UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

Transições de fase e processos de nucleação no espaço de regras de autômatos celulares

Sandro Martinelli Reia

Ribeirão Preto - SP
2011

SANDRO MARTINELLI REIA

**Transições de fase e processos de nucleação no
espaço de regras de autômatos celulares**

VERSÃO CORRIGIDA

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:

Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador:

Osame Kinouchi Filho

Ribeirão Preto - SP

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES
TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Reia, Sandro Martinelli.

Transições de fase e processos de nucleação no espaço de regras
de autômatos celulares/ Sandro Martinelli Reia; orientador Osame
Kinouchi Filho. Ribeirão Preto, 2011. 113 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física
Aplicada à Medicina e Biologia) - Faculdade de Filosofia, Ciências
e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

1. autômato celular. 2. game of life. 3. transição de fase. 4.
processo de nucleação. 5. aproximação de campo médio.

Nome: REIA, Sandro Martinelli

Título: Transições de fase e processos de nucleação no espaço de regras de autômatos celulares

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora

Prof. Dr. : _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. : _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. : _____ Instituição: _____

Julgamento: _____ Assinatura: _____

AGRADECIMENTOS

Gostaria de aproveitar esse espaço para agradecer a algumas pessoas que contribuíram para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado. Primeiramente, devo agradecer ao professor Osame Kinouchi Filho pela oportunidade de mestrado oferecida. O professor Osame foi uma peça fundamental nesse período de formação científica e, depois de algumas tentativas e alguns erros, os acertos nos fizeram continuar e finalizar esta proposta de pesquisa.

Agradeço ao professor Nelson Augusto Alves pela atenção e pela disposição. Sempre solícito, o professor Nelson apontou a direção correta quando o caminho não estava muito claro. Agradeço ao professor Ubiraci Pereira da Costa Neves pela oportunidade de trabalho conjunto no futuro e pelo auxílio na elaboração do projeto de pesquisa para o doutorado. Gostaria de agradecer ao professor Renato Tinós, pelas opiniões e sugestões no início de nossas pesquisas.

Também gostaria de agradecer aos professores do Instituto de Física de São Carlos, que me forneceram as bases do conhecimento em Física que me acompanharão na minha vida científica. Agradeço aos professores Mauro Copelli e Roberto Nocolau Onody pela atenção e pelas sugestões e correções fornecidas.

Agradeço aos meus amigos pela convivência ao longo desses anos e também pela ajuda fornecida em conversas nos corredores do departamento, no laboratório, na internet, na cantina.

Agradeço à minha avó pela disposição de fornecer as condições necessárias para o avanço da ciência. Sempre animada, preparou inúmeros cafezinhos para evitar o desânimo quando o abatimento nos surpreendia.

Devo agradecer também ao meu irmão. Suas dúvidas de física e matemática sempre terminaram de maneira divertida.

Não posso deixar de agradecer à minha amiga, companheira, namorada, Ari-

adne. Sempre forte e determinada, não me deixou desanimar em algumas etapas do curso de mestrado. Graças à sua companhia, sua vontade e, mais uma vez, sua determinação em resolver os nossos problemas, posso concluir hoje esta dissertação de mestrado.

Finalizo agradecendo aos meus pais pelo suporte financeiro, emocional e moral. Eles me trouxeram à vida, me criaram e também me educaram, sempre chamando minha atenção para ter a disposição necessária para enfrentar os desafios da vida.

Obrigado a todos.

“Eu gosto mesmo é de pão com *mantega*, com muita *mantega*!”

RESUMO

REIA, S. M. **Transições de fase e processos de nucleação no espaço de regras de autômatos celulares.** 113 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2011.

O autômato celular *Game of LIFE* (GL) exibe comportamento coletivo não-trivial (Classe IV de Wolfram) a partir de regras locais simples. Na década de 1990, conjecturou-se que o autômato seria um exemplo de sistema não-conservativo com criticalidade auto-organizada. Nesse trabalho refutamos essa conjectura verificando que o regime transiente para estados absorventes não escala de forma correta para redes grandes. Usando uma aproximação de campo médio com considerações sobre interfaces para a rede quadrada, definimos um parâmetro de controle σ_0^+ relacionado com a razão de ramificação da interface da fase absorvente. A partir da análise de um grande número de autômatos celulares (6144), encontramos uma transição de fase descontínua no espaço de regras dos autômatos celulares totalistas. Também encontramos que o GL é um autômato celular quasi-crítico, com $\sigma_0^+ = 1.006$, ou seja, o GL equivale a um processo de nucleação quasi-crítico. Mostramos que essa quasi-criticalidade é resultado da coexistência e competição entre a fase viva e a fase morta: embora o LIFE esteja destinado à extinção (ao estado absorvente morto), o decaimento é adiado devido a um forte ralentamento crítico.

Palavras-chave: 1. autômato celular. 2. game of life. 3. transição de fase. 4. processo de nucleação. 5. aproximação de campo médio.

ABSTRACT

REIA, S. M. **Phase transitions and nucleation processes in cellular automata rule space.** 113 p. Dissertation (M.Sc.) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2011.

The cellular automaton *Game of LIFE* exhibits non-trivial collective behavior (Wolfram Class IV) from local simple rules. In the 1990s, it was conjectured that the automaton would be an example of self-organized criticality in non-conservative systems. In this work we refute this conjecture by verifying that the transient regime to absorbing states does not scale for large lattice sizes. By using a mean-field approximation with considerations about interfaces in square lattices, we define a control parameter σ_0^+ related to the interfacial absorbing phase branching rate. From the analysis of a large number of cellular automata (6144), we find a discontinuous phase transition in the cellular automata rule space. We also find that LIFE is a quasi-critical cellular automaton, with $\sigma_0^+ = 1.006$, that is, LIFE is a quasi-critical nucleation process. It is shown that this quasi-criticality is a result of coexistence and competition between the living and dead phases: although LIFE is destined to extinction (to the dead absorbing state), this decay is delayed due to a strong critical slowing down.

Key-words: 1. cellular automata. 2. game of life. 3. phase transition. 4. nucleation process. 5. mean-field approximation.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplos de diferentes tipos de vizinhança para CAs unidimensionais e bidimensionais. Em (a) e (b), o espaço é unidimensional com as células centrais pretas e a vizinhança em cinza. Em (c) e (d) vizinhança de von Neumann e Moore, respectivamente, com $r = 1$. Em (e) vizinhança de von Neumann com $r = 2$ e em (f) vizinhança de Moore com $r = 2$	8
1.2	Exemplos dos diferentes tipos de configuração para autômatos unidimensionais. As células em preto são as células vivas (ativas) e as células em branco são as células mortas (inativas).	10
1.3	Ilustração das dezoito configurações diferentes para os autômatos totalistas bidimensionais de dois estados com vizinhança de Moore. . .	11
1.4	Ilustração de autômato celular unidimensional com regra de evolução complexa. Cada linha representa os estados do autômato por instante de tempo. No instante inicial, há apenas uma célula que evolui para formar o padrão espaço-temporal visualizado.	13
1.5	Exemplos de estruturas estáveis no LIFE. Em (a), estrutura fixa (bloco). Em (b) estrutura periódica com período $p = 2$ (oscilador). Em (c), estrutura propagante (espaçonave) com período p , porém apresenta translação espacial após p instantes de tempo.	15
1.6	Ilustração da distribuição das classes de Wolfram no espaço de λ . A complexidade é medida pelo tamanho médio do transiente. O λ_C estaria na borda das Regiões 2 e 3, separando os dois tipos de comportamento, possuindo o valor de $\lambda_C = 0.4$	17

1.7	Estado estacionário, com núcleos estáveis e periódicos, atingido pelo GL após $t = 2000$ iterações em uma rede quadrada de lado $L = 100$. As células no estado 0 (inativas) são representadas pela cor branca e as células no estado 1 (ativas) estão representadas pela cor preta.	20
2.1	Exemplos de mapas de retorno encontrados no espaço de regras dos CAs.	29
2.2	Exemplo ilustrativo da mudança discreta no espaço das regras. A linha separa as duas fases que o sistema pode ocupar. A seta indica o sentido da variação do parâmetro de ordem visando atingir a transição entre as fases mas, como os parâmetros $R[s, h]$ variam discretamente (círculos), a probabilidade de, por acaso, termos uma regra situada exatamente no ponto crítico é nula.	30
2.3	Gráfico que mostra a relação entre ρ_{CA2D} e ρ_{MF} . As regras em torno da reta são aquelas cujo comportamento na rede bidimensional são próximos aos obtidos com a aproximação de MF. As regras fora da reta apresentam comportamento que não pode ser previsto pela aproximação de MF. Os resultados foram obtidos em uma rede de lado $L = 100$, com o número de corridas $M = 100$ e $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	32
2.4	Apresentação esquemática da interface entre células vivas e células mortas: separação entre as regiões com densidade ρ^* (cinza) e com densidade nula (branca).	34
2.5	Classificação das regras de ordem três, segundo aproximação de campo médio. Vemos que λ_{2D} promove a separação desses autômatos nas regiões $\rho' \approx 1$ e $\rho' \approx 0$. O parâmetro de ordem ρ' é a razão entre as densidades obtidas nas simulações dos autômatos na rede bidimensional e pela abordagem de campo médio. Esses resultados foram obtidos com $L = 100$, $M = 100$ e $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$ no instante $t = 2000$	35

2.6	Gráfico da razão ρ_{CA2D}/ρ_{MF} por σ . Há indícios de uma transição entre as fases com $\rho_{CA2D}/\rho_{MF} \approx 1$ e $\rho_{CA2D}/\rho_{MF} \approx 0$ na região de $\sigma = 1$. Nessa simulação, $L = 100$ e $t = 2000$. Média realizada sobre 100 simulações com condições iniciais $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	36
2.7	Transição de fase em σ_0^+ . Média realizada sobre 100 simulações com condições iniciais $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	36
2.8	Comparação das regiões de transição de σ_1^+ e σ_0^+ . Nessa simulação, $L = 100$ e $t = 2000$. Média realizada sobre 100 simulações com condições iniciais $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	37
2.9	Tipos de mapas de retorno que podem ser encontrados no espaço das regras de ordem três. Em (a), mapas das regras $B3/S4$, $B3/S34$ e $B3/S234$. Em (b) $M(\rho)/\rho$ para as mesmas regras. A regra $B3/S4$ só tem ponto fixo nulo, enquanto que a regra $B3/S34$ é a situação limite em que o mapa possui, além do ponto fixo nulo, um ponto fixo não-nulo marginalmente estável (o autômato está muito próximo da bifurcação sela-nó do mapa $M(\rho)$). A regra $B3/S234$ tem dois pontos fixos não-nulos, um instável e outro estável.	38
2.10	Histograma do número de autômatos de ordem três por densidade ρ'	39
3.1	Evolução temporal da densidade do autômato LIFE para tamanhos de rede diferentes. Em (a), número de células vivas e, em (b), densidade de células vivas na rede quadrada de lado L . Média obtida sobre 100 amostras com condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	43
3.2	Dados simulados na rede bidimensional $L = 1600$ e curva de ajuste com os valores $B_1 = 0.28$, $B_2 = 0.15$, $\rho(\infty) = 0.014$ e expoente $\theta = 0.45$. As barras de erro foram omitidas para facilitar a visualização. O ponto t_c , destacado em vermelho, indica o instante em que os resultados simulados deixam de ser ajustados pela função de ajuste $\rho(t)$ dada pela Eq. (3.1).	44
3.3	Curva de $t_c(L)$ em função de diferentes tamanhos de rede L . Os pontos são ajustados por uma curva exponencial (linha).	44

3.4	Evolução temporal da densidade do Game of LIFE para aproximação de campo médio, simulação MF e simulação CA2D. Resultados simulados em uma rede quadrada ($L = 100$) com $M = 100$ condições iniciais diferentes de densidade com densidade $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$. .	45
3.5	Mapa de retorno do Game of LIFE na aproximação de campo médio.	46
3.6	Esquema com ilustração das bacias de atração para os pontos fixos estáveis $\rho^0 = 0$ e $\rho^* = 0.3702 \pm 0.0001$	48
3.7	Bacia de atração do GL. Em (a) e (b), densidade final após $t = 100$ para a simulação CA2D e para simulação MF. Em (c) e (d), densidade final após $t = 500$ iterações.	49
3.8	Bacia de atração do GL para simulações CA2D. Em (a) e (b), densidade final nos instantes $t = 1000$ e $t = 2000$ respectivamente. Em (c) e (d), as estabilidade é alcançada após $t = 8000$ iterações.	50
3.9	Em (a), configuração inicial aleatória em uma rede $L = 100$ com $\rho(0) = 0.502$. Em (b), distribuição do número de vizinhos previsto pela distribuição binomial para a densidade $\rho(0)$ e a medida na rede celular.	53
3.10	Em (a), configuração da rede celular $L = 100$ com $t = 10$ iterações e $\rho(10) = 0.197$. Em (b), as distribuições obtidas pela expressão binomial para as fases Homogênea, Interface, Nula, a medida no LIFE CA2D e a Heterogênea. O ajuste é realizado com os coeficientes $A_{10}^* = 0.34$, $A_{10}^+ = 0.39$ e $A_{10}^0 = 0.27$, com $\Delta = 0.02$. A fase nula está crescendo na rede celular, enquanto que a fase viva tenta resistir. . . .	54
3.11	Em (a), configuração da rede para $L = 100$ no instante $t = 50$. Nesse instante, $\rho(50) = 0.156$. Em (b), as distribuições para cada fase (Homogênea, Interface, Nula), a medida no autômato (CA2D) e a composição das teóricas (Heterogênea). Os coeficientes que promovem o ajuste são: $A_{50}^* = 0.25$, $A_{50}^+ = 0.33$ e $A_{50}^0 = 0.42$, com $\Delta = 0.03$. A presença da fase zero (número de células mortas) aumenta na rede celular.	55

3.12	Em (a), rede celular $L = 100$ no instante $t = 100$, com $\rho(100) = 0.108$. Em (b), distribuição do número de vizinhos. O ajuste é realizado com $A_{100}^* = 0.15$, $A_{100}^+ = 0.29$, $A_{100}^0 = 0.56$, com $\Delta = 0.02$. A presença da fase nula cresce, mas os núcleos vivos continuam resistindo.	56
3.13	Em (a), configuração da rede celular $L = 100$ no instante $t = 500$ com $\rho(500) = 0.094$. Em (b), distribuição do número vizinhos. Ajuste realizado com $A_{500}^* = 0.14$, $A_{500}^+ = 0.22$ e $A_{500}^0 = 0.64$, com $\Delta = 0.02$. A fase nula continua invadindo a fase viva, que se agrupa para não ser extinta.	57
3.14	Em (a), rede celular $L = 100$ no instante $t = 1000$, com $\rho(1000) = 0.039$. Em (b), distribuição do número de vizinhos vivos, com ajuste da fase heterogênea realizado com $A_{1000}^* = 0.01$, $A_{1000}^+ = 0.20$ e $A_{1000}^0 = 0.79$, com $\Delta = 0.04$	58
3.15	Em (a), rede celular $L = 100$ no instante $t = 2000$, com $\rho(2000) = 0.037$. Em (b), distribuição do número de vizinhos, com ajuste da fase heterogênea realizado com $A_{2000}^* = 0.01$, $A_{2000}^+ = 0.17$ e $A_{2000}^0 = 0.82$, com $\Delta = 0.04$. A fase morta domina a rede celular e o processo de nucleação da fase viva termina, gerando estruturas estáveis que conseguem sobreviver.	59
3.16	Coeficientes da distribuição $P_t(h)$ do GL em diferentes instantes de tempo.	60
4.1	Mapa de retorno para um modelo de ferromagneto em temperatura $T > T_c$ gerado pela Eq. (4.2).	63
4.2	Bacias de atração do modelos de ferromagneto em $T \rightarrow \infty$. Em (a), a bacia foi determinada na rede bidimensional, enquanto que em (b) a bacia foi determinada pela simulação MF. Resultados obtidos em uma rede quadrada com lado $L = 100$ após 2000 iterações.	64
4.3	Densidade $\rho(t)$ por t do modelo de ferromagneto em $T > T_c$ em uma rede quadrada de lado $L = 100$. Média realizada sobre 500 evoluções com condições iniciais aleatórias diferentes, obedecendo $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	65

4.4	Distribuição do número de vizinhos h na rede celular bidimensional para o ferromagneto $T > T_c$ após 2000 iterações. A média é realizada sobre 500 condições iniciais aleatórias diferentes em uma rede de lado $L = 100$. O sistema CA2D tem a mesma distribuição de vizinhos $P_{2000}^{CA2D}(h)$ prevista pela abordagem do campo médio no ponto fixo (fase Homogênea). A fase Heterogênea é dominada pela fase Homogênea, com $A_{2000}^* = 0.999$, $A_{2000}^+ = 0.001$, $A_{2000}^0 = 0.000$, sendo $\Delta = 0.002$	66
4.5	Configurações da rede quadrada com $L = 100$ do modelo de ferromagneto em alta temperatura $T > T_c$ em diferentes instantes de tempo.	67
4.6	Mapa de retorno de campo médio gerado pela regra $B5678/S45678$	69
4.7	Bacia de atração do modelos de ferromagneto em temperatura $T = 0$. Em (a), bacia de atração determinada pela simulação CA2D e em (b), bacia de atração determinada pela simulação MF. Os resultados foram obtidos no instante $t = 2000$ em uma rede $L = 100$	70
4.8	Densidade $\rho(t)$ por t do modelo de ferromagneto em temperatura $T = 0$, em uma rede de lado $L = 100$. Média sobre 500 corridas partindo de uma densidade inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	71
4.9	Distribuição do número de vizinhos $P_{2000}(h)$ para o CA “ferromagnético” com $T = 0$. Resultado médio sobre 500 configurações obtidas após 2000 iterações em uma rede quadrada de lado $L = 100$. Os melhores coeficientes de mistura são $A_{2000}^1 = 0.28$, $A_{2000}^+ = 0.44$, $A_{2000}^0 = 0.28$, com desvio da curva encontrada na simulação CA2D $\Delta = 0.23$	72
4.10	Configurações da rede celular $L = 100$ do CA ferromagnético em temperatura $T = 0$ para diferentes instantes de tempo.	73
4.11	Mapa de retorno de campo médio para a regra $B3/S234$	75
4.12	Bacia de atração do modelo de labirinto. Em (a), bacia de atração determinada pela simulação CA2D e em (b), bacia de atração determinada pela simulação MF. Os resultados foram obtidos no instante $t = 2000$ em uma rede $L = 100$	76

