JOSÉ RENATO ALCARÁS

Espalhamento de ondas acústicas e análise de campos internos de materiais viscoelásticos

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:

Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador:

Alexandre Souto Martinez.

Versão corrigida

Versão original disponível na FFCLRP-USP

Ribeirão Preto

2018

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

FICHA CATALOGRÁFICA

Alcarás, José Renato

Espalhamento de ondas acústicas e análise de campos internos de materiais viscoelásticos / José Renato Alcarás; orientador: Alexandre Souto Martinez. -
- Ribeirão Preto, 2018.

43 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de
Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, 2018.

Inclui Bibliografia.

1. Espalhamento 2. Materiais viscoelásticos 3. Acústica

Dedico esse trabalho aos meus queridos pais.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez, pela orientação e incondicional apoio, suporte e crítica ao longo do desenvolvimento desse estudo.

Ao meu ex-orientador de Iniciação Científica, Prof. Dr. Marcelo Mulato, pela amizade e apoio ao desenvolvimento científico.

Aos meus colegas de laboratório, bem como aos amigos presentes no Departamento de Física, pelo constante apoio, companhia e sugestões feitas nos últimos dois anos.

Aos professores do Programa de Física Aplicada à Medicina e Biologia, pelo estímulo ao pensamento crítico e orientação ao longo das disciplinas cursadas.

A todo o Departamento de Física, pelos suporte dado à pesquisa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

ALCARÁS, J. R. **Espalhamento de ondas acústicas e análise de campos internos de materiais viscoelásticos**. 2018. 43 f. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2018.

O espalhamento de ondas de som tem por objetivo compreender a natureza de propagação de ondas sonoras incidentes e espalhadas, para diferentes estruturas e geometrias dos centros espalhadores que formam um meio desordenado. Na literatura, em geral, obtemos informações relativas ao espalhamento acústico em regiões distantes dos centros espalhadores (aproximação de campo distante), para algumas formas de onda incidentes e de partículas espalhadoras. Buscando compreender o comportamento ondulatório em regiões próximas ao centro espalhador e em seu interior, nosso estudo fornece uma descrição analítica dos campos de radiação acústica nessas regiões. Inicialmente, considera-se o problema do espalhamento de uma onda plana acústica plana (viajando num fluido ideal newtoniano) por uma partícula esférica fluida, com características distintas das do fluido inicial. Ainda, calculamos a energia interna armazenada nesse centro espalhador como função do volume da esfera espalhadora, bem como do comprimento da onda em seu interior, de sua amplitude e da densidade do centro espalhador. Posteriormente, os materiais espalhadores são considerados de natureza viscoelástica (que apresentam comportamentos viscosos e elásticos sob a ação de forças externas), por serem viáveis na modelagem de células biológicas e polímeros, em geral. Para isso, tratamos formalmente da física de materiais elásticos, como deformações e tensões, a fim de respaldar o tratamento do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt fracionário usado em nosso estudo. Obtivemos fórmulas fechadas para os coeficientes de espalhamento (bem como os coeficientes das ondas internas ao centro espalhador) desse problema em questão, a partir da solução de um sistema linear de equações. Os resultados permitem a construção de uma teoria de base para um estudo generalizado do espalhamento de ondas acústicas por materiais viscoelásticos, perspectiva a ser conduzida num futuro próximo.

Palavras-chave: 1. Espalhamento 2. Materiais viscoelásticos 3. Acústica

Abstract

ALCARÁS, J. R. **Acoustic wave scattering and internal fields analysis of viscoelastic materials**. 2018. 43 f. Dissertation (M.Sc. - Postgraduate program in Physics Applied to Medicine and Biology) - Faculty of Philosophy, Sciences and Letters, University of São Paulo, Ribeirão Preto, 2018.

The sound wave scattering aims to understand the propagation nature of scattered and incident sound waves, for different structures and geometries of the scattering centers that form a disordered environment. In the literature, in general, we obtain information regarding the acoustic scattering in regions distant from the scattering centers (far-field approximation), for some incident waveforms and scattering particles. In order to understand the undulatory behavior in regions close to and within the scattering center, our study provides an analytical description of the acoustic radiation fields in these regions. First, the problem considered is the scattering of an acoustic plane wave (previously traveling through an ideal newtonian fluid) by a spherical fluid particle, with distinct acoustic characteristics from the initial fluid. Still, it is determined the internal acoustic energy stored in this scattering center, as a function of the scattering sphere's volume, as well as the wavelength in its interior, its amplitude and the density of the scattering center. Later, the scattering materials are considered to be viscoelastic (which exhibit viscous and elastic behavior when subjected to external forces), as they are feasible in the modeling of biological cells and polymers in general. For such, we deal formally with elastic material's physics, such as deformations and tensions, in order to deal with the Kelvin-Voigt viscoelastic model used in this problem. Were determined closed formulas for the scattering coefficients for this problem (as well as the internal wave coefficients), from the solution of a linear system of equations. The results allow the construction of a fundamental theory for a generalized study of sound wave scattering by viscoelastic materials, which is a goal to be achieved in a near future.

Key-words: 1. Scattering 2. Viscoelastic materials 3. Acoustics

Lista de Figuras

- 2.1 Diagrama ilustrativo do problema considerado: uma onda acústica plana, com comprimento de onda λ , viaja num fluido ideal e incompressível de densidade ρ_0 . O esquema representa as frentes de onda plana (onde, em cada plano, a fase da onda é constante), que viajam numa direção do espaço. 6
- 3.1 Representação esquemática do problema de espalhamento por uma partícula penetrável: uma esfera líquida de raio a e densidade ρ_1 é centralizada na origem do sistema de coordenadas. Sobre ela, incide uma onda φ_{in} que viaja num fluido ideal e incompressível de densidade ρ_0 , na direção crescente do eixo z 15
- 3.2 Valores absolutos dos coeficientes de espalhamento, $|s_l|$ em função de $x_1 = k_1 a$, com $x_0 = 2\pi$ (a onda incidente tem comprimento de onda da ordem do raio a da esfera), para $l = 0, 1, 2$ e 3 . Foi considerado que $\rho_0/\rho_1 = 1, 5$ 20
- 3.3 Valores absolutos dos coeficientes internos, $|b_l|$ em função de $x_1 = k_1 a$, com $x_0 = 2\pi$ (a onda incidente tem comprimento de onda da ordem do raio a da esfera), para $l = 0, 1, 2$ e 3 . Foi considerado que $\rho_0/\rho_1 = 1, 5$. 21
- 3.4 Comparativo entre os coeficientes b_l e s_l , em função de x_1 (os parâmetros usados para os cálculos foram os mesmos da Fig. 3.3, ou seja, $x_0 = 2\pi$, $\rho_0/\rho_1 = 1, 5$). À esquerda, compara-se s_0 e b_0 para valores de $x_1 < 15$, observando-se boa concordância entre os picos e vales. À direita, compara-se b_2 e s_2 , para $x_1 < 30$, a fim de verificar que o padrão de picos e vales se mantém. Os picos e vales representam as ressonâncias entre onda incidente e centro espalhador. 21

- 3.5 Valores da energia depositada no interior da esfera no limite de Rayleigh (onde $x_1 \ll 1$), $W_{Rayleigh}$ em função de x_1 para $a = 0, 1$, $B = 1$ e $\rho_1 = 1$. Nota-se que, nesse limite, não existem fenômenos de ressonância significativos, graças ao comportamento simples das funções de ordem 0 envolvidas no cálculo de b_0 quando seu argumento tende a zero. 27
- 3.6 Valores ilustrativos da seção de choque diferencial em função do ângulo θ (para $a = 0.1$, $x_0 = 2\pi$, $x_1 = 1$ e $m = 0,2387$, somando 5 termos da Eq. (3.49)). Nota-se uma grande parcela de espalhamento frontal (para $\theta \rightarrow 0$ ou $\theta \rightarrow 2\pi$), e uma parcela notável de retroespalhamento em $\theta \rightarrow \pi$ 28
- 4.1 Caracterização geométrica do vetor deslocamento $\mathbf{u}$ em função dos vetores posição antes ($\mathbf{r}$) e depois ($\mathbf{r}'$) da deformação do corpo. 30
- 4.2 Representação do volume V_0 no interior de um corpo deformável, sujeito a forças $\mathbf{F}_i$, a serem consideradas como de efeito próximo, resultado da ação de posições adjacentes ao volume em sua deformação. 32
- 5.1 Diagrama do modelo de Kelvin-Voigt, mostrando que a interação entre dois pontos do corpo sob a ação de tensões σ pode ser modelada pela associação em paralelo de uma mola (que representa o caráter elástico do material) com um pistão (que dá caráter viscoso à deformação). 40
- 1.1 Diagrama que representa as coordenadas esféricas, adotadas ao longo do trabalho. Caracteriza-se um ponto de coordenadas retangulares (x, y, z) a partir das análogas esféricas (r, θ, ϕ) fazendo uso da transformação (1.1). 55
- 1.2 Funções $Y_l^m(\cos \theta, \phi)$ para $l = 0, 1, 2$ e $m = 0, 1, 2$, quando possível. . . 57

