UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP – DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PÓS – GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA Á MEDICINA E BIOLOGIA

DAIANE MIRON DE SOUZA

Reconstrução Espectral de Feixes de Raios X Diagnósticos

Dissertação apresentada á Faculdade
de Filosofia Ciências e Letras de
Ribeirão Preto da Universidade de
São Paulo, como parte das exigências
para a obtenção do título de Mestre
em Ciências, Área: Física Aplicada á
Medicina e Biologia.

Ribeirão Preto – SP

2017

DAIANE MIRON DE SOUZA

Reconstrução Espectral de Feixes de Raios X Diagnósticos

Dissertação apresentada á Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Área: Física Aplicada á Medicina e Biologia.

Área de Concentração:

Física Aplicada á Medicina e Biologia.

Orientador:

Alessandro Martins da Costa

Ribeirão Preto – SP

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Miron, D. S

Reconstrução Espectral de Feixes de Raios X Diagnósticos / Daiane Miron de Souza; Orientador : Alessandro Martins da Costa. Ribeirão Preto – SP, 2017.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós – Graduação em Física Aplicada á Medicina e Biologia) – Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Espectrometria 2. Raios X 3. Radiodiagnóstico 4. Atenuação 5. Problema Inverso

Nome: Daiane Miron de Souza

Título: Reconstrução Espectral de Feixes de Raios X

Diagnósticos

Dissertação apresentada á Faculdade de Filosofia Ciências e
Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, como
parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em
Ciências, Área: Física Aplicada á Medicina e Biologia.

Aprovado em: ____/____/____

Banca Examinadora

Prof(a). Dr(a). : _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Instituição: _____

Prof(a). Dr(a). : _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Instituição: _____

Prof(a). Dr(a).: _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Instituição: _____

Prof(a). Dr(a): _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Instituição: _____

Dedico este trabalho a alguém que sempre olha por mim, me vigia e rege toda a minha vida.

AGRADECIMENTOS

Muitos agradecimentos a serem feitos, muitas pessoas a serem elogiadas e muitos “Muito Obrigada” a serem ditos. Resumidamente agradeço a Deus por tudo, por qualquer mínima conquista até as mais árduas.

Agradeço ao meu pai em especial por administrar a minha vida num todo, pelos conselhos e atitudes “optatórias” que me oferece. Sei que a visão dele é sempre muito maior que a minha e sou sortuda de tê-lo como pai. A minha mãe pelos mimos, e pela reclamação diária...me divirto muito. Ao meu irmão, meu orgulho, meu pedaço...agradeço só o fato da existência dele. Ao meu namorado, tamanha compreensão, tamanha doçura, tamanha amizade e principalmente tamanha força que me da diariamente há quase dez anos, em todos esses anos, graduação, pós....nada disso seria concluído sem ele. Á essa minha família de forma simplista agradeço tamanho amor que me é dado, isso me motiva em qualquer trabalho que seja.

Ao Professor Alessandro, sou mais do que obrigada a agradecer tamanha paciência ao longo deste, tamanho tato pra tratar com pessoas..e por ser alguém tão bacana com todos que o cercam.

Aos colegas de laboratório: Júlio, Jéssica, Léo, Michel, Telka, Alex, é um clima muito bom e favorável trabalhar perto de gente tão do bem, as discussões durante este um ano e quatro meses foram de muita valia para a conclusão deste. Neste meio agradeço também ao Eldereis, sempre tão acessível e pronto pra ajudar todos nós.

Ao irmão que fiz durante esse tempo, Maurão, pela sinergia que temos trabalhando juntos, pelo quanto tudo rende, pela inspiração muito mais do que profissional e sim como ser humano. Pelo sonho, loucura ou o que quer que deva ser denominado esta empreitada qual estamos nos aventurando, acho que a expectativa pra que algo desse certo nunca foi tão grande.

Á Laranja pelos conselhos, pelas discussões científicas, por tudo que já fez por mim sem esperar nada em troca. Obrigada!

Ao Erick, por ter me moldado de certa forma num ser humano melhor. Pelas conversas muito mais que acadêmicas, pela mente tão aberta que tem. Demoraria uma vida inteira pra chegar perto da sabedoria desse menino..mas ele me adiantou um pouquinho. Agradeço por ser tão doce, tão gentil, tão necessário...Pelo ânimo pra

conclusão deste, pela leveza que leva a quem o rodeia..por me aproximar de Deus.
Obrigada!

Ao Vinicius pela amizade leal e fiel sempre.

Ao Mehran que de forma fantástica me ajudou computacionalmente a resolver um problema tão complicado.

Aos professores da pós quais tive contato e passei admirar, ao professor Garrido em especial pelas discussões, pelas doses de ânimo em relação á conclusão do Mestrado.

Aos funcionários do Departamento de Física, sempre muito solícitos.

Á CAPES pelo apoio que permitiu a realização deste trabalho, á Universidade de São Paulo pela imensa oportunidade, muitos frutos sairão daqui.

Gratidão a todos citados e a todos os amigos que embora possam não estar no papel de uma dissertação, no coração se fazem sempre presente.

“Não é o mais forte que sobrevive e se destaca, nem o mais inteligente. Quem sobrevive e vive o que sonhou pra si é o mais disposto á MUDANÇAS”

Darwin, C

RESUMO

MIRON, D.S. **Reconstrução Espectral de Feixes de Raios X Diagnósticos**. 2017. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós – Graduação em Física Aplicada á Medicina e Biologia) – Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto – SP, 2017.

A caracterização completa de um feixe de raios X diagnósticos baseia-se na medição de seu espectro de fluência. O espectro de fluência pode ser medido diretamente utilizando métodos espectroscópicos, no entanto, exige equipamento especializado e não é facilmente realizável em ambiente clínico. Neste trabalho foi implementada uma metodologia que permite obter o espectro de raios X de forma indireta. Esta metodologia baseia-se na aplicação de um modelo matemático que utiliza a transformada inversa de Laplace da curva de atenuação do feixe, gerando dados sobre a distribuição espectral deste. As curvas de atenuação foram medidas por meio de uma câmara de ionização e filtros de alumínio de alta pureza. Os espectros reconstruídos foram validados por meio da comparação da fluência em energia calculada a partir destes e a fluência em energia calculada a partir das curvas de atenuação obtidas experimentalmente. Como aplicação também foram calculados alguns dados característicos do feixe, como primeira e segunda camada semirredutora, energia média, 10º percentil e fator de kerma. Os resultados da fluência em energia calculada a partir dos espectros reconstruídos e da fluência em energia calculada a partir das curvas de atenuação obtidas experimentalmente apresentaram boa concordância, validando os espectros reconstruídos e mostrando o valor da análise da curva de atenuação em comparação com métodos espectroscópicos uma vez que os dados de atenuação podem ser obtidos com comparativa facilidade. Os dados característicos do feixe calculados a partir dos espectros obtidos neste trabalho apresentaram resultados satisfatórios, como era de se esperar, uma vez que a integração é um processo de regularização para a distribuição espectral.

Palavras-chave: Espectrometria, Raios X, Radiodiagnóstico, Atenuação, Problema Inverso

ABSTRACT

MIRON, D.S. Spectral Reconstruction of Diagnostic X-Ray Beams. 2017. Dissertation (Master's Degree - Postgraduate Program in Physics Applied to Medicine and Biology) - Faculty of Philosophy Sciences and Letters of Ribeirão Preto, University of São Paulo, Ribeirão Preto - SP, 2017.

A complete characterization of a diagnostic X-ray beam is based on the measurement of its fluency spectrum. The fluency spectrum can be measured directly using spectroscopic methods, however, require specialized equipment and is not easily performed in a clinical environment. In this work a methodology was implemented that allows to obtain the X-ray spectrum in an indirect way. This methodology is based on the application of a mathematical model that uses an inverse Laplace transform of the beam attenuation curve, generating data on a spectral distribution of this beam. The attenuation curves are measured by means of an ionization chamber and high purity aluminum filters. The reconstructed spectra were validated by means of the comparison of energy fluency calculated from them and an energy fluence calculated from the experimentally obtained attenuation curves. As an application, some characteristic beam data were also calculated, such as first and second half-value layers, mean energy, 10th percentile and kerma factor. The energy fluency calculated from the reconstructed spectra and the energy fluence calculated from the experimentally obtained attenuation curves showed good agreement, validating the reconstructed spectra and showing the value of the attenuation curve analysis in comparison with one spectroscopic methods attenuation data can be obtained with comparative ease. The characteristic beam data calculated from the spectra obtained in this work presented satisfactory results, as expected, since it is a regularization process for a spectral distribution.

Keywords: Spectrometry, X-ray, Radiodiagnosis, Attenuation, Inverse Problem

LISTA DE FIGURAS

2.1 Esquema do tubo de raios X adaptado de Bushberg et. al. (2001)	4
2.2 Espectro de raios X gerado por uma diferença de potencial de 90 kVp mostrando radiação de freamento e raio X característico.....	5
2.3 Esquema da geração de radiação de freamento adaptado de Bushberg et. al. (2001)	5
2.4 Esquema das Transições entre camadas abordando radiação característica.....	6
2.5 Esquema do efeito fotoelétrico adaptado de Khan. (2003)	7
2.6 Esquema do espalhamento Compton adaptado de Khan. (2003)	8
2.7 Esquema da atenuação exponencial.....	11
2.8: Esquema de Funcionamento do DE	18
4.1 Curva de transmissão para tensão no tubo de 50 kV _p calculada para o alumínio	31
4.2: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 50 kV _p	32
4.3 Curva de transmissão para tensão no tubo de 70 kV _p calculada para o alumínio	33
4.4 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 70 kV _p	34
4.5 Curva de transmissão para tensão no tubo de 90 kV _p calculada para o alumínio	35
4.6 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 90 kV _p	36
4.7 Curva de transmissão para tensão no tubo de 100 kV _p calculada para o alumínio ..	37
4.8 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 100 kV _p	38
4.9 Curva de transmissão para tensão no tubo de 50 kV _p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips	39

4.10 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 50 kV _p no Raio X Super M 80 Philips	40
4.11 Curva de transmissão para tensão no tubo de 70 kV _p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips	41
4.12 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 70 kV _p no Raio X Super M 80 Philips	41
4.13 Curva de transmissão para tensão no tubo de 90 kV _p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips	42
4.14 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 90 kV _p no Raio X Super M 80 Philips	42
4.15 Curva de transmissão para tensão no tubo de 100 kV _p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips	43
4.16 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 100 kV _p no Raio X Super M 80 Philips	43
4.17 Curva de transmissão para tensão no tubo de 40 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	45
4.18 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 40 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	46
4.19 Curva de transmissão para tensão no tubo de 50 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	47
4.20 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 50 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	47
4.21 Curva de transmissão para tensão no tubo de 60 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	48
4.22 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 60 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	48

4.23 Curva de transmissão para tensão no tubo de 70 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	49
4.24 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 70 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	49
4.25 Curva de transmissão para tensão no tubo de 80 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	50
4.26 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 80 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	50
4.27 Curva de transmissão para tensão no tubo de 90 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	51
4.28 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 90 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	51
4.29 Curva de transmissão para tensão no tubo de 100 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	52
4.30 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 100 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	52
4.31 Curva de transmissão para tensão no tubo de 120 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	53
4.32 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 120 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	53
4.33 Curva de transmissão para tensão no tubo de 150 kV _p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E	54
4.34 Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 150 kV _p no Raio X ISOVOLT TITAN E	54

3.1 Dados dos raios X característicos para o tungstênio	22
4.1 Comparação entre as fluências em energia, em keV/cm^2 , obtidas diretamente das curvas de transmissão medidas no raio X Super M 80 Philips e as calculadas a partir dos espectros reconstruídos	44
4.2 Comparação entre as fluências em energia, em keV/cm^2 , obtidas diretamente das curvas de transmissão medidas no raio X ISOVOLT TITAN E e as calculadas a partir da espectros reconstruídos	55
4.3 Fator de kerma dependente da energia para as energias quais foram realizadas as medidas no raio X ISOVOLT Titan E	56
4.4 Dados sobre as camadas semirredutoras e coeficiente de homogeneidade calculadas por meio da curva de transmissão e do espectro reconstruído	57
4.5 Energia Média dos fótons para as transmissões medidas raio X ISOVOLT Titan E	58
4.6 10º percentil para cada transmissão medida raio X ISOVOLT Titan E	59
4.7 Fator de kerma para cada transmissão medida raio X ISOVOLT Titan E	60

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
Lista de Tabelas	II
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica	4
2.1. Produção do Espectro de Raios X	4
2.2. Espectro Gerado nos Tubos de Raios X	4
2.3. Interação da Radiação com a Matéria	6
2.3.1 <i>Processo de Absorção: Efeito fotoelétrico</i>	6
2.3.2 <i>Espalhamento Inelástico: Espalhamento Compton</i>	8
2.3.3 <i>Coeficiente de Atenuação</i>	9
2.3.4 <i>Coeficientes de absorção e Transferência de Energia em Massa</i>	10
2.3.5 <i>Atenuação Exponencial</i>	11
2.4. Grandezas Relacionadas ao Feixe de Raios X	12
2.4.1 <i>Fluência de Fótons</i>	12
2.4.2 <i>Fluência de Energia</i>	12
2.4.3 <i>Espectro da Fluência de Fótons</i>	12
2.4.4 <i>Espectro da Fluência de Energia</i>	13
2.4.5 <i>Kerma</i>	13
2.4.6 <i>Camada Semirredutora</i>	14
2.5. Câmara de Ionização	14
2.5.1 <i>Exposição</i>	14

2.6. Transformada de Laplace	15
2.6.1 Transformada Inversa de Laplace	16
2.7. Evolução Diferencial	17
2.7.1. Descrição DE	17
3 Materiais e Métodos	18
3.1. Cálculo do Kerma no Ar	18
3.1.1. Coeficiente de Transferência de Energia em Massa (Ar seco)	19
3.1.2. Coeficiente de Atenuação Linear em Massa (Alumínio)	20
3.2. Curva de Transmissão (Calculada)	20
3.3. Componente de Bremsstrahlung	22
3.4. Algoritmo DE	24
3.5. Transmissões Medidas	27
3.6. Validação	27
3.7. Aplicação em Cálculos dos Parâmetros Característicos do Feixe.....	28
3.7.1. Fator de Kerma Dependente da Energia	28
3.7.2. Primeira e Segunda Camada Semirredutora	29
3.7.3. Energia Média dos Fótons	29
3.7.4. 10º Percentil	30
3.7.5. Fator de Kerma	30
4 Resultados e Discussões	31
4.1. Transmissões Calculadas	31
4.1.1. Transmissão Calculada para 50 kV	31
4.1.2. Transmissão Calculada para 70 kV	33

4.1.3. Transmissão Calculada para 90 kV	35
4.1.4. Transmissão Calculada para 100 kV	37
4.2. Transmissões Medidas	39
4.2.1. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 50 kV	39
4.2.2. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 70 kV	41
4.2.3. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 90 kV	42
4.2.4. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 100 kV	43
4.3. Validação	44
4.4. Aplicação em Cálculos dos Parâmetros Característicos do Feixe	45
4.4.1. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 40 kV	45
4.4.2. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 50 kV	47
4.4.3. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 60 kV	48
4.4.4. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 70 kV	49
4.4.5. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 80 kV	50
4.4.6. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 90 kV	51
4.4.7. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 100 kV	52
4.4.8. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 120 kV	53
4.4.9. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 150 kV	54
4.4.10. Fluência em Energia	55
4.4.11. Fator de Kerma Dependente da Energia	56
4.4.12. Primeira e Segunda Camada Semirredutora	57
4.4.13. Energia Média dos fótons	58
4.4.14. 10º Percentil	59
4.4.15. Fator de Kerma	60
5. Conclusões e Perspectivas Futuras	61
5.1. Sobre a espectrometria indireta	61
5.2. Sobre a análise das fluências em energia	61

5.3. Sobre a análise dos parâmetros característicos do feixe	61
Referências Bibliográficas	63
Apêndice	67

1. INTRODUÇÃO

Após a descoberta dos raios X por Wilhelm Conrad Roentgen em 1895, e da radioatividade por Becquerel em 1896 foram iniciados estudos e pesquisas relacionadas à radiação ionizante e sua interação com a matéria, com singular interesse na energia que a mesma deposita ao interagir com seres vivos ^[1].

Os avanços rápidos na imagem médica e em outras áreas da física despertaram o interesse em métodos mais recentes de determinar o espectro dos raios-X, já que as técnicas comumente utilizadas até então se mostravam inviáveis ^[2]. Um feixe de Raios X tem propriedades dosimétricas diretamente ligadas ao espectro de energia produzido pelo tubo, pode-se auxiliar no estabelecimento da qualidade dos tratamentos fazendo uso de metodologias que permitam avaliar de forma simples os espectros destes feixes ^[2-3]. Torna-se muito importante no radiodiagnóstico a especificação da qualidade do feixe de radiação. A fluência energética de um feixe de radiação é determinada tanto por meio de um espectrômetro quanto pelas propriedades de atenuação da radiação em um material ^[3].

A qualidade dos feixes de raios-X diagnósticos é caracterizada em termos da tensão de pico no tubo (kV_p) e da camada semirredutora (CSR). A CSR é definida como a espessura de um absorvedor (tipicamente alumínio de alta pureza), que atenua o kerma ar para metade do seu valor inicial. A caracterização completa baseia-se na medição do espectro de fluência. Os espectros podem ser medidos diretamente utilizando métodos espectroscópicos. No entanto, a medição direta é um processo difícil, que exige equipamento especializado e experiência considerável, e não é facilmente realizável em um ambiente clínico. Alternativamente, vários estudos têm investigado técnicas para determinar espectro de fluência de raios-X a partir dos dados de transmissão obtidos a partir de medições de kerma no ar com uma câmara de ionização ^[3-13]. Uma medição de kerma no ar realizada utilizando uma câmara de ionização é o resultado da integração da distribuição em energia da fluência. Informação sobre esta distribuição da fluência de fótons no que diz respeito à energia é recuperada a partir dos dados de transmissão

medidos em que o espectro é progressivamente modificado variando a filtração, geralmente, adicionando absorvedores de alumínio de alta pureza.

A espectroscopia é um meio relativamente complexo e dispendioso de encontrar espectros de uma determinada fonte de raios-x. O método conhecido como análise da atenuação foi aplicado pela primeira vez por *Silberstein* e desenvolvido por *Jonnes*^[14-15]. Com este método, uma curva de atenuação de raios X é ajustada a uma função analítica contendo vários parâmetros. Se o modelo for escolhido corretamente, sua transformada de Laplace inversa gerará um conjunto de dados que se aproxima do espectro de energia original.

Baird mostra que mesmo um modelo simplista fornece uma melhoria significativa em relação à aproximação dos espectros de energia^[16]. Huang et al apresentam um novo modelo para fótons de alta energia, que fornece métodos melhores do que Monte Carlo ou modelos existentes. No entanto, ele afirma que seu modelo ainda é grosseiro, uma vez que o espectro reconstruído mostra picos indesejados para a faixa de energia qual se foca o estudo^[17].

A caracterização de um sistema de raios X pode ser realizada empregando simulação Monte Carlo^[18], modelo semianalítico^[19] ou métodos experimentais^[2,20]. Características específicas de cada equipamento definem a forma do espectro, tais como, filtração, composição e angulação do ânodo, focalização e etc, assim não sendo possível levar todas elas em conta por meio de simulação ou modelo semianalítico, o modelo experimental tem se mostrado mais pertinente para a aquisição das distribuições espectrais.

A determinação da distribuição espectral foi obtida por meio da aplicação de um modelo matemático da transformada de Laplace sobre a curva de atenuação, a vantagem da forma escolhida está no aparato experimental simples, e de baixo custo se comparado a outros métodos diretos, é válido ressaltar que tradicionalmente, os modelos utilizados nas análises de atenuação continham apenas dois ou três parâmetros ajustáveis, já o presente trabalho apresenta um modelo de quatro parâmetros com maior flexibilidade permitindo maior precisão na reconstrução espectral.

O objetivo deste trabalho foi a aplicação de um método indireto que utiliza um modelo espectral baseado em um par de transformadas de Laplace para determinar o espectros de raios X de um equipamento de raios X diagnósticos a partir da curvas de transmissão medidas experimentalmente. A validação foi realizada por meio da fluência

em energia obtida das curvas de transmissão medidas (calculadas mediante a literatura de Delgado, V & Ortiz, P ^[21] quando comparadas ao espectro reconstruído.

O trabalho se encontra dividido da seguinte maneira:

No capítulo 2 pode ser observada a fundamentação teórica sob a qual este trabalho está pautado, a priori são apresentados os princípios da produção de raios X, posteriormente abordou-se as interações da radiação com a matéria na faixa de energia do radiodiagnóstico e as grandezas que as descrevem, foi abordado também a apresentação matemática do par de transformada de Laplace.

No capítulo 3 são descritos os materiais e métodos utilizados em cada etapa do trabalho: o ajuste dos parâmetros para o encontro dos coeficientes de atenuação em massa, a construção da curva de transmissão, a obtenção de boas estimativas para que a equação (3.21) convergisse e os parâmetros a, b, v e r fossem adequados a equação (3.22) podendo assim posteriormente reconstruir o espectro. São também aqui denotadas a forma como foram obtidas as curvas de transmissão medidas e depois validadas de acordo com a literatura ^[21], por fim são apresentados os métodos para o cálculo dos parâmetros característicos do feixe.

O capítulo 4 apresenta os resultados e discussões do trabalho, curvas de transmissão, parâmetros, reconstruções, validação e cálculos característicos do feixe.

O capítulo 5 é destinado a conclusões e perspectivas futuras.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Produção do Espectro de Raios X

Os raios X foram descobertos por Roentgen e assim denominados, pois sua natureza era desconhecida. Raios X são radiações eletromagnéticas emitidas por partículas carregadas (principalmente elétrons), ao serem freadas por um campo coulombiano, ou ao mudar de camadas num átomo, o comprimento de onda (λ) médio desses raios é da ordem de $1 \text{ \AA}$ ^[22].

Raios X apresentam propriedades típicas de ondas, como polarização, interferência e difração, como a luz e outras radiações eletromagnéticas. Esses raios são produzidos no alvo de um tubo de Raios X como mostrado na figura abaixo, os elétrons são emitidos termicamente do cátodo e são acelerados em direção ao ânodo (alvo) devido à diferença de potencial estabelecida. Os raios X são emitidos do ânodo, quando os elétrons são freados ao atingi-lo ^[22].