4.13	Densidade $\rho(t)$ por t do modelo de labirinto em uma rede $L = 100$ e média sobre 100 evoluções partindo de uma densidade inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	77
4.14	Distribuição do número de vizinhos $P_{2000}(h)$ para a fase tipo labirinto dado pela regra $B3/S234$. Resultado sobre 100 configurações obtidas após 2000 iterações em uma rede $L = 100$. Os coeficientes são $A_{2000}^* = 0.999$, $A_{2000}^+ = 0.000$, $A_{2000}^0 = 0.001$, com $\Delta = 0.338$	77
4.15	Configurações da rede quadrada com lado $L = 100$ do modelo de labirinto em diferentes instantes de tempo.	78
4.16	Mapa de retorno de campo médio para a regra $B2678/S04567$	80
4.17	Bacia de atração da regra $B2456/S04567$. Em (a), densidade final da simulação CA2D após $t = 2000$ iterações. Em (b), densidade final após $t = 2000$ para a simulação MF. Os resultados foram obtidos em uma rede $L = 100$	80
4.18	Densidade de células vivas por t para a regra $B2678/S04567$. Resultados obtidos sobre média realizada em 500 simulações diferentes, em uma rede $L = 100$ e condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	82
4.19	Distribuição do número de vizinhos para a regra $B2678/S04567$. A distribuição de vizinhos CA2D é determinada como uma soma entre as fases Homogênea 1 ($\rho^* = 0.2907$) e Homogênea 2 ($\rho^* = 0.8094$). O melhor ajuste é dado pelos coeficientes $A_{2000}^{1*} = 0.58$, $A_{2000}^+ = 0.34$ e $A_{2000}^{2*} = 0.08$, com erro de ajuste $\Delta = 0.04$. O coeficiente A_{2000}^+ indica a presença da fase de interface, com densidade $\rho^+ = 0.5501$, que é a média das densidades das fases Homogênea 1 e Homogênea 2.	83
4.20	Configurações da rede celular $L = 100$ do autômato $B2678/S04567$ em diferentes instantes de tempo. As regiões mais densas correspondem à fase com densidade $\rho_2^* = 0.8094$ e as regiões menos densas têm densidade $\rho_1^* = 0.2907$. A borda entre essas regiões tem densidade $\rho^+ = 0.5501$	84

LISTA DE TABELAS

1.1	Regra de transição $B3/S23$. Nas colunas nascer e sobreviver estão qual será o estado da célula, no próximo instante de tempo t , de acordo com número de vizinhos vivos que a célula possui, coluna h , e seu estado atual, $s_i = 0$ ou $s_i = 1$	12
3.1	Tabela com os coeficientes da distribuição $P_t(h)$ para o Game of LIFE com condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$	60
4.1	Na primeira coluna, pontos fixos do mapa de retorno da regra $B1357/S02468$. Na segunda coluna, módulo da derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo para determinar sua estabilidade local.	64
4.2	Na primeira coluna, pontos fixos do mapa de retorno da regra do modelo de ferromagneto na temperatura $T = 0$. Na segunda coluna, módulo da derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo para determinar sua estabilidade.	69
4.3	Na primeira coluna, os pontos fixos do mapa de retorno da regra $B3/S234$. Na segunda coluna, derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo.	75
4.4	Na primeira coluna, pontos fixos do mapa de retorno da regra $B2678/S04567$. Na segunda coluna, derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo.	81

LISTA DE ABREVIATURAS

CA	Autômato Celular (<i>Cellular Automaton</i>)
GL	<i>Game of LIFE</i>
SOC	Criticalidade Auto-Organizada (<i>Self-Organized Criticality</i>)
MF	Campo Médio (<i>Mean-Field</i>)
MFI	Campo Médio com Interface (<i>Mean-Field with Interface</i>)
CA2D	Autômato Celular Bidimensional (<i>Cellular Automata 2-Dimensional</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Célula da rede
A_t^*	Coeficiente da fase homogênea
A_t^{1*}	Coeficiente da fase homogênea 1
A_t^{2*}	Coeficiente da fase homogênea 2
A_t^+	Coeficiente da fase de interface
A_t^0	Coeficiente da fase nula
B	Célula da rede
B_1	Constante
B_2	Constante
C_h^8	Coeficiente binomial
F	Função de transição de estado da rede
K	Conjunto de estados
L	Lado da rede quadrada
M	Corridas (<i>runs</i>)
$M(\rho)$	Mapa de retorno de campo médio
M_ρ	Derivada do mapa de retorno em função da densidade ρ
N	Número de células na rede

$P_t^*(h)$	Distribuição de vizinhos da fase homogênea
$P_t^+(h)$	Distribuição de vizinhos da fase de interface
$P_t^0(h)$	Distribuição de vizinhos da fase nula
$P_t(s, h)$	Probabilidade do sítio estar no estado s e possuir h vizinhos no instante t
$P_t(s)$	Probabilidade do sítio estar no estado s no instante t
$P_t(h)$	Probabilidade do sítio possuir h vizinhos
R	Regra de transição
$R[s, h]$	Regra de transição totalista (depende de s e de h)
$\mathbf{S}(t)$	Estado da rede no instante t
T	Temperatura
T_c	Temperatura crítica
V	Vizinhança da célula i
Z	Espaço discreto
d	Dimensão da rede
$e(t)$	Desvio padrão
$g(h)$	Degenerescência
h	Número de vizinhos vivos
k_n	Elemento do conjunto de estados
n	Número de estados
p	Período
r	Raio de interação
$\mathbf{s}$	Célula da rede
$s_i(t)$	Estado da célula i no instante t

$\mathbf{v}$	Célula vizinha de $\mathbf{s}$
t	Instante de tempo
t_c	Tempo crítico
Δ	Erro (diferença entre $P(h, t)$ e $P_{CA2D}(h, t)$)
Ω	Autômato celular
$\delta(t)$	Diferença entre densidade e ponto fixo
λ	Parâmetro de classificação
λ_{2D}	Parâmetro de classificação aplicado na rede quadrada
θ	Expoente dinâmico
ρ	Densidade
$\langle \rho(t) \rangle$	Densidade média
ρ^*	Ponto fixo
ρ_{CA2D}	Densidade da simulação na rede quadrada
ρ_{MF}	Densidade da com simulação de campo médio
ρ'	Razão entre densidades ρ_{CA2D} e ρ_{MF}
ρ^+	Densidade de interface
ρ^A	Densidade da vizinhança de A
ρ^B	Densidade da vizinhança de B
ρ^0	Ponto fixo nulo (fase $\mathbf{S} = 0$)
ρ^I	Ponto fixo instável
ρ^1	Ponto fixo da fase $\mathbf{S} = 1$
ρ_1^*	Ponto fixo estável 1
ρ_2^*	Ponto fixo estável 2

ρ_{min}	Densidade mínima
ρ_{max}	Densidade máxima
σ	Razão de ramificação
σ_1^+	Razão de ramificação da fase ativa
σ_0^+	Razão de ramificação da fase absorvente

SUMÁRIO

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Abreviaturas	xvi
Lista de Símbolos	xvii
1 Introdução	3
1.1 Introdução	3
1.2 Autômatos celulares	5
1.2.1 Definição	7
1.2.2 Vizinhanças	7
1.2.3 Condições de contorno	7
1.3 Espaço das Regras de Transição	9
1.3.1 Autômatos deterministas	10
1.3.2 Nomenclatura	11
1.3.3 Classes de comportamento de Wolfram	12
1.4 Game of LIFE	14
1.4.1 Game of LIFE e criticalidade auto-organizada	15
1.5 O parâmetro λ de Langton	16
1.6 Processos de nucleação	19
1.7 Aproximação de campo médio	19
1.8 Objetivos	21

2	Aproximação MFI e transições de fase	24
2.1	Densidade de sítios ativos $\rho(t)$	24
2.2	Aproximação de campo médio em autômatos celulares	25
2.3	Mapa de retorno de campo médio	27
2.4	Relação entre ρ_{CA2D} e ρ_{MF} de ordem três	31
2.5	Razão de ramificação σ para fases e interfaces	31
2.6	Conclusão	39
3	Aproximação MFI no Game of LIFE	41
3.1	Dinâmica quasi-crítica no GL	41
3.2	Aproximação MFI	42
3.3	Conclusão	60
4	Resultados de MFI para autômatos bidimensionais	62
4.1	Regra $B1357/S02468$ (modelo de ferromagneto com $T > T_c$)	62
4.2	Regra $B5678/S45678$ (modelo de ferromagneto com $T = 0$)	68
4.3	Regra $B3/S234$ (fase tipo “labirinto”)	74
4.4	Regra $B2678/S04567$ (coexistência de fases)	79
4.5	Conclusão	85
5	Comentários finais e perspectivas	86
5.1	Comentários finais e perspectivas	86
	Referências Bibliográficas	89

INTRODUÇÃO

Introduzimos o conceito de autômato celular e discutimos a multiplicidade de modelos que podem ser construídos com base em suas características. Realizamos uma revisão bibliográfica dos estudos sobre os autômatos, considerando o Game of LIFE em especial. O capítulo é encerrado com a apresentação dos objetivos e da organização desta dissertação.

1.1 Introdução

As Ciências Físicas foram criadas para satisfazer a necessidade do homem de compreender cientificamente os comportamentos naturais do universo ao seu redor. Sistematizando relações de causa e efeito, cientistas, desde a antiguidade, procuram leis na forma de expressões matemáticas para descrição, explicação e previsão dos fenômenos naturais.

Nascido em Pisa em 1564, Galileu Galilei recebeu formação aristotélica e procurou verificar experimentalmente a validade das ideias de Aristóteles. Esse foi o primeiro passo na formalização de um método de investigação científica, que dominaria seu modo de fazer ciência, e foi divulgado através das publicações de seus livros, como “Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano” (1632) [Galilei, 2011] e “Argumentos e demonstrações matemáticas em torno de duas novas ciências concernentes à mecânica e aos movimentos locais” (1638) [Galilei, 2012], por exemplo.

No ano da morte de Galileu (1642), nasce Isaac Newton. Sintetizando as ideias

e observações dos cientistas que o precederam, Newton formula as três leis da Mecânica em sua obra “Principia - Princípios matemáticos de filosofia natural” de 1687 [Newton, 2002, Newton, 2008]. A Mecânica, após as contribuições de Galileu e Newton, foi o primeiro ramo da Física a se desenvolver como Ciência Exata e, juntamente com as leis da eletricidade e magnetismo de James Clerk Maxwell [Maxwell, 1954], é uma das duas teorias básicas da Física Clássica.

Apesar do sucesso das aplicações das leis de Newton, o desenvolvimento da Ciência levou os cientistas ao aperfeiçoamento e à criação de novas teorias. Partindo da Mecânica Newtoniana, por exemplo, Joseph Louis Lagrange reformula as leis de Newton convenientemente para eliminar a necessidade do cálculo da força em partes isoladas do sistema. Contudo, a Mecânica Lagrangeana não introduz novos princípios físicos à Mecânica Clássica, apenas a trata de modo mais sofisticado [Hand & Finch, 1998].

Nesse contexto, a Mecânica Estatística surge da inviabilidade da aplicação das leis de Newton para determinar a equação de movimento de cada partícula de um sistema de muitas partículas (da ordem do número de Avogadro, $6.02 \cdot 10^{23}$). Essa abordagem não se importa com os estados individuais de cada partícula e lida com quantidades médias intensivas como pressão, temperatura e potencial químico e quantidades macroscópicas extensivas como volume, entropia e número de partículas [McQuarrie, 1976].

Em sistemas complexos, a compreensão e a previsão de fenômenos macroscópicos partindo da descrição de propriedades microscópicas são alcançadas com o uso de modelos e simulações computacionais. Em meados do século XX surge a Física Computacional, que desenvolve técnicas de programação para utilização dos computadores digitais como ferramentas de pesquisa, afinal, como diz Paul DeVries, *“The simple truth is that the computer now permeates our society and has changed the way we think about many things, including science in general and physics in particular”* [DeVries, 1994].

Um desses modelos são os autômatos celulares (*cellular automata*, CAs). Os CAs são sistemas dinâmicos discretos utilizados como ferramentas computacionais, alternativas ao uso de equações diferenciais [Toffoli, 1984], na simulação de fenômenos como terremotos, incêndios em florestas, epidemias, crescimento de tumores,

atividade cardíaca, avalanches neuronais, vida artificial, meios excitáveis e outros [Chopard & Droz, 1998, Marro & Dickman, 1999, Barone, 2003].

Cada CA é especificado por uma regra de transição R que governa sua evolução. Fenômenos como auto-organização, comportamento complexo e transições de fase são encontrados no espaço de regras dos autômatos celulares [Li et al., 1990] e os autômatos com comportamentos semelhantes são agrupados em classes de universalidade [Wolfram, 1984b].

1.2 Autômatos celulares

Um autômato celular é um sistema em que o espaço e o tempo são discretos. O espaço é formado por uma rede de células adjacentes, dispostas em d -dimensões, em que cada célula pode assumir um conjunto finito de estados. Os CAs foram criados em 1948 quando John von Neumann, desejando sintetizar um conjunto de interações locais para a evolução de formas complexas de organização (essenciais para vida), seguiu sugestão de Stanislaw Ulam e desenvolveu seu modelo em uma rede celular [Gauci, 2008, von Neumann, 1995, von Neumann, 1951].

De acordo com Ilachinski [Ilachinski, 2001], os CAs clássicos possuem cinco características:

- **Rede discreta de células:** o espaço é formado por uma rede d -dimensional de células;
- **Homogeneidade:** todas as células são equivalentes;
- **Estados discretos:** cada célula assume um estado de um conjunto finito de estados discretos;
- **Interações locais:** cada célula interage apenas com células que estão em sua vizinhança local;
- **Dinâmica discreta:** todas as células da rede evoluem, em cada instante de tempo, simultaneamente (dinâmica em paralelo).

Assim, os CAs evoluem discretamente e, em cada iteração, a alteração dos estados é determinada de acordo com condições específicas explícitas nas chama-

das regras de transição. As regras de transição determinam o estado da célula $s_i(t+1)$ e dependem do estado da célula $s_i(t)$ e dos estados das células vizinhas $\{s_j(t)\}_V$, que constituem a vizinhança V , caracterizando univocamente cada autômato celular¹. Basicamente, uma regra é uma função F que atua sobre o estado $\mathbf{S}(t) = \{s_1(t), s_2(t), s_3(t), \dots, s_N(t)\}$ da rede, com N células, produzindo o estado $\mathbf{S}(t+1)$:

$$\mathbf{S}(t+1) = F(\mathbf{S}(t)). \quad (1.1)$$

Especificamente, a evolução de cada célula pode ser dada por:

$$s_i(t+1) = R[s_i(t), \{s_j(t)\}_V], \quad (1.2)$$

sendo R a regra de transição e $\{s_j(t)\}_V$ o conjunto de células vizinhas que formam a vizinhança V .

No caso de regras totalistas, o estado da célula no próximo instante de tempo não depende da configuração exata $\{s_j\}_V$ de seus vizinhos, mas apenas do número total de células vivas na vizinhança V , que define o número de vizinhos vivos h . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} R &= R[s, h], \\ s_i(t+1) &= R[s_i(t), h_i(t)], \end{aligned} \quad (1.3)$$

em que a regra de transição $R[s, h]$ depende do estado atual da célula e do seu número de vizinhos vivos h , sendo um caso particular da Eq. (1.2).

As características acima são referentes às características clássicas de CAs. Na atualidade, há mais flexibilidade na definição do conceito de autômato celular. Os CAs passaram a admitir uma variedade maior na construção da vizinhança, usando-se novos tipos de redes (complexas) em que o número de vizinhos não é homogêneo, e nos tipos de regras de transição, que podem ser deterministas ou probabilistas.

¹Podemos ter autômatos com regras que não dependem do estado atual da célula $s_i(t)$. Como esses autômatos não são muito encontrados, restringimos nossa descrição aos CAs com regras que dependem do estado atual da célula $s_i(t)$.

1.2.1 Definição

Um autômato celular d -dimensional Ω é definido [Weimar, 1998] por uma quádrupla (Z^d, K, V, F) , em que:

- Z^d representa o espaço discreto com d dimensões. Cada elemento desse espaço é chamado de célula;
- K é o conjunto finito de estados possíveis para cada célula, tal que $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, e $n = |K|$;
- V é um subconjunto finito de Z^d chamado vizinhança de Ω , com $\nu = |V|$ e h sendo o número de células vivas em V , tal que $\forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{s} \in Z^d : \mathbf{v} + \mathbf{s} \in Z^d$;
- $F : K^{\nu+1} \rightarrow K$, é a função de transição do autômato Ω .

1.2.2 Vizinhanças

Há muitas possibilidades para a construção da vizinhança V de um CA. Alguns tipos de vizinhança podem ser visualizados na Figura 1.1. Observamos que nesses tipos de vizinhança o caráter local das interações é preservado e pode ser controlado pelo raio de interação r .

Nos CAs em rede quadrada, os tipos de vizinhança mais comuns são a vizinhança de Moore e a vizinhança de von Neumann (Figura 1.1). No entanto, os vizinhos também podem ser obtidos por meio de sorteio aleatório. Nesse caso, para cada célula da rede são sorteadas aleatoriamente ν células que formam sua vizinhança V , que pode ser do tipo:

- **quenched (temperada)**: para cada célula é realizado um único sorteio dos ν vizinhos aleatórios, mantidos fixos durante toda a simulação;
- **annealed (recozida)**: em cada iteração sorteiavam-se ν vizinhos aleatórios diferentes para cada célula.

1.2.3 Condições de contorno

A rede celular de tamanho L é limitada espacialmente. Consequentemente, a dinâmica de evolução pode forçar o sistema de autômatos a interagir com os limites

Figura 1.1: Exemplos de diferentes tipos de vizinhança para CAs unidimensionais e bidimensionais. Em (a) e (b), o espaço é unidimensional com as células centrais pretas e a vizinhança em cinza. Em (c) e (d) vizinhança de von Neumann e Moore, respectivamente, com $r = 1$. Em (e) vizinhança de von Neumann com $r = 2$ e em (f) vizinhança de Moore com $r = 2$.

(bordas) da rede e, desse modo, precisamos definir as condições que regulam esses tipos de interações. Há diversas maneiras de se trabalhar com as bordas da rede, sendo que as mais comuns são:

- **contorno aberto:** a atividade encontra, nas bordas da rede, uma parede de células com estado fixo que não é afetado por seus vizinhos;
- **contorno fechado**²: a rede tem suas extremidades conectadas, formando uma superfície toroidal na qual a atividade pode se propagar livremente;
- **contorno “ilimitado”:** apenas a região central da rede é ocupada inicialmente e a dinâmica é observada até que as células encontrem as bordas do reticulado.

1.3 Espaço das Regras de Transição

A regra de transição determina a dinâmica de evolução de cada CA: a grande variedade de modelos encontrados na literatura que utilizam os CAs exemplificam a diversidade de comportamentos que as regras podem gerar. As regras podem ser classificadas de acordo com a dependência da vizinhança e de acordo com a dinâmica de evolução.

A dependência da vizinhança pode ser dos tipos:

- **não-totalista:** a regra de transição R depende da configuração da vizinhança V ;
- **totalista:** a regra de transição R depende apenas do número total de células vivas h na vizinhança V .

Exemplos de CAs com regras de transição não-totalistas podem ser encontrados em [Wolfram, 1983], trabalho em que Wolfram explora as regras unidimensionais. A Figura 1.2 mostra os tipos de arranjos diferentes, para $n = 2$, que podem ser obtidos nos CAs unidimensionais com $r = 1$. Com essas condições, o espaço será constituído por $2^{2^3} = 256$ regras diferentes: a vizinhança e a célula formam um conjunto de três células e, como cada célula tem um dentre dois estados, teremos

²Também conhecido como condições periódicas de contorno

Figura 1.2: Exemplos dos diferentes tipos de configuração para autômatos unidimensionais. As células em preto são as células vivas (ativas) e as células em branco são as células mortas (inativas).

oito arranjos diferentes que, por sua vez, podem evoluir para um dentre os dois estados possíveis.

No entanto, o tipo de regra mais comum é a regra totalista. Nessa dissertação, todas as regras estudadas são desse tipo.