- 1.3 À esquerda: funções de Bessel esféricas $j_l(x)$, para $l = 0, 1, 2, 3, 4$. À direita: valor absoluto das funções de Hankel esféricas do primeiro tipo, $|h_l^{(1)}(x)|$. Nota-se que as funções de Bessel são bem definidas na origem, e oscilam quando $x \rightarrow \infty$, enquanto as funções de Hankel esféricas do primeiro tipo não são bem definidas para $x \rightarrow 0$, mas decaem a zero a medida que $x \rightarrow \infty$ 58

Sumário

Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
2 Propagação de ondas acústicas num fluido ideal	5
2.1 Pressão e densidade	6
2.2 Conservação de massa	7
2.3 Conservação de momento	8
2.4 Equação de onda	8
2.5 Equação de Helmholtz	10
3 Fenômenos de espalhamento e energia interna ao centro espalhador	13
3.1 Espalhamento de ondas	13
3.2 Esfera penetrável	15
3.2.1 Coeficientes de espalhamento	16
3.2.2 Limites de rigidez	21
3.3 Energia interna ao centro espalhador	23
3.4 Seção de choque	27
4 Teoria da elasticidade	29
4.1 Tensor de deformações, ϵ_{ik}	29
4.2 Tensor de tensões, σ_{ik}	32
4.3 Relação entre ϵ_{ik} e σ_{ik}	34
4.4 Coeficientes de Lamé	36
5 Sólidos viscoelásticos	39
5.1 Modelo de Kelvin-Voigt	39

5.2	Equação de Helmholtz em um sólido viscoelástico	40
5.3	Modelo de Kelvin-Voigt fracionário	46
5.4	Espalhamento por uma esfera viscoelástica	47
6	Conclusões e perspectivas	53
	Apêndice 1 - Solução da equação de Helmholtz - coordenadas esféricas	55
	Apêndice 2 - Tensor de deformações - geometria esférica	61
	Apêndice 3 - Comutabilidade de operadores	63
	Apêndice 4 - Fórmulas de recorrência e assintóticas - funções de Bessel e Hankel	65
	Referências	67

Introdução

A teoria de espalhamento é um tópico bastante investigado em Física há centenas de anos: desde o tratamento da luz, que produziu importantes resultados como a lei de Snell, os princípios de Huygens e de Fermat no século XVII [1]; passando pela formalização da acústica por Lorde Rayleigh, com seus trabalhos na teoria do som [2] e áreas derivadas [3–5] entre o final do século XIX e início do século XX; e culminando, atualmente, nos diferentes aspectos de espalhamento observados na teoria quântica [6–8]. Nesse estudo, em especial, estamos interessados na dinâmica de ondas sonoras, que foram vastamente investigadas a fim de produzir e aprimorar equipamentos para sua geração e transmissão [2, 9, 10]. Nos propomos, então, a desbravar o mecanismo por trás do espalhamento de ondas de som ao interagirem, em seu caminho de propagação, com materiais de natureza viscoelástica. Tal objetivo pede por uma introdução aos três grandes tópicos que envolvem o estudo: a natureza de ondas sonoras; fenômenos de espalhamento; e a caracterização de materiais viscoelásticos.

Ondas, de quaisquer natureza, envolvem o entendimento de *fenômenos oscilatórios* [9]. O conceito de onda é o de uma oscilação (seja de matéria, como ondas de som, ou de campos vetoriais, como ondas eletromagnéticas) que se propaga no espaço, com a propriedade de ser capaz de transferir energia e momento de um ponto de partida até um ponto de chegada.

A *Acústica* é o ramo da Física preocupado com a produção e propagação de ondas de natureza sonora. O som é uma onda de pressão mecânica e, por isso, requer um meio material para que possa viajar. A detecção da onda sonora nos seres humanos depende da sua *frequência de propagação*, sendo que a audição humana é

capaz de detectar ondas de som com frequências entre 20 Hz e 20 KHz. Inferior a essa frequência, lidamos com *infrassom*, enquanto frequências maiores do que essa banda são tratadas por *ultrassom* [11].

Hoje, o conceito de som abrange não só a ideia de vibrações no ar que produzem a sensação da audição, mas quaisquer outros fenômenos físicos que envolvam ondas dessa natureza. Isso engloba aplicações importantes, como o uso de *sonares* [12] (sistemas de localização subaquáticos) em navios e submarinos; ondas sísmicas resultantes dos movimentos das placas tectônicas terrestres [13]; uso de ondas acústicas para caracterização e localização de fontes de petróleo ou gás subterrâneo [14]; propagação de fônons em sólidos [15]; sistemas de isolamento acústico, de melhorias acústicas em arquitetura e estruturas [16]; o efeito de radiações acústicas em corpos e substâncias; entre outras aplicações no desenvolvimento e aplicabilidade de metamateriais acústicos [17, 18].

Quando uma onda sonora encontra algum obstáculo em seu caminho de propagação, ela pode ser atenuada por ele de duas formas distintas: ou sendo *absorvida* pelo centro espalhador (e meio que o circunda), caracterizando o fenômeno de *absorção*; ou tendo sua trajetória *desviada* da rota inicial. A esse último fenômeno denomina-se *espalhamento* [19]. Esses dois processos de atenuação devem ocorrer de forma concomitante, de forma que existe grande interesse no desenvolvimento de metamateriais que sejam capazes de absorver ou refletir ondas “perfeitamente”, ou seja, tentando minimizar o outro efeito no processo [20, 21].

Fenômenos de espalhamento são muito comuns em Física, não se restringindo a uma onda sonora: podemos tratar do espalhamento de uma partícula por outra, ou por um potencial que altere sua trajetória [22, 23]. Ainda, podemos considerar corpos maiores, passando por bolas de sinuca, até meteoritos que tem seus caminhos afetados pelo campo gravitacional de corpos celestes, podendo ser observados da Terra a partir da reflexão de ondas de rádio por seus rastros que adentram a atmosfera terrestre [24]. Nessa dissertação, tratamos formalmente de quais grandezas são levadas em conta no estudo dessas situações, bem como da matemática usada ao lidar com tais problemas.

O tratamento completo do problema em questão nesse estudo envolve também a descrição de materiais viscoelásticos. Em física de materiais, tratamos um

corpo como *viscoelástico* quando ele apresenta duas características distintas ao ser atuado por uma força externa: uma resistência *viscosa* à sua deformação, e também um padrão *elástico* em retornar à sua configuração inicial após a força ter sido aplicada sobre ele. Células biológicas e alguns tipos de polímeros podem ser modelados por materiais dessa natureza quando sob o efeito de pequenas tensões[25], o que os torna de bastante relevância científica. Tratamos com detalhes matemáticos a caracterização desse tipo de material, deduzindo expressões importantes das relações entre os tensores de tensão e deformação para sólidos viscoelásticos.

As ideias provenientes desse estudo podem estimular desenvolvimentos tecnológicos, bem como auxiliar na formulação de outros. Por exemplo, na manipulação de células biológicas com o uso de ultrassom [26, 27] e no uso de sonares para a localização de objetos [28, 29], o espalhamento sonoro é peça chave e é de grande utilidade na descrição dos fenômenos.

Essa dissertação encontra-se organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, tratamos da matemática da propagação de ondas sonoras em um fluido ideal, revisando a literatura [30] e reproduzindo as equações de movimento para sua propagação. Com esses conceitos em mãos, fazemos um estudo da teoria de espalhamento no Capítulo 3, tratando do caso em que uma esfera penetrável é usada como centro espalhador num fluido ideal em que se propaga uma onda sonora plana. Nesse estudo, consideramos casos gerais que não levam em conta a relação entre as dimensões da partícula espalhadora e o comprimento da onda incidente. Em particular, determinamos a quantidade de energia acústica que é depositada no interior de um centro espalhador esférico fluido, distinto do meio que o circunda. A investigação da energia depositada é de grande relevância para a Acústica em geral, e ela foi baseada nos resultados já publicados para fenômenos eletromagnéticos [31–38], produzindo informações importantes sobre relações entre comprimento da onda incidente e as dimensões do centro espalhador, possibilitando a existência de ressonâncias e, assim, aumentando o escopo para o desenvolvimento de metamateriais acústicos. Posteriormente, no Capítulo 4, fazemos uma revisão acerca da teoria da elasticidade, buscando definições precisas para tensões e deformações em corpos. No Capítulo 5, definimos formalmente materiais viscoelásticos, sob a modelagem de Kelvin-Voigt e abordamos o problema de espalhamento no caso em que o centro espalhador pos-

sua natureza viscoelástica e simetria esférica. O Capítulo 6 conta com conclusões provenientes dessa análise, bem como com perspectivas a serem exploradas futuramente. A dissertação foi estruturada de forma a responder uma pergunta-chave que estimula a construção de cada capítulo, de modo a sumariá-las ao final do estudo.

Propagação de ondas acústicas num fluido ideal

Ondas acústicas são perturbações num meio material *contínuo* que transportam energia e momento. Sua propagação depende das propriedades do meio onde ela viaja, bem como da forma da onda em questão. Em fluidos, as ondas acústicas possuem modos longitudinais de vibração, isto é, tem direção de propagação igual à direção de deslocamento característica da onda [9].

A primeira pergunta a ser respondida é: por que o som é caracterizado como uma onda? Fenômenos ondulatórios, em geral, possuem alguma grandeza que satisfaz uma *equação de onda*. No caso de uma grandeza escalar ψ , e velocidade da onda c , essa equação é dada por

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

ou seja, existe uma dependência entre as grandezas espaciais de ψ e sua situação temporal. Esse capítulo tem por objetivo mostrar o que caracteriza o som como uma onda.

Para tal, vamos nos situar num *fluido ideal* (de propriedades macroscópicas constantes) e construir a equação de onda do som, seguindo os passos da Ref. [39]. Inicialmente, é importante conhecer a grandeza *densidade* do fluido, ρ , que corresponde à razão massa por volume do fluido. Ainda, as partículas que constituem um fluido possuem velocidades não nulas, isto é, elas permanecem em constante movimento. Se cada i -ésima partícula de um elemento de volume V_0 possuir velocidade $\mathbf{v}_i$, define-se a *velocidade do centro de massa* $\mathbf{v}$ como a soma

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho V_0} \sum_i m_i \mathbf{v}_i, \quad (2.2)$$

que mede uma velocidade média no deslocamento das partículas do elemento de volume.

Figura 2.1: Diagrama ilustrativo do problema considerado: uma onda acústica plana, com comprimento de onda λ , viaja num fluido ideal e incompressível de densidade ρ_0 . O esquema representa as frentes de onda plana (onde, em cada plano, a fase da onda é constante), que viajam numa direção do espaço.

2.1 Pressão e densidade

O ponto de partida para a obtenção da equação de onda é encontrar a grandeza que irá satisfazer a Eq. (2.1). Como a onda sonora é uma onda de *pressão*, é natural supor que algo relacionado a ela terá a natureza ondulatória.

O som se propaga a uma velocidade finita, c_0 , num fluido inicialmente não perturbado de densidade ρ_0 e pressão p_0 . Definindo essas grandezas formalmente: a passagem do som no material altera localmente sua densidade, ou seja, a pressão p do fluido é função de sua densidade. Para demonstrar essa relação, considere a primeira lei da termodinâmica, escrita por unidade de massa (com $u = U/m$, $s = S/m$ e $\rho^{-1} = V/m$):

$$du = T ds - p d(\rho^{-1}). \quad (2.3)$$

Como o transporte de calor pelo som ocorre muito lentamente no sistema, o processo em questão é adiabático. Com isso, $ds = 0$, implicando que

$$du = p \rho^{-2} d\rho, \quad (2.4)$$

e, dessa forma, $p = p(\rho)$. Isso implica que pequenas variações na pressão, $p - p_0$, podem ser expressas em termos de uma expansão em série de Taylor nas variações da densidade, $\rho - \rho_0$:

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n p}{\partial \rho^n}(\rho_0) \frac{(\rho - \rho_0)^n}{n!}. \quad (2.5)$$

Note que as dimensões do termo $\partial_\rho p(\rho_0)$ são as mesmas do quadrado de uma velocidade:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right] = \frac{\text{Pressão}}{\text{Densidade}} = \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{M}{L^3}} = \frac{\frac{ML}{t^2 L^2}}{\frac{M}{L^3}} = \frac{ML^4}{ML^2 t^2} = \left(\frac{L}{t} \right)^2 \quad (2.6)$$

Com isso, define-se formalmente a velocidade do som como

$$c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0). \quad (2.7)$$

Esse foi o primeiro passo na obtenção da equação de onda do som: a *velocidade* com que a onda se propaga. Resta, agora, saber de que forma essa propagação ocorre. Para isso, vamos considerar a conservação de grandezas fundamentais do fluido e obter expressões gerais que possam produzir a equação de onda.

2.2 Conservação de massa

A massa é uma grandeza fundamental de um fluido, e que deve ser conservada mesmo na presença de uma onda sonora. Com isso, a massa de um elemento de volume V_0 (limitado por uma superfície S_0) só deve variar caso alguma massa entre ou saia desse elemento de volume: ou seja, só há variação temporal de massa se houver fluxo de massa por S_0 . Assim,

$$\partial_t \int_{V_0} \rho \, dV + \int_{S_0} \mathbf{J}_p \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{J}_p = \rho \mathbf{v}$ simboliza a densidade de momento do fluido num ponto do espaço. Usando o teorema de Gauss na segunda parcela da equação acima e comutando a integral no espaço da primeira parcela com a derivada temporal (aceitável pelas dimensões de dV), obtém-se:

$$\int_{V_0} \partial_t \rho \, dV + \int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{J}_p \, dV = 0. \quad (2.9)$$

Como as integrais são feitas em volumes arbitrários, e convergem absolutamente, a igualdade deve valer ponto a ponto e, portanto,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0. \quad (2.10)$$

Essa é a *equação de conservação de massa* do fluido (análoga à equação da continuidade $\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}$). Ela dita como ocorre a variação da massa num elemento infinitesimal de volume no fluido ideal.

2.3 Conservação de momento

Considerando que as forças externas que atuam no sistema são de magnitudes desprezíveis na sua variação do momento, pode-se considerar que o momento de um volume V_0 pode variar ou por meio de seu próprio fluxo pela superfície que o delimita, S_0 , ou pela ação de forças de pressão em S_0 . Vale lembrar que a densidade de momento $\mathbf{J}_p = \rho \mathbf{v}$, nesse contexto, possui fluxo $\mathbf{J}_p \mathbf{v}$, onde $\mathbf{J}_p \mathbf{v}$ simboliza o produto tensorial entre a densidade de momentos $\mathbf{J}_p$ e a velocidade $\mathbf{v}$ num ponto $\mathbf{r}$ (um tensor de segunda ordem). Dessa forma, escreve-se:

$$\partial_t \int_{V_0} \mathbf{J}_p dV + \int_{S_0} p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS + \int_{S_0} \mathbf{J}_p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

onde $p(\mathbf{r}, t)$ simboliza a pressão num ponto $\mathbf{r}$ num tempo t . Aplicando o teorema de Gauss nas integrais de superfície, obtém-se três integrais no volume V_0 . Comutar o operador ∂_t com a integral no espaço produz

$$\partial_t(\mathbf{J}_p) + \nabla p + \nabla \cdot (\mathbf{J}_p \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

O tensor de tensões σ de um fluido não viscoso é $\sigma = p\mathbf{I} + \mathbf{J}_p \mathbf{v}$. Logo,

$$\partial_t \mathbf{J}_p + \nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Dessa forma, a Eq. (2.13) mostra que a variação temporal da densidade de momento é causada pela divergência das tensões num dado ponto do fluido. Note que tanto a Eq. (2.13) quanto a Eq. (2.10) descrevem relações entre derivadas temporais e derivadas espaciais de densidades e pressões. Isso inspira que elas sejam a chave para a obtenção da equação de onda.

2.4 Equação de onda

Para simplificar as Eqs. (2.13) e (2.10), considera-se uma *análise perturbativa* do problema. É necessário encontrar um parâmetro pequeno $M \ll 1$, chamado *parâmetro de perturbação*, para expandirmos as grandezas de interesse em termos de M .

Para isso, considere que a velocidade máxima que o fluido possa assumir na passagem da onda de pressão seja de magnitude v_0 . Certamente, $v_0 \ll c_0$, ou seja, a velocidade do próprio som é muito maior do que a perturbação de velocidade que ele gera no meio. Isso implica que a fração $v_0/c_0 \ll 1$. Logo, pode-se considerar como parâmetro de perturbação

$$M = \frac{v_0}{c_0}, \quad (2.14)$$

conhecido como número de Mach [39]. A expansão em séries de potência das grandezas de interesse são:

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M^n p^{(n)}, \quad (2.15a)$$

$$\rho - \rho_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M^n \rho^{(n)}, \quad (2.15b)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty} M^n \mathbf{v}^{(n)}, \quad (2.15c)$$

onde o índice (n) indica a ordem da perturbação. Considerando a *aproximação linear*, têm-se

$$p - p_0 = M p^{(1)}, \quad (2.16a)$$

$$\rho - \rho_0 = M \rho^{(1)}, \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{v} = M \mathbf{v}^{(1)}. \quad (2.16c)$$

Essas expressões simplificam as equações de conservação de massa e momento. Considerando apenas os termos proporcionais a M , trunca-se a soma da série de Taylor da Eq. (2.5) para $n = 1$ e obtém-se $M p^{(1)} = M \rho^{(1)} c_0^2$, ou seja,

$$\rho^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{c_0^2}; \quad (2.17)$$

na Eq. (2.10),

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0. \quad (2.18)$$

Ainda, como a parcela $\nabla \cdot (\mathbf{J}_p \mathbf{v})$ na Eq. (2.12) é proporcional a M^2 , ela pode ser descartada por ser muito pequena se comparada com os demais termos. Juntamente com as expansões lineares obtidas acima, escreve-se

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial t} + \nabla p^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Note que, na aproximação de primeira ordem, o campo de velocidades é irrotacional (para verificar tal fato, basta tomar o rotacional da Eq. (2.19)). Do cálculo vetorial, isso implica que $\mathbf{v}$ é o gradiente de alguma função potencial ψ :

$$\mathbf{v}^{(1)} = \nabla\psi. \quad (2.20)$$

A relação dessa função potencial com a pressão é obtida ao substituir a Eq. (2.20) em (2.19) e comutar os operadores de posição e tempo entre si, produzindo $\rho_0\partial_t(\nabla\psi) + \nabla p^{(1)} = \mathbf{0}$. Trabalhando com os operadores, chega-se a $\nabla(\rho_0\partial_t\psi) = \nabla(-p^{(1)})$. Como essa relação é válida em todos os pontos, conclui-se que

$$p^{(1)} = -\rho_0\partial_t\psi. \quad (2.21)$$

As Eqs. (2.20) e (2.21) são chamadas de *relações constitutivas* da onda acústica descrita pelo potencial ψ .

Por fim, substituindo a Eq. (2.21) em (2.18), obtém-se a equação de onda:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.22)$$

Logo, nosso objetivo foi alcançado: o som pode ser descrito por uma função potencial ψ , relacionada à pressão pela Eq. (2.21) e ao campo de velocidades induzidos no meio pela Eq. (2.20). Essa função potencial satisfaz a equação de onda escalar e, por isso, pode-se caracterizar o som como um fenômeno ondulatório. Esses resultados são bem conhecidos na literatura [9, 11, 30], e foram reproduzidos aqui com o propósito de sedimentar a teoria que segue.

2.5 Equação de Helmholtz

As soluções da equação de onda $\psi(\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t)$ remontam a Euler, Bernoulli e D'Alambert. No entanto, apesar de bem conhecidas, lidar com dependências temporais arbitrárias pode trazer complicações desnecessárias ao problema da propagação da onda sonora. Como, em geral, a fonte emissora das ondas de som primárias são controladas, pode-se supor, por simplicidade, que elas sejam geradas com *dependência temporal harmônica*, isto é,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.23)$$

onde $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular da onda (dada sua frequência linear f). Essa dependência temporal na Eq. (2.22) implica, tomando $k = \omega/c_0$, na *equação de Helmholtz* para o fasor $\varphi(\mathbf{r})$ (onde o termo “fasor” denota o fato dessa quantidade ser invariante no tempo e ter características ondulatórias),

$$(\nabla^2 + k^2) \varphi = 0. \quad (2.24)$$

Suas soluções, $\varphi(\mathbf{r})$, dão o comportamento da pressão e do campo de velocidades gerados no fluido ideal onde se propaga a onda de som. O Apêndice 1 trata da solução analítica dessa equação considerando simetria esférica, de interesse para a aplicação neste estudo, bem como das figuras que ilustram as funções especiais usadas nas soluções. Em resumo, pode-se escrever suas soluções nessa geometria (ver Fig. 1.1 no Apêndice 1) em termos das funções reais j_l e y_l :

$$\varphi(kr, \cos \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} y_l(kr)] Y_l^m(\cos \theta, \phi), \quad (2.25)$$

ou das combinações complexas $h_l^{(1)}$ e $h_l^{(2)}$

$$\varphi(kr, \cos \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [s_{lm} h_l^{(1)}(kr) + c_{lm} h_l^{(2)}(kr)] Y_l^m(\cos \theta, \phi), \quad (2.26)$$

onde a_{lm} , b_{lm} , s_{lm} e c_{lm} são coeficientes de expansão; $j_l(z)$ é a função de Bessel esférica no argumento z ; $y_l(z)$ é a função de Neumann esférica no argumento z ; $h_l^{(1)}(z)$ e $h_l^{(2)}(z)$ são as funções de Hankel esféricas de primeiro e segundo tipo, respectivamente, no argumento z ; $Y_l^m(\cos \theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. A escolha das Eqs. (2.25) e (2.26) deve ser feita com base na região onde φ deve estar definida (por exemplo, $j_l(z)$ é uma função bem definida a medida em que $z \rightarrow 0$, enquanto $y_l(z)$ não o é). A ref. [40] trata em mais detalhes o formalismo da análise dessas expansões.

Fenômenos de espalhamento e energia interna ao centro espalhador

Iremos, agora, investigar a dinâmica do espalhamento da onda sonora, inicialmente viajando por um fluido ideal e incompressível, que interage com uma partícula (de simetria esférica, nesse caso) ao longo de sua trajetória. Quais são as grandezas de interesse nesse tipo de problema?

Para responder a essa pergunta, inicia-se uma discussão sobre o espalhamento de ondas, definindo hipóteses importantes para o tratamento do problema. Posteriormente, a situação em que a esfera espalhadora seja *penetrável*, isto é, o campo acústico pode adentrar em seu interior ao ser espalhado é tratado em detalhes. Isso permite investigar quanta *energia* é depositada pela onda acústica no processo de espalhamento *interna* à partícula espalhadora. Esse resultado novo levou à produção de um manuscrito que deve ser submetido à publicação num futuro próximo. Ainda, mostra-se a seção de choque diferencial do problema, fazendo uso dos coeficientes de espalhamento determinados ao longo desse capítulo.

3.1 Espalhamento de ondas

Quando uma onda sonora encontra algum obstáculo em seu caminho de propagação, ela pode interagir com ele de duas formas distintas: ou sendo *absorvida* pelo centro espalhador (e meio que o circunda); ou tendo sua trajetória *desviada* da rota inicial. A esse último fenômeno denomina-se *espalhamento* [19].

O espalhamento de ondas tem influência nas propriedades mecânicas do meio em que ela se propaga. Macroscopicamente, com relação a uma onda acústica, o espalhamento pode interferir nos coeficientes de absorção e reflexão do material, alterando a maneira com que a onda passa por ele. De maneira geral, pode-se relacionar a alteração nessas propriedades mecânicas à estrutura que constitui o material, uma vez que o espalhamento das ondas pode ser entendido pela interação delas com as partículas espalhadoras no meio. Ainda, deve-se considerar no problema o comprimento da onda em questão, e a relação entre a sua magnitude e as dimensões do centro espalhador.

Além das ondas que são espalhadas pelo vibrar do centro espalhador, o material pode absorver parte da energia da onda incidente, por exemplo, alterando sua temperatura, em um processo denominado *absorção*. Esse fenômeno está intimamente relacionado a um aumento na entropia do sistema, por alterar a quantidade de energia entre a radiação incidente e a espalhada. Matematicamente, ele se expressa na parte imaginária do número de onda, k , por ele se relacionar à fase dos campos mecânicos (grandeza que é alterada numa situação de absorção).

Uma consideração importante a ser feita acerca do espalhamento das ondas é o *espalhamento simples*: considera-se que o número de partículas espalhadoras é suficientemente pequeno e a separação entre elas é grande o bastante de tal forma que o campo espalhado por uma partícula se deve *somente* à radiação mecânica incidente (ou seja, uma onda já espalhada não deve interagir com outro centro espalhador), desprezando-se o espalhamento múltiplo. Além disso, não há uma relação explícita entre as fases das ondas espalhadas por cada um dos centros espalhadores, de modo que não ocorrerão fenômenos de interferência significativos. A consequência mais fundamental dessas hipóteses é a de que pode-se tratar a onda espalhada por um material pela soma das ondas espalhadas por cada uma das partículas espalhadoras que o constituem. Portanto, trata-se do espalhamento de uma única partícula, de simetria esférica, inserida num fluido ideal como descrito.

O problema, então, é o de entender a interação entre um feixe de radiação acústica, de comprimento de onda arbitrário, e uma partícula esférica isolada, imersa em um fluido homogêneo ideal. A homogeneidade do fluido diz apenas que a heterogeneidade molecular ou atômica dos componentes que constituem o fluido é pequena

ao ser comparada ao comprimento da onda incidente. Trataremos exclusivamente de um espalhamento clássico, não havendo nenhuma consideração na interação entre a radiação mecânica com qualquer tipo de fenômeno de natureza quântica.

Ainda, assume-se que o centro espalhador esférico é uma partícula isolada em um meio infinito, isto é, a única interação que ocorre é a da onda incidente com o centro espalhador. A onda incidente é suposta monocromática, assumida como plana num primeiro momento, de frequência angular ω , frequência essa que também é da onda espalhada e interna ao centro espalhador.

3.2 Esfera penetrável

Figura 3.1: Representação esquemática do problema de espalhamento por uma partícula penetrável: uma esfera líquida de raio a e densidade ρ_1 é centralizada na origem do sistema de coordenadas. Sobre ela, incide uma onda φ_{in} que viaja num fluido ideal e incompressível de densidade ρ_0 , na direção crescente do eixo z .

O problema tratado aqui considera que o centro espalhador esférico, caracterizado por sua densidade ρ_1 e raio a , é *penetrável*. Por penetrável, entende-se que ele não atua somente como um redirecionador da onda incidente: a onda, de fato, *entra* em seu interior, sendo assim mais influenciada pelo centro espalhador do que uma situação onde não há entrada (regime de difração).

Isso requer algumas considerações importantes. Primeiramente, deve existir uma função φ_1 no interior do centro espalhador que descreve a onda acústica e, portanto, é solução da equação de Helmholtz, Eq. (2.24). Isso é satisfeito para espalhadores fluidos, onde não existem ondas de cisalhamento (ondas essas que são

características da propagação sonora em sólidos e que, com isso, requerem outras equações satisfeitas que não somente a equação escalar). Outro ponto importante são as *condições de contorno* que devem ser satisfeitas pela onda de pressão na interface entre os meios de propagação.

Suponha que a onda de pressão incidente possa ser descrita pelo fasor φ_{in} enquanto viaja no fluido incompressível que permeia todo o espaço do problema. No interior do centro espalhador, centrado na origem do sistema de coordenadas, essa onda passará a ser descrita pelo fasor φ_1 . Posterior ao espalhamento, a onda é tratada pelo fasor φ_{sc} (onde *sc* denota o termo “scattered”, que significa “espalhado” em inglês). Com essa nomenclatura, as condições de contorno satisfeitas pelas funções de onda são dadas pelo par de equações

$$\varphi_{in} + \varphi_{sc} = \varphi_1; \quad (3.1a)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}} (\varphi_{in} + \varphi_{sc}) = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \varphi_1, \quad (3.1b)$$

onde todas as funções são avaliadas em $r = a$, ou seja, na superfície da esfera. A primeira das equações mostra a *continuidade dos campos de pressão*, uma suposição física natural do problema. A segunda leva em conta a componente normal do *campo de velocidades* imposto pela onda acústica, que por sua vez tem a dependência com a densidade do meio em que as ondas estão se propagando. Essa condição reflete o fato de que não haverá nenhum deslocamento radial do centro espalhador que não seja compensado pelo fluido que o permeia.

3.2.1 Coeficientes de espalhamento

Agora, vamos calcular os coeficientes das ondas φ_{in} , φ_{sc} e φ_1 usando o formalismo da teoria de espalhamento. Considere uma onda incidente, descrita pelo fasor φ_{in} , propagando-se inicialmente num fluido ideal. Como solução da equação de Helmholtz $(\nabla^2 + k_0^2)\varphi_{in}(\mathbf{r}) = 0$, em coordenadas esféricas, pode-se escrever

$$\varphi_{in}(k_0 r, \cos \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} j_l(k_0 r) Y_l^m(\cos \theta, \phi), \quad (3.2)$$

onde k_0 é o número da onda no meio circundante, $j_l(k_0 r)$ representa as funções de Bessel esféricas e $Y_l^m(\cos \theta, \phi)$ os harmônicos esféricos. Então, uma esfera de raio a e densidade $\rho_1 \neq \rho_0$ é centralizada na origem do sistema de coordenadas, pela qual

a onda φ_{in} é espalhada. Dentro da esfera, pode-se descrever a onda acústica pelo fasor φ_1 , levando em consideração o que assumimos anteriormente,

$$\varphi_1(k_1 r, \cos \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_l a_{lm} j_l(k_1 r) Y_l^m(\cos \theta, \phi), \quad (3.3)$$

onde o índice em $k_1 \neq k_0$ remete ao fato de que o material constituinte da esfera é diferente do que o meio que a circunda, levando a uma mudança no comprimento da onda nesse novo meio e, por consequência, no seu número de onda. A escolha na dependência radial como funções de Bessel esféricas se justifica pela necessidade de tanto o fasor incidente φ_{in} quanto o fasor interno à esfera, φ_1 , precisarem ser bem definidos quando $r = 0$, característica satisfeita pelas funções $j_l(k_0 r)$. Note que o fator de forma b_l , chamado de *coeficiente interno* da onda, dita a mudança na forma da onda ao entrar no centro espalhador. Quanto ao fasor da onda espalhada, precisamos garantir que as funções radiais sejam bem definidas para $r \rightarrow \infty$. Para isso, a dependência radial da onda espalhada φ_{sc} será dada por funções de Hankel do primeiro tipo, $h_l^{(1)}(k_0 r)$ (k_0 como número de onda por voltar ao meio externo), de forma que pode-se escrever

$$\varphi_{sc}(k_0 r, \cos \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l s_l a_{lm} h_l^{(1)}(k_0 r) Y_l^m(\cos \theta, \phi), \quad (3.4)$$

onde os coeficientes s_l são os *coeficientes de espalhamento* e mostram a mudança na forma da onda depois de espalhada. Ainda, vale ressaltar que a onda espalhada deve satisfazer a condição de Sommerfeld [11], que dita a necessidade da onda espalhada, no limite em que $k_0 r \rightarrow \infty$, se comportar como uma onda plana,

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} k_0 r (\partial_r - i k_0) \varphi_{sc} = 0. \quad (3.5)$$

Com essas expressões em mãos, fazemos uso das condições de contorno para determinar os coeficientes de expansão a_{lm} , b_l e s_l . Inicialmente, determinam-se os coeficientes a_{lm} da onda incidente. Para isso, usam-se das relações de ortogonalidade das funções de Bessel esféricas, bem como dos harmônicos esféricos: considere, inicialmente, a Eq. (3.2); multiplicando os dois lados da equação por $r^2 j_l(k' r)$, com k' um número de onda arbitrário, e integrando em r no intervalo $[0, \infty)$, tem-se (denotando as somas por $\sum_{l,m}$)

$$\int_0^\infty r^2 dr j_l(k' r) \varphi_{in} = \int_0^\infty r^2 dr \sum_{l,m} a_{lm} j_l(k_0 r) j_l(k' r) Y_l^m. \quad (3.6)$$

A relação de ortogonalidade entre duas funções de Bessel esféricas pode ser expressa como [41]

$$\int_0^\infty r^2 dr j_l(k_0 r) j_l(k' r) = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k_0 - k'), \quad (3.7)$$

o que produz

$$\frac{\pi}{2k^2} \delta(k_0 - k') \sum_{l,m} a_{lm} Y_l^m = \int_0^\infty r^2 dr j_l(k' r) \varphi_{in}. \quad (3.8)$$

Deste ponto, pode-se produzir uma expressão importante que será usada. Para $k_0 = k'$,

$$\sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\cos \theta, \phi) = \frac{2k^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr j_l(k_0 r) \varphi_{in}(k_0 r, \cos \theta, \phi). \quad (3.9)$$

Agora, pela ortogonalidade dos harmônicos esféricos,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) Y_l^m(\cos \theta, \phi) Y_t^{s*}(\cos \theta, \phi) = \delta_{lt} \delta_{ms}, \quad (3.10)$$

onde Y_t^{s*} denota o complexo conjugado dos harmônicos esféricos. Multiplica-se a Eq. (3.9) por $Y_t^{s*}(\cos \theta, \phi)$, e integra-se nos intervalos convenientes para obter

$$a_{ts} = \frac{2k_0^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) j_t(k_0 r) Y_t^{s*}(\cos \theta, \phi) \varphi_{in}(k_0 r, \cos \theta, \phi). \quad (3.11)$$

Dessa forma, com a Eq. (3.11), dada a forma de φ_{in} , é possível expressar qualquer coeficiente a_{lm} . Usualmente, trata-se dessa integral numericamente usando a técnica de quadratura. No entanto, em virtude da dificuldade analítica de resolver essa integral para alguns tipos de ondas incidentes, pode-se usar outros artifícios para encontrar os coeficientes a_{lm} . Como exemplo, considere que a onda incidente seja uma onda plana de amplitude B viajando no eixo $\hat{\mathbf{z}}$, dada por

$$\varphi_{in}(k_0 r, \cos \theta, \phi) = B e^{ik_0 r \cos \theta}. \quad (3.12)$$

Da Ref. [10], pode-se escrever a exponencial da Eq. (3.12) como

$$e^{ik_0 r \cos \theta} = \sum_{l=0}^\infty (2l+1) i^l j_l(k_0 r) P_l(\cos \theta). \quad (3.13)$$

Com essa expressão, deixamos a dependência angular em ϕ , graças à simetria física do problema, e passamos a tratar do problema com a onda plana incidente usando

as seguintes expansões:

$$\varphi_{in}(k_0 r, \cos \theta) = B \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(k_0 r) P_l(\cos \theta); \quad (3.14a)$$

$$\varphi_1(k_1 r, \cos \theta) = B \sum_{l=0}^{\infty} b_l (2l+1) i^l j_l(k_1 r) P_l(\cos \theta); \quad (3.14b)$$

$$\varphi_{sc}(k_0 r, \cos \theta) = B \sum_{l=0}^{\infty} s_l (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k_0 r) P_l(\cos \theta). \quad (3.14c)$$

Essa simplificação permite identificar que não há qualquer dependência das funções de onda com o ângulo ϕ , situação esperada dada a simetria esférica do problema juntamente com a forma da onda plana incidente.

Restam ser determinados os coeficientes b_l e s_l . Para isso, fazemos uso das condições de contorno das Eqs. (3.1). A fim de explicitar, inicialmente, o coeficiente de espalhamento s_l para comparar resultados com a Ref. [42], isolamos b_l nas duas condições de contorno. Simplificando as notações com $k_0 a = x_0$ e $k_1 a = x_1$, a primeira delas mostra que

$$b_l = \frac{j_l(x_0)}{j_l(x_1)} + \frac{h_l^{(1)}(x_0)}{j_l(x_1)} s_l, \quad (3.15)$$

enquanto a segunda condição de contorno, em que neste caso a derivação normal à superfície da esfera diz respeito a uma derivação com relação à variável r , exhibe b_l como

$$b_l = \left(\frac{k_0 \rho_1}{k_1 \rho_0} \right) \left[\frac{j'_l(x_0)}{j'_l(x_1)} + \frac{h_l^{(1)'}(x_0)}{j'_l(x_1)} s_l \right]. \quad (3.16)$$

Como as Eqs. (3.15) e (3.16) devem ser iguais, obtém-se o coeficiente de espalhamento s_l como

$$s_l = \frac{k_0 \rho_1 j_l(x_1) j'_l(x_0) - k_1 \rho_0 j_l(x_0) j'_l(x_1)}{k_1 \rho_0 h_l^{(1)}(x_0) j'_l(x_1) - k_0 \rho_1 j_l(x_1) h_l^{(1)'}(x_0)}, \quad (3.17)$$

sendo esse resultado compatível com a Ref. [42].

A Fig. 3.2 ilustra como alguns coeficientes de espalhamento s_l se comportam em função de x_1 . Nota-se que $0 < s_l < 1$, fato observado para todos os l testados (de 0 até cerca de 50). Ainda, notam-se que existem padrões de oscilação para diferentes x_1 , sugerindo a ideia de que existem combinações convenientes entre raio da esfera espalhadora e comprimento de onda incidente que otimizam ou minimizam o valor do coeficiente de espalhamento, produzindo assim possíveis parâmetros de

Figura 3.2: Valores absolutos dos coeficientes de espalhamento, $|s_l|$ em função de $x_1 = k_1 a$, com $x_0 = 2\pi$ (a onda incidente tem comprimento de onda da ordem do raio a da esfera), para $l = 0, 1, 2$ e 3. Foi considerado que $\rho_0/\rho_1 = 1,5$.

ressonância no espalhamento, combinações importantes para o desenvolvimento de metamateriais acústicos.

No entanto, buscamos compreender a dinâmica do espalhamento não somente com os coeficientes de espalhamento, mas também fazendo uso da informação fornecida pelos coeficientes *internos* da onda, b_l . Para isso, podemos explicitá-lo como

$$b_l = \frac{k_0 \rho_1 [j_l(x_0) h_l^{(1)'}(x_0) - j_l'(x_0) h_l^{(1)}(x_0)]}{k_0 \rho_1 j_l(x_1) h_l^{(1)'}(x_0) - k_1 \rho_0 j_l'(x_1) h_l^{(1)}(x_0)}. \quad (3.18)$$

Essa expressão é necessária para a determinação da energia armazenada no interior do espalhador (ver Sec. 3.3). Ela pode ter sua notação simplificada: adotando $m = k_1 \rho_0 / k_0 \rho_1$ e usando a notação $D_{f(x)}(x) = d_x \ln[f(x)] = f'(x)/f(x)$ como a derivada logarítmica de uma função $f(x)$, escreve-se

$$b_l = \left[\frac{j_l(x_0)}{j_l(x_1)} \right] \left[\frac{1 - D_{j_l}(x_0)/D_{h_l^{(1)}}(x_0)}{1 - m D_{j_l}(x_1)/D_{h_l^{(1)}}(x_0)} \right]. \quad (3.19)$$

A Fig. 3.3 mostra como alguns dos coeficientes internos b_l se comportam a medida que alteramos x_1 . Nota-se, assim como no caso dos coeficientes de espalhamento, que existem combinações convenientes entre a e k_1 que maximizam ou minimizam o valor desses coeficientes. Na próxima página, mostra-se uma comparação entre os coeficientes s_l e b_l (relação esperada pela Eq. (3.16)).

Figura 3.3: Valores absolutos dos coeficientes internos, $|b_l|$ em função de $x_1 = k_1 a$, com $x_0 = 2\pi$ (a onda incidente tem comprimento de onda da ordem do raio a da esfera), para $l = 0, 1, 2$ e 3 . Foi considerado que $\rho_0/\rho_1 = 1, 5$.

Figura 3.4: Comparativo entre os coeficientes b_l e s_l , em função de x_1 (os parâmetros usados para os cálculos foram os mesmos da Fig. 3.3, ou seja, $x_0 = 2\pi$, $\rho_0/\rho_1 = 1, 5$). À esquerda, compara-se s_0 e b_0 para valores de $x_1 < 15$, observando-se boa concordância entre os picos e vales. À direita, compara-se b_2 e s_2 , para $x_1 < 30$, a fim de verificar que o padrão de picos e vales se mantém. Os picos e vales representam as ressonâncias entre onda incidente e centro espalhador.

3.2.2 Limites de rigidez

Um resultado de interesse que pode emergir da análise de uma esfera penetrável são os limites de rigidez da esfera: em um dos limites, o centro espalhador é *acusticamente tenro*, definido ao considerar a função de onda identicamente nula na superfície da esfera; num outro extremo, ele é *acusticamente rígido*, definido impondo-se zero na segunda condição de contorno da Eq. (3.1), ou seja, não há deformações na superfície da esfera.

Para tratar de cada um desses limites, consideramos os campos do problema

com a onda incidente, dados nas Eqs. (3.14), e aplicamos a condição de contorno da situação. No caso em que consideramos a esfera acusticamente tenra, a condição é a de que

$$\varphi_{in} + \varphi_{sc} = \varphi_1 = 0. \quad (3.20)$$

Ela tem duas implicações fundamentais: a primeira é a de que $\varphi_1 = 0$, ou seja, não há penetração da onda acústica nesse centro espalhador, de forma que $b_l = 0$ para todo l ; a segunda é a determinação dos coeficientes de espalhamento como

$$s_l = -\frac{j_l(x_0)}{h_l^{(1)}(x_0)}, \quad (3.21)$$

ou seja, a razão da função de Bessel pela função de Hankel de primeiro tipo. Para comparar esses resultados aos coeficientes b_l e s_l produzidos na análise do centro espalhador penetrável, basta tomar o limite de grande esfera (se comparada ao comprimento da onda no interior da esfera) $k_1 a \gg 1$, respectivamente, nas equações (3.18) e (3.17). Esse limite simboliza a não penetrabilidade da onda pela esfera.

No caso da esfera acusticamente rígida, a condição de contorno a ser satisfeita é

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}} (\varphi_{in} + \varphi_{sc}) = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \varphi_1 = 0. \quad (3.22)$$

que também fornece duas informações importantes: a primeira, semelhante ao caso anterior, é a não penetrabilidade do campo acústico no centro espalhador, pois $b_l = 0$ para todo l ; a segunda é a determinação dos coeficientes do campo espalhado como

$$s_l = -\frac{j'_l(x_0)}{h_l^{(1)'}(x_0)}, \quad (3.23)$$

ou seja, a razão da derivada das funções de Bessel e da função de Hankel no ponto x_0 . Esses resultados são comparáveis ao caso penetrável quando tomamos o limite de pequenas esferas (se comparada ao comprimento da onda) $k_1 a \ll 1$ nas equações (3.18) e (3.17). Isso mostra que a análise do caso penetrável é capaz de englobar ambos os limites de rigidez acústica do centro espalhador, podendo ser usado para modelar objetos acústicos que se enquadram entre os dois limites de rigidez, pois eles estão ligados aos limites geométricos de grande e pequena esfera com relação ao comprimento da onda no interior da esfera espalhadora.

3.3 Energia interna ao centro espalhador

O próximo passo é tentar obter a quantidade de energia que é depositada no interior do centro espalhador quando ele é penetrável pela onda acústica incidente. Continuamos a tratar o caso em que o espalhador é uma esfera de raio a e densidade ρ_1 , centralizada na origem do sistema de coordenadas, permeada por um fluido ideal onde viaja inicialmente uma onda incidente plana.

A energia associada ao campo de radiação acústica de pressão p e campo de velocidades associado $\mathbf{v}$, que viajam a uma velocidade c_1 numa região $\mathcal{V}$ do espaço, com densidade ρ_1 , é dada pela expressão $W = W_P + W_K$ [43], onde

$$W_P = \frac{1}{2\rho_1 c_1^2} \int_{\mathcal{V}} |p|^2 d\tau, \quad (3.24)$$

representa a energia potencial depositada, e

$$W_K = \frac{\rho_1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\tau, \quad (3.25)$$

representa a energia cinética. Usando as relações constitutivas (2.20) e (2.21), podemos relacionar os campos p e $\mathbf{v}$ com o fasor φ_1 da onda dentro do centro espalhador por

$$|p|^2 = \omega^2 \rho_1^2 |\varphi_1|^2; \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\nabla \varphi_1|^2, \quad (3.26b)$$

onde $|\varphi_1|^2 = \varphi_1 \varphi_1^*$ e $|\nabla \varphi_1|^2 = \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1^*$. Com essas expressões, escreve-se a energia acústica como

$$W = \frac{\rho_1}{2} \int_{\mathcal{V}} \left(k_1^2 |\varphi_1|^2 + |\nabla \varphi_1|^2 \right) d\tau. \quad (3.27)$$

Desmembra-se, então, as energias cinética e potencial em duas integrais distintas, e considera-se uma a uma. Inicialmente, considere a porção potencial

$$W_P = \frac{\rho_1}{2} \int_{\mathcal{V}} k_1^2 |\varphi_1|^2 d\tau, \quad (3.28)$$

onde φ_1 é dado na Eq. (3.14), a lembrar

$$\varphi_1(k_1 r, \cos \theta) = B \sum_{l=0}^{\infty} b_l (2l+1) i^l j_l(k_1 r) P_l(\cos \theta), \quad (3.29)$$

e os coeficientes b_l são dados pela Eq. (3.19) para esse espalhamento.

O produto $|\varphi_1|^2 = \varphi_1 \varphi_1^*$ pode ser expresso como a somatória dupla

$$|\varphi_1|^2 = B^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_l b_n i^l (-i)^n (2l+1)(2n+1) j_l(k_1 r) j_n(k_1 r) P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta). \quad (3.30)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\rho_1 k_1^2/2$ e integrando no volume da esfera de raio a centrada na origem, escreve-se W_P como:

$$W_P = \frac{B^2 \rho_1 k_1^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^a r^2 dr \times \sum_{l,n=0}^{\infty} b_l b_n i^l (-i)^n (2l+1)(2n+1) j_l(k_1 r) j_n(k_1 r) P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta). \quad (3.31)$$

Da ortogonalidade dos polinômios de Legendre [44],

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) = \frac{\delta_{l,n}}{l+1/2}, \quad (3.32)$$

e do fato da integral em ϕ ser igual a 2π , simplifica-se a Eq. (3.31) para

$$W_P = B^2 k_1^2 \rho_1 \pi \int_0^a r^2 dr \sum_{l=0}^{\infty} b_l^2 \frac{(2l+1)^2}{(l+1/2)} j_l^2(k_1 r). \quad (3.33)$$

Comutando as somas e integrais envolvidas, e simplificando a fração da equação, reescreve-se a Eq. (3.33) como

$$W_P = \frac{B^2 k_1^2 \rho_1 \pi}{2} \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^2 (2l+1) \int_0^a r^2 dr [j_l(k_1 r)]^2. \quad (3.34)$$

Da Ref. [45], sabemos que a integral da equação (3.34) é analítica, dada por

$$\int_0^a r^2 dr [j_l(k_1 r)]^2 = \frac{a^3}{2} [j_l^2(x_1) - j_{l-1}(x_1) j_{l+1}(x_1)], \quad (3.35)$$

onde, novamente, $x_1 = k_1 a$. Dessa forma, a energia potencial armazenada no interior da esfera é

$$W_P = \frac{a^3 B^2 k_1^2 \pi \rho_1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^2 (2l+1) [j_l^2(x_1) - j_{l-1}(x_1) j_{l+1}(x_1)]. \quad (3.36)$$

Para a porção cinética, explicita-se o produto escalar $|\nabla \varphi|^2 = \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi^*$ como

$$|\nabla \varphi|^2 = B^2 \sum_{l,n=0}^{\infty} b_l b_n^* i^l (-i)^n (2l+1)(2n+1) \times \left[k_1^2 j_l'(k_1 r) j_n'(k_1 r) P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) + \frac{j_l(k_1 r) j_n(k_1 r)}{r^2} \sin^2 \theta P_l'(\cos \theta) P_n'(\cos \theta) \right], \quad (3.37)$$

onde as linhas denotam derivação com relação ao argumento das respectivas funções.

Para determinar W_K , é necessário multiplicar toda a Eq. (3.37) por $\rho_1/2$ e integrar no volume da esfera de raio a centrada na origem. Como, novamente, a dependência em ϕ produz 2π quando integrado, pode-se escrever

$$W_K = B^2 \rho_1 \pi \sum_{l,n=0}^{\infty} b_l b_n^* i^l (-i)^n (2l+1)(2n+1) \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^a r^2 dr \times \left[j_l'(k_1 r) j_n'(k_1 r) P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) + \frac{j_l(k_1 r) j_n(k_1 r)}{r^2} (1 - \cos^2 \theta) P_l'(\cos \theta) P_n'(\cos \theta) \right]. \quad (3.38)$$

Da ortogonalidade dos polinômios de Legendre, pode-se obter não só a expressão (3.32), mas também

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) (1 - \cos^2 \theta) P_l'(\cos \theta) P_n'(\cos \theta) = \frac{2l(l+1)}{2l+1} \delta_{l,n}, \quad (3.39)$$

sendo esse resultado fruto das propriedades gerais da teoria de polinômios ortogonais.

Assim, as integrais em $d(\cos \theta)$ destroem um dos índices somados, produzindo

$$W_K = B^2 \rho_1 \pi \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^2 (2l+1)^2 \times \left\{ \frac{k_1^2}{2(2l+1)} \int_0^a r^2 dr [j_l'(k_1 r)]^2 + \frac{2l(l+1)}{2l+1} \int_0^a dr [j_l(k_1 r)]^2 \right\}. \quad (3.40)$$

Fazendo uso da relação de recorrência da Ref. [44]

$$j_l'(z) = -j_{l+1}(z) + \frac{l}{z} j_l(z), \quad (3.41)$$

pode-se reescrever a primeira integral da equação (3.40) como

$$\int_0^a r^2 dr [j_l'(k_1 r)]^2 = \int_0^a r^2 dr \frac{l^2}{k_1^2 r^2} [j_l(k_1 r)]^2 - \int_0^a r^2 dr \frac{2l}{k_1 r} j_l(k_1 r) j_{l+1}(k_1 r) + \int_0^a r^2 dr [j_{l+1}(k_1 r)]^2. \quad (3.42)$$

Infelizmente, as duas primeiras integrais não possuem representação analítica fechada com funções suficientemente simples, de forma que definimos

$$I_1(x_1) = \frac{1}{k_1} \int_0^{x_1} [j_l(x)]^2 dx; \quad (3.43a)$$

$$I_2(x_1) = \frac{1}{k_1^2} \int_0^{x_1} j_l(x) j_{l+1}(x) x dx, \quad (3.43b)$$

para que possamos, por fim, explicitar a energia cinética depositada no interior da esfera espalhadora:

$$W_K = \frac{a^3 B^2 k_1^2 \pi \rho_1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^2 (2l+1) \left\{ \frac{2l}{k_1^2 a^3} I_1(x_1) - \frac{4l}{k_1 a^3} I_2(x_1) + [j_{l+1}^2(x_1) - j_l(x_1) j_{l+2}(x_1)] \right\}. \quad (3.44)$$

Dessa forma, explicitamos aqui a quantidade de energia acústica depositada numa esfera arbitrária de raio a e densidade ρ_1 , quando penetrada por uma onda incidente plana, que em seu interior assume número de onda k_1 , como a soma das equações (3.36) e (3.44). Esse resultado pode ser analisado num regime especial: o *limite de Rayleigh* (pequenas esferas), onde $x_1 = k_1 a \ll 1$. Com o uso de expressões assintóticas das funções de Bessel (dadas no Apêndice 4), podemos simplificar as Eqs. (3.36) e (3.44), respectivamente, como

$$W_P = \frac{a^3 B^2 k_1^2 \pi \rho_1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^2 \frac{(2l+1)}{2l+3} \frac{x_1^{2l}}{(2l+1)!!^2}; \quad (3.45a)$$

$$W_K = \frac{a^3 B^2 k_1^2 \pi \rho_1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^2 \frac{(2l+1)}{(2l+5)(2l+3)^2} \frac{x_1^{(2l+2)}}{(2l+1)!!^2}. \quad (3.45b)$$

Note que como a potência de x_1 é mais alta na energia cinética, $W_K \ll W_P$ no limite de Rayleigh. Além disso, caso estejamos considerando a primeira ordem na aproximação (uma vez que cada novo termo na soma contribui muito menos que o anterior quando $x_1 \ll 1$), podemos desconsiderar W_K por completo e obter, para o limite de Rayleigh, a energia total armazenada no centro espalhador (devida unicamente à porção potencial) como

$$W_{Rayleigh} = \frac{a^3 B^2 k_1^2 \pi \rho_1}{12} |b_0|^2, \quad (3.46)$$

onde b_0 é dado pela Eq. (3.18) para $l = 0$. Abaixo, mostra-se uma visualização dessa quantidade de energia, para alguns parâmetros controlados.

Certamente, esses resultados estimulam o uso dessa técnica para a determinação da energia em processos de espalhamento de ultrassom, criando parâmetros que caracterizem materiais espalhadores a partir da energia.

Figura 3.5: Valores da energia depositada no interior da esfera no limite de Rayleigh (onde $x_1 \ll 1$), $W_{Rayleigh}$ em função de x_1 para $a = 0, 1$, $B = 1$ e $\rho_1 = 1$. Nota-se que, nesse limite, não existem fenômenos de ressonância significativos, graças ao comportamento simples das funções de ordem 0 envolvidas no cálculo de b_0 quando seu argumento tende a zero.

3.4 Seção de choque

Um resultado fundamental da teoria de espalhamento é a determinação da seção de choque do problema. Nesse caso, como determinamos a função φ_{sc} inteiramente, combinando a Eq.(3.14) para φ_{sc} e a Eq. (3.17) para os coeficientes s_l , podemos explicitar o fator de forma $f(\theta, \phi) = f(\theta)$ (pela simetria do problema) como

$$f(\theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{k_0 \rho_1 j_l(x_1) j'_l(x_0) - k_1 \rho_0 j_l(x_0) j'_l(x_1)}{k_1 \rho_0 h_l^{(1)}(x_0) j'_l(x_1) - k_0 \rho_1 j_l(x_1) h_l^{(1)'}(x_0)} P_l(\cos \theta). \quad (3.47)$$

Da teoria de espalhamento [46], podemos relacionar a seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega$ ao fator de forma da onda como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (3.48)$$

e, portanto, a seção de choque diferencial para a esfera penetrável é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{k_0 \rho_1 j_l(x_1) j'_l(x_0) - k_1 \rho_0 j_l(x_0) j'_l(x_1)}{k_1 \rho_0 h_l^{(1)}(x_0) j'_l(x_1) - k_0 \rho_1 j_l(x_1) h_l^{(1)'}(x_0)} P_l(\cos \theta) \right]^2. \quad (3.49)$$

Figura 3.6: Valores ilustrativos da seção de choque diferencial em função do ângulo θ (para $a = 0.1$, $x_0 = 2\pi$, $x_1 = 1$ e $m = 0,2387$, somando 5 termos da Eq. (3.49)). Nota-se uma grande parcela de espalhamento frontal (para $\theta \rightarrow 0$ ou $\theta \rightarrow 2\pi$), e uma parcela notável de retroespalhamento em $\theta \rightarrow \pi$.

Teoria da elasticidade

Trataremos agora em detalhes a física de materiais usados como centros espalhadores sólidos, uma vez que o tratamento de esferas penetráveis feito no capítulo anterior é capaz de tratar das demais situações. Como podemos definir tensões e deformações dentro de um material sólido? Para responder a essa pergunta, mergulhamos na teoria da elasticidade [19] e definimos as grandezas de suma importância no tratamento de materiais rígidos quando sob uma deformação. Dessa forma, tratamos dos tensores de deformação e tensão num primeiro momento, e os usamos para definir os coeficientes de Lamé, que caracterizam alguns materiais sólidos, ao final do capítulo.

4.1 Tensor de deformações, ϵ_{ik}

Considere, inicialmente, um corpo rígido antes de sofrer qualquer deformação. Define-se o vetor posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de algum ponto em seu interior. Então, após uma deformação devida a algum conjunto de forças, o ponto anteriormente localizado por $\mathbf{r}$ é levado a $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. Com isso, definimos o *vetor deslocamento* $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \iff u_i = x'_i - x_i. \quad (4.1)$$

Quando um corpo sofre uma deformação, *as distâncias entre os pontos mudam*. Suponha dois pontos próximos, inicialmente separados por um vetor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$. Após a deformação,

$$dx'_i = dx_i + du_i. \quad (4.2)$$

Com isso, a distância dl entre esses dois pontos antes da deformação, dada por $dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$, deforma-se para $dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$. Podemos resumir

Figura 4.1: Caracterização geométrica do vetor deslocamento $\mathbf{u}$ em função dos vetores posição antes ($\mathbf{r}$) e depois ($\mathbf{r}'$) da deformação do corpo.

essas expressões usando notações de somatória:

$$dl^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2; \quad (4.3a)$$

$$dl'^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i'^2 = \sum_i (dx_i + du_i)^2. \quad (4.3b)$$

Isso nos instiga a conhecer o valor do diferencial du_i :

$$du_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k. \quad (4.4)$$

Dessa forma, escrevemos que

$$dl'^2 = dl^2 + \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k + \sum_{i,k,l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_k dx_i. \quad (4.5)$$

Constrói-se, então, um tensor ϵ_{ik} tal que

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right), \quad (4.6)$$

para que possamos escrever dl'^2 como

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_{i,k} \epsilon_{ik} dx_i dx_k. \quad (4.7)$$

Dessa forma, podemos caracterizar mudanças de distâncias devido a deformações a partir do tensor ϵ_{ik} . Por isso, ele recebe o nome de *tensor de deformações*. Ele tem a propriedade de ser simétrico, graças à Eq. (4.6):

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki} \quad (4.8)$$

Note que para um espaço de dimensão n , ϵ_{ik} tem uma representação matricial de tamanho $n \times n$. Como ϵ_{ik} é simétrico, ele pode ser diagonalizado, isto é, existe uma

base de vetores tal que a matriz ϵ_{ik} é diagonal, com seus autovalores $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \dots, \epsilon^{(n)}$ na diagonal principal.

Na base de seus autovetores, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + 2 \sum_{i,k} \epsilon_{ik} dx_i dx_k = \sum_{i,k} [\delta_{ik} dx_i dx_k + 2\epsilon_{ik} dx_i dx_k] = \sum_{i,k} (\delta_{ik} + 2\epsilon_{ik}) dx_i dx_k \\ &= (1 + 2\epsilon^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2\epsilon^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2\epsilon^{(3)}) dx_3^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esse resultado mostra que a variação na posição x_i depois da deformação, na direção do autovetor correspondente, é

$$dx'_i = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} dx_i. \quad (4.10)$$

Isso não implica que uma variação em $\hat{\mathbf{x}}$, por exemplo, provoque um dx no eixo $\hat{\mathbf{x}}$. Isso só acontece quando $\hat{\mathbf{x}}$ for um autovetor de ϵ_{ik} naquele ponto em questão. Note, ainda, que a Eq. (4.10) implica que a variação relativa

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} - 1 \approx \epsilon^{(i)}, \quad (4.11)$$

ou seja, a distância relativa de elementos de comprimento na direção de um autovetor é, aproximadamente, o autovalor $\epsilon^{(i)}$ correspondente.

Para pequenas deformações, podemos relevar o termo do produto das derivadas no tensor de deformações na Eq. (4.6), e reescrevê-lo de maneira mais simples, como

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (4.12)$$

uma vez que o produto de derivadas na Eq. (4.6) é de ordem consideravelmente inferior aos termos lineares.

Vamos agora considerar deformações volumétricas e qual informações ϵ_{ik} pode nos fornecer a respeito delas. Considere que um elemento de volume dV que é levado a um elemento dV' numa deformação. Considerando que essa deformação é pequena, a Eq. (4.11) é válida e, com isso, $dx'_i = [1 + \epsilon^{(i)}] dx_i$, na direção do autovetor correspondente. Como $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, e $dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$, temos

$$dV' = [1 + \epsilon^{(1)}] [1 + \epsilon^{(2)}] [1 + \epsilon^{(3)}] dV. \quad (4.13)$$

Rejeitando os termos com a ordem de $\epsilon^{(i)}$ maior do que 1, e como $\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)} + \epsilon^{(3)} = \text{tr}(\epsilon_{ik})$, podemos reescrever essa variação no volume como

$$dV' = [1 + \text{tr}(\epsilon_{ik})] dV \iff \frac{dV' - dV}{dV} = \text{tr}(\epsilon_{ik}). \quad (4.14)$$

Portanto, o traço do tensor de deformações, $\text{tr}(\epsilon_{ik})$, fornece informações sobre a variação relativa do elemento de volume alterado na deformação, sendo de importante interesse no estudo de corpos sólidos. O Apêndice 2 conta com a expressão do tensor de deformações numa geometria esférica, de interesse do trabalho.

4.2 Tensor de tensões, σ_{ik}

Um corpo não deformado encontra-se num estado de equilíbrio de suas moléculas: a resultante de forças numa porção qualquer do corpo é *nula*. Nesse aspecto, deformações produzem forças internas que procuram retornar o equilíbrio ao corpo.

As forças que causam tensões internas de restauração são de *ação próxima*, isto é, agem de um ponto à sua vizinhança próxima (caso a deformação não seja capaz de gerar campos de força macroscópios). Seja $\mathbf{F}$ a força por unidade de volume atuante num ponto do corpo (localizado pelo vetor posição $\mathbf{r}$), de forma que a força total num volume V_0 do corpo seja $\int_{V_0} \mathbf{F} dV$.

Figura 4.2: Representação do volume V_0 no interior de um corpo deformável, sujeito a forças $\mathbf{F}_i$, a serem consideradas como de efeito próximo, resultado da ação de posições adjacentes ao volume em sua deformação.

Como as forças que geram as tensões internas são de curto alcance, para um dado elemento de volume dV , apenas componentes das forças de seus vizinhos próximos devem atuar sobre ele, especificamente na superfