UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

JULIANO JINZENJI DUQUE

**Avaliação da q-transformada de Fourier
como ferramenta não linear de estudos de
sinais biomédicos**

Ribeirão Preto - SP
2012

JULIANO JINZENJI DUQUE

**Avaliação da q-transformada de Fourier
como ferramenta não linear de estudos de
sinais biomédicos**

Dissertação apresentada à Faculdade de
Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão
Preto da Universidade de São Paulo, como
parte das exigências para a obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:

Física aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador:

Prof. Dr. Luiz Otavio Murta Junior.

Versão corrigida

Versão original disponível na FFCLRP-USP

Ribeirão Preto - SP

2012

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

FICHA CATALOGRÁFICA

Duque, Juliano Jinzenji

Avaliação da q-transformada de Fourier como ferramenta não linear de estudos de sinais biomédicos / Juliano Jinzenji Duque; orientador Prof. Dr. Luiz Otavio Murta Junior. Ribeirão Preto - SP, 2012.

118 f.:il.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Física aplicada à Medicina e Biologia) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, 2012.

1. q-transformada de Fourier. 2. análise espectral de sinais.
3. sinais biomédicos. 4. variabilidade da frequência cardíaca.

Nome: DUQUE, Juliano Jinzenji

Título: Avaliação da q-transformada de Fourier como ferramenta não linear de estudos de sinais biomédicos

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora

Prof. Dr. :	_____	Instituição:	_____
Julgamento:	_____	Assinatura:	_____

Prof. Dr. :	_____	Instituição:	_____
Julgamento:	_____	Assinatura:	_____

Prof. Dr. :	_____	Instituição:	_____
Julgamento:	_____	Assinatura:	_____

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, meus mais profundos e sinceros agradecimentos a Deus, que nos presenteia com a vida e a oportunidade de aprender e evoluir neste mundo.

Agradeço imensamente aos meus amados pais que sempre batalharam para proporcionar uma vida digna e honesta a nossa família e um futuro melhor para seus filhos. Agradeço também a meu querido irmão e a minha adorável namorada pela participação especial e insubstituível que têm na minha vida. Aos demais familiares que sempre torceram por mim, obrigado por tudo.

Ao professor Dr. Luiz Otavio Murta Junior, meu orientador e amigo, admirável pessoa que está sempre disposto a nos ajudar, o meu sincero obrigado! Aos colegas e amigos do CSIM, quero agradecer pelos bons momentos passados diariamente em nosso laboratório, com conversas enriquecedoras e descontraídas. Meus agradecimentos também a todos os professores que compartilharam comigo um pouco de suas experiências.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro e também ao programa FAMB por oferecer condições para o desenvolvimento do projeto.

E finalmente, quero agradecer aos demais companheiros, com quem tive o prazer de conviver pouco ou muito durante estes anos, e que me proporcionam, neste instante, fazer uso do abençoado dom da gratidão!

Muito obrigado!

“O sucesso é ir de fracasso
em fracasso sem perder entusiasmo.”

Winston Churchill

RESUMO

DUQUE, J. J. **Avaliação da q -transformada de Fourier como ferramenta não linear de estudos de sinais biomédicos.** 2012. 118 f. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Física aplicada à Medicina e Biologia) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto - SP, 2012.

A análise de sinais biomédicos é uma área de pesquisa importante pois diversos processos fisiológicos que ocorrem no corpo humano podem ter suas atividades registradas como sinais. Neste trabalho, investigou-se a q -transformada de Fourier (q -FT), uma generalização não linear da transformada de Fourier baseada no formalismo não extensivo de Tsallis, que é caracterizado pela presença do parâmetro q . Foram realizados estudos analíticos e experimentos computacionais com sinais reais e simulados. A partir da definição da q -FT, um método de análise espectral generalizado para aplicação em sinais biomédicos foi desenvolvido. Este método foi avaliado através de experimentos com séries de intervalos RR cardíacos, usadas em estudos de variabilidade da frequência cardíaca. Os resultados ajudam a esclarecer algumas propriedades desta q -transformada, porém não indicam que o método desenvolvido seja efetivo para a análise espectral de séries RR. Entretanto, estudos posteriores de novos métodos de análise espectral baseados no formalismo de Tsallis podem ser desenvolvidos para a investigação de sinais biomédicos.

Palavras-chave: 1. q -transformada de Fourier. 2. análise espectral de sinais. 3. sinais biomédicos. 4. variabilidade da frequência cardíaca.

ABSTRACT

DUQUE, J. J. **Assessment of the q -Fourier transform as nonlinear tool for biomedical signals studies.** 2012. 118 f. Dissertation (M.Sc. - Postgraduate program in Physics applied to Medicine and Biology) - Faculty of Philosophy, Sciences and Literature, University of São Paulo, Ribeirão Preto - SP, 2012.

Biomedical signals analysis is an important research field because many physiological processes occurring in human body can have their activities recorded as signals. This study investigated the q -Fourier transform (q -FT), a nonlinear generalization of Fourier transform based on the Tsallis nonextensive formalism, which is characterized by q parameter. Analytical studies and computational experiments with simulated and real signals were conducted. From the definition of q -FT, a generalized spectral analysis method for application in biomedical signals has been developed. This method was assessed through experiments with cardiac RR interval time series, which are used in studies of heart rate variability. The results help to clarify some properties of the q -Fourier transform, but do not indicate that the developed method is effective for the spectral analysis of RR series. However, further studies on new spectral analysis methods based on Tsallis formalism can be developed for biomedical signals investigation.

Key-words: 1. q -Fourier transform. 2. signal spectral analysis. 3. biomedical signals. 4. heart rate variability.

LISTA DE FIGURAS

4.1	Funções $\ln_q(x)$ e e_q^x para alguns valores de q	19
4.2	Exemplos de $\cos_q(x)$ e $\sin_q(x)$ para $q = 0,99$ e $q = 1,01$	27
4.3	Projeção no plano xy da representação paramétrica $x = \cos_q(t)$, $y = \sin_q(t)$, $z = t$ para $q = 0,99$ e $q = 1,01$	28
4.4	Comportamento da função $\rho_q(x)$ para diferentes valores de q	28
4.5	Função $\varphi_q(x)$ para valores de $q \geq 1$	29
4.6	$\cos_q(x)$ para $q = 0$ e $q = 2$, e $\sin_q(x)$ para $q = 0,5$ e $q = 1,5$	29
7.1	Comportamento de $\rho_q(x)$ quando $q \rightarrow -\infty$ e $q \rightarrow \infty$	57
7.2	Comportamento de $\varphi_q(x)$ quando $q \rightarrow \infty$	57
7.3	Evolução da função $\cos_q(x)$ ao longo dos valores de q	59
7.4	Evolução da função $\sin_q(x)$ ao longo dos valores de q	60
7.5	q -FT da função de distribuição uniforme: q -sinc	62
7.6	Impulso $x[n] = \delta[n]$	64
7.7	$\tilde{X}_q[k]$ para sinal finito $\tilde{x}[n] = \delta[n]$, se $-10 \leq n \leq 10$ ($N = 21$)	64
7.8	$x[n] = \cos[m \Omega_0 n]$ e $y[n] = \sin[m \Omega_0 n]$ (período $N = 21$)	65
7.9	$\tilde{X}_q[k]$ de $\tilde{x}[n] = \cos[m \Omega_0 n]$ para $m = 1, 2, 3$ e $q = 0,995; 1; 1,005$	66
7.10	$\tilde{Y}_q[k]$ de $\tilde{y}[n] = \sin[m \Omega_0 n]$ para $m = 1, 2, 3$ e $q = 0,99; 1; 1,01$	67
7.11	Exemplos de $\tilde{X}_q(\Omega)$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$ para diferentes $q \leq 1$	68
7.12	Exemplos de $\tilde{X}_q(\Omega)$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$ para diferentes $q \geq 1$	69
7.13	Magnitude de $\tilde{X}_q(\Omega)$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$ para $q \leq 1$ e $q \geq 1$	70
7.14	Função retangular $w[n]$	71
7.15	$\tilde{W}_q[k]$ de $\tilde{w}[n]$ para $q = 0,99; 1; 1,01$	72
7.16	Exemplos de $\tilde{W}_q(\Omega)$ para diferentes $q \leq 1$ e $q \geq 1$	73
7.17	Magnitude de $\tilde{W}_q(\Omega)$ para $q \leq 1$ e $q \geq 1$	74

7.18	$\tilde{X}_q[k]$ de $\tilde{x}[n] = \cos[2\pi n/N]$ com $N = 21$	76
7.19	Exemplos de séries de intervalos RR do conjunto de fibrilados, insuficientes e saudáveis.	77
7.20	q -Espectros de potência P_q de uma série RR de fibrilação atrial	78
7.21	q -Espectros de potências P_q de uma série RR de insuficiência cardíaca	79
7.22	q -Espectros de potência P_q de uma série RR de indivíduo saudável . .	79
7.23	q -Espectros de potência, para um $q > 1$ bem próximo a 1, das séries RR da Figura 7.19	80
7.24	Média da potência da banda LF ao longo de q para chagásicos, hipertensos e saudáveis	82
7.25	Média da potência da banda HF ao longo de q para chagásicos, hipertensos e saudáveis	82
7.26	Média da razão LF/HF ao longo de q para chagásicos, hipertensos e saudáveis	82
7.27	Comparação entre as médias da razão LF/HF nos estados de repouso e tilt ao longo de q	84

LISTA DE TABELAS

A.1	Dados retirados do banco <i>MIT-BIH Normal Sinus Rhythm</i>	98
A.2	Dados retirados do banco <i>Normal Sinus Rhythm RR Interval</i>	99
A.3	Dados retirados do banco <i>BIDMC Congestive Heart Failure</i>	101
A.4	Dados retirados do banco <i>Congestive Heart Failure RR Interval</i>	102
A.5	Dados retirados do banco <i>MIT-BIH Atrial Fibrillation</i>	103
A.6	Dados do grupo de pacientes saudáveis do LFE-FMRP.	104
A.7	Dados do grupo de pacientes chagásicos do LFE-FMRP.	105
A.8	Dados do grupo de pacientes hipertensos do LFE-FMRP.	106

SUMÁRIO

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Organização do Texto da Dissertação	3
2 Sinais e Sistemas	4
2.1 Sinais	5
2.1.1 Tempo Contínuo e Tempo Discreto	6
2.1.2 Periodicidade	6
2.1.3 Sinais Pares e Ímpares	7
2.2 Sistemas	8
2.2.1 Linearidade e Não Linearidade	9
3 Sinais Biomédicos	12
3.1 Exemplos de Sinais Biomédicos	13
3.2 Processamento e Análise	15
3.3 Análise Não Linear	16
4 Mecânica Estatística Não Extensiva	18
4.1 q -Exponencial e q -Logaritmo	18
4.2 Entropia de Boltzmann-Gibbs	20
4.3 Entropia de Tsallis	21
4.4 q -Álgebra	23

4.5	Funções q -Circulares	26
5	Transformada de Fourier e sua q-Generalização	31
5.1	Representações de Fourier	32
5.1.1	Séries de Fourier	33
5.1.2	Transformadas de Fourier	35
5.1.3	Propriedades	37
5.2	q -Transformada de Fourier	39
5.3	Generalização do Teorema do Limite Central	41
6	Materiais e Métodos	45
6.1	Estudo Analítico	46
6.2	Implementação da q -Transformada de Fourier	46
6.3	Sinais Simulados	48
6.4	Sinais Reais	48
6.4.1	Variabilidade da Frequência Cardíaca	49
6.4.2	Base de Dados PhysioBank - Physionet	52
6.4.3	Base de Dados do LFE-FMRP	53
6.5	Softwares	54
7	Resultados e Discussão	56
7.1	Estudo Analítico	56
7.2	Sinais Simulados	63
7.3	Sinais Reais	77
8	Conclusão	85
	Referências	89
A	Conjuntos de Dados	97

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os vários sistemas que compõem o corpo humano conduzem inúmeros processos fisiológicos importantes. O trabalho conjunto destes sistemas regula o ambiente interno do organismo afim de manter uma condição estável para o seu funcionamento eficiente.

Os processos fisiológicos geralmente são acompanhados por sinais que refletem sua natureza e suas atividades. Dois sinais biomédicos popularmente conhecidos são o eletroencefalograma (EEG) e o eletrocardiograma (ECG), que são registros da atividade elétrica do cérebro e do coração, respectivamente.

Um outro sinal biomédico, talvez não tão conhecido popularmente, é o tacograma (ou série de intervalos RR), obtido a partir de um ECG. Sabe-se que existem bandas de frequências bem definidas nestes sinais que são predominantemente compostas pelos componentes simpático e parassimpático do sistema nervoso autônomo (SNA). Este sinal é usado para analisar a variabilidade da frequência cardíaca (VFC), disponibilizando assim uma abordagem poderosa para se obter informações a respeito da atividade do SNA.

Os sinais biológicos viabilizam um meio de obter informações que ajudem a melhorar a compreensão dos mecanismos básicos das funções biológicas, e auxiliem no diagnóstico ou tratamento de uma determinada condição médica. É com este foco que se aplica o processamento de sinais biomédicos.

É importante evidenciar também que os sistemas fisiológicos dos quais se originam estes sinais são considerados como sistemas complexos, e portanto, são não lineares em sua natureza. Assim, são desejadas ferramentas de processamento e análise capazes de extrair e revelar as características e mecanismos destes tipos de

sistemas, levando em consideração suas propriedades não lineares.

Apesar da marcante presença da característica não linear nos sistemas fisiológicos, muito do que é conhecido sobre eles tem sido aprendido através da teoria de sistemas lineares. Um exemplo que se destaca é a transformada de Fourier, uma transformada matemática linear de ampla aplicação. Ela desempenha um papel importante nos processos de filtragem e análise de sinais biomédicos, uma vez que permite a análise espectral do sinal através do seu espectro de frequências.

Em 1988, Constantino Tsallis propôs uma generalização para a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) que tem causado um impacto significativo no estudo de sistemas complexos. Este é um tipo de sistema caracterizados pela não linearidade. Essa generalização conhecida por mecânica estatística não extensiva está baseada na generalização da entropia de BG, através de um parâmetro (q) de não extensividade. O desenvolvimento deste novo paradigma não extensivo levou a construções matemáticas, como a q -álgebra e as funções q -circulares, que encapsulam as relações não lineares inerentes a esta formulação de Tsallis.

Na busca por uma generalização do Teorema do Limite Central (TLC), que fosse apropriada para o tratamento de variáveis aleatórias fortemente correlacionadas, definiu-se uma transformada de Fourier generalizada não linear. Chamada por q -transformada de Fourier, ela tem sido pouco explorada como ferramenta matemática em processamento de sinais. Um dos prováveis motivos que levam a esta pouca exploração é o fato da não descoberta ainda da sua transformada inversa, embora muitos estudos estejam sendo desenvolvidos para este propósito. Entretanto, acredita-se que mesmo assim alguns ensaios computacionais possam ser realizados procurando elucidar algumas de suas propriedades.

1.1 Objetivos

Dentro de todo este contexto os objetivos do trabalho foram: estudar a q -transformada de Fourier; desenvolver sua implementação computacional e realizar testes com sinais simulados; desenvolver um método computacional de análise espectral não linear para sinais fisiológicos e clínicos baseado nesta implementação; e aplicar e avaliar testes com sinais de variabilidade da frequência cardíaca, as

séries RR.

1.2 Organização do Texto da Dissertação

Após apresentada a introdução e também os objetivos do trabalho no Capítulo 1, o Capítulo 2 trata dos conceitos básicos de sinais e sistemas, expondo algumas propriedades elementares de sinais, além da propriedade de linearidade para sistemas. Em seguida, o Capítulo 3 apresenta algumas considerações sobre a natureza dos sinais biomédicos e sua utilidade como fonte de informação, citando alguns exemplos e ressaltando a importância de métodos de processamento e análise.

No Capítulo 4 é feita uma descrição da mecânica estatística não extensiva de Tsallis, partindo da generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs e passando pelas formulações da q -álgebra e das funções q -circulares. O Capítulo 5 trata das representações de Fourier e da q -generalização da transformada, comentando a q -generalização do Teorema do Limite Central.

O Capítulo 6 descreve as etapas do desenvolvimento do projeto, apresentando a implementação computacional da q -transformada, os sinais simulados e as séries RR reais usadas nos testes, além de uma descrição sobre a VFC. No Capítulo 7 são apresentados e discutidos os resultados de cada etapa. Por fim, as conclusões do trabalho são encontradas no Capítulo 8.

CAPÍTULO 2

SINAIS E SISTEMAS

Os conceitos de sinal e sistema aparecem em diversas áreas da ciência e tecnologia, como comunicações, aeronáutica, sismologia, química, engenharias, entre outros [1, 2, 3]. Embora a natureza física dos sinais e sistemas dessa diversidade de especialidades possa ser muito diferente, todos os casos possuem características em comum. Os sinais contêm informações sobre o comportamento do fenômeno observado, enquanto os sistemas respondem a sinais em particular, produzindo outros sinais ou algum comportamento desejado.

Tensões e correntes medidas em função do tempo em um circuito elétrico são exemplos de sinais. O circuito em si é um exemplo de sistema, que responde às tensões e correntes aplicadas. Um motorista ao pressionar o pedal do acelerador de um automóvel, faz com que o veículo responda aumentando a sua velocidade. Neste exemplo, o sistema é o automóvel, a pressão sobre o pedal é a entrada do sistema e a velocidade do veículo a sua resposta. Um programa de computador feito para auxiliar o diagnóstico de eletrocardiograma é como um sistema que produz estimativas de parâmetros, como a frequência cardíaca, em resposta a entrada de um eletrocardiograma digitalizado. Uma câmera é outro exemplo de sistema. Ela recebe luz de diversas fontes, como sinais de entrada, produzindo uma fotografia, o sinal de saída.

Como visto, os conceitos de sinais e sistemas compartilham noções extremamente genéricas. Neste nível de generalidade, suas propriedades podem ser discutidas apenas em termos mais elementares. Para analisar e caracterizar estes sinais e sistemas com maior profundidade é preciso adentrar de forma cuidadosa ao nível de subclasses de cada um, onde propriedades em particular possam ser

exploradas.

A propriedade de linearidade, que define uma classe de sistemas chamados sistemas lineares, leva a conceitos e técnicas importantes, que possibilitam o tratamento de uma gama enorme de situações. Outra classe também importante é a que se refere aos sistemas não lineares. Características desta classe são encontradas em muitos dos sistemas físicos do mundo real, dos quais surgem efeitos surpreendentes, atraindo o interesse e a atenção de cientistas.

2.1 Sinais

Os sinais podem descrever uma grande variedade de fenômenos físicos. De uma forma ou de outra, eles constituem um ingrediente básico da vida diária e a lista de tudo aquilo que constitui um sinal é quase interminável.

As variações ao longo do tempo na tensão de um capacitor, em um circuito elétrico, e na velocidade de um automóvel, quando em movimento, são exemplos de sinais. As variações de densidade e porosidade em função da profundidade também constituem sinais usados em geofísica no estudo da estrutura terrestre, assim como as variações da temperatura e pressão do ar em função da altitude são sinais importantes na meteorologia. Independente da forma como são representados, a informação do sinal está sempre contida na variação de algum tipo de quantidade.

Um sinal é representado matematicamente como uma *função*, de uma ou mais variáveis independentes, que carrega informações sobre a natureza do fenômeno físico que ele descreve. Geralmente os valores de um sinal podem ser números reais ou números complexos.

Quando a função depende de uma única variável, diz-se que o sinal é *unidimensional*, que é o tipo de sinal empregado neste trabalho. O sinal de fala é um exemplo de sinal unidimensional que varia com o tempo. Embora a variável independente não deva necessariamente representar o tempo (ela pode por exemplo corresponder a coordenadas espaciais), geralmente por conveniência, um sinal é referenciado como uma função do tempo.

2.1.1 Tempo Contínuo e Tempo Discreto

O chamado *domínio* de um sinal é a variável independente sobre a qual o fenômeno é considerado. Um sinal é classificado como *contínuo* se ele for definido para todo o seu domínio. No caso do tempo, ele é referenciado como *sinal de tempo contínuo* se o sinal estiver definido para todos os instantes de tempo, ou seja, a sua amplitude varia continuamente com o tempo. Já um sinal *discreto* é definido somente em alguns valores do seu domínio. No caso do tempo, ele é referenciado como *sinal de tempo discreto* se o sinal estiver definido somente em instantes isolados de tempo, que em geral são uniformemente espaçados.

Um sinal de tempo discreto frequentemente é derivado de um sinal de tempo contínuo, através do processo de *amostragem* do mesmo a uma taxa uniforme. Seja $\mathcal{T}$ o período de amostragem, i.e., o valor do intervalo fixo de tempo entre duas amostras, e n um número inteiro, a amostragem de um sinal contínuo $x(t)$ no instante $t = n\mathcal{T}$ produz uma amostra de valor $x(n\mathcal{T})$ e, por conveniência, escreve-se

$$x[n] = x(n\mathcal{T}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Assim um sinal discreto é representado por uma *série temporal*, i.e., uma sequência de números $(\dots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots)$.

Costuma-se usar símbolos diferentes para denotar as variáveis independentes nos casos contínuo e discreto, como (t) e $[n]$, respectivamente, usados nos exemplos com tempo.

2.1.2 Periodicidade

Sinais também podem ser classificados quanto a sua periodicidade. Um sinal contínuo *periódico* satisfaz a condição

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

em que T é uma constante positiva.

Seja T_0 o menor valor de T que satisfaça a condição em (2.1), então ele é chamado de *período fundamental* de $x(t)$ e define a duração de um ciclo de $x(t)$. Evidentemente, se $T = T_0$ satisfaz a condição, então $T = 2T_0, 3T_0, 4T_0, \dots$ também a satisfazem.

O inverso de T_0 ,

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.2)$$

é chamado de *frequência fundamental*. A frequência f_0 é medida em ciclos por segundo, ou hertz (Hz). Por sua vez, a *frequência angular fundamental* definida por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 \quad (2.3)$$

é medida em radianos por segundo, já que há 2π radianos em um ciclo.

Qualquer sinal $x(t)$ para o qual não exista nenhum valor de T que satisfaça a condição acima é chamado de sinal *aperiódico* ou *não periódico*.

Para sinais de tempo discreto, diz-se que $x[n]$ é *periódico* se ele satisfizer a condição

$$x[n] = x[n + N] \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

em que N é um número inteiro positivo. O menor valor de N que satisfaça a condição em (2.4) é chamado de *período fundamental* de $x[n]$. A *frequência angular fundamental* é dada por

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (2.5)$$

e é medida em radianos, já que N_0 , que representa o período fundamental, é apenas uma quantidade de amostras e não possui unidade de medida.

As diferenças entre as Equações (2.1) e (2.4) devem ser cuidadosamente observadas. Uma se aplica a um sinal de tempo contínuo periódico, cujo período fundamental T pode assumir qualquer valor real positivo. Por outro lado, a outra se aplica a um sinal de tempo discreto, cujo período fundamental N pode assumir *somente* um valor inteiro positivo.