A dinâmica de evolução pode ser classificada como:

- **determinista:** a regra de transição R é determinista se, para a mesma configuração em t , é determinado sempre o mesmo estado em $(t + 1)$;
- **probabilista:** a regra de transição R é probabilista se, para a mesma configuração em t , o estado no instante $(t + 1)$ é determinado de acordo com uma distribuição de probabilidades.

Com a classificação da dinâmica de evolução e a determinação do tipo de relação com a vizinhança, podemos avançar na definição de quais os tipos de regras que desejamos estudar: para um autômato Ω , precisamos definir ainda sua dimensão d e o seu número de estados n .

1.3.1 Autômatos deterministas

Concentraremos nossa atenção no estudo dos autômatos deterministas e bidimensionais com dois estados acessíveis para cada célula ($n = 2$). Os dois estados serão os estados zero e um, que podem ser interpretados como:

- **estado zero (0):** a célula é considerada morta (ou inativa);
- **estado um (1):** a célula é considerada viva (ou ativa).

Nessas condições, podemos determinar o número total de regras de transição diferentes que podem ser formadas. As dezoito configurações diferentes que podem ser formadas, para um autômato totalista, entre célula e vizinhança, considerando

Figura 1.3: Ilustração das dezoito configurações diferentes para os autômatos totalistas bidimensionais de dois estados com vizinhança de Moore.

a vizinhança de Moore, estão ilustradas na Figura 1.3. Como cada configuração conduzirá, no próximo instante de tempo, para um dos dois estados acessíveis, há o total de $2^{18} = 262144$ regras diferentes. As 262144 dão origem a um espaço de regras $\mathfrak{R}_\Omega$ que contém toda regra determinista, bidimensional, totalista e de dois estados.

1.3.2 Nomenclatura

Para identificar cada regra de transição, utilizamos a nomenclatura

$$B(\text{vizinhos para nascer})/S(\text{vizinhos para permanecer vivo}). \quad (1.4)$$

A relação acima contém todas as informações necessárias para a evolução do CA. Por exemplo, para a regra de transição $B3/S23$, é apresentada a seguinte interpretação:

- $B3$: uma célula morta ficará viva no próximo instante de tempo se possuir três vizinhos vivos;
- $S23$: uma célula viva permanecerá viva no próximo instante de tempo se possuir dois ou três vizinhos vivos;

em qualquer outra condição, a célula estará morta no próximo instante de tempo.

A regra de transição R , que determina o estado da célula no próximo instante de tempo, é encontrada fazendo

	$s_i = 0$	$s_i = 1$
h	nascer	sobreviver
0	0	0
1	0	0
2	0	1
3	1	1
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

Tabela 1.1: Regra de transição $B3/S23$. Nas colunas nascer e sobreviver estão qual será o estado da célula, no próximo instante de tempo t , de acordo com número de vizinhos vivos que a célula possui, coluna h , e seu estado atual, $s_i = 0$ ou $s_i = 1$.

$$B3 \leftrightarrow R[0, 3] = 1,$$

$$S23 \leftrightarrow R[1, 2] = R[1, 3] = 1.$$

Essas informações estão contidas na Tabela 1.1, que mostra os valores da regra de transição $R[s, h]$ para todo s e todo h . Esses valores para $R[s, h]$ determinarão o estado da célula $s_i(t)$ no próximo instante de tempo, pois $s_i(t+1) = R[s_i(t), h_i(t)]$, como definido na Eq. 1.3.

1.3.3 Classes de comportamento de Wolfram

Para observar a dinâmica de comportamento dos CAs unidimensionais, Wolfram realizou, nos anos 80, um estudo sistemático desses autômatos [Wolfram, 1984a, Wolfram, 1986] e encontrou evidências de comportamento não-trivial exibidos por algumas regras, como ilustrado na Figura 1.4 extraída de [Wolfram, 1983]. Seus estudos resultaram na classificação dos CAs em quatro classes básicas de universalidade [Wolfram, 1984b]:

Figura 1.4: Ilustração de autômato celular unidimensional com regra de evolução complexa. Cada linha representa os estados do autômato por instante de tempo. No instante inicial, há apenas uma célula que evolui para formar o padrão espaço-temporal visualizado.

Classe I: estado fixo. O autômato evolui rapidamente para um estado homogêneo estacionário;

Classe II: estados estáveis com estruturas periódicas. As regras geram configurações periódicas;

Classe III: comportamento caótico. O autômato gera padrões sem período definido no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$);

Classe IV: comportamento complexo. O sistema apresenta estruturas propagantes e transientes muito longos.

Os comportamentos dessa divisão de classes são semelhantes aos comportamentos encontrados em sistemas dinâmicos, onde há pontos fixos (*Classe I*), ciclos fechados (*Classe II*) e comportamentos caóticos associados com atratores (*Classe III*). No entanto, os autômatos de *Classe IV* não encontram equivalente direto na teoria dos sistemas dinâmicos [Wolfram, 1985].

Considera-se que as três primeiras classes não apresentam comportamentos interessantes. Suas configurações espaço-temporais exibem uma estrutura repetitiva ou completamente aleatória, sem o discernimento de nenhum padrão [Li et al., 1990]. II e Yu afirmam, em [II & Yu, 1988], que nem mesmo é possível fazer uma distinção entre as classes *I*, *II* e *III*. No entanto, os sistemas *Classe IV* apresentam emergência

de comportamento complexo (surgimento de comportamento coletivo a partir de regras de interação locais simples) e não são confundidos com os sistemas de nenhuma outra classe [Chaté & Manneville, 1990].

1.4 Game of LIFE

Um exemplo de autômato não-trivial (*Classe IV* de Wolfram) é o autômato bidimensional *Game of LIFE* (GL) [Berlekamp et al., 1982]. O GL forma espontaneamente estruturas características que emergem de uma condição inicial aleatória: de um tipo de "sopa primordial", há formação de estruturas estáveis ou cíclicas e algumas que são capazes de propagar informação pela rede celular, como os "*gliders*".

Na década de 1970, o LIFE tornou-se largamente conhecido pelo público científico geral. Inventado por John Horton Conway em 1968 e popularizado por Martin Gardner em um artigo na *Scientific American* [Gardner, 1970], o LIFE é um exemplo de sistema com auto-organização e comportamento complexo resultantes da atuação de regras locais simples. O GL é um CA binário, convencionalmente descrito pelos estados celulares $s = 0$ (morto) e $s = 1$ (vivo), e cada célula possui oito células vizinhas (vizinhança de Moore). Sua regra de transição, $B3/S23$, é tradicionalmente enunciada da seguinte maneira:

- **nascimento:** uma célula morta no instante t estará viva no instante $(t + 1)$ apenas se exatamente três dos seus oito vizinhos estiverem vivos no instante t ;
- **morte por superpopulação:** uma célula viva no instante t que possui quatro ou mais vizinhos vivos em sua vizinhança morre no instante $(t + 1)$;
- **morte por solidão:** uma célula viva que possui apenas um vizinho vivo no instante t morre no instante $(t + 1)$;
- **sobrevivência:** uma célula viva no instante t permanecerá viva no instante $(t + 1)$ se possui dois ou três vizinhos vivos.

Estudando o autômato, Conway observou que a evolução do GL dá origem a diferentes tipos de padrões na rede celular. Esses padrões foram classificados como:

Figura 1.5: Exemplos de estruturas estáveis no LIFE. Em (a), estrutura fixa (bloco). Em (b) estrutura periódica com período $p = 2$ (oscilador). Em (c), estrutura propagante (espaçonave) com período p , porém apresenta translação espacial após p instantes de tempo.

- Blocos (*still life*): padrões estáticos que não mudam no tempo, com período $p = 1$;
- Oscilador (*oscillator*): estruturas periódicas com período $p > 1$;
- Espaçonave (*spaceship*): estruturas que se propagam na rede celular - ocorre a repetição do padrão, com deslocamento espacial, após período $p > 1$.

Exemplos dessas estruturas podem ser visualizados na Figura 1.5.

1.4.1 Game of LIFE e criticalidade auto-organizada

O conceito de criticalidade auto-organizada (*self-organized criticality*, SOC) foi criado para descrever a aparente tendência de sistemas conservativos atingirem naturalmente estados críticos. Nesses estados críticos, o sistema é altamente sensível à pequenas perturbações, que podem provocar reações de todos os tamanhos. Assim, o fenômeno SOC é um mecanismo geral para o surgimento de estruturas sem escala característica, com possíveis aplicações em terremotos, cosmologia, turbulência, biologia e economia [Bak et al., 1987, Jensen, 1998, Olami et al., 1992].

Em um artigo na revista *Nature* [Bak et al., 1989], Bak, Chen e Creutz conjecturaram que o LIFE seria um exemplo de sistema que apresenta criticalidade auto-organizada, sinalizada pela presença de uma distribuição de avalanches com invariância de escala (em forma de lei de potência), mesmo sendo um sistema sem nenhuma grandeza conservada. Seus resultados foram encontrados em uma rede quadrada de lado $L = 150$ com condição de contorno aberta e, segundo Bak *et al.*, não deveriam ser afetados pela condição de contorno escolhida.

Esta hipótese foi contestada por Bennet e Bourzutschky na mesma revista [Bennet & Bourzutschky, 1991]. Bennet e Bourzutschky, usando redes de lado $L \leq 1024$ com condições de contorno fechada, sugeriram que a distribuição encontrada em [Bak et al., 1989] seria um artefato dos pequenos tamanhos de rede explorados e que, em escalas maiores, há saturação do tempo máximo t_{max} de duração da avalanche³. Esses resultados, corroborados por Garcia *et al.* em [Garcia et al., 1993], sugerem que o GL seria subcrítico.

Bak [Bak, 1992] e Alstrøm e Leão [Alstrøm & Leão, 1994], usando redes com condição de contorno aberta e, respectivamente, de lados $L \leq 512$ e $L \leq 1024$, mostraram que não há evidência da saturação encontrada por Bennet e Bourzutschky para o GL nestas condições. Pouco depois, Hemmingsson [Hemmingsson, 1995] e Blok [Blok, 1995] buscaram explicar a interferência das condições de contorno na determinação das medidas estatísticas realizadas até então, e concordaram com Bennet e Bourzutschky na afirmação de que o GL seria levemente subcrítico. Ainda, de acordo com Blok, os resultados para ambas as condições de contorno mostram que o LIFE seria subcrítico, mas a saturação nas redes com condições de contorno abertas só seria observada para L maiores que os utilizados em [Alstrøm & Leão, 1994].

1.5 O parâmetro λ de Langton

Langton iniciou seus estudos investigando a auto-reprodução em autômatos celulares [Langton, 1984]. Mais tarde, assumindo que os CAs poderiam interagir como as biomoléculas primordiais interagem, ele procurou e emergência de vida artificial na rede celular [Langton, 1986].

Introduzindo o parâmetro λ , Langton tenta classificar cada regra de transição R em uma das classes de complexidade propostas por Wolfram. O parâmetro λ pode ser assim enunciado:

$$\lambda \equiv \frac{\text{número de configurações que produzem vivos}}{\text{número total de configurações}}, \quad (1.5)$$

com $\lambda \in [0, 1]$, sendo $\lambda = 0$ quando nenhuma configuração gera estado vivo (todas as

³O tempo t_{max} , que depende do tamanho da rede L , representa a duração da maior avalanche que não é afetada por efeitos de borda e tamanho finito.

Figura 1.6: Ilustração da distribuição das classes de Wolfram no espaço de λ . A complexidade é medida pelo tamanho médio do transiente. O λ_C estaria na borda das Regiões 2 e 3, separando os dois tipos de comportamento, possuindo o valor de $\lambda_C = 0.4$.

células da rede permanecem mortas) e $\lambda = 1$ quando todas as configurações geram estados vivos.

Com a introdução de λ , o espaço de regras foi dividido por Langton em três regiões [Langton, 1986]:

- **Região 1 (Quiescente):** $0.0 < \lambda < 0.2$. A atividade da rede tende a estados absorventes de período $p = 1$;
- **Região 2 (Balanceada):** $0.2 < \lambda < 0.4$. A atividade gera estruturas periódicas, fixas e propagantes ($p > 1$).
- **Região 3 (Caótica):** $0.4 < \lambda < 1.0$. A atividade tende a se tornar caótica, ou seja, o período cresce exponencialmente com o tamanho de rede N .

A classificação das regras pelo índice λ de Langton conduz a uma parametrização das classes de comportamento de Wolfram. A *Classe I* e a *Classe II* constituem uma fase ordenada, enquanto a *Classe III* uma fase desordenada. A *Classe IV* é a única com longo transiente, estruturas propagantes e grande comprimento de correlação, e está localizada entre as duas fases, como pode ser visualizado na Figura 1.6, extraída e adaptada de [Langton, 1990].

Para o caso de regras totalistas com ν vizinhos, temos que o parâmetro λ (Eq. 1.5) é traduzido por nós na seguinte expressão:

$$\lambda_{2D} = \frac{\sum_{s=0}^1 \sum_{h=0}^{\nu} g(h) R[s, h]}{\sum_{s=0}^1 \sum_{h=0}^{\nu} g(h)}, \quad (1.6)$$

sendo o primeiro somatório do numerador referente aos estados da rede $s = (0, 1)$ e o segundo referente ao número de vizinhos vivos h . O somatório do número de estados aparece na expressão porque a regra de transição depende do estado atual s da célula.

Na Eq.(1.6), aparece a função $g(h)$. Essa função é uma medida da degenerescência (número de maneiras diferentes que as células podem estar dispostas) de cada configuração. Como estamos interessados nas regras totalistas, a degenerescência $g(h)$ é função do número de vizinhos vivos h , sendo obtida pelo coeficiente binomial C_h^{ν} , expresso como:

$$g(h) = C_h^{\nu} = \frac{\nu!}{h!(\nu - h)!}. \quad (1.7)$$

Como exemplo, vamos calcular o λ_{2D} do GL. Usando-se $\nu = 8$ para a vizinhança de Moore, que é o tipo de vizinhança utilizada no Game of LIFE, obtemos:

$$g(h) = C_h^8 = \frac{8!}{h!(8 - h)!}. \quad (1.8)$$

A regra do GL é não-nula apenas para $R[0, 3]$, $R[1, 2]$ e $R[1, 3]$. Desse modo, a Eq. (1.6) é escrita da seguinte maneira:

$$\lambda_{2DGL} = \frac{g(3) + g(2) + g(1)}{2 \sum_{h=0}^8 g(h)}$$

$$\lambda_{2DGL} = \frac{140}{512} = 0.273. \quad (1.9)$$

Este valor coloca o GL na Região 2 (Balanceada). Essa é uma condição necessária, mas não suficiente, para o surgimento comportamento complexo (com transiente longo, estruturas propagantes, etc.).

1.6 Processos de nucleação

Processos de nucleação são observados em transições de fase de primeira ordem. Em fenômenos de condensação, por exemplo, moléculas livres colidindo continuamente umas com as outras ficam ocasionalmente “ligadas”, formando núcleos. Esses núcleos podem, também, perder moléculas individuais e apresentar flutuações entre crescimento e decaimento.

O processo normalmente é catalisado por superfícies facilitadoras como grãos de poeira, pólen, cristais de sal, esporos e micro-organismos. Exemplificando o fenômeno pelo processo de formação de nuvens [Twomey, 1980], temos que, quando a fase vapor é termodinamicamente estável em relação à fase condensada, a taxa de crescimento dos núcleos é negativa e eles tendem a se desfazer em moléculas individuais. No entanto, se acontece o contrário, a fase condensada é estável, a taxa de crescimento é positiva e há a formação e o crescimento de núcleos de moléculas ligadas. Na região de coexistência de fases, a transição para a fase mais estável é feita pela nucleação catalisada pelas superfícies descritas acima.

Alguns CAs podem ser entendidos em termos do processo de nucleação quando há formação de núcleos ao longo da dinâmica de evolução: os núcleos aumentam e diminuem até atingirem um estado estacionário. Para o Game of LIFE, por exemplo, partindo de uma condição em que a densidade inicial $\rho(0) \in [0.07, 0.75]$, a densidade estacionária $\rho(t \rightarrow \infty) \approx 0.03$ é atingida com a presença de núcleos na rede (Figura 1.7).

1.7 Aproximação de campo médio

Há um número finito de regras de evolução para os autômatos deterministas. Essas regras formam um espaço de regras $\mathfrak{R}_\Omega$ de autômatos celulares. Com seu parâmetro λ , Langton [Langton, 1986] tentou parametrizar este espaço discreto buscando classificar os autômatos quantitativamente e verificar fenômenos críticos [Langton, 1990, Li et al., 1990]. Aproximações de campo médio foram introduzidas para determinar a ordem e a largura da região crítica na transição de fase [Wootters & Langton, 1990, McIntosh, 1990]. Essas aproximações, que estimam a densidade de células ativas em função do parâmetro λ de Langton, conduzem a re-

Figura 1.7: Estado estacionário, com núcleos estáveis e periódicos, atingido pelo GL após $t = 2000$ iterações em uma rede quadrada de lado $L = 100$. As células no estado 0 (inativas) são representadas pela cor branca e as células no estado 1 (ativas) estão representadas pela cor preta.

sultados relativamente satisfatórios apenas no caso em que os autômatos têm muitos estados ou muitos vizinhos⁴.

Um outro tipo de aproximação de campo médio considera a densidade de células ativas $\rho(t)$ como probabilidade de encontrar uma célula viva e determina um mapa de retorno de campo médio $M(\rho(t))$ para cada autômato celular. No entanto, esse tipo de abordagem faz previsões de densidade estacionária para o GL diferente dos resultados encontrados nas simulações em redes bidimensionais [Gutowitz & Victor, 1987, Gutowitz & Victor, 1989, Blok, 1995], o que inviabilizou sua aplicação na descrição do comportamento dos CAs.

Nos próximos capítulos, nossos resultados serão identificados como:

- **Aproximação MF:** resultados analíticos obtidos pela abordagem de campo médio, através da iteração dos mapas de retorno;
- **Aproximação MFI:** abordagem de fenômenos de nucleação em redes $2D$ onde se usam as fases de MF e uma fase de interface calculada a partir das fases de MF;
- **Simulação MF:** resultados obtidos por simulações em uma rede de ν vizinhos aleatoriamente escolhidos em cada iteração;
- **Simulação CA2D:** resultados obtidos por simulações em uma rede quadrada com $N = L^2$ sítios que possuem vizinhança de Moore.

1.8 Objetivos

Propomos uma nova interpretação para os comportamentos dos CAs deterministas. Essa interpretação baseia-se nos resultados de campo médio com considerações de interface, que denominamos aproximação MFI (*mean-field with interfaces*). Nossos objetivos específicos são:

- introduzir um fator espacial na aproximação de campo médio realizada para os autômatos e derivar um parâmetro de controle σ que classifica e ordena as

⁴O parâmetro λ é uma medida de atividade na rede celular. Para autômatos com mais de dois estados, λ consegue distinguir entre comportamentos de baixa atividade (pequenos valores de λ) e comportamentos de alta atividade (grandes valores de λ) [Langton, 1986].

6144 regras totalistas bidimensionais de dois estados e de ordem três. Essas regras conduzem a uma aproximação da expressão para o mapa de retorno de campo médio, definido no capítulo 2, na forma $M(\rho) \propto \rho^3$ no limite em que $\rho \rightarrow 0$. Escolhemos trabalhar com todas as regras de ordem três para poder comparar os resultados com o GL, já o LIFE está inserido no conjunto de autômatos de ordem três ;

- comparar os comportamentos dos CAs em duas dimensões com o comportamento previsto pela aproximação de campo médio e definir um novo parâmetro de ordem ρ' (que é a razão entre a densidade de sítios ativos observada na rede quadrada e a densidade de sítios ativos prevista pelo cálculo de campo médio simples);
- utilizando o parâmetro de ordem ρ' , comparar a eficácia do parâmetro de controle σ proposto com o parâmetro λ introduzido por Langton [Langton, 1986];
- interpretar o Game of LIFE como um processo de nucleação levemente sub-crítico;
- analisar alguns exemplos de CAs com comportamentos qualitativamente distintos do GL (em termos de mapas de retorno e fases observadas) e discutir a aplicação da abordagem MFI nestes autômatos.