Figura 2.1: Tubo de Raios X. Adaptado de Bushberg et. al. (2001) ^[22]

2.2. Espectro Gerado nos Tubos de Raios X

A primeira componente do espectro de Raios X é a radiação de freamento, ou Bremsstrahlung. A segunda é a componente discreta, denominada de Raios X característicos.

Figura 2.2: Espectro de Raio X gerado por uma diferença de potencial de 90 kVp

Na radiação de freamento, o elétron incidente, ao passar próximo ao núcleo do elemento constituinte do ânodo, será por ele atraído, sendo desacelerado e mudando sua trajetória. O elétron incidente que antes estava com uma energia cinética elevada tenderá a diminuir essa quantidade de energia cinética e essa diminuição da energia, será emitida na forma de raios X, portanto a perda que teria de energia cinética acaba sendo emitida como raios X, chamada esta, de radiação de freamento. Em suma, radiação de freamento é produzida por meio da desaceleração dos elétrons através de interações coulombiana inelásticas com o núcleo dos átomos do ânodo ^[22].

Figura 2.3: Emissão de Raios X de freamento. Adaptado de Bushberg et. al. (2001) ^[22]

No caso da radiação característica, a mesma é formada por fótons emitidos em transições eletrônicas, pois a energia dos fótons é definida pela diferença de energia entre as camadas atômicas, que é característica de cada átomo. Entretanto, de acordo com as regras de seleção da mecânica quântica, nem todas as transições radiativas são possíveis de ocorrer, assim uma vacância interna não pode ser preenchida por qualquer elétron de outra camada. A figura 2.4 ilustra as possíveis transições para a camada K, a partir da camada L e M:

Figura 2.4: Esquematização das Transições para a Camada K

Sendo K_{α} transições eletrônicas que resultam na emissão de fótons da camada L para a camada K e K_{β} transições da camada M para a camada K.

2.3. Interação da Radiação com a Matéria

Na faixa de energia do radiodiagnóstico as principais formas de interação dos Raios X com a matéria são: espalhamento inelástico, espalhamento elástico, e a absorção fotoelétrica. Apenas a primeira e a terceira serão levadas em conta neste, dado que o espalhamento elástico apenas muda a direção do fóton e não transfere energia.

2.3.1 Processo de Absorção: Efeito fotoelétrico

Este processo de absorção resulta em um átomo excitado, com uma vacância em uma de suas camadas, no momento em que esta vacância é preenchida por um elétron das camadas mais externas um fóton é emitido (raio X característico descrito na seção 2.2). A energia deste fóton é dada por meio da diferença entre a energia de ligação da camada de origem do elétron e a energia de ligação correspondente á camada de origem do fotoelétron ^[23].

Explicitamente, um fóton de energia $h\nu$ é absorvido por um átomo, que emite um de seus elétrons com energia cinética T_e . Este átomo sofre um pequeno recuo, com energia cinética T_c ^[1,23].

Figura 2.5: Efeito Fotoelétrico. Adaptado de Khan. (2003) ^[24]

O elétron emitido desse processo é o fotoelétron.

Por conservação de energia têm-se:

$$h\nu = T_e + E_b + T_a \quad (2.1)$$

Como a massa do átomo é muito maior do que a massa do elétron : $T_e \gg T_a$, desta forma

$$h\nu = T_e + E_b, \quad (2.2)$$

A energia transferida para o elétron será:

$$T_e = h\nu - E_b, \quad (2.3)$$

Sendo E_b a energia de ligação do elétron

Este processo de interação ocorre com o átomo como um todo e não pode ser observado para elétrons livres.

Este processo de interação é predominante em regiões de baixa energia, a probabilidade de sua ocorrência é dada pela seção de choque, que em $h\nu < 100 \text{ keV}$, tem τ qual:

$$\tau = \kappa \frac{Z^4}{h\nu^3} \quad (2.4)$$

Sendo κ uma constante e Z o número atômico do material. Pode-se observar por meio desta equação que a probabilidade deste processo aumenta para fótons de baixa energia e elementos de número atômico alto.

2.3.2. Espalhamento Inelástico: Espalhamento Compton

Este processo consiste na colisão de um fóton com um elétron livre em repouso, de massa m_0 e carga e .

O fóton possui energia $h\nu$ antes da colisão e $h\nu'$ após a colisão, movendo-se num ângulo Θ em relação a direção inicial. O elétron se move com energia cinética T_e fazendo um ângulo ϕ [1].

Figura 2.6: Espalhamento Compton. Adaptado de Khan. (2003) [24]

A energia cinética do elétron em recuo é dada por:

$$T = h\nu - h\nu' \quad (2.5)$$

Onde por conservação de energia:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos\theta)} \quad (2.6)$$

Sendo m_0c^2 a energia de repouso do elétron (0,511 MeV). As equações 2.6 e 2.7 denotam que um fóton pode gerar elétrons com energia de recuo $0 < T \leq T_c$, sendo T_c a energia máxima cedida ao elétron neste processo. O valor de T_c é obtido assumindo que, $\theta = \pi$, desta forma temos ^[1]:

$$T_c = \frac{2h\nu^2}{2h\nu + m_0c^2} \quad (2.7)$$

Levando em conta os elétrons ligados ao material, a distribuição angular dos fótons espalhados por átomos ou moléculas neste processo pode ser descrita ^[1]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{in} = S(x) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{KN} \quad (2.8)$$

Onde $S(x)$ é a função de espalhamento inelástico e $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{KN}$ é a seção de choque diferencial de Klein Nishina para o elétron livre. A seção de choque total para elétrons é dada por ^[1]:

$$\sigma_{in} = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} \right] + \frac{\ln(1+2\alpha)}{2\alpha} - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\} \quad (2.9)$$

$$\text{Onde } \alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2}.$$

A equação (2.9) mostra que a seção de choque eletrônica para o espalhamento inelástico é proporcional a $h\nu^{-1}$. A seção e choque total para o átomo pode ser obtida multiplicando a seção de choque eletrônica pelo número de elétrons do material, desta forma teremos:

$${}_a\sigma_{in} = Z\sigma_{in} \quad (2.10)$$

A equação acima mostra que a seção de choque total é linearmente dependente do número atômico do material e inversamente dependente da energia do fóton.

2.3.3. Coeficiente de Atenuação

A seção de choque atômica total é definida como ^[25]:

$${}_a\sigma_T = \tau + {}_a\sigma_{el} + {}_a\sigma_{in} \quad (2.11)$$

Sendo esta, a grandeza que relaciona a probabilidade de um fóton interagir com a matéria, por qualquer que seja o processo, onde τ é a seção de choque para absorção fotoelétrica, ${}_a\sigma_{el}$ e ${}_a\sigma_{in}$ são as seções de choque atômicas para o espalhamento elástico e inelástico, respectivamente.

A seção de choque total ${}_a\sigma_T$ é relacionada com o número de átomos por unidade de volume do material por meio do coeficiente de atenuação ^[25]:

$$\mu = {}_a\sigma_T n_v \quad (2.12)$$

Onde n_v é o número de átomos por unidade de volume. n_v depende do estado físico da matéria, logo μ também passa a depender deste estado, já o coeficiente de atenuação em massa, que é dado pela equação abaixo descrita é independente do estado físico da matéria ^[25].

$$\frac{\mu}{\rho} = \left(\frac{N_A}{A} \right) {}_a\sigma_T \quad (2.13)$$

Onde ρ é a densidade do material, A a massa atômica do material e N_A é o número de Avogadro.

2.3.4. Coeficientes de absorção e Transferência de Energia em Massa

Os coeficientes de absorção de energia em massa $\left(\frac{\mu_{ab}}{\rho} \right)$ e de transferência de energia em massa $\left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)$ são característicos das frações de energia absorvida e transferida pela matéria nos processos de interação, tais coeficientes são definidos da seguinte forma ^[25]:

$$\left(\frac{\mu_{ab}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right) (1-g) \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right) = \left(\frac{N_A}{A} \right) ({}_a\tau_{tr} + {}_a\sigma_{tr}) \quad (2.15)$$

Na equação (2.14), g é a fração média de energia irradiada pelos elétrons secundários, τ_{tr} e σ_{tr} são as seções de choque atômicas de transferência de energia para a absorção fotoelétrica e espalhamento inelástico, respectivamente.

2.3.5. Atenuação Exponencial

Considerando um feixe paralelo monoenergético (feixe primário), com N_0 fótons, que incide perpendicularmente sobre um material de espessura X , tem-se a seguinte situação:

Figura 2.7: Demonstração da Atenuação

A medida que os fótons penetram no material, alguns interagem e vão sendo removidos do feixe primário.

Considerando uma espessura dx , em que incidem N' fótons, a variação (redução) do número de fótons é ^[25]:

$$N = N_0 e^{-\mu x} \quad (\text{Lei de Beer Lambert}) \quad (2.16)$$

Onde N_0 é o número de fótons transmitidos através de x sem interagir do feixe primário.

O número de fótons que interagem é

$$N_0 - N = N_0(1 - e^{-\mu x}) \quad (2.17)$$

Em termos da intensidade do feixe (fótons/m²s)

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (2.18)$$

2.4. Grandezas Relacionadas ao Feixe de Raios X

Neste tópico serão descritas as grandezas utilizadas e relacionadas ao feixe de Raios X

2.4.1. Fluência de Fótons

Considerando um feixe de fótons incidindo sobre uma área A, e ainda que este feixe tem quantidade N de fótons, a fluência de fótons nesta região é dada por ^[1]:

$$\Phi = \frac{dN}{dA} \quad (2.19)$$

2.4.2. Fluência de Energia

Assuma um feixe de fótons com energia E e fluência Φ . Nestas condições a fluência de energia associada á este feixe é dada por ^[1]:

$$\Psi = \Phi E \quad (2.20)$$

Quando a energia (E) é tomada como variável da distribuição diferencial de fluência de energia e fluência de fótons a grandeza resultante é o espectro de energia de ambas as grandezas. Desta forma teremos as seguintes relações:

2.4.3. Espectro da Fluência de Fótons

Assumindo o feixe de fótons com fluência Φ , o espectro de energia da fluência de fótons é dado por ^[1]:

$$\Phi(E) = \frac{d\Phi}{dE} \quad (2.21)$$

2.4.4. Espectro da Fluência de Energia

Assumindo o feixe de fótons com fluência de energia Ψ , o espectro da fluência de energia deste feixe é dado por ^[1]:

$$\Psi(E) = \frac{d\Psi}{dE} \quad (2.22)$$

2.4.5. Kerma

Esta grandeza denominada Kerma, denota a relação entre a energia transferida de partículas não carregadas para partículas carregadas na forma de energia cinética, por unidade de massa em um ponto de interesse ^[1]. De forma geral Kerma é descrito como:

$$K = \frac{dE_{tr}}{dm} \quad (2.23)$$

Onde dE_{tr} é o valor médio da energia transferida de partículas não carregadas para partículas carregadas em um volume de massa dm . A unidade de Kerma é o $\frac{J}{Kg}$ ou, Gy. Kerma é definido correlacionando o material no qual as interações ocorrem. Para um feixe de fótons monoenergético o Kerma no ar em um ponto P é dado por ^[1]:

$$(K)_{ar} = \Psi \left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{E,ar} \quad (2.24)$$

No caso do feixe de fótons polienergético, o Kerma no ar em um ponto P:

$$(K)_{ar} = \int_{E=0}^{E_{mx}} \Psi(E) \cdot \left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{E,ar} dE \quad (2.25)$$

Já o Kerma colisional no ar é definido para um feixe monoenergético denota-se como:

$$(K)_{c,ar} = \Psi \left(\frac{\mu_{ab}}{\rho} \right)_{E,ar} \quad (2.26)$$

No caso do feixe polienergético:

$$(K)_{c,ar} = \int_{E=0}^{E_{mx}} \Psi(E) \cdot \left(\frac{\mu_{ab}}{\rho} \right)_{E,ar} dE \quad (2.27)$$

2.4.6. Camada Semirredutora e Coeficiente de Homogeneidade.

Uma das importantes qualidades do feixe de Raios X é sua capacidade de penetrar em um material. Os raios X de baixa energia do feixe, que não contribuem para a formação da imagem diagnóstica são removidos do feixe através da filtração.

Esta penetração no feixe pode ser dada pelo aumento da energia mínima por meio da filtração, ou pelo aumento da energia máxima através de kVps mais altos, ambos aumentam a energia média do feixe, acrescendo assim sua penetração no meio. Uma maneira de se quantificar a penetração do feixe produzido é através da camada semirredutora [22].

A camada semirredutora é definida como a espessura de um material atenuador puro que reduz a intensidade do Kerma incidente á metade do seu valor inicial [22].

A segunda CSR é a espessura que reduz a intensidade do Kerma que advém da primeira CSR á metade.

Definidas a primeira e segunda camada semirredutoras, CH (Coeficiente de Homogeneidade) é dado pela razão entre a 1ª e a 2ª CSR [22].

2.5. Câmara de Ionização

A câmara de ionização é um detector que demonstra a ionização produzida pela radiação em seu volume sensível, geralmente uma cavidade preenchida com gás. Devido ao campo existente entre as placas coletoras, as cargas elétricas geradas no volume sensível são coletadas, posteriormente é gerado um sinal proporcional á intensidade da radiação, que será lido como tensão, corrente elétrica, ou unidade de corrente. Desta forma, o sinal da câmara é proporcional á fluência do feixe de radiação. A câmara de ionização fundamenta-se de uma cavidade preenchida com gás embalada por um material sólido, nela a radiação produz íons que são coletados através de um campo elétrico [1].

A leitura fornecida pelas câmaras fornece a dose absorvida em um meio.

2.5.1. Exposição

De acordo com o ICRU ^[26], exposição é definida como:

$$X = \frac{dQ}{dm} \quad (2.28)$$

Onde dQ é o valor absoluto da carga total dos íons de mesmo sinal produzidos no ar, quando os elétrons liberados pelos fótons numa massa dm , são totalmente parados no volume que encerra essa massa de ar ^[22].

Exposição é a grandeza que mede a ionização produzida por fótons no ar.

2.6. Transformada de Laplace

O método desenvolvido por Pierre Simon Laplace permite a resolução de problemas de valor inicial, viabilizou a resolução de equações diferenciais á equações polinomiais. A transformada de Laplace transforma a derivação e a integração em divisão e multiplicação, genericamente transforma a função $f(t)$ em uma nova função $F(s)$, da seguinte forma ^[27]:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.29)$$

A notação comumente usada da Transformada é dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.30)$$

Onde $\mathcal{L}$ é o operador da Transformada de Laplace e $f(t)$ é a função original.

A transformada de Laplace $F(s)$ existe tipicamente para todos os números reais $s > a$, onde a é uma constante que depende do comportamento de crescimento de $f(t)$ ^[27].

Existem alguns critérios para que a transformada de Laplace de $f(t)$ exista. Estão listadas abaixo estas condições quais necessita-se que $f(t)$ satisfaça, para que posteriormente falemos da forma de inverter a Transformada:

- A função deverá ser parceladamente contínua, isto é, $f(t)$ poderá ter alguns pontos isolados onde é descontínua, mas será contínua em cada intervalo entre dois pontos de descontinuidade.

- A função $f(t)$ deve ser uma função de ordem exponencial.

Existe um número real a tal que o limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)|e^{-at} = 0 \quad (2.31)$$

O domínio da transformada de Laplace de $f(t)$ será $s > a$.

2.6.1 Transformada Inversa de Laplace

A transformada de Laplace Inversa é realizada empregando a relação biunívoca entre um sinal no tempo e sua transformada unilateral.

Considerando a função que se pretende obter a transformada inversa representada na forma ^[27]:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \text{ Sendo } M < N. \quad (2.32)$$

$X(s)$ pode também ser representado da seguinte maneira:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (2.33)$$

Se o polo p_k for diversificado $X(s)$ se torna a soma de termos simples, de forma a poder ser escrito como:

$$X(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k} \quad (2.34)$$

Sendo,

$$A_k e^{p_k t} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{A_k}{s - p_k} \quad (2.35)$$

Se o polo p_i for diversas vezes repetido, haverá n termos na expansão em frações parciais associadas a p_i , de forma que:

$$\frac{A_{i1}}{s - p_i} + \frac{A_{i2}}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{A_{in}}{(s - p_i)^n} \quad (2.36)$$

Para a obtenção da Transformada Inversa de Laplace de cada termo o que deve ser utilizado é o par ^[27]:

$$\frac{A t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_k t} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{A}{(s - p_k)^n} \quad (2.37)$$

2.7. Evolução Diferencial

O DE foi proposto em 1995 por Price e Storn ^[28] com intuito de estimar os parâmetros do Polinômio de Chebychev. O algoritmo de Recozimento Genérico (RG) mostrava uma demora considerável para a convergência e um grau de dificuldade para a determinação dos parâmetros, daí se deu a motivação para o desenvolvimento do DE. Por meio de uma abordagem conceitualmente mais simples e eficiente o DE trata problemas reais, funções não diferenciáveis, descontínuas ou até desconhecidas e também funções não lineares, que é o caso deste trabalho.

O DE tem inúmeras aplicações no ramo da ciência, na solução de problemas inversos, por exemplo, possui aplicação na estimativa de parâmetros vindos do processo de fermentação alcoólica, na determinação de propriedades radiativas, dentre outras.

As principais vantagens do DE se baseia em sua simplicidade conceitual, facilidade de implementação, e tempo de processamento satisfatório ^[28].

2.7.1. Descrição DE

O DE é um método heurístico, baseado numa população de candidatos potenciais para a resolução de problemas de otimização, basicamente a diferença ponderada entre dois indivíduos é adicionada á um terceiro indivíduo e o indivíduo gerado por meio deste esquema é avaliado pela função objetivo e pode substituir indivíduos mal sucedidos nas gerações seguintes. Assim, nenhuma distribuição de probabilidade em separado é usada, o que torna a ferramenta sempre auto ajustável ^[29].

A implementação do DE se dá por ^[29]:

- Passo 1: Gerar aleatoriamente uma população inicial com NP indivíduos.
- Passo 2: Avaliar a função objetivo para todos os indivíduos da população
- Passo 3: Interromper o procedimento iterativo se todas as condições de parada forem satisfeitas
- Passo 4: Aplicar o operador de mutação que consiste em definir a estratégia empregada para a geração de candidatos em potencial á solução do problema de otimização
- Passo 5: Empregar o operador de cruzamento, que vai ou não promover a aceitação do candidato gerado via aplicação do operador de mutação

- Passo 6: Avaliar a função objetivo para todos os novos indivíduos da população

- Passo 7: O operador é empregado para avaliar o candidato segundo o valor da função objetivo. Os candidatos com melhor valor serão mantidos nas gerações futuras

Passo 8: Retornar ao Passo 3

	Representação	Mecanismo de Mutação
1	$x^{j+1} = x_{\text{best}}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/best/1/exp
2	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/rand/1/exp
3	$x^{j+1} = x_{\text{old}}^j + F(x_{\text{best}}^j - x_{\text{old}}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand-to-best/2/exp
4	$x^{j+1} = x_{\text{best}}^j + F(x_{\alpha}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/best/2/exp
5	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\alpha}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand/2/exp
6	$x^{j+1} = x_{\text{best}}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/best/1/bin
7	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/rand/1/bin
8	$x^{j+1} = x_{\text{old}}^j + F(x_{\text{best}}^j - x_{\text{old}}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand-to-best/2/bin
9	$x^{j+1} = x_{\text{best}}^j + F(x_{\alpha}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/best/2/bin
10	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\alpha}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand/2/bin

Figura 2.8: Funcionamento do DE ^[29]

Onde F é uma taxa de perturbação aleatória para ponderar duas ou mais diferenças vetoriais para a geração do candidato.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

O Kerma medido que será posteriormente utilizado nas curvas de transmissão tem seu cálculo abaixo descrito.

3.1. Cálculo do Kerma no Ar

O kerma no ar K para um feixe de raios X é normalmente expresso pela equação^[13]

$$K = \int_0^{\infty} \phi_E E \frac{\mu_{tr}}{\rho}(E) dE \quad (3.1)$$

Onde ϕE é a distribuição em energia de fluência e μ_{tr}/ρ é o coeficiente de transferência de energia em massa do ar para fótons de energia E .

Se um feixe estreito é atenuado com um material de espessura em massa d , a distribuição em energia de fluência se torna:

$$\Phi_E(d) = \Phi_E(0) e^{-\mu_m d} \quad (3.2)$$

Onde μ_m é o coeficiente de atenuação em massa do material atenuador.

O kerma no ar se torna uma função de d e é dado pela equação (3.3)

$$K = \int_0^\infty \Phi_E(0) e^{-\mu_m d} E \frac{\mu_{tr}}{\rho}(E) dE \quad (3.3)$$

Se o Kerma no ar transmitido é medido para um conjunto de diferentes espessuras em massa do material atenuador, a curva de transmissão do feixe de raios X pode ser construída.

3.1.1. Coeficiente de Transferência de Energia em Massa (Ar seco)

Para a realização dos cálculos denotados nas equações (3.1) e (3.3) acima foram realizados alguns procedimentos para o encontro de $\frac{\mu_{tr}}{\rho}$.

No caso das energias empregadas no uso da radiação no radiodiagnóstico $\frac{\mu_{tr}}{\rho} \approx \frac{\mu_{en}}{\rho}$, foram obtidas da plataforma NIST [30], os valores de $\frac{\mu_{en}}{\rho}$ foram coletados a partir de 4 Kev (abaixo da camada K) e o último valor recolhido foi de 200 keV. Após coletados os valores da plataforma foi realizado o log da coluna de energia (E) e o log da coluna de Transferência de Energia em Massa do Ar ($\frac{\mu_{en}}{\rho}$), isso posto foi realizado a análise e o ajuste polinomial das colunas, e o polinômio de quinto grau utilizado para encontrar os valores dos coeficientes do ar, num intervalo de energia dE de 0,5 keV foi:

$$7,92913 - 22,7583x + 34,84654 x^2 - 28,87862 x^3 + 11,13532 x^4 - 1,58071 x^5$$

Este polinômio de quinto grau é aplicado às energias coletadas e depois retira-se o logaritmo.

O intervalo entre as energias (dE) utilizado foi 0,5 keV, portanto a partir de 9 keV até 150 foram utilizados dEs de 0,5 em 0,5, e para achar o coeficiente destas energias desejadas simplesmente era aplicada a parametrização deste polinômio de

quinto grau na coluna das energias de 0,5 em 0,5. Sabendo que a integral nada mais é do que um somatório, o Kerma não atenuado foi o somatório de cada kerma de cada energia, utilizando a equação (3.1).

3.1.2. Coeficiente de Atenuação Linear em Massa (Alumínio)

O material atenuador ao longo de todo este trabalho fora o Alumínio ($Z = 13$), o valor de $\frac{\mu_{tr}}{\rho}$ foi coletado do NIST ^[31] para energias de até 200 keV igualmente para o caso do Ar.

O mesmo procedimento foi realizado, a coleta das energias e coeficientes da Plataforma NIST, desta vez a partir de 2 até 200 keV e feito o ajuste linear, que resultou no seguinte polinômio de quinto grau:

$$4,49351 - 5,06293x + 6,07838 x^2 - 6,73469 x^3 + 3,14408 x^4 - 0,49648 x^5$$

A parametrização foi aplicada em toda a coluna das energias quais seriam utilizadas e posteriormente retirava-se o log, encontrando assim os valores do coeficiente de cada energia. Neste caso do alumínio, o mesmo fora utilizado na equação (3.3), onde encontramos o Kerma atenuado pelo Alumínio, em espessuras de 1 a 10 mm.

3.2. Curva de Transmissão (Calculada)

A curva de transmissão, $T(d)$, pode ser definida como a razão entre o kerma no ar total do feixe atenuado, $K(d)$, e o kerma no ar total do feixe não atenuado, $K(0)$:

$$T(d) = \frac{K(d)}{K(0)} \quad (3.4)$$

Seja:

$$F(E) = \frac{\phi_E(0)E\frac{\mu_{tr}}{\rho}(E)}{K(0)} \quad (3.5)$$

Então, a partir das equações (3.3), (3.4) e (3.5),

$$T(d) = \int_0^{\infty} F(E) e^{-\mu_m d} dE \quad (3.6)$$

$F(E) dE$ é a fração de $K(0)$ que é devida aos fótons de energia entre E e $E + dE$.

Mudando a variável de integração de E para μ_m e colocando:

$$F(E) \left(-\frac{dE}{d\mu_m} \right) = f(\mu_m) \quad (3.7)$$

A equação (3.6) se torna

$$T(d) = \int_0^{\infty} f(\mu_m) e^{-\mu_m d} d\mu_m \quad (3.8)$$

Nesta mudança de variável é assumido que μ_m é uma função diferenciável e monotonicamente decrescente de E ; $\mu_m \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow \infty$ e $\mu_m \rightarrow \infty$ quando $E \rightarrow 0$.

A definição de uma transformada de Laplace, é dada por ^[32]:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.9)$$

Então, a curva de transmissão de um feixe de raios X pode ser descrita como uma transformada de Laplace:

$$T(d) = \mathcal{L}[f(\mu_m)] \quad (3.10)$$

Se a curva de transmissão é conhecida, $f(\mu_m)$ é determinada pela transformada de Laplace inversa,

$$f(\mu_m) = \mathcal{L}^{-1}[T(d)] \quad (3.11)$$

O espectro $F(E)$ derivado dela como

$$F(E) = f(\mu_m) \left(-\frac{d\mu_m}{dE} \right) \quad (3.12)$$

Neste trabalho foram considerados os feixes de raios X diagnósticos com a voltagem no tubo na faixa de 50 – 150 kV e com o material do anodo normalmente sendo de tungstênio. No tungstênio a energia total dos elétrons da camada K é –69, 5 keV. Assim, a emissão de raios X característicos só ocorre com a voltagem no tubo maior que 69, 5 kV. É interessante notar que a maior parte dos raios X emitidos é de bremsstrahlung. Isso ocorre porque a quantidade de raios X característicos no feixe não aumenta muito com a voltagem de aceleração, enquanto que a de raios X de

bremsstrahlung aumenta fortemente. A partir da tensão mínima necessária para que os elétrons adquiram energia cinética acima da energia de ligação da camada K, toda a série de raios X característicos é emitida, em uma proporção fixa entre K_α e K_β . A quantidade total de fótons de raios X característico cresce com a energia do elétron logo acima da energia de ligação da camada K, mas se estabiliza para energias cinéticas mais elevadas ^[33]. Devido á filtração em equipamentos de Raios X diagnósticos, a radiação característica de baixa energia da camada L não tem relevância, portanto não foi considerada.

3.3. Componente de Bremsstrahlung

Seja $T_B(d)$ o componente contínuo de bremsstrahlung da curva de transmissão para os espectros de raios X produzidos por voltagens no tubo maiores que 69,5 kV, a contribuição dos raios X característicos à curva de transmissão é representada por $T_C(d)$. Consequentemente a transmissão é dada por

$$T(d) = T_B(d) + T_C(d) \quad (3.13)$$

Se r representa a fração de kerma no ar devido à bremsstrahlung no espectro não atenuado e o termo $(1-r)$ é a fração de kerma no ar devido à presença raios X característicos, os termos $T_B(d)$ e $T_C(d)$ são dados por

$$T_B(d) = r \int_0^\infty f_B(\mu_m) e^{-\mu_m d} d\mu_m \quad (3.14)$$

Em que $f_B(\mu_m)$ representa apenas a fração de bremsstrahlung do espectro e

$$T_C(d) = (1-r) \sum_i C_i e^{-\mu_m^i d} \quad (3.15)$$

Onde C_i é a abundancia relativa e μ_m^i é o coeficiente de atenuação linear em massa correspondente a cada energia dos raios X característicos denotados na tabela abaixo:

Tabela 3.1: Dados dos raios X característicos para o tungstênio ^[34]

Camada de Transição	Energia (keV)	Abundância Relativa
$K_{\alpha 2}$	57,98	0,2880
$K_{\alpha 1}$	59,32	0,500
$K_{\beta 1}$	67,20	0,1690
$K_{\beta 2}$	69,10	0,0430

A partir da propriedade associativa da transformada de Laplace e das equações 3.8 e 3.13, podemos escrever:

$$f(\mu_m) = \mathcal{L}^{-1}[T_B(d)] + \mathcal{L}^{-1}[T_C(d)] \quad (3.16)$$

O significado físico desta formulação está no fato que o último termo da equação 16 é uma soma de funções delta de Dirac que representa os raios X característicos, uma vez que:

$$f_C(\mu_m) = \mathcal{L}^{-1}[T_C(d)] = (1-r) \sum_i C_i \mathcal{L}^{-1}[e^{-\mu_m^i d}] = (1-r) \sum_i C_i \delta(\mu_m - \mu_m^i) \quad (3.17)$$

Usando a identidade

$$\delta(E - E_i) = -\frac{d\mu_m}{dE} \delta(\mu_m - \mu_m^i) \quad (3.18)$$

Podemos escrever:

$$F_C(E) = (1-r) \sum_i C_i \delta(E - E_i) \quad (3.19)$$

O espectro pode ser escrito como:

$$F(E) = r F_B(E) + (1-r) F_C(E) \quad (3.20)$$

Onde $F_B(E)$ é o espectro de Bremsstrahlung e $F_C(E)$ é o espectro de raios X característicos.

As equações (3.13) e (3.20) são uma descrição matemática fisicamente correta do espectro de raios X com radiação característica e sua atenuação.

Neste trabalho foi assumido que $T_B(d)$ é representado pelo modelo matemático proposto por Archer e Wagner^[35], assim:

$$T(d) = r \left[\frac{ab}{(d+a)(d+b)} \right]^\nu e^{-\mu_m^0 d} + (1-r) \sum_i C_i e^{-\mu_m^i d} \quad (3.21)$$

Após inserir a curva de Transmissão no Origin, a equação não linear (3.21) acima precisava convergir aos pontos. As estimativas iniciais foram advindas do algoritmo DE^[28,29]. Isso posto, após colocar as estimativas iniciais de cada parâmetro no Origin, o mesmo devolvia os parâmetros a, b, ν e r e suas respectivas incertezas, assim como a conversão á curva de Transmissão.

Para a volta ao espectro foram inseridos os valores de a, b, ν e r na equação:

$$F(E) = r \frac{\sqrt{\pi}(ab)^\nu}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\mu_m - \mu_m^0}{a-b} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} \times e^{\left[-\frac{1}{2}(a+b)(\mu_m - \mu_m^0) \right]} \times I_{\nu-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}(a-b)(\mu_m - \mu_m^0) \right] \left(-\frac{d\mu_m}{dE} \right) + (1-r) \sum_i C_i \delta(E - E_i) \quad (3.22)$$

Como mencionado na equação (3.21), a, b, v e r foram parâmetros encontrados e μ_m^0 é o coeficiente de atenuação em massa do material atenuador para a energia máxima do espectro. O problema se reduziu à determinação de parâmetros não lineares aos dados de transmissão e à aplicação destes parâmetros ao modelo matemático recorrente da equação (3.21) para reconstrução espectral do feixe de raios X. Foram utilizados os Softwares MATLAB e Origin para a determinação desses parâmetros não lineares.

O material atenuador deste trabalho, como já descrito, fora o Alumínio, para a reprodução^[36] dos coeficientes de atenuação em massa do alumínio utilizamos o polinômio:

$$4,49351 - 5,06293x + 6,07838 x^2 - 6,73469 x^3 + 3,14408 x^4 - 0,49648 x^5$$

Como utilizamos $\log\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ para a determinação deste polinômio, para calcular $\left(-\frac{d\mu_m}{dE}\right)$ na equação (3.22) a seguinte derivada foi realizada, considerando $a_0 = 4,49351$, $a_1 = -5,06293$, $a_2 = 6,07838$, $a_3 = -6,73469$, $a_4 = 3,14408$ e $a_5 = -0,49648$

$$\log\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = a_0 + a_1 \log E + a_2 \log^2 E + a_3 \log^3 E + a_4 \log^4 E + a_5 \log^5 E \quad (3.23)$$

Sendo assim,

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = 10^{(a_0 + a_1 \log E + a_2 \log^2 E + a_3 \log^3 E + a_4 \log^4 E + a_5 \log^5 E)} \quad (3.24)$$

$$\frac{d\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}{dE} = 10^{(a_0 + a_1 \log E + a_2 \log^2 E + a_3 \log^3 E + a_4 \log^4 E + a_5 \log^5 E)} \ln 10 \quad (3.25)$$

$$\frac{\log e^{(a_1 + 2a_2 \log E + 3a_3 \log^2 E + 4a_4 \log^3 E + 5a_5 \log^4 E)}}{E}$$

3.4. Algoritmo DE

O processo de inicialização da população no DE consiste na geração de indivíduos de forma aleatória, portanto é interessante que sejam conhecidos o domínio de cada variável que se vai trabalhar. Números aleatórios são gerados e aplicados num intervalo, obtendo-se assim um vetor de indivíduos da população^[29]:

$$x_{i,j} = x_{i,L} + \text{rand}(x_{i,U} - x_{i,L}) \quad (3.26)$$

Onde $x_{i,L}$ e $x_{i,U}$ são limites inferiores e superiores das i -ésimas variáveis, e rand é o gerador de números aleatórios .

Uma vez iniciado o processo o DE realiza operações de mutação e recombinação para a geração de uma nova população com NP indivíduos, o operador de mutação diferencial adiciona um vetor de referência, escolhido aleatoriamente na população, a um vetor diferença obtido a partir de outros dois vetores também escolhidos aleatoriamente na população. O novo vetor v_{ig} é gerado através de ^[37]:

$$v_{ig} = x_{r0,g} + F(x_{r1,g} - x_{r2,g}) \quad (3.27)$$

F é a taxa de perturbação, um número real que controla a magnitude do vetor diferença obtido em cada operação aritmética realizada, $x_{r0,g}$, $x_{r1,g}$ e $x_{r2,g}$ são escolhidos aleatoriamente na população. Após encontrados $x_{r1,g}$ e $x_{r2,g}$ a diferença entre eles é realizada e essa diferença é ponderada pela taxa de perturbação F , gerando assim o vetor diferença, que é adicionado a $x_{r0,g}$ para formar v_{ig} , ou seja, um novo candidato em potencial ^[37].

O algoritmo utilizado ^[29] neste trabalho para o encontro de bons parâmetros e estimativas iniciais para a , b , v e r , de forma genérica fora:

```
clear all; close all; clc
```

```
D=5;
```

```
objf=inline(r [ \frac{ab}{(d+a)(d+b)} ]^v e^{-\mu_m^0 d} + (1-r) \sum_i C_i e^{-\mu_m^i d}, 'a','b','r','v','d');
```

```
objf=vectorize(objf);
```

```
N=20;
```

```
itmax=30;
```

```
F=0.8; CR=0.5;
```

```
a(1:N,1)=11; b(1:N,1)=20;
```

```
a(1:N,2)=1; b(1:N,2)=10;
```

```
a(1:N,3)=0; b(1:N,3)=1;
```

```
a(1:N,4)=0.3; b(1:N,4)=4;
```

```
a(1:N,5)=0.001; b(1:N,5)=0.010;
```

```
d=(b-a);
```

```
basemat= repmat(int16(linspace(1,N,N)),N,1);
```

```
basej= repmat(int16(linspace(1,D,D)),N,1);
```

```
x=a+d.*rand(N,D);
```

```
fx=objf(x(:,1),x(:,2),x(:,3),x(:,4),x(:,5));
```

```

[fxbest,ixbest]=min(fx);
xbest=x(ixbest,1:D);
for it=1:itmax;
    permat=bsxfun(@(x,y) x(randperm(y(1))),basemat',N(ones(N,1))');
    v(1:N,1:D)=repmat(xbest,N,1)+F*(x(permat(1:N,1),1:D)-x(permat(1:N,2),1:D));
    r=repmat(randi([1 D],N,1),1,D);
    muv = ((rand(N,D)<CR) + (basej==r)) ~= 0;
    mux = 1-muv;
    u(1:N,1:D)=x(1:N,1:D).*mux(1:N,1:D)+v(1:N,1:D).*muv(1:N,1:D);
    fu=objf(u(:,1),u(:,2),u(:,3),u(:,4),u(:,5));
    idx=fu<fx;
    fx(idx)=fu(idx);
    x(idx,1:D)=u(idx,1:D);
    [fxbest,ixbest]=min(fx);
    xbest=x(ixbest,1:D);
end
[xbest,fxbest]

```

d foi incluído no algoritmo de 1 a 10 mm exatamente como as curvas de atenuação foram medidas, os limites (bounds) foram mudados a cada energia, pois anteriormente a escolha do método DE muitas esimativas iniciais foram realizados no Origin depois atrelados ao algoritmo Levenberg–Marquardt e já havia conhecimento do domínio dos parâmetros, para cada energia a função objetiva também era alterada dado que $\mu_m^0 d$ varia para cada energia que se é tratada. Os limites iam sendo alterados de acordo com o que já se sabia previamente.

d e N

a e R

b e R

a > b

v e R, $0 < v \leq 2$

r e R, $0 \leq r \leq 1$

Após encontradas boas estimativas iniciais para a , b , v e r os mesmos foram inseridos no Origin e estes parâmetros da equação (3.21) foram convergidos a curva de transmissão.

3.5. Transmissões Medidas

As curvas de transmissão foram medidas utilizando placas de alumínio puro (99,99%) com espessuras de 0,5 mm (10 placas) e 1,0 mm (13 placas) e uma câmara de ionização de placas paralelas PTW-Freiburg modelo TN34069, acoplada a um eletrômetro digital PTW-Freiburg modelo UNIDOS E T-10010. Foi utilizado também um medidor multipropósito PTW-Freiburg modelo Diavolt Multi para medir a tensão de pico no tubo e assim estimar a energia máxima do espectro.

No primeiro momento, para a validação experimental foi utilizado um equipamento de raios X, modelo Super M 80 Philips, opera de 40 a 100 kV. As medidas foram realizadas no Centro de Instrumentação e Dosimetria da FFCLRP-USP .

No segundo momento, para a aplicação em cálculos dos parâmetros característicos do feixe, foi utilizado um equipamento de raios X da marca G & E, modelo ISOVOLT Titan E, janela com 0,8 mm de Be mais 2 mm de Alumínio, operando de 20 a 160 kV. As medidas foram realizadas no Departamento de Física da FFCLRP-USP.

3.6. Validação

Para a Validação do método fora utilizada a referência de Delgado ^[21].

A validação experimental foi feita através da comparação entre fluência em energia calculada a partir do espectro reconstruído e fluência em energia calculada a partir da curva de transmissão ^[21].

O kerma calculado tem unidade de $\frac{keV}{g}$ e a fluência, para as curvas calculadas, foram obtidas através da equação

$$\phi_E(0) = \frac{F(E)K(0)}{E \frac{\mu_{tr}}{\rho}(E)} \quad (3.28)$$

Sendo a unidade de ϕ_E [1/keV cm²]

Após encontrar a fluência para achar a fluência em energia foi realizado o seguinte cálculo:

$$\Psi = \int_0^{\infty} \phi_E(E) E dE \quad (3.29)$$

Cuja unidade é dada em [keV/cm²]

No caso experimental, as curvas de transmissão foram medidas utilizando placas de alumínio puro(99,9%), com espessuras de 1mm e 0,5 mm, além das placas foi utilizada uma câmara de ionização de placas paralelas PTW-Freiburg modelo TN34069, acoplada a um eletrômetro digital PTW – Freiburg modelo UNIDOS E T-10010.

Após medidas as curvas de transmissão foram construídas e suas fluências em energia calculadas a partir da série de Laurent descrita:

$$\Psi = a K(0) + \int_0^{\infty} K(x) e^{cx} \left(b + dx + \frac{ex^2}{2} \right) dx \quad (3.30)$$

Onde a,b,c, d e e são parâmetros dados na literatura ^[21], com $a -0.174 \text{ } 66 \text{ [m}^2/\text{kg}^{-1}]$, $b \text{ } 5,9384$, $c - 0,000153[\text{m}^2/\text{kg}]$, $d \text{ } 0,19583[\text{m}^2/\text{kg}]$, $e -0,002923[\text{m}^2/\text{kg}^2]$, dx fora a variação em espessura mássica a cada medida, $K(0)$ a dose sem placas de alumínio e $K(x)$ para cada dose medida de 1 a 10 mm. É relevante citar que o kerma calculado tem unidade de $\frac{\text{keV}}{\text{g}}$ já o medido era dado em μGy , a conversão de $\frac{J}{\text{kg}}$ foi realizadae também todas as unidades, de parâmetro e dx foram ajustadas, portanto as unidades de fluência energia foram dadas em $\frac{\text{keV}}{\text{cm}^2}$.

As fluências em energia foram comparadas e assim dada a validação.

3.7. Aplicação em Cálculos dos Parâmetros Característicos do Feixe

Como aplicação neste trabalho, foram realizados alguns cálculos de fatores para aplicação nos parâmetros característicos do feixe, como:

3.7.1. Fator de Kerma Dependente da Energia

O fator de Kerma dependente da energia é dado pela seguinte expressão ^[38]:

$$k_{\phi}(E) = E \frac{\mu_{tr}(E)}{\rho} \quad (3.31)$$

Onde E foi o kV máximo medido e $\frac{\mu_{tr}(E)}{\rho}$ o coeficiente de atenuação mássico do ar.

3.7.2. Primeira e Segunda Camada Semirredutora

Como descrito na Seção 2.4.6 a primeira camada semirredutora (1ª HVL) é a espessura do material utilizado que atenua o feixe de radiação tal que o valor de kerma é reduzido para metade do seu valor inicial ^[38], já a segunda camada semirredutora (2ª HVL) é a espessura do material utilizado que atenua a primeira camada semirredutora (1ª HVL), de modo que o kerma é reduzida de metade para um quarto do seu valor inicial ^[38].

Assumindo a atenuação exponencial dos fótons pelo material alumínio, a 1ª HVL e a 2ª HVL foram calculadas usando a lei de atenuação exponencial:

$$* \phi_E(E) k_\phi(E) = \phi_E(E) k_\phi(E) e^{-\left(\frac{\mu(E)}{\rho}\right)\rho d} \quad (3.32)$$

Onde $* \phi_E(E)$ e $\phi_E(E)$ são as fluências depois e antes da atenuação, $\phi_E(E) k_\phi(E)$ pode ser chamado de "kerma no ar espectral", o que significa a relação de kerma no ar, que é produzida por fótons no intervalo de energia E a E + dE.

$\left(\frac{\mu(E)}{\rho}\right)$ é coeficiente de atenuação em massa do alumínio, ρ a densidade do mesmo e d, a espessura utilizada durante as medidas experimentais.

3.7.3. Energia Média dos Fótons

A energia média dos fótons foi calculada da seguinte forma ^[38]:

$$\bar{E}_{ph} = \frac{\int_{E_{min}}^{E_{max}} E \phi_E(E) dE}{\int_{E_{min}}^{E_{max}} \phi_E(E) dE} \quad (3.33)$$

Onde $\phi_E(E)$ é a fluência, que foi calculada de cada espectro através da equação (3.28), dado que como o espectro foi reconstruído, possuindo F(E) já se torna possível o cálculo da fluência.

3.7.4. 10º Percentil

Os 10º percentis de uma qualidade de radiação ou de um espectro de raios X não filtrado é definido como o fóton de energia $E_{10\%}$, que dá o limite de energia no espectro. Sendo assim 10% do kerma no ar total, K_a , da qualidade da radiação é produzido por fótons com uma energia menor do que $E_{10\%}$. Os 10º percentis, foram assim calculados ^[38]:

$$0,1 = \frac{\int_{E_{mín}}^{E_{10\%}} \phi_E(E) k\phi(E) dE}{\int_{E_{mín}}^{E_{máx}} \phi_E(E) k\phi(E) dE} \quad (3.34)$$

3.7.5. Fator de Kerma

O fator de Kerma $k_\phi(R)$, de uma qualidade de radiação ou de um espectro de raios-X não filtrado é definido como o quociente do kerma no ar total e a fluência total do espectro, tal fator foi calculado da forma ^[38]:

$$k_\phi(R) = \frac{\int_{E_{mín}}^{E_{máx}} k\phi(E) \phi_E(E) dE}{\int_{E_{mín}}^{E_{máx}} \phi_E(E) dE} \quad (3.35)$$

Devido as unidades trabalhadas neste desde o início, o fator de kerma fora obtido a priori em $\frac{keV}{g} cm^2$, a conversão foi feita para $pGycm^2$ por intermédio da relação:
 $1,00000 pGycm^2 = 6,24150 \frac{keV}{g} cm^2$.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão mostrados todos os resultados (transmissões calculadas, medidas, fluências e aplicações em cálculos dosimétricos).

4.1. Transmissões Calculadas

As transmissões aqui demonstradas foram calculadas através das equações (3.1), (3.3) e (3.4).

4.1.1. Transmissão Calculada para 50 kV

Figura 4.1: Curva de transmissão para tensão no tubo de 50 kV_p calculada para o alumínio

Sendo $0,378 \text{ (cm}^2/\text{g)}$ o coeficiente de atenuação em massa do alumínio na energia de 50 kV, e os parâmetros a , b , e ν encontrados e satisfatórios, o retorno ao espectro foi dado por

Figura 4.2: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 50 kV_p

O retorno ao espectro foi dado por meio da equação (3.22)

4.1.2. Transmissão Calculada para 70 kV

Como descrito na Metodologia deste trabalho, a curva de transmissão é dada pela Equação (3.4)

Figura 4.3: Curva de transmissão para tensão no tubo de 70 kV_p calculada para o alumínio

Sendo 0,231 (cm^2/g) o coeficiente de atenuação em massa do alumínio para a energia de 70 kV e os parâmetros a , b , ν e r encontrados para 70 kV satisfatórios, parâmetros estes quais convergiram ao espectro abaixo

Figura 4.4: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 70 kV_p

4.1.3. Transmissão Calculada para 90 kV

A curva de transmissão que foi obtida por meio da Equação (3.4) , para a energia de 90 kV é denotada abaixo:

Figura 4.5: Curva de transmissão para tensão no tubo de 90 kV_p calculada para o alumínio

Sendo $0,180 \text{ (cm}^2/\text{g)}$ o coeficiente de atenuação em massa do alumínio para a energia de 90 kV. A equação (3.21) foi inserida no Origin e os parâmetros iniciais (estimativas) inseridos vieram do algoritmo DE, após a conversão da equação foram retornados os parâmetros para a energia de 90 kV. Possuindo estes parâmetros chegou-se a equação (3.22) , equação esta que volta a reconstrução do espectro, através do parâmetros obtidos extraiu-se da equação (3.22)

Figura 4.6: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 90 kV_p

4.1.4. Transmissão Calculada para 100 kV

A curva de transmissão dada pela Equação (3.4), é denotada abaixo para 100 kV

Figura 4.7: Curva de transmissão para tensão no tubo de 100 kV_p calculada para o alumínio

A curva de transmissão convergiu á equação (3.21), sendo 0,166 (cm^2/g) o coeficiente de atenuação em massa do alumínio para a energia de 100 kV; 0,2880; 0,5; 0,169 e 0,043 são as abundâncias relativas das energias características respectivamente. Após a conversão da equação foram encontrados os parâmetros para 100 kV.

Possuindo estes parâmetros chegamos a equação (3.22) , equação esta que volta a reconstrução do espectro, através do parâmetros obtidos extraiu-se desta equação o espectro abaixo:

Figura 4.8: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão calculada para 100 kV_p.

Observa-se aqui que a equação (3.21) representa com boa qualidade a curva de transmissão calculada. Os espectros reconstruídos nas figuras (4.2; 4.4; 4.6 e 4.8) sugerem que o espectro determinado a partir da curva de transmissão é uma boa aproximação principalmente com relação à sua forma. O método desenvolvido demonstrou fornecer bons ajustes e determinação de boas estimativas para a curva de transmissão calculada. Sugere-se que o algoritmo de DE pode eficientemente resolver a questão da hiper sensibilidade ao valor inicial quando usamos métodos de otimização local. Portanto, o DE pode ser aplicado para ajustar as curvas de transmissão sem considerar os valores iniciais, assim reconstruindo os espectros com forma mais similar possível aos dados teóricos.

4.2. Transmissões Medidas

As transmissões medidas a priori, foram realizadas com o intuito da comparação entre a fluência em energia do espectro reconstruído e das curvas de transmissão, que é denotada no fim desta seção.

4.2.1. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 50 kV

Figura 4.9: Curva de transmissão para tensão no tubo de 50 kV_p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips

Figura 4.10: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 50 kV_p no Raio X Super M 80 Philips

4.2.2. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 70 kV

Figura 4.11: Curva de transmissão para tensão no tubo de 70 kV_p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips

Figura 4.12: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 70 kV_p no Raio X Super M 80 Philips

4.2.3. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 90 kV

Figura 4.13: Curva de transmissão para tensão no tubo de 90 kV_p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips

Figura 4.14: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 90 kV_p no Raio X Super M 80 Philips

4.2.4. Transmissão Medida Raio X Super M 80 Philips para 100 kV

Figura 4.15: Curva de transmissão para tensão no tubo de 100 kV_p medida para o alumínio no Raio X Super M 80 Philips

Figura 4.16: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 100 kV_p no Raio X Super M 80 Philips

4.3. Validação

Como dito anteriormente, a validação foi a comparação entre as fluências em energia, dos espectros reconstruídos e da curva de atenuação medida. As mesmas foram calculadas através da Equação (3.30) para a curva de atenuação obtida experimentalmente e (3.29) para os espectros reconstruídos.

A tabela 4.1 mostra as fluências em energia aferidas para os feixes de raios X medidos no Centro de Instrumentação e Dosimetria, operando nas tensões nominais de 50, 70, 90 e 100 kVp

Tabela 4.1: Comparação entre as fluências em energia, em keV/cm^2 , obtidas diretamente das curvas de transmissão medidas no raio X Super M 80 Philips e as calculadas a partir dos espectros reconstruídos

kVp	Fluência em energia a partir da Transmissão Medida	Fluência em energia a partir do Espectro Reconstruído
50	$5,372 \cdot 10^9$	$5,741 \cdot 10^9$ (+6,86%)
70	$9,008 \cdot 10^9$	$9,950 \cdot 10^9$ (+10,45%)
90	$3,810 \cdot 10^{10}$	$3,838 \cdot 10^{10}$ (0,73%)
100	$5,005 \cdot 10^{10}$	$5,542 \cdot 10^{10}$ (+10,72%)

As energias para quais os erros foram maiores possivelmente não tiveram suas transmissões bem medidas, um pequeno erro na curva de transmissão já gera um de dimensão maior no cálculo da fluência em energia, já que são problemas naturais onde tem fenômenos físicos envolvidos nos processos (problema mal posto) ^[39].

4.4. Aplicação em Cálculos dos Parâmetros Característicos do Feixe

4.4.1. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 40 kV

Figura 4.17: Curva de transmissão para tensão no tubo de 40 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.18: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 40 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.2. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 50 kV

Figura 4.19: Curva de transmissão para tensão no tubo de 50 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E.

Figura 4.20: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 50 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.3. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 60 kV

Figura 4.21: Curva de transmissão para tensão no tubo de 60 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.22: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 60 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.4. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 70 kV

Figura 4.23: Curva de transmissão para tensão no tubo de 70 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.24: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 70 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.5. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 80 kV

Figura 4.25: Curva de transmissão para tensão no tubo de 80 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.26: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 80 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.6. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 90 kV

Figura 4.27: Curva de transmissão para tensão no tubo de 90 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.28: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 90 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.7. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 100 kV

Figura 4.29: Curva de transmissão para tensão no tubo de 100 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.30: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 100 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.8. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 120 kV

Figura 4.31: Curva de transmissão para tensão no tubo de 120 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.32: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 120 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.9. Transmissão Medida Raio X ISOVOLT TITAN E para 150 kV

Figura 4.33: Curva de transmissão para tensão no tubo de 150 kV_p medida para o alumínio no Raio X ISOVOLT TITAN E

Figura 4.34: Espectro de raios X determinado a partir da curva de transmissão medida para 150 kV_p no Raio X ISOVOLT TITAN E

4.4.10. Fluência em Energia

Tabela 4.2: Comparação entre as fluências em energia, em keV/cm^2 , obtidas diretamente das curvas de transmissão medidas no Raio X ISOVOLT TITAN E e as calculadas a partir da espectros reconstruídos

kVp	Fluência em energia a partir da Transmissão Medida	Fluência em energia a partir do Espectro Reconstruído
40	$2,209 \cdot 10^{11}$	$2,279 \cdot 10^{11}$ (+3,16%)
50	$5,754 \cdot 10^{11}$	$5,900 \cdot 10^{11}$ (+2,53%)
60	$1,087 \cdot 10^{12}$	$1,170 \cdot 10^{12}$ (+7,63%)
70	$1,743 \cdot 10^{12}$	$1,837 \cdot 10^{12}$ (+5,39%)
80	$2,596 \cdot 10^{12}$	$2,620 \cdot 10^{12}$ (+0,92%)
90	$3,632 \cdot 10^{12}$	$3,612 \cdot 10^{12}$ (-0,55%)
100	$4,837 \cdot 10^{12}$	$4,657 \cdot 10^{12}$ (-3,72%)
120	$7,701 \cdot 10^{12}$	$7,524 \cdot 10^{12}$ (-2,29%)
150	$1,312 \cdot 10^{13}$	$1,357 \cdot 10^{13}$ (+3,42%)

As fluências em energia obtidas diretamente das curvas de transmissão medidas e as calculadas a partir da espectros reconstruídos pelo método aqui apresentado, apresentam boa concordância, validando os espectros reconstruídos.

Encontram-se abaixo os fatores calculados para aplicação nos cálculos dos parâmetros característicos do feixe.

4.4.11. Fator de Kerma Dependente da Energia

O fator de Kerma, cuja é dado pela expressão (3.31), encontra-se abaixo para todas as energias medidas (foi utilizado o kV máximo medido para os cálculos).

Tabela 4.3: Fator de kerma dependente da energia para as energias quais foram realizadas as medidas experimentais no raio X ISOVOLT Titan E

Energia (keV)	Fator de Kerma (keV cm ² /g)
43,400	2,449
53,500	2,013
64,500	1,864
76,800	1,893
86,800	2,008
94,600	2,139
106,700	2,403
123,000	2,849
151,100	3,779

4.4.12.Primeira e Segunda Camada Semirredutora

Encontram-se abaixo os valores da camada semirredutora, que foram obtidos em cm e convertidos para mm para viabilizar comparação.

Tabela 4.4: Dados sobre as camadas semirredutoras e coeficiente de homogeneidade calculadas por meio da curva de transmissão e do espectro reconstruído

Energia (kV)	1ª CSR (mm) Espectro Reconstruído	2ª CSR (mm) Espectro Reconstruído	CH Espectro Reconstruído	1ª CSR (mm) Curva Atenuação	2ª CSR (mm) Curva Atenuação	CH Curva Atenuação
40	2,125	2,703	0,786	1,973	2,734	0,721
50	2,325	3,034	0,766	2,059	3,014	0,683
60	2,938	3,600	0,816	2,825	3,617	0,781
70	3,100	3,891	0,796	3,030	3,805	0,796
80	3,420	4,418	0,774	3,156	3,891	0,811
90	3,996	4,777	0,836	3,332	4,418	0,754
100	4,705	5,042	0,933	3,998	4,765	0,839
120	5,456	6,836	0,798	4,986	5,276	0,945
150	5,867	7,034	0,834	5,443	6,732	0,808

4.4.13. Energia Média dos fótons

Na tabela abaixo encontram-se as energias médias dos fótons para todas as energias quais foram medidas

Tabela 4.5: Energia Média dos fótons para as transmissões medidas raio X ISOVOLT Titan E

Energia (keV)	Energia Média dos Fótons a partir da transmissão medida (keV)
40	28,405
50	34,451
60	37,127
70	39,341
80	39,926
90	42,708
100	46,231
120	50,640
150	56,780

4.4.14.10° Percentil

Tabela 4.6: 10° percentil para cada transmissão medida raio X ISOVOLT Titan E

Energia (keV)	Energia Média dos Fótons a partir da transmissão medida (keV)
40	16,500
50	17,500
60	19,800
70	20,800
80	21,000
90	22,500
100	23,000
120	25,500
150	26,000

4.4.15. Fator de Kerma

Tabela 4.7: Fator de kerma para cada transmissão medida raio X ISOVOLT Titan E

Energia (keV)	Fator de Kerma a partir da transmissão medida (pGy cm ²)
40	0,924
50	0,773
60	0,621
70	0,615
80	0,606
90	0,560
100	0,512
120	0,477
150	0,445

Percebe-se após demonstrados todos os resultados, que a validação experimental indica pequenos desvios, assim como a aplicação em cálculos dos parâmetros característicos do feixe, quando comparados os resultados obtidos a partir da curva de transmissão medida e os espectros reconstruídos, mostrando assim a metodologia satisfatória.

5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Serão apresentadas neste capítulo as principais conclusões sobre a aplicação da espectrometria indireta utilizando a transformada inversa de Laplace da curva de transmissão, sobre as fluências em energia obtidas e sobre a análise dos parâmetros característicos do feixe obtidos a partir das distribuições espectrais reconstruídas.

5.1. Sobre a espectrometria indireta

Conclui-se após este, que é possível determinar a distribuição espectral de um feixe de raios X por meio da curva de transmissão e das medidas de kV. Fica claro também que o ajuste aos pontos de transmissão só se dá após boas estimativas iniciais, com a consequente reconstrução do espectro mediante $F(E)$. A maior dificuldade do trabalho se deve a reconstruir espectros que contem componentes discretas (raios X característicos) em sua distribuição, o que torna a equação muito mais complexa matematicamente, devido ao parâmetro r (fração de bremsstrahlung). O aparato experimental de baixo custo e simplista mostra uma alternativa viável para obtenção do espectro de fluência.

5.2. Sobre a análise das fluências em energia

As fluências em energia foram obtidas em dois equipamentos de raios X diferentes, já especificados, ambas mostraram diferenças entre fluência em energia a partir do espectro reconstruído e a partir da curva de transmissão. As medidas experimentais realizadas no equipamento Super M 80 Philips não foram realizadas tão minuciosamente quanto no equipamento ISOVOLT Titan E, e como já mencionado, pequenos desvios nas medidas causam erros relativamente grandes nos cálculos.

5.3. Sobre a análise dos parâmetros característicos do feixe

A forma do espectro ($F(E)$) afeta diretamente os parâmetros característicos do feixe, pois a partir de $F(E)$ se obtém a fluência, consequentemente a fluência em energia, fator de kerma dependente da energia e posteriormente todos os parâmetros característicos que aqui foram calculados. Ficam claros os resultados satisfatórios, que se devem a todo trabalho matemático envolvido neste.

De forma simplista pode-se concluir que os espectros aproximados podem ser utilizados para calcular grandezas dosimétricas ou radiométricas obtendo resultados satisfatórios e podem ser úteis na otimização da qualidade da imagem radiográfica e na redução de dose no paciente. A análise da curva de transmissão em comparação com os métodos espectroscópicos é uma boa alternativa uma vez que a curva de transmissão pode ser obtida com comparativa facilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ATTIX, F.H. Introduction to Radiological Physics and Radiation Dosimetry. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc, 1986.
- [2] ARCHER, B.R., and WAGNER, L.K. A Laplace Transform Pair Model for Spectral Reconstruction. Medical Physics, 9(6):844-847, 1982.
- [3] ENDRIZZI, M.; DELOGU, P.; OLIVA, P. Application of an expectation maximization method to the reconstruction of X-ray-tube spectra from transmission data. Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy, 102: 42-47, 2014.
- [4] MALEZAN, A; TOMAL A; ANTONIASSI, M et al. Spectral reconstruction of dental X-ray tubes using Laplace inverse transform of the attenuation curve. Radiation Physics and Chemistry , 116:278-281, 2015.
- [5] DELGADO V. Determination of x-ray spectra from Al attenuation data by imposing a priori physical features of the spectrum: theory and experimental validation. Medical Physics, 36(1):142-148, 2009.
- [6] GLOVER, J.L; CHANTLER, C.T. A method to determine the absolute harmonic content of an X-ray beam using attenuation measurements. X-Ray Spectrometry, 38(6):510-512, 2009.
- [7] MAINARDI, R.T; BONZI, E.V. An indirect method of X-ray spectra measurement by simultaneous attenuations of the scattered beam. Radiation Physics and Chemistry, 77(5):537-544, 2008.
- [8] GUOWEI, Z; JIANPING,C; LI, Z et al. A practical reconstruction method for dual energy computed tomography. Journal of X-Ray Science and Technology, 16(2):67-88, 2008.

- [9] DELGADO, V. Determination of X-ray spectra from attenuation data by imposing a priori and bounded support: theory and experimental validation. Medical Physics, 34(3):994-1006, 2007.
- [10] DELGADO, V. Comparison between measured and predicted attenuation curves of X-ray beams. Medical Physics, 26(10):2183-2189, 1999.
- [11] ARCHER, B.R; WAGNER, L.K; JOHNSTON, D.A et al. Analysis of errors in spectral reconstruction with a Laplace transform pair model. Physics in Medicine and Biology, 30(5):411-418, 1985.
- [12] GREENING, J.R. Fundamentals of radiation dosimetry. New York: Taylor & Francis; 1985.
- [13] GREENING, J.R. The determination of x-ray wavelength distributions from absorption data. Proceedings of the Physical Society. London Sec A, 63(371):1227-1234, 1950.
- [14] SILBERSTEIN, L. Determination of the spectral composition of X-radiation from filtration data . Journal of the Optical Society of America, 22(5): 265-280, 1932.
- [15] JONES, D . E . A . The determination from absorption data of the distribution of X-ray intensity in the continuous X-ray spectrum. The British Journal of Radiology, 13(147): 95–101, 1940.
- [16] BAIRD, L.C. X-Ray Spectra vs Attenuation Data: A Theoretical Analysis. Medical Physics, 8(3):321-323, 1981.
- [17] HUANG, P.H; KASE, K.R; BJARNGARD, B.E. Spectral Characterization of 4 MV Bremsstrahlung by Attenuation Analysis. . Medical Physics, 8(3):368-374, 1981.
- [18] NG, K.P; KWOK, C.S; & TANG, F.H. Monte Carlo Simulation of X Ray Spectra in Mammography. Physics in Medicine and Biology, 45(5):1309-1318, 2000.

- [19] TUCKER, D.M; BARNES, G.T & WU,X. Molybdenum Target X Ray Spectra: A Semiempirical Model. Medical Physics , 18(3):402-407, 1991.
- [20] RUBIO, M. & MAINARD. Determination of X Ray Spectra Including Characteristic Line Intensities From Attenuation Data. Physics in Medicine and Biology, 29(11):1371-1376, 1984.
- [21] DELGADO, V & ORTIZ P. Determination of the Energy Fluence of Diagnostic X Ray Beams From Field Measurements of Attenuation Curves. Medical Physics, 24(7):1089-1095, 1997.
- [22] BUSHBERG, J.T; SEIBERT, J.A; JR , E.M.L & BOONE, J.M. The Essential Physics of Medical Imaging (2ª Edição). Philadelphia, USA: Lippincott Williams & Wilkins, 2001.
- [23] KNOLL, G.F. Radiation Detection and Measurement (3ª Edição). New York: John Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [24] KHAN, F.M. The Physics of Radiation Therapy. Philadelphia, USA: Lippincott Williams & Wilkins, 2003.
- [25] JOHNS, H.E & CUNNINGHAM, J.R. Physics of Radiology (4ª Edição). Charles C Thomas Pub Ltd, 1983.
- [26] INTERNATIONAL COMMISSION ON RADIATION UNITS AND MEASUREMENTS (ICRU): Radiation Quantities and Units. ICRU Report 33, 1980.
- [27] BELLMAN, R. Laplace Transform, The (Series in Modern Applied Mathematics). World Scientific Publishing, 1984.
- [28] STORN, R & PRICE, K. Differential Evolution: A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. Journal of Global Optimization, 11(4) , 341-359, 1997.
- [29] NETO, A.J.S; BECCENERI, J.C & CAMPOS VELHO. Inteligência computacional aplicada a problemas inversos em transferência radiativa. Rio de Janeiro, Brasil: Ed UERJ, 2010.
- [30] NIST. National Institute of Standards and Technology. Disponível em: <<https://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/ComTab/air.html>>.

- [31] NIST. National Institute of Standards and Technology. Disponível em <https://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/ElemTab/z13.html>.
- [32] Mc COLLUM, P.A; BROWN, B.F. Laplace transform tables and theorems. New York: Holt, Rinehart and Winston; 1965.
- [33] DYSON, N.A. X-rays in atomic and nuclear physics (2ª Edição). Cambridge: Cambridge; 1990.
- [34] LEDERER, C.M; SHIRLEY, V.S (Ed.). Table of isotopes (7ª Edição). New York: Wiley; 1978.
- [35] ARCHER, B.R; WAGNER, L.K. Determination of Diagnostic X – Ray Spectra With Characteristic Radiation Using Attenuation Analysis. Medical Physics, 15(4):637-641, 1988.
- [36] HUBBEL, J.H; SELTZER, S.M. Tables of X-Ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients from 1 keV to 20 MeV for elements Z=1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology, US Department of Commerce; 1996.
- [37] ABBASS, H.A ; SARKER, R; NEWTON, C. A pareto-frontier differential evolution approach for multi-objective optimization problems. Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computational, (2001).
- [38] ANKERHOLD, U. Physikalisch – Technische Bundesanstalt Dosimetrie. Catalogue of X ray spectra and their characteristic data. ISO and DIN radiation qualities, therapy and diagnostic radiation qualities, unfiltered X ray spectra, 2000.
- [39] CAMPOS VELHO, H.F. Problemas Inversos: Conceitos Básicos E Aplicações. Curso PI, INPE. Disponível em <http://www.lac.inpe.br/~haroldo/CursoPI/CursoPI.pdf>

APÊNDICE

Conversões utilizadas:

$$\frac{J}{Kg} \rightarrow \frac{keV}{Kg} : 6,242 \cdot 10^{15}$$

$$\frac{J}{Kg} \rightarrow \frac{keV}{g} : 6,242 \cdot 10^{12}$$

$$pGycm^2 \rightarrow \frac{keV}{g} cm^2 : 6,242$$

$$\frac{g}{cm^2} \rightarrow \frac{kg}{m^2} : 10$$