao elevado tempo computacional exigido na reconstrução de cada imagem.

Esses problemas aparecem porque, matematicamente, a TIE é um problema inverso não linear e intrinsecamente mal-condicionado, apresentando grande sensibilidade com relação a erros numéricos e ruídos experimentais. Além disso, nas abordagens mais comumente utilizadas, a reconstrução de uma imagem na TIE pode ser vista como um processo feito em duas etapas: primeiramente deve-se resolver o *problema direto*, no qual determinam-se os potenciais elétricos nos pontos internos do domínio e as respostas (corrente/potencial) no contorno, dado um padrão de excitação (potencial/corrente); em seguida, deve-se resolver o *problema inverso*, que é a determinação do contraste (condutividade ou permissividade) dos pontos internos do domínio a partir da relação entre os dados de excitação e resposta no contorno. Essa divisão em etapas onera computacionalmente a reconstrução da imagem pois normalmente os métodos utilizados para a resolução do *problema inverso* são iterativos e necessitam da resolução do *problema direto* inúmeras vezes. Sendo assim, a resolução rápida e eficiente do *problema direto* é de fundamental importância para a TIE.

O objetivo principal deste trabalho é colaborar com o desenvolvimento da TIE, especificamente no que se refere à resolução do *problema direto*, para o caso de um domínio bidimensional. Para isso, propõe-se um estudo do Método dos Elementos de Contorno (MEC) como alternativa ao Método dos Elementos Finitos (MEF), que é o mais utilizado atualmente. A principal vantagem do MEC sobre as demais técnicas de discretização é que esse converte a equação diferencial parcial em equações integrais sobre a fronteira do domínio e, efetivamente, reduz em uma dimensão o problema numérico. Em outras palavras, o MEC requer apenas a

discretização do contorno e não de todo o domínio, como ocorre com os outros métodos. Essa redução na dimensão do problema diminui consideravelmente o tamanho do sistema linear a ser resolvido a cada resolução do *problema direto*, o que pode reduzir satisfatoriamente o tempo computacional empregado na reconstrução de cada imagem.

Durante o trabalho, foi implementado em linguagem C um programa que utiliza o MEC para a resolução numérica do *problema direto* associado a TIE. A princípio, o programa aceita diferentes geometrias para o domínio bem como diferentes padrões de excitação (condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann ou mista). Também permite a inserção de uma ou mais inclusões ("buracos") no interior do domínio, simulando regiões de não condutividade elétrica. Foram realizados testes numéricos com domínios quadrado e circular, com e sem inclusões e com diferentes condições de contorno. Para validação do método, alguns testes foram realizados com condições de contorno que oferecem solução analítica e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. Outros testes, que a princípio não oferecem solução analítica, foram validados através da comparação com resultados obtidos na literatura.

O trabalho é dividido da seguinte forma: no Capítulo 2, faz-se uma breve discussão sobre as principais técnicas de imageamento médico bem como o desenvolvimento e a situação atual da TIE. No Capítulo 3, é desenvolvida a formulação matemática da TIE, destacando a equação diferencial parcial (EDP) que rege o potencial elétrico no interior do domínio e as condições de contorno(CC). Também neste capítulo, faz-se uma discussão sobre algumas características relacionadas à resolução matemática do problema, mostrando quais são as principais dificuldades atuais a serem sanadas. O Capítulo 4 apresenta o Método dos Elementos de Contorno, sua formulação matemática e como ele pode ser aplicado na resolução do problema da TIE. No Capítulo 5, discute-se a discretização do problema e como foi realizada a implementação computacional do problema. No Capítulo 6, apresentam-se os testes e as simulações numéricas realizadas para validação do método e os resultados obtidos. Finalmente, no Capítulo 7 têm-se as discussões e conclusões, bem como sugestões de trabalhos futuros.

2 *Imageamento em Medicina*

Pode-se considerar a medicina como uma das mais antigas ciências naturais produzidas pelo homem. O objeto central de interesse da medicina é, naturalmente, o estudo do corpo humano, sua estrutura e funcionamento sobre as mais diversas condições, bem como no desenvolvimento de tratamentos e técnicas de intervenção para as mais diversas patologias ou estados de mau funcionamento gerados por traumas e ferimentos [HENDEE e RITENOUR, 2002]. O desenvolvimento da medicina ocorreu a taxas modestas durante praticamente toda história. Até meados do século XIX, haviam poucas técnicas disponíveis para se diagnosticar possíveis doenças e tão poucas para a realização de tratamentos, tanto no caso de intervenções cirúrgicas como no caso de tratamentos farmacológicos. A partir do final do século XIX e início do século XX, no entanto, as áreas de saúde e medicina bem como todas as áreas de ciência e tecnologia tiveram um desenvolvimento espantoso. Hoje os médicos dispõem de diversas e variadas técnicas, tanto para obter informações sobre o corpo humano e diagnosticar estados patológicos como para intervir e tratar tais patologias com alto grau de precisão e eficiência.

Particularmente na área de diagnósticos por imagem, as técnicas mais modernas são capazes de gerar imagens extremamente precisas e visualmente impressionantes, tanto anatômicas como funcionais, de órgãos e tecidos do corpo humano. Essa melhora na qualidade e precisão das imagens tem permitido produzir diagnósticos mais precisos e acompanhar com mais eficiência determinados tipos de tratamentos, principalmente aqueles relacionados à medicina do câncer. De fato, é virtualmente impossível quantificar o número de pessoas que, durante as últimas décadas, puderam se beneficiar de tais avanços e tiveram suas qualidades de vida melhoradas, ou até suas vidas salvas, graças às técnicas de imageamento médico.

Basicamente, a produção de imagens do interior do corpo humano a partir de estímulos e medidas externas explora as diferenças que os tecidos biológicos apresentam para diversas propriedades físicas tais como, absorvância, refletividade e transmissividade de radiações ou ondas sonoras, graus de magnetização e ressonância a estímulos eletromagnéticos, diferenças de condutividade e permissividade elétricas, entre outros. É importante notar que essas propriedades podem variar não só de tecidos para tecido como também dependem bastante do

próprio metabolismo biológico, permitindo produzir imagens tanto puramente anatômicas como funcionais.

2.1 Raio-X

Historicamente, a primeira imagem do interior do corpo humano, obtida indiretamente através de um estímulo físico externo, foi feita por Wilhelm Conrad Röntgen, em 1895 através da aplicação de um feixe de raios X sobre a mão de sua esposa (Fig.2.1)[RÖNTGEN, 1895].



Figura 2.1: Imagem por raio-X da mão da esposa de Röntgen

A imagem sobre o filme fotográfico mostra o contraste entre os diferentes graus de absorção e transmissão que os tecidos oferecem aos raios-X. Para quantificar essa diferença, usa-se uma grandeza física conhecida como *coeficiente de atenuação* (μ), que mede o quanto que um dado feixe de raio-X perde sua intensidade quando penetra em um certo material em função da distância penetrada. Matematicamente, essa perda de intensidade segue uma lei exponencial (Eq. 2.1)

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x} \quad (2.1)$$

onde I_0 é a intensidade inicial do feixe e I é a intensidade final após penetrar uma distância x no material. Considerando que o expoente μx deve ser adimensional, a unidade do *coeficiente de atenuação*, no Sistema Internacional, é m^{-1} .

Mesmo hoje, mais de um século após a experiência de Röntgen, as imagens de raio-X impressas diretamente em filmes fotográficos ainda são de grande utilidade e extensamente

usadas em todo o mundo. De fato, pode-se dizer que é muito difícil, senão impossível, encontrar uma pessoa em idade adulta que não tenha feito alguma radiografia, ou para detectar uma fratura óssea ou até para avaliar a arcádea dentária em exames odontológicos.

2.2 Tomografia Computadorizada

A partir da metade do século passado, com a injeção dos computadores e o surgimento da tecnologia digital, foi possível desenvolver técnicas muito mais eficazes para geração de imagens médicas. Uma delas é a Tomografia Computadorizada (TC) que, a princípio, utiliza as mesmas idéias básicas das imagens de raio-X comuns. No entanto, na TC faz-se medidas de atenuação de vários ângulos diferentes fazendo com que o aparato formado pela fonte de raio-X e o sistema de detectores girem em torno da seção do corpo do paciente. As informações coletadas são então enviadas a um computador munido de um software específico capaz de reconstruir a imagem detalhada de toda a seção (Fig. 2.2).

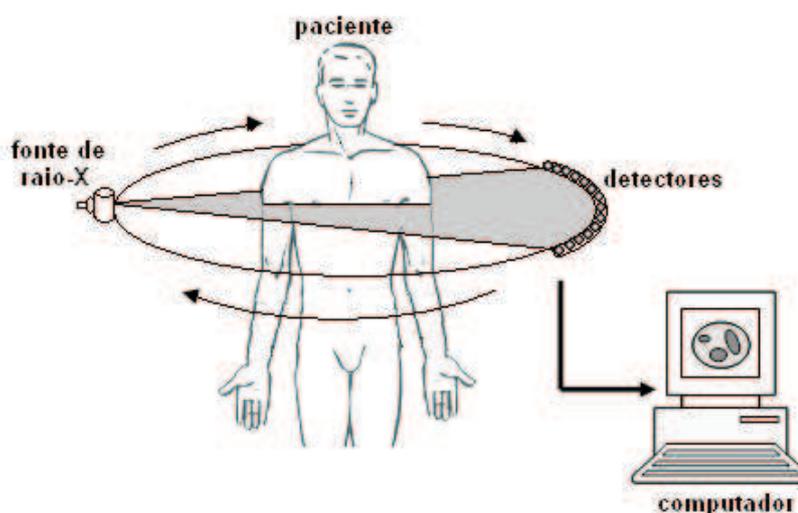


Figura 2.2: Esquema da Tomografia Computadorizada

As técnicas de reconstrução da imagem da TC foram desenvolvidas no início da década de 70 do século passado, por Allen M. Cormack e Godfrey N. Hounsfield, o que lhes rendeu o Prêmio Nobel de Fisiologia e Medicina de 1979 [OKUNO et al., 1982]. Para fins médicos, o primeiro aparelho de TC a ser utilizado clinicamente foi desenvolvido pela empresa EMI Ltda. em 1972, que se limitava a fazer imagens para estudos da cabeça. Desde então, a qualidade e o número de tomógrafos computadorizados cresceu consideravelmente em todo o mundo. Atualmente, estima-se que apenas nos EU, existam mais de 5 mil aparelhos de TC instalados ao custo de, aproximadamente, US\$ 1 milhão cada [HENDEE e RITENOUR, 2002].

De fato, o desenvolvimento da TC é considerado um grande marco nas áreas de radiologia e diagnóstico por imagem. A transição da aquisição da informação da forma analógica para a digital possibilitou processar, armazenar e transmitir imagens com muito mais qualidade, rapidez e eficiência. Atualmente, os tomógrafos computadorizados também produzem imagens tridimensionais através do movimento helicoidal do sistema fonte-detectores ao longo do corpo do paciente. Da mesma forma que na tomografia 2D, as informações são processadas por um computador que reconstrói a imagem 3D a partir das imagens planas das várias seções varridas durante o deslocamento do aparelho. Também é possível associar imagens de TC com outras técnicas de imageamento funcional, como a Tomografia por Emissão de Pósitrons (TEP), para produzir imagens com resolução surpreendentes capazes de mostrar com detalhes determinados processos metabólicos.

2.3 Ressonância Magnética Nuclear

Outra técnica de imageamento médico bastante utilizada atualmente é a Ressonância Magnética Nuclear (RMN). O fenômeno da ressonância pode aparecer em diferentes fenômenos físicos, desde a amplificação do som emitido pela corda de um violão dentro da "caixa de ressonância", o aquecimento de alimentos dentro de um forno de micro-ondas, até a sintonização de uma estação de rádio através do rádio-receptor. Simplificadamente, o fenômeno da ressonância ocorre quando um sistema recebe um estímulo externo com uma frequência igual à sua frequência natural de vibração, produzindo um aumento na amplitude desta vibração. Esse fenômeno também pode ocorrer em nível nuclear e é isso que os aparelhos de RMN exploram [WEBB, 1988].

Um aparelho de RMN é constituído basicamente de uma fonte de campo magnético e de uma antena emissora-receptora de ondas de rádio, além, é claro, da parte computacional capaz de receber e processar as informações para reconstruir a imagem. Sabe-se que os núcleos atômicos produzem pequenos campos magnéticos cujos vetores indução magnética \vec{B} , naturalmente, se orientam aleatoriamente. Quando uma amostra de um certo material (um tecido biológico, por exemplo) é colocada sob ação de um campo magnético externo \vec{B}_o , esses núcleos se reorientam alinhando seus campos magnéticos com o campo externo. Essa interação entre os campos faz com que os núcleos girem, executando um movimento de precessão em torno de um eixo, paralelo à direção do campo magnético externo \vec{B}_o (Fig. 2.3a), com uma frequência característica ω , que varia de elemento para elemento e até entre isótopos de um mesmo elemento [MARTINS, 1995].

Neste momento, um pulso curto de rádio-frequência é emitido pela antena criando um campo magnético \vec{B}_ω perpendicular à direção de \vec{B}_0 , cuja orientação varia com uma frequência igual à frequência característica ω de um dado elemento da amostra. Com isso, os núcleos se reorientam de forma que seus campos magnéticos se alinhem momentaneamente na direção do campo resultante entre \vec{B}_0 e \vec{B}_ω (Fig. 2.3b). Quando o pulso cessa, os núcleos voltam a se orientar paralelamente ao campo original \vec{B}_0 e, com isso, emitem energia na forma de ondas de rádio que são captada pela antena receptora (Fig. 2.3c).

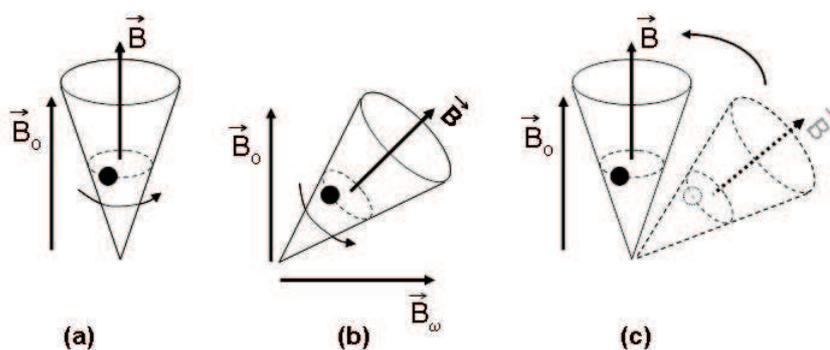


Figura 2.3: Ressonância Magnética Nuclear

A quantidade de um dado elemento em cada parte da amostra irá determinar a intensidade do sinal recebido pela antena, que por sua vez é enviado para o computador para a reconstrução da imagem. Variando-se a frequência ω do pulso de rádio-frequência emitido pela antena, pode-se escolher que tipo de elemento da amostra entrará em ressonância com o sistema e será detectado para a formação da imagem.

2.4 Ultra-sonografia

As técnicas de imageamento por Ultra-sonografia (US) tiveram como base o desenvolvimento do SONAR, durante a Segunda Guerra Mundial. Este aparelho, colocado sob o casco de navios, era capaz de detectar a presença de submarinos ou de medir a profundidade do oceano a partir da emissão, reflexão e recepção de uma onda sonora de alta-frequência. Na área médica, atualmente a ultra-sonografia é extensivamente utilizada tanto em diagnósticos como em certos tipos de tratamentos. Exames pré-natais para avaliar o desenvolvimento e a formação do bebê, detecção de câncer de mama ou de outros tipos de câncer e o ecocardiograma, que verifica o funcionamento do coração, são alguns exemplos de aplicações das imagens de ultra-sonografia na medicina diagnóstica.

O ser humano é capaz de detectar sons numa faixa de frequência que varia, aproximada-

mente, entre 20Hz e 20kHz. Ondas mecânicas sonoras com frequência abaixo de 20Hz são denominadas de *infra-som* e, acima de 20kHz, são chamadas de *ultra-som*. Outros animais podem ouvir sons em faixas de frequência diferentes dos humanos como, por exemplo, os cães que detectam sons com frequências de até 50kHz e os morcegos que ouvem até 120kHz. Já a ultra-sonografia diagnóstica utiliza frequências ainda maiores podendo variar entre 1MHz e 30MHz [HENDEE e RITENOUR, 2002]

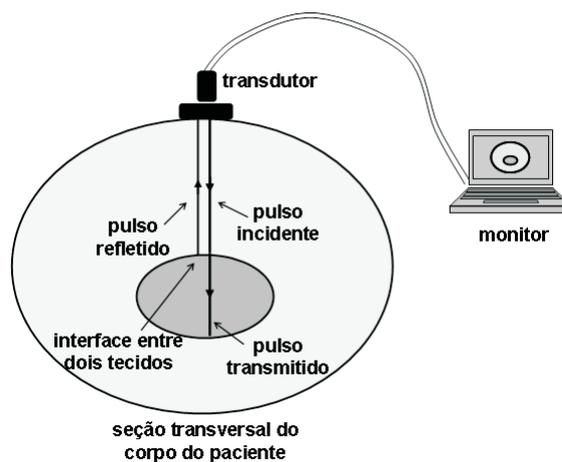


Figura 2.4: Esquema de um exame clínico de ultrasonografia

A idéia central do imageamento por ultra-som é explorar a diferença que os tecidos biológicos apresentam para a reflexão, absorção e transmissão do som. Através de um transdutor (dispositivo capaz de emitir e receber ondas mecânicas) colocado sobre a pele do paciente, um pulso de ultra-som é emitido para o interior do corpo e ao encontrar uma interface de separação entre dois tipos diferentes de tecidos, parte do pulso é transmitida e parte é refletida. A parte refletida pode retornar ao transdutor e ser detectada. A partir do intervalo de tempo entre a emissão e a recepção, estima-se a posição da interface dentro do corpo (Fig 2.4).

Naturalmente que o processo, na prática, é bem mais complexo, pois normalmente existem diversas interfaces produzindo vários pulsos refletidos que devem ser analisados separadamente para permitir a localização de cada tecido. Além disso, existe uma atenuação na intensidade do som durante a propagação no interior do corpo que também deve ser levada em consideração na reconstrução da imagem.

No entanto, o importante é destacar que a propriedade principal que permite diferenciar os diversos tecidos na US é a *impedância acústica* Z , definida como o produto da densidade do meio ρ pela velocidade do som v neste meio. Diferentes tecidos apresentam diferentes impedâncias acústicas, como mostra a Tabela 2.1 [OKUNO et al., 1982], e essa diferença determina a fração do ultra-som que será refletida e a fração que será transmitida quando existir uma inter-

Tabela 2.1: Impedância acústica de alguns materiais e tecidos biológicos

Material	Impedância Acústica ($kgm^{-2}s^{-1}$)
Ar	430
Água	$1,48 \times 10^6$
Cérebro	$1,56 \times 10^6$
Músculo	$1,64 \times 10^6$
Gordura	$1,33 \times 10^6$
Osso	$7,68 \times 10^6$

face entre esses tecidos. Desta forma, quanto maior a diferença de impedância acústica entre dois tecidos, mais fácil será diferenciá-los na produção de uma imagem de ultra-sonografia. Por sua vez, dois tecidos que tenham impedâncias acústicas iguais ou muito próximas não serão facilmente diferenciados.

2.5 Tomografia de Impedância Elétrica

A literatura aponta como pioneiro na produção de imagens do corpo humano a partir de suas propriedades elétricas o trabalho de Henderson e Webster [HENDERSON e WEBSTER, 1978]. O sistema construído por eles, denominado *câmara de impedância*, baseava-se na aplicação de uma diferença de potencial elétrico através de um eletrodo colocado no peito do paciente e na medição da corrente elétrica por eletrodos localizados nas costas do mesmo. Entretanto, o modelo matemático aplicado na reconstrução da imagem fazia algumas aproximações que acabaram por produzir imagens com baixa resolução. De qualquer forma, o pioneirismo teve reflexos positivos, pois a partir dessa publicação, o interesse dos pesquisadores em técnicas de imageamento que procuram explorar as propriedades elétricas dos tecidos biológicos tem aumentado consideravelmente.

Quando se fala em geração de imagens a partir das propriedades elétricas do corpo, deve-se entender como propriedades elétricas a *condutividade* e a *permissividade*, sendo que a primeira mede a facilidade que um certo material oferece à passagem de corrente elétrica quando submetido a uma diferença de potencial e a segunda mede a facilidade com que as cargas elétrica do material se separam sob a ação de um campo elétrico. Diferentes materiais ou tecidos biológicos podem apresentar diferenças tanto na condutividade como na permissividade. Portanto, a princípio é possível construir um mapa do interior de um objeto, como o corpo de um paciente, por exemplo, a partir das diferenças que essas propriedades apresentam para as diversas partes do corpo [CHENEY et al., 1999].

Em desenvolvimento já há algumas décadas, a TIE tem se mostrado uma técnica bastante promissora na obtenção de imagens do interior de um objeto. Seguindo a idéia de que a condutividade varia de material para material, a proposta da TIE é produzir uma imagem do corpo de tal forma que, após o processamento e a reconstrução computacional da imagem, cada "pixel" desta representa a impedância ou condutividade dos pontos internos do domínio [LIMA, 2006].

Na literatura, existem diversas propostas para possíveis aplicações da TIE, tanto na área de medicina diagnóstica como na área industrial. Na medicina, a TIE pode ser usada no monitoramento e controle da ventilação artificial nos pulmões, [AMATO, 2001] [LIMA, 2006], detecção de embolia pulmonar [HARRIS et al., 1988], monitoramento do funcionamento gástrico e do processo de lavagem estomacal [MANGNALL et al., 1987], monitoramento do fluxo sanguíneo e das funções cardíacas [EYUBOGLU et al., 1987], monitoramento de problemas de apnéia [WOO et al., 1993] e detecção de câncer de mama [ZOU e GUO, 2003]. Já em processos industriais, podemos citar o monitoramento de escoamentos multifásicos em tubulações [ROLNIK e SELEGHIM, 2006], ensaios não destrutivos de controle de qualidade na detecção de corrosão [KAUP et al., 1996] ou de defeitos, como fissuras ou vazios, em peças metálicas [SANTOSA e VOGELIUS, 1991] e monitoramento e detecção de vazamentos em tanques subterrâneos [RAMIREZ et al., 1993]

Na TIE, o processo de obtenção da informação para a produção da imagem consiste em posicionar eletrodos ao redor do corpo de interesse e aplicar um estímulo, que pode ser a injeção de uma corrente elétrica ou a aplicação de uma diferença de potencial elétrico, e medir a resposta, também na forma de corrente ou potencial (Fig. 2.5). A partir da diferença entre o estímulo e a resposta, pode-se estimar a distribuição de condutividade elétrica e, através de um algoritmo, reconstruir computacionalmente a imagem do interior do corpo.

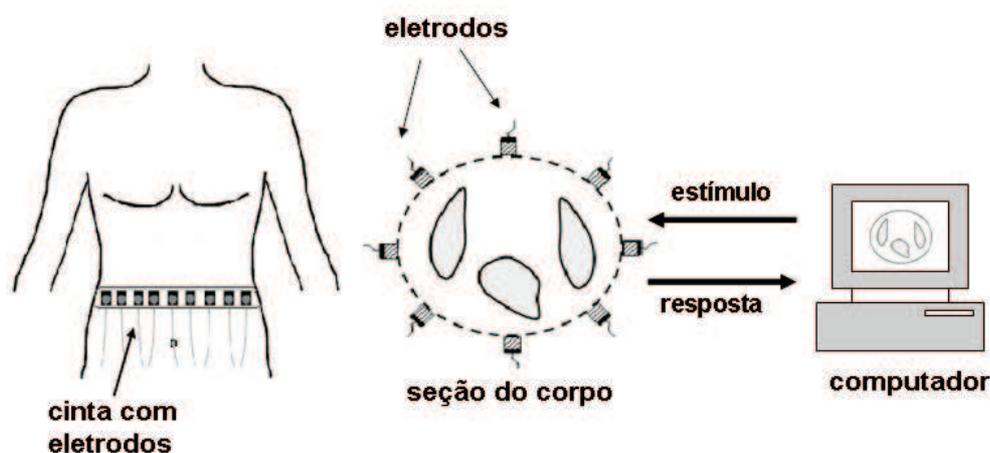


Figura 2.5: Esquema de um exame usando Tomografia de Impedância Elétrica

No caso das aplicações médicas, as correntes ou tensões aplicadas são de baixa intensidade de forma a não produzir nenhum dano ou sensação indesejável ao paciente. Também deve-se usar correntes de baixa frequência de forma que se possa desprezar os efeitos das correntes de deslocamento. Como exemplo, em um trabalho recente, utilizou-se dados experimentais para produzir imagens do tórax de um paciente com aplicação de uma corrente alternada de 4,33mA e frequência de 125kHz [HERRERA, 2007]. Em outro trabalho [EDIC et al., 1995], propõe-se um valor máximo aceitável para a intensidade de correntes elétricas para aplicações médicas de $100\mu A_{rms}/kHz$ para frequências na faixa de 1kHz até 100kHz.

A grande expectativa em relação à TIE reside, entre outros motivos, no fato de que os tecidos apresentam diferenças relativamente grandes de condutividade e resistividade, o que, em princípio, permite uma boa diferenciação para a reconstrução da imagem. Por exemplo, podemos comparar a resistividade elétrica e o coeficiente de atenuação de raio-X, que é a grandeza usada para diferenciar tecidos na TC. A resistividade do osso é duas ordens de grandeza maior do que a resistividade dos músculos ou do sangue, enquanto que o coeficiente de atenuação de raio-X varia menos do que uma ordem de grandeza entre esses mesmos tecidos. A Tabela 2.2 [BARBER et al., 1983] mostra uma comparação entre a condutividade e o coeficiente de atenuação para alguns tecidos biológicos. Também podemos fazer uma comparação com a impedância acústica, propriedade utilizada para diferenciação de tecidos na ultra-sonografia. A Tabela 2.1 mostra que a impedância acústica também varia menos do que uma ordem de grandeza quando comparamos, por exemplo, músculo de osso. Em [BAKER, 1989] pode-se encontrar algumas técnicas para determinação da resistividade (condutividade) de tecidos biológicos.

Tabela 2.2: Comparação entre a resistividade elétrica e o coeficiente de atenuação de raio-X

Tecido	Resistividade ($\Omega.m$)	Coef. Atenuação de raio-X (m^{-1})
Osso	150	35.0
Músculo	3.0	20.4
Sangue	1.6	20.4
Gordura	15.0	18.5

Outras características que fazem da TIE uma técnica promissora referem-se à segurança do paciente, facilidade de instalação e manutenção e custo. Como se sabe, as técnicas para produzir diagnósticos a partir do imageamento do corpo podem ser divididas, essencialmente, em duas classes: as técnicas *invasivas*, nas quais há a necessidade de se introduzir algum objeto, como um catéter ou uma sonda de visualização, ou de que o paciente tenha que ingerir algum contraste radioativo para posterior detecção do sinal; e as técnicas *não invasivas* que se baseiam na medição de sinais naturais emitidos pelo próprio corpo (eletrocardiograma, eletroencefalograma, etc) ou de sinais originados como respostas a estímulos externos (ressonância magnética,

ultra-sonografia, raio-X, etc) [JESUS e LEMAIRE, 2005].

Nesse ponto, a TIE leva uma grande vantagem em relação as outras técnicas, pois pode ser classificada como uma técnica *não invasiva*. De fato, na TIE não há necessidade de introdução de nenhum objeto estranho no corpo do paciente e nem de ingestão de nenhum tipo de contraste ou de substância radioativa, além, é claro, de não utilizar radiação ionizante. Com isso, a TIE pode ser aplicada por longos períodos de tempo sobre um mesmo paciente permitindo um monitoramento constante e em tempo real. Isso é especificamente útil em pacientes que necessitam de respiração artificial, pois permite uma melhor avaliação e um maior controle da quantidade de ar que está sendo injetada, prevenindo assim possíveis danos aos pulmões [LIMA, 2006].

A portabilidade e a facilidade de manutenção são outras vantagens que a TIE oferece. Efetivamente, um tomógrafo de impedância elétrica consiste basicamente de um sistema de sensoria-mento (fonte de excitação e eletrodos) e de um computador. Sendo assim, pode ser facilmente transportado e instalado, mesmo em locais com pouco espaço, além de oferecer facilidade de manutenção. Tudo isso, conseqüentemente, faz com que a TIE tenha um custo consideravel-mente baixo comparado a outros equipamentos de imageamento médico. Estimativas apontam para um valor em torno de US\$ 10 mil para um tomógrafo de impedância elétrica enquanto que o custo de um aparelho de TC pode chegar US\$ 1 milhão [SILVA, 2006]. Isso é especialmente importante pois permite que hospitais e clínicas, principalmente aqueles com poucos recursos, possam adquirir aparelhos em quantidade suficiente para atender satisfatoriamente um número maior de pacientes.

Contudo, a TIE ainda precisa amadurecer bastante para ganhar confiança e ser mais ampla-mente utilizada. De fato, existem muitos problemas que devem ser resolvidos, principalmente no que se refere à baixa resolução das imagens e ao excessivo tempo computacional empregado na reconstrução de cada imagem. As dificuldades aparecem principalmente no que se refere aos algoritmos computacionais empregados para processar os dados e fazer a reconstrução da imagem.

As primeiras técnicas de reconstrução aplicadas à TIE foram baseadas nos algoritmos de reconstrução da TC, como o *backprojection*, por exemplo [BARBER e BROWN, 1984]. No en-tanto, as imagens obtidas não apresentavam boa resolução, sendo insatisfatórias para aplicações médicas seguras. O principal motivo para essa baixa resolução está associado ao tipo de campo que se estabelece no interior do corpo a ser imageado. No caso da TC, o campo estabelecido é do tipo *hard field* (campo duro ou não deformável), ou seja, os caminhos seguidos pelos raios-X não sofrem deformações quando atravessam o corpo, ocorrendo apenas a atenuação na intensi-

dade da radiação. Isso permite prever a trajetória que os raios-X irão seguir desde a fonte até o detector, que normalmente pode ser aproximada por um segmento de reta (Fig. 2.6).

Com isso, a relação $\Psi_{(exc/resp)}$ entre a excitação e a resposta, que na TC corresponde à relação entre a intensidade de radiação incidente (I_o) e a intensidade da radiação transmitida (I), pode ser determinada através de uma integral de linha em que o caminho ℓ da integral é conhecido (Eq. 2.2).

$$\Psi_{(exc/resp)} = \ln\left(\frac{I}{I_o}\right) = - \int_{\ell} \mu(x,y) d\ell \quad (2.2)$$

Ou seja, a diferença entre a excitação e a resposta fica dependendo apenas do contraste $\mu(x,y)$, que no caso da TC corresponde ao coeficiente de atenuação.

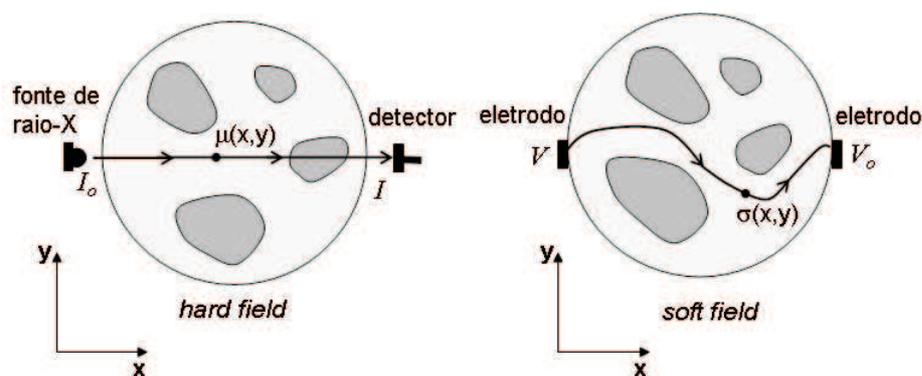


Figura 2.6: Tipos de campo de sensoriamento

Já no caso da TIE, o campo estabelecido é do tipo *soft field* (campo mole ou deformável), visto que a forma das linhas de campo sofre forte influência dos materiais internos do corpo sensoriado. conseqüentemente, torna-se muito difícil, senão impossível, prever o caminho exato que o fluxo de corrente elétrica irá seguir no interior do domínio. Esse acoplamento não linear entre o campo estabelecido e as propriedades elétricas dos materiais que constituem o corpo faz com que o caminho da integral de linha que fornece a relação $\Psi_{(exc/resp)}$ entre a excitação e a resposta não seja possível de ser definido (Eq. 2.3).

$$\Psi_{(exc/resp)} = \frac{V - V_o}{J} = \int_{\ell(?)} \rho(x,y) d\ell \quad (2.3)$$

Em outras palavras, a relação entre a excitação, que corresponde à diferença de potencial $V - V_o$ aplicada, e resposta, que corresponde ao fluxo de corrente J medido, não fica determinada apenas como função da resistividade $\rho(x,y)$ (inverso da condutividade), visto que o próprio

caminho ℓ da integral de linha é desconhecido (Fig. 2.6). Essa característica intrínseca do problema da TIE não favorece, portanto, o uso de algoritmos desenvolvidos para reconstrução de imagens de campos duros, pelo menos não com a mesma eficiência que se obtém na TC.

Essa desvantagem da TIE pode, entretanto, ser contornada utilizando-se outros métodos de reconstrução que não dependam do tipo de campo estabelecido. Uma possibilidade que tem sido bastante estudada e que está sendo mais amplamente empregada atualmente é a abordagem funcional, na qual faz-se uma comparação entre dois modelos, um computacional e outro experimental, a fim de se determinar a distribuição de contraste no interior do domínio que minimize a diferença entre as respostas obtidas por esses modelos. Uma breve apresentação sobre essa abordagem será feita no próximo capítulo.

Finalizando, apesar das dificuldades, a TIE deve seguir o mesmo caminho que todas as modernas técnicas de imageamento médico trilharam: ela teve sua infância, está passando pela adolescência e, com certeza, chegará à fase adulta. Conta a lenda que, no século XIX, quando Michael Faraday estava fazendo uma demonstração sobre sua mais nova descoberta, a indução eletromagnética, foi perguntado por um dos presentes: "Mas, para que serve tudo isso?". Faraday prontamente respondeu: "Para que serve uma criança recém-nascida?".

3 *Formulação Matemática da TIE*

O modelo matemático aplicado ao problema da TIE corresponde a uma equação diferencial parcial (EDP), derivada das equações do eletromagnetismo, que fornece o potencial elétrico no interior do domínio, vinculada às condições de contorno, que simulam os dados de excitação/resposta. Neste capítulo, será discutido o desenvolvimento desse modelo matemático, incluindo as formas básicas de aplicação das condições de contorno (Dirichlet, Neumann ou mista). Finalizando, será discutida a divisão do problema da TIE em *problema direto* e *problema inverso*, com uma breve apresentação da abordagem funcional para a resolução do problema inverso.

3.1 A equação principal da TIE

A *impedância elétrica* (Z) é uma grandeza normalmente usada em circuitos elétricos definida como a razão entre a voltagem efetiva (V_{ef}) aplicada no circuito e a corrente elétrica efetiva (I_{ef}) que o atravessa (Eq. 3.1)

$$Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \quad (3.1)$$

No Sistema Internacional de Unidades (S.I.), a impedância elétrica é medida em Ω (ohms), que corresponde à razão $\frac{V}{A}$ (volt/ampère).

Conceitualmente, a impedância elétrica mede a oposição total que um dado circuito apresenta à passagem da corrente elétrica [MARTINS, 1973]. Ela também pode ser expressa como o inverso da *admitância* (γ), sendo que, para uma circuito resistivo e capacitivo de corrente alternada, essa pode ser expressa como a soma de dois termos, uma parte real representando o termo resistivo e uma parte complexa representando o termo capacitivo, como mostra a Eq. (3.2).

$$\frac{1}{Z} = \gamma(x, \omega) = \sigma(x, \omega) + \omega \epsilon(x, \omega) i \quad (3.2)$$

em que x representa a posição, σ a condutividade elétrica, ϵ a permissividade elétrica e ω a frequência angular da corrente elétrica [CHENEY et al., 1999] [BORCEA, 2002]. A frequência angular ω , por sua vez, é dada em função da frequência f por $\omega = 2\pi f$, sendo f medida em Hz, no Sistema Internacional.

Portanto, na Tomografia de Impedância Elétrica é possível construir uma imagem interna de um corpo tanto a partir de sua condutividade σ como a partir de sua permissividade ϵ [FIGUEROA E SELEGHIM, 2001]. No presente trabalho, consideraremos o meio como puramente condutivo, de forma que se possa desprezar os efeitos capacitivos e, conseqüentemente, o termo correspondente à permissividade elétrica da Eq. (3.2). Sendo assim, o imageamento será feito exclusivamente a partir da diferença que os materiais internos do corpo apresentam em relação a condutividade σ .

Considerando-se um domínio Ω fechado através de um contorno $\partial\Omega$, a formulação matemática da TIE corresponde, essencialmente, a uma equação diferencial parcial (EDP) que rege o potencial elétrico no interior desse domínio e de condições de contorno (CC) adequadas que representam o processo de estímulo e resposta realizado pelos eletrodos colocados no contorno [CAROSIO, 2008]. A derivação da EDP se faz a partir das equações de Maxwell (Eq. 3.3).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\hat{\rho}}{\epsilon} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} é o campo magnético, \mathbf{J} é a densidade de corrente elétrica, $\hat{\rho}$ é a densidade de carga elétrica, ϵ é a permissividade elétrica e μ é a permeabilidade magnética.

A fim de reduzir a complexidade do modelo, é possível fazer algumas aproximações. Uma delas é desprezar os possíveis efeitos da indução eletromagnética, visto que as frequências das correntes/tensões aplicadas são relativamente baixas. Segundo Rolnik [ROLNIK, 2003], a frequência do sinal de excitação deve ser maior do que 1kHz para minimizar os possíveis fenômenos eletroquímicos no contato dos eletrodos com o corpo e menor do que 1MHz para evitar os efeitos das correntes de deslocamento. Sendo assim, podemos igualar a zero todas as derivadas em relação ao tempo das equações de Maxwell, permitindo aproximar o problema

para uma distribuição quasi-estática de cargas [TRIGO, 2001]. Outra simplificação é que no problema da TIE não se considera a existência de fontes internas de campo magnético. Portanto, as equações acabam se resumindo na relação entre o campo elétrico \mathbf{E} e a densidade de carga elétrica $\hat{\rho}$ (Eq. 3.4).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\hat{\rho}}{\epsilon} \quad (3.4)$$

Por sua vez, sabe-se que o vetor campo elétrico \mathbf{E} pode ser dado pelo gradiente do potencial elétrico ϕ com sinal invertido (Eq. 3.5).

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (3.5)$$

Também podemos expressar o campo elétrico em função do fluxo de corrente \mathbf{J} e da condutividade σ , através da lei de Ohm, para um ponto qualquer no interior do domínio (Eq.3.6).

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq. (3.5) na Eq. (3.6), obtemos uma relação entre o fluxo de corrente \mathbf{J} , o potencial elétrico ϕ e a condutividade σ (Eq.3.7).

$$\mathbf{J} = \sigma(-\nabla\phi) \quad (3.7)$$

Considerando que não há fontes internas de corrente elétrica, pode-se afirmar que na fronteira $\partial\Omega$ do domínio o divergente do fluxo de corrente elétrica é nulo (Eq.3.8).

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.8)$$

Portanto, a partir da condição dada pela Eq. (3.8), a Eq. (3.7) se resume na equação principal do problema da TIE (Eq.3.9).

$$\nabla \cdot (-\sigma\nabla\phi) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.9)$$

A Eq. (3.9) é uma equação diferencial parcial que rege o potencial elétrico $\phi(x,y,z)$ no interior do domínio Ω , sendo $\sigma(x,y,z)$ a condutividade elétrica dos pontos internos do domínio (Fig. 3.1).

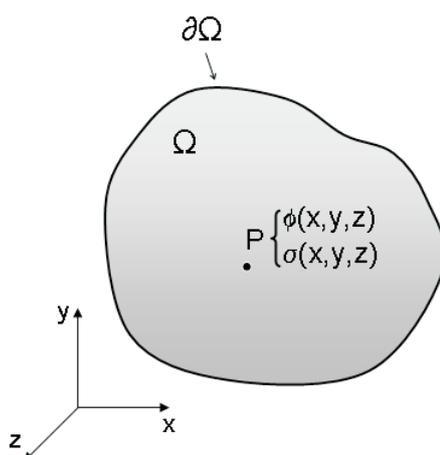


Figura 3.1: Domínio do problema da TIE

É importante notar que a condutividade $\sigma(x, y, z)$ depende das coordenadas (x, y, z) dos pontos do domínio (no caso de um domínio tridimensional), ou seja, ela pode variar de ponto para ponto dependendo dos materiais ou tecidos biológicos que constituem o corpo (Fig. 3.1). Desta forma, esse acoplamento que acontece entre σ e ϕ faz da Eq (3.9) uma equação não linear e lidar com essa característica é uma das principais dificuldades que aparecem no problema da TIE.

3.2 As condições de contorno

Matematicamente, existe um número ilimitado de soluções para a Eq. (3.9), ou seja, existem infinitas distribuições de valores possíveis para σ e ϕ que satisfazem essa EDP. Para restringir o número de soluções, deve-se impor as condições de contorno (CC) que, no problema da TIE, correspondem aos valores de corrente/potencial aplicados e dos valores correspondentes de potencial/corrente obtidos como resposta no contorno $\partial\Omega$ do domínio. Matematicamente, as condições de contorno são dadas pelas seguintes equações

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.10)$$

$$-\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{J} \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.11)$$

onde $\bar{\phi}$ e \bar{J} representam, respectivamente, o potencial elétrico e a componente normal ao contorno do fluxo de corrente elétrica na fronteira $\partial\Omega$. A imposição adequada das condições de contorno fará com que o problema tenha uma única solução, ou seja, não haverá duas dis-

tribuições de condutividade diferentes que satisfaçam o problema de valor de contorno (PVC) dado por (3.9), (3.10) e (3.11) [HANKE e BRÜHL, 2003].

Naturalmente que as grandezas envolvidas no problema podem, na prática, serem medidas em diversas e diferentes unidades, dependendo do que se considerar mais conveniente. Entretanto, apenas como referência, a Tabela (3.1) mostra as unidades, no Sistema Internacional, que devem ser utilizadas para as grandezas que aparecem nas equações (3.9), (3.10) e (3.11).

Tabela 3.1: Unidades principais do problema da TIE no S.I.

Grandeza	Unidade no S. I.	Símbolo
Potencial elétrico (ϕ)	volt	V
Condutividade elétrica (σ)	(ohm.metro) ⁻¹	($\Omega.m$) ⁻¹
Fluxo de corrente (J)	ampère/metro ²	A/m ²

Em relação à forma de excitação e resposta na fronteira $\partial\Omega$, na prática, têm-se dois tipos básicos possíveis bem como uma combinação dos dois. Primeiramente, pode-se impor (excitação) potenciais elétricos e medir as correntes elétricas resultantes (resposta). Neste caso, a Eq. (3.10) corresponde à excitação, chamada condição de contorno do tipo Dirichlet (D) e a Eq. (3.11) corresponde à resposta, chamada condição de contorno do tipo Neumann (N). Esse padrão de excitação/resposta gera uma relação do tipo $D \rightarrow N$ (Dirichlet para Neumann). No segundo tipo, injetam-se correntes elétricas (excitação) e medem-se os potenciais resultantes (resposta). Com isso, a Eq. (3.11) (condição de Neumann) corresponde à excitação e a Eq. (3.10) (condição de Dirichlet) representa a resposta. Neste caso, tem-se uma relação $N \rightarrow D$ (Neumann para Dirichlet). Também é possível misturar esses dois tipos de forma que em partes do contorno aplicam-se potenciais e medem-se as correntes resultantes e nas partes complementares faz-se o oposto, injetam-se correntes e medem-se os potenciais resultantes. Como veremos nos próximos capítulos, o programa desenvolvido neste trabalho aceita os três tipos de excitação/resposta.

Outra questão que deve ser discutida sobre os tipos de excitação/resposta diz respeito aos diferentes padrões possíveis de se aplicar o potencial elétrico ou de se injetar a corrente elétrica e fazer a correspondente medição das respostas. Na prática, o contorno da seção do corpo a ser imageado será envolvido por um número limitado de eletrodos, escolhido arbitrariamente a fim de que se obtenha uma quantidade suficiente de informação para se reconstruir a imagem. Normalmente, esses eletrodos são distribuídos uniformemente através da seção por meio de uma cinta que envolve corpo. Os padrões de excitação/resposta serão definidos a partir da escolha de quais eletrodos serão usados para a excitação (aplicação de potencial ou injeção de corrente) e quais serão usados para medir as respostas.

Os dois padrões mais comuns de carregamento (excitação/resposta) são o *adjacente* e o *diametral* [MELLO e SILVA, 2006]. Considere, por exemplo, que se tenha 12 eletrodos (e_1, e_2, \dots, e_{12}) igualmente espaçados ao redor do contorno $\partial\Omega$ do domínio. No caso do *padrão adjacente*, usam-se dois eletrodos vizinhos, e_1 e e_2 , por exemplo, para a aplicação da excitação e medem-se as respostas nos outros eletrodos. Já no *padrão diametral*, dois eletrodos localizados em posições diametralmente opostas, e_1 e e_7 , por exemplo, são usados para a excitação, medindo-se as respostas nos demais (Fig.3.2). É importante notar que também é possível medir respostas nos próprios eletrodos que estão sendo usados na excitação.

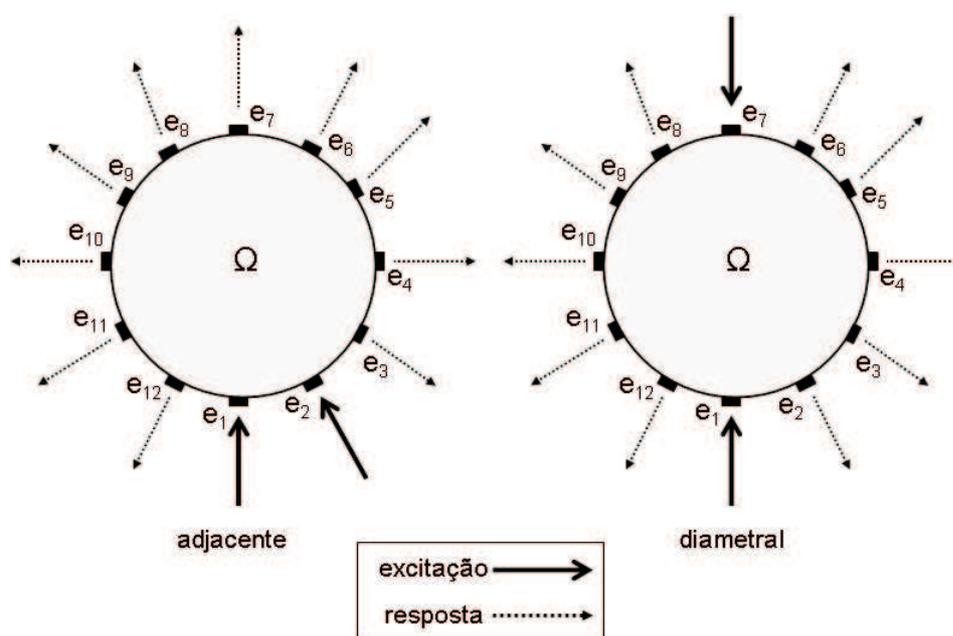


Figura 3.2: Principais padrões de excitação/resposta

Também no caso do padrão adjacente, existem algumas variações nas quais propõe-se pular um ou dois eletrodos para a aplicação da excitação, ou seja, ao invés de usar os eletrodos e_1 e e_2 , usam-se os eletrodos e_1 e e_3 ou e_1 e e_4 para realizar a excitação [HERRERA, 2007].

Outros protocolos de excitação/resposta que também foram estudados são o do tipo *Dirac* e o padrão *triangular* [FIGUEROA E SELEGHIM, 2001]. No padrão *Dirac*, aplica-se um potencial elétrico (10V, por exemplo) em um único eletrodo aterrando-se os demais (0V). Já no padrão *triangular*, aplica-se um potencial elétrico em um eletrodo (10V) e aterra-se o eletrodo diametralmente oposto (0V), sendo que nos demais são aplicados potenciais que variam linearmente entre 0V e 10V. Este padrão é bastante interessante pois faz com que dois eletrodos vizinhos apresentem uma pequena diferença de potencial entre si, enquanto que dois eletrodos em posições opostas do corpo ficam submetidos a uma grande diferença de potencial. Essa característica força o fluxo de corrente a atravessar todo o domínio o que, a princípio, aumenta

a sensibilidade do sistema.

3.3 Problema direto e problema inverso

Como já foi mencionado na introdução, o processo da reconstrução de uma imagem na TIE é realizado em duas etapas [DONG et al., 2005]. Primeiramente deve-se resolver o *problema direto*, que corresponde à determinação dos potenciais elétricos ϕ no interior do domínio e da resposta, $\bar{\phi}$ ou \bar{J} , no contorno, supondo-se conhecidas a distribuição de condutividade σ e a excitação, \bar{J} ou $\bar{\phi}$, aplicada neste contorno. Como exemplo, consideremos um mapa do tipo $D \rightarrow N$. Neste caso, aplica-se um perfil de potencial elétrico no contorno $\partial\Omega$, ou seja, admite-se conhecidos os valores de $\bar{\phi}$. Podemos então denotar os potenciais $\bar{\phi}$ aplicados como ϕ_{aplic} . Com isso, pode-se resolver as equações (3.9), (3.10) e (3.11), gerando como resposta os valores dos fluxos de corrente \bar{J} medidos no contorno, que pode ser denotado por J_{med} . Matematicamente, a resolução do *problema direto* pode ser vista como uma transformação dada através do seguinte operador

$$\mathfrak{S}(\phi_{aplic}, \sigma) = J_{med} \quad (3.12)$$

que representa o processo de transformar as informações dadas por ϕ_{aplic} e σ na resposta dada por J_{med} .

Por sua vez, no problema da TIE, não se conhece a distribuição de condutividade σ no interior do domínio Ω . As únicas informações que podem ser acessadas são os dados de excitação/resposta no contorno do domínio. Portanto, deve-se agora tratar o problema como um *problema inverso*. Considerando-se novamente o caso $D \rightarrow N$, o *problema inverso* consiste na inversão do operador dado pela Eq.(3.12), ou seja, dados os valores do potencial ϕ_{aplic} aplicado e do fluxo de corrente J_{med} medido, determina-se a distribuição de condutividade σ no interior do domínio (Eq. 3.13).

$$\mathfrak{S}^{-1}(\phi_{aplic}, J_{med}) = \sigma \quad (3.13)$$

Resumindo, o *problema direto* corresponde à resolução da Eq. (3.9) considerando-se conhecidas a distribuição de condutividade σ no interior do domínio e uma das condições de contorno (Eq. 3.10 ou Eq. 3.11). Já o *problema inverso* consiste em resolver a Eq. (3.9) considerando-se conhecidas as duas condições de contorno (Eq. 3.10 e Eq. 3.11), mas desconhecida a distribuição da condutividade σ no interior do domínio [ROLNIK, 2003].

A resolução do problema direto, na maioria dos casos, não pode ser feita analiticamente. Isso só é possível para domínios com geometria e condições de contorno relativamente simples. Na prática, portanto, deve-se utilizar métodos numéricos de discretização como, por exemplo, o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC)¹. Cada uma dessas técnicas, dependendo das condições do problema, pode apresentar vantagens e desvantagens. De qualquer forma, atualmente o MEF é o método mais empregado na resolução de problemas de física e engenharia que necessitem de uma técnica de discretização. A Fig. (3.3) ilustra um esquema de solução do problema da TIE, destacando os três métodos mais utilizados para a resolução numérica da EDP.

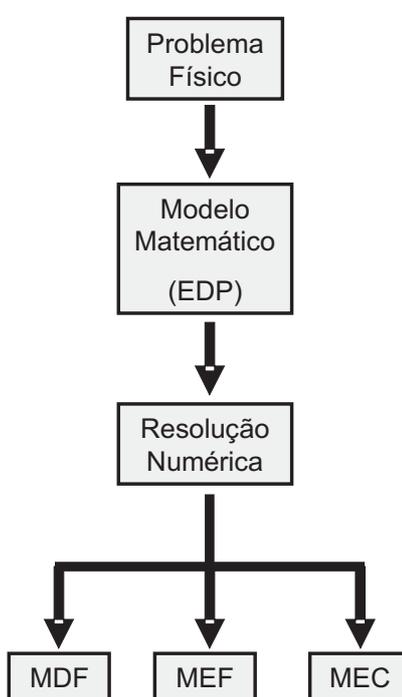


Figura 3.3: Metodos numéricos para resolução de EDP

A diferença fundamental entre os três métodos de discretização citados refere-se ao modo como o domínio é discretizado. No MDF, o domínio é dividido em um número finito de pontos distintos nos quais são determinados os valores da variável dependente do problema (Fig. 3.4). Neste caso, o espaçamento entre os pontos e, conseqüentemente, o número de pontos da malha irá definir o refinamento da solução. Por outro lado, quanto maior o refinamento maior será o sistema de equações a ser resolvido, visto que o valor desconhecido da variável dependente em cada ponto interno da malha corresponde a uma incógnita do sistema. Em outras palavras, uma malha que contenha, por exemplo, 500 pontos internos nos quais se deseja determinar o valor da variável dependente produz um sistema linear 500×500 . Uma vantagem do MDF

¹Em inglês, *Finite Difference Method* (FDM), *Finite Element Method* (FEM) e *Boundary Element Method* (BEM), respectivamente.

é que computacionalmente é um método simples de ser implementado. Por outro lado, ele requer geometrias simples para o domínio, não sendo facilmente adaptado para geometrias mais complexas.

Já no caso do MEF, o domínio é dividido em elementos geométricos (Fig. 3.4), por exemplo, triângulos ou quadriláteros², sendo que a variável dependente é calculada sobre os vértices de cada elemento. Também neste caso, o refinamento da malha acarreta no aumento no tamanho do sistema linear a ser resolvido, pois significa dividir o domínio em um número maior de elementos e, conseqüentemente, numa quantidade maior de vértices nos quais se deve determinar o valor da variável dependente. O MEF tem a vantagem de aceitar domínios com geometrias complexas além de permitir um maior refinamento da malha apenas em certas regiões críticas. Por outro lado, como já mencionado, ele também pode gerar sistemas demasiadamente grandes, dependendo do refinamento desejado.

Mesmo sendo relativamente novo, o MEC tem se desenvolvido bastante nas últimas décadas sendo atualmente visto como uma poderosa técnica para resolver problemas de valor de contorno nas áreas de engenharia e física. Segundo Ang [ANG, 2007], em 1985 menos de 200 publicações poderiam ser encontradas com o termo *Boundary Element Method*³ no título. Já em 2006, ultrapassou-se facilmente a casa de 1000 publicações. A grande vantagem do MEC é que ele necessita que somente o contorno do domínio seja discretizado [BREBBIA, 1978][BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992]. Isso é feito dividindo o contorno em segmentos ao longo dos quais deve-se determinar o valor da variável dependente ou de sua derivada na direção normal, dependendo de qual condição de contorno é aplicada em cada elemento (Fig. 3.4). A partir dos valores obtidos sobre o contorno, pode-se determinar o valor da variável dependente em qualquer ponto no interior do domínio.

A grande vantagem do MEC é, desta forma, a redução da dimensão do problema. Em outras palavras, para um domínio bidimensional, por exemplo, o MEF ou o MDF requer a discretização de toda a superfície do domínio gerando sistemas lineares de dimensões proporcionais ao número de pontos ou elementos desta superfície nos quais se deseja determinar o valor da variável dependente. Já no MEC, deve-se discretizar apenas o contorno, que no caso bidimensional, é uma linha, gerando um sistema linear correspondente ao número de elementos utilizados na sua discretização.

Outra vantagem do MEC, principalmente no que se refere ao problema da TIE, é que ao

²Para o caso de um domínio bidimensional (2D). Para domínios tridimensionais (3D), os elementos podem ser tetraedros, paralelepípedos, etc.

³O termo *Boundary Element Method* (BEM) foi usado pela primeira vez em um trabalho de 1977 [BREBBIA e DOMINGUEZ, 1977]

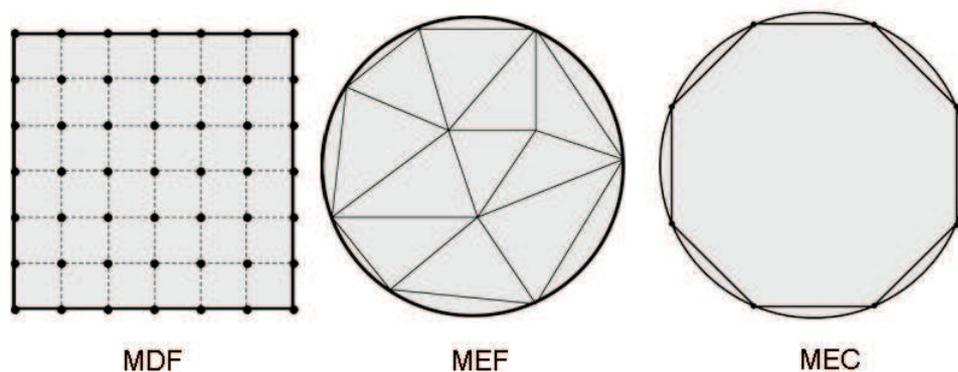


Figura 3.4: Modos de discretização do domínio

se resolver o sistema linear obtêm-se automaticamente os valores dos fluxos e dos potenciais nos elementos do contorno, sem a necessidade de se determinar os potenciais nos pontos internos do domínio. Ou seja, conhecendo-se os dados da excitação (potencial ou corrente), a discretização do contorno e a resolução sistema gerado fornece os valores das correspondentes respostas (corrente ou potencial). Isso, de fato, reduz consideravelmente a quantidade de operações que devem ser realizadas computacionalmente, o que pode gerar uma economia de tempo na reconstrução de uma imagem. De fato, existem atualmente diversos trabalhos que aplicam o MEC especificamente para o problema da TIE [ECKEL e KRESS, 2007], [CLERC et al., 2005] e [BABAEIZADEH e BROOKS, 2007].

Para finalizar esse capítulo, faz-se útil fazer uma breve discussão sobre a resolução do *problema inverso*, especificamente sobre as técnicas que utilizam a abordagem funcional. Apesar do objetivo desse trabalho ser a resolução do *problema direto*, especificamente utilizando-se o MEC, para algumas discussões que serão feitas nos próximos capítulos é necessário que se conheça algumas características sobre a resolução do problema inverso.

A abordagem funcional para resolução do problema inverso consiste em confrontar os dados obtidos a partir de dois modelos diferentes, um numérico, implementado computacionalmente, e outro experimental, obtido a partir de medidas reais. Para isso, cria-se um funcional de erro que mede a diferença entre as informações obtidas pelos dois modelos e que deve ser minimizado através de um processo de otimização, tais como os Algoritmos Genéticos (AG) [ROLNIK, 2003], o Método de Otimização Topológica (MOT) [LIMA, 2006] e o *Simulated Annealing* (SA) [HERRERA, 2007].

O funcional de erro deve ser construído de forma a ser capaz de detectar as discrepâncias geradas entre os valores das respostas (medida experimentalmente e calculada numericamente), quando se altera a distribuição de condutividade σ no interior do domínio. Por exemplo,

denotando por \mathbf{J}_{real} o vetor cujas componentes correspondem aos valores dos fluxos de corrente medidos experimentalmente nos eletrodos e por \mathbf{J}_{calc} o vetor cujas componentes correspondem aos valores dos fluxos de corrente calculados numericamente, pode-se definir o funcional de erro $e(\sigma)$ da seguinte forma

$$e(\sigma) = \|\mathbf{J}_{real} - \mathbf{J}_{calc}\| \quad (3.14)$$

que representa a máxima diferença entre os valores das componentes do vetor \mathbf{J}_{real} e os valores das componentes do vetor \mathbf{J}_{calc} . Deve-se destacar que essa definição para o funcional de erro é uma escolha possível entre outras. Pode-se, por exemplo, definir o funcional de erro como sendo o quadrado da norma do máximo entre os vetores \mathbf{J}_{real} e \mathbf{J}_{calc} ou como uma outra função qualquer que seja capaz de expressar a diferença entre os modelos numérico e experimental.

A partir da definição do funcional de erro, o processo de otimização consiste em procurar a distribuição de condutividade σ no interior do domínio que produza o mínimo global para o valor de $e(\sigma)$. Para isso, deve-se utilizar um algoritmo de busca que, em geral, consiste em propor uma distribuição inicial para a condutividade (σ_{aprox}) no interior do domínio com a qual resolve-se as Equações (3.9), (3.10) e (3.11), determinando uma resposta para \mathbf{J}_{calc} . Em outras palavras, dada uma distribuição de σ_{aprox} , resolve-se o *problema direto*. O valor encontrado para \mathbf{J}_{calc} é então confrontado com o valor de \mathbf{J}_{med} medido pelos eletrodos colocados na fronteira do corpo, gerando um valor para o funcional de erro $e(\sigma)$. Em seguida o processo deve ser repetido para diferentes distribuições de condutividade σ_{aprox} até que se encontre o mínimo global de $e(\sigma)$. No final do processo, a distribuição de condutividade que produzir o mínimo global do funcional de erro deverá corresponder àquela que mais se aproxima da distribuição real de condutividade σ_{real} no interior do domínio e, portanto, representa a imagem procurada. Numa situação ideal, por exemplo, a imagem procurada deve corresponder à distribuição de σ_{aprox} que anule o funcional de erro.

$$e(\sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_{real} = \mathbf{J}_{calc} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{aprox} = \sigma_{real} \quad (3.15)$$

A Figura (3.5) mostra o esquema da resolução do problema direto, o cálculo do funcional de erro e o processo de busca pelo mínimo de $e(\sigma)$ para a produção de uma imagem. É importante notar que essa abordagem requer que o problema direto seja resolvido a cada iteração do processo, ou seja, a cada alteração que o algoritmo de busca realizar na distribuição da condutividade σ_{aprox} , até que o mínimo global de $e(\sigma)$ seja atingido. Essa sistemática normalmente demanda um elevado tempo computacional, sendo essa uma das grandes desvantagens que a

TIE apresenta atualmente. Portanto, o desenvolvimento de métodos mais robustos e rápidos para resolver o problema direto é de fundamental importância [LIONHEART, 2004]. É nesse contexto que há uma perspectiva promissora para o MEC pois, ao apresentar um sistema linear relativamente pequeno, demanda menos tempo computacional para a resolução do problema direto do que os outros métodos de discretização. Sendo assim, é possível realizar um número maior de avaliações do funcional de erro $e(\sigma)$ na busca do mínimo global, sem acarretar aumento significativo no tempo computacional para a reconstrução de cada imagem.

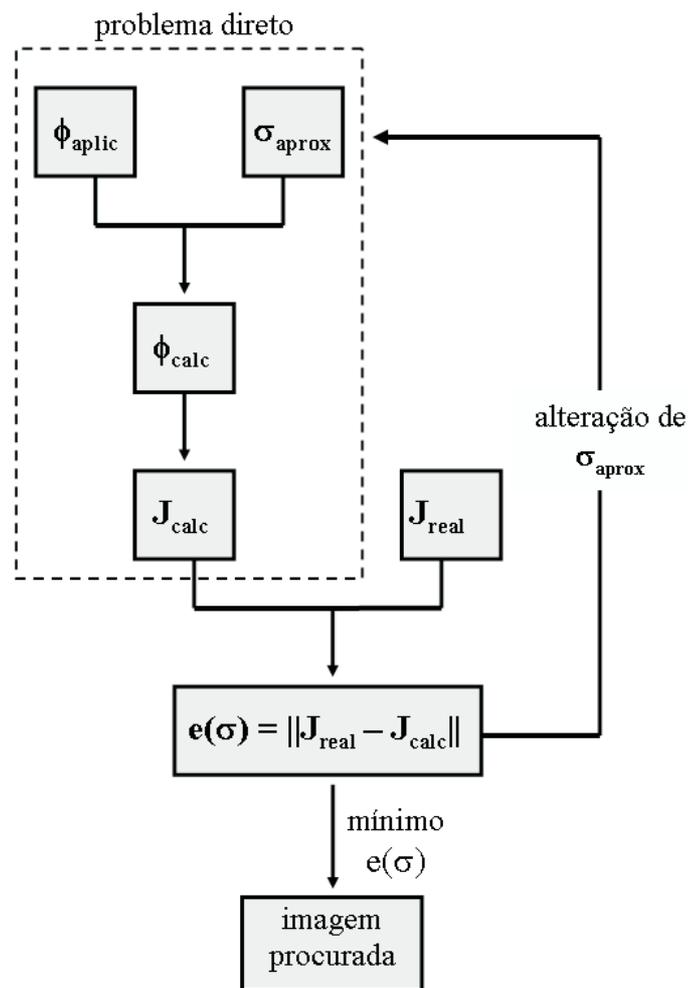


Figura 3.5: Esquema de otimização do funcional de erro

4 *O Método dos Elementos de Contorno*

Na prática, a grande maioria dos problemas de física, engenharia e outras áreas das ciências exatas são demasiadamente complexos para serem tratados analiticamente. De fato, os modelos matemáticos utilizados em tais áreas são normalmente equações diferenciais parciais, muitas vezes não lineares, contendo um grande número de variáveis e condições de contorno nada simples. Para esses casos, portanto, deve-se recorrer aos métodos de solução numérica. Neste capítulo será apresentado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e sua formulação matemática, especificamente para o caso de um domínio bidimensional (2D), destacando-se a equação principal que relaciona os potenciais e fluxos no contorno com os potenciais no interior do domínio. Deve-se mencionar que todo o desenvolvimento matemático realizado neste capítulo e a implementação computacional que será feita no próximo capítulo são baseados no livro *A Beginner's Course in Boundary Element Methods* [ANG, 2007].

4.1 O MEC aplicado a TIE

Pode-se abordar o problema da TIE de duas formas diferentes. Na primeira, considera-se que a condutividade no interior do domínio não é constante, ou seja, o valor de σ varia de ponto para ponto do domínio. Neste caso, adota-se como contorno do domínio apenas o contorno externo, no qual se aplica a excitação e se obtém a resposta. Desta forma, a resolução do problema consistirá em determinar os valores de σ em cada ponto ou região interna do corpo (Fig. 4.1a).

Uma segunda possibilidade é tratar o domínio com condutividade constante, mas contendo algumas regiões com condutividade nula, como se fossem bolhas de ar ou de outro material isolante no interior de uma solução condutora. Neste caso, considera-se como contorno do problema tanto o contorno externo como os contornos internos que separam as regiões de não condutividade das regiões condutoras. Com isso, o problema se resume na determinação das posições e dos tamanhos das regiões internas de não condutividade (Fig. 4.1b). Esse caso é especialmente interessante pois simplifica a Eq. (3.9). De fato, sendo a condutividade σ constante,

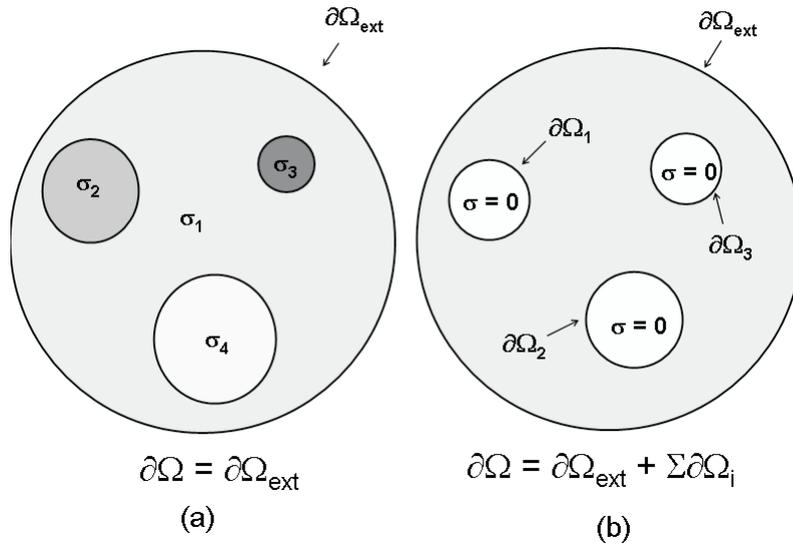


Figura 4.1: Duas abordagens para o problema da TIE

ela pode ser eliminada da equação de forma a se obter simplesmente o laplaciano do potencial elétrico (Eq. 4.1) ¹.

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

Neste trabalho, escolheu-se aplicar o MEC para esse caso específico, em que considera-se a condutividade constante no interior do domínio. Portanto, pode-se dizer que o objetivo específico é resolver numericamente a Eq. (4.1) através do Método dos Elementos de Contorno, de forma a se obter os potenciais elétricos nos pontos internos do domínio e os potenciais e fluxos sobre o contorno. Primeiramente, isso será feito com um domínio simples, sem inclusões de regiões de condutividade nula, e em seguida será considerado o caso com inclusões.

Como já mencionado, a formulação do MEC e o programa implementado neste trabalho aceita condições de contorno de ambos os tipos, Dirichlet (potencial imposto) e Neumann (fluxo imposto), bem como o caso misto (Dirichlet em uma parte do contorno e Neumann na parte complementar). Considere, portanto, o caso mais geral em que se tem um domínio Ω delimitado por uma curva fechada $\partial\Omega$ composta de duas curvas $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$, tal que $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$ (Fig 4.2).

Desta forma, pode-se impor condições de contorno de tipos diferentes em cada parte do contorno (Eq. 4.2 e Eq. 4.3).

¹Para um domínio bidimensional (2D)

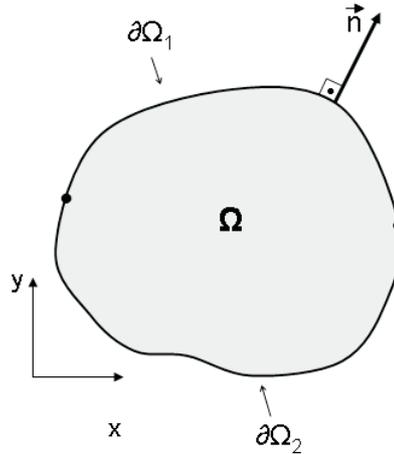


Figura 4.2: Domínio simples do MEC

$$\phi = \bar{\Phi}(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega_1 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \bar{J}(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega_2 \quad (4.3)$$

onde $\bar{\Phi}$ e \bar{J} são, respectivamente, os potenciais elétricos sobre $\partial\Omega_1$ e a componente normal dos fluxos de corrente sobre $\partial\Omega_2$, e \vec{n} é o vetor unitário normal ao contorno apontando para fora do domínio.

4.2 A formulação matemática

A idéia principal do MEC é transformar a equação diferencial parcial (Eq. 4.1) que atua sobre todo o domínio Ω em uma equação integral que atua somente sobre o contorno $\partial\Omega$ do domínio. Essa transformação é feita através da chamada *solução recíproca*, que basicamente é uma relação entre duas soluções quaisquer, ϕ_1 e ϕ_2 , da EDP e suas derivadas na direção normal, $\partial\phi_1/\partial n$ e $\partial\phi_2/\partial n$, sobre o contorno.

A obtenção da *solução recíproca* pode ser feita, de forma relativamente simples, através do teorema da divergência do cálculo diferencial e integral. Considere, por exemplo, que \mathbf{F} seja uma função vetorial que atua sobre o domínio Ω dada por

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}}$$

e que $\mathbf{n} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}}$ seja o vetor unitário normal ao contorno $\partial\Omega$. O teorema da divergência

afirma que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdy$$

que equivale igualmente a

$$\int_{\partial\Omega} (F_x n_x + F_y n_y) \, ds = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \, dxdy \quad (4.4)$$

Considerando que ϕ_1 e ϕ_2 sejam duas soluções quaisquer da Eq. (4.1), têm-se

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0 \quad (4.6)$$

Multiplicando a Eq. (4.5) por ϕ_2 e a Eq. (4.6) por ϕ_1 , e tirando a diferença obtêm-se

$$\phi_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \phi_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0$$

que corresponde ao resultado de

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Integrando a Eq. (4.7) em todo o domínio Ω , obtêm-se

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \right] \, dxdy = 0 \quad (4.8)$$

Por sua vez, comparando a Eq. (4.8) com o teorema da divergência dado por (4.4), pode-se dizer que

$$F_x = \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad \text{e} \quad F_y = \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y}$$

Portanto, aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \left[\left(\phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial x} - \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial x} \right) n_x + \left(\phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial y} - \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial y} \right) n_y \right] ds = 0$$

cujo desenvolvimento produz

$$\int_{\partial\Omega} \left[\left(\phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial x} n_x + \phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial y} n_y \right) - \left(\phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial x} n_x + \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial y} n_y \right) \right] ds = 0 \quad (4.9)$$

Considerando que

$$\phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial x} n_x + \phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial y} n_y = \phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial n} \quad \text{e} \quad \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial x} n_x + \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial y} n_y = \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial n}$$

a Eq. (4.9) produz a *solução recíproca*.

$$\int_{\partial\Omega} \left(\phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \right) ds(x,y) = 0 \quad (4.10)$$

Como mencionado, a solução recíproca (Eq.4.10) fornece uma relação entre duas soluções quaisquer ϕ_1 e ϕ_2 da Eq.(4.1). Sendo assim, pode-se afirmar que, caso se conheça pelo menos uma das soluções, a outra pode, a princípio, ser determinada a partir de *solução recíproca*. Seguindo essa idéia, portanto, se faz necessária agora a determinação de uma solução particular para a EDP(4.1).

Uma forma de se fazer isso é convertendo as coordenadas retangulares (x,y) para coordenadas polares (r,θ) tal que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Com isso, pode-se definir uma nova função $\psi(r,\theta) = \phi(x,y)$ de forma que a Eq.(4.1) adquira a forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} \right) = 0$$

No caso em que a função ψ não depende de θ , ou seja, quando ψ for função apenas de r a equação acima se reduz a uma equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} [\Psi(r)] \right) = 0 \quad \text{para } r \neq 0$$

Neste caso, uma possível solução analítica pode ser dada por

$$\Psi(r) = \frac{1}{2} \pi \ln(r) \quad (4.11)$$

Considerando que o centro do sistema de coordenadas seja (ξ, η) , pode-se escrever o valor de r como $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Portanto, a Eq. (4.11) pode ser dada, em coordenadas retangulares por

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

que, por sua vez, produz a chamada *solução fundamental*

$$\Phi(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \quad \text{para } (x, y) \neq (\xi, \eta) \quad (4.12)$$

4.3 A equação integral sobre o contorno

A partir de agora, com as equações (4.12) e (4.10) pode-se determinar a equação integral do MEC que permite resolver o problema de valor de contorno (PVC) dado por (4.1), (4.2) e (4.3). Considere que $\phi_1 = \Phi(x, y; \xi, \eta)$ seja a solução fundamental dada pela Eq. (4.12) e que $\phi_2 = \phi$ seja a solução procurada do PVC. Então, usando a Eq. (4.10), têm-se

$$\int_{\partial\Omega} \left[\phi(x, y) \frac{\partial}{\partial n} (\Phi(x, y; \xi, \eta)) - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} (\phi(x, y)) \right] ds(x, y) = 0$$

para $(\xi, \eta) \notin \Omega \cup \partial\Omega$ (4.13)

Deve-se notar que a Eq. (4.13) vale para pontos (ξ, η) que não pertencem ao domínio Ω nem ao contorno $\partial\Omega$. Naturalmente que esta restrição, a princípio, inviabiliza a resolução do problema. No entanto, é possível contorná-la de forma a se determinar duas equações diferentes, uma que aceita pontos no interior do domínio Ω e outra que pode ser aplicada em pontos do

contorno $\partial\Omega$. O desenvolvimento matemático para isso é demasiadamente extenso e pode ser encontrado na referência [ANG, 2007].

Resumidamente, para o caso em que (ξ, η) localiza-se no interior de Ω , a Eq.(4.13) produz

$$\phi(\xi, \eta) = \int_{\partial\Omega} \left[\phi(x, y) \frac{\partial}{\partial n} (\Phi(x, y; \xi, \eta)) - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} (\phi(x, y)) \right] ds(x, y)$$

para $(\xi, \eta) \in \Omega$ (4.14)

Já para o caso em que (ξ, η) localiza-se no contorno $\partial\Omega$ a Eq.(4.13) produz

$$\frac{1}{2}\phi(\xi, \eta) = \int_{\partial\Omega} \left[\phi(x, y) \frac{\partial}{\partial n} (\Phi(x, y; \xi, \eta)) - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} (\phi(x, y)) \right] ds(x, y)$$

para $(\xi, \eta) \in \partial\Omega$ (4.15)

De fato, as Eqs. (4.14) e (4.15) fornecem as ferramentas necessárias para resolver o PVC dado por (4.1), (4.2) e (4.3). Primeiramente, deve-se lembrar que na parte do contorno onde se impõe o potencial $\bar{\phi}$ (Eq. 4.2), não se conhece o valor de $\partial\phi/\partial n$. Por outro lado, na parte onde se impõe o fluxo \bar{J} , desconhece-se o valor do potencial ϕ . Sendo assim, primeiramente deve-se usar a Eq. (4.15) para determinar os valores desconhecidos de ϕ e $\partial\phi/\partial n$ nos pontos do contorno $\partial\Omega$.

Neste ponto, é importante notar o quanto que a Eq.(4.15) é de fundamental importância, especificamente para o problema da Tomografia de Impedância Elétrica. De fato, na TIE a única região acessível para troca de informação (excitação/resposta) com o corpo sensoriado é através do contorno externo, onde são acoplados os eletrodos. Sendo assim a aplicação da Eq. (4.15) fornece toda relação entre excitação (potencial ou fluxo) e resposta (fluxo ou potencial) sobre o contorno, sem a necessidade de se determinar os potenciais nos pontos internos do domínio.

De qualquer maneira, uma vez conhecidos os valores de ϕ e $\partial\phi/\partial n$ em todos os pontos do contorno, pode-se usar a Eq. (4.14) para calcular os valores do potencial ϕ em qualquer ponto (ξ, η) do domínio Ω , caso seja necessário. Naturalmente que a formulação apresentada considera o domínio e o contorno como regiões contínuas, contendo infinitos pontos. Já a resolução numérica do problema, no entanto, requer que tanto as equações (4.14) e (4.15), como

o contorno $\partial\Omega$ tenham que ser discretizados. A discussão sobre a discretização do problema e a implementação computacional é o assunto do próximo capítulo.

5 *Discretização e Implementação Computacional*

Neste capítulo, será discutida e implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno para resolver o *problema direto* da TIE. Para isso, primeiramente será mostrado como é feita a discretização do problema (equações integrais e contorno). Em seguida, apresentam-se os passos necessários para a implementação computacional que, particularmente neste trabalho, foi realizada em linguagem *C*.

5.1 A discretização do problema

O processo de discretização necessário para a utilização do MEC na resolução de um PVC é feito em duas etapas. Primeiramente deve-se discretizar o domínio, que no caso do MEC, significa discretizar apenas o contorno do domínio. Em seguida, é feita a discretização das equações (4.14) e (4.15), aproximando-se as integrais para um somatório de um número finito de termos.

Considere, portanto, um domínio Ω fechado através de um contorno $\partial\Omega$. A discretização do contorno é realizada aproximando-o de um polígono de N lados $\partial\Omega^{(1)}$, $\partial\Omega^{(2)}$, ..., $\partial\Omega^{(N-1)}$ e $\partial\Omega^{(N)}$, tal que

$$\partial\Omega \cong \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)} \cup \dots \cup \partial\Omega^{(N-1)} \cup \partial\Omega^{(N)}$$

Os vértices P_1, P_2, \dots, P_N e P_{N+1} do polígono são definidos por suas coordenadas $(x^{(1)}, y^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)})$, ..., $(x^{(N-1)}, y^{(N-1)})$ e $(x^{(N)}, y^{(N)})$, sendo que, como garantia de que o polígono seja fechado, por convenção define-se $(x^{(N+1)}, y^{(N+1)}) = (x^{(1)}, y^{(1)})$ (Fig. 5.1).

Segundo [BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992], os valores de ϕ e $\partial\phi/\partial n$ em cada elemento podem ser tratados de três modos diferentes: *i*) consideram-se os valores constantes ao longo de todo o elemento; *ii*) considera-se que os valores variam linearmente ao longo do elemento;

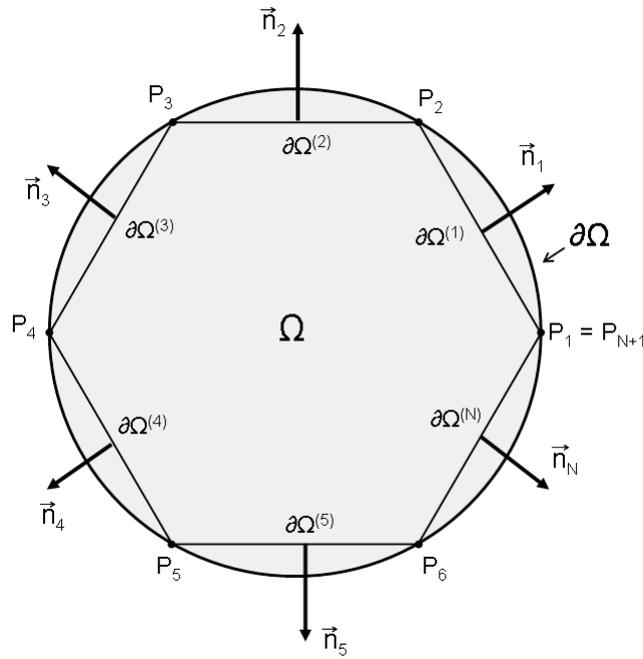


Figura 5.1: Domínio discretizado

iii) considera-se que os valores variam quadraticamente ao longo do elemento. Para o presente trabalho, considerou-se o caso *i*), chamado de *elementos constantes*, por apresentar uma solução analítica para as integrais da solução fundamental que deverão ser calculadas ao longo de cada elemento. Portanto, pode-se assumir que em cada elemento (lado do polígono) os valores de ϕ e $\partial\phi/\partial n$ são constantes e dados por

$$\phi(x, y) \cong \bar{\phi}^{(k)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial n} \cong \bar{p}^{(k)} \quad \text{para} \quad (x, y) \in \partial\Omega^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

em que $\bar{\phi}^{(k)}$ e $\bar{p}^{(k)}$ são os valores de ϕ e $\partial\phi/\partial n$ no ponto médio $(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)})$ do elemento $\partial\Omega^{(k)}$, respectivamente.

Realizada a discretização do contorno $\partial\Omega$, pode-se agora discretizar as equações integrais, transformando-as em somatórios. No caso da Eq. (4.14), definida para pontos (ξ, η) no interior do domínio, obtém-se

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N \left[\bar{\phi}^{(k)} F_2^{(k)}(\xi, \eta) - \bar{p}^{(k)} F_1^{(k)}(\xi, \eta) \right] \quad (5.1)$$

e para o caso da Eq. (4.15), definida para pontos (ξ, η) sobre o contorno (que agora devem ser

pontos sobre os elementos de contorno), obtém-se

$$\frac{1}{2}\phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N \left[\bar{\phi}^{(k)} F_2^{(k)}(\xi, \eta) - \bar{p}^{(k)} F_1^{(k)}(\xi, \eta) \right] \quad (5.2)$$

sendo que $F_1^{(k)}(\xi, \eta)$ e $F_2^{(k)}(\xi, \eta)$ correspondem à integral da solução fundamental e à integral da derivada na direção normal da solução fundamental, respectivamente, sobre cada elementos de contorno $\partial\Omega^{(k)}$, considerando-se um ponto (ξ, η) em relação ao qual deseja-se resolver as equações (5.1) e (5.2).

$$F_1^{(k)}(\xi, \eta) = \int_{\partial\Omega^{(k)}} \Phi(x, y; \xi, \eta) ds(x, y) \quad (5.3)$$

$$F_2^{(k)}(\xi, \eta) = \int_{\partial\Omega^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n} [\Phi(x, y; \xi, \eta)] ds(x, y) \quad (5.4)$$

5.2 O sistema linear

Analisando as Eqs. (5.1) e (5.2), deve-se notar que para cada k dado, $\bar{\phi}^{(k)}$ ou $\bar{p}^{(k)}$ é conhecido, mas não ambos. Fisicamente falando, significa que para cada elemento $\partial\Omega^{(k)}$, sabe-se o valor do potencial elétrico imposto (Dirichlet), mas não se conhece o fluxo de corrente resultante (Neumann), ou vice-versa, conhece-se o valor do fluxo de corrente imposto, mas não se sabe o valor do potencial. Portanto, têm-se N valores desconhecidos que deverão ser determinados a partir da geração de um sistema linear de N equações através da Eq. (5.2). Para isso, deve-se considerar (ξ, η) como sendo o ponto médio (\bar{x}, \bar{y}) de cada elemento, de forma a obter-se

$$\frac{1}{2}\bar{\phi}^{(m)} = \sum_{k=1}^N \left[\bar{\phi}^{(k)} F_2^{(k)}(\bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) - \bar{p}^{(k)} F_1^{(k)}(\bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) \right] \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, N \quad (5.5)$$

Considerando que tanto $\bar{\phi}$ como \bar{p} podem ser incógnitas na Eq.(5.5), dependendo de qual elemento $\partial\Omega^{(k)}$ se considera, pode-se generalizar denotando por $z^{(k)}$ as incógnitas do sistema e escrevê-lo da seguinte forma

$$\sum_{k=1}^N a^{(mk)} z^{(k)} = \sum_{k=1}^N b^{(mk)} \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, N \quad (5.6)$$

que também pode ser expresso como

$$\begin{array}{cccccccc} a^{(11)} z^{(1)} & + & a^{(12)} z^{(2)} & + & \dots & + & a^{(1N)} z^{(N)} & = & b^{(11)} & + & b^{(12)} & + & \dots & + & b^{(1N)} \\ a^{(21)} z^{(1)} & + & a^{(22)} z^{(2)} & + & \dots & + & a^{(2N)} z^{(N)} & = & b^{(21)} & + & b^{(22)} & + & \dots & + & b^{(2N)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a^{(N1)} z^{(1)} & + & a^{(N2)} z^{(2)} & + & \dots & + & a^{(NN)} z^{(N)} & = & b^{(N1)} & + & b^{(N2)} & + & \dots & + & b^{(NN)} \end{array}$$

onde $a^{(mk)}$, $b^{(mk)}$ e $z^{(k)}$ são definidos como

$$\begin{aligned} a^{(mk)} &= \begin{cases} -F_1^{(k)}(\bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) & \text{se } \phi \text{ é definido sobre } \partial\Omega^{(k)} \\ F_2^{(k)}(\bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(k)}) - \frac{1}{2}\delta^{(mk)} & \text{se } \partial\phi/\partial n \text{ é definido sobre } \partial\Omega^{(k)} \end{cases} \\ b^{(mk)} &= \begin{cases} \bar{\phi}^{(k)}[-F_2^{(k)}(\bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(m)}) + \frac{1}{2}\delta^{(mk)}] & \text{se } \phi \text{ é definido sobre } \partial\Omega^{(k)} \\ \bar{p}^{(k)} F_1^{(k)}(\bar{x}^{(m)}, \bar{y}^{(k)}) & \text{se } \partial\phi/\partial n \text{ é definido sobre } \partial\Omega^{(k)} \end{cases} \\ \delta^{(mk)} &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ 1 & \text{se } m = k \end{cases} \\ z^{(k)} &= \begin{cases} \bar{p}^{(k)} & \text{se } \phi \text{ é definido sobre } \partial\Omega^{(k)} \\ \bar{\phi}^{(k)} & \text{se } \partial\phi/\partial n \text{ é definido sobre } \partial\Omega^{(k)} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Deve-se notar que a dimensão do sistema linear corresponde ao número N de elementos de contorno que se adota para a discretização. Neste ponto, aparece uma das vantagens do MEC em relação ao MEF, por exemplo, pois neste, a necessidade de discretização de todo o domínio gera um sistema consideravelmente maior. Além disso, a resolução do sistema dado por (5.6) fornece todos os valores do potencial $\bar{\phi}$ e do fluxo \bar{J} sobre o contorno sem a necessidade de se calcular os potenciais elétricos no interior do domínio. Como já mencionado, essa característica é especialmente interessante para a TIE, visto que as informações são obtidas apenas sobre o contorno do objeto a ser imageado.

De qualquer maneira, após resolver o sistema e obter todos os valores de $\bar{\phi}$ e \bar{J} sobre os elementos do contorno, pode-se usar a Eq. (5.1) para determinar os valores de ϕ nos pontos (ξ, η)

pertencentes ao interior do domínio Ω . Também neste ponto, deve-se notar outra vantagem do MEC. Após a resolução do sistema uma única vez, o cálculo do potencial pode ser feito em qualquer e em quantos pontos forem necessários do interior do domínio, diferentemente do MEF e do MDF nos quais a resolução do sistema fornece o potencial em apenas alguns pontos específicos (pontos pertencentes à rede). Por sua vez, no MEC, para cada ponto (ξ, η) do interior do domínio no qual se deseja calcular o potencial ϕ , deve-se fazer um somatório de $\left[\bar{\phi}^{(k)} F_2^{(k)}(\xi, \eta) - \bar{p}^{(k)} F_1^{(k)}(\xi, \eta) \right]$ sobre os N elementos do contorno.

5.3 A solução analítica de F_1 e F_2

O cálculo dos potenciais e dos fluxos nos pontos do contorno a partir da Eq.(5.2) e dos potenciais nos pontos internos do domínio a partir da Eq.(5.1) necessitam dos valores de $F_1(\xi, \eta)$ e $F_2(\xi, \eta)$, dados pelas equações (5.3) e (5.4). Isso pode ser feito a partir da integração numérica das equações (5.3) e (5.4), como por exemplo a partir da regra da quadratura de Gauss, método usado em [BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992]. De qualquer maneira, outras técnicas de integração numérica podem ser encontradas em [PRESS et al., 1992] e [BURDEN e FAIRES, 2008].

Particularmente neste trabalho, por considerar os valores de ϕ e $\partial\phi/\partial n$ constantes ao longo de cada elemento, foi possível utilizar soluções analíticas para as integrais (5.3) e (5.4). Os desenvolvimentos matemáticos para a determinação dessas soluções são extensos e podem ser encontrados na referência [ANG, 2007].

Para os cálculos de $F_1(\xi, \eta)$ e $F_2(\xi, \eta)$ a partir das soluções analíticas, se faz necessária a determinação do vetor unitário normal $\mathbf{n} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}}$ a cada elemento do contorno apontando para fora do domínio, sendo

$$n_x = \frac{y^{(k+1)} - y^{(k)}}{\ell^{(k)}} \quad \text{e} \quad n_y = \frac{x^{(k)} - x^{(k+1)}}{\ell^{(k)}} \quad (5.8)$$

sendo $\ell^{(k)}$ o comprimento de cada elemento $\partial\Omega^{(k)}$ do contorno. Deve-se notar que a Eq.(5.8) garante que o vetor normal aponta para fora do domínio somente se a numeração dos pontos do contorno e, conseqüentemente de suas coordenadas, for feita no sentido anti-horário, como mostra a Fig.(5.1).

Com isso, define-se os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned}
A^{(k)} &= (\ell^{(k)})^2 \\
B^{(k)}(\xi, \eta) &= [-n_y^{(k)}(x^{(k)} - \xi) + (y^{(k)} - \eta)n_x^{(k)}](2\ell^{(k)}) \\
E^{(k)}(\xi, \eta) &= (x^{(k)} - \xi)^2 + (y^{(k)} - \eta)^2
\end{aligned}$$

Finalmente, as soluções analíticas das integrais dadas pelas Eqs. (5.3) e (5.4) são

$$\begin{aligned}
F_1^{(k)}(\xi, \eta) &= \frac{\ell^{(k)}}{2\pi} \left\{ \ln(\ell^{(k)}) + \left(1 + \frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{2A^{(k)}}\right) \ln \left| 1 + \frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{2A^{(k)}} \right| \right. \\
&\quad \left. - \frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{2A^{(k)}} \ln \left| \frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{2A^{(k)}} \right| - 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{para } 4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2 = 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
F_1^{(k)}(\xi, \eta) &= \frac{\ell^{(k)}}{4\pi} \left\{ 2[\ln(\ell^{(k)} - 1)] - \frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{2A^{(k)}} \ln \left| \frac{E^{(k)}(\xi, \eta)}{A^{(k)}} \right| \right. \\
&\quad + \left(1 + \frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{2A^{(k)}}\right) \ln \left| 1 + \frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{A^{(k)}} + \frac{E^{(k)}(\xi, \eta)}{A^{(k)}} \right| \\
&\quad + \frac{\sqrt{4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2}}{A^{(k)}} \\
&\quad \times \left[\arctan\left(\frac{2A^{(k)} + B^{(k)}(\xi, \eta)}{\sqrt{4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \arctan\left(\frac{B^{(k)}}{\sqrt{4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2}}\right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{para } 4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2 > 0 \quad (5.10)$$

$$F_2^{(k)}(\xi, \eta) = 0$$

$$\text{para } 4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2 = 0 \quad (5.11)$$

$$F_2^{(k)}(\xi, \eta) = \frac{\ell^{(k)}[n_x^{(k)}(x^{(k)} - \xi) + n_y^{(k)}(y^{(k)} - \eta)]}{\pi \sqrt{4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2}} \\ \times \left[\arctan\left(\frac{2A^{(k)} + B^{(k)}(\xi, \eta)}{\sqrt{4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2}}\right) \right. \\ \left. - \arctan\left(\frac{B^{(k)}(\xi, \eta)}{\sqrt{4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2}}\right) \right]$$

$$\text{para } 4A^{(k)}E^{(k)}(\xi, \eta) - [B^{(k)}(\xi, \eta)]^2 > 0 \quad (5.12)$$

5.4 Implementação computacional

Uma implementação computacional do método foi realizada usando a linguagem C. O programa foi testado para vários exemplos considerando-se dois domínios diferentes (quadrado e circular). Em cada teste variou-se o número de elementos de contorno, o tipo (Dirichlet, Neumann ou mista) e o valor das condições de contorno bem como o refinamento da rede interna dos pontos nos quais se calculou o valor de ϕ . Independente da geometria do domínio, a espinha dorsal do programa divide-se nas seguintes partes:

1. declaração de variáveis e definição de parâmetros globais do programa (número N de elementos de contorno, dimensões do domínio, contadores, etc);
2. definição das coordenadas $(x^{(k)}, y^{(k)})$ dos pontos correspondentes ao início de cada elemento k do contorno¹;
3. definição do tipo (Dirichlet ou Neumann) e do valor da condição de contorno para cada elemento k do contorno;
4. construção do sistema linear;
 - cálculo dos pontos médios $(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)})$ e dos vetores unitários normais $[n_x, n_y]$ para cada elemento k do contorno;
 - cálculo das funções $F1$ e $F2$ pelas Eqs. (5.9), (5.10), (5.11) e (5.12) considerando (ξ, η) como o ponto médio $(\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)})$ dos elementos;

¹Deve-se lembrar de adotar $(x^{(N+1)}, y^{(N+1)}) = (x^{(1)}, y^{(1)})$

- construção das equações do sistema usando a Eq.(5.6) considerando as condições dadas por (5.7)
5. resolução do sistema linear ²;
 6. cálculo do potencial ϕ nos pontos internos do domínio
 - definição do ponto (ξ, η) do domínio no qual se deseja calcular o valor de ϕ ;
 - cálculo das funções $F1$ e $F2$ pelas Eqs. (5.9), (5.10), (5.11) e (5.12) considerando (ξ, η) como o ponto onde deseja-se determinar valor de ϕ ;
 - cálculo do valor de $\phi(\xi, \eta)$ a partir da Eq.(5.1)
 7. saída dos resultados.

Novamente vale destacar algumas características fundamentais do MEC quando implementado computacionalmente. Primeiramente, a matriz de coeficientes do sistema linear (5.6) não depende das coordenadas (ξ, η) dos pontos internos onde será calculado valor de ϕ . Por sua vez, ela dependerá dos pontos que definem os elementos de contorno e, conseqüentemente, dos pontos médios e dos vetores unitários normais de cada elemento. Uma das conseqüências importantes dessa característica está no fato de que o tamanho N da matriz do sistema linear depende exclusivamente do número de elementos de contorno e não depende da quantidade de pontos da rede interna nos quais se deseja calcular o valor de ϕ . Em outras palavras, o número de pontos da rede interna pode ser consideravelmente grande, gerando um refinamento bastante satisfatório, mesmo que o tamanho da matriz, definido pela quantidade de elementos de contorno, seja relativamente pequeno. Além disso, o sistema linear necessita ser resolvido uma única vez pois, determinados os valores de $\bar{\phi}$ e \bar{J} sobre todos os elementos do contorno, pode-se determinar o valor de ϕ em qualquer ponto do interior do domínio, independente de quantos sejam, sem que seja necessário resolver o sistema novamente.

A implementação também pode ser feita de forma a considerar regiões não condutoras no interior do domínio. Para isso, considera-se como contorno do problema tanto o contorno externo $\partial\Omega_{ext}$ como os contornos internos $\partial\Omega_{int}$. Por sua vez, nos contornos internos o vetor unitário normal deve apontar para dentro da região de não condutividade, pois esta corresponde ao exterior do domínio. Matematicamente, isso pode ser feito fazendo a numeração dos pontos no sentido horário, contrário de como é realizada no contorno externo, como mostra a Fig.(5.2).

Também deve-se atentar, durante a implementação, para a passagem do contorno externo para o contorno interno, ou de maneira geral, para a passagem de um contorno qualquer para

²No programa implementado foi usado o *Método de Eliminação da Gauss*

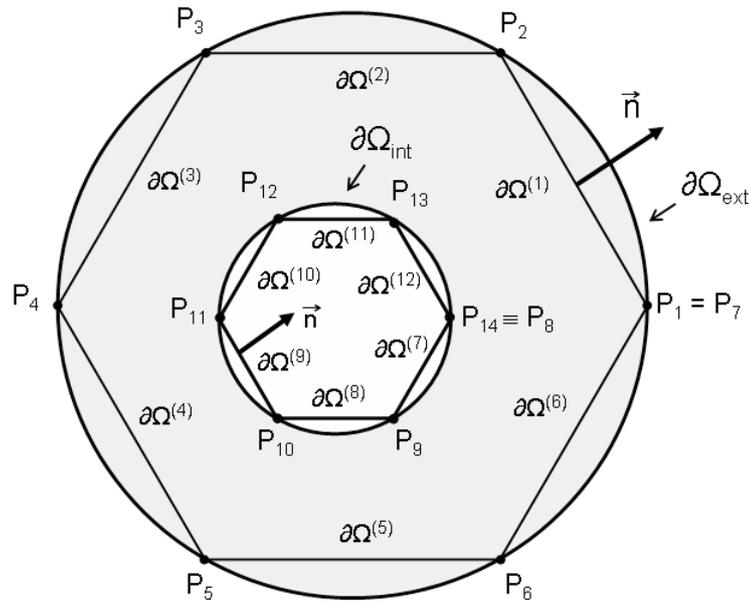


Figura 5.2: Domínio discretizado com inclusão interna

outro. De fato, os cálculos do ponto médio (\bar{x}, \bar{y}) , do vetor unitário normal $[n_x, n_y]$ bem como a definição da condição de contorno para cada elemento de contorno, que por fim são utilizados na geração do sistema linear, devem ser realizados seguindo uma certa regra. Por exemplo, considere a Fig. (5.2), na qual o contorno externo $\partial\Omega_{ext}$ é dividido em 6 elementos de contorno e o contorno interno $\partial\Omega_{int}$, também em 6 elementos de contorno, gerando um total de 12 elementos. Para o contorno externo $\partial\Omega_{ext}$, os cálculos associados ao elemento $\partial\Omega^{(1)}$, devem ser feitos utilizando-se os pontos $(x^{(1)}, y^{(1)})$ e $(x^{(2)}, y^{(2)})$, para o elemento $\partial\Omega^{(2)}$, os pontos $(x^{(2)}, y^{(2)})$ e $(x^{(3)}, y^{(3)})$ e para o elemento $\partial\Omega^{(k)}$, os pontos $(x^{(k)}, y^{(k)})$ e $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})$. Por sua vez, considerando o contorno interno $\partial\Omega_{int}$, a relação muda pois, para os cálculos associados ao elemento $\partial\Omega^{(7)}$ devem ser usados os pontos $(x^{(8)}, y^{(8)})$ e $(x^{(9)}, y^{(9)})$, para o elemento $\partial\Omega^{(8)}$, os pontos $(x^{(9)}, y^{(9)})$ e $(x^{(10)}, y^{(10)})$ e para o elemento $\partial\Omega^{(k)}$, os pontos $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})$ e $(x^{(k+2)}, y^{(k+2)})$.

Esse procedimento é necessário, pois entre o último ponto de um contorno e o primeiro ponto do próximo contorno, a princípio, existe um "elemento virtual" que não pode ser levado em consideração durante a geração do sistema linear. No caso da Fig. (5.2), por exemplo, esse "elemento virtual" está compreendido entre os pontos $P_7(x^{(7)}, y^{(7)})$ e $P_8(x^{(8)}, y^{(8)})$. Naturalmente que o procedimento descrito acima pode ser realizado considerando-se mais do que uma inclusão interna. O importante é que ele seja feito sempre que houver a passagem de um contorno para outro.

6 *Simulações Numéricas e Resultados*

Neste capítulo, são apresentados os testes e simulações numéricas bem como os resultados obtidos pelo programa discutido no capítulo anterior. Os testes e simulações foram realizados considerando-se dois tipos de domínio: quadrado e circular. Também foram aplicadas diversos tipos e com variados valores de condições de contorno, tanto no caso em que os potenciais são impostos (condição de Dirichlet), como no caso em que os fluxos são impostos (condição de Neumann) e também no caso misto, em que parte do contorno recebe condição de Dirichlet e a parte complementar recebe condição de Neumann. Para os testes foi utilizado um computador com processador Intel Core(TM)2Duo de 2,5GHz e 2GB de RAM.

Teste 1.

O primeiro problema a ser testado consiste em um domínio quadrado de lado unitário $L = 1$ definido no plano cartesiano como a região $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$, com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \phi &= 75 & \text{para } x = 0 & \text{ e } 0 < y < L \\ \phi &= 100 & \text{para } x = L & \text{ e } 0 < y < L \\ \phi &= 50 & \text{para } y = 0 & \text{ e } 0 < x < L \\ \phi &= 0 & \text{para } y = L & \text{ e } 0 < x < L \end{aligned}$$

Esse exemplo foi retirado da referência [FORTUNA, 2000]. No livro, o problema foi proposto considerando uma chapa plana bidimensional com condutibilidade térmica uniforme e constante onde as condições de contorno correspondem às temperaturas, consideradas constantes, que cada lado da chapa é submetido. Sendo um regime estacionário e não havendo fontes térmicas internas, a temperatura no interior da chapa pode ser descrita pelo laplaciano da temperatura T (6.1).

$$\nabla^2 T = 0 \tag{6.1}$$

A resolução apresentada no livro baseia-se no Método das Diferenças Finitas (MDF). Foi escolhida uma malha interna de 9 pontos (3x3) nos quais a temperatura T foi calculada.

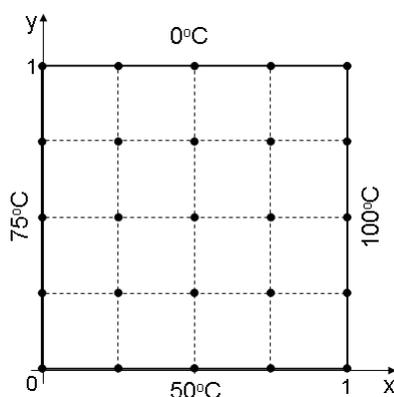


Figura 6.1: Domínio quadrado de lado unitário discretizado pelo MDF

O sistema linear foi resolvido utilizando o Método de Gauss-Seidel e os resultados obtidos estão mostrados na Tab. (6.1).

Tabela 6.1: Distribuição de temperaturas calculada pelo MDF

	0,00	0,00	0,00	
75,00	42,85	37,72	51,78	100,0
75,00	58,70	56,24	69,41	100,0
75,00	60,71	59,15	69,64	100,0
	50,00	50,00	50,00	

O teste com o MEC foi realizado utilizando um total de 16 elementos de contorno (4 elementos por lado do domínio) e resolução do sistema linear através de Método de Eliminação de Gauss. Como forma de comparação com o resultado obtido pelo MDF, também foi escolhida uma rede interna de 9 pontos (3x3) (os mesmos pontos escolhidos no teste com o MDF), lembrando que ela poderia ser maior e mais refinada, caso fosse necessário, não acarretando aumento no tamanho do sistema linear. Os resultados obtidos pelo MEC estão mostrados na Tabela (6.2).

Tabela 6.2: Distribuição de temperaturas calculada pelo MEC

	0,00	0,00	0,00	
75,00	42,58	36,46	51,69	100,0
75,00	59,28	56,25	70,45	100,0
75,00	60,81	58,81	69,92	100,0
	50,00	50,00	50,00	

Nota-se que os resultados obtidos pelo MEC estão muito próximos daqueles obtidos pelo MDF. Esse primeiro teste considerou apenas condição de contorno do tipo Dirichlet, na qual as temperaturas T são impostas sobre o contorno. Apesar de ser um teste simples, foi a primeira validação do programa realizada após sua implementação.

Teste 2.

Esse teste foi realizado com três problemas de valor de contorno (6.2), (6.3) e (6.4) que possuem soluções analíticas, pois assim pode-se fazer uma comparação mais eficiente para validar os resultados numéricos obtidos pelo MEC. O PVC I corresponde a um domínio quadrado com condições de contorno impostas somente do tipo Dirichlet. O PVC II também corresponde a um domínio quadrado, com condições de contorno mista. Finalmente, o PVC III só aplica condições de contorno do tipo Dirichlet, porém corresponde a um domínio circular. Os domínios para os três PVCs estão mostrados na Fig. (6.2).

$$(\text{PVC I}) \begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ \phi(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, 1] \\ \phi(0, y) = 0 & \text{para } y \in [0, 1] \\ \phi(x, 1) = x & \text{para } x \in [0, 1] \\ \phi(1, y) = y & \text{para } y \in [0, 1] \end{cases} \quad (6.2)$$

Cuja solução analítica é $\phi(x, y) = x.y$

$$(\text{PVC II}) \begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ \phi(0, y) = 0 & \text{para } y \in [0, 1] \\ \phi(1, y) = \cos(\pi y) & \text{para } y \in [0, 1] \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, 1] \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, 1) = 0 & \text{para } x \in [0, 1] \end{cases} \quad (6.3)$$

Cuja solução analítica é $\phi(x, y) = \frac{\sinh(\pi x) \cos(\pi y)}{\sinh(\pi)}$

$$(\text{PVC III}) \begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\} \\ \phi(x, y) = x + y & (x, y) \in \partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} \end{cases} \quad (6.4)$$

Cuja solução analítica é $\phi(x, y) = x + y$.

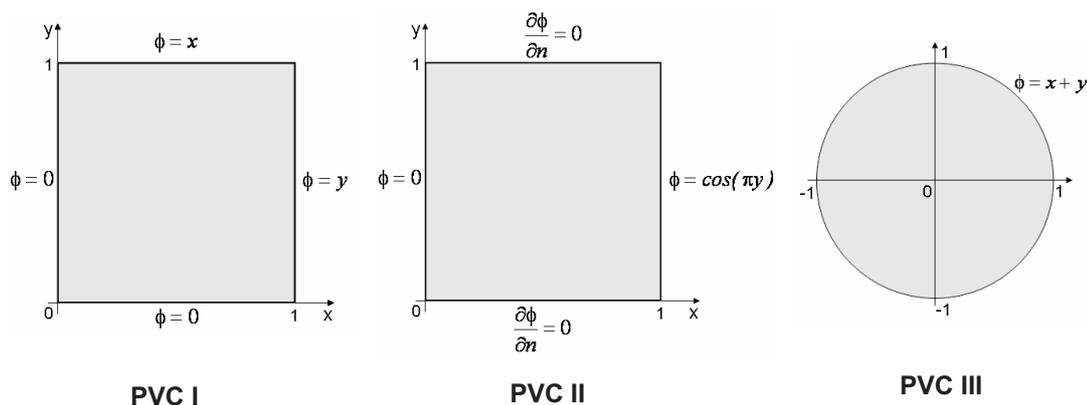


Figura 6.2: Domínio dos PVCs

Para o PVC I e o PVC II, o programa calculou a solução numérica em 400 pontos internos uniformemente distribuídos uma rede 20×20 . Para o PVC III, o programa gerou uma rede de 23×23 pontos centrada na origem do sistema cartesiando (que coincide com o centro do domínio circular) e as soluções numéricas foram calculadas somente nos pontos da rede localizados no interior do domínio. Com isso, o número de pontos internos avaliados no PVC III varia dependendo do número de elementos de contorno escolhido, pois o polígono que resulta da discretização pode se aproximar mais ou menos da geometria circular do domínio. Um erro relativo ER dado pela Eq. (6.5), foi usado para comparar os resultados numéricos ϕ_{aprox} com os resultados analíticos ϕ_{real} , em cada ponto avaliado pelo programa.

$$ER = \frac{|\phi_{real} - \phi_{aprox}|}{|\max\{\phi_{real}\} - \min\{\phi_{real}\}|} \quad (6.5)$$

O programa foi rodado para os três problemas (6.2), (6.3) e (6.4) e para diferentes números N de elementos de contorno. O erro relativo para cada ponto avaliado foi então calculado e, enfim, determinou-se o maior erro relativo encontrado em cada um dos PVC e para cada número diferente de elementos de contorno. Os resultados encontrados estão na Tab.(6.3).

Tabela 6.3: Decréscimo do erro relativo com o número de elementos de contorno

N	8	16	24	32	40	48	56
PVC I	0.126272	0.034791	0.011614	0.003459	0.000897	0.000419	0.000315
PVC II	0.130794	0.028879	0.008681	0.005049	0.002642	0.002062	0.001393
PVC III	0.041643	0.020570	0.013420	0.004693	0.005977	0.002567	0.003557
N	64	72	80	120	160	200	240
PVC I	0.000200	0.000095	0.000037	0.000001	0.000004	0.000002	0.000001
PVC II	0.001191	0.001073	0.000904	0.000495	0.000321	0.000228	0.000172
BVP III	0.001540	0.002017	0.000953	0.000587	0.000073	0.000110	0.000037

Os valores obtidos também foram colocados em um gráfico no qual o eixo com os erros relativos máximos está em escala logarítmica (Fig. 6.3). Pode-se notar que o erro relativo decresce significativamente quando se aumenta o número de elementos de contorno atingindo valores consideravelmente baixos quando $N > 200$. O programa também foi rodado para os três PVC com $N > 240$. No entanto, os resultados encontrados não apresentaram variações significativas no erro relativo.

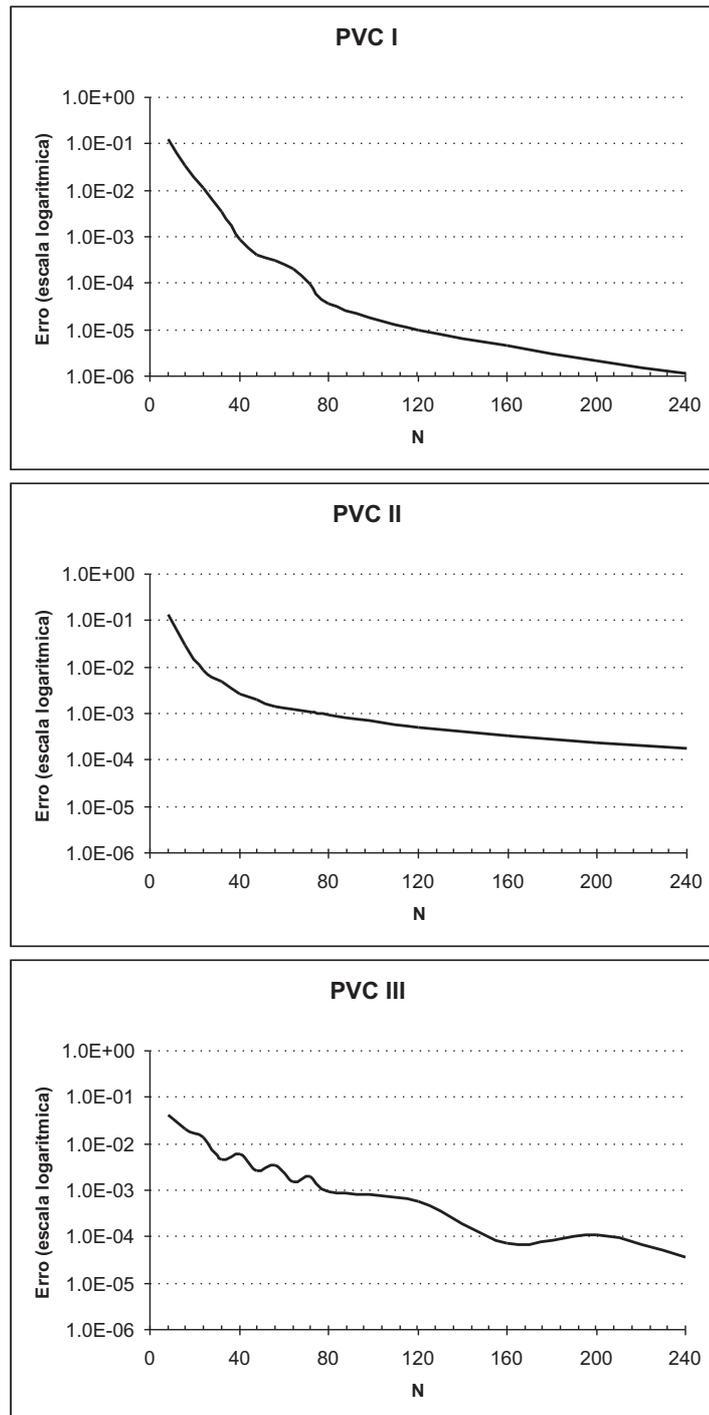


Figura 6.3: Relação entre o erro relativo e o número de elementos de contorno

Teste 3.

Esse teste procura avaliar a sensibilidade do método em relação aos valores de resposta no contorno quando uma inclusão (região de não condutividade) é deslocada, mudando de posição no interior do domínio. O domínio considerado é novamente um quadrado de lado unitário definido pela região $[0, 1] \times [0, 1]$ e a inclusão simulando a região de não condutividade é também um quadrado definido pelo intervalo $[0.61, 0.72] \times [0.61, 0.72]$ (Fig. 6.4).

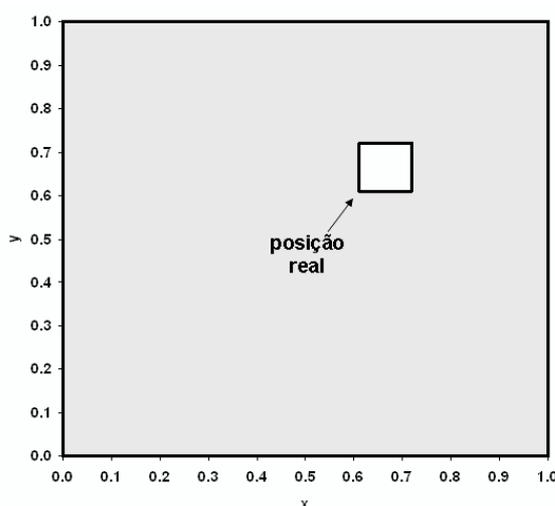


Figura 6.4: Posição real da inclusão no interior do domínio

O contorno externo foi discretizado em 80 elementos iguais (20 elementos por lado) e o contorno interno em 16 elementos iguais (4 elementos por lado), gerando um total de 96 elementos de contorno. O perfil de potencial aplicado no contorno (excitação) foi o triangular, ou seja, foi imposto um potencial de 10V no elemento localizado na quina superior direita do domínio e 0V no elemento localizado na quina diametralmente oposta sendo que nos outros eletrodos os potenciais impostos variam linearmente entre 0V e 10V (Fig. 6.5). Como já foi mencionado, a vantagem deste perfil é que ele força o fluxo de corrente a atravessar todo o domínio produzindo uma maior sensibilidade às variações da posição da inclusão. Já para o contorno da inclusão, foi imposto condição de contorno de Neumann com fluxo nulo ($\bar{J} = 0$), visto que se trata de uma região não condutora.

O teste foi baseado na referência [FIGUEROA E SELEGHIM, 2001]. A posição da inclusão de prospecção é alterada de forma que ela se desloca sobre a diagonal do quadrado na qual exista o maior gradiente de potencial, ou seja, do canto inferior esquerdo até o canto superior direito. Avaliou-se 8 posições sucessivas nas quais as coordenadas do canto inferior esquerdo da inclusão assumiram os valores $(0, 1; 0, 1)$, $(0, 2; 0, 2)$, $(0, 3; 0, 3)$, $(0, 4; 0, 4)$, $(0, 5; 0, 5)$, $(0, 6; 0, 6)$, $(0, 7; 0, 7)$ e $(0, 8; 0, 8)$, como mostra a Fig. (6.6).

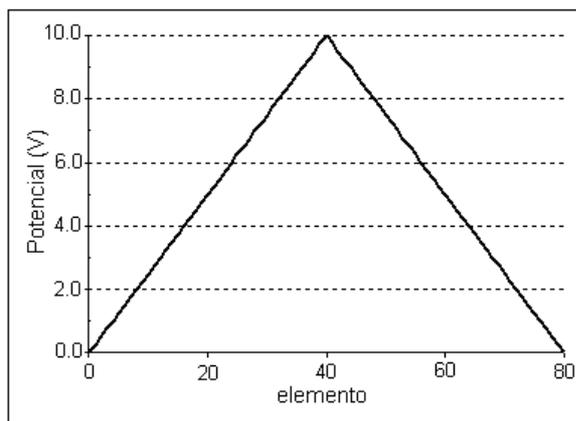


Figura 6.5: Perfil triangular de potencial aplicado sobre o contorno

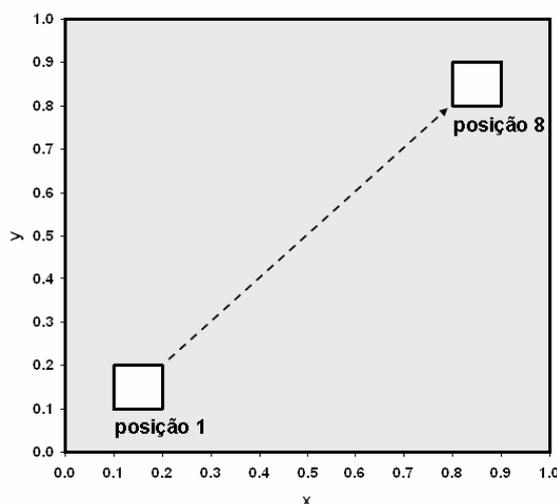


Figura 6.6: Deslocamento da inclusão de prospecção ao longo da diagonal do domínio

Neste caso, o funcional de erro foi definido da mesma forma que a Eq. (3.14), ou seja, ele compara os componentes de \mathbf{J}_{real} , que é o vetor que contém os fluxos resultantes nos elementos quando a inclusão está em sua posição real, e os componentes de $\bar{\mathbf{J}}_{calc}$, que corresponde aos fluxos calculados numericamente pelo MEC para cada posição da *inclusão de prospecção* durante seu deslocamento ao longo da diagonal.

$$e = \|\mathbf{J}_{real} - \mathbf{J}_{calc}\| \quad (6.6)$$

Os resultados obtidos para o funcional de erro podem ser visto na Fig. (6.7) que corresponde ao gráfico do valor de e , devidamente normalizado, para cada posição da inclusão. O gráfico mostra que o mínimo para o funcional de erro e acontece para a **posição 6** da inclusão de prospecção (Fig. 6.8). De fato, comparando com a Fig.(6.4) verifica-se que há uma boa

aproximação entre a posição real da inclusão com a posição que minimiza o funcional de erro, mostrando que o método é satisfatoriamente sensível.

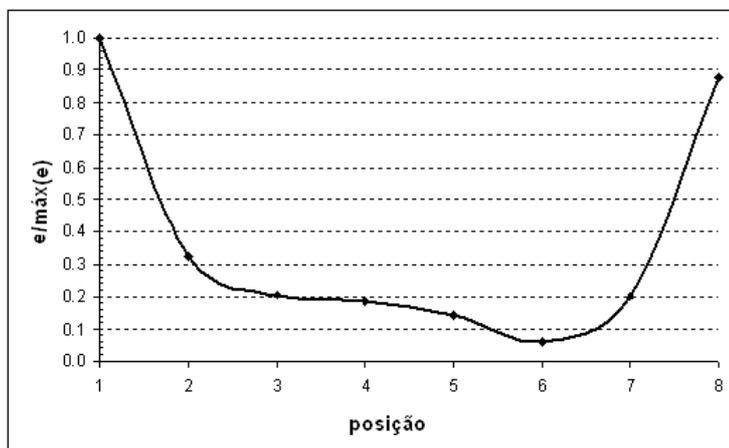


Figura 6.7: Valor normalizado do funcional de erro e para as oito posições da inclusão de prospecção

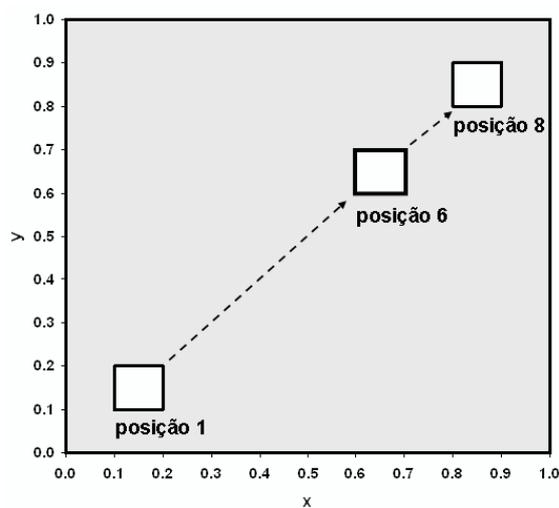


Figura 6.8: Posição da inclusão de prospecção que minimiza o funcional de erro

Teste 4.

Por último, realizou-se um teste para avaliar o tempo computacional empregado na execução do programa. Para isso, escolheu-se um domínio quadrado de lado unitário, sem inclusões internas, com condição de contorno de Dirichlet definida por um perfil duplamente triangular, no qual o potencial elétrico varia linearmente entre 0V no primeiro elemento localizado na quina inferior esquerda e 10V no elemento localizado na quina superior direita e, a partir desta, varia novamente entre 0V até atingir 10V no último elemento, localizado na quina inferior esquerda (Fig. 6.9).

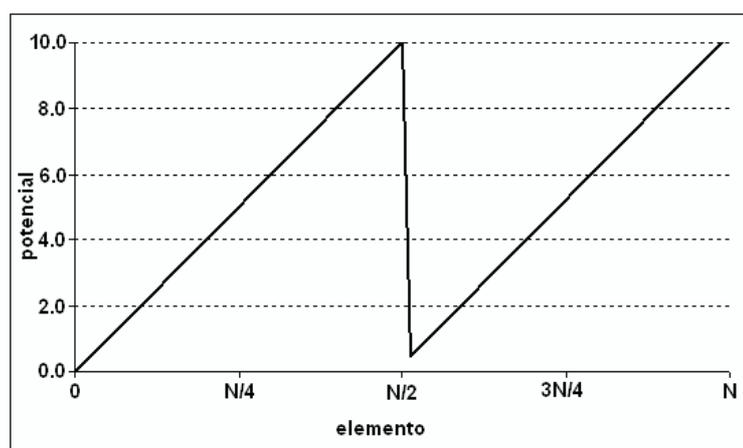


Figura 6.9: Perfil duplamente triangular de potencial aplicado sobre o contorno

Numa primeira etapa do teste, variou-se o número N de elementos de contorno e mediu-se o tempo de execução do programa considerando apenas o cálculo das respostas (fluxos) no contorno, sem considerar o cálculo dos potenciais nos pontos internos do domínio. Os resultados obtidos estão mostrados na Fig. (6.10).

Neste caso, notou-se que o tempo de processamento, como é de se esperar, aumenta com o aumento do número N de elementos de contorno. De qualquer forma, mesmo para um número relativamente grande de elementos de contorno ($N = 300$), o tempo de processamento ficou abaixo de 0,5s.

Numa segunda etapa, fixou-se o número de elementos de contorno em $N = 300$ e variou-se o número de pontos internos avaliados, nos quais foram calculados os potenciais elétricos, medindo-se o tempo de execução. Os resultados estão mostrados na Fig. (6.11). Também foi calculado o tempo de execução por ponto avaliado, ou seja, a razão entre o tempo total de execução e o número de pontos avaliados (Fig. 6.12).

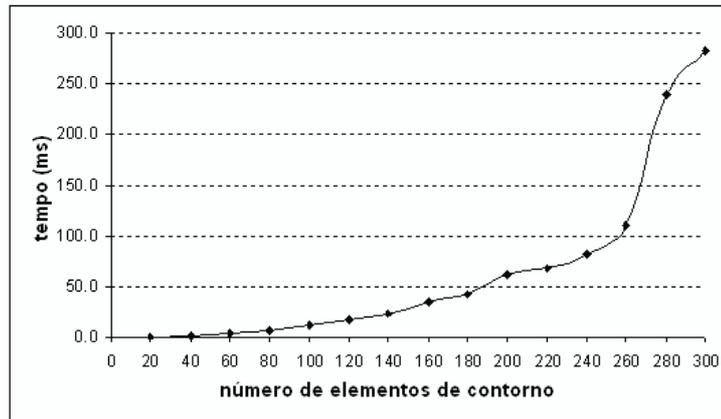


Figura 6.10: Tempo de execução do programa em função do número de elementos de contorno

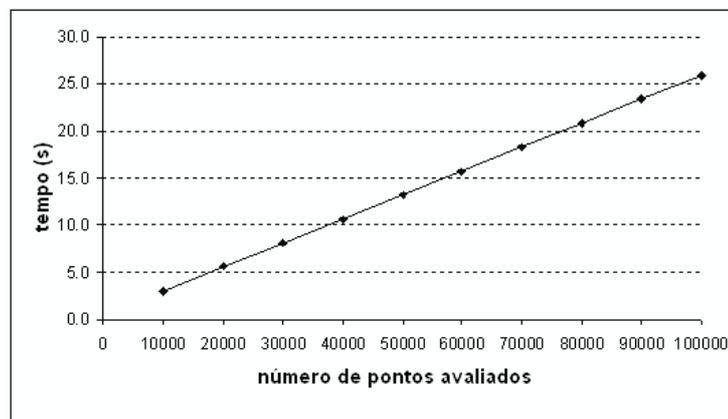


Figura 6.11: Tempo de execução do programa em função do número de pontos internos avaliados

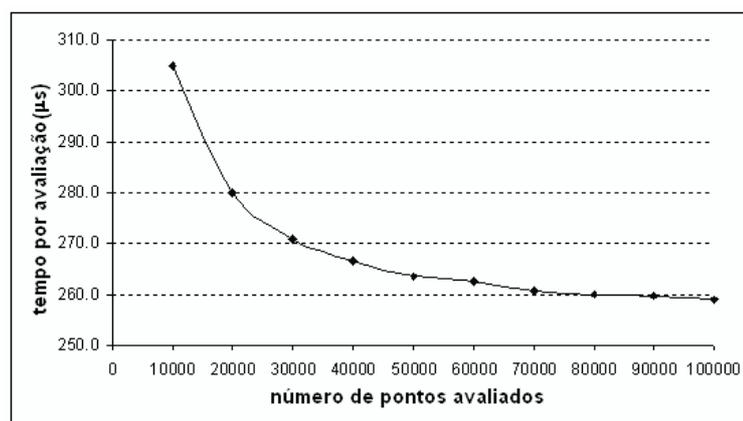


Figura 6.12: Tempo de execução do programa por ponto interno avaliado

Neste caso, pôde-se notar que o tempo de processamento aumenta linearmente com o número de pontos internos avaliados. Por sua vez, o tempo de execução por ponto diminui quando se aumenta o número total de pontos avaliados.

7 *Conclusões*

Sem dúvidas, existem atualmente inúmeras técnicas, já muito bem estabelecidas e extensivamente utilizadas, para imageamento em medicina. Na grande maioria, as imagens produzidas apresentam resolução e precisão impressionantes, o que permite fazer diagnósticos cada vez com mais segurança. Mesmo assim, algumas dessas técnicas necessitam de equipamentos relativamente grandes e que são, normalmente, excessivamente caros. Além disso, em muitos casos utilizam algum tipo de radiação ionizante ou necessitam que o paciente tenha que ingerir alguma solução de contraste. Com isso, o desenvolvimento de novas técnicas que consigam evitar essas restrições sempre será muito bem-vindo. A Tomografia de Impedância Elétrica (TIE), certamente, é uma dessas novas técnicas e tem se mostrado muito promissora nas últimas décadas. Além de não utilizar nenhum tipo de radiação ionizante e não necessitar a ingestão de nenhum contraste, requer um equipamento relativamente pequeno e barato.

No entanto, a TIE ainda necessita ser muito pesquisada, principalmente no que se refere aos algoritmos computacionais para a reconstrução da imagem. De fato, as imagens obtidas atualmente ainda não apresentam resolução suficiente para um diagnóstico médico seguro, além de consumir um elevado tempo computacional para sua reconstrução. Uma das possibilidades para se tentar sanar essas restrições é desenvolver métodos numéricos mais robustos e rápidos para a resolução do *problema direto*, que é a determinação dos potenciais elétricos no interior do domínio e das respostas (potencial/fluxo) no contorno. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido considerado um bom candidato para isso. A não obrigatoriedade de se discretizar todo o domínio e sim apenas o contorno faz com que o MEC seja vantajoso em relação às técnicas atualmente mais usadas, pois produz um sistema linear consideravelmente menor.

A implementação do MEC feita neste trabalho teve como objetivo validar o método na resolução do *problema direto* associado à TIE. Para isso, considerou-se domínios bidimensionais (2D) de duas formas: quadrado e circular. Alguns testes foram feitos, primeiramente, adotando-se um domínio simples, ou seja sem inclusões de regiões não condutoras e outros, por sua vez, consideraram tais regiões. As condições de contorno variaram tanto em valor como em tipo (Dirichlet, Neumann e mista).

O Teste 1, realizado como uma primeira validação do método, mostrou resultados bastante satisfatórios. Os valores encontrados pelo MEC diferenciaram-se em décimos ou até menos dos valores calculados pelo MDF, para os mesmos pontos do domínio. No entanto, o MDF, da forma em que a malha foi definida, fica limitado a determinar a solução somente nos pontos que pertencem à essa malha. Caso se deseje determinar a solução em mais pontos deve-se refinar a malha, o que aumenta o tamanho do sistema linear. Já o MEC permite o cálculo da solução em qualquer ponto do interior do domínio, sem necessariamente acarretar em um aumento no tamanho do sistema.

No Teste 2 foram escolhidos três problemas de valor de contorno (PVC I, PVC II e PVC III) que possuem solução analítica. Isso permitiu validar a precisão das soluções numéricas obtidas pelo MEC. De fato, primeiramente pode-se verificar que o erro relativo entre a solução analítica e a numérica diminui fortemente com o aumento do número N de elementos em que o contorno é discretizado. Também verificou-se que para valores de N maiores do que 120, o erro relativo foi satisfatoriamente pequeno, atingindo patamares na ordem de 10^{-6} para o PVC I, 10^{-4} para o PVC II e 10^{-5} para o PVC III, quando $N = 240$.

O Teste 3 testou a sensibilidade do método em relação às respostas calculadas sobre o contorno, quando uma inclusão interna de condutividade nula muda de posição no interior do domínio. Neste caso, o resultado também foi considerado bom, pois o mínimo do funcional de erro, que compara os valores das respostas no contorno calculados numericamente com aqueles obtidos na situação real (quando a inclusão está em sua posição real), foi atingido quanto a inclusão de prospecção estava numa posição consideravelmente próxima da posição real.

Finalmente, o Teste 4 avaliou o tempo computacional empregado na execução do programa. Verificou-se, primeiramente, que o tempo de execução aumenta com o aumento do número de elementos de contorno, o que é de se esperar, pois aumenta-se o tamanho do sistema linear a ser resolvido. No entanto, mesmo com um número relativamente grande de elementos de contorno ($N = 300$), o tempo de execução foi satisfatório, ficando abaixo de 0,5 segundo.

Sendo assim, a perspectiva para o uso do MEC no problema da TIE é muito boa. Trabalhos futuros devem ser feitos de forma a considerar-se domínios tridimensionais (3D) e que possuam várias regiões internas com condutividades direntes. Também é fundamental o desenvolvimento de métodos mais robustos e rápidos para a resolução do *problema inverso*, de forma a melhorar a resolução e diminuir o tempo computacional empregado na reconstrução das imagens.

Referências

- [AMATO, 2001] Amato, M. B. P. (2001). Novas estratégias em ventilação artificial: diagnóstica e prevenção de barotrauma/biotrauma através da tomografia de impedância elétrica. Sumário do Projeto Temático FAPESP (proc. 01/05303-4).
- [ANG, 2007] Ang, W. T. (2007). *A Beginner's Course in Boundary Element Methods*. Universal Publishers, Boca Raton, Florida.
- [BAKER, 1989] Baker, L. E. (1989). Principles of the impedance technique. *IEEE Eng. in Med. and Bio.*, p.11–15.
- [BABAEIZADEH e BROOKS, 2007] Babaeizadeh, S.; Brooks, D. H. (2007). Electrical impedance tomography for piecewise constant domains using boundary element shape-based inverse solution. *IEEE Transactions on Medical Imaging.*, v.26 p.637-647.
- [BARBER e BROWN, 1984] Barber, D. C.; Brown, B. H. (1984). Applied potential tomography. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, v.17 p.723–733.
- [BARBER et al., 1983] Barber, D. C.; Brown, B. H.; Freeston, I. L. (1983). Imaging spatial distributions of resistivity using applied potential tomography. *Electronics Letters*, v.19 p.933–935.
- [BORCEA, 2002] Borcea, L. (2002). Electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, v.18 p.R99–R136.
- [BREBBIA, 1978] Brebbia, C. A. (1978). *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London.
- [BREBBIA e DOMINGUEZ, 1977] Brebbia, C. A.; Dominguez, J. (1977). Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, v.1 p.372–378.
- [BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992] Brebbia, C. A.; Dominguez, J. (1992). *Boundary Elements Methods An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications Southampton Boston, 2.ed.
- [BURDEN e FAIRES, 2008] Burden, R. L.; Faires, J. D. (2008). *Análise Numérica*. Cengage Learning, 1.ed.
- [CAROSIO, 2008] Carosio, G. C. (2008). *Tomografia de escoamentos multifásicos por sensoriamento elétrico-desenvolvimento de algoritmos genéticos paralelos para a solução do problema inverso*. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.
- [CLERC et al., 2005] Clerc, M. et al. (2005). Boundary element formulation for electrical impedance tomography. *ESAIM: Proceedings.*, v.14 p.63-71.

- [CHENEY et al., 1999] Cheney, M.; Isaacson, D.; Newell, J. C. (1999). Electrical impedance tomography. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v.41 p.85–101.
- [DONG et al., 2005] Dong, G.; Zou, J.; Bayford, R. H.; Ma, X.; Gao, S.; Yan, W.; Ge, M. (2005). The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 41 p.1468–1471.
- [EDIC et al., 1995] Edic, P. M.; Saulnier, G. J.; Newell, J. C.; Isaacson, D. (1995). A real-time electrical impedance tomograph. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.42 p.849–859.
- [ECKEL e KRESS, 2007] Eckel, H.; Kress, R. (2007). Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, v.23 p.475–491.
- [EYUBOGLU et al., 1987] Eyuboglu, B. M.; Brown, B. H.; Barber, D. C.; Seager, A. D. (1987). Localisation of cardiac related impedance changes in the thorax. *Clin. Phys. Physiol. Meas*, v.8 p.167–173.
- [FIGUEROA E SELEGHIM, 2001] Figueroa, T. P.; Seleglim, P. Jr. (2001). Sensitivity analysis of different sensing strategies for electrical impedance imaging of two-phase flows. *J. Electron. Imaging*, v.10.
- [FORTUNA, 2000] Fortuna, A. O. (2000). *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [HANKE e BRÜHL, 2003] Hanke, M.; Brühl, M. (2003). Recent progress in electrical impedance tomography. *Inverse problems*, v.19 p.565–590.
- [HARRIS et al., 1988] Harris, N.; Suggett, A. J.; Barber, D. C.; Brown, B. H. (1988). Applied potential tomography: a new technique for monitoring pulmonary function. *Clin. Phys. Physiol. Meas.*, v.9 p.79–85.
- [HENDEE e RITENOUR, 2002] Hendee, W. R.; Ritenour, E. R. (2002). *Medical Imaging Physics*. Wiley-Liss, 4.ed.
- [HENDERSON e WEBSTER, 1978] Henderson, R. P.; Webster, J. G. (1978). An impedance camera for spatially specific measurements of the thorax. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.25 p.250–254.
- [HERRERA, 2007] Herrera, C. N. L. (2007). Algoritmo de tomografia por impedância elétrica baseado em simulated annealing. Tese (Mestrado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [JESUS e LEMAIRE, 2005] Jesus, H. M.; Lemaire, T. J. (2005). Apresentação da técnica de tomografia por impedância magnética aplicada ao imageamento em medicina. *Sitientibus Série Ciências Físicas*, p.104–110.
- [KAUP et al., 1996] Kaup, P. G.; Santosa, F.; Vogelius, M. (1996). Method for imaging corrosion damage in thin plates from electrostatic data. *Inverse Problems*, v.12 p.279–293.
- [LIMA, 2006] Lima, C. R. (2006). *Estudo da obtenção de imagens de tomografia de impedância elétrica do pulmão pelo método de otimização topológica*. Tese (Doutorado), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

- [LIONHEART, 2004] Lionheart, W. R. B. (2004). EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments. *Physiol. Meas.*, v.25 p.125–142.
- [MANGNALL et al., 1987] Mangnall, Y.; Baxter, J. A.; Avill, R.; Bird, N. C.; Brown, B. H.; Barder, D. C.; Seagar, A. D.; Johnson, A. G.; Read, N. (1987). Applied potential tomography: a new non-invasive technique for measuring gastric function. *Clin. Phys. Physiol. Meas.*, v.8 p.119–129.
- [MARTINS, 1995] Martins, M. J. (1995). *Desenvolvimento de um tomógrafo de ressonância magnética: integração e otimização*. Tese (Doutorado), Instituto de Física e Química de São Carlos da Universidade de São Paulo.
- [MARTINS, 1973] Martins, N. (1973). *Introdução à teoria da eletricidade e do magnetismo*. Edgard Blücher Ltda.
- [MELLO e SILVA, 2006] Mello, L. A. M.; Silva, E. C. N. (2006). Algoritmo de reconstrução de imagens tridimensionais através da tomografia por impedância elétrica baseado no método de otimização topológica. Boletim Técnico, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [OKUNO et al., 1982] Okuno, E.; Caldas, I. L.; Chow, C. (1982). *Física para Ciências Biológicas e Biomédicas*. Editora Harbra Ltda.
- [PRESS et al., 1992] Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Fannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C++, the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2.ed.
- [RAMIREZ et al., 1993] Ramirez, A.; Daily, W.; Labreque, D.; Owen, E.; Chesnut, D. (1993). Monitoring an underground steam injection process using electrical resistance tomography. *Water Resources Research*, v.29 p.73–88.
- [RÖNTGEN, 1895] Röntgen, W. C. (1895). Ueber eine neue art von strahlen. (vorläufige mittheilung.). *Sitzungsberichte der Physik.-med. Gesellschaft zu Würzburg*, p.132–141.
- [ROLNIK, 2003] Rolnik, V. P. (2003). *Contribuição ao desenvolvimento de uma nova técnica de reconstrução tomográfica para sondas de visualização direta*. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.
- [ROLNIK e SELEGHIM, 2006] Rolnik, V. P.; Selegim, P. Jr. (2006). A specialized genetic algorithm for the electrical impedance tomography of two phase flows. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v.28 p.378–390.
- [SANTOSA e VOGELIUS, 1991] Santosa, F.; Vogelius, M. (1991). A computational algorithm for determining cracks from electrostatic boundary measurements. *International Journal of Engineering Science*, v.29 p.917–937.
- [SILVA, 2006] Silva, J. T. L. (2006). Descrição VHDL de um controlador para aquisição de sinais em um tomógrafo de impedância elétrica. Unibratex, Ensino Superior e Técnico em Informática.
- [TRIGO, 2001] Trigo, F. C. (2001). Filtro estendido de Kalman aplicado à tomografia por impedância elétrica. Tese (Mestrado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

-
- [WEBB, 1988] Webb, S., editor (1988). *The physics of medical imaging*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.
- [WOO et al., 1993] Woo, E. J.; Hua, P.; Webster, J. G.; Tompkins, W. J. (1993). A robust image reconstruction algorithm and its parallel implementation in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.12 p.137–146.
- [ZOU e GUO, 2003] Zou, Y.; Guo, Z. (2003). A review of electrical impedance techniques for breast cancer detection. *Medical Engineering and Physics*, v. 25 p.79–90.