Para atingir esses objetivos, a dissertação está organizada de modo que, no capítulo 2, definimos os parâmetros de ordem, os parâmetros de controle (classificação) e a nossa abordagem de campo médio com interfaces. Nesse capítulo, mostramos evidências de uma transição de fase de primeira ordem no espaço $\mathfrak{R}_\Omega$ dos CAs deterministas de dois estados na rede quadrada.

Dedicamos o capítulo 3 para uma análise detalhada do autômato LIFE, mostrando que a abordagem MFI que estamos propondo (que incorpora uma densidade de interface ρ^+) permite a interpretação do autômato como um sistema heterogêneo com coexistência e competição entre fases diferentes, com a presença de fenômenos de nucleação crítica e expansão da fase nula sobre a fase ativa regida por uma lei de potência (*critical slowing down*).

O capítulo 4 mostra uma visão geral dos comportamentos que podem ser encontrados em autômatos totalistas na rede quadrada. Os CAs examinados neste capítulo foram escolhidos com base nas diferenças qualitativas dos mapas de retorno de campo médio que esses autômatos apresentam.

Finalizamos a dissertação com nossas conclusões gerais sobre o trabalho que desenvolvemos. Também apresentamos perspectivas de trabalhos futuros que podem se basear em nossos resultados.

APROXIMAÇÃO MFI E TRANSIÇÕES DE FASE

Para realizar a ordenação e a classificação do espaço de regras dos autômatos celulares, propomos o parâmetro de ordem ρ' e o parâmetro de classificação σ calculados com a abordagem de campo médio que iremos adotar. Comparamos os resultados encontrados com esses parâmetros com o resultado encontrado com a aplicação do parâmetro λ de Langton para classificar as regras. Mostramos que nossa proposta é mais precisa na determinação da região crítica e da transição de fase.

2.1 Densidade de sítios ativos $\rho(t)$

O parâmetro de ordem de um sistema é uma grandeza intensiva que serve para distinguir fases (comportamentos coletivos) de um sistema de partículas interagentes. Por exemplo, para um sistema fluido com fases líquida e gasosa, o parâmetro de ordem ρ é definido como $\rho = \rho_l - \rho_g$, sendo ρ_l a densidade da fase líquida e ρ_g a densidade da fase gasosa e, para um sistema magnético (como o modelo de Ising), o parâmetro de ordem m é a magnetização total, tal que $m = m_+ + m_-$, onde m_+ é a magnetização resultante dos *spins* orientados em uma direção (para cima) e m_- é a magnetização resultante dos *spins* orientados na direção contrária (para baixo).

Uma extensão natural dos parâmetros de ordem da termodinâmica para sistemas binários (com estados 0 e 1) fora do equilíbrio é a densidade $\rho(t)$ do número de sítios ativos na rede, definida como:

$$\rho(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t) \quad (2.1)$$

sendo $N = L^2$ o número total de células na rede bidimensional de lado L .

A densidade média $\langle \rho(t) \rangle$ medida em nossas simulações é dada pela seguinte expressão:

$$\langle \rho(t) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_{i,j}(t) \right], \quad (2.2)$$

em que $M \equiv$ número de simulações (“runs”) com condições iniciais diferentes para uma mesma densidade inicial $\rho(0)$ e $s_{i,j}(t)$ é o estado da célula i da rede, no instante de tempo t , na j -ésima simulação.

A partir da Eq. (2.2), podemos calcular o erro estatístico $e(t)$ de nossos dados usando a expressão

$$e(t) \equiv \sqrt{\frac{M}{M-1} [\langle \rho(t)^2 \rangle - \langle \rho(t) \rangle^2]}, \quad (2.3)$$

que corresponde ao desvio padrão de M pontos para cada instante de tempo t .

2.2 Aproximação de campo médio em autômatos celulares

A aproximação de campo médio substitui as interações locais existentes nos autômatos por um tipo de interação que faz uma amostragem do sistema inteiro. Cada célula é considerada idêntica e indistinguível e a interação entre ela e sua vizinhança é aproximada por um campo médio. Desse modo, o modelo de campo médio considera o sistema como um todo, homogêneo, trata com grandezas médias e despreza flutuações locais.

Nesse tipo de abordagem, para calcular $s_i(t+1)$, usamos o valor médio da densidade $\rho(t)$ na rede para determinar a vizinhança de $s_i(t)$, ou seja, em vez do valor real h de sítios ativos na vizinhança, usamos $h_{MF} = \nu \rho(t) = 8\rho(t)$. Isso quer dizer que, no tempo $(t+1)$, a densidade média de células vivas será:

$$\rho(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t+1) = \sum_{s=0}^1 \sum_{h=0}^8 R[s, h] P_t(s, h), \quad (2.4)$$

em que $P_t(s, h)$ é a probabilidade da célula estar no estado s e ter h vizinhos vivos em V^1 .

Para uma densidade $\rho(t)$, a probabilidade de uma célula estar viva $P_t(s_i = 1)$ é igual a $\rho(t)$, enquanto que $P_t(s_i = 0) = 1 - \rho(t)$ é a probabilidade de uma célula estar morta. Assumindo que a probabilidade da célula ter h vizinhos vivos é dada pela distribuição binomial

$$P_t(h|\rho) \equiv P_t(h) = C_h^8 \rho(t)^h (1 - \rho(t))^{8-h}, \quad (2.5)$$

em que C_h^8 é o coeficiente binomial (vide Eq. (1.8)), teremos que a probabilidade $P_t(s, h)$ será:

$$P_t(s, h) = s\rho(t)P_t(h) + (1 - s)(1 - \rho(t))P_t(h). \quad (2.6)$$

Com essa expressão, a equação para a aproximação de campo médio, Eq. (2.4), torna-se:

$$\begin{aligned} \rho(t+1) &= \sum_{s=0}^1 \sum_{h=0}^8 R[s, h] P_t(s, h) = \\ &= (1 - \rho(t)) \sum_{h=0}^8 R[0, h] P_t(h) + \rho(t) \sum_{h=0}^8 R[1, h] P_t(h) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo a expressão para a probabilidade $P_t(h)$ da Eq. (2.5) na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho(t+1) &= (1 - \rho(t)) \sum_{h=0}^8 R[0, h] C_h^8 \rho(t)^h (1 - \rho(t))^{8-h} \\ &+ \rho(t) \sum_{h=0}^8 R[1, h] C_h^8 \rho(t)^h (1 - \rho(t))^{8-h}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A Eq. (2.8) descreve a evolução da densidade média $\rho(t+1)$ para qualquer CA totalista binário. O mapa de campo médio $M(\rho(t))$ para cada autômato é obtido

¹Ao ser interpretada como sendo a probabilidade de uma célula estar viva no instante de tempo $t+1$, podemos encarar $\rho(t+1) = \sum_{s=0}^1 \sum_{h=0}^8 R[s, h] P_t(s, h)$ como sendo o somatório das probabilidades de encontrar a célula no estado s com h vizinhos vivos tal que $R[s, h]$ seja igual a um.

com valores específicos $R[s, h]$ de cada regra de transição dos somatórios da Eq. (2.8)

2.3 Mapa de retorno de campo médio

Um mapa de retorno de campo médio é um mapeamento $M : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ que fornece a evolução temporal $\rho(t+1) = M(\rho(t))$. O mapa constitui um sistema dinâmico com tempo discreto $t = 0, 1, 2, \dots$ e variável de estado ρ contínua. Cada atualização de t para $(t+1)$ é chamada de iteração do mapa.

Os mapas apresentam quatro comportamentos básicos para $t \rightarrow \infty$:

- Ponto fixo, onde $\rho(t+1) = \rho(t) = \rho^*$;
- Ciclos de período p (“ciclos- p ”), onde o valor de ρ se repete após p iterações, $\rho(t+p) = \rho(t)$;
- Comportamento quasiperiódico, onde o sistema realiza movimentos com períodos p diferentes e incomensuráveis, de modo que os valores de $\rho(t)$ nunca se repetem no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$);
- Comportamento caótico, com grande sensibilidade às condições iniciais.

A iteração do mapa $M(\rho(t))$ é a evolução da densidade média $\rho(t)$ por instante de tempo. Realizando a expansão de $M(\rho(t))$ em série de Taylor ao redor do ponto fixo ρ^* , obtemos:

$$M(\rho) = M(\rho^*) + M_\rho(\rho^*)(\rho(t) - \rho^*) + O(\rho(t)^2), \quad (2.9)$$

em que $M_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho} M(\rho(t))$. Considerando apenas a derivada de primeira ordem, podemos escrever:

$$M(\rho) - M(\rho^*) = M_\rho(\rho^*)(\rho(t) - \rho^*). \quad (2.10)$$

Como $M(\rho^*) = \rho^*$ e $M(\rho) = \rho(t+1)$, temos que:

$$\rho(t+1) - \rho^* = M_\rho(\rho^*)(\rho(t) - \rho^*). \quad (2.11)$$

Investigando a estabilidade do ponto fixo ρ^* , definimos $\epsilon(t)$ como:

$$\epsilon(t) \equiv \rho(t) - \rho^*. \quad (2.12)$$

Desse modo, a Eq. (2.11) é escrita como:

$$\epsilon(t+1) = M_\rho(\rho^*)\epsilon(t). \quad (2.13)$$

Após t iterações, temos:

$$\epsilon(t) = [M_\rho(\rho^*)]^t \epsilon(0). \quad (2.14)$$

Se $t \rightarrow \infty$, a convergência de $\rho(t)$ para o ponto fixo ρ^* ($\epsilon(t \rightarrow \infty) = 0$) é determinada pelas condições:

- $|M_\rho(\rho^*)| < 1$: o ponto ρ^* é assintoticamente estável;
- $|M_\rho(\rho^*)| > 1$: o ponto ρ^* é assintoticamente instável;
- $|M_\rho(\rho^*)| = 1$: precisamos olhar para derivadas maiores para decidir sobre a estabilidade do ponto.

Exemplos de mapa de retorno de campo médio com pontos fixos estáveis e instáveis estão ilustrados na Figura 2.1.

Concluindo, os CAs são definidos por uma regra de transição $R[s, h]$ específica. Essa regra gera um mapa $M(\rho(t))$ que é um polinômio de grau $g \leq \nu + 1$ com coeficientes discretos, ou seja, o espaço de regras é discreto e os mapas $M(\rho(t))$ mudam aos saltos. Dessa forma, não podemos variar a parametrização do espaço de regras $\mathfrak{R}_\Omega$ continuamente para observar em detalhe uma transição de fase, como ilustrado na Figura 2.2.

(a) B0/S012

(b) B1/S012

(c) B4567/S456

(d) B2678/S04567

(e) "Ferromagneto" $T = 0$ (f) "Ferromagneto" $T > T_c$

Figura 2.1: Exemplos de mapas de retorno encontrados no espaço de regras dos CAs.

Figura 2.2: Exemplo ilustrativo da mudança discreta no espaço das regras. A linha separa as duas fases que o sistema pode ocupar. A seta indica o sentido da variação do parâmetro de ordem visando atingir a transição entre as fases mas, como os parâmetros $R[s, h]$ variam discretamente (círculos), a probabilidade de, por acaso, termos uma regra situada exatamente no ponto crítico é nula.

2.4 Relação entre ρ_{CA2D} e ρ_{MF} de ordem três

O mapa de campo médio dado pela Eq. (2.8) pode ser aplicado em qualquer autômato bidimensional de dois estados. Na expansão dos somatórios estão presentes termos que vão de ρ^0 até ρ^9 . Aplicando as regras para a evolução do autômato Game of LIFE definido no capítulo 1, em que $R[0, 3] = R[1, 2] = R[1, 3] = 1$ e $R[s, h] = 0$ em qualquer outro caso, na Eq. (2.8), obtemos, antecipando o resultado que será apresentado no capítulo 3, a equação $M(\rho(t)) = 28\rho(t)^3(1 - \rho(t))^5(3 - \rho(t))$. No regime de baixas densidades, o mapa $M(\rho(t))$ pode ser aproximado pela expressão $M(\rho(t)) = c.\rho(t)^3$, em que c é uma constante. Esse termo define a ordem da regra do GL (ordem três) e, como estamos interessados em estudar o conjunto de autômatos com comportamentos qualitativos semelhantes aos do LIFE, exaurimos o espaço de regras de ordem três dos CAs bidimensionais.

Começamos com a verificação da relação entre ρ_{MF} e ρ_{CA2D} , em que ρ_{MF} é a densidade obtida pela iteração da equação de campo médio para cada autômato e ρ_{CA2D} é a densidade obtida com a simulação de cada autômato em uma rede quadrada de lado L , exibida na Figura 2.3. A concentração de pontos na região $\rho_{CA2D} = \rho_{MF}$ indica que grande parte das regras dos CAs podem ser previstas pela aproximação MF, atingindo estado estacionário (densidade final) próximo ao estado estacionário das regras simuladas por CA2D.

A Figura 2.3 sugere a definição de $\rho' = \rho_{CA2D}/\rho_{MF}$ como parâmetro de ordem para agrupar as regras em duas fases distintas: $\rho' \approx 1$, indicando que os estados estacionários das simulações MF e CA2D têm mesma densidade (e que a rede é dominada homogeneamente por células vivas com densidade ρ^* , sem a evidência de fenômenos de nucleação), e $\rho' \approx 0$, sugerindo que a simulação MF não pode ser utilizada para prever resultados dos CA2D.

2.5 Razão de ramificação σ para fases e interfaces

O processo de ramificação pode ser descrito da seguinte maneira: cada célula viva dá origem a uma ou mais células vivas. Das células da segunda geração originam-se uma ou mais novas células, formando a terceira geração, e assim sucessivamente. Como exemplos estão o desenvolvimento da população humana ou animal, propagação de

Figura 2.3: Gráfico que mostra a relação entre ρ_{CA2D} e ρ_{MF} . As regras em torno da reta são aquelas cujo comportamento na rede bidimensional são próximos aos obtidos com a aproximação de MF. As regras fora da reta apresentam comportamento que não pode ser previsto pela aproximação de MF. Os resultados foram obtidos em uma rede de lado $L = 100$, com o número de corridas $M = 100$ e $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

genes, e reações em cadeia (pilhas atômicas) [Harris, 1948].

Nesse processo, a razão de ramificação σ é a relação entre as células da geração $(n + 1)$ pelas células da geração n . Se a geração $(n + 1)$ substitui a geração n no tempo, podemos definir:

$$\sigma_{t+1} = \frac{\text{Número de células vivas em } t + 1}{\text{Número de células vivas em } t}. \quad (2.15)$$

Para os CAs, propomos a razão de ramificação para classificação das regras no espaço $\mathfrak{R}_\Omega$, sendo definida em termos da abordagem de campo médio da seguinte forma:

$$\sigma_{t+1} = \frac{\rho(t+1)}{\rho(t)} = \frac{M(\rho(t))}{\rho(t)}. \quad (2.16)$$

Sendo σ função da densidade $\rho(t)$, devemos escolher uma densidade característica ρ^+ para o cálculo do σ de cada autômato. Para escolher essa densidade ρ^+ , iniciamos o sistema com $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$ e determinamos o ponto em que $M(\rho^*) = \rho^*$: o sistema é atraído para um ponto fixo ρ^* . Após a determinação de ρ^* , definimos ρ^+ como:

$$\rho^+ = \frac{\rho^*}{2}. \quad (2.17)$$

A escolha de ρ^+ é realizada para que σ seja uma medida da expansão dos núcleos de células vivas dos CAs: ρ^+ é a densidade da interface entre as regiões viva e morta, conforme ilustrado na Figura 2.4. Podemos observar que os vizinhos da célula A têm densidade $\rho^A = \frac{5}{8}\rho^* + \frac{3}{8}\rho^0$, enquanto que a célula B enxerga os vizinhos com densidade $\rho^B = \frac{3}{8}\rho^* + \frac{5}{8}\rho^0$. Como $\rho^0 = 0$, a densidade na interface ρ^+ , média das densidades dos vizinhos de A e B, é dada por:

$$\rho^+ = \frac{\rho^A + \rho^B}{2} = \frac{\frac{5}{8}\rho^* + \frac{3}{8}\rho^*}{2} = \frac{\rho^*}{2}. \quad (2.18)$$

Desse modo, o parâmetro σ_1^+ é definido da seguinte maneira:

$$\sigma_1^+ = \frac{M(\rho^+)}{\rho^+}, \quad (2.19)$$

em que σ_1^+ é a taxa de ramificação da fase viva (fase um) na rede.

A aplicação do parâmetro σ_1^+ distingue três comportamentos de interface:

- $\sigma_1^+ > 1$: a fase 1 se espalha exponencialmente pela rede celular, aumentando as regiões com ρ^* ;
- $\sigma_1^+ < 1$: a fase 1 se contrai, havendo expansão exponencial da fase 0 (densidade nula). O resultado final é a contração (fase absorvente com $\rho(\infty) > 0$) ou extinção ($\rho(\infty) = 0$) da fase ρ^* ;
- $\sigma_1^+ = 1$: o comportamento é mais complicado. Pode haver expansão, contração ou nucleação das regiões com ρ^* .

Podemos, por simetria, considerar que a fase nula pode invadir a fase viva. Desse modo, definimos a taxa de ramificação da interface da fase zero como sendo

$$\sigma_0^+ = \frac{1 - M(\rho^+)}{1 - \rho^+}, \quad (2.20)$$

em que σ_0^+ é uma medida da expansão das regiões com densidade nula na rede celular.

Figura 2.4: Apresentação esquemática da interface entre células vivas e células mortas: separação entre as regiões com densidade ρ^* (cinza) e com densidade nula (branca).

A proposta de σ_1^+ e σ_0^+ fornece uma alternativa ao parâmetro de classificação λ . A classificação das regras por λ pode ser visualizada na Figura 2.5 e as classificações por σ_1^+ e σ_0^+ podem ser encontradas nas Figuras 2.6 e 2.7, respectivamente.

Observamos na Figura 2.5 que a classificação realizada por λ não distingue, na região de transição em que $\lambda \in [0.40, 0.70]$, entre os comportamentos $\rho' \approx 1$ e $\rho' \approx 0$. A largura da região de transição impossibilita a determinação de um ponto crítico que caracteriza a mudança de fase: escolhendo um caminho ao longo de λ_{2D} e determinando $\rho'(t = 2000)$ para cada ponto desse caminho, há um intervalo de pontos críticos λ_c para esse caminho realizar a transição de $\rho' \approx 0$ para $\rho' \approx 1$. Esse resultado sugere que a classificação por λ gera, no espaço bidimensional com dois estados, uma região crítica de transição, concordando com as afirmações realizadas em [Li et al., 1990, Wootters & Langton, 1990, Li & Packard, 1990].

A classificação por σ_1^+ (Figura 2.6) mostra uma distinção mais fina entre as fases $\rho' \approx 1$ e $\rho' \approx 0$. A classificação por σ_0^+ (Figura 2.7) apresenta os melhores resultados: as transições estão concentradas próximas do ponto $\sigma_0^+ = 1$. Assim sendo, escolhemos σ_0^+ como parâmetro de classificação de nossos sistemas. A Figura 2.8 compara a região próxima de $\sigma = 1$ para σ_1^+ e σ_0^+ .

A razão de ramificação σ_0^+ não é aplicada nos autômatos que evoluíram para o ponto fixo $\rho^* = 0$. Esses autômatos não permitem o tipo de comparação que propomos com a simulação CA2D, pois nossa abordagem requer a existência de um ponto fixo estável não-nulo para ser aplicada. A atração para o estado absorvente $\rho^* = 0$ tem duas explicações: i) o mapa de retorno de campo médio prediz mais de um ponto fixo estável e a atração para o ponto fixo $\rho^* = 0$ é determinada pela

Figura 2.5: Classificação das regras de ordem três, segundo aproximação de campo médio. Vemos que λ_{2D} promove a separação desses autômatos nas regiões $\rho' \approx 1$ e $\rho' \approx 0$. O parâmetro de ordem ρ' é a razão entre as densidades obtidas nas simulações dos autômatos na rede bidimensional e pela abordagem de campo médio. Esses resultados foram obtidos com $L = 100$, $M = 100$ e $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$ no instante $t = 2000$.

bacia de atração ou ii) o mapa de retorno do CA não prediz nenhum ponto fixo não-nulo, ou seja, para qualquer densidade inicial $\rho(0)$ o sistema é atraído para o estado absorvente.

Observamos, a partir da Figura 2.9, que a regra $B3/S4$ possui apenas ponto fixo nulo. Nesse caso, para qualquer densidade inicial $\rho(0)$, o sistema será atraído para o estado absorvente $\rho(\infty) = 0$. A regra $B3/S34$ é a situação limite em que o mapa possui um ponto fixo nulo e um ponto fixo não-nulo marginalmente estável: o autômato está muito próximo da bifurcação sela-nó do mapa $M(\rho(t))$. A regra $B3/S234$ possui um ponto fixo nulo e dois pontos fixos não-nulos, um instável (ponto de sela) e outro estável (nó).

Assumimos, assim, que os autômatos que foram atraídos para $\rho^* = 0$ possuem apenas ponto fixo nulo, assim como a regra $B3/S4$ visualizada na Figura 2.9, pois esperamos que, através da inspeção de mapas de retorno de ordem três, o ponto $\rho(0) = 0.5$ esteja dentro da bacia de atração de um ponto fixo não-nulo, como é o caso da regra $B3/S234$.

Portanto, nossa interpretação considera que o espaço de regras dos CAs de ordem

Figura 2.6: Gráfico da razão ρ_{CA2D}/ρ_{MF} por σ . Há indícios de uma transição entre as fases com $\rho_{CA2D}/\rho_{MF} \approx 1$ e $\rho_{CA2D}/\rho_{MF} \approx 0$ na região de $\sigma = 1$. Nessa simulação, $L = 100$ e $t = 2000$. Média realizada sobre 100 simulações com condições iniciais $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

Figura 2.7: Transição de fase em σ_0^+ . Média realizada sobre 100 simulações com condições iniciais $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

Figura 2.8: Comparação das regiões de transição de σ_1^+ e σ_0^+ . Nessa simulação, $L = 100$ e $t = 2000$. Média realizada sobre 100 simulações com condições iniciais $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

(a)

(b)

Figura 2.9: Tipos de mapas de retorno que podem ser encontrados no espaço das regras de ordem três. Em (a), mapas das regras $B3/S4$, $B3/S34$ e $B3/S234$. Em (b) $M(\rho)/\rho$ para as mesmas regras. A regra $B3/S4$ só tem ponto fixo nulo, enquanto que a regra $B3/S34$ é a situação limite em que o mapa possui, além do ponto fixo nulo, um ponto fixo não-nulo marginalmente estável (o autômato está muito próximo da bifurcação sela-nó do mapa $M(\rho)$). A regra $B3/S234$ tem dois pontos fixos não-nulos, um instável e outro estável.

Figura 2.10: Histograma do número de autômatos de ordem três por densidade ρ' .

três apresenta duas transições de fase. A primeira seria entre os autômatos com apenas ponto fixo nulo e os autômatos com pontos fixos não-nulos instáveis e estáveis. A segunda seria, entre os autômatos que possuem ponto fixo não-nulo, a presença de uma transição descontínua com uma região coexistência entre os regimes $\rho' \approx 0$ e $\rho' \approx 1$. Do total de 262144 regras em $\mathfrak{R}_\Omega$, 6144 são regras de ordem três, das quais 2203 (36%) possuem apenas ponto fixo nulo e 3941 (64%) possuem ponto fixo não-nulo. A distribuição dessas 3941 regras no domínio de ρ' está ilustrada na Figura 2.10.

2.6 Conclusão

A incorporação da informação espacial ρ^+ na aproximação de campo médio permitiu a introdução do parâmetro de ordem ρ' e do parâmetro de classificação σ_0^+ . Esse tipo de abordagem viabiliza a aplicação da aproximação de campo médio e fornece novas ferramentas para a caracterização do espaço de regras dos CAs.

Nossos resultados confirmaram as afirmações de Li *et al.* [Li et al., 1990], Wootters e Langton [Wootters & Langton, 1990] e Li e Packard [Li & Packard, 1990] sobre a existência de uma região crítica de transição de fase no espaço de regras

bidimensional binários parametrizado por λ . Em [Wootters & Langton, 1990], Wo-
oter e Langton sugerem que essa “região crítica” converge para um ponto crítico na
medida que cresce o número de vizinhos e/ou o número de estados permitidos para
os autômatos, mas acreditamos que isto não seja verdade: a região “crítica” corres-
ponde a uma região de coexistência de fases de uma transição de primeira ordem
em $\mathfrak{R}_\Omega$.

No entanto, a proposta de σ como parâmetro de classificação das regras conduziu
a um mapeamento mais preciso das regras dos CAs na rede quadrada, como pode
ser visualizado nas Figuras 2.5 e 2.7. De acordo com os nossos resultados para
 $\rho'(t = 2000)$, a região de coexistência no espaço das regras classificado por λ abrange
aproximadamente 44% do domínio de λ , enquanto que a região crítica no espaço das
regras classificado por σ_0^+ ocupa no máximo 20% do domínio de σ_0^+ .

Portanto, podemos afirmar que o parâmetro σ_0^+ revelou-se uma boa proposta
para classificação, parametrização e predição do comportamento, das regras em $\mathfrak{R}_\Omega$.

APROXIMAÇÃO MFI NO GAME OF LIFE

Uma visão comum na literatura é a de que o cálculo de campo médio produz resultados ruins para os autômatos celulares em redes d -dimensionais devido às fortes correlações espaciais, especialmente no caso do Game of LIFE. Mostraremos que esta visão está errada e que, em qualquer momento de sua evolução, o GL pode ser visto como a combinação linear das duas fases (absorvente $\rho^0 = 0$ e ativa $\rho^ = 0.370$), dadas pela solução da equação de campo médio, mais uma fase de interface (ρ^+). Além disso, esse tratamento de campo médio com “interfaces” prediz que o GL corresponde a um processo de nucleação quasi-crítico, com $\sigma_0^+ = 1.006$.*

3.1 Dinâmica quasi-crítica no GL

A abordagem de campo médio permitiu definição do parâmetro de controle σ_0^+ , que classifica o LIFE, com $\sigma_0^+ = 1.006$, como sendo um autômato quasi-crítico. Essa classificação depende apenas da determinação dos pontos fixos no mapa de retorno de campo médio e da introdução do fator espacial ρ^+ .

Mostramos na Figura 3.1 a evolução temporal da densidade do GL para diferentes tamanhos de rede L com condição de contorno periódica (fechada). Como curva de ajuste, propomos o uso da função:

$$\rho(t) = \rho(\infty) + \frac{B_1}{(1 + B_2 t)^\theta} \quad (3.1)$$

que é solução da equação

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -\theta \frac{B_2}{B_1^{1/\theta}} \tilde{\rho}(t)^{1+\frac{1}{\theta}}, \quad (3.2)$$

em que B_1 e B_2 são constantes e $\tilde{\rho}(t) \equiv \rho(t) - \rho(\infty)$, para descrever o transiente de evolução da densidade do GL mostrado na Figura 3.1¹. O ajuste, encontrado com os valores $B_1 = 0.28$, $B_2 = 0.15$ e $\rho(\infty) = 0.014$, determina o expoente $\theta = 0.45 \pm 0.05$, como mostrado na Figura 3.2.

Comparando a curva de ajuste $\rho(t)$ com os resultados das simulações nas redes bidimensionais do LIFE, determinamos o tempo crítico $t_c(L)$. O instante de tempo $t_c(L)$ é o limite da descrição dos resultados computacionais pela curva de ajuste $\rho(t)$: para tempos maiores que $t_c(L)$, a curva dos resultados das simulações não consegue ser ajustada por $\rho(t)$. A Figura 3.3 mostra $t_c(L)$ em função dos diferentes tamanhos de rede L .

A saturação de $t_c(L)$ em função do tamanho de rede L , visualizada na Figura 3.3, mostra que a relação entre $t_c(L)$ e L não é da forma de lei de potência $t_c(L) \propto L^\alpha$, como seria esperado em um sistema crítico. O melhor ajuste foi realizado pela curva $t_c(L) = 2378 - 2448e^{-L/309}$, mostrando que $t_c(L)$ satura para $L \rightarrow \infty$. Essa saturação sugere que o LIFE seria um autômato subcrítico e concorda com os resultados de Blok [Blok, 1995, Blok & Bergersen, 1997].

Fornecemos uma abordagem alternativa em que consideramos a dinâmica de interfaces entre domínios caracterizados por fases preditas pelo cálculo de campo médio. A aproximação de campo médio, descartada por aparentemente não estimar de forma correta a densidade do GL em sua evolução (Figura 3.4), produz resultados muito satisfatórios se usada nessa nova perspectiva.

3.2 Aproximação MFI

A regra do Game of LIFE($B3/S23$), aplicada na Eq. (2.8), permite encontrar a expressão para a aproximação de campo médio para o GL. Substituindo os valores $R[0, 3] = 1$, $R[1, 2] = 1$ e $R[1, 3] = 1$, com os demais $R[s, h] = 0$, obtemos:

¹Tentamos usar outras curvas de ajuste, tal como a proposta por Holanda *et al.* [de Jesus Holanda et al., 2004], porém as curvas não ajustaram satisfatoriamente para tempos pequenos.

(a)

(b)

Figura 3.1: Evolução temporal da densidade do autômato LIFE para tamanhos de rede diferentes. Em (a), número de células vivas e, em (b), densidade de células vivas na rede quadrada de lado L . Média obtida sobre 100 amostras com condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

Figura 3.2: Dados simulados na rede bidimensional $L = 1600$ e curva de ajuste com os valores $B_1 = 0.28$, $B_2 = 0.15$, $\rho(\infty) = 0.014$ e expoente $\theta = 0.45$. As barras de erro foram omitidas para facilitar a visualização. O ponto t_c , destacado em vermelho, indica o instante em que os resultados simulados deixam de ser ajustados pela função de ajuste $\rho(t)$ dada pela Eq. (3.1).

$$\begin{aligned}
 M(\rho(t)) &= (1 - \rho(t))C_3^8\rho(t)^3(1 - \rho(t))^5 + \\
 &+ \rho(t)[C_2^8\rho(t)^2(1 - \rho(t))^6 + C_3^8\rho(t)^3(1 - \rho(t))^5] = \\
 &= C_3^8\rho(t)^3(1 - \rho(t))^6 + C_2^8\rho(t)^3(1 - \rho(t))^6 + C_3^8\rho(t)^4(1 - \rho(t))^5 =
 \end{aligned}$$

(a)

Figura 3.3: Curva de $t_c(L)$ em função de diferentes tamanhos de rede L . Os pontos são ajustados por uma curva exponencial (linha).

Figura 3.4: Evolução temporal da densidade do Game of LIFE para aproximação de campo médio, simulação MF e simulação CA2D. Resultados simulados em uma rede quadrada ($L = 100$) com $M = 100$ condições iniciais diferentes de densidade com densidade $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

$$= \rho(t)^3(1 - \rho(t))^5[C_3^8(1 - \rho(t)) + C_2^8(1 - \rho(t)) + C_3^8\rho(t)], \quad (3.3)$$

ou,

$$M(\rho(t)) = 28\rho(t)^3(1 - \rho(t))^5(3 - \rho(t)). \quad (3.4)$$

A Eq. (3.4) determina o mapa de retorno $M(\rho(t))$ do LIFE, visualizado na Figura 3.5.

No ponto fixo, temos que $M(\rho^*) = \rho^*$ e, portanto, a Eq. (3.4) pode ser escrita como:

$$\rho^* = 28\rho^{*3}(1 - \rho^*)^5(3 - \rho^*). \quad (3.5)$$

Trivialmente, uma das soluções é $\rho^* = 0$. Os outros pontos fixos são soluções de

$$1 = 28\rho^{*2}(1 - \rho^*)^5(3 - \rho^*). \quad (3.6)$$

Figura 3.5: Mapa de retorno do Game of LIFE na aproximação de campo médio.

As soluções não triviais foram encontradas numericamente, sendo

$$\begin{aligned}\rho^* &= 0.1925 \pm 0.0001; \\ \rho^* &= 0.3702 \pm 0.0001.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Para verificar a estabilidade desses pontos fixos, calculamos a derivada do mapa $M(\rho(t))$, dado pela Eq. (3.4), em cada valor de ρ^* :

$$\begin{aligned}M_\rho(\rho(t)) &= \frac{\partial}{\partial \rho} M(\rho(t)) = \frac{\partial}{\partial \rho} [28\rho(t)^3(1 - \rho(t))^5(3 - \rho(t))] = \\ &= 28\rho(t)^2(1 - \rho(t))^4(9 - 28\rho(t) + 9\rho(t)^2).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Em cada ponto fixo, $M_\rho(\rho^*)$ será:

$$\begin{aligned}M_\rho(\rho^* = 0) &= 0 \\ M_\rho(\rho^* = 0.1925) &= 1.740 \pm 0.003 \\ M_\rho(\rho^* = 0.3702) &= -0.080 \pm 0.002\end{aligned}\tag{3.9}$$

Portanto, os pontos $\rho^* = 0$ e $\rho^* = 0.3702$, para os quais $|M_\rho(\rho)| < 1$, são estáveis e o ponto $\rho^* = 0.1925$, que possui $|M_\rho(\rho)| > 1$, é instável. Começando a iteração com $\rho(0) \neq 0$, por exemplo, o sistema converge para o ponto fixo $\rho^* = 0$ (fase nula ou estado absorvente) ou para o ponto fixo $\rho^* = 0.3702$ (fase ativa). Para facilitar a identificação dos pontos fixos determinados pelo mapa de retorno, introduzimos $\rho^0 = 0$ para especificar o ponto fixo estável da fase nula e $\rho^I = 0.1925$ para especificar o ponto fixo instável, enquanto que ρ^* representará genericamente um ponto fixo e, especificamente, o ponto fixo estável não-nulo, como $\rho^* = 0.3702$ no caso do GL.

A bacia de atração de um ponto fixo ρ^* é o intervalo de densidades iniciais $\rho(0)$ que conduz o sistema, assintoticamente, para a densidade ρ^* . No caso da abordagem de campo médio, a bacia de atração pode ser determinada iterando-se o mapa $M(\rho(t))$ para toda densidade inicial de seu domínio. Outro modo de determinar a bacia, no caso de apenas um ponto fixo não trivial, é considerar o intervalo $[\rho_{min}, \rho_{max}]$, onde $\rho_{min} = \rho^I$ é o ponto de sela (ponto de equilíbrio instável) e ρ_{max} é obtido pela equação $M(\rho_{max}) = \rho^I$, como ilustrado na Figura 3.6. O cálculo da bacia de atração pela equação $M(\rho_{max}) - \rho^I = 0$ fornece, para o LIFE, $\rho_{max} = 0.564 \pm 0.002$.

Para o GL, a bacia de atração pode ser visualizada na Figura 3.7. Para determinar as bacias de atração nas simulações CA2D e MF do LIFE, varremos o domínio de $\rho(0) \in [0, 1]$ e medimos $\rho(t \rightarrow \infty)$. Vemos que as bacias para a simulação MF e simulação CA2D são diferentes. Também observamos que a bacia obtida pela simulação MF é estática, enquanto que a bacia da simulação CA2D ainda não convergiu para um valor estacionário. Procurando encontrar a estabilização da bacia de atração da simulação CA2D, simulamos o autômato LIFE para tempos maiores, ilustrados na Figura 3.8.

Para a simulação MF, a bacia de atração $\rho(t \rightarrow \infty)$ pode ser determinada pela relação:

Figura 3.6: Esquema com ilustração das bacias de atração para os pontos fixos estáveis $\rho^0 = 0$ e $\rho^* = 0.3702 \pm 0.0001$.

(a) CA2D

(b) MF

(c) CA2D

(d) MF

Figura 3.7: Bacia de atração do GL. Em (a) e (b), densidade final após $t = 100$ para a simulação CA2D e para simulação MF. Em (c) e (d), densidade final após $t = 500$ iterações.

$$\rho_{MF}(t \rightarrow \infty) \begin{cases} 0, & \text{se } \rho(0) < 0.1925 \pm 0.0001 \\ 0.3702 \pm 0.0001, & \text{se } 0.1925 \pm 0.0001 \leq \rho(0) \leq 0.564 \pm 0.002 \\ 0, & \text{se } \rho(0) > 0.564 \pm 0.002 \end{cases} \quad (3.10)$$

e para a simulação CA2D, a densidade estacionária $\rho_{CA2D}(t \rightarrow \infty)$ é encontrada no intervalo:

Figura 3.8: Bacia de atração do GL para simulações CA2D. Em (a) e (b), densidade final nos instantes $t = 1000$ e $t = 2000$ respectivamente. Em (c) e (d), as estabilidade é alcançada após $t = 8000$ iterações.

$$\rho_{CA2D}(t \rightarrow \infty) \begin{cases} 0, & \text{se } \rho(0) < 0.07 \pm 0.04 \\ 0.03 \pm 0.01, & \text{se } 0.07 \pm 0.04 \leq \rho(0) \leq 0.76 \pm 0.06 \\ 0, & \text{se } \rho(0) > 0.76 \pm 0.06 \end{cases} \quad (3.11)$$

O GL tem uma densidade estável não-nula $\rho_{CA2D}(t \rightarrow \infty) = 0.03 \pm 0.01$ [Blok, 1995] diferente de $\rho_{MF}(t \rightarrow \infty) = 0.3702$ esperado pela aproximação de campo médio. Essa diferença decorre da perda de informação que há na aproximação MF: ao admitir que todas as células estão sob ação de um campo médio, perde-se informação sobre correlações e interações locais.

Vamos assumir que o GL apresenta uma competição entre o estado absorvente $\rho^0 = 0$ e o estado ativo $\rho^* = 0.3702$. Ao assumir que a competição se dá entre estados cujas densidades são pontos fixos previsto pela abordagem de campo médio, podemos fazer a distinção de três fases diferentes na rede celular bidimensional:

- **fase homogênea:** núcleos de células vivas com densidade interna igual a $\rho^* = 0.3702 \pm 0.0001$;
- **fase nula:** núcleos de células mortas com densidade interna $\rho^0 = 0$;
- **fase de interface:** região de interface entre as fases homogênea e nula, com densidade $\rho^+ = \rho^*/2 = 0.1851 \pm 0.0003$.

A fase homogênea recebe esse nome porque sua densidade é obtida pela abordagem de campo médio, que considera o meio homogêneo. A fase nula representa o estado absorvente do sistema previsto pela aproximação de campo médio, no qual todas as células estão inativas. A densidade da fase de interface é a média das densidades dos pontos fixos estáveis na rede quadrada, como foi proposto e discutido na dedução da Eq. (2.18). Essas três fases são encontradas com base na abordagem de campo médio. A coexistência dessas fases na evolução de um autômato celular na rede bidimensional constitui a **fase heterogênea**.

Para encontrar a composição da fase heterogênea $P_t(h)$, em que $P_t(h) = C_h^8 \rho(t)^h (1 - \rho(t))^{8-h}$, determinamos a distribuição do número de vizinhos da fase homogênea $P^*(h)$, da fase de interface $P^+(h)$ e da fase nula $P^0(h)$ através do cálculo da Eq. (2.5) com densidades ρ^*, ρ^+ e ρ^0 , respectivamente, e comparamos com a distribuição $P_t^{LIFE}(h)$ obtida com a simulação CA2D do LIFE. Se o GL pode ser descrito como uma composição dessas três fases, $P_t(h)$ poderá ser escrito como:

$$P_t(h) = A_t^* P^*(h) + A_t^+ P^+(h) + A_t^0 P^0(h) \quad (3.12)$$

Dada a Eq. (3.12), procuramos os coeficientes A_t^*, A_t^+ e A_t^0 tais que

$$\Delta = \sum_{h=0}^8 |P_t(h) - P_t^{LIFE}(h)| \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Se os coeficientes existirem, então poderemos afirmar que o GL apresenta uma composição de fases, em que A_t^*, A_t^+ e A_t^0 são as porcentagens da presença de cada fase na rede celular.

As Figuras 3.9 - 3.15 mostram a evolução temporal do LIFE, onde observamos a decomposição da fase $\rho^* = 0.3702$. As Figuras 3.9 - 3.15 também mostram a distribuição do número de vizinhos de cada uma das fases e a composição das distribuições $P^*(h)$, $P^+(h)$ e $P^0(h)$ formando $P_t(h)$, que é comparado com a distribuição de vizinhos $P_t^{LIFE}(h)$ medido nas simulações CA2D.

Como podemos observar, em cada instante de tempo t há um conjunto A_t^*, A_t^+ e A_t^0 , com $A_t^+ = 1 - A_t^* - A_t^0$ mostrado na Tabela 3.1, que satisfaz a Eq. (3.12). A determinação desses coeficientes foi realizada com um programa em Fortran que busca o mínimo da função $\Delta = \sum_{h=0}^8 |P_t(h) - P_t^{LIFE}(h)|$. A existência desses coeficientes sugere que o GL é composto pelas fases homogênea, de interface e nula. Essas fases surgem da correlação existente entre as células da rede e geram núcleos com densidade $\rho^* = 0.3702$, com densidade nula e regiões de interfaces com $\rho^+ = 0.1851$, fazendo com que ρ_{CA2D} seja determinado pela expressão:

$$\begin{aligned} \rho_{CA2D}(t) &= (1 - \rho(t)) \frac{1}{8} \sum_{h=0}^8 h P_t(h) + \rho(t) \frac{1}{8} \sum_{h=0}^8 h P_t(h) = \frac{1}{8} \sum_{h=0}^8 h P_t(h) = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{h=0}^8 h [A_t^* P^*(h) + A_t^+ P^+(h) + A_t^0 P^0(h)] = \\ &= \frac{1}{8} \left[A_t^* \sum_{h=0}^8 h P^* + A_t^+ \sum_{h=0}^8 h P^+ + A_t^0 \sum_{h=0}^8 h P^0 \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, temos que

$$\rho_{CA2D}(t) = A_t^* \rho^* + A_t^+ \rho^+ + A_t^0 \rho^0, \quad (3.15)$$

ou seja, a densidade $\rho_{CA2D}(t)$ pode ser determinada, em cada instante de tempo, pelas densidades ρ^* e ρ^0 previstas pelo cálculo de campo médio mais uma densidade de interface ρ^+ .

(a) $t=0$

(b) histograma

Figura 3.9: Em (a), configuração inicial aleatória em uma rede $L = 100$ com $\rho(0) = 0.502$. Em (b), distribuição do número de vizinhos previsto pela distribuição binomial para a densidade $\rho(0)$ e a medida na rede celular.

(a) $t=10$

(b) histograma

Figura 3.10: Em (a), configuração da rede celular $L = 100$ com $t = 10$ iterações e $\rho(10) = 0.197$. Em (b), as distribuições obtidas pela expressão binomial para as fases Homogênea, Interface, Nula, a medida no LIFE CA2D e a Heterogênea. O ajuste é realizado com os coeficientes $A_{10}^* = 0.34$, $A_{10}^+ = 0.39$ e $A_{10}^0 = 0.27$, com $\Delta = 0.02$. A fase nula está crescendo na rede celular, enquanto que a fase viva tenta resistir.

(a) $t=50$

(b) histograma

Figura 3.11: Em (a), configuração da rede para $L = 100$ no instante $t = 50$. Nesse instante, $\rho(50) = 0.156$. Em (b), as distribuições para cada fase (Homogênea, Interface, Nula), a medida no autômato (CA2D) e a composição das teóricas (Heterogênea). Os coeficientes que promovem o ajuste são: $A_{50}^* = 0.25$, $A_{50}^+ = 0.33$ e $A_{50}^0 = 0.42$, com $\Delta = 0.03$. A presença da fase zero (número de células mortas) aumenta na rede celular.

(a) $t=100$

(b) histograma

Figura 3.12: Em (a), rede celular $L = 100$ no instante $t = 100$, com $\rho(100) = 0.108$. Em (b), distribuição do número de vizinhos. O ajuste é realizado com $A_{100}^* = 0.15$, $A_{100}^+ = 0.29$, $A_{100}^0 = 0.56$, com $\Delta = 0.02$. A presença da fase nula cresce, mas os núcleos vivos continuam resistindo.

(a) $t=500$

(b) histograma

Figura 3.13: Em (a), configuração da rede celular $L = 100$ no instante $t = 500$ com $\rho(500) = 0.094$. Em (b), distribuição do número vizinhos. Ajuste realizado com $A_{500}^* = 0.14$, $A_{500}^+ = 0.22$ e $A_{500}^0 = 0.64$, com $\Delta = 0.02$. A fase nula continua invadindo a fase viva, que se agrupa para não ser extinta.

(a) $t=1000$

(b) histograma

Figura 3.14: Em (a), rede celular $L = 100$ no instante $t = 1000$, com $\rho(1000) = 0.039$. Em (b), distribuição do número de vizinhos vivos, com ajuste da fase heterogênea realizado com $A_{1000}^* = 0.01$, $A_{1000}^+ = 0.20$ e $A_{1000}^0 = 0.79$, com $\Delta = 0.04$

(a) $t=2000$

(b) histograma

Figura 3.15: Em (a), rede celular $L = 100$ no instante $t = 2000$, com $\rho(2000) = 0.037$. Em (b), distribuição do número de vizinhos, com ajuste da fase heterogênea realizado com $A_{2000}^* = 0.01$, $A_{2000}^+ = 0.17$ e $A_{2000}^0 = 0.82$, com $\Delta = 0.04$. A fase morta domina a rede celular e o processo de nucleação da fase viva termina, gerando estruturas estáveis que conseguem sobreviver.

t	A_t^*	A_t^+	A_t^0	Δ
10	0.34	0.39	0.27	0.02
50	0.25	0.33	0.42	0.03
100	0.15	0.29	0.56	0.02
500	0.14	0.22	0.64	0.02
1000	0.01	0.20	0.79	0.04
2000	0.01	0.17	0.82	0.04

Tabela 3.1: Tabela com os coeficientes da distribuição $P_t(h)$ para o Game of LIFE com condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

3.3 Conclusão

Conseguimos, com a aproximação MFI, descrever os resultados do Game of LIFE em termos de coexistência e competição entre pontos fixos estáveis diferentes. A determinação da distribuição do número de células vivas na rede em qualquer instante de tempo $P_t(h)$, prevista pelo cálculo de campo médio, conseguiu ser ajustada ao valor das distribuições de células vivas $P_t^{CA2D}(h)$, encontradas nas simulações CA2D, em qualquer instante de tempo.

A existência dos coeficientes A_t^* , A_t^+ e A_t^0 permitiu descrever a composição da

Figura 3.16: Coeficientes da distribuição $P_t(h)$ do GL em diferentes instantes de tempo.

rede celular determinando as presenças porcentuais de cada densidade (ρ^*, ρ^+, ρ^0) , sendo a densidade encontrada na simulação $\rho_{CA2D}(t)$ determinada, em cada instante de tempo, pela Eq. (3.15). No entanto, os coeficientes A_t^* , A_t^+ e A_t^0 são parâmetros livres da aproximação MFI e foram determinados através do ajuste das distribuições das células na rede. Para tornar a abordagem que estamos propondo mais “robusta”, esses coeficientes devem ser encontrados analiticamente e não por um ajuste da curva de distribuição do número de células vivas aos resultados computacionais.

As imagens da evolução da rede, observada nas Figuras 3.9 - 3.15, representam o fenômeno de nucleação quasi-crítico presente no LIFE. A parametrização por σ_0^+ prediz que o autômato GL está localizado na região de coexistência entre as fases $\rho' = 0$ e $\rho' = 1$. Para o LIFE, $\sigma_0^+ = 1.006$: há uma expansão lenta da fase absorvente que tenta dominar as regiões com fase ativa.

Essa expansão evolui lentamente até o estado estacionário com densidade $\rho_{CA2D}(t \rightarrow \infty) = 0.03 \pm 0.01$, como podemos ver na Figura 3.1. A determinação dos coeficientes A_t^* , A_t^+ e A_t^0 , a evolução desses coeficientes e a composição da rede expressa na Eq. (3.15) indicam que o LIFE pode ser interpretado como um processo de nucleação levemente subcrítico, em que as regiões de células vivas se degradam lentamente e ocorre a formação de pequenos núcleos estáveis.

RESULTADOS DE MFI PARA AUTÔMATOS BIDIMENSIONAIS

Neste capítulo, vamos investigar como nossa abordagem de campo médio com interfaces pode ser aplicada nos autômatos na rede quadrada. Para isso, estudamos quatro regras que consideramos interessantes e tentamos descrevê-las como uma mistura de fases determinadas pelos pontos fixos do mapa de retorno de campo médio. Encontramos evidências de que a descrição dos autômatos pela aproximação MFI tem ampla aplicação e de que o LIFE seria um exemplo de autômato trivialmente descrito pela nossa proposta.

4.1 Regra B1357/S02468 (modelo de ferromagneto com $T > T_c$)

Um modelo de ferromagneto na fase desordenada (temperatura acima da temperatura de Curie - $T > T_c$) pode ser obtido com a regra B1357/S02468. A equação de campo médio para essa regra (Eq. 2.8) é escrita como:

$$\begin{aligned}
 M(\rho(t)) = & (1 - \rho(t))[C_1^8 \rho(t)(1 - \rho(t))^7 + C_3^8 \rho(t)^3(1 - \rho(t))^5 + \\
 & + C_5^8 \rho(t)^5(1 - \rho(t))^3 + C_7^8 \rho(t)^7(1 - \rho(t))^1] + \\
 & + \rho(t)[C_0^8(1 - \rho(t))^8 + C_2^8 \rho(t)^2(1 - \rho(t))^6 + C_4^8 \rho(t)^4(1 - \rho(t))^4 + \\
 & + C_6^8 \rho(t)^6(1 - \rho(t))^2 + C_8^8 \rho(t)^8].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Figura 4.1: Mapa de retorno para um modelo de ferromagneto em temperatura $T > T_c$ gerado pela Eq. (4.2).

Substituindo os coeficientes binomiais na Eq. (4.1) obtemos, depois de alguma manipulação algébrica, a expressão:

$$\begin{aligned} M(\rho(t)) = & 9\rho(t)(1 - \rho(t))^8 + 84\rho(t)^3(1 - \rho(t))^6 + \\ & + 126\rho(t)^5(1 - \rho(t))^4 + 36\rho(t)^7(1 - \rho(t))^2 + \rho(t)^9. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A Eq. (4.2) gera o mapa de retorno visualizado na Figura 4.1. Como podemos observar na Figura 4.1, a equação de campo médio prevê a existência de três pontos fixos. Para encontrar os pontos fixos ρ^* , fazemos $M(\rho^*) = \rho^*$ na Eq. (4.2):

$$\begin{aligned} \rho^* = & 9\rho^*(1 - \rho^*)^8 + 84\rho^{*3}(1 - \rho^*)^6 + \\ & + 126\rho^{*5}(1 - \rho^*)^4 + 36\rho^{*7}(1 - \rho^*)^2 + \rho^{*9}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

As soluções da Eq. (4.3) determinam os pontos fixos do mapa de retorno (Eq. 4.2) do modelo de ferromagneto com $T > T_c$. Os pontos fixos e suas derivadas são encontrados na Tabela 4.1.

O modelo de ferromagneto que estamos estudando possui apenas um ponto fixo estável, em que $|M_\rho(\rho^*)| < 1$. Consequentemente, para qualquer densidade inicial

ρ^*	$M_\rho(\rho^*)$
0	9
1/2	0
1	9

Tabela 4.1: Na primeira coluna, pontos fixos do mapa de retorno da regra B1357/S02468. Na segunda coluna, módulo da derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo para determinar sua estabilidade local.

$\rho(0)$, a densidade da rede deve convergir para $\rho(\infty) = 1/2$. De acordo com nossa proposta de coexistência e competição de fases determinadas por pontos fixos estáveis, esperamos que o modelo de ferromagneto com $T > T_c$ não apresente competição entre fases na rede. Desse modo, a rede deverá ser dominada por uma única fase, determinada pelo ponto fixo estável não-nulo, que mistura homogeneamente a fase 0 e a fase 1, ou seja, $\rho_{CA2D} = 1/2$.

A bacia de atração do autômato na rede quadrada pode ser visualizada na Figura 4.2. Podemos observar que as bacias de atração determinadas pela simulação CA2D e pela simulação MF são iguais. Essa igualdade sugere que o CA, dado pela regra B1357/S02468, pode ser descrito pela aproximação de campo médio. A Figura 4.3

Figura 4.2: Bacias de atração dos modelos de ferromagneto em $T \rightarrow \infty$. Em (a), a bacia foi determinada na rede bidimensional, enquanto que em (b) a bacia foi determinada pela simulação MF. Resultados obtidos em uma rede quadrada com lado $L = 100$ após 2000 iterações.

Figura 4.3: Densidade $\rho(t)$ por t do modelo de ferromagneto em $T > T_c$ em uma rede quadrada de lado $L = 100$. Média realizada sobre 500 evoluções com condições iniciais aleatórias diferentes, obedecendo $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

mostra a evolução temporal da densidade determinada pela aproximação de campo médio e a evolução das densidades coletadas nas simulações computacionais.

Notamos na Figura 4.3 que, quando iniciado em $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$, a densidade prevista pela aproximação de campo médio e as densidades obtidas com as simulações CA2D e MF convergem para o mesmo resultado. Esperamos que essa convergência de resultados seja válida para qualquer outra densidade $\rho(0) \in [0, 1]$, pois as bacias de atração para as simulações CA2D e MF são idênticas (Figura 4.2).

A composição de fases na rede pode ser visualizada na Figura 4.4. Podemos observar que a distribuição do número de vizinhos $P_{2000}^{CA2D}(h)$ consegue ser ajustada com a curva da distribuição do número de vizinhos

$$P_{2000}(h) = A_{2000}^* P^* + A_{2000}^+ P^+ + A_{2000}^0 P^0 \quad (4.4)$$

com $A_{2000}^* = 0.999$, $A_{2000}^+ = 0.001$, $A_{2000}^0 = 0.000$ e $\Delta = 0.002$.

Portanto, podemos concluir que o autômato B1357/S02468 consegue ser descrito pela aproximação MFI. Isto é consequência da existência de apenas um ponto fixo estável não-nulo: para esse autômato, os estados absorventes $\rho^0 = 0$ e $\rho^1 = 1$

(a) $t=2000$

Figura 4.4: Distribuição do número de vizinhos h na rede celular bidimensional para o ferromagneto $T > T_c$ após 2000 iterações. A média é realizada sobre 500 condições iniciais aleatórias diferentes em uma rede de lado $L = 100$. O sistema CA2D tem a mesma distribuição de vizinhos $P_{2000}^{CA2D}(h)$ prevista pela abordagem do campo médio no ponto fixo (fase Homogênea). A fase Heterogênea é dominada pela fase Homogênea, com $A_{2000}^* = 0.999$, $A_{2000}^+ = 0.001$, $A_{2000}^0 = 0.000$, sendo $\Delta = 0.002$.

são instáveis e, de acordo com nossa abordagem, não haveria coexistência de fases na rede bidimensional. Os resultados das simulações CA2D confirmaram nossas expectativas teóricas, mostrando que a rede é dominada pela fase homogênea com densidade $\rho^* = 1/2$ determinada pelo cálculo de campo médio.

A ilustração do comportamento da rede CA2D do autômato do modelo de ferromagneto em temperatura $T > T_c$ é visualizada na Figura 4.5. Observamos que não há evidência do surgimento de ordem no sistema com a evolução temporal: assim como esperado em um ferromagneto em alta temperatura, a atividade na rede é caótica e intensa, sem a formação de núcleos, domínios ou ordem na rede (o comprimento de correlação espacial é pequeno).

Finalmente, devemos notar que, ao contrário dos modelos usuais para ferromagnetismo, o autômato é determinista e caótico (*Classe III* de Wolfram).

Figura 4.5: Configurações da rede quadrada com $L = 100$ do modelo de ferromagneto em alta temperatura $T > T_c$ em diferentes instantes de tempo.

4.2 Regra B5678/S45678 (modelo de ferromagneto com $T = 0$)

Podemos propor uma regra determinista que represente um modelo de ferromagneto em temperatura $T = 0$. Essa regra, B5678/S45678, especifica que o estado de uma célula será determinado pelo estado da maioria das células ao seu redor e que, se o número de células vizinhas vivas for igual ao número de células vizinhas mortas, a célula permanecerá no seu estado atual. Isso corresponde a um modelo tipo Ising com vizinhança de Moore na temperatura $T = 0$.

A partir da Eq. (2.8) determinamos a expressão de campo médio da regra B5678/S45678:

$$\begin{aligned}
 M(\rho(t)) = & (1 - \rho(t))[C_5^8 \rho(t)^5 (1 - \rho(t))^3 + C_6^8 \rho(t)^6 (1 - \rho(t))^2 + \\
 & + C_7^8 \rho(t)^7 (1 - \rho(t)) + C_8^8 \rho(t)^8] + \\
 & + \rho(t)[C_4^8 \rho(t)^4 (1 - \rho(t))^4 + C_5^8 \rho(t)^5 (1 - \rho(t))^3 + \\
 & + C_6^8 \rho(t)^6 (1 - \rho(t))^2 + C_7^8 \rho(t)^7 (1 - \rho(t)) + C_8^8 \rho(t)^8]
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

A substituição dos coeficientes binomiais na Eq. (4.5) resulta na expressão:

$$\begin{aligned}
 M(\rho(t)) = & 126\rho(t)^5 (1 - \rho(t))^4 + 84\rho(t)^6 (1 - \rho(t))^3 + \\
 & + 36\rho(t)^7 (1 - \rho(t))^2 + 9\rho(t)^8 (1 - \rho(t)) + \rho(t)^9.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

O mapa de retorno de campo médio gerado pela Eq. (4.6) pode ser visto na Figura 4.6. Como podemos observar, o mapa apresenta três pontos fixos. Nos pontos fixos, temos $M(\rho^*) = \rho^*$ e a equação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \rho^* = & 126\rho^{*5} (1 - \rho^*)^4 + 84\rho^{*6} (1 - \rho^*)^3 + \\
 & + 36\rho^{*7} (1 - \rho^*)^2 + 9\rho^{*8} (1 - \rho^*) + \rho^{*9}.
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para determinar os pontos fixos ρ^* do mapa de retorno, resolvemos a Eq. (4.7). As soluções dessa equação fornecem os três pontos fixos, descritos na Tabela 4.2.

ρ^*	$M_\rho(\rho^*)$
0	0
1/2	315/128
1	0

Tabela 4.2: Na primeira coluna, pontos fixos do mapa de retorno da regra do modelo de ferromagneto na temperatura $T = 0$. Na segunda coluna, módulo da derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo para determinar sua estabilidade.

Os pontos fixos $\rho^* = 0$, $\rho^* = 1/2$, $\rho^* = 1$ e as derivadas $M_\rho(\rho^* = 0) = 0$ e $M_\rho(\rho^* = 1) = 0$ foram encontrados por inspeção. O resultado não trivial de $M_\rho(\rho^* = 1/2) = 315/128$ para $\rho^* = 1/2$ foi calculado analiticamente derivando-se a Eq. (4.6).

Os valores na Tabela 4.2 mostram que o mapa de campo médio dessa regra prevê dois pontos fixos estáveis, $\rho^0 = 0$ e $\rho^1 = 1$, separados pelo ponto fixo instável $\rho^I = 1/2$. Nossa abordagem MFI espera os resultados da simulação CA2D sejam uma composição entre domínios cujas fases são determinadas pelos pontos fixos estáveis $\rho^0 = 0$ e $\rho^1 = 1$.

Para verificar as bacias de atração dos pontos fixos estáveis $\rho^0 = 0$ e $\rho^1 = 1$ mostramos, na Figura 4.7, as bacias determinadas pelas simulações CA2D e MF. Observamos que a bacia de atração determinada pela simulação CA2D apresenta três comportamentos: na região de $\rho(0) \in [0, 0.3[$, $\rho(\infty) = 0$, na região de $\rho(0) \in]0.7, 1]$,

Figura 4.6: Mapa de retorno de campo médio gerado pela regra B5678/S45678.

Figura 4.7: Bacia de atração do modelos de ferromagneto em temperatura $T = 0$. Em (a), bacia de atração determinada pela simulação CA2D e em (b), bacia de atração determinada pela simulação MF. Os resultados foram obtidos no instante $t = 2000$ em uma rede $L = 100$.

$\rho(\infty) = 1$ e na região $\rho(0) \in [0.3, 0.7]$, $\rho(\infty)$ dependerá da condição inicial $\rho(0)$ para ser determinado.

Esse comportamento da bacia de atração é diferente do resultado obtido pela simulação MF. Atribuímos essa diferença à competição existente entre os pontos fixos ρ^0 e ρ^1 . Podemos inferir, a partir da Eq. (3.15), que $\rho_{CA2D}(t) = A_t^1 \rho^1 + A_t^+ \rho^+ + A_t^0 \rho^0$. No intervalo $\rho(0) \in [0, 0.3[$, a rede é dominada pela fase absorvente com densidade $\rho^0 = 0$ e, no intervalo $\rho(0) \in]0.7, 1]$, a rede é dominada pela fase (também absorvente) com densidade $\rho^1 = 1$. Na região $\rho(0) \in [0.3, 0.7]$, esperamos que uma composição de fases descreva os resultados das simulações CA2D.

A Figura 4.8 mostra a evolução temporal das densidades da regra B5678/S45678 obtidas pela aproximação de campo médio, simulação CA2D e simulação MF. Observamos que, para a densidade inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$, a aproximação MF prevê a densidade $\rho(\infty) = \rho^I = 0.5$, ponto fixo instável. Esse resultado concorda com os dados da simulação MF.

Contudo, nota-se que o erro dos dados da simulação MF é significativo. Os resultados da simulação MF foram obtidos a partir de 500 simulações com condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$. Como esse valor de densidade corresponde a um ponto fixo instável, flutuações na densidade de células vivas na rede, durante a dinâmica temporal, fizeram com que a rede fosse atraída ou para o ponto fixo estável ρ^0 ou

Figura 4.8: Densidade $\rho(t)$ por t do modelo de ferromagneto em temperatura $T = 0$, em uma rede de lado $L = 100$. Média sobre 500 corridas partindo de uma densidade inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

para o ponto fixo estável ρ^1 . Consequentemente, esse efeito de quebra de simetria é o responsável pelo erro observado na simulação MF.

A curva de evolução da densidade da simulação CA2D também concorda com os resultados da aproximação de campo médio. Como poderia ser esperado pela análise da bacia de atração, ilustrada na Figura 4.7, a densidade ρ_{CA2D} permaneceu estável na região próxima de $\rho_{CA2D}(2000) = 0.50 \pm 0.03$.

Para verificar se a aproximação MFI descreve os estados da rede quadrada do autômato, mostramos, na Figura 4.9, a distribuição $P_{2000}^{CA2D}(h)$ do número de vizinhos da simulação CA2D e as distribuições da fase homogênea, de interface e nula previstas pela aproximação MFI. Notamos que a descrição proposta não se aplica satisfatoriamente ao modelo de ferromagneto em $T = 0$, pois a equação

$$P_{2000}(h) = A_{2000}^1 P^1 + A_{2000}^+ P^+ + A_{2000}^0 P^0 \quad (4.8)$$

tem, no melhor ajuste, os coeficientes $A_{2000}^1 = 0.28$, $A_{2000}^+ = 0.44$, $A_{2000}^0 = 0.28$ e $\Delta = \sum_{h=0}^8 |P_{2000}(h) - P_{2000}^{CA2D}(h)| = 0.23$. Consequentemente, a curva de distribuição

heterogênea $P_t(h)$ não é ajustada aos dados da simulação CA2D P_t^{CA2D} e, portanto, a aproximação MFI não descreve a composição de fases na rede do autômato em questão.

Na Figura 4.10 vemos a manifestação das fortes correlações espaciais na rede: a regra de transição B5678/S45678 forma regiões de cooperação entre sítios que mantêm seu domínio juntos. Essas regiões se formam rapidamente, criando uma configuração estável que permanece ao longo de toda a simulação.

(a) $t=2000$

Figura 4.9: Distribuição do número de vizinhos $P_{2000}(h)$ para o CA “ferromagnético” com $T = 0$. Resultado médio sobre 500 configurações obtidas após 2000 iterações em uma rede quadrada de lado $L = 100$. Os melhores coeficientes de mistura são $A_{2000}^1 = 0.28$, $A_{2000}^+ = 0.44$, $A_{2000}^0 = 0.28$, com desvio da curva encontrada na simulação CA2D $\Delta = 0.23$.

Figura 4.10: Configurações da rede celular $L = 100$ do CA ferromagnético em temperatura $T = 0$ para diferentes instantes de tempo.

4.3 Regra B3/S234 (fase tipo “labirinto”)

Uma regra de transição determinista interessante é a regra B3/S234¹. Essa regra promove a organização das células na forma de um padrão tipo “labirinto” na rede quadrada, que lembra padrões produzidos por sistemas de reação-difusão [Turk, 1991] e certas fases encontradas em cristais líquidos [van der Straten & Metselaar, 1978]. Para ver se podemos aplicar nossa abordagem de modo satisfatório, determinamos a equação de campo médio a partir da Eq. (2.8):

$$\begin{aligned} M(\rho(t)) = & (1 - \rho(t))C_3^8\rho(t)^3(1 - \rho(t))^5 + \rho(t)[C_2^8\rho(t)^2(1 - \rho(t))^6 + \\ & + C_3^8\rho(t)^3(1 - \rho(t))^5 + C_4^8\rho(t)^4(1 - \rho(t))^4]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A substituição dos coeficientes binomiais na Eq. (4.9) conduz à expressão

$$M(\rho(t)) = 84\rho(t)^3(1 - \rho(t))^6 + 56\rho(t)^4(1 - \rho(t))^5 + 70\rho(t)^5(1 - \rho(t))^4. \quad (4.10)$$

A Eq. (4.10) determina o mapa de retorno de campo médio (Figura 4.11) para este CA. Podemos ver na Figura 4.11 que o mapa prevê a existência de três pontos fixos. Para determinar esses pontos fixos, fazemos $M(\rho^*) = \rho^*$ e obtemos

$$\rho^* = 84\rho^{*3}(1 - \rho^*)^6 + 56\rho^{*4}(1 - \rho^*)^5 + 70\rho^{*5}(1 - \rho^*)^4. \quad (4.11)$$

As soluções da Eq. (4.11) determinam os pontos fixos do mapa de retorno. Para verificar a estabilidade desses pontos, calculamos o módulo da derivada $|M_\rho(\rho^*)|$. Os pontos fixos e os valores da derivada podem ser encontrados na Tabela 4.3. O ponto $\rho^* = 0$ é determinado pela inspeção da Eq. (4.11) e os pontos $\rho^* = 0.1837 \pm 0.0001$ e $\rho^* = 0.4470 \pm 0.0001$ foram encontrados numericamente.

O mapa de retorno da regra B3/S234 prevê a existência de dois pontos fixos estáveis: $\rho^0 = 0$ e $\rho^* = 0.4470$, separados pelo ponto de sela $\rho^I = 0.1837$. A abordagem MFI prevê que a densidade de células vivas na rede quadrada seja descrita por uma combinação linear de fases com densidades ρ^0 , ρ^* e ρ^+ .

¹Devemos notar que a regra B3/S234 é uma regra “parente” do Game of LIFE (B3/S23).

ρ^*	$M_\rho(\rho^*)$
0	0
0.1837 ± 0.0001	1.891 ± 0.003
0.4470 ± 0.0001	-0.438 ± 0.002

Tabela 4.3: Na primeira coluna, os pontos fixos do mapa de retorno da regra B3/S234. Na segunda coluna, derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo.

As bacias de atração para a simulação MF e simulação CA2D podem ser visualizadas na Figura 4.12. Comparando as bacias de atração CA2D e MF, notamos que, para a simulação CA2D, a densidade para $t = 2000$ é $\rho(2000) = 0.505 \pm 0.002$ se $\rho(0) \in [0.05, 0.88]$ e, para a simulação MF, $\rho(2000) = 0.4470$ se $\rho(0) \in [0.19, 0.67]$. Como a densidade final da simulação CA2D é maior que a densidade estimada pela aproximação de campo médio, podemos esperar que a aproximação MFI enfrente limitações causadas pelas fortes correlações espaciais geradas pela regra desse CA.

A evolução temporal da densidade de células vivas $\rho(t)$ prevista pelo cálculo de campo médio e das densidades obtidas com as simulações MF e CA2D podem ser visualizadas na Figura 4.13. A densidade prevista concorda com os dados da densidade da simulação MF, ambas convergindo para o ponto fixo estável $\rho^* = 0.4470$. A densidade obtida pela simulação CA2D, no entanto, se estabiliza em

Figura 4.11: Mapa de retorno de campo médio para a regra B3/S234.

Figura 4.12: Bacia de atração do modelo de labirinto. Em (a), bacia de atração determinada pela simulação CA2D e em (b), bacia de atração determinada pela simulação MF. Os resultados foram obtidos no instante $t = 2000$ em uma rede $L = 100$.

torno de $\rho(\infty) = 0.505 \pm 0.002$.

A densidade final $\rho(\infty) > \rho^*$ não é prevista pela abordagem que estamos propondo (aproximação MFI). Desse modo, esperamos que a distribuição do número de vizinhos $P_t(h)$ não seja ajustada aos dados da distribuição $P_t^{CA2D}(h)$ das simulações CA2D. Verificamos, na Figura 4.14, que os coeficientes $A_{2000}^* = 0.999$, $A_{2000}^+ = 0.000$ e $A_{2000}^0 = 0.001$ que minimizam a função erro, com $\Delta = 0.338$, não ajustam a distribuição $P_{2000}(h)$ aos dados de $P_{2000}^{CA2D}(h)$, que é uma distribuição bimodal.

A densidade $\rho(\infty) = 0.505 > \rho^* = 0.4470$ surge das fortes correlações espaciais que a regra B3/S234 estabelece na rede. Essas correlações impedem a utilização da aproximação MFI para determinar a composição de fases na rede do CA.

Na Figura 4.15 podemos ver a evolução dos estados da rede. A fase de labirinto surge rapidamente, mas o processo de relaxamento (lento) que estabiliza as paredes ainda não está completo em $t = 2000$. As correlações temporais também são muito fortes, dado que a estrutura de labirinto é assintoticamente estável (ponto fixo, *Classe I* de Wolfram).

Figura 4.13: Densidade $\rho(t)$ por t do modelo de labirinto em uma rede $L = 100$ e média sobre 100 evoluções partindo de uma densidade inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

(a) $t=2000$

Figura 4.14: Distribuição do número de vizinhos $P_{2000}(h)$ para a fase tipo labirinto dado pela regra B3/S234. Resultado sobre 100 configurações obtidas após 2000 iterações em uma rede $L = 100$. Os coeficientes são $A_{2000}^* = 0.999$, $A_{2000}^+ = 0.000$, $A_{2000}^0 = 0.001$, com $\Delta = 0.338$.

Figura 4.15: Configurações da rede quadrada com lado $L = 100$ do modelo de labirinto em diferentes instantes de tempo.

4.4 Regra B2678/S04567 (coexistência de fases)

Dedicamos essa seção à regra de transição B2678/S04567, que apresenta dois pontos fixos estáveis não-nulos. Queremos ver se a aproximação MFI consegue descrever seu comportamento. A equação de campo médio (Eq. 2.8) para esta regra é:

$$\begin{aligned}
 M(\rho(t)) = & (1 - \rho(t))[C_2^8 \rho(t)^2 (1 - \rho(t))^6 + C_6^8 \rho(t)^6 (1 - \rho(t))^2 + \\
 & + C_7^8 \rho(t)^7 (1 - \rho(t)) + C_8^8 \rho(t)^8] + \\
 & + \rho(t)[C_0^8 (1 - \rho(t))^8 + C_4^8 \rho(t)^4 (1 - \rho(t))^4 + C_5^8 \rho(t)^5 (1 - \rho(t))^3 + \\
 & + C_6^8 \rho(t)^6 (1 - \rho(t))^2 + C_7^8 \rho(t)^7 (1 - \rho(t))]. \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Com a substituição dos coeficientes binomiais e alguma manipulação algébrica, a Eq. (4.12) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 M(\rho(t)) = & \rho(t)(1 - \rho(t))^8 + 28\rho(t)^2(1 - \rho(t))^7 + 70\rho(t)^5(1 - \rho(t))^4 + \\
 & + 84\rho(t)^6(1 - \rho(t))^3 + 36\rho(t)^7(1 - \rho(t))^2 + 9\rho(t)^8(1 - \rho(t)). \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Observando o mapa de retorno gerado pela Eq. (4.13) ilustrado na Figura 4.16, notamos que a aproximação de campo médio prevê a existência de quatro pontos fixos para a regra B2678/S04567. A determinação desses pontos é realizada fazendo $M(\rho^*) = \rho^*$ na Eq. (4.13), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 \rho^* = & \rho^*(1 - \rho^*)^8 + 28\rho^{*2}(1 - \rho^*)^7 + 70\rho^{*5}(1 - \rho^*)^4 + \\
 & + 84\rho^{*6}(1 - \rho^*)^3 + 36\rho^{*7}(1 - \rho^*)^2 + 9\rho^{*8}(1 - \rho^*). \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Na Tabela 4.4, mostramos os pontos fixos obtidos com a solução da Eq. (4.14). Os pontos fixos não-triviais foram determinados numericamente.

Na Figura 4.17 podemos ver as bacias de atração de cada ponto fixo ρ^* nas simulações CA2D e MF. A bacia de atração da simulação MF (Figura 4.17) mostra que o ponto fixo $\rho^* = 0$ é instável: a densidade da rede $\rho(2000)$ será zero se, e somente se, a densidade inicial for nula ($\rho(0) = 0$).

Figura 4.16: Mapa de retorno de campo médio para a regra B2678/S04567.

Figura 4.17: Bacia de atração da regra B2456/S04567. Em (a), densidade final da simulação CA2D após $t = 2000$ iterações. Em (b), densidade final após $t = 2000$ para a simulação MF. Os resultados foram obtidos em uma rede $L = 100$.

Na Figura 4.17 notamos que, na simulação CA2D, se $\rho(0) \neq 0$ então $\rho(\infty) = 0.42 \pm 0.01$ enquanto que, na simulação MF, temos dois regimes de comportamento: se $\rho(0) \in]0, 0.29]$ ou $\rho(0) \in]0.91, 1]$, então $\rho(\infty) = 0.2907$ e se $\rho(0) \in]0.29, 0.90]$, então $\rho(\infty) = 0.8094$. Portanto, esperamos que a configuração da rede CA2D seja descrita em termos de duas fases, determinadas pelos pontos fixos estáveis $\rho_1^* = 0.2907$ e $\rho_2^* = 0.8094$.

A Figura 4.18 mostra a evolução temporal das densidades obtidas pela aproximação MF, simulação MF e simulação CA2D. Podemos observar que, para a condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$, a densidade esperada pela aproximação MF e a densidade medida na simulação MF convergiram para o ponto fixo $\rho_1^* = 0.2907$, enquanto que a densidade encontrada na simulação CA2D estabilizou em $\rho(\infty) = 0.42 \pm 0.01$.

A tentativa de descrição de ρ_{CA2D} em termos de coexistência e competição entre fases determinadas pelos pontos fixos estáveis $\rho_1^* = 0.2907$ e $\rho_2^* = 0.8094$ pode ser visualizada na Figura 4.19. Observamos que o ajuste da curva esperada $P_{2000}(h)$ foi realizado com os coeficientes $A_{2000}^{1*} = 0.58$, $A_{2000}^{2*} = 0.08$ e $A_{2000}^+ = 1 - A_{2000}^{1*} - A_{2000}^{2*} = 0.34$. O coeficiente A_{2000}^+ determina a presença da fase de interface com densidade $\rho^+ = 0.5501 \pm 0.0002$, que é obtida pela média das densidades $\rho_1^* = 0.2907$ e $\rho_2^* = 0.8094$ das fases Homogênea 1 (com ρ^1) e Homogênea 2 (com ρ^2), respectivamente.

Podemos afirmar, portanto, que o tipo de abordagem que estamos propondo consegue descrever o comportamento da regra B2678/S04567 como coexistência e competição entre os pontos fixos estáveis ρ_1^* e ρ_2^* . Essa descrição permite encontrar a distribuição do número de vizinhos $P_{2000}^{CA2D}(h)$ a partir da distribuição do número

ρ^*	$M_\rho(\rho^*)$
0	1
0.2907 ± 0.0001	0.013 ± 0.004
0.5681 ± 0.0001	1.906 ± 0.002
0.8094 ± 0.0001	-0.927 ± 0.002

Tabela 4.4: Na primeira coluna, pontos fixos do mapa de retorno da regra B2678/S04567. Na segunda coluna, derivada do mapa de retorno em cada ponto fixo.

Figura 4.18: Densidade de células vivas por t para a regra $B2678/S04567$. Resultados obtidos sobre média realizada em 500 simulações diferentes, em uma rede $L = 100$ e condição inicial $\rho(0) = 0.500 \pm 0.005$.

de vizinhos da fase heterogênea $P_{2000}(h)$ e determina a densidade $\rho_{CA2D}(2000)$, que pode ser escrita como:

$$\rho_{CA2D}(t) = A_t^{1*} \rho_1^* + A_t^+ \rho^+ + A_t^{2*} \rho_2^*. \quad (4.15)$$

Um exemplo de configuração na rede quadrada para a regra $B2678/S04567$ pode ser visto na Figura 4.20. Podemos notar que não há a formação de estruturas fixas estáveis ou domínios na rede: há uma competição ativa entre as fases ρ_1^* e ρ_2^* e o CA está na *Classe III* de Wolfram. Essa competição, que impede a formação de núcleos e estruturas espaciais, evita que a correlação entre as células seja muito forte e possibilita a descrição pela aproximação MFI.

(a) $t=2000$

Figura 4.19: Distribuição do número de vizinhos para a regra $B2678/S04567$. A distribuição de vizinhos CA2D é determinada como uma soma entre as fases Homogênea 1 ($\rho^* = 0.2907$) e Homogênea 2 ($\rho^* = 0.8094$). O melhor ajuste é dado pelos coeficientes $A_{2000}^{1*} = 0.58$, $A_{2000}^{+} = 0.34$ e $A_{2000}^{2*} = 0.08$, com erro de ajuste $\Delta = 0.04$. O coeficiente A_{2000}^{+} indica a presença da fase de interface, com densidade $\rho^{+} = 0.5501$, que é a média das densidades das fases Homogênea 1 e Homogênea 2.

Figura 4.20: Configurações da rede celular $L = 100$ do autômato B2678/S04567 em diferentes instantes de tempo. As regiões mais densas correspondem à fase com densidade $\rho_2^* = 0.8094$ e as regiões menos densas têm densidade $\rho_1^* = 0.2907$. A borda entre essas regiões tem densidade $\rho^+ = 0.5501$.

4.5 Conclusão

Nossos resultados mostraram que a aproximação MFI pode descrever o comportamento dos autômatos totalistas na rede quadrada. Contudo, autômatos que apresentam fortes correlações espaciais, como o autômato que representa um modelo de ferromagneto em temperatura $T = 0$ e o autômato com estados tipo labirinto, não conseguem ser descritos pelo nosso tipo de abordagem.

Os resultados encontrados para o LIFE, no capítulo 3, e os resultados encontrados nesse capítulo, para o modelo de ferromagneto em temperatura $T > T_c$ e para o autômato que apresenta coexistência de fases, permitem afirmar que nossa proposta de descrição das fases da rede em termos de coexistência e competição de fases dadas pelos pontos fixos calculados pela aproximação de campo médio foi aplicada satisfatoriamente. Essa descrição permitiu a visualização da rede como uma disputa entre fases, com os coeficientes de composição de cada fase determinados pelo ajuste da distribuição do número de vizinhos $P_t(h)$ aos dados da distribuição do número de vizinhos das simulações CA2D $P_t^{CA2D}(h)$.

Sendo assim, podemos concluir que a aproximação MFI, quando aplicada individualmente em cada autômato celular, faz a distinção em duas classes de comportamento: autômatos triviais e autômatos não-triviais. Os autômatos triviais seriam os autômatos com fracas correlações espaciais que podem ser descritos pela abordagem de campo médio com interfaces, ou seja, por uma combinação linear das fases de campo médio. Os autômatos não triviais seriam, por sua vez, aqueles com correlações espaciais fortes o bastante para impedir que nossa descrição seja aplicada eficientemente.

Nesse tipo de classificação, o Game of LIFE seria um exemplo de autômato quasi-crítico porém trivial. Mesmo para o LIFE, o cálculo de MFI fornece a evolução temporal da densidade $\rho_{CA2D}(t)$ em termos dos coeficientes A_t^* , A_t^+ e A_t^0 em qualquer instante de tempo, como visto na Eq. (3.15).

COMENTÁRIOS FINAIS E PERSPECTIVAS

Encerramos esta dissertação sintetizando os resultados apresentados nos capítulos anteriores, discorrendo sobre suas implicações e fornecendo algumas perspectivas de aplicação da aproximação de campo médio com considerações de interface proposta.

5.1 Comentários finais e perspectivas

A fim de prever teoricamente o comportamento dos autômatos celulares totalistas na rede quadrada, propomos um novo tipo de abordagem que chamamos de abordagem de campo médio com interfaces (MFI). Nessa abordagem, a coexistência e competição de fases (com densidades calculadas pela aproximação de campo médio) e fenômenos de nucleação são considerados. Introduzimos uma densidade de interface ρ^+ que permite a definição do parâmetro de classificação σ_0^+ . A classificação por σ_0^+ das regras de ordem três se revelou mais precisa que a proposta do parâmetro λ por Langton e equivale a um parâmetro de controle no espaço das regras.

A coexistência e a competição das fases é evidente nos autômatos que consideramos triviais (as correlações espaciais existem mas são fracas e não impedem a aplicação da nossa abordagem) e podem ser descritos por densidades globais do tipo $\rho_{CA2D}(t) = A_t^* \rho^* + A_t^+ \rho^+ + A_t^0 \rho^0$, como observado na Eq. (3.15), por exemplo.

O Game of LIFE tem sido interpretado como um modelo de dinâmica de populações de células em um meio de cultura bidimensional [Bauchau, 2006, Vrachliotis, 2007, Emmeche, 1994]. Duas interpretações alternativas poderiam ser o de células cancerosas ($s = 1$) se reproduzindo em um tecido bidimensional sadio

($s = 0$) como, por exemplo, no câncer de pele. Outra interpretação interessante seria encarar o Game of LIFE como representando um sistema de co-evolução entre espécies com interações positivas (simbiose mutualista) e negativas (simbiose parasítica ou predativa). Nesta interpretação, cada célula representa um nicho ecológico e o estado ativo indica que o nicho está ocupado por uma espécie, dentro da rede ecológica de interação entre nichos. As avalanches observadas no GL corresponderiam então às avalanches coevolucionárias definidas por Bak e Sneppen [Bak & Sneppen, 1993] produzindo uma dinâmica que validaria as idéias de evolução com “equilíbrio puntuado” de Gould e Eldredge [Gould & Eldredge, 1977, Eldredge, 1989].

O parâmetro de classificação σ_0^+ no valor de $\sigma_0^+ = 1.006$ permite a afirmação de que o GL seria um autômato quasi-crítico, levemente subcrítico. A subcriticalidade de um autômato com $\sigma_0^+ > 1$ está associada com a definição de que σ_0^+ é uma medida de crescimento espacial da fase nula (ou estado absorvente). O crescimento do estado absorvente provoca um “crescimento subcrítico” (contração) das regiões de células vivas, que conseguem sobreviver à invasão do estado absorvente formando pequenos núcleos estáveis fixos ou periódicos (que poderiam ser interpretados como esporos ou células cancerosas dormentes).

Nossa abordagem sugere que o Game of LIFE seria um autômato quasi-crítico, com $\sigma_0^+ = 1.006$, e comportamento trivialmente descrito como uma dinâmica competitiva das fases ρ^* , ρ^+ e ρ^0 (sendo $\rho^0 = 0$), em que $\rho^+ = (\rho^* + \rho^0)/2 = \rho^*/2$. A dinâmica de competição entre as duas fases na rede celular resulta na formação dos núcleos estáveis, visualizados nas Figuras 3.9 - 3.15, com a evolução temporal dos coeficientes A_t^* , A_t^+ e A_t^0 de participação de cada fase mostrados na Figura 3.16, ilustrando como eles estão presentes na rede.

Nossa proposta também pode ser aplicada em outras regras de autômatos celulares bidimensionais conhecidas na literatura. Packard e Wolfram sugerem em [Packard & Wolfram, 1985] uma lista de regras que apresentaria comportamento complexo (*Classe IV* de Wolfram), que podem ser classificadas de acordo com σ_0^+ e de acordo com a descrição em termos da coexistência e competição de fases. Pretendemos fazer um estudo cuidadoso dessas regras no futuro.

Nossos resultados também poderiam ser comparados com os resultados para autômatos de muito estados ($n \gg 2$) encontrados por Wooters e Langton em

[Wootters & Langton, 1990]. Para isso, precisaríamos usar a vizinhança de von Neumann (Figura 1.1) e aumentar para oito o conjunto de estados acessíveis para cada célula.

Podemos usar a aproximação MFI para classificar os autômatos em redes d -dimensionais em que $d \neq 2$. Por exemplo, a aplicação da aproximação nos autômatos unidimensionais permitiria uma comparação direta com os resultados encontrados por Li *et al.* em [Li et al., 1990] e Langton em [Langton, 1986, Langton, 1990]. Ainda na rede unidimensional, poderemos tentar uma descrição do LIFE unidimensional, considerado por Sales em [Sales, 1993b, Sales, 1993a], e ver as semelhanças desse autômato com o Game of LIFE bidimensional.

Inicialmente, os CAs foram construídos em uma rede d -dimensional. A variação das características dos autômatos, como dimensão, condição de contorno, vizinhança e número de estados, permite verificar a dependência da aproximação com essas características. Outras topologias de rede, como a rede de Bethe, a rede de mundo pequeno (*small-world*), e a rede livre de escala (*scale-free*), podem ser utilizadas na construção dos CAs. Nessas condições, poderíamos realizar o mapeamento do espaço de regras com o parâmetro σ_0^+ e encontrar autômatos com os mesmos níveis de complexidade e auto-organização exibidos pelo GL.

Podemos, ainda, propor outras aplicações para a aproximação MFI como, por exemplo, a classificação das regras de outras ordens (zero, um, dois, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove), a mudança da rede bidimensional de quadrada para hexagonal ou triangular, a determinação do expoente δ_H usando um campo externo H (criação espontânea de sítios $s = 1$ em uma taxa de Poisson H), o estudo das regras não-totalistas (com espaço dado por 2^{512}) e a criação de uma teoria de campo para qualquer dimensão.

Essas são as perspectivas imediatas de aplicação de nossa abordagem. Esperamos que a nova abordagem de campo médio com interfaces forneça resultados satisfatórios quando aplicada nesses sistemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Alstrøm & Leão, 1994] Alstrøm, P. & Leão, J. (1994). Self-organized criticality in the “game of life”. *Phys. Rev. E*, 49(4), R2507–R2508.
- [Bak, 1992] Bak, P. (1992). Self-organized criticality in non-conservative models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 191, 41–46.
- [Bak et al., 1989] Bak, P., Chen, K., & Creutz, M. (1989). Self-organized criticality in the "game of life". *Nature*, 342, 780–781.
- [Bak & Sneppen, 1993] Bak, P. & Sneppen, K. (1993). Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 71(24), 4083–4086.
- [Bak et al., 1987] Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59(4), 381–384.
- [Barone, 2003] Barone, D. (2003). *Sociedades Artificiais: A Nova Fronteira da Inteligência nas Máquinas*. Bookman.
- [Bauchau, 2006] Bauchau, V. (2006). Emergence and reductionism: from the game of life to science of life. In B. FELTZ, M. CROMMELINCK, & P. GOUJON (Eds.), *Self-Organization and Emergence in Life Sciences* (pp. 29–40). Springer Netherlands.
- [Bennet & Bourzutschky, 1991] Bennet, C. & Bourzutschky, M. S. (1991). Life not critical? *Nature*, 350, 468.
- [Berlekamp et al., 1982] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K., & Berlekamp, E. R. (1982). *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 2*. A K Peters, Natick. Massachusetts.

- [Blok, 1995] Blok, H. J. (1995). *Life without bounds: Does the Game of Life exhibit Self-Organized Criticality in the thermodynamic limit?* PhD thesis. September, 1995.
- [Blok & Bergersen, 1997] Blok, H. J. & Bergersen, B. (1997). Effect of boundary conditions on scaling in the “game of life”. *Phys. Rev. E*, 55(5), 6249–6252.
- [Chaté & Manneville, 1990] Chaté, H. & Manneville, P. (1990). Criticality in cellular automata. *Physica D*, 45, 122–135.
- [Chopard & Droz, 1998] Chopard, B. & Droz, M. (1998). *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press.
- [de Jesus Holanda et al., 2004] de Jesus Holanda, A., Pisa, I. T., Kinouchi, O., Martinez, A. S., & Ruiz, E. E. S. (2004). Thesaurus as a complex network. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 344, 530–536.
- [DeVries, 1994] DeVries, P. L. (1994). *A First Course in Computational Physics*. John Wiley & Sons.
- [Eldredge, 1989] Eldredge, N. (1989). *Time Frames: The Evolution of Punctuated Equilibria*. Princeton University Press.
- [Emmeche, 1994] Emmeche, C. (1994). *The garden in the machine: the emerging science of artificial life*. Princeton University Press.
- [Galilei, 2011] Galilei, G. (2011). *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano*. Editora 34.
- [Galilei, 2012] Galilei, G. (2012). *Argumentos e demonstrações matemáticas em torno de duas novas ciências concernentes à mecânica e aos movimentos locais*. Editora 34.
- [Garcia et al., 1993] Garcia, J. B. C., Gomes, M. A. F., Jyh, T. I., Ren, T. I., & Sales, T. R. M. (1993). Nonlinear dynamics of the cellular-automaton “game of life”. *Phys. Rev. E*, 48(5), 3345–3351.

- [Gardner, 1970] Gardner, M. (1970). The fantastic combinations of john conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, 223, 120–123.
- [Gauci, 2008] Gauci, R. (2008). A history of cellular automata. University of East London.
- [Gould & Eldredge, 1977] Gould, S. J. & Eldredge, N. (1977). Punctuated equilibria: The tempo and mode of evolution reconsidered. *Paleobiology*, 3, 115–151.
- [Gutowitz & Victor, 1987] Gutowitz, H. A. & Victor, J. D. (1987). Local structure theory in more than one dimension. *Complex Systems*, 1, 57–68.
- [Gutowitz & Victor, 1989] Gutowitz, H. A. & Victor, J. D. (1989). Local structure theory: Calculation on hexagonal arrays, and interaction of rule and lattice. *Journal of Statistical Physics*, 54, 495–514.
- [Hand & Finch, 1998] Hand, L. N. & Finch, J. D. (1998). *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press.
- [Harris, 1948] Harris, T. E. (1948). Branching processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19, 474–494.
- [Hemmingsson, 1995] Hemmingsson, J. (1995). Consistent results on "life". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 80(1-2), 151 – 153.
- [II & Yu, 1988] II, K. C. & Yu, S. (1988). Undecidability of ca classification schemes. *Complex Systems*, 2, 177–190.
- [Ilachinski, 2001] Ilachinski, A. (2001). *Cellular Automata: A Discrete Universe*. World Scientific Publishing Company.
- [Jensen, 1998] Jensen, H. J. (1998). *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge University Press.
- [Langton, 1984] Langton, C. G. (1984). Self-reproduction in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10, 135–144.

- [Langton, 1986] Langton, C. G. (1986). Studying artificial life with cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 22(1-3), 120 – 149. Proceedings of the Fifth Annual International Conference.
- [Langton, 1990] Langton, C. G. (1990). Computation at the edge of chaos: Phase transitions and emergent computation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 42(1-3), 12 – 37.
- [Li & Packard, 1990] Li, W. & Packard, N. H. (1990). The structure of the elementary cellular automata rule space. *Complex Systems*, 4, 281–297.
- [Li et al., 1990] Li, W., Packard, N. H., & Langton, C. G. (1990). Transition phenomena in cellular automata rule space. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 45(1-3), 77 – 94.
- [Marro & Dickman, 1999] Marro, J. & Dickman, R. (1999). *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press.
- [Maxwell, 1954] Maxwell, J. C. (1954). *Treatise on electricity and magnetism*. Dover.
- [McIntosh, 1990] McIntosh, H. V. (1990). Wolfram’s class iv automata and a good life. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 45(1-3), 105 – 121.
- [McQuarrie, 1976] McQuarrie, D. A. (1976). *Statistical Mechanics*. Harper & Row.
- [Newton, 2002] Newton, I. (2002). *Principia - Princípios matemáticos de filosofia natural - Livro I*. Edusp.
- [Newton, 2008] Newton, I. (2008). *Principia - Princípios matemáticos de filosofia natural - Livro II e III*. Edusp.
- [Olami et al., 1992] Olami, Z., Feder, H. J. S., & Christensen, K. (1992). Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. *Phys. Rev. Lett.*, 68(8), 1244–1247.
- [Packard & Wolfram, 1985] Packard, N. H. & Wolfram, S. (1985). Two-dimensional cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 38, 901–946. 10.1007/BF01010423.

- [Sales, 1993a] Sales, T. R. M. (1993a). Life in one dimension: statistics and self-organized criticality. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26, 6187–6193.
- [Sales, 1993b] Sales, T. R. M. (1993b). Unidimensional games, propitious environments, and maximum diversity. *Phys. Rev. E*, 48(4), 2418–2421.
- [Toffoli, 1984] Toffoli, T. (1984). Cellular automata as an alternative to (rather than an approximation of) differential equations in modeling physics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1-2), 117 – 127.
- [Turk, 1991] Turk, G. (1991). Generating textures on arbitrary surfaces using reaction-diffusion. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 25, 289–298.
- [Twomey, 1980] Twomey, S. (1980). Cloud nucleation in the atmosphere and influence of nucleus concentration levels in atmospheric physics. *The Journal of Physical Chemistry*, 84(12), 1459–1463.
- [van der Straten & Metselaar, 1978] van der Straten, P. J. & Metselaar, R. (1978). Liquid phase epitaxial growth of copper ferrite films. *IEEE Transactions on Magnetism*, 14, 421–423.
- [von Neumann, 1951] von Neumann, J. (1951). *The general and logical theory of automata*. John Wiley & Sons.
- [von Neumann, 1995] von Neumann, J. (1995). *The Neumann Compendium*. World Scientific Publishing Company.
- [Vrachliotis, 2007] Vrachliotis, G. (2007). Game of life. In F. Borries, S. P. Walz, & M. Battger (Eds.), *Space Time Play* (pp. 340–343). Basel.
- [Weimar, 1998] Weimar, J. R. (1998). *Simulation with Cellular Automata*. Logos-Verlag, Berlin.
- [Wolfram, 1983] Wolfram, S. (1983). Statistical mechanics of cellular automata. *Rev. Mod. Phys.*, 55(3), 601–644.

- [Wolfram, 1984a] Wolfram, S. (1984a). Computation theory of cellular automata. *Communications in Mathematical Physics*, 96, 15–57. 10.1007/BF01217347.
- [Wolfram, 1984b] Wolfram, S. (1984b). Universality and complexity in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1-2), 1 – 35.
- [Wolfram, 1985] Wolfram, S. (1985). Twenty problems in the theory of cellular automata. *Physica Scripta*, 1985(T9), 170.
- [Wolfram, 1986] Wolfram, S. (1986). *Theory and applications of cellular automata*. Advanced Series on Complex Systems, Singapore: World Scientific Publication, 1986.
- [Wootters & Langton, 1990] Wootters, W. K. & Langton, C. G. (1990). Is there a sharp phase transition for deterministic cellular automata? *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 45(1-3), 95 – 104.