2.1.3 Sinais Pares e Ímpares

Outra forma de classificação de sinais consiste em dizer se um sinal é par ou ímpar. Um sinal contínuo $x(t)$ (discreto $x[n]$) é dito *par* se ele satisfizer a condição

$$x(-t) = x(t) \quad (x[-n] = x[n]) \quad (2.6)$$

Diz-se que um sinal contínuo $x(t)$ (discreto $x[n]$) é *ímpar* se

$$x(-t) = -x(t) \quad (x[-n] = -x[n]) \quad (2.7)$$

Ou seja, os sinais pares são *simétricos* em relação a origem do tempo, enquanto os sinais ímpares são *antissimétricos*.

As definições (2.6) e (2.7) pressupõem sinais com valores reais. Para sinais de valor complexo, usa-se o conceito de simetria conjugada. Um sinal contínuo $x(t)$ (discreto $x[n]$) é dito *conjugado simétrico* se ele satisfizer a condição

$$x(-t) = x^*(t) \quad (x[-n] = x^*[n]) \quad (2.8)$$

em que o asterisco indica o conjugado complexo de $x(t)$ ($x[n]$).

Observando apenas o caso contínuo, se $x(t) = a(t) + ib(t)$, em que $a(t)$ é a parte real de $x(t)$ e $b(t)$ a parte imaginária, o conjugado complexo de $x(t)$ é $x^*(t) = a(t) - ib(t)$. Das Equações (2.6), (2.7) e (2.8) segue-se que o sinal de valor complexo $x(t)$ é conjugado simétrico se sua *parte real* for *par* e sua *parte imaginária* for *ímpar*. Uma observação similar também pode ser feita para o caso discreto.

2.2 Sistemas

Sistema, do grego *sietemiun*, é um conjunto de elementos interconectados formando um todo organizado. Em grego, o termo significa "combinar", "ajustar", "formar um conjunto". Os sistemas físicos, em sentido amplo, são uma interconexão de componentes, dispositivos ou subsistemas.

No estudo de sinais e sistemas, um sistema pode ser visto como uma entidade onde um ou mais sinais de entrada são transformados ou induzem alguma forma de resposta, produzindo outros sinais de saída. Matematicamente um sistema pode ser representado por um operador ou mapeamento matemático que transforma um sinal (entrada) em outro sinal (saída) por meio de um conjunto fixo de regras ou funções.

Esta relação entre entrada e saída pode ser expressa através de uma única regra ou função matemática, como

$$y(t) = x^3(t) \quad \text{ou} \quad y(t) = 0,5y(t-1) + x(t)$$

ou também através de uma sequência de instruções ou operações aplicadas aos

valores do sinal de entrada, como

$$y_1(t) = y_1(t-1) + 0,5 x(t)$$

$$y_2(t) = 0,4 y_2(t-1) + 2 x(t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Pode-se representar a ação de um sistema através de um operador global H , sendo que a aplicação de um sinal a entrada do operador, produzindo um sinal de saída, pode ser descrita como

$$y(t) = H\{x(t)\} \quad (2.9a)$$

$$y[n] = H\{x[n]\} \quad (2.9b)$$

A primeira equação (2.9a) ilustra um sinal de tempo contínuo $x(t)$ como entrada do sistema resultando em outro sinal de tempo contínuo $y(t)$. Já a segunda (2.9b), ilustra a ação correspondente no caso de tempo discreto para os sinais $x[n]$ e $y[n]$.

Historicamente, há distinção entre sistema de tempo contínuo, que manipula sinais de entrada de tempo contínuo resultando em sinais de saída de tempo contínuo, e sistema de tempo discreto, análogo para sinais de tempo discreto. Mas apesar desta distinção, eles são estreitamente relacionados conceitualmente e ambas as classes compartilham de propriedades semelhantes.

Os sistemas são geralmente classificados em termos destas propriedades. Entre as mais básicas estão causalidade, estabilidade, invertibilidade, invariância no tempo e linearidade [1, 2, 4].

Dentre elas, a invariância no tempo e a linearidade são duas propriedades consideradas de grande importância, pois ajudam a simplificar a análise de sistemas. O foco deste projeto, porém, recai apenas sobre a linearidade.

2.2.1 Linearidade e Não Linearidade

Um sistema *linear* é um sistema que satisfaz o *princípio de superposição* [1, 2]. Uma forma de se descrever esse princípio é: se uma entrada consiste de uma soma ponderada de diversos sinais, então a saída é a soma ponderada (superposição) das respostas do sistema a cada um desses sinais.

Usando agora uma definição matemática mais formal, devem ser respeitadas duas propriedades matemáticas [2, 3], a *aditividade* e a *homogeneidade*, respectivamente definidas como

$$H\{x + y\} = H\{x\} + H\{y\} \quad (2.10)$$

$$H\{\alpha x\} = \alpha H\{x\} \quad (2.11)$$

Estas duas propriedades que definem um sistema linear podem ser combinadas em uma única relação:

$$H\{\alpha x + \beta y\} = \alpha H\{x\} + \beta H\{y\} \quad (2.12)$$

Pode-se descrever homogeneidade (2.11) como uma alteração na amplitude do sinal de entrada resultando em uma alteração correspondente na amplitude do sinal de saída. E aditividade (2.10) como a soma entre sinais de entrada resultando em uma correspondente soma entre os sinais de saída.

Um sistema *não linear* é qualquer sistema que não possa ser classificado como um sistema linear. Portanto, um sistema não linear é qualquer sistema que viole o princípio de superposição.

A superposição é responsável pelos métodos sistemáticos usados para resolver essencialmente qualquer problema linear. Ou seja, divide-se o problema em muitas partes menores e então juntam-se as soluções separadas para chegar a solução do problema inteiro.

Por outro lado, duas soluções de um problema não linear não podem ser somadas para formar outra solução, e portanto, a superposição falha nestes casos. Assim, um problema não linear deve ser considerado como um todo, não sendo possível apenas dividi-lo em pequenos subproblemas e então somar suas soluções para chegar a solução total.

Além do mais, a não linearidade é uma das propriedades características de um tipo de sistema, cujos exemplos podem ser encontrados nos diferentes campos do conhecimento, chamado de sistema complexo.

Uma definição precisa para sistemas complexos ainda não está bem delineada, uma vez que a noção sobre o que é um sistema complexo não é totalmente clara e apresenta diferenças entre autores. Assim, costuma-se explicá-los através de um conjunto de propriedades comumente consideradas como típicas destes sistemas [5].

Mesmo assim, em termos gerais, um sistema complexo pode ser entendido como qualquer sistema formado por um grande número de entidades (partes) que interagem entre si de forma não linear, criando múltiplos níveis de organização, estrutura e comportamento coletivo, de forma que estudar uma pequena parte dele isoladamente não é suficiente para entendê-lo completamente.

Sistemas sociais, formados, em parte, por pessoas; o cérebro, formado por neurônios; moléculas, formadas por átomos; o clima, formado pelas correntes de ar; a bolsa de valores; a internet; o corpo humano; são todos exemplos de sistemas complexos.

SINAIS BIOMÉDICOS

O corpo humano é composto por vários sistemas fisiológicos. De fato, pode-se considerar que o corpo humano, como um todo, é um sistema formado por inúmeros subsistemas. Entre eles, por exemplo, estão os conhecidos sistema respiratório, sistema nervoso, sistema musculoesquelético e sistema cardiovascular. Todos desempenham funções fisiológicas necessárias para a manutenção do organismo, interagindo uns com os outros, e almejando a homeostase do corpo humano. Cada um destes (sub)sistemas, por sua vez, também é constituído por outros diversos subsistemas que conduzem seus variados processos fisiológicos.

Os processos fisiológicos são fenômenos complexos que incluem atividades de controle e estimulação, entradas e saídas, e ações de diferentes naturezas como mecânica, bioquímica ou elétrica. Frequentemente estes processos estão associados a sinais que refletem a sua natureza e as suas atividades. Tais sinais podem ser de diferentes tipos, incluindo como exemplos os bioquímicos em forma de hormônios e neurotransmissores, os elétricos em forma de potencial ou corrente, e os físicos em forma de pressão ou temperatura.

A não linearidade presente nestes processos requer métodos de processamento e análise construídos sobre bases também não lineares. Porém, muito do que é conhecido sobre sistemas fisiológicos tem sido aprendido através da teoria de sistemas lineares. A aproximação pela linearidade, mesmo funcionando relativamente bem em algumas situações, não é capaz de descrever verdadeiramente a natureza e as características de um sistema não linear, motivando então o estudo de métodos não lineares.

3.1 Exemplos de Sinais Biomédicos

Registrar a medida da temperatura corporal ao longo do tempo, por exemplo, gera um sinal representando o estado térmico deste corpo durante certo período. Embora seja um exemplo bastante simples, sua importância pode ser reconhecida na avaliação do bem-estar de uma criança febril ou de um paciente em estado crítico no hospital. A seguir são apresentadas breves descrições de alguns sinais biomédicos de tipos diferentes [6, 7].

- **Sinal de fala:** é um sinal importante, embora seja geralmente considerado mais como um sinal de comunicação do que um sinal biomédico. Entretanto, pode ajudar no diagnóstico quando desordens na fala e no trato vocal precisarem ser investigadas.
- **Eletromiograma (EMG):** registra a atividade elétrica de músculos esqueléticos que produzem corrente elétrica, geralmente proporcional ao nível de atividade. É usado para detectar atividade muscular anormal que ocorre em muitas doenças como a distrofia muscular, inflamação dos músculos, e lesões dos nervos em braços e pernas.
- **Vibromiograma (VMG):** é uma manifestação mecânica direta da contração de um músculo esquelético e é um sinal de vibração que acompanha o EMG. Juntamente com o EMG pode ser útil em estudos relacionados ao controle neuromuscular, à contração muscular e ao treino de atletas.
- **Eletroneurograma (ENG):** resulta da estimulação de um nervo periférico com um choque elétrico de modo que a resposta ao longo do nervo possa ser medida. É usada para determinar a velocidade de condução do nervo, ajudando assim no diagnóstico de lesões no nervo.
- **Eletroretinograma (ERG):** é usado para estudar os potenciais elétricos gerados pela retina do olho durante estimulação luminosa. É útil para avaliar a resposta elétrica de cones e bastonetes, as células visuais na parte de trás da retina, colaborando no diagnóstico de arteriosclerose ou descolamento da retina.

- **Eletrogastrograma (EGG):** é o registro dos impulsos que se propagam através dos músculos do estômago e que controlam suas contrações. É usado quando os músculos do estômago ou os nervos que os controlam não estão funcionando normalmente; por exemplo, quando o estômago não se esvazia normalmente.
- **Eletroencefalograma (EEG):** reflete a atividade elétrica do cérebro. É amplamente usado para avaliação diagnóstica de várias desordens cerebrais, como na determinação do tipo e localização da atividade observada durante uma crise epilética, ou no estudo de desordens do sono.
- **Potencial Evocado (PE):** também referido como potencial evento-relacionado (ERP), constitui uma forma de atividade cerebral que geralmente é evocada por um estímulo sensorial, de origem visual ou acústica por exemplo. É um sinal de amplitude muito pequena presente em "background" no EEG. Entre seus usos clínicos incluem-se o diagnóstico de desordens relacionadas às vias visuais e ao tronco cerebral.
- **Fonocardiograma (FCG):** é um sinal de som ou vibração relacionado à atividade contrátil do sistema cardíaco, representando um registro do sinal sonoro do coração. Doenças cardiovasculares causam mudanças ou adicionam sons e murmúrios ao sinal, que podem ser úteis no diagnóstico.
- **Eletrocardiograma (ECG):** reflete a manifestação elétrica da atividade contrátil do coração. É provavelmente o sinal biomédico mais conhecido e usado. Representa um procedimento clínico padrão para a investigação de doenças do coração como isquemia ou infarto do miocárdio.
- **Tacograma:** também conhecido por série de intervalos RR, é uma série temporal contendo os intervalos de tempo entre batimentos cardíacos consecutivos, extraídos de um ECG. É usado em análises da variabilidade da frequência cardíaca (VFC) para estudar a influência do sistema nervoso autônomo (SNA) na regulação do sistema cardiovascular, e a sua relação com a mortalidade cardiovascular.

3.2 Processamento e Análise

Os sinais biomédicos carregam informações que estão escondidas em suas estruturas e que podem não ser imediatamente percebidas. Estas informações precisam ser extraídas ou decodificadas antes que possam ser feitas interpretações sensatas sobre os sinais [6, 7, 8].

Doenças ou anormalidades em um sistema biológico podem causar alterações nos seus processos fisiológicos normais. Isto leva o sistema a um estado patológico, afetando sua performance, sua saúde e seu bem-estar geral. Um processo patológico está tipicamente associado à sinais que se diferenciam em alguma característica dos seus correspondentes sinais em estado saudável ou normal. Os sinais refletem propriedades dos seus subjacentes sistemas biológicos, e suas decodificações ajudam a explicar e identificar várias condições patológicas.

Possuindo um bom entendimento do sistema de interesse, é possível observar e decodificar os sinais correspondentes a este sistema, avaliar o seu estado e chegar a um possível diagnóstico. Porém, este processo muitas vezes é direto, envolvendo um esforço "manual" muito limitado, como uma simples inspeção visual do sinal impresso em papel ou tela de computador.

De modo geral, a meta do processamento de sinais biomédicos é possibilitar a extração das informações escondidas em um sinal biológico que auxiliem na compreensão dos mecanismos básicos da função biológica e também em diagnósticos ou tratamentos.

No início do século XX, o médico holandês Willem Einthoven marcou o início de uma nova era para o mundo das técnicas de diagnóstico médico. Ele estabeleceu a eletrocardiografia clínica, incluindo assim a eletrônica dentro da área de cuidados da saúde. Desde então, os meios eletrônicos e posteriormente os computadores tornaram-se componentes integrantes dos sistemas de análise de sinais biomédicos.

Instrumentos eletrônicos e computadores são usados na investigação de um grande número de fenômenos e sistemas biológicos e fisiológicos. Podem ser citados como exemplos a atividade elétrica dos sistemas cardiovascular, nervoso e gástrico; as variações de pressão no sistema cardiovascular; os sinais de som e vibração dos sistemas musculoesquelético e respiratório; e os campos magnéticos do cérebro.

Esses equipamentos são empregados em várias tarefas, partindo da aquisição de dados e pré-processamento, para remoção de artefatos, e chegando até a extração de características e interpretação.

Em geral, o primeiro passo na investigação de um sistema fisiológico requer o desenvolvimento de sensores e instrumentos apropriados para transduzir o fenômeno de interesse em um sinal elétrico mensurável. Já o passo seguinte, na análise de sinais, geralmente não é uma tarefa fácil para os médicos e pesquisadores.

A informação clinicamente relevante em um sinal está frequentemente mascarada por ruídos, e as características do sinal podem não ser prontamente compreendidas pelos sistemas visual ou auditivo de um observador humano. Tarefas repetitivas ou que demandam muita atenção para um observador podem ser cansativas e também desinteressantes, elevando a chance de que erros sejam cometidos. Além disso, a variabilidade existente para um tipo de sinal entre diferentes indivíduos, e a variabilidade entre observadores, inerente na análise subjetiva realizada pelos médicos, promovem um entendimento, avaliação ou conclusão dificilmente consistentes sobre qualquer fenômeno.

Fatores como os citados no parágrafo anterior, criaram a necessidade de melhorar não apenas a instrumentação, mas também de desenvolver métodos de análise objetiva ou quantitativa. Estes métodos são empregados através de algoritmos de processamento de sinais que são implementados em software, ou mesmo diretamente em hardware.

A análise computacional de sinais biomédicos, se realizada com a lógica apropriada, tem o potencial de adicionar força objetiva a interpretação de um especialista. Assim, é possível aprimorar a acurácia ou a confiança de um diagnóstico, mesmo as de um especialista experiente. Esta é uma abordagem conhecida como *diagnóstico auxiliado por computador*, ou simplesmente CAD, do inglês *computer-aided diagnosis*.

3.3 Análise Não Linear

Modelos, técnicas e métodos lineares podem não detectar as características não lineares presentes intrinsecamente nos sistemas fisiológicos. Desta forma, estes

métodos podem não ser os mais apropriados para lidar com sinais caracterizados pela natureza destes sistemas.

Apesar de modelos lineares apresentarem algumas vantagens valiosas, como uma sólida base matemática bem estabelecida e um funcionamento relativamente bom para várias aplicações, estas representações são aproximações de uma realidade não linear para uma visão puramente linear.

Por outro lado, a não linearidade é a negação de uma propriedade, o que significa que ao partir para a modelagem não linear sabe-se apenas o que o modelo não é. Ou seja, em alguma aplicação particular, a estrutura para um modelo linear está bem imposta, enquanto para um caso não linear pode existir um grande número de possibilidades [9]. Assim, muitas vezes escolhe-se a abordagem linear devido a sua simplicidade.

Métodos não lineares já são usados na análise de sinais biomédicos. Como ilustração, pode-se ver o que é usado com sinais de EEG [10]. Espectros de alta ordem (HOS, representações espectrais das estatísticas de alta ordem) para identificar sinais epiléticos e preictais através de gráficos de biespectro e bicoerência [11, 12]. Dimensão de correlação (CD) para indicar disfunções cerebrais em pessoas que sofrem do mal de Alzheimer [13]. Dimensão fractal (FD) para identificar e distinguir estados específicos de funções fisiológicas [14] e também para caracterizar a complexidade de séries curtas [15]. Expoente de Hurst para caracterizar o comportamento não estacionário presente em EEG de sono [16]. Entropia espectral de Shannon para medir a irregularidade ou complexidade em EEG [17]. Entropia amostral para analisar fases do sono [18] e mudanças no sinal causadas pela epilepsia [19].

Estes mesmos métodos podem ser aplicados a séries RR e usados na análise da VFC [20, 21, 22] para detecção de arritmias cardíacas, como fibrilação ventricular [23], entre outras anormalidades e doenças cardiovasculares [24, 25, 26, 27]. A aplicação de métodos não lineares também pode ser feita para o estudo de outros tipos de sinais biomédicos [9]. Inclusive, os conceitos da formulação estatística não extensiva de Tsallis também já inspiraram métodos para o processamento de sinais biomédicos [28, 29].

MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO EXTENSIVA

A *mecânica estatística não extensiva*, por vezes também chamada de mecânica estatística não aditiva, é uma generalização da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG), proposta por Constantino Tsallis [30], que atualmente está sendo estudada em diversas áreas da ciência. Esta teoria abriu novas possibilidades para o tratamento de interessantes fenômenos e sistemas complexos que variam de fluído turbulento [31] ao sistema gravitacional de muitas galáxias [32]. Além disso tem sido aplicada também em vários outros sistemas nos campos da física, química, economia, biociências, linguística, ciências da computação, entre outros [28, 29].

4.1 q -Exponencial e q -Logaritmo

A fundamentação matemática da estatística de Tsallis está na definição das generalizações para as expressões das funções logaritmo e exponencial [33], como descritas abaixo:

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (x > 0) \quad (4.1)$$

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x, q \in \mathbb{R}) \quad (4.2)$$

onde $[A]_+ \equiv \max\{A, 0\}$.

As Equações (4.1) e (4.2) são conhecidas por *q-logaritmo* e *q-exponencial*, respectivamente, e retomam as funções usuais para $q = 1$, i.e., $\ln_1(x) = \ln(x)$ e $e_1^x = e^x$. A Figura 4.1 mostra as funções *q-logaritmo* e *q-exponencial* para diferentes valores de q .

Figura 4.1: Funções $\ln_q(x)$ e e_q^x para alguns valores de q .

A Equação (4.2) pode ser encontrada como solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (y(0) = 1; q \in \mathbb{R}) \quad (4.3)$$

sendo (4.1) a sua inversa. Este é o resultado apresentado em [28] como uma possível metáfora para a generalização desenvolvida por Tsallis.

O q -logaritmo e a q -exponencial desempenham um papel muito importante em toda a formulação da teoria de Tsallis. A generalização de muitas das expressões associadas com a estatística de BG se dá apenas pela substituição das formas usuais da exponencial e do logaritmo pelas suas formas generalizadas.

As funções q -logaritmo e q -exponencial apresentam as relações

$$\ln_q(xy) = \ln_q(x) + \ln_q(y) + (1 - q) \ln_q(x) \ln_q(y) \quad (4.4)$$

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y+(1-q)xy} \quad (4.5)$$

que inspiram o aparecimento de uma álgebra generalizada, como será visto adiante, dentro do contexto desta proposta não extensiva.

A q -exponencial, para $q > 1$, está definida para o intervalo $(-\infty, (q-1)^{-1})$, sendo que ela diverge se $x \rightarrow (q-1)^{-1}$. Já para $q < 1$, ela está definida para todos os números reais, sendo que seu valor é zero para $x < (q-1)^{-1}$ (propriedade conhecida como corte ou *cutoff*, que pode ser observada na Figura 4.1(b)).

No caso em que o expoente é um número imaginário iy , para $q \neq 1$, pode-se definir e_q^{iy} como o valor principal de $[1 + i(1-q)y]^{\frac{1}{1-q}}$.

4.2 Entropia de Boltzmann-Gibbs

A mecânica estatística, um dos pilares da física contemporânea, é uma teoria física construída sobre os conceitos de energia e entropia. Estes conceitos são considerados como cruciais e estão entre os mais sutis e misteriosos da física [34]. O conceito de energia está associado com as possibilidades das configurações possíveis de um sistema, enquanto a entropia está associada com as probabilidades destas possíveis configurações.

A entropia, definida pela primeira vez no século XIX por Clausius para a termodinâmica, conecta o mundo microscópico ao mundo macroscópico. Sua forma mais elementar, contendo a função logarítmica, foi introduzida por Boltzmann, sendo posteriormente refinada por Gibbs e outros, como von Neuman e Shannon.

A *entropia de BG*, também conhecida como *entropia de BGS* (Boltzmann-Gibbs-Shannon), para um conjunto finito discreto de probabilidades p_i (de um conjunto de estados discretos W) é dada por

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i) \quad (4.6)$$

com

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad (4.7)$$

onde k é alguma constante positiva convencional, geralmente tomada como a constante universal de Boltzmann k_B na termoestatística, ou como a unidade na teoria da informação. A Expressão (4.6) é a base da mecânica estatística de BG.

Para o caso particular de *probabilidades iguais*, i.e., $p_i = \frac{1}{W}, \forall i$, tem-se

$$S_{BG} = k \ln(W) \quad (4.8)$$

A Expressão (4.6) possui uma propriedade marcante. A entropia S_{BG} é *aditiva* (e também *extensiva*) se, compondo dois sistemas A e B *probabilisticamente independentes*, i.e., a probabilidade conjunta p_{ij}^{A+B} pode ser fatorada como $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ ($\forall (i, j)$), tem-se

$$S_{BG}(A + B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B) \quad (4.9)$$

Considerando agora que o conjunto de estados do sistema seja contínuo, a entropia S_{BG} toma a seguinte forma

$$S_{BG} = -k \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln[\sigma p(x)] dx \quad (k, \sigma > 0) \quad (4.10)$$

com

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (4.11)$$

Se além da restrição (4.11) também for considerado que o valor esperado de x seja zero, i.e, $\langle x \rangle = 0$, e que

$$\langle x^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2 \quad (4.12)$$

ao usar o método de Lagrange para encontrar a distribuição de probabilidade que otimiza a entropia S_{BG} (4.10), obtém-se

$$p(x) = \frac{e^{-\beta x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta x^2} \quad (4.13)$$

Usando a condição (4.12) obtém-se a seguinte relação para β :

$$\beta = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (4.14)$$

que substituindo em (4.13) leva a

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad (4.15)$$

Assim é possível verificar a estreita relação entre a *distribuição gaussiana* (4.15) e a entropia de BG. Ela é a distribuição que, impostas as restrições (4.11) e (4.12), maximiza a entropia S_{BG} .

4.3 Entropia de Tsallis

Desde a sua formulação, a mecânica estatística de BG tem tido um sucesso notável para uma variedade de sistemas. Principalmente aqueles sistemas nos quais dominam interações de curto alcance espacial ou temporal. Porém, para outros tipos de sistemas, muitas vezes considerados como sistemas complexos, existem limitações do formalismo de BG. Exemplos típicos incluem sistemas não lineares no limiar do

caos, turbulência e sistemas com interações de longo alcance, como os gravitacionais. Portanto, há a necessidade de meios alternativos para descrever a estatística destes sistemas.

A generalização proposta por Tsallis é baseada em uma entropia generalizada, caracterizada pelo parâmetro q , tal que para $q = 1$ recupera-se a entropia clássica de BG. O valor do índice q é referenciado como sendo uma característica do sistema, ou da sua classe de universalidade.

A entropia de Tsallis é dada por

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad q \in \mathbb{R} \quad (4.16)$$

com

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad (4.17)$$

sendo que a Expressão (4.16) constitui a base da teoria conhecida por *mecânica estatística não extensiva*.

Para o caso particular de probabilidades iguais a expressão se torna

$$S_q = k \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (4.18)$$

Da definição da função q -logaritmo (4.1), as Expressões (4.16) e (4.18) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$S_q = k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q\left(\frac{1}{p_i}\right) = -k \sum_{i=1}^W p_i^q \ln_q(p_i) \quad (4.19)$$

e

$$S_q = k \ln_q(W) \quad (4.20)$$

Para quaisquer dois sistemas *probabilisticamente independentes* A e B, tem-se

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B) \quad (4.21)$$

Portanto, neste caso, a entropia S_q (para $q \neq 1$) é *não aditiva* e também *não extensiva*. De fato, é esta propriedade que motivou esta generalização da mecânica estatística a ser denominada como não extensiva. Porém, para casos especiais, como o de sistemas especialmente correlacionados, a entropia S_q pode ser extensiva para um valor especial de q [28, 35].

Como visto, o uso do termo "*não extensivo*(a)" para referenciar esta generalização da mecânica estatística de BG, bem como as diferenças entre os significados dos termos *aditivo* e *extensivo*, podem causar confusão. Um esclarecimento maior sobre estes conceitos pode ser encontrado em [28, 36, 37].

Assim como para a entropia de BG, há situações em que os estados do sistema sejam representados por conjuntos contínuos. Neste caso a entropia de Tsallis toma a forma

$$S_q = \frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x)^q dx}{q - 1} \quad (4.22)$$

Analogamente ao formalismo de BG, sob determinadas restrições [38], existe uma classe de distribuições que maximizam S_q (4.22) chamadas de q -gaussianas [39]. Assim como gaussianas estão conectadas a entropia S_{BG} , as q -gaussianas estão conectadas a entropia S_q . Sua expressão é indicada a seguir:

$$G_q(\beta; x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q^{-\beta x^2} \quad (4.23)$$

sendo $\beta > 0$ e C_q uma constante de normalização tal que $\int_{-\infty}^{\infty} G_q(\beta; x) dx = 1$ dada por

$$C_q = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{(3-q)\sqrt{1-q}} \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) \left[\Gamma\left(\frac{3-q}{2(1-q)}\right) \right]^{-1} & -\infty < q < 1 \\ \sqrt{\pi} & q = 1 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q-1}} \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) \right]^{-1} & 1 < q < 3 \end{cases} \quad (4.24)$$

As q -gaussianas estão definidas para $-\infty < q < 3$ e, como esperado, a gaussiana usual (4.15) é retomada para $q = 1$. Para $q < 1$, $G_q(\beta; x)$ apresenta suporte compacto, sendo que sua densidade é zero para $|x| > 1/\sqrt{(1-q)\beta}$, enquanto para $q > 1$ a cauda da distribuição passa a seguir uma lei de potência.

4.4 q -Álgebra

As operações básicas da q -álgebra [40] aparecem naturalmente na mecânica estatística não extensiva. A partir das relações do q -logaritmo (4.4) e da

q -exponencial (4.5), define-se a q -soma de dois números x e y como

$$x \oplus_q y = x + y + (1 - q)xy \quad (4.25)$$

Assim a expressão da entropia de Tsallis para dois sistemas probabilisticamente independentes (4.21) pode ser reescrita com a seguinte notação:

$$S_q(A + B) = S_q(A) \oplus_q S_q(B) \quad (4.26)$$

A q -soma é uma operação comutativa e associativa. Contudo ela não é distributiva em relação a multiplicação usual. O elemento neutro da operação é o zero, i.e., $(x \oplus_q 0 = x)$.

Pode-se definir $\ominus_q x$ como o inverso aditivo de x , sendo que $x \oplus_q (\ominus_q x) = 0$. Assim, tem-se

$$\ominus_q x \equiv \frac{-x}{1 + (1 - q)x} \quad \left(x \neq \frac{1}{q - 1} \right) \quad (4.27)$$

A partir de (4.27) define-se a q -diferença como operação inversa a q -soma:

$$x \ominus_q y \equiv x \oplus_q (\ominus_q y) = \frac{x - y}{1 + (1 - q)y} \quad \left(y \neq \frac{1}{q - 1} \right) \quad (4.28)$$

A seguir é apresentada a definição do q -produto:

$$x \otimes_q y \equiv [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x \geq 0, y \geq 0) \quad (4.29)$$

Uma forma de ampliar o domínio do q -produto para valores negativos de x e y é usando a definição estendida

$$x \otimes_q y \equiv \text{sign}(xy) [|x|^{1-q} + |y|^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (4.30)$$

O q -produto respeita as propriedades comutativa, i.e., $x \otimes_q y = y \otimes_q x$, e também associativa, i.e., $x \otimes_q (y \otimes_q z) = (x \otimes_q y) \otimes_q z$.

Para o caso de q -produto por zero, há certas condições:

$$x \otimes_q 0 = \begin{cases} (x^{1-q} - 1)^{\frac{1}{1-q}} & \text{se } q < 1 \text{ e } x > 1 \\ 0 & \text{se } (q \geq 1 \text{ e } x \geq 0) \text{ ou } (q < 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (4.31)$$

O elemento neutro para o q -produto é o 1, assim $x \otimes_q 1 = x$.

Isto leva a definição do inverso multiplicativo $1 \oslash_q x$, tal que $x \otimes_q (1 \oslash_q x) \equiv 1$.
Tem-se

$$1 \oslash_q x \equiv [2 - x^{1-q}]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x \geq 0) \quad (4.32)$$

Uma característica notável é que $1 \oslash_q 0$ não diverge para $q < 1$.

Assim, é possível definir a q -razão como a operação inversa do q -produto:

$$x \oslash_q y \equiv [x^{1-q} - y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x, y > 0) \quad (4.33)$$

Todas estas representações algébricas generalizadas (q -soma, q -diferença, q -produto, q -razão) retomam as operações usuais quando $q = 1$.

As relações apresentadas até aqui permitem expressar as propriedades do q -logaritmo e da q -exponencial, como as já apresentadas (4.4) e (4.5), em uma forma mais compacta:

$$\ln_q(xy) = \ln_q(x) \oplus_q \ln_q(y) \quad (x > 0, y > 0) \quad (4.34)$$

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x \oplus_q y} \quad (x \geq_q 0 \text{ ou } y \geq_q 0) \quad (4.35)$$

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q(x) + \ln_q(y) \quad (x^{1-q} + y^{1-q} \geq 1) \quad (4.36)$$

$$e_q^x \otimes_q e_q^y = e_q^{x+y} \quad (x \geq_q 0 \text{ e } y \geq_q 0) \quad (4.37)$$

$$\ln_q(x/y) = \ln_q(x) \ominus_q \ln_q(y) \quad (x > 0, y > 0) \quad (4.38)$$

$$e_q^x / e_q^y = e_q^{x \ominus_q y} \quad (y >_q 0) \quad (4.39)$$

$$\ln_q(x \oslash_q y) = \ln_q(x) - \ln_q(y) \quad (x^{1-q} + 1 \geq y^{1-q}) \quad (4.40)$$

$$e_q^x \oslash_q e_q^y = e_q^{x-y} \quad (x \geq_q 0 \text{ ou } y \geq_q 0) \quad (4.41)$$

sendo que notação $x \geq_q 0$ significa $1 + (1 - q)x \geq 0$.

Ainda pode-se definir a q -potência

$$x^{\otimes_q n} \equiv \underbrace{x \otimes_q x \otimes_q x \otimes_q \dots \otimes_q x}_{n \text{ vezes}} = [nx^{1-q} - (n-1)]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (4.42)$$

e também a q -soma de n termos iguais

$$\underbrace{x \oplus_q x \oplus_q x \oplus_q \dots \oplus_q x}_{n \text{ termos}} = \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)x]^n - 1\} \quad (4.43)$$

Chama-se a atenção para o fato que existem outras possibilidades de generalização para a função exponencial [41, 42, 43], bem como para a q -álgebra

nos moldes do paradigma não extensivo [44, 45]. Entretanto elas não são estudadas neste trabalho.

As relações da q -álgebra são compactas e simples, embora existam restrições originadas pelo *cutoff* que aparece na q -exponencial que devam ser consideradas. Apesar destas limitações, é notável que muitos fenômenos, dentro da categoria de sistemas complexos, parecem ser bem ajustados por q -exponenciais ou funções que pertencem a sua família [40].

4.5 Funções q -Circulares

Outro grupo de funções generalizadas, conhecidas como funções q -circulares [46], surge a partir da definição da função q -exponencial (4.2). Estas são generalizações das funções trigonométricas seno ($\text{sen}(x)$), cosseno ($\text{cos}(x)$) e tangente ($\text{tan}(x)$).

Ao expandir e_q^x na série de Taylor ao redor de $x_0 = 0$ encontra-se

$$e_q^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} Q_{n-1} x^n \quad (4.44)$$

em que $Q_n(q) \equiv 1q(2q-1)(3q-2)\dots[nq-(n-1)]$.

A q -exponencial de um número imaginário ix leva a uma expressão semelhante a fórmula de Euler:

$$e_q^{\pm ix} = \text{cos}_q(x) \pm i \text{sen}_q(x) \quad (4.45)$$

em que $\text{cos}_q(x)$ e $\text{sen}_q(x)$ representam, respectivamente, as funções generalizadas q -cosseno e q -seno. Elas são definidas pelas expressões

$$\text{cos}_q(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Q_{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{sen}_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Q_{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (4.46)$$

Agora, expressando a q -exponencial em termos da exponencial e logaritmo usuais como

$$e_q(x) = e_1 \left(\frac{\ln_1[1 + (1-q)x]}{1-q} \right) \quad \forall x \neq \frac{1}{q-1} \quad (4.47)$$

e usando a seguinte propriedade do logaritmo usual de um número complexo, $z = |z|e_1^{i\phi}$, encontram-se as seguinte expressões:

$$\text{cos}_q(x) = \rho_q(x) \text{cos}_1(\varphi_q(x)) = \rho_q(x) \text{cos}(\varphi_q(x)) \quad (4.48)$$

$$\text{sen}_q(x) = \rho_q(x) \text{sen}_1(\varphi_q(x)) = \rho_q(x) \text{sen}(\varphi_q(x)) \quad (4.49)$$

em que

$$\rho_q(x) = \{e_q[(1-q)x^2]\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.50)$$

$$\varphi_q(x) = \frac{\arctan[(1-q)x]}{1-q} \quad (4.51)$$

que representam as generalizações q -cosseno e q -seno em função de suas formas usuais. A Figura 4.2 mostra exemplos de $\cos_q(x)$ e $\sin_q(x)$ para um $q < 1$ e um $q > 1$.

Figura 4.2: Exemplos de $\cos_q(x)$ e $\sin_q(x)$ para $q = 0,99$ e $q = 1,01$.

A razão entre $\sin_q(x)$ e $\cos_q(x)$ define a função generalizada q -tangente como

$$\tan_q(x) = \frac{\sin_q(x)}{\cos_q(x)} \quad (4.52)$$

O q -cosseno e o q -seno são formados pelo produto de dois fatores. O primeiro, $\rho_q(x)$, é responsável pela amplitude das funções, enquanto o segundo, uma senoide em função de $\varphi_q(x)$, se responsabiliza por caracterizar suas oscilações.

Uma particularidade interessante que o q -seno apresenta é

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin_q(x)}{x} = 1 \quad \forall q \in \mathbb{R} \quad (4.53)$$

Figura 4.3: *Projeção no plano xy da representação paramétrica $x = \cos_q(t)$, $y = \sin_q(t)$, $z = t$ para $q = 0,99$ e $q = 1,01$.*

Observando a representação paramétrica do q -cosseno e do q -seno, em que $x = \cos_q(t)$, $y = \sin_q(t)$ e $z = t$, nota-se a formação de uma linha em espiral, como pode se observar na Figura 4.3. A espiral vai em direção a zero para $q > 1$ e diverge para $q < 1$. Para $q = 1$ a espiral se torna um círculo. O módulo do raio na espiral para um ponto t , i.e., $\rho_q(t)$, aparece na seguinte relação

$$\cos_q^2(t) + \sin_q^2(t) = e_q^{it} e_q^{-it} = \rho_q^2(t) \quad (4.54)$$

que representa a generalização para o *teorema de Pitágoras*.

Nota-se que para $q < 1$, $\rho_q(x) \geq 1$, sendo que $\rho_q(x) \sim (1+x^2)^{\frac{1}{2(1-q)}}$ se $x \rightarrow \infty$. E para $q > 1$, $0 < \rho_q(x) \leq 1$, sendo que quando $|x| \rightarrow \infty$, $\rho_q(x) \rightarrow 0$. A Figura 4.4 ilustra a função $\rho_q(x)$ para diferentes valores de q . Além disso, o número de rotações

Figura 4.4: *Comportamento da função $\rho_q(x)$ para diferentes valores de q .*

Figura 4.5: Função $\varphi_q(x)$ para valores de $q \geq 1$.

da linha em espiral é *finita*, devido ao fato que há um *valor máximo absoluto* para $\varphi_q(x)$, obtido através de

$$\varphi_q^{max} = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_q(x) = \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{1-q} \right| \quad (4.55)$$

A Figura 4.5 ilustra a função $\varphi_q(x)$ para alguns valores de q .

Dessa forma, $\cos_q(x)$ e $\sin_q(x)$ oscilam infinitamente *apenas* se $q = 1$.

O número de raízes do q -cosseno (N_c) e do q -seno (N_s) podem ser calculados

Figura 4.6: $\cos_q(x)$ para $q = 0$ e $q = 2$, e $\sin_q(x)$ para $q = 0,5$ e $q = 1,5$.

por

$$N_c = 2 \left[\text{int} \left(\left| \frac{1}{1-q} \right| \right) - \text{int} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{1}{1-q} \right| \right) \right] \quad N_s = 2 \text{int} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{1}{1-q} \right| \right) + 1 \quad (4.56)$$

onde $\text{int}(x)$ é o maior inteiro $\leq x$.

Portanto, $\cos_q(x)$ não tem raízes para $q \leq 0$ ou $q \geq 2$ e $\sin_q(x)$ apresenta apenas uma raiz, em $x = 0$, para $q \leq 0.5$ ou $q \geq 1.5$, como pode ser observado na Figura 4.6 . Dentro destes intervalos elas apresentam apenas um número limitado de raízes, com exceção para $q = 1$, quando o número de raízes é infinito.

Verifica-se ainda que e_q^{ikx} é uma solução exata para a seguinte equação diferencial do oscilador harmônico não linear:

$$\frac{d^2[\phi(x)]^\nu}{dx^2} + \gamma^2[\phi(x)]^\mu = 0 \quad (4.57)$$

com $q = \frac{\mu - \nu}{2} + 1$ e $k^2 = \frac{2\gamma^2}{\nu(\mu + \nu)}$. Quando $q \rightarrow 1$, recupera-se a equação do oscilador harmônico simples, cuja solução são as funções circulares clássicas que formam a base de funções para a transformada de Fourier.

Outra aplicação destas funções q -circulares, juntamente com a q -exponencial, aparece no estudo de generalizações de funções *wavelet mãe* [47].

CAPÍTULO 5

TRANSFORMADA DE FOURIER E SUA q -GENERALIZAÇÃO

Aplicações baseadas na análise de Fourier estão presentes em praticamente todas as áreas da ciência. Desta forma, uma grande importância é atribuída ao estudo deste tema. *Análise de Fourier* é o nome dado ao estudo da representação (ou aproximação) de funções genéricas por meio da soma de funções senoidais complexas. Originalmente, a análise de Fourier se preocupou em representar e analisar fenômenos periódicos, através da chamada série de Fourier. Mais tarde, ela se estendeu para fenômenos não periódicos, através da transformada de Fourier.

Inicialmente com aplicações focadas em fenômenos em tempo contínuo, as ferramentas da análise de Fourier para sinais e sistemas de tempo discreto também se desenvolveram ao longo dos séculos XIX e XX. Particularmente, os resultados deste desenvolvimento foram fundamentais para a implementação digital destes conceitos permitindo o processamento de conjuntos discretos de pontos. Assim, estabeleceu-se uma estrutura poderosa para a análise de sinais e sistemas tanto de tempo contínuo quanto de tempo discreto, junto a um vasto conjunto de aplicações.

Dentre os estudos mais recentes que envolvem esta temática, encontra-se a definição de uma q -generalização da transformada de Fourier. Ela foi proposta durante o desenvolvimento de uma generalização para o Teorema do Limite Central (TLC) baseada no formalismo não extensivo de Tsallis [48].

5.1 Representações de Fourier

Existem diferentes representações de Fourier, cada uma usada para uma classe diferente de sinais: periódico contínuo, periódico discreto, não periódico contínuo e não periódico discreto.

Os sinais periódicos são representados como séries de Fourier, sendo que aos de tempo contínuo se aplica a chamada *série de Fourier* (FS, do inglês *Fourier Series*) e aos de tempo discreto a *série de Fourier de tempo discreto* (DTFS, *Discrete Time Fourier Series*). Já aos sinais não periódicos de tempo contínuo se aplica a *transformada de Fourier* (FT, *Fourier Transform*) enquanto que aos de tempo discreto se aplica a *transformada de Fourier de tempo discreto* (DTFT, *Discrete Time Fourier Transform*). A DTFS também é chamada de *transformada de Fourier discreta* (DFT), porém para evitar confusão com outras representações a terminologia DTFS é mantida neste trabalho.

Sinais senoidais desempenham um papel fundamental nestas representações. Portanto, alguns comentários a seu respeito são pertinentes.

A relação entre sinais senoidais e exponenciais complexos pode ser observada usando a *fórmula de Euler*. Considerando a exponencial complexa $e^{i\theta}$ e as senóides $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, tem-se

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (5.1)$$

Portanto, o uso da terminologia sinais senoidais complexos também pode ser entendido como referência a exponenciais complexas na forma $e^{i\theta}$.

Os sinais podem ser representados como uma superposição ponderada de funções senoidais complexas (ou funções exponenciais complexas). Se este sinal for submetido a entrada de um sistema linear, a saída do sistema será formada por uma superposição ponderada das respostas do sistema a cada senoide.

Esta forma de representação possui motivações poderosas na teoria de sistemas devido ao papel de *autofunção* de sistemas desempenhada pela senoide complexa. Além disso, ela possibilita uma forma alternativa para a interpretação dos sinais, diferente da descrição do sinal como uma função do tempo. Os pesos usados nas ponderações descrevem o sinal como uma *função da frequência*, contendo diferentes informações a respeito do sinal.

Senoides complexas, de tempo contínuo e de tempo discreto, com frequências separadas por um múltiplo inteiro da frequência fundamental são *ortogonais*.

Esta propriedade exerce um papel fundamental na determinação das representações, pois é usada nas derivações das séries de Fourier.

5.1.1 Séries de Fourier

Ao representar um sinal periódico como uma superposição ponderada de senoides complexas, cada senoide da superposição deve ter o mesmo período que o sinal. Isto implica que cada uma das senoides deve ter sua frequência como um múltiplo inteiro da frequência fundamental do sinal.

Considerando representar pela DTFS um sinal de tempo discreto $x[n]$, com período fundamental N , tem-se a aproximação $\hat{x}[n]$ dada por

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{ik\Omega_0 n}$$

em que $\Omega_0 = 2\pi/N$ é a frequência fundamental de $x[n]$ e $A[k]$ é o peso aplicado a k -ésima senoide complexa, cuja frequência é $k\Omega_0$. A notação $k = \langle N \rangle$ indica que k varia ao longo de quaisquer N valores consecutivos. Verifica-se que

$$e^{i(N+k)\Omega_0 n} = e^{ik\Omega_0 n}$$

e assim, existem *apenas* N senoides complexas de tempo discreto da forma $e^{ik\Omega_0 n}$ que são *distintas*. O somatório é realizado apenas sobre N valores consecutivos do índice k , pois ao longo desses valores obtém-se um conjunto único de N senoides complexas distintas.

Pode-se usar o método de minimização do erro médio quadrático (MSE, *mean square error*) para determinar os pesos, também chamados coeficientes, $A[k]$.

Assim, a representação por DTFS para um sinal $x[n]$ é

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{ik\Omega_0 n} \quad (5.2)$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-ik\Omega_0 n} \quad (5.3)$$

em que $x[n]$ e $X[k]$ são um par de DTFS e $x[n]$ tem período fundamental N e $\Omega_0 = 2\pi/N$.

Tanto $X[k]$ quanto $x[n]$ fornecem uma descrição completa do sinal. A representação pelos coeficientes da DTFS também é conhecida como representação no *domínio de frequência*, uma vez que cada coeficiente está associado com uma senoide complexa de frequência diferente.

Os coeficientes $X[k]$ são números complexos. Desta forma, o *módulo* ou *magnitude* de $X[k]$, denotado por $|X[k]|$, é conhecido como *espectro de magnitude*, e a *fase* de $X[k]$, denotado por $\arg\{X[k]\}$, como *espectro de fase* de $x[n]$.

Dentre todas as representações de Fourier citadas, a DTFS é a única que pode ser implementada em um computador digital. Isso acontece porque tanto a representação no domínio do tempo do sinal quanto no domínio de frequência são caracterizadas por um conjunto finito de números N .

Agora, ao considerar a representação por FS de um sinal de tempo contínuo $x(t)$, com período fundamental T , tem-se a aproximação $\hat{x}(t)$ dada por

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{ik\omega_0 t}$$

em que $\omega_0 = 2\pi/T$ é a frequência fundamental de $x(t)$ e $A[k]$ é o peso aplicado a k -ésima senoide complexa, cuja frequência é $k\omega_0$.

Diferentemente do tempo discreto, as senoides complexas de tempo contínuo $e^{ik\omega_0 t}$ com frequências distintas $k\omega_0$ são *sempre distintas*, e o somatório deve ser realizado considerando esse número infinito de termos distintos.

Através da propriedade de ortogonalidade das senoides complexas determina-se o valor dos coeficientes $A[k]$.

Assim, a representação por FS para $x(t)$ pode ser escrita como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{ik\omega_0 t} \quad (5.4)$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad (5.5)$$

em que $x(t)$ e $X[k]$ são um par de FS e $x(t)$ tem período fundamental T e $\omega_0 = 2\pi/T$.

Da mesma forma como na DTFS, a representação pelos coeficientes $X[k]$ na FS é conhecida como representação no domínio de frequência, $|X[k]|$ é o espectro de magnitude e $\arg\{X[k]\}$ é o espectro de fase de $x(t)$.

5.1.2 Transformadas de Fourier

Comparado ao caso de sinal periódico, o período das senoides complexas usadas para representar um sinal não periódico não possui restrições. Desta maneira, são empregadas senoides complexas de um *continuum* de frequências nas representações. Os sinais não periódicos são representados como uma integral ponderada de senoides complexas com a frequência da senoide como variável de integração.

As senoides de tempo discreto, usadas na representação por DTFT para sinais de tempo discreto, são distintas somente ao longo de um intervalo de frequência 2π . Isso é devido ao fato que senoides de tempo discreto com frequências separadas por um múltiplo inteiro de 2π são idênticas. Por isso a DTFT envolve senoides com frequências dentro de um intervalo de 2π .

A partir da DTFS é possível desenvolver uma derivação intuitiva para a DTFT. Resumidamente, ao descrever um sinal não periódico de tempo discreto $x[n]$ como o limite de um sinal periódico $\tilde{x}[n]$ cujo período fundamental N aproxima-se do infinito, ou seja,

$$x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}[n]$$

consegue-se expressar $x[n]$ como uma superposição ponderada de senoides complexas de tempo discreto.

A representação por DTFT para $x[n]$ é expressa como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{i\Omega n} d\Omega \quad (5.6)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\Omega n} \quad (5.7)$$

em que $x[n]$ e $X(\Omega)$ são um par de DTFT.

Diz-se que a Equação (5.7) é a DTFT de $x[n]$, por converter o sinal no domínio do tempo para o domínio de frequência. Já a Equação (5.6) é chamada DTFT inversa, por realizar a conversão inversa, do domínio de frequência para o domínio do tempo.

Como na DTFS e na FS, o espectro de magnitude do sinal $x[n]$ é o módulo de $X(\Omega)$ e o espectro de fase é a fase de $X(\Omega)$.

Para representar sinais não periódicos de tempo contínuo usa-se a FT, através de senoides complexas de tempo contínuo. Todas as senoides de tempo contínuo com frequências distintas são distintas. Assim, a FT envolve senoides com frequências de $-\infty$ a ∞ .

Dessa forma, a representação por FT para $x(t)$ é dada como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.8)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.9)$$

em que $x(t)$ e $X(\omega)$ são um par de FT.

Como na DTFT, diz-se que a Equação (5.9) é a FT de $x(t)$, por converter o sinal no domínio do tempo para o domínio de frequência. Já a Equação (5.8) é chamada FT inversa, por realizar a conversão inversa, do domínio de frequência para o domínio do tempo. Além disso, o espectro de magnitude do sinal $x(t)$ é o módulo de $X(\omega)$ e o espectro de fase é a fase de $X(\omega)$.

Como a DTFS é a única representação de Fourier que pode ser avaliada numericamente por um computador, ela também costuma ser aplicada para sinais não periódicos de duração finita. A seguir, mostra-se a relação entre DTFS e DTFT.

Seja $x[n]$ um sinal de duração finita de tamanho N amostras, ou de outra forma, $x[n] = 0$, $n < 0$ ou $n \geq M$, a sua DTFT é dada por

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-i\Omega n}$$

Supondo que as N amostras de $x[n]$ formem o período de um sinal periódico $\tilde{x}[n]$, ao calcular os $N \geq M$ coeficientes da DTFS de $\tilde{x}[n]$ tem-se $\Omega_0 = 2\pi/N$ e

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-ik\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-ik\Omega_0 n}$$

já que $x[n]=0$ para $n \geq M$. Então, comparando $\tilde{X}[k]$ com $X(\Omega)$ obtém-se a relação

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad (5.10)$$

Assim, pode-se dizer que os coeficientes da DTFS do sinal $x[n]$ são amostras avaliadas em intervalos de $2\pi/N$ da sua DTFT, ponderadas por $1/N$.

5.1.3 Propriedades

Todas as quatro representações de Fourier compartilham de um conjunto comum de propriedades, que partem das características de senóides complexas, funções sobre as quais as representações se baseiam. A seguir são enunciadas algumas propriedades para a FT, que são similarmente válidas para as outras representações.

A propriedade de *linearidade* é satisfeita. Seja $z(t)$ uma superposição ponderada de dois sinais, i.e., $z(t) = ax(t) + by(t)$ sua FT, $Z(\omega)$, é dada por

$$Z(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$$

Esta relação está de acordo com a Expressão (2.12), portanto a FT é uma operação linear.

Quanto às propriedades de *periodicidade*, a FT é usada com sinais de tempo contínuo e não periódicos, e leva à representações no domínio de frequência que também são contínuas e não periódicas.

Em resumo, considerando todas as representações de Fourier, sinais de tempo discreto têm representações periódicas no domínio de frequência, enquanto sinais de tempo contínuo têm estas representações como não periódicas. De modo geral, representações contínuas em um domínio são não periódicas no outro domínio, e representações discretas em um domínio, são periódicas no outro.

A propriedade de *mudança de escala* considera o efeito causado na representação em domínio de frequência de um sinal ao mudar de escala sua variável tempo. Ao admitir o sinal $z(t) = x(at)$, sua FT, $Z(\omega)$, é dada por

$$Z(\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ou seja, a mudança de escala no tempo produz uma mudança de escala inversa no domínio de frequência, além de uma mudança de escala na amplitude.

A FT apresenta também propriedades de *simetria*.

Se $x(t)$ é um sinal com valores puramente reais, a parte real de sua transformada $X(\omega)$ é uma função *par* da frequência e a parte imaginária é *ímpar*, i.e.,

$$\operatorname{Re}\{X(\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-\omega)\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{X(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-\omega)\}$$

Além disso, o espectro de magnitude é *par* e o de fase é *ímpar*, i.e.,

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad \text{e} \quad \arg\{X(\omega)\} = -\arg\{X(-\omega)\}$$

Agora, supondo que o sinal $x(t)$ além de real também seja par, tem-se que $X^*(\omega) = X(\omega)$. Assim $\text{Im}\{X(\omega)\}$ deve ser zero, e consequentemente $X(\omega)$ será *puramente real*. Do mesmo modo, se $x(t)$ além de real for ímpar, tem-se que $X^*(\omega) = -X(\omega)$ e portanto, $X(\omega)$ será *puramente imaginário*.

Caso $x(t)$ for um sinal com valores puramente imaginários, a parte real de sua transformada $X(\omega)$ tem simetria *ímpar* e a parte imaginária tem simetria *par*, i.e.,

$$\text{Re}\{X(\omega)\} = -\text{Re}\{X(-\omega)\} \quad \text{e} \quad \text{Im}\{X(\omega)\} = \text{Im}\{X(-\omega)\}$$

E os espectros de magnitude e fase permanecem com a mesma simetria do caso com valores puramente reais.

Outra propriedade importante é a que diz respeito a *convolução* e *multiplicação* entre sinais. A convolução no domínio do tempo se transforma em multiplicação no domínio de frequência, e a multiplicação no domínio de tempo se transforma em convolução no domínio de frequência.

Ou seja, para o sinal $z(t) = x(t) * y(t)$, a sua FT é

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

e para o sinal $z(t) = x(t)y(t)$, a sua FT é

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Como ponto de observação para as outras representações de Fourier, caso os sinais envolvidos sejam periódicos, no domínio de tempo ou no de frequência, a operação de convolução deve ser considerada como *convolução periódica*.

Há também o teorema ou *relação de Parseval*, que afirma que a energia ou potência de um sinal é conservada na representação de Fourier. Isto significa que a energia ou potência na representação de domínio de tempo é igual a energia ou potência na representação de domínio de frequência.

Um sinal não periódico de tempo contínuo $x(t)$ tem sua energia calculada como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (5.11)$$

e sendo $X(\omega)$ a sua FT, a relação de Parseval conclui que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

mostrando a igualdade da energia em ambas as representações, com um fator de normalização 2π na representação de domínio de frequência. Chama-se a quantidade $|X(\omega)|^2$ de *espectro de energia* do sinal, que é o quadrado do seu espectro de magnitude.

Para um sinal periódico de tempo contínuo $x(t)$ com período fundamental T , ao invés do uso de energia há a aplicação da potência, calculada como

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (5.12)$$

Neste caso, o quadrado do espectro de magnitude do sinal é denominado *espectro de potência*.

5.2 q -Transformada de Fourier

A q -transformada de Fourier (q -FT) é introduzida para o intervalo $1 \leq q < 3$ em [48]. Ela é representada pelo operador F_q para uma função f e coincide com a transformada de Fourier (5.9) quando $q = 1$. Em contraste com a transformada usual, esta generalização está definida em termos do q -produto e da q -exponencial, e é não linear para $q \neq 1$.

Seja $f(x)$ qualquer função absolutamente integrável, i.e., $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ ¹, não negativa e com $\text{supp } f \subseteq \mathbb{R}$, sua q -FT é definida pela fórmula

$$F_q[f](\omega) = \int_{\text{supp } f} e_q^{i\omega x} \otimes_q f(x) dx \quad (5.13)$$

onde $\text{supp } f$ indica o suporte de $f(x)$.

A Equação (5.13) também pode ser chamada de q -função característica de uma variável aleatória X associada a uma função densidade de probabilidade $f_X(x)$, usando a notação equivalente $F_q(X)$.

¹ $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

A igualdade $e_q^{i\omega x} \otimes_q f(x) = f(x)e_q^{i\omega x[f(x)]^{q-1}}$, que vale para todo $x \in \text{supp } f$, implica em uma expressão para a q -FT em termos do produto usual, sem o uso do q -produto, como mostrado a seguir

$$F_q[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e_q^{i\omega x[f(x)]^{q-1}} dx \quad (5.14)$$

Não é difícil verificar que esta transformação é realmente não linear para $q \neq 1$. Ao ponderarmos $f(x)$ por uma constante a qualquer, verifica-se que

$$F_q[af(x)](\omega) \neq aF_q[f(x)](\omega) \quad q \neq 1 \quad (5.15)$$

diferentemente do que foi visto na Subseção 5.1.3, de propriedades para a FT.

Para a mudança de escala da variável independente, a seguinte propriedade, mostrada em [49], também pode ser verificada

$$F_q[f(bx)](\omega) = \frac{1}{b} F_q[f(x)]\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad b \neq 0 \quad (5.16)$$

que é semelhante ao caso da FT.

Além disso, também verifica-se que

$$F_q[f](0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \quad (5.17)$$

Para funções discretas $f[n]$, onde $n \in \mathbb{Z}$, também existe uma definição para q -transformada, que é definida como

$$F_q[f](\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_f} e_q^{i\Omega n} \otimes_q f[n] \quad (5.18)$$

onde $\mathbb{Z}_f = \{n \in \mathbb{Z} : f[n] \neq 0\}$. Sua versão sem o uso do q -produto pode ser representada como

$$F_q[f](\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] e_q^{i\Omega n[f[n]]^{q-1}} \quad (5.19)$$

A Expressão (5.18) pode ser vista como uma generalização para a expressão da DTFT (5.7) para sinais discretos, já que esta forma é retomada para $q = 1$.

Uma propriedade importante da q -generalização da FT é verificada a seguir. Seja $f(x) = G_q(\beta; x)$,

$$F_q[f](\omega) = F_q\left[\frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q^{-\beta x^2}\right](\omega) = e_{q_1}^{-\beta_1 \omega^2}, \quad q_1 = z(q), \quad 1 \leq q < 3 \quad (5.20)$$

sendo que

$$z(s) = \frac{1+s}{3-s}, \text{ para } s \in (-\infty, 3) \quad (5.21)$$

Ou seja, ela transforma funções q -gaussianas (4.23) em outras funções q -gaussianas, de modo semelhante a transformada usual, que transforma uma gaussiana em outra. Esta generalização, de posse desta propriedade, é conveniente para o desenvolvimento da q -generalização do TLC.

Uma outra função que tem sua q -FT apresentada na literatura é a função de distribuição uniforme [50]. A distribuição uniforme é dada por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.22)$$

e sua q -FT é

$$U_q[u](\omega) = \frac{q_2 2^{\frac{q_2-1}{q_2}}}{\omega} \text{sen}_{q_2} \left[\frac{\omega}{q_2 2^{\frac{q_2-1}{q_2}}} \right] = \text{sinc}_{q_2} \left[\frac{\omega}{q_2 2^{\frac{q_2-1}{q_2}}} \right] \quad (5.23)$$

em que $q_2 = z(z(q)) = \frac{1}{2-q}$ e $\text{sinc}_q(x)$ é a função q -sinc definida como $\frac{\text{sen}_q(x)}{x}$.

A invertibilidade da q -FT é outra questão bastante discutida. Para a classe de q -gaussianas com $q > 1$ a q -FT apresenta uma expressão para transformada inversa [51]. Porém, uma forma analítica genérica para representar a q -transformada inversa não foi encontrada [52], embora existam estudos procurando soluções para esta limitação [53, 54, 55].

5.3 Generalização do Teorema do Limite Central

O *Teorema do Limite Central* (TLC) está entre os mais importantes teoremas da teoria de probabilidades e estatística. Existem algumas formas variantes para este teorema, mas em linhas gerais ele afirma que, sob certas condições, a média (ou a soma) de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias independentes, cada qual com média e variância finitas, terá uma distribuição de probabilidade aproximadamente igual a uma distribuição normal.

Na sua forma clássica, as variáveis aleatórias independentes também devem ser identicamente distribuídas, levando à terminologia variáveis aleatórias *independentes e identicamente distribuídas* (*iid*).

Dada uma amostra aleatória simples $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de tamanho n , i.e., uma sequência de variáveis aleatórias *iid* com distribuições com média μ e variância finita σ^2 , a distribuição amostral da média $S_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ aproxima-se de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2/n quando $n \rightarrow \infty$.

A FT se relaciona com o TLC através do uso de *funções características* de variáveis aleatórias para a prova do teorema.

Se uma variável aleatória X admite uma *função densidade de probabilidade* (PDF, *probability density function*), por exemplo $f_X(x)$, então sua função característica é a FT desta PDF. Ou seja,

$$F(X) = F[f_X](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{i\omega x} dx$$

é a função característica de X ².

Agora, sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, f_X e f_Y suas respectivas PDF, e f_{X+Y} a PDF da soma $X + Y$. A PDF de uma soma de variáveis aleatórias independentes é a *convolução* entre as PDF de cada variável. Assim, $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

Se $F[f_X]$, $F[f_Y]$ e $F[f_{X+Y}]$ são as respectivas funções características das PDF anteriores, a seguinte relação é válida:

$$F[f_X * f_Y] = F[f_X]F[f_Y] \quad (5.24)$$

Nestes termos, o teorema afirma que o produto entre funções características de um número de variáveis independentes se aproxima da função característica de uma variável com distribuição normal, quando este número de variáveis tende ao infinito.

Esta afirmação vai ao encontro das propriedades de convolução e multiplicação da FT, apresentadas na Subseção 5.1.3, como visto na Expressão (5.24), e do fato da FT transformar uma função gaussiana em outra gaussiana.

No TLC clássico, é necessário que as variáveis aleatórias sejam independentes. Contudo, também foram estabelecidas formas variantes do teorema para o caso de

²Observa-se que para a definição de funções características, a constante $i\omega$ é positiva, diferentemente do que ocorre na definição da FT (5.9). Contudo, trata-se apenas de uma convenção. Isso explica a definição da q -FT (5.13) também apresentar a constante positiva ao invés de negativa.

variáveis fracamente dependentes ou correlacionadas [56]. Por outro lado, no caso de variáveis fortemente correlacionadas ou dependentes o TLC não é válido.

A mecânica estatística não extensiva é uma teoria que lida com variáveis aleatórias com correlações globais [57], um tipo de variáveis fortemente correlacionadas. O fato da entropia S_q ser maximizada por distribuições de probabilidade q -gaussianas, juntamente a algumas conjecturas [58], indicações numéricas [59] e outros estudos, sugerem a existência de uma analogia do TLC dentro do formalismo não extensivo de Tsallis.

Usando as construções da q -álgebra, é possível generalizar o TLC conforme o formalismo da mecânica estatística não extensiva. Assim, no desenvolvimento desta generalização, foi definida a q -transformada de Fourier (q -FT) como apresentada em (5.13).

A seguir são apresentadas a função de distribuição *escort* e algumas outras definições usadas na formulação do teorema generalizado.

Seja $f(x)$ a PDF de uma variável aleatória X , e

$$\nu_q(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^q dx < \infty$$

a função

$$f_q(x) = \frac{[f(x)]^q}{\nu_q(f)} \quad (5.25)$$

é geralmente chamada de distribuição *escort*, e

$$\mu_q = \mu_q(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_q(x) dx \quad \text{e} \quad \sigma_q^2 = \sigma_q^2(X - \mu_q) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_q)^2 f_q(x) dx$$

são respectivamente conhecidas como q -média e q -variância.

Uma aplicação da q -FT na generalização do TLC acontece na definição das noções de q -independência e q -convergência.

Estão definidas três tipos de q -independência, tal que todas generalizam a noção clássica de independência entre variáveis (5.24). Entretanto, para $q \neq 1$, cada um destes tipos indica, de fato, a existência de correlações globais entre as variáveis.

Dadas duas variáveis aleatórias $X = X' - \mu_q(X')$ e $Y = Y' - \mu_q(Y')$, elas são

q -independentes do

$$\begin{aligned}
 \text{tipo 1 se} \quad & F_q[f_{X+Y}](\omega) = F_q[f_X](\omega) \otimes_q F_q[f_Y](\omega), \\
 \text{tipo 2 se} \quad & F_{q-1}[f_{X+Y}](\omega) = F_{q-1}[f_X](\omega) \otimes_q F_{q-1}[f_Y](\omega) \quad q = z(q_{-1}), \quad (5.26) \\
 \text{tipo 3 se} \quad & F_{q-1}[f_{X+Y}](\omega) = F_q[f_X](\omega) \otimes_q F_q[f_Y](\omega) \quad q = z(q_{-1})
 \end{aligned}$$

onde a função z é a mesma expressa em (5.21).

Por definição, diz-se que uma sequência de variáveis X_N q -converge para uma variável X_∞ se $\lim_{N \rightarrow \infty} F_q[X_N](\omega) = F_q[X_\infty]$ localmente uniforme em ω .

De maneira simplificada, o TLC q -generalizado afirma que dada uma sequência de N variáveis aleatórias q -independentes de um determinado tipo e identicamente distribuídas, com μ_q e σ_{2q-1}^2 finitas, a distribuição da variável

$$Z_N = \frac{(X_1 + \dots + X_N - N\mu_q)}{D_N(q)} \quad \text{onde} \quad D_N(q) \equiv (\sqrt{N\nu_{2q-1}\sigma_{2q-1}^2})^{\frac{1}{2-q}}$$

q -converge para uma determinada q -gaussiana, cujos parâmetros dependem do tipo de q -independência assumida, quando $N \rightarrow \infty$. Detalhes sobre a prova desta generalização são encontrados em [48].

MATERIAIS E MÉTODOS

A proposta deste projeto é investigar a q -FT, através de sua implementação computacional, com a finalidade de avaliar sua aplicação na análise de sinais biomédicos através de testes com sinais de variabilidade da frequência cardíaca (VFC).

Três etapas principais foram definidas para esta investigação. A primeira possui um perfil teórico analítico e trata do estudo da q -FT, analisando suas características e seu comportamento com funções contínuas. A segunda, por sua vez, consiste na realização de experimentos computacionais com sinais simulados discretos. Por fim, a terceira etapa também consiste em experimentos computacionais, desta vez para avaliar o uso da ferramenta com sinais reais digitais de VFC de indivíduos normais e com cardiopatias.

Para viabilizar a realização dos experimentos computacionais foram necessárias adaptações nas definições da q -FT, apresentadas na Seção 5.2. Estas adaptações visam adequar a implementação da q -transformada, discretizando a representação em domínio de frequência e também permitindo sua aplicação em sinais finitos e com valores negativos.

O interesse no estudo dos sinais simulados está na comparação entre o que acontece com a transformada generalizada para valores de $q \neq 1$ e o caso clássico $q = 1$. Os experimentos com sinais reais têm por objetivo rastrear o domínio de frequências e também o domínio do parâmetro q , atrás de indícios do comportamento da q -transformada na análise espectral de sinais biomédicos, especificamente da VFC.

6.1 Estudo Analítico

A primeira etapa do projeto visou a realização de um levantamento teórico e analítico do formalismo estatístico não extensivo proposto por Tsallis. Ela buscou a obtenção de uma fundamentação adequada com subsídios para as etapas seguintes de investigação do método.

Consistiu basicamente de um estudo que partiu da origem deste formalismo, através da definição da entropia de Tsallis, passando pela generalização da função exponencial, definição da q -álgebra e das generalizações das funções circulares, até chegar ao TLC generalizado e a definição da q -FT. Por fim, incluiu também uma investigação do comportamento da q -FT em sinais de tempo contínuo classicamente usados como exemplos de funções na teoria de Fourier.

6.2 Implementação da q -Transformada de Fourier

Para a realização da segunda e da terceira etapas, que envolvem experimentos computacionais, foi preciso implementar a q -FT. Esta implementação envolve algumas adaptações da definição original da q -FT que são descritas a seguir.

Seja $x[n]$ um sinal de duração finita de tamanho N amostras, ou de outra forma, $x[n] = 0$, $n < 0$ ou $n \geq M$, a sua q -DTFT (5.19) é dada por

$$X_q(\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e_q^{i\Omega n x[n]^{q-1}}$$

Porém, esta representação não pode ser diretamente implementada em computador, uma vez que seu domínio de frequência é contínuo. É uma situação semelhante às representações clássicas de Fourier, em que a DTFS é a única que pode ser avaliada numericamente por um computador.

Procura-se então uma q -generalização para a Relação (5.10), que envolve a DTFT e os coeficientes da DTFS de um sinal de duração finita. Esta é uma maneira de estabelecer uma representação q -generalizada para a transformada que também possa ser numericamente avaliada. Ou seja, procura-se por um $X_q[k]$, tal que

$$X_q[k] = \frac{1}{N} X_q(k\Omega_0) \quad (6.1)$$

com $\Omega_0 = 2\pi/N$, sendo que no caso $q = 1$ retoma-se a relação para o caso clássico (5.10). Deste modo, neste trabalho é proposto o uso da seguinte expressão como uma q -generalização para o cálculo de coeficientes da DTFS:

$$\begin{aligned} X_q[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \otimes_q e_q^{ik \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e_q^{ik \frac{2\pi}{N} n x[n]^{q-1}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

A expressão anterior satisfaz a Relação (6.1) e retoma a forma clássica para o cálculo dos coeficientes DTFS, quando $q = 1$. Ela possibilita a representação em forma discreta do domínio de frequência, para um sinal discreto de duração finita, e portanto pode ser avaliada computacionalmente. Pode-se dizer que $X_q[k]$ é formada por amostras avaliadas em intervalos de $2\pi/N$ da q -DTFT do sinal $x[n]$, ponderadas por $1/N$.

Adaptação para Sinais com Valores Negativos

Como visto na Seção 5.2, a q -generalização da FT, nas formas contínua (5.13) (5.14) e discreta (5.18) (5.19), é definida para funções não negativas, como por exemplo a classe das PDF. Como consequência, a expressão definida anteriormente em (6.2), a princípio, também deve respeitar essa restrição.

Esta restrição é devida basicamente ao uso do q -produto na generalização. Neste projeto, a maneira escolhida para contorná-la foi através de uma adaptação usando a definição estendida do q -produto (4.30). Assim, para permitir a aplicação da Expressão (6.2) em funções com valores negativos define-se

$$\begin{aligned} X_q[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{sign}(x[n]) (|x[n]| \otimes_q e_q^{ik \frac{2\pi}{N} n}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e_q^{ik \frac{2\pi}{N} n |x[n]|^{q-1}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

com a forma clássica ainda sendo retomada para $q = 1$. É válido ressaltar também que, baseado na condição (4.31), para valores igual a zero em $x[n]$ considerou-se o resultado do q -produto como *zero*.

6.3 Sinais Simulados

Na etapa de simulações foram usados alguns sinais discretos determinísticos considerados como elementares no estudo de sinais e sistemas [1]. Neste estudo prático, foram usados intervalos finitos destes sinais.

Os experimentos realizados nesta etapa consistiram basicamente na aplicação computacional da equação definida em (6.3) sobre os sinais simulados. Também foram realizados testes na tentativa de se elucidar o comportamento da q -generalização em relação a algumas propriedades apresentadas na Subseção 5.1.3.

Os sinais utilizados são descritos a seguir:

- Funções *seno* e *cosseno* discretos e periódicos, i.e., nas formas

$$\text{sen}[m \Omega_0 n] \quad \text{e} \quad \text{cos}[m \Omega_0 n] \quad (6.4)$$

respectivamente, onde $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ é a frequência fundamental da senoide, com m, N inteiros, sendo m o número do harmônico e N o período.

- Função *impulso* ou *delta de Kronecker* dada por

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

- Função *retangular* na forma

$$w[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } |n| \leq M \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.6)$$

onde M é um inteiro positivo.

6.4 Sinais Reais

Neste projeto, a avaliação da q -FT como ferramenta para análise de sinais biomédicos foi realizada aplicando-na em sinais reais de VFC. O sinal de VFC, por provir de um sistema fortemente não linear, é um sinal com características adequadas para se investigar a capacidade da q -FT em analisar sinais provenientes deste tipo de sistemas.

Foram usados dados reais provenientes de duas fontes diferentes. Um primeiro grupo de sinais foi conseguido através do website do *Physionet* [60]. Este grupo contém dados de indivíduos saudáveis, indivíduos com insuficiência cardíaca e indivíduos com fibrilação atrial. Já o outro grupo de dados foi obtido junto ao Laboratório de Fisiologia do Exercício (LFE), da Divisão de Cardiologia da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto (FMRP). Ele possui dados referentes a indivíduos chagásicos, hipertensos e saudáveis.

Os experimentos com sinais reais consistiram basicamente na aplicação da equação definida em (6.3) para calcular o espectro de potência dos sinais. O espectro de potência de um sinal pode ser calculado através do quadrado do seu espectro de magnitude, assim como apresentado no final da Subseção 5.1.3, para sinais de tempo contínuo.

No caso discreto, a *relação de Parseval* pode ser definida como

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2 \quad (6.7)$$

em que a quantidade $|X[k]|^2$ é o espectro de potência do sinal.

Desta forma, nesta etapa o espectro de potência foi calculado usando o espectro de magnitude obtido de (6.3). Estes testes buscaram verificar se a análise espectral generalizada é capaz de diferenciar indivíduos saudáveis de doentes, realizando uma comparação com a análise espectral convencional.

A próxima subseção trata de alguns detalhes sobre os sinais e a análise da VFC, sendo seguida por subseções que fazem uma breve descrição dos dois grupos de dados utilizados.

6.4.1 Variabilidade da Frequência Cardíaca

A VFC reflete a habilidade do coração se adaptar a mudanças, detectando e respondendo rapidamente a estímulos imprevisíveis. Sua análise permite avaliar o estado do *sistema nervoso autônomo* (SNA), responsável por regular a atividade cardíaca.

O SNA é a porção do *sistema nervoso periférico* responsável pelas funções involuntárias do organismo humano e adaptação frente às mudanças no ambiente em que se encontra. Juntamente com o *sistema nervoso central*, atua na

regulação das diversas funções fisiológicas autonômicas, como respiração, digestão, termorregulação, etc. O SNA é dividido em duas partes distintas, o *simpático* e o *parassimpático*, que possuem ações antagônicas, i.e., contrárias.

O controle da atividade do coração está diretamente ligado ao SNA. Os impulsos elétricos que dão origem às contrações musculares do coração são gerados principalmente por uma região conhecida como *nódulo sinusal*. Esta região, localizada no átrio direito, é formada por células especializadas em gerar impulsos elétricos espontaneamente, e tem sua atividade submetida à ação do SNA. O balanço entre as atividades simpática e parassimpática do SNA regula a intensidade da frequência dos batimentos cardíacos, aumentando ou diminuindo a frequência de geração de impulsos elétricos no nódulo sinusal.

O SNA pode sofrer anormalidades, causando prejuízos ao bom funcionamento do organismo. Uma série de testes autonômicos podem ser realizados para detectar a localização de alguma disfunção ou anormalidade no SNA. Estes testes buscam identificar as diferenças existentes entre os ramos simpático e parassimpático. O objetivo básico e comum entre eles é estimular os mecanismos regulatórios de ambos os ramos do SNA e observar como eles respondem. As respostas se apresentam em alterações de outras variáveis fisiológicas, como por exemplo a frequência cardíaca.

Um exemplo é o teste ortostático passivo, ou teste *tilt*, que consiste resumidamente em colocar uma pessoa inicialmente em repouso, na posição horizontal, e em seguida levá-la passivamente para a posição vertical. Ao realizar o teste, percebe-se que há um aumento da atividade do ramo simpático e uma diminuição da atividade do ramo parassimpático, em comparação ao estado inicial de repouso.

Portanto, analisar a variação sofrida pela frequência cardíaca ao longo do tempo é uma forma de se observar a ação combinada entre os sistemas simpático e parassimpático. A análise da VFC é geralmente realizada sobre a *série de intervalos RR*, ou *tacograma*, como citado na Seção 3.1. Além de ser um sinal de simples obtenção, através de métodos não invasivos de baixo custo, é um sinal que carrega informações importantes sobre a regulação cardiovascular e a influência do SNA exercida sobre ela.

Análise em Domínio de Frequência da VFC

Entre as formas usadas para se avaliar a VFC está a *análise em domínio de frequência*, que contribui para a compreensão da atuação dos ramos do SNA na série de intervalos RR [61, 62, 63]. Esta análise é realizada através de métodos que estimam o *espectro de potência* da série RR, provendo informações básicas de como a potência (variação) da série se distribui como uma função da frequência.

As séries RR são séries indexadas pelo número do intervalo entre batimentos e não como amostras no tempo. Desta forma, a representação em domínio de frequência não é diretamente expressa em Hertz (ciclos por segundo), mas sim em unidades de *ciclos por batimento*. Uma maneira de contornar esta situação é considerar que uma série RR é formada por amostras no tempo com período de amostragem igual ao valor médio dos seus intervalos RR, que são medidas em unidades de tempo [64, 65]. Assim, o domínio de frequência pode ser expresso em unidades de Hertz.

Para espectros de potência calculados sobre registros curtos, com cerca alguns minutos, distinguem-se três componentes espectrais principais [61, 66]: VLF (*very low frequency*), LF (*low frequency*) e HF (*high frequency*). A banda VLF abrange as frequências mais baixas do espectro, menores que 0,04 Hz. A banda LF é a banda de baixa frequência e compreende valores entre 0,04 Hz e 0,15 Hz. E a HF é a banda de alta frequência compreendendo valores entre 0,15 Hz e 0,40 Hz.

A banda HF é reconhecidamente relacionada com a atividade do ramo parassimpático do SNA. Já a banda LF apresenta controvérsias quanto a sua interpretação, visto que alguns a consideram como uma representação da atividade do ramo simpático, e outros como uma representação que inclui influências de ambos os ramos do SNA. Quanto a banda VLF, trata-se de uma banda cuja interpretação fisiológica ainda precisa ser melhor esclarecida [66].

Desta forma, os valores de potência das bandas LF e HF, e da razão LF/HF são medidas de domínio de frequência geralmente usadas para interpretar e avaliar a contribuição do SNA sobre a VFC usando registros de curta duração. Como exemplo pode-se citar o que acontece no caso do teste *tilt*. Durante o repouso, tanto a banda LF quanto HF aparecem como componentes espectrais principais. Durante o *tilt* o espectro passa a ser predominado pela componente LF, causando um aumento

considerável no valor da razão LF/HF, comparado ao estado de repouso [62, 66].

Por fim, um dos métodos usados para estimar o espectro de potência de uma série é baseado na FT [4, 67]. Porém, esta transformada é linear e algumas características da regulação da VFC pelo SNA que apontam para a não linearidade podem não ser refletidas. Assim, este projeto fez uso da q -generalização da FT para estimar o espectro de potência das séries RR, esperando obter alguma informação a cerca da não linearidade.

6.4.2 Base de Dados PhysioBank - Physionet

Physionet é um *website* que oferece livre acesso a uma grande coleção de sinais fisiológicos e ferramentas de software para sua análise. O *PhysioBank* reúne e organiza estes sinais em grandes arquivos, chamados de bancos de dados. Já o *PhysioToolkit* reúne uma coleção de softwares que pode ser usada para manipular estes dados.

Os sinais usados neste projeto que foram obtidos da base de dados PhysioBank foram agrupados em três classes: indivíduos saudáveis, indivíduos com insuficiência cardíaca e indivíduos com fibrilação atrial.

Os dados do grupo de indivíduos saudáveis foram retirados dos bancos *MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database* e *Normal Sinus Rhythm RR Interval Database*. O primeiro banco possui 18 registros longos de ECG anotados, enquanto o segundo possui apenas as anotações de batimentos de 54 registros longos de ECG.

Os dados do grupo de indivíduos com insuficiência cardíaca foram retirados dos bancos *BIDMC Congestive Heart Failure Database* e *Congestive Heart Failure RR Interval Database*. O primeiro possui 15 registros longos de ECG anotados, enquanto o segundo possui apenas as anotações de batimentos de 29 registros longos de ECG.

Os dados do grupo de indivíduos com fibrilação atrial foram retirados do banco *MIT-BIH Atrial Fibrillation Database*, que possui 25 registros longos de ECG anotados.

As séries de intervalo RR foram extraídas a partir das anotações dos batimentos contidas nos arquivos destes bancos de dados. Esse processamento de extração foi feito através da ferramenta *ann2rr* (*Annotation to RR*) disponibilizada

no PhysioToolkit. As séries obtidas são formadas por um grande número de pontos, porém para a análise deste projeto foram selecionados trechos relativamente curtos de apenas 2048 pontos em cada sinal.

Procurou-se realizar a seleção dos trechos em períodos de vigília dos indivíduos, buscando manter o mesmo padrão para todos eles, uma vez que a VFC se altera nos períodos de sono. Visualmente, foram escolhidos trechos que aparentassem ter a mínima presença de transientes e mínima variação da média e desvio padrão. Além disso, também por inspeção visual, algumas séries foram eliminadas por serem consideradas de baixa qualidade (forte presença de transientes).

Assim, foram usadas neste projeto um total de 70 séries de saudáveis (18 do primeiro banco e 52 do segundo), 44 de insuficiência cardíaca e 11 de fibrilação atrial. No apêndice A, as Tabelas A.1, A.2, A.3, A.4, A.5 mostram algumas informações sobre os dados de cada grupo analisado.

Com estes dados pode-se avaliar a capacidade de distinção, por parte da análise espectral generalizada, entre indivíduos saudáveis e doentes.

6.4.3 Base de Dados do LFE-FMRP

O conjunto de sinais utilizados neste projeto que foi obtido junto ao LFE-FMRP é formado por grupos de séries RR de indivíduos chagásicos, hipertensos e saudáveis.

Os conjuntos de dados são de 15 indivíduos saudáveis, 23 indivíduos chagásicos e 19 indivíduos hipertensos, totalizando 57 indivíduos. As séries RR de cada um deles foram obtidas tanto em condições de repouso como em testes de manobra postural passiva, o teste *tilt*. O grupo de saudáveis tem em média 971 pontos na série em repouso e 1200 pontos em *tilt*. Para os grupos de chagásicos e hipertensos, estes valores são 939 para repouso e 1160 para *tilt*, e 1056 para repouso e 1277 para *tilt*, respectivamente. No apêndice A, as Tabelas A.6, A.7, A.8 mostram algumas informações sobre os dados de cada grupo analisado.

O protocolo de obtenção utilizado nas coletas é resumido a seguir. Inicialmente o paciente fica em repouso na posição supina, por um período de 20 minutos, o que é necessário para sua adaptação ao ambiente e estabilização de sua atividade fisiológica. Então a coleta dos dados é iniciada. Nos primeiros 20 minutos o

paciente permanece na posição horizontal, sendo que os 5 minutos iniciais dessa fase são desprezados como forma de garantir a eliminação de qualquer tipo de artefato. Em seguida, a mesa em que o paciente se encontra na posição horizontal é girada passivamente em 70 graus, deixando o paciente na posição vertical por 20 minutos. Neste caso, também são desprezados os primeiros 5 minutos após a mesa ser girada, para remoção do transiente que surge com a manobra postural. Após os 20 minutos na posição vertical, o paciente é levado novamente para posição horizontal, e a coleta é finalizada. O paciente ainda permanece na posição horizontal por mais 5 minutos para recuperação. Desta forma, todas as séries RR, tanto de repouso quanto de *tilt*, têm aproximadamente 15 minutos de duração.

Com estes dados, além do estudo de diferenciação entre saudáveis e doentes, pode-se realizar o estudo do comportamento das bandas LF e HF e da razão LF/HF, comparando os estados de repouso e de *tilt*.

6.5 Softwares

Foram utilizados principalmente dois softwares no desenvolvimento deste projeto. Para auxiliar o desenvolvimento das duas primeiras etapas do projeto foi usado o programa *Mathematica* da empresa *Wolfram Research*. O *Mathematica* possui bibliotecas de funções matemáticas básicas e especiais, suporte a computação simbólica, ferramentas para cálculos discretos e contínuos, além de muitos outros recursos. As características voltadas a computação simbólica deste software foram aproveitadas no estudo analítico da q -FT e de outras funções dentro do formalismo não extensivo. Além disso, ele foi usado para validar a implementação da q -FT dada pela Expressão (6.3), através de experimentos combinando as formas contínua e discreta da transformada generalizada. Além disso, experimentos com sinais simulados também foram realizados.

O outro software empregado no projeto é o *JBioS* [68], desenvolvido dentro do Grupo de Computação em Sinais e Imagens Médicas (CSIM) do Departamento de Computação e Matemática (DCM) da FFCLRP-USP. O *JBioS* é uma proposta de plataforma de software de código-aberto para análise de sinais biomédicos. Desenvolvido na linguagem *Java*, versão 6 da Java Platform

Standard Edition (JavaSE 6), suas principais características são a portabilidade para diferentes arquiteturas computacionais e a extensibilidade por meio de plugins. Os experimentos referentes a etapa com sinais reais foram realizados neste software. O método de análise espectral generalizada foi implementado como plugin e adicionado a plataforma de software. Também foram realizados experimentos com sinais simulados para verificar a implementação da transformada, através de comparação com os resultados obtidos no Mathematica.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

7.1 Estudo Analítico

Dentro das investigações programadas, as primeiras atividades envolviam um levantamento de caráter teórico e analítico sobre a q -FT e os elementos do formalismo não extensivo de Tsallis que a embasam.

A q -FT, como visto na Equação (5.13), está definida em termos do q -produto e da q -exponencial de números imaginários, cujas propriedades influenciam diretamente as da q -FT. Assim, as propriedades destas operações revelam os motivos de alguns comportamentos e restrições dessa transformada generalizada.

Sobre a q -exponencial de números imaginários

As primeiras considerações podem ser feitas sobre a função q -exponencial de números imaginários. Pela forma apresentada na Equação (4.45), nota-se que ela possui valores complexos. Estes valores são formados por um q -cosseno (4.48) como a parte real e um q -seno (4.49) como a parte imaginária. Isso demonstra claramente que, na verdade, a influência da q -exponencial sobre a q -FT é traduzida pelas propriedades destas duas funções q -circulares.

Tanto o q -cosseno quanto o q -seno, assim como o cosseno e o seno, podem ser entendidos como funções que apresentam uma amplitude e um padrão oscilatório. Porém, diferentemente das funções convencionais que têm um valor fixo de amplitude e oscilam a uma frequência também fixa, a amplitude e as oscilações dessas q -funções variam em função do seu argumento quando $q \neq 1$. Estas variações são retratadas pelas funções $\rho_q(x)$ (4.50) e $\varphi_q(x)$ (4.51).

A $\rho_q(x)$ é uma *função par* que representa a amplitude, e para $x = 0$ seu valor é sempre 1, independentemente do valor de q . Para $q = 1$, $\rho_1(x) = 1$. Se for tomado o limite para $q \rightarrow \infty$ ou $q \rightarrow -\infty$, $\rho_q(x)$ retoma o valor fixo da amplitude das funções exponenciais convencionais, i.e., $\rho_q(x) \rightarrow 1$, como pode ser visto na Figura 7.1.

Figura 7.1: Comportamento de $\rho_q(x)$ quando $q \rightarrow -\infty$ e $q \rightarrow \infty$.

Entretanto, há diferenças em como a função evolui para este valor limite, se $q > 1$ ou $q < 1$. Se $q > 1$, o valor de $\rho_q(x)$ está sempre entre 1 e 0, sendo que $\rho_q(x) \rightarrow 0$ a medida que $|x|$ aumenta. Portanto, se $q \rightarrow \infty$, $\rho_q(x) \rightarrow 1$ a partir de valores abaixo de 1. Mas se $q \rightarrow -\infty$, $\rho_q(x) \rightarrow 1$ a partir de valores acima de 1. Isso ocorre já que o $\rho_q(x)$ é sempre maior que 1 para $q < 1$. Neste caso, a medida que $|x|$ aumenta, $\rho_q(x) \rightarrow (1 + t^2)^{\frac{1}{2(1-q)}}$.

Já a função $\varphi_q(x)$ é uma *função ímpar* que está associada as oscilações, sendo que em $x = 0$ seu valor é sempre 0, independentemente do valor de q . Tanto para $q < 1$ quanto para $q > 1$ seu comportamento é o mesmo. Isto indica que a função $\rho_q(x)$ é quem causa as diferenças entre as funções q -circulares quando $q < 1$ ou

Figura 7.2: Comportamento de $\varphi_q(x)$ quando $q \rightarrow \infty$.

$q > 1$. De $\varphi_q(x) = x$ para $q = 1$, a função chega a $\varphi_q(x) \rightarrow 0$ no limite $q \rightarrow -\infty$ ou $q \rightarrow \infty$, como ilustrado na Figura 7.2.

Além disso, para cada q , existe um valor máximo absoluto que esta função pode alcançar, dado pela Expressão (4.55). Devido a este máximo absoluto, q -cosseno e q -seno são funções que não oscilam infinitamente para $q \neq 1$, e portanto apresentam um número de raízes finito. O número de raízes pode ser calculado através das expressões em (4.56). É possível verificar que fora do intervalo $0 < q < 2$, o q -cosseno não apresenta raízes, e o q -seno tem apenas uma raiz, em $x = 0$, fora do intervalo $0,5 < q < 1,5$.

Diante destas características de $\rho_q(x)$ e $\varphi_q(x)$, se $q \rightarrow -\infty$ ou $q \rightarrow \infty$ então $\cos_q(x) \rightarrow 1$ e $\sin_q(x) \rightarrow 0$, como ilustrado nas Figuras 7.3 e 7.4. Nota-se que 1 e 0 são, respectivamente, os valores de $\cos_1(x)$ e $\sin_1(x)$ para $x = 0$. Os comportamentos oscilatórios já começam a desaparecer a partir da mínima variação do parâmetro $q = 1$. Além disso, q -cosseno se caracteriza como uma classe de funções pares e o q -seno de funções ímpares.

Sobre o q -produto

Considerando agora o q -produto, trata-se de uma operação definida sob algumas restrições, como apresentado na Seção 4.5. A começar, o intervalo dos valores permitidos como domínio de seus fatores se restringe a valores reais maiores ou iguais a zero, como visto na Equação (4.29). Para um fator igual a zero, ainda existem regras diferentes para se efetuar a operação, condicionadas aos valores do outro fator e de q (4.31).

A criação de uma definição estendida (4.30) procura contornar a limitação, permitindo a inclusão de todos os números reais no seu domínio. Embora a definição estendida apresente uma solução para a limitação relacionada aos números reais, na literatura não são encontradas considerações especiais claras sobre o q -produto entre fatores de valor complexo. Este ponto ainda não bem esclarecido sobre o q -produto permite que diferentes formas de interpretação possam ser tomadas.

É evidente que a integral na q -FT se dá sobre um q -produto em que ao menos um de seus fatores (a q -exponencial) apresenta valor complexo. A ausência na literatura de considerações sobre q -produto envolvendo números complexos, torna

Figura 7.3: Evolução da função $\cos_q(x)$ ao longo dos valores de q . Quando $q \rightarrow -\infty$ ou $q \rightarrow \infty$, $\cos_q(x) \rightarrow 1$.

Figura 7.4: Evolução da função $\text{sen}_q(x)$ ao longo dos valores de q . Quando $q \rightarrow -\infty$ ou $q \rightarrow \infty$, $\text{sen}_q(x) \rightarrow 0$.

difícil sua interpretação diante alguns casos. Por exemplo, como efetuá-lo entre um valor complexo e um valor real negativo ou igual a zero. Este é provavelmente um dos motivos pelos quais a q -FT está definida apenas para funções não negativas, como é o caso das funções densidade de probabilidade.

Outra característica apresentada pela definição da q -FT é a integração apenas sobre o suporte da função, caso ela tenha suporte finito. É dada atenção a esta característica pois a expressão sendo integrada (i.e., $f(x) \otimes_q e_q^{ix\xi}$) pode ter um valor diferente de zero fora do suporte da função. Este é um efeito causado pelo q -produto.

Sobre a expressão equivalente sem q -produto da q -FT

Desta forma, dadas as condições $f(x)$ não negativa e x pertencente ao suporte de f , define-se uma expressão equivalente para q -FT, apresentada em (5.14). Esta expressão está definida em termos do produto convencional ao invés do q -produto. Ao retirar o q -produto, essa alteração traz uma perspectiva diferente para se interpretar a expressão da q -transformada. Entretanto, na prática, a nova versão permanece produzindo os mesmos resultados, uma vez que é apenas uma forma equivalente.

Nota-se que agora, a expressão dentro da integral passa a ser o produto convencional entre a função f e a q -exponencial, mas com seu argumento modificado. O argumento da q -exponencial passa a ficar em função do valor de f e do valor de q (i.e., $e_q^{ix\xi[f(x)]^{q-1}}$). Consequentemente, este novo argumento influencia o comportamento tanto da amplitude quanto do padrão oscilatório do q -cosseno e do q -seno, implicitamente presentes na expressão da q -exponencial de números imaginários.

Sobre a q -FT de funções contínuas clássicas

Uma outra condição apresentada para a aplicação da q -FT sobre uma função é que esta função seja absolutamente integrável. Algumas das funções de tempo contínuo usuais na teoria de Fourier não respeitam esta condição e portanto, a princípio, sua q -FT não é calculada para $q \neq 1$. É o caso de funções como o degrau unitário.

Entretanto, outras funções como as das distribuições gaussiana e uniforme

são absolutamente integráveis e devem portanto ter uma expressão para sua q -FT.

Para a função da distribuição uniforme (5.22), o cálculo da q -FT leva a uma função chamada de q -sinc, igual a $\text{sen}_q(x)/x$, como já apresentado na Equação (5.23). Este é um resultado interessante, já que no caso clássico a sua FT é a função *sinc*.

Para valores de q muito próximos a 1, o comportamento da função q -sinc é parecido ao da sinc clássica para valores não muito distantes de $x = 0$, conforme a ilustração na Figura 7.5(a). Devido a influência de $\rho_q(x)$, presente no q -seno, suas oscilações são amplificadas para $q < 1$ ou atenuadas para $q > 1$. Contudo, a medida que q se afasta de 1, as oscilações vão diminuindo até desaparecerem, assim como acontece com o q -seno devido a influência de $\varphi_q(x)$. A Figura 7.5(b) exemplifica isto para o caso $q > 1$. Além disso, segundo a particularidade do q -seno apresentada em (4.53), a função q -sinc(x) tem valor 1 no limite $x \rightarrow 0$, assim como a sinc clássica.

Figura 7.5: q -FT da função de distribuição uniforme: q -sinc. (a) Comparação entre $q = 1$, $q = 0,99$ e $q = 1,01$. (b) Desaparecimento das oscilações para $q > 1$.

Para a função gaussiana clássica, não é encontrada na literatura uma expressão para sua q -FT, com $q \neq 1$. O que se encontra, de fato, é a aplicação da q -FT sobre a classe das funções q -gaussianas, mostrado em (5.20). Assim, a aplicação sobre a gaussiana clássica é somente um caso particular quando o índice $q = 1$. A q -FT é aplicada sempre a uma q -gaussiana que possui o seu mesmo valor de q . É algo diferente do que ocorre com a função uniforme, em que a q -FT, para diferentes valores de q , é sempre aplicada a mesma função. Assim, é possível verificar o efeito causado pelos diferentes valores de q durante a transformação de uma mesma função. Em suma, para a gaussiana clássica, não foram encontrados

estudos que apresentem resultados que permitam esta verificação para diferentes valores de q . Da mesma forma, outras funções absolutamente integráveis também não têm suas q -FT apresentadas na literatura. Desenvolver analiticamente a q -FT de funções contínuas está além do escopo deste projeto.

Além disso, é perceptível que a definição da q -FT favorece sua aplicação sobre as funções q -gaussianas. Sua aplicação sobre uma q -gaussiana resulta em outra q -gaussiana ponderada por um fator. A restrição para o intervalo $1 \leq q < 3$ presente na definição da q -FT reside sobre este fato. As funções q -gaussianas não estão definidas para $q \geq 3$, portanto não é possível calcular sua q -FT para estes valores de q . E para $q < 1$, a q -FT das q -gaussianas não resulta em outras funções q -gaussianas, como é mostrado em [49]. Portanto, de fato, esta restrição de valores para o parâmetro q está associado a viabilidade do cálculo da q -FT de q -gaussianas para o processo de generalização do TLC, apresentado na Seção 5.3. Deste modo, o cálculo para outras funções pode não ficar limitado a este intervalo de valores, como é o caso da função uniforme discutido anteriormente.

Por fim, através da q -FT da função uniforme e das funções q -gaussianas é possível verificar a propriedade (5.16) de mudança de escala da variável independente. Nota-se que se uma função é comprimida usando uma constante $b > 1$, sua q -FT se expande e há uma perda na sua amplitude. Por outro lado, se uma função é expandida com uma constante $0 < b < 1$, sua q -FT se comprime e há um ganho na amplitude. Comportamentos semelhantes a FT clássica.

Nas próximas seções os resultados dos experimentos com sinais simulados e reais são apresentados e discutidos.

7.2 Sinais Simulados

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados da aplicação computacional da Equação (6.3) sobre os sinais descritos na Seção 6.3.

Delta de Kronecker

A função delta de Kronecker (6.5) é ilustrada na Figura 7.6. Nesta figura, a linha contínua caracteriza a delta de Dirac, a versão em tempo contínuo do impulso.

Figura 7.6: Impulso $x[n] = \delta[n]$. Os pontos representam a delta de Kronecker $\delta[n]$, e a linha contínua representa a delta de Dirac $\delta(t)$.

Os pontos são como amostras deste impulso contínuo, representando sua versão de tempo discreto, a delta de Kronecker.

Na teoria clássica, a FT de $x(t) = \delta(t)$ é definida como $X(\omega) = 1$, do mesmo modo que a DTFT de $x[n] = \delta[n]$ é definida como $X(\Omega) = 1$. Considerando que os pontos amostrados na Figura 7.6 constituam um sinal de duração finita $\tilde{x}[n]$ com $N = 21$ amostras no intervalo $-10 \leq n \leq 10$, os coeficientes da DTFS deste sinal são definidos como $\tilde{X}[k] = 1/N$. Estas definições exemplificam a Expressão (5.10) que relaciona a DTFT e os coeficientes da DTFS de um sinal finito discreto.

A Figura 7.7 apresenta a parte real dos q -coeficientes obtidos para o sinal finito $\tilde{x}[n]$ para alguns valores de q . A parte imaginária é totalmente zero. Observa-se

Figura 7.7: $\tilde{X}_q[k]$ para sinal finito $\tilde{x}[n] = \delta[n]$, se $-10 \leq n \leq 10$ ($N = 21$). Os pontos de cores diferentes estão sobrepostos, indicando que os diferentes valores de q apresentam a mesma representação em domínio de frequência, i.e., $\tilde{X}_q[k] = 1/N$. Somente a parte real é mostrada, a parte imaginária é nula.

que o resultado em domínio de frequência para os diferentes valores de $q \neq 1$ é o mesmo do caso clássico $q = 1$. De fato, para este sinal, o somatório da Equação (6.3) para qualquer valor de k se resume ao termo de $n = 0$. Portanto, $\tilde{X}_q[k] = 1/N, \forall q$. Consequentemente, a q -DTFT de $\tilde{x}[n]$, segundo a Equação (5.19), é $\tilde{X}_q(\Omega) = 1, \forall q$.

Cosseno e Seno

A Figura 7.8 mostra as funções cosseno e seno de tempo discreto, como apresentadas em (6.4), com período $N = 21$. Para cada função, são apresentados 3 sinais de mesma frequência fundamental $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, para os valores de $m = 1, 2, 3$. Nesta figura, as linhas contínuas representam as respectivas versões em tempo contínuo dos cossenos e senos.

Figura 7.8: $x[n] = \cos[m \Omega_0 n]$ e $y[n] = \text{sen}[m \Omega_0 n]$ (período $N = 21$). Para $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ e $m = 1, 2, 3$. As linhas contínuas representam os respectivos sinais de tempo contínuo.

Agora, consideram-se os sinais finitos $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ formados pelas $N = 21$ amostras, no intervalo $-10 \leq n \leq 10$, exibidas na figura anterior. Os coeficientes da DTFS destes sinais finitos são os mesmos dos sinais $x[n] = \cos[m \Omega_0 n]$ e $y[n] = \text{sen}[m \Omega_0 n]$, que são definidos respectivamente como

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm m, \pm m \pm N, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad Y[k] = \begin{cases} \frac{-i}{2} & k = m, m \pm N, \dots \\ \frac{i}{2} & k = -m, -m \pm N, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As Figuras 7.9 e 7.10 mostram estes coeficientes do caso clássico ($q = 1$) nos gráficos localizados nas colunas centrais. Em cada figura, também são mostrados q -coeficientes para um valor de $q < 1$, na coluna à esquerda, e para outro de $q > 1$, na coluna à direita. As linhas contínuas representam a q -DTFT dos sinais finitos discretos $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ (respectivamente $\tilde{X}_q(\Omega)$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$), divididas pelo número total de amostras N .

Figura 7.9: $\tilde{X}_q[k]$ de $\tilde{x}[n] = \cos[m\Omega_0 n]$ para $m=1,2,3$ e $q=0,995; 1; 1,005$. A linha contínua representa a q -DTFT de $\tilde{x}[n]$ dividida por N , i.e., $\tilde{X}_q(\Omega)/N$. Somente a parte real é mostrada, a parte imaginária é nula.

Na figura 7.9, apenas a parte real dos q -coeficientes de $\tilde{x}[n]$ (cosseno), denotados como $\tilde{X}_q[k]$, para $m = 1, 2, 3$ é apresentada, já que sua parte imaginária é totalmente zero. Observa-se que $\tilde{X}_q[k]$ e $\tilde{X}_q(\Omega)$ são funções pares. Já na Figura 7.10, que mostra os q -coeficientes de $\tilde{y}[n]$ (seno), apenas sua parte imaginária¹

¹Na Figura 7.10, os resultados aparentam estar invertidos em relação a origem $k = 0$. Contudo, isso é consequência da definição da q -FT que considera *positivo* o expoente da q -exponencial

Figura 7.10: $\tilde{Y}_q[k]$ de $\tilde{y}[n] = \text{sen}[m\Omega_0 n]$ para $m=1,2,3$ e $q=0,995; 1; 1,005$. A linha contínua representa a q -DTFT de $\tilde{x}[n]$ dividida por N , i.e., $\tilde{Y}_q(\Omega)/N$. Somente a parte imaginária é mostrada, a parte real é nula.

é apresentada, uma vez que a parte real é totalmente zero. Observa-se que $\tilde{Y}_q[k]$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$ são funções ímpares. Em todos esses gráficos, é possível observar a relação descrita em (6.1), entre os q -coeficientes e a q -DTFT. Ou seja, nestes exemplos verifica-se que os q -coeficientes consistem de amostras ponderadas da q -DTFT, com período de amostragem $\frac{2\pi}{N}$.

Comparado a DTFT ($q = 1$), o padrão de modificação da curva da q -DTFT é distinto entre valores de $q < 1$ e $q > 1$. Este padrão assemelha-se ao das curvas das funções q -cosseno e q -seno.

Basicamente, verifica-se que para os valores de $q \neq 1$ usados nestes exemplos, que são bem próximos a 1, as curvas da q -DTFT não sofrem grande alteração perto da origem, i.e., $k = 0$. Porém, afastando-se da origem, a amplitude das oscilações complexa. Na transformada clássica, o expoente é *negativo*.

das curvas tende a aumentar quando $q < 1$ ou diminuir quando $q > 1$. Nota-se também que estes comportamentos são independentes do valor de m . Assim, como os q -coeficientes são amostras da q -DTFT, eles acompanham os padrões dessas curvas.

Agora, considerando outros valores de $q \neq 1$, mais afastados de 1, as alterações tornam-se mais abruptas mesmo em regiões mais próximas a origem. É o que pode ser observado nas Figuras 7.11 e 7.12. Nestas figuras, a transformação foi feita sobre $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ com $m = 1$, sendo que as linhas contínuas indicam a q -DTFT e os pontos são os q -coeficientes multiplicados por N .

Na Figura 7.11 é apresentado o comportamento dos q -coeficientes e da q -DTFT para valores de $q \leq 1$. Nota-se que em um primeiro momento, abaixando

(a) $\tilde{X}_q(\Omega)$ de $\tilde{x}[n] = \cos[\Omega_0 n]$

(b) $\tilde{Y}_q(\Omega)$ de $\tilde{y}[n] = \sin[\Omega_0 n]$

Figura 7.11: Exemplos de $\tilde{X}_q(\Omega)$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$ para diferentes $q \leq 1$, representados pelas linhas. Em (a) os pontos são $N \tilde{X}_q[k]$, e em (b) são $N \tilde{Y}_q[k]$.

o valor de q em poucos centésimos a partir de 1, a amplitude das oscilações vai aumentando a medida que a curva se afasta da origem, como já observado anteriormente. Abaixando q em alguns décimos, a amplitude passa a possuir valores bem altos mesmo em regiões mais próximas a origem e as oscilação parecem não existir mais. Diminuindo o valor de q em mais alguns décimos, é perceptível que a amplitude agora diminui. Além disso as curvas não apresentam mais oscilações, tomando uma aparência mais retilínea.

(a) $\tilde{X}_q(\Omega)$ de $\tilde{x}[n] = \text{sen}[\Omega_0 n]$

(b) $\tilde{Y}_q(\Omega)$ de $\tilde{y}[n] = \text{sen}[\Omega_0 n]$

Figura 7.12: Exemplos de $\tilde{X}_q(\Omega)$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$ para diferentes $q \geq 1$, representados pelas linhas. Em (a) os pontos são $N \tilde{X}_q[k]$, e em (b) são $N \tilde{Y}_q[k]$.

A Figura 7.12, por sua vez, exhibe o comportamento dos q -coeficientes e da q -DTFT para valores de $q \geq 1$. Assim como para $q < 1$, é possível notar que a medida que o valor de q se eleva a partir de 1, há uma variação no padrão de

modificação das curvas. Subindo em poucos centésimos o valor de q , a amplitude das oscilações é atenuada, aumentando a intensidade de atenuação a medida que a curva se afasta da origem. Aumentando agora o valor de q em alguns décimos, percebe-se que próximo a origem a amplitude ainda continua sendo atenuada, porém, ela passa a aumentar nas demais regiões, como se estivesse buscando a formação de um patamar. Quando q é aumentado em mais alguns décimos, o processo anterior parece continuar, tornando as curvas cada vez mais suaves, e sem a presença de oscilações.

Entretanto, apesar de todas essas flutuações das curvas causadas pela variação de q , é interessante o fato que o valor da q -DTFT (q -coeficientes) em $\Omega = 0$ ($k = 0$) mostra-se sempre o mesmo.

Figura 7.13: Magnitude de $\tilde{X}_q(\Omega)$ e $\tilde{Y}_q(\Omega)$ para $q \leq 1$ e $q \geq 1$. As linhas representam a magnitude das q -DTFT e os pontos a magnitude dos q -coeficientes multiplicada por N .

Através da Figura 7.13, pode-se observar melhor a evolução das modificações na magnitude da q -DTFT e dos q -coeficientes a medida que os valores de q se afastam de 1. Como estas magnitudes são pares, os gráficos apresentam apenas um intervalo

de valores positivos de Ω . Inicialmente, em todos os gráficos desta figura, na origem a magnitude apresenta sempre o mesmo valor independentemente do valor de q .

As Figuras 7.13(a) e 7.13(c) ilustram a evolução para $q \leq 1$. A partir de $q = 1$, diminuindo o valor de q , a magnitude vai aumentando no sentido da origem para a extremidade. Quanto mais q se afasta de 1, mais próximo a origem se inicia esse aumento. Entretanto, em algum momento, esse padrão de crescimento da magnitude desaparece e então ela passa a se comportar de forma diferente, sendo que seus valores diminuem. Neste novo comportamento, quando q fica muito baixo, a curva parece convergir para um valor constante para todo o domínio de frequência. Este valor constante parece ser muito próximo ao valor na origem.

Já nas Figuras 7.13(b) e 7.13(d), essa análise é feita para $q \geq 1$. Nestes casos, em um primeiro momento, observa-se um comportamento contrário aos casos $q < 1$, ou seja, a magnitude vai diminuindo no sentido da origem para a extremidade. Entretanto, em algum instante, os valores mais próximos a origem continuam a diminuir mas os mais distantes passam a aumentar, como se buscassem se nivelar. Quando q é muito alto, os valores da magnitude diminuem mais, parecendo convergir para um valor constante para todo o domínio de frequência. Aqui, este valor constante também parece ser muito próximo ao valor na origem.

Função retangular

A Figura 7.14 mostra a função retangular conforme a Equação (6.6) com parâmetro $M = 5$. Novamente, a linha contínua representa a versão em tempo contínuo da função.

Figura 7.14: Função retangular $w[n] = 1$, $|n| \leq M$; ou 0, caso contrário (para $M = 5$). A linha contínua representa a respectiva função em tempo contínuo.

Considerando que os pontos amostrados na Figura 7.14 constituam um sinal de duração finita $\tilde{w}[n]$ com o número de amostras $N = 21$, no intervalo $-10 \leq n \leq 10$, os coeficientes da DTFS deste sinal finito são definidos como

$$\tilde{W}[k] = \frac{\text{sen} \left(\frac{k\pi}{N} (2M + 1) \right)}{N \text{sen} \left(\frac{k\pi}{N} \right)}$$

A Figura 7.15(b) apresenta a parte real de $\tilde{W}[k]$, que corresponde aos q -coeficientes para $q = 1$. A parte imaginária é totalmente zero. A Figura 7.15 também apresenta gráficos dos q -coeficientes $\tilde{W}_q[k]$ para um valor de $q < 1$ (Figura 7.15(a)) e para um valor de $q > 1$ (figura 7.15(c)). Mais uma vez, as linhas contínuas representam a q -DTFT de $\tilde{w}[n]$ divididas por N .

Figura 7.15: $\tilde{W}_q[k]$ de $\tilde{w}[n]$ para $q = 0,99$; 1 ; $1,01$. A linha contínua representa a q -DTFT de $\tilde{w}[n]$ dividida por N , i.e., $\tilde{W}_q(\Omega)/N$. Somente a parte real é mostrada, a parte imaginária é nula.

Nota-se um comportamento similar entre a q -DTFT e os q -coeficientes nesta figura e o exemplo com cosseno e seno nas Figuras 7.9 e 7.10. Isto é, comparando-se ao caso $q = 1$, a partir de $k = 0$ se $q < 1$ a amplitude vai aumentando e se $q > 1$ ela vai diminuindo, ambas de forma gradativa.

Além disso, através da Figura 7.16 observa-se que a evolução do padrão de modificação das curvas no decorrer dos valores de q também se assemelha à do cosseno e do seno. Para a origem, o valor das curvas se mantém o mesmo para todos os valores de q . Quando $q < 1$, para os valores de q mais próximos a 1, a amplitude da curva vai aumentando ao longo das frequências a partir da origem. Em algum valor de q porém, ela passa a diminuir e a curva já não apresenta oscilações. Já quando $q > 1$, inicialmente a amplitude da curva vai sendo atenuada a partir de

(a) $q \leq 1$ (b) $q \geq 1$

Figura 7.16: Exemplos de $\tilde{W}_q(\Omega)$ para diferentes $q \leq 1$ e $q \geq 1$, representados pelas linhas. Os pontos representam $N\tilde{W}_q[k]$.

regiões não tão próximas a origem. Porém, para valores maiores de q a amplitude troca de comportamento e passa a aumentar nestas regiões.

A Figura 7.17 permite uma melhor observação a cerca da evolução das modificações na magnitude de $\tilde{W}_q(\Omega)$ e $\tilde{W}_q[k]$. Estas magnitudes são pares e a figura exibe apenas um intervalo de valores positivos de Ω . Novamente, o valor da magnitude apresenta sempre o mesmo valor na origem independentemente do valor de q . Mais que isso, verifica-se que as curvas evoluem ao longo dos valores de q da mesma forma como nos exemplos com cosseno e seno. Quando q se afasta de 1, em um primeiro momento a magnitude sofre ou intensificação ($q < 1$) ou atenuação ($q > 1$). A partir de um segundo momento o processo se inverte, isto é, há diminuição para $q < 1$ e aumento para $q > 1$. Isso acontece de modo que, para

valores de q bem afastados de 1, ela tende a convergir para um valor constante que parece ser próximo ao seu valor na origem.

Figura 7.17: Magnitude de $\tilde{W}_q(\Omega)$ para $q \leq 1$ e $q \geq 1$. A linhas representam a magnitude de $\tilde{W}_q(\Omega)$ e os pontos a magnitude de $\tilde{W}_q[k]$ multiplicada por N .

Comentários gerais

Diante dos resultados obtidos sobre os sinais simulados, é possível verificar que independentemente da função a ser transformada, com exceção a função impulso, a q -DTFT, e consequentemente os q -coeficientes, mantém o padrão de variação ao longo dos valores de q .

Percebe-se uma evolução contínua da q -DTFT a partir de $q = 1$. Para q bem próximo a 1 é possível ainda reconhecer, com poucas alterações, a forma da DTFT clássica nas frequências mais centrais. Contudo, nas mais extremas, ela vai sendo gradualmente alterada a medida que se corre o valor de q . Sua magnitude vai se atenuando para $q > 1$, ou se intensificando para $q < 1$, de tal forma que aos poucos sua forma se torna irreconhecível comparada a q -DTFT clássica. Além disso, quanto mais afastados de $q = 1$ (tanto para cima quanto para baixo), mais a q -DTFT se aproxima de um valor constante que tende ao valor da frequência zero, i.e., da origem. Valor este que permanece invariável às mudanças do parâmetro q .

O valor da q -DTFT ou dos q -coeficientes é sempre o mesmo na origem porque neste ponto, o valor independe de q . No caso da q -DTFT, ele é nada mais que a soma das amostras dos sinais. E no caso dos q -coeficientes, é o valor médio das amostras. Esse resultado está relacionado com a propriedade em (5.17), a respeito

do valor de q -FT em $\omega = 0$.

Ao analisar as Figuras 7.11, 7.12, e 7.16 é possível verificar a propriedade de periodicidade da DTFT e dos coeficientes da DTFS para $q = 1$. De acordo com esta propriedade das representações de Fourier, a representação em domínio de frequência de um sinal de tempo discreto deve ser periódico. No caso da DTFT, este período é de 2π , e no caso da DTFS, este período é igual a N . Nota-se que nestas figuras são exibidos dois períodos para as DTFT e os coeficientes, e que realmente a DTFT tem um período igual a 2π e os coeficientes são periódicos em N amostras. Entretanto, é também notável que para $q \neq 1$ esta propriedade deixa de ser satisfeita. A Figura 7.18 ajuda a reforçar a ilustração da não periodicidade da q -DTFT e dos q -coeficientes.

Também podem ser feitas algumas considerações em relação a propriedade de simetria. Segundo esta propriedade, a representação em domínio de frequência de um sinal real e par também é real e par. Já um sinal real e ímpar tem uma representação em domínio de frequência que é imaginária e ímpar. Consequentemente, em ambos os casos, a magnitude é par. Assim, é possível verificar que esta propriedade é mantida para a q -DTFT e os q -coeficientes da DTFS nestes exemplos apresentados, com cosseno, seno e a função retangular.

Todas estas observações podem ser explicadas pelas propriedades das funções q -cosseno e q -seno que compõem a q -exponencial de número imaginário presente na expressão da q -FT. De fato, o cálculo da q -DTFT e dos q -coeficientes da DTFS consiste basicamente no somatório destas funções q -circulares. Estas funções são definidas pelos termos ρ_q e φ_q , que determinam os seus comportamentos diante do parâmetro q , como já elucidado na seção anterior. O q -cosseno e o q -seno compõem uma classe de funções que não são periódicas, exceto em $q = 1$. Porém, mantêm sempre as características de paridade das suas versões clássicas, ou seja, q -cosseno é par e q -seno é ímpar. Para $q < 1$, essas funções se caracterizam pela acentuação dos seus valores, enquanto para $q > 1$, seus valores são atenuados. E nos limites $q \rightarrow -\infty$ e $q \rightarrow \infty$, elas convergem para o valor na origem ($\cos_q(0) = 1$ e $\sin_q(0) = 0$), que é invariável ao parâmetro q .

(a) $q = 1$ (b) $q \leq 1$ ($q = 0,995$) (c) $q \geq 1$ ($q = 1,005$)

Figura 7.18: $\tilde{X}_q[k]$ de $\tilde{x}[n] = \cos[2\pi n/N]$ com $N = 21$. Ilustração da não periodicidade de $\tilde{X}_q[k]$ para $q \neq 1$. Para $q = 1$ (a), $\tilde{X}_q[k]$ tem período $N = 21$. Para $q \neq 1$ (b), $\tilde{X}_q[k]$ não é mais periódico. A linha contínua representa $\tilde{X}_q(\Omega)/N$.

7.3 Sinais Reais

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados obtidos com o cálculo do espectro de potência generalizado (ou q -espectro de potência), utilizando o valor de magnitude da Expressão (6.3), para os dois conjuntos de sinais de VFC apresentados na Seção 6.4.

Para o conjunto de dados do Physionet faz-se uma avaliação sobre as características dos espectros de potência generalizados das séries RR de indivíduos com fibrilação atrial, insuficiência cardíaca e saudáveis.

Já com a base de dados do LFE é possível analisar os q -espectros das séries RR de indivíduos chagásicos, hipertensos e saudáveis em termos das bandas LF e HF e da razão LF/HF, em duas situações com influências distintas do SNA.

Dados PhysioBank - Physionet

A Figura 7.19 apresenta um exemplo de série de intervalos RR de cada um dos grupos que compõem este conjunto de dados. Estes exemplos são usados para ilustrar os resultados de cada grupo. Como já descrito na Subseção 6.4.2, nestes experimentos foram usadas séries formadas por 2048 amostras cada. Não só nesta mas também nas figuras seguintes, as linhas retas conectam as amostras.

Figura 7.19: Exemplos de séries de intervalos RR do conjunto de fibrilados, insuficientes e saudáveis. Cada grupo apresenta um padrão diferente de série.

Observa-se que cada grupo exibe um padrão diferente para suas séries RR, que de alguma forma reflete a sua condição clínica. Consequentemente, os espectros de potência dos sinais de cada um destes grupos também irão refletir estas diferenças.

A Figura 7.20(a) ilustra o espectro de potência da série mostrada em 7.19(a) de um indivíduo com fibrilação atrial. Do mesmo modo, as Figuras 7.21(a) e 7.22(a)

ilustram, respectivamente, os espectros de potência das séries mostradas em 7.19(b) de um indivíduo com insuficiência cardíaca e em 7.19(c) de outro saudável.

Todos os espectros apresentam valores altos de potência para a frequência zero, que extrapolam os limites mostrados nos gráficos. Isso ocorre já que esta componente de frequência está relacionada ao valor médio das séries, que nestes casos se apresenta muito superior às variações das demais componentes. Entretanto, o restante do espectro se comporta diferentemente para cada exemplo.

Observa-se que para a fibrilação atrial, a potência ao longo das frequências se distribui de modo bem variado, sem que nenhuma banda se destaque. Dos três casos, é o que apresenta os maiores valores. Por outro lado, a insuficiência cardíaca é o caso que tem o espectro com os menores valores de potência. Além disso, observa-se que a potência é maior nas bandas de frequências muito baixas, por volta até de 0,05 Hz, e também no intervalo entre 0,35 e 0,40 Hz. Por fim, o caso saudável apresenta um espectro em que a potência é maior para as componentes de mais baixa frequência, sendo que ela diminui gradualmente à medida que a frequência aumenta.

Não está entre as pretensões deste projeto estudar as causas, associadas as condições clínicas, que levam o espectro de potência a tomar determinada forma. O interesse principal é verificar se os espectros generalizados, para diferentes valores de q , apresentam alguma característica que possa ser considerada como indício de uma fonte de informação que não é apreciada através do espectro clássico. Deste modo, as Figuras 7.20(b), 7.21(b) e 7.22(b) apresentam os q -espectros de potência, para alguns valores de $q > 1$ de cada um dos grupos testados. Os gráficos mantêm

Figura 7.20: q -Espectros de potência P_q de uma série RR de fibrilação atrial.

Figura 7.21: q -Espectros de potência P_q de uma série RR de insuficiência cardíaca.

Figura 7.22: q -Espectros de potência P_q de uma série RR de indivíduo saudável.

as mesmas escalas para o eixo das ordenadas, em relação aos respectivos espectros clássicos, para uma melhor comparação.

O primeiro comentário a ser feito se refere ao valor da potência encontrado para a frequência zero. Apesar de não estar indicada nos gráficos, em cada grupo seu valor é constante para os diferentes valores de q . Essa é uma característica que compartilha a mesma causa do resultado constatado com sinais simulados na subseção anterior.

Ao analisar as formas tomadas pelos q -espectros de potência, verifica-se que a tendência que elas seguem ao longo dos valores de $q > 1$ é semelhante à encontrada nos testes com sinais simulados. Tanto para o caso de fibrilado, insuficiente e saudável, os valores de potência são em sua maior parte atenuados quando q é mais próximo de 1, como nos casos $q = 1,01$ e $q = 1,1$ mostrados nas figuras. A atenuação é maior nas frequências maiores, e há inclusive o aumento da potência

para algumas frequências mais baixas, de modo que a forma dos q -espectros se torna suave e apresenta um comportamento mais contínuo. Já quando q passa a valores maiores, percebe-se que a potência volta a aumentar para as frequências mais altas. As frequências baixas também apresentam o aumento do valor das suas potências. Agora quanto maior q , maior o valor das potências ao longo do q -espectro.

O fato principal é que o padrão de evolução no decorrer de q é semelhante para os três grupos, ao ponto que seus q -espectros já se tornam praticamente iguais para q alguns décimos acima de 1. Os espectros generalizados dos grupos têm mais diferenças entre si apenas quando q tem valores muito próximos a 1, como no caso $q = 1,01$ mostrado nas figuras, onde é possível notar apenas sutis diferenças entre os espectros. Diferenças mais perceptíveis são notadas na Figura 7.23, que mostra os q -espectros para $q = 1,00001$, que é extremamente próximo a 1. Porém, tais diferenças não parecem revelar nenhuma nova característica ou propriedade que possa ser considerada relevante no estudo das condições clínicas testadas. De fato, o mais notório nestas figuras é o padrão de atenuação dos valores nas frequências mais altas, sendo que as mais baixas não sofrem tanta alteração.

Figura 7.23: q -Espectros de potência, para um $q > 1$ bem próximo a 1 ($q = 1,00001$), das séries RR da Figura 7.19.

A interpretação destas observações pode ser feita sobre as mesmas bases consideradas na interpretação dos resultados com sinais simulados. Isto é, a forma tomada por estes espectros de potência generalizados é reflexo das características das funções q -circulares. Seguindo a tendência, para q muito grande o espectro convergirá para o valor da potência na componente de frequência zero.

Para $q < 1$, bem próximo a 1, é lembrado que as funções q -circulares apresentam valores cada vez mais altos a medida que seu argumento afasta-se de zero. Por este motivo, o cálculo do q -espectro atinge números muito grandes

tornando sua computação inviável nestes valores de q . Acompanhando os resultados com sinais simulados, valores de q mais distantes a 1 fazem a forma do q -espectro convergir para um valor constante. Nos casos $q < 1$, portanto, nenhuma observação de interesse pode ser tomada.

Dados do LFE-FMRP

Os q -espectros de potência para as séries de intervalos RR destes dados apresentam as mesmas características observadas nos do conjunto de dados anterior. A partir de valores de q alguns décimos acima de 1, os q -espectros dos diferentes grupos se tornam muito parecidos. Diferenças são visíveis quando os valores estão mais próximos de 1, porém basicamente refletem o espectro de potência clássico, caso $q = 1$, com uma forte atenuação nas frequências mais altas.

Entretanto, com este conjunto de dados pode-se fazer uma avaliação em termos das medidas de potência da banda LF e da banda HF, e da razão LF/HF, descritas na Subseção 6.4.1, já que estão disponíveis séries de dois estados em que se sabe que estas medidas se alteram.

A potência de cada banda é calculada como a soma dos valores dos q -espectros nos respectivos intervalos de frequência, i.e., entre 0,04 Hz e 0,15 Hz para a banda LF e 0,15 Hz e 0,40 Hz para banda HF. A razão LF/HF é o quociente entre estas duas medidas.

A Figura 7.24 apresenta a evolução, ao longo de valores de $q > 1$, das médias da potência da banda LF para os três grupos que formam este conjunto: chagásicos, hipertensos e saudáveis. As médias foram tomadas sobre as potências calculadas de todas as séries em cada um dos grupos. A Figura 7.24(a) contém o resultado para o estado de repouso, enquanto a Figura 7.24(b) mostra o resultado para o *tilt*.

Observa-se que tanto no repouso quanto no *tilt*, a curva das médias da banda LF apresenta o mesmo comportamento. Os valores aumentam a medida que q também aumenta, sendo que a taxa de crescimento também aumenta ao longo de q . Outro ponto a se destacar é que para as três classes os valores são praticamente iguais, não proporcionando assim uma forma de discriminação entre elas.

Já a análise sobre a banda HF é feita através da Figura 7.25. Como na figura anterior, estão apresentadas as médias das potências em diferentes q para as séries

Figura 7.24: Média da potência da banda LF ao longo de q para chagásicos, hipertensos e saudáveis.

Figura 7.25: Média da potência da banda HF ao longo de q para chagásicos, hipertensos e saudáveis.

Figura 7.26: Média da razão LF/HF ao longo de q para chagásicos, hipertensos e saudáveis.

RR no estado de repouso e de *tilt*. Novamente, observa-se que os valores crescem a medida que q aumenta, tanto no repouso quanto no *tilt*. O crescimento se dá de forma semelhante ao da banda LF, e os valores também são praticamente idênticos entre os três grupos. Entretanto, em cada q , os valores para a banda HF são menores que os para a banda LF.

As formas que os q -espectros de potência tomam ao longo de q explicam o crescimento observado nestas figuras. Como visto nos resultados para os dados do Physionet, os q -espectros apresentam valores de potência cada vez maiores a medida que q aumenta. Além disso, o intervalo de frequências da banda LF (entre 0,04 Hz e 0,15 Hz) possui valores sempre maiores que o da banda HF (entre 0,15 Hz e 0,40 Hz) em todos os q avaliados.

Por último, a Figura 7.26 mostra o valor das médias da razão LF/HF ao longo de q . Observa-se que os valores da razão são sempre maiores que 1, confirmando que o valor da banda LF está sempre maior que o da HF, como comentado nas figuras anteriores. De modo geral, a evolução através dos valores de q é muito semelhante entre o estado em repouso e o *tilt*. A diferença marcante está no valor em $q = 1$, que corresponde a média calculada através do espectro clássico. Neste caso, os valores para os três grupos são bem maiores no *tilt* do que no repouso. Entretanto, este é um resultado já esperado, como descrito na Subseção 6.4.1.

Para os demais valores de q , em ambas as condições repouso e *tilt*, são notados dois comportamentos distintos em todas as curvas. Até $q \approx 1,5$ elas apresentam um comportamento crescente, estabelecem um valor máximo e a partir de então começam a decrescer. Isto é uma indicação de que o valor na banda LF aumenta mais que o valor na banda HF até um certo q . Então, a partir deste q , isso se inverte e o valor da banda HF passa a aumentar mais que da banda LF. Este fato também está relacionado com o comportamento dos q -espectros de potência, que estabelece valores altos de potência para as baixas frequências desde valores muito próximos a $q = 1$, enquanto os valores nas frequências mais altas começam a aumentar a partir de valores um pouco maiores de q .

A Figura 7.27 apresenta estas mesmas curvas para as médias da razão LF/HF em função de q , porém separadas por grupos, afim de uma melhor comparação entre o estado de repouso e o *tilt*. É evidente a grande diferença entre as médias de repouso

Figura 7.27: Comparação entre as médias da razão LF/HF nos estados de repouso e tilt ao longo de q .

e tilt quando $q = 1$ em todos os grupos. Para os outros valores de q , a média no tilt permanece levemente superior a de repouso até o instante em que a curva começa a decrescer. A partir de então as duas médias seguem praticamente idênticas nos três grupos.

A leve superioridade da razão LF/HF presente no estado de tilt pode estar relacionada ao fato de que os q -espectros de potência para q próximos a 1 ainda mantêm pequenos vestígios do espectro do caso $q = 1$ devido a proximidade dos valores de q .

Diante destas verificações não é possível afirmar que os q -espectros de potência consigam revelar alguma nova informação a respeito das bandas LF e HF para as situações de repouso e tilt destes três grupos de indivíduos.

CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foram apresentados e discutidos os resultados de uma investigação acerca do uso da q -FT como ferramenta de análise não linear de sinais biomédicos. Foram definidas três etapas principais para a realização desta investigação. A primeira envolveu o estudo de perfil teórico e analítico da q -FT, atingindo a implementação em computador da q -FT. A segunda consistiu de experimentações computacionais com alguns sinais simulados discretos. Por fim, a terceira avaliou os experimentos computacionais sobre séries de intervalos RR de indivíduos em diferentes condições clínicas e fisiológicas.

A etapa de estudo analítico colaborou para o esclarecimento de algumas características e propriedades da q -generalização da FT. A q -FT não linear investigada neste projeto está estritamente associada a generalização do TLC. A expressão da q -FT, composta por q -produto e q -exponencial, e a restrição $1 \leq q < 3$ na sua definição são adequadas à aplicação em funções q -gaussianas, como comentado na discussão dos resultados. O uso de um intervalo restrito para valores de q pode não ser necessário dependendo da função que sofrerá a transformação.

Conforme a sua definição, a q -FT aplica-se sobre funções não negativas absolutamente integráveis. Desta forma, funções de distribuição de probabilidade podem ter sua q -FT calculada. Essa é mais uma característica que favorece o processo de generalização do TLC. Porém a integral da q -FT não converge para funções que não respeitam esta condição de integração. Assim, para algumas funções contínuas comumente empregadas na teoria clássica de Fourier não é possível determinar sua q -FT e compará-la com sua FT.

Entretanto, há a definição da q -FT para funções discretas, que aqui é

chamada de q -DTFT. Esta definição, com a condição que o somatório considere apenas o suporte das funções, possibilita o cálculo para funções e sinais discretos com duração finita. Neste ponto, a condição de integração não precisa ser considerada e a q -DTFT pode ser aplicada sobre versões discretas de várias funções.

A adaptação elaborada neste trabalho para esta q -DTFT, visando a discretização do domínio de frequências e também a aplicação em funções com valores negativos, define uma expressão que pode ser considerada uma q -generalização dos coeficientes da DTFS. Uma relação observada entre DTFT e coeficientes DTFS na teoria clássica é também observada entre suas q -generalizações, de modo que os q -coeficientes podem ser considerados consistentes. Estes q -coeficientes são na verdade amostras ponderadas igualmente espaçadas da q -DTFT.

Assim como a FT clássica está associada a superposição ponderada de cossenos e senos de diferentes frequências, a q -FT está relacionada a uma soma ponderada de diferentes q -cossenos e q -senos. Entretanto, estas funções q -circulares não são periódicas, e portanto, a noção de frequência fica alterada nesta circunstância. Pode-se pensar a FT como uma representação da contribuição de componentes, que oscilam em diferentes frequências, na formação de uma função ou sinal. Porém, esta ideia não pode ser transportada para o caso generalizado. É preciso estabelecer uma outra interpretação para a representação obtida pela q -FT.

As funções q -cosseno e q -seno apresentam também outras características que são refletidas na q -FT, como a maneira como se comportam para $q < 1$ ou $q > 1$. Estes comportamentos são definidos pelas funções ρ_q e φ_q que determinam respectivamente como a amplitude e a velocidade angular das funções q -circulares variam com o tempo.

Através dos resultados dos experimentos com sinais simulados observa-se que o comportamento da q -DTFT, e por consequência dos q -coeficientes, destes sinais é bastante sensível a pequenas variações no valor do parâmetro q , exceto para a função delta de Kronecker que apresenta um caso particular. Essa alta sensibilidade está relacionada com a sensibilidade também apresentada por q -cosseno e q -seno para os diferentes valores de q .

De fato, os comportamentos de q -cosseno e q -seno em relação ao valor de q

são semelhantes aos da função q -DTFT do cosseno, do seno e da função retangular. Considerando valores de q muito próximos a 1, as curvas das funções sofrem atenuação se $q > 1$ ou intensificação se $q < 1$ quando comparadas às do caso $q = 1$. Já variações maiores que alguns décimos em $q = 1$ mostram um processo de convergência das curvas para o valor das funções na origem, que é invariável ao valor de q . Outra característica é que a medida que q se afasta de 1, ondulações existentes no caso $q = 1$ vão desaparecendo. As ondulações estão presentes apenas para valores de q muito próximos a 1. Além disso, a não periodicidade presente nestas funções q -circulares também aparece na q -DTFT para $q \neq 1$.

Os q -espectros de potência encontrados nos experimentos com sinais reais para $q > 1$ também refletem as mesmas propriedades das funções q -cosseno e q -seno comentadas nos experimentos com sinais simulados. Deste modo, a forma dos q -espectros de potência das séries RR dos diferentes grupos é altamente sensível ao valor do parâmetro q . Além disso, eles se tornam praticamente iguais para valores de q alguns décimos acima de 1. Ondulações presentes em suas formas desaparecem, e os q -espectros tendem a convergir para o valor de potência na frequência zero. Quando q toma valores mais próximos a 1, os q -espectros dos grupos analisados apresentam diferenças entre si. Entretanto, estas diferenças consistem basicamente das mesmas encontradas para $q = 1$, porém, com atenuação no valor das potências das frequências mais altas.

Nos experimentos com séries RR em repouso e *tilt*, onde foram analisados os comportamentos das potências das bandas LF e HF e também da razão LF/HF para diferentes valores de q , foi observado que praticamente não há diferenças entre os grupos de indivíduos testados. Cada uma das três medidas avaliadas têm o mesmo padrão de variação tanto no estado de repouso quanto no *tilt*. Para as bandas LF e HF, seus valores aumentam, a uma taxa crescente, a medida que q também aumenta. Para a razão LF/HF, os valores se apresentam superiores a 1, indicando que a medida LF é maior que a medida HF em todos os q analisados. Os valores crescem até um máximo quando $q \approx 1,5$ e então começam a decrescer rapidamente. Para este máximo, entretanto, é possível afirmar apenas que a medida HF passou a aumentar mais que a medida LF a partir deste determinado valor de q , como consequência da mudança de comportamento dos q -espectros ao longo do

parâmetro q . Na avaliação entre estado de repouso e *tilt* de cada grupo, a diferença mais significativa é apresentada para $q = 1$, quando as razões LF/HF se mostram maiores no *tilt*.

Os resultados com sinais reais não indicam que os q -espectros de potência, do modo como foram calculados neste trabalho, revelam ou apresentam alguma evidência da característica não linear procurada nas séries RR. A variação do parâmetro q não apresenta alterações nos q -espectros de potência que possam ser associadas a características do sistema de regulação da VFC nem da condição clínica dos indivíduos testados. Além disso, o espectro para o caso clássico $q = 1$ é o que apresenta elementos mais adequados para a realização de classificações e discriminações entre os grupos testados. Desta forma, pode-se concluir que a abordagem empregada neste trabalho, usada na investigação da q -FT, não produz um método de análise espectral capaz de contribuir com o campo de processamento de séries RR para análise da VFC. Porém, os resultados não podem ser considerados concludentes para o processamento de outros sinais biomédicos nem para outros métodos de análise espectral, sendo que o presente estudo pode ser estendido no desenvolvimento de novos métodos baseados no paradigma não extensivo de Tsallis.

Por fim, embora existam estudos em andamento, uma representação genérica para a q -FT inversa ainda não foi encontrada. Esta é uma questão que limita bastante a difusão da sua utilização, pois não é assegurado que a relação entre as representações em domínio de tempo e domínio de frequência seja única. O avanço na resolução deste problema contribuirá significativamente para uma melhor compreensão desta transformada não linear. Por consequência, isso permitirá que aplicações mais consistentes da q -FT sejam realizadas.

REFERÊNCIAS¹

- [1] HAYKIN, S.; VEEN, B. V. *Sinais e Sistemas*. [S.l.]: Bookman, 2001. ISBN 8573077417.
- [2] OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. *Sinais e Sistemas*. Second. [S.l.]: Pearson, 2010. ISBN 857605504X.
- [3] SMITH, S. W. *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. 1st. ed. [S.l.]: California Technical Pub., 1997. Hardcover. ISBN 0966017633.
- [4] HAYES, M. H. *Statistical digital signal processing and modeling*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1996. ISBN 9780471594314.
- [5] BARANGER, M. *Chaos, complexity, and entropy: a physics talk for non physicists*. 2001. Disponível em: <<http://necsi.edu/projects/baranger/cce.pdf>>.
- [6] RANGAYYAN, R. M. *Biomedical signal analysis: A case-study approach*. [S.l.]: IEEE Press ; Wiley-Interscience, 2002. Hardcover. ISBN 0471208116.
- [7] SÖRNMO, L.; LAGUNA, P. *Bioelectrical signal processing in cardiac and neurological applications*. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2005. ISBN 9780124375529.
- [8] BRUCE, E. N. *Biomedical signal processing and signal modeling*. [S.l.]: Wiley, 2001. Hardcover. ISBN 0471345407.
- [9] AKAY, M.; MEDICINE, I. E. in; SOCIETY, B. *Nonlinear biomedical signal processing: Dynamic analysis and modeling*. [S.l.]: IEEE Press, 2000. Hardcover. ISBN 0780360125.

¹De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

-
- [10] SUBHA, D. P. et al. EEG Signal Analysis: A Survey. *Journal of Medical Systems*, Springer Netherlands, v. 34, n. 2, p. 195–212, abr. 2010. ISSN 0148-5598.
- [11] CHUA, K. C. et al. Analysis of epileptic EEG signals using higher order spectra. *J Med Eng Technol*, Informa Allied Health, v. 33, n. 1, p. 42–50, jan. 2009.
- [12] CHUA, K. et al. Application of Higher Order Spectra to Identify Epileptic EEG. *Journal of Medical Systems*, fev. 2010. ISSN 0148-5598.
- [13] JELLES, B. et al. Decrease of non-linear structure in the EEG of Alzheimer patients compared to healthy controls. *Clinical Neurophysiology*, v. 110, n. 7, p. 1159–1167, jul. 1999. ISSN 13882457.
- [14] ACHARYA et al. Non-linear analysis of EEG signals at various sleep stages. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, v. 80, n. 1, p. 37–45, out. 2005. ISSN 01692607.
- [15] PREISSEL, H. et al. Fractal dimensions of short EEG time series in humans. *Neuroscience Letters*, v. 225, n. 2, p. 77–80, abr. 1997. ISSN 03043940.
- [16] DANGEL, S. et al. Time series analysis of sleep EEG. *Computer assisted Physics*, p. 93–95, 1999.
- [17] INOUE, T. et al. Quantification of EEG irregularity by use of the entropy of the power spectrum. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, v. 79, n. 3, p. 204–210, set. 1991. ISSN 00134694.
- [18] JIAYI, G. et al. Sample Entropy Analysis of Sleep EEG under Different Stages. In: *2007 IEEE/ICME International Conference on Complex Medical Engineering*. [S.l.]: IEEE, 2007. p. 1499–1502. ISBN 978-1-4244-1077-4.
- [19] BAI, D.; QIU, T.; LI, X. The sample entropy and its application in EEG based epilepsy detection. *Journal of biomedical engineering*, v. 24, n. 1, p. 200–205, fev. 2007. ISSN 1001-5515.
- [20] ACHARYA, U. R. et al. Heart rate variability: a review. *Medical and Biological Engineering and Computing*, Springer Berlin / Heidelberg, Department of ECE,

- Ngee Ann Polytechnic, 535 Clementi Road, Singapore, Singapore 599 489. aru@np.edu.sg, v. 44, n. 12, p. 1031–1051, dez. 2006. ISSN 0140-0118.
- [21] VOSS, A. et al. Methods derived from nonlinear dynamics for analysing heart rate variability. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 367, n. 1887, p. 277–296, jan. 2009.
- [22] BUCCELLETTI, F. et al. Linear and Nonlinear Heart Rate Variability Indexes in Clinical Practice. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, v. 2012, p. 1–5, 2012. ISSN 1748-670X.
- [23] KAPLAN, D. T.; COHEN, R. J. Searching for Chaos in Fibrillation. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 591, n. 1 Mathematical, p. 367–374, jun. 1990. ISSN 0077-8923.
- [24] ACHARYA, U. R.; KANNATHAL, N.; KRISHNAN, S. M. Comprehensive analysis of cardiac health using heart rate signals. *Physiological Measurement*, v. 25, n. 5, p. 1139–1151, ago. 2004. ISSN 0967-3334.
- [25] ACHARYA, U. R. et al. Heart rate analysis in normal subjects of various age groups. *BioMedical Engineering OnLine*, v. 3, n. 1, p. 24+, 2004. ISSN 1475-925X.
- [26] COHEN, M. E.; HUDSON, D. L.; DEEDWANIA, P. C. Applying continuous chaotic modeling to cardiac signal analysis. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, v. 15, n. 5, p. 97–102, set. 1996. ISSN 07395175.
- [27] CHUA, K. C. et al. Computer-based analysis of cardiac state using entropies, recurrence plots and Poincare geometry. *J Med Eng Technol*, Informa Allied Health, v. 32, n. 4, p. 263–272, jan. 2008.
- [28] TSALLIS, C. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. 1. ed. New York, NY: Springer, 2009. Hardcover. ISBN 978-0-387-85358-1.
- [29] GELL-MANN, M.; TSALLIS, C. *Nonextensive entropy : interdisciplinary applications*. [S.l.]: Oxford University Press, 2004. ISBN 9780195159776.

-
- [30] TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, v. 52, n. 1-2, p. 479–487, jul. 1988. ISSN 0022-4715.
- [31] GROSFILS, P.; BOON, J. P. Nonextensive statistics in viscous fingering. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 362, n. 1, p. 168–173, mar. 2006. ISSN 03784371.
- [32] HAMITY, V. H.; BARRACO, D. E. Relativistic nonextensive kinetic theory. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 282, n. 1-2, p. 203–211, jul. 2000. ISSN 03784371.
- [33] TSALLIS, C. What are the numbers that experiments provide ? *Quimica Nova*, v. 17, p. 468+, nov. 1994. ISSN 1678-7064.
- [34] TSALLIS, C.; TIRNAKLI, U. Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics - Some central concepts and recent applications. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 201, n. 1, p. 012001+, fev. 2010. ISSN 1742-6596.
- [35] TSALLIS, C. On the Extensivity of the Entropy S_q , the q -Generalized Central Limit Theorem and the q -Triplet. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v. 162, p. 1–9, 2006. ISSN 0375-9687.
- [36] TSALLIS, C. Is the Entropy S_q Extensive or Nonextensive? *Astrophysics and Space Science*, Springer Netherlands, v. 305, n. 3, p. 261–271, dez. 2006. ISSN 0004-640X.
- [37] TOUCHETTE, H. When is a quantity additive, and when is it extensive? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 305, n. 1-2, p. 84–88, mar. 2002. ISSN 03784371.
- [38] TSALLIS, C.; MENDES, R.; PLASTINO, A. R. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 261, n. 3-4, p. 534–554, dez. 1998. ISSN 03784371.

- [39] PRATO, D.; TSALLIS, C. Nonextensive foundation of Lévy distributions. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 60, n. 2, p. 2398–2401, ago. 1999.
- [40] BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 340, n. 1-3, p. 95–101, set. 2004. ISSN 03784371.
- [41] MCANALLY, D. S. q-exponential and q-gamma functions. i. q-exponential functions^{a)}. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 36, n. 1, p. 546–573, 1995.
- [42] KASSEL, C. *Quantum groups*. [S.l.]: Springer, 1995. ISBN 9780387943701.
- [43] ERNST, T. A Method for q-Calculus. *Journal of Non-linear Mathematical Physics*, v. 10, n. 4, p. 487+, 2003. ISSN 1402-9251.
- [44] NIVANEN, L.; MÉHAUTÉ, A. L.; WANG, Q. A. Generalized algebra within a nonextensive statistics. *Reports on Mathematical Physics*, v. 52, n. 3, p. 437–444, dez. 2003. ISSN 00344877.
- [45] KANIADAKIS, G. Statistical mechanics in the context of special relativity. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 66, p. 056125+, nov. 2002.
- [46] BORGES, E. P. On a q-generalization of circular and hyperbolic functions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 31, n. 23, p. 5281+, jun. 1998. ISSN 0305-4470.
- [47] BORGES, E. P. et al. Mother wavelet functions generalized through q-exponentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 37, n. 39, p. 9125+, set. 2004. ISSN 0305-4470.
- [48] UMAROV, S.; TSALLIS, C.; STEINBERG, S. On a q-Central Limit Theorem Consistent with Nonextensive Statistical Mechanics. *Milan Journal of Mathematics*, Birkhäuser Basel, v. 76, n. 1, p. 307–328, dez. 2008. ISSN 1424-9286.
- [49] UMAROV, S.; QUEIRÓS, S. M. D. Functional differential equations for the q-Fourier transform of q-Gaussians. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 43, n. 9, p. 095202+, fev. 2010. ISSN 1751-8113.

- [50] QUEIRÓS, S. M. D.; TSALLIS, C. Nonextensive statistical mechanics and central limit theorems II—Convolution of q -independent random variables. *AIP Conference Proceedings*, AIP, v. 965, n. 1, p. 21–33, 2007.
- [51] UMAROV, S.; TSALLIS, C. On a representation of the inverse F_q -transform. *Physics Letters A*, v. 372, n. 29, p. 4874–4876, jul. 2008. ISSN 03759601.
- [52] HILHORST, H. J. Note on a q -modified central limit theorem. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2010, n. 10, p. P10023+, out. 2010. ISSN 1742-5468.
- [53] JAUREGUI, M.; TSALLIS, C. q -Generalization of the inverse Fourier transform. *Physics Letters A*, v. 375, n. 21, p. 2085–2088, maio 2011. ISSN 03759601.
- [54] JAUREGUI, M.; TSALLIS, C.; CURADO, E. M. F. q -moments remove the degeneracy associated with the inversion of the q -Fourier transform. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2011, n. 10, p. P10016+, out. 2011. ISSN 1742-5468.
- [55] PLASTINO, A.; ROCCA, M. C. q -Fourier Transform and its Inversion-Problem. *Milan Journal of Mathematics*, Birkhäuser Basel, p. 1–7, abr. 2012. ISSN 1424-9286.
- [56] YOSHIHARA, K. *Weakly dependent stochastic sequences and their applications. Summation theory for weakly dependent sequences*. [S.l.]: Sanseido, 1992. ISBN 9784385354323.
- [57] TSALLIS, C.; GELL-MANN, M.; SATO, Y. Asymptotically scale-invariant occupancy of phase space makes the entropy S_q extensive. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, National Academy of Sciences, v. 102, n. 43, p. 15377–15382, out. 2005. ISSN 1091-6490.
- [58] TSALLIS, C. Nonextensive Statistical Mechanics, Anomalous Diffusion and Central Limit Theorems. *Milan Journal of Mathematics*, Birkhäuser Basel, v. 73, n. 1, p. 145–176, out. 2005. ISSN 1424-9286.

- [59] MOYANO, L. G.; TSALLIS, C.; GELL-MANN, M. Numerical indications of a q-generalised central limit theorem. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 73, n. 6, p. 813+, fev. 2006.
- [60] GOLDBERGER, A. L. et al. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals. *Circulation*, Margaret and H.A. Rey Laboratory for Nonlinear Dynamics in Medicine, Beth Israel Deaconess Medical Center/Harvard Medical School, Boston, MA 02215, USA. ary@astro.bidmc.harvard.edu, v. 101, n. 23, p. e215–e220, jun. 2000. ISSN 1524-4539.
- [61] AKSELROD, S. et al. Power spectrum analysis of heart rate fluctuation: a quantitative probe of beat-to-beat cardiovascular control. *Science (New York, N.Y.)*, v. 213, n. 4504, p. 220–222, jul. 1981. ISSN 0036-8075.
- [62] PAGANI, M. et al. Power spectral analysis of heart rate and arterial pressure variabilities as a marker of sympatho-vagal interaction in man and conscious dog. *Circulation Research*, v. 59, n. 2, p. 178–193, ago. 1986. ISSN 0009-7330.
- [63] MALLIANI, A. et al. Cardiovascular neural regulation explored in the frequency domain. *Circulation*, Istituto Ricerche Cardiovascolari, Centro Ricerche Cardiovascolari, CNR, Milano, Italy., v. 84, n. 2, p. 482–492, ago. 1991. ISSN 0009-7322.
- [64] BASELLI, G. et al. Spectral and cross-spectral analysis of heart rate and arterial blood pressure variability signals. *Computers and Biomedical Research*, v. 19, n. 6, p. 520–534, dez. 1986. ISSN 00104809.
- [65] DEBOER, R. W.; KAREMAKER, J. M.; STRACKEE, J. Comparing Spectra of a Series of Point Events Particularly for Heart Rate Variability Data. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, IEEE, BME-31, n. 4, p. 384–387, abr. 1984. ISSN 0018-9294.
- [66] MALIK, M.; ELECTROPHYSIOLOGY, T. F. of the European Society of Cardiology the North American Society of P. Heart Rate Variability: Standards of

- Measurement, Physiological Interpretation, and Clinical Use. *Circulation*, v. 93, n. 5, p. 1043–1065, mar. 1996. ISSN 0009-7322.
- [67] SHIAVI, R. *Introduction to applied statistical signal analysis. Guide to biomedical and electrical engineering applications*. [S.l.]: Academic, 2007.
- [68] DUQUE, J. J.; SILVA, L. E. V.; JUNIOR, L. O. M. Plataforma computacional open-source e de arquitetura aberta para análise de sinais biomédicos. In: *Anais do X Workshop de Informática Médica - XXX Congresso da SBC*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Computação, 2010. p. 1590–1599.

CONJUNTOS DE DADOS

Neste apêndice são apresentadas as tabelas contendo informações sobre os conjuntos de dados usados neste projeto. As cinco primeiras tabelas, A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5, trazem informações sobre as séries RR obtidas através do website do Physionet, já brevemente descritos na Seção 6.4.2. Nestas tabelas são apresentadas informações sobre todas as séries disponíveis na internet que formam cada banco de dados, mesmo que alguma delas não tenha sido utilizada nos experimentos deste projeto.

Todas as séries são formadas por dezenas de milhares de pontos. Neste projeto, entretanto, foi selecionado um trecho de 2048 pontos consecutivos de cada uma delas para a realização dos experimentos. A última coluna destas tabelas apresenta um número indicando o índice do ponto inicial do trecho selecionado para cada uma das séries. A presença de três hifens seguidos (- - -) na última coluna indica que esta série não foi usada nos experimentos.

A primeira coluna destas tabelas indica o identificador da série. É igual ao nome dos arquivos das bases de dados do Physiobank dos quais foram extraídos. As duas próximas colunas apresentam as informações de idade e sexo dos pacientes. A presença de um ponto de interrogação (?) nestas colunas indica que a informação é desconhecida para a série. A penúltima coluna apresenta o número total de pontos de cada série. E a última coluna indica o ponto inicial da seleção.

Tabela A.1: Dados retirados do banco MIT-BIH Normal Sinus Rhythm. Conjunto de dados referente a indivíduos saudáveis. Total de 18 séries RR.

MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database				
ID da Série	Idade (anos)	Sexo	Número de Pontos	Ponto Inicial
16265	32	M	99.765	1.100
16272	20	F	85.414	55.000
16273	28	F	89.595	9.000
16420	38	F	101.726	36.000
16483	42	M	104.112	2.600
16539	35	F	107.872	45.000
16773	26	M	51.095	12.600
16786	32	F	101.498	30.000
16795	20	F	86.114	19.000
17052	45	F	86.965	25.000
17453	32	F	100.169	1.750
18177	26	F	115.177	5.000
18184	34	F	102.053	14.500
19088	41	F	80.084	16.500
19090	45	M	81.103	9.500
19093	34	M	66.765	16.100
19140	38	F	96.454	7.100
19830	50	F	108.665	11.000

Tabela A.2: Dados retirados do banco *Normal Sinus Rhythm RR Interval*. Conjunto de dados referente a indivíduos saudáveis. Total de 54 séries RR.

Normal Sinus Rhythm RR Interval Database				
ID da Série	Idade (anos)	Sexo	Número de Pontos	Ponto Inicial
nsr001	64	F	105.923	20.750
nsr002	67	M	110.820	17.500
nsr003	67	F	96.708	6.500
nsr004	62	F	97.714	11.400
nsr005	62	F	115.260	24.500
nsr006	64	M	102.268	5.000
nsr007	76	M	105.946	13.750
nsr008	64	F	107.306	10.600
nsr009	66	M	102.784	16.200
nsr010	61	F	95.805	20.500
nsr011	65	F	115.069	11.000
nsr012	66	M	98.776	12.000
nsr013	63	F	115.617	21.000
nsr014	65	F	111.268	18.052
nsr015	74	M	99.425	7.500
nsr016	73	F	92.941	40.000
nsr017	71	F	99.023	20.000
nsr018	68	M	106.271	- - -
nsr019	65	F	122.703	14.500
nsr020	58	F	136.072	4.000
nsr021	59	M	103.841	35.000
nsr022	68	M	81.539	9.750
nsr023	66	F	111.969	7.600
nsr024	63	F	84.707	15.500
nsr025	75	M	127.376	17.500
nsr026	72	M	116.028	22.000
nsr027	64	M	112.470	82.200
nsr028	65	M	107.579	10.000
nsr029	63	M	115.916	86.200

Normal Sinus Rhythm RR Interval Database				
ID da Série	Idade (anos)	Sexo	Número de Pontos	Ponto Inicial
nsr030	70	F	104.441	86.650
nsr031	67	M	108.705	12.000
nsr032	68	M	101.174	30.750
nsr033	65	M	76.470	17.750
nsr034	67	M	97.286	17.500
nsr035	66	M	117.518	28.500
nsr036	60	F	112.707	29.700
nsr037	63	M	93.303	12.000
nsr038	62	M	101.547	70.000
nsr039	70	F	97.241	12.750
nsr040	63	F	117.497	90.000
nsr041	64	F	100.826	- - -
nsr042	68	F	107.998	17.150
nsr043	66	M	101.823	17.000
nsr044	65	F	99.073	12.500
nsr045	67	F	92.300	9.000
nsr046	63	F	94.375	22.000
nsr047	28	M	112.585	15.500
nsr048	38	M	115.047	11.500
nsr049	39	M	101.373	19.500
nsr050	29	M	126.659	24.500
nsr051	40	M	106.312	32.500
nsr052	39	M	118.498	10.700
nsr053	35	M	98.664	2.500
nsr054	35	M	119.132	19.500

Tabela A.3: *Dados retirados do banco BIDMC Congestive Heart Failure. Conjunto de dados referente a indivíduos com insuficiência cardíaca. Total de 15 séries RR.*

BIDMC Congestive Heart Failure Database				
ID da Série	Idade (anos)	Sexo	Número de Pontos	Ponto Inicial
chf01	71	M	74.474	12.250
chf02	61	F	67.830	20.000
chf03	63	M	76.845	7.000
chf04	54	M	109.249	6.000
chf05	59	F	117.789	27.700
chf06	?	M	105.920	9.000
chf07	48	M	8.495	5.200
chf08	51	M	88.484	11.500
chf09	63	F	113.213	7.000
chf10	22	M	146.517	40.000
chf11	54	F	114.654	38.750
chf12	61	M	115.060	1.500
chf13	63	M	114.814	28.000
chf14	61	M	93.356	20.000
chf15	53	M	109.655	8.000

Tabela A.4: Dados retirados do banco *Congestive Heart Failure RR Interval*. Conjunto de dados referente a indivíduos com insuficiência cardíaca. Total de 29 séries RR.

Congestive Heart Failure RR Interval Database				
ID da Série	Idade (anos)	Sexo	Número de Pontos	Ponto Inicial
chf201	55	M	112.016	9.300
chf202	59	F	108.600	7.100
chf203	68	M	97.570	500
chf204	62	M	94.170	10.000
chf205	39	M	130.933	14.500
chf206	38	F	122.694	22.000
chf207	62	M	78.578	27.000
chf208	62	M	101.707	0
chf209	65	M	108.096	26.000
chf210	43	M	137.394	1.500
chf211	34	?	126.617	2.500
chf212	54	?	93.733	0
chf213	53	?	84.109	14.000
chf214	79	?	53.265	15.250
chf215	43	?	135.431	42.000
chf216	58	?	101.358	3.000
chf217	50	?	104.478	17.000
chf218	72	?	98.564	5.750
chf219	62	?	90.169	13.500
chf220	64	?	136.083	12.000
chf221	37	?	89.770	2.750
chf222	63	?	95.230	39.000
chf223	56	?	101.560	10.000
chf224	35	?	133.860	47.000
chf225	66	?	89.717	12.500
chf226	51	?	127.579	81.500
chf227	64	?	95.275	8.750
chf228	51	?	115.147	17.500
chf229	58	?	120.695	9.750

Tabela A.5: *Dados retirados do banco MIT-BIH Atrial Fibrillation. Conjunto de dados referente a indivíduos com fibrilação atrial. Total de 25 séries RR.*

MIT-BIH Atrial Fibrillation				
ID da Série	Idade (anos)	Sexo	Número de Pontos	Ponto Inicial
00735	?	?	40.232	- - -
03665	?	?	52.764	15.500
04015	?	?	44.004	- - -
04043	?	?	61.914	- - -
04048	?	?	39.933	- - -
04126	?	?	42.859	- - -
04746	?	?	47.872	10.300
04908	?	?	61.759	- - -
04936	?	?	53.645	13.000
05091	?	?	36.777	- - -
05121	?	?	49.880	12.750
05261	?	?	45.533	- - -
06426	?	?	55.154	21.500
06453	?	?	34.836	- - -
06995	?	?	55.188	0
07162	?	?	39.297	0
07859	?	?	60.284	5.000
07879	?	?	56.593	10.000
07910	?	?	36.598	- - -
08215	?	?	43.355	12.000
08219	?	?	59.292	- - -
08378	?	?	45.514	- - -
08405	?	?	58.855	- - -
08434	?	?	39.849	- - -
08455	?	?	59.551	17.000

As próximas três tabelas, A.6, A.7 e A.8, trazem informações sobre os dados obtidos junto ao LFE-FMRP, já brevemente descritos na Seção 6.4.3. Em relação as séries do Physionet, estas séries são curtas, possuindo cerca de mil pontos cada uma. Desta forma, estas séries foram usadas integralmente nos experimentos.

A primeira coluna destas tabelas apresenta uma identificação da série, seguida por colunas que mostram informações de idade e de peso de cada paciente. As duas últimas colunas indicam o número de pontos contidos em cada série RR nos estados de repouso e *tilt*.

Tabela A.6: Dados do grupo de pacientes saudáveis do LFE-FMRP. Total de 15 séries RR nos estados de repouso e *tilt*.

Grupo de Saudáveis - LFE-FMRP				
ID da Série	Idade (anos)	Peso (kg)	Número de Pontos	
			Repouso	<i>Tilt</i>
AER	55	78,9	818	1.091
CMF	52	74,4	1.162	1.401
CSS	26	84,0	1.040	1.412
DF	30	57,0	837	975
JAA	26	66,3	946	1.089
JAM	47	88,6	1.229	1.457
JBAD	41	100,6	908	1.126
JCC	32	80,4	1.075	1.481
JJM	49	75,0	752	821
JLS	28	81,0	879	730
JoLS	32	90,0	1.002	1.407
LCSC	42	60,0	1.139	1.359
MF	35	80,0	901	1.261
MJS	56	76,0	994	1.153
SAG	37	91,0	884	1.237

Tabela A.7: *Dados do grupo de pacientes chagásicos do LFE-FMRP. Total de 23 séries RR nos estados de repouso e tilt.*

Grupo de Chagásicos - LFE-FMRP				
ID da Série	Idade (anos)	Peso (kg)	Número de Pontos Repouso	<i>Tilt</i>
AAP	22	67,0	899	1.022
ACM	25	75,7	831	1.188
AFB	35	63,3	905	1.155
AVMR	34	63,2	816	1.026
CRPS	33	62,8	851	1.146
DJRS	40	62,0	1.208	1.315
EGP	49	60,0	817	901
FGS	51	65,0	1.032	1.162
GGF	26	63,4	967	1.245
GLC	27	62,6	767	1.027
JAAP	23	64,0	1.601	2.158
JBP	30	77,0	757	965
JCG	38	80,9	880	971
JMSS	33	70,5	718	944
JRS	37	61,8	931	1.062
LUC	50	72,0	898	1.219
MBS	51	75,7	1.051	1.297
MPT	48	79,9	1.032	1.236
NBJ	36	79,0	961	1.178
NCS	31	54,2	1.223	1.305
OLS	24	68,0	961	1.340
PFC	31	73,0	828	1.043
VMD	34	57,7	664	780

Tabela A.8: Dados do grupo de pacientes hipertensos do LFE-FMRP. Total de 19 séries RR nos estados de repouso e tilt.

Grupo de Hipertensos - LFE-FMRP				
ID da Série	Idade (anos)	Peso (kg)	Número de Pontos Repouso	Tilt
AAF	38	103,0	1.361	1.423
AB	47	85,0	1.274	1.533
ADS	42	91,5	922	1.171
AFMC	34	109,9	1.037	926
AFP	43	103,8	1.030	1.379
AJB	30	121,8	837	1.488
AJS	37	86,0	1.247	1.545
ASC	46	80,8	875	1.053
CDS	49	82,8	958	1.149
CLG	43	84,7	985	869
FCD	51	70,5	920	1.275
JLV	55	78,0	747	827
JRCA	52	88,2	997	1.292
JRN	50	80,0	1.276	1.429
LCB	44	80,0	1.249	1.400
MMO	36	81,7	1.214	1.610
RFL	47	82,7	878	1.093
SIP	35	131,0	1.196	1.544
VT	30	85,6	1.059	1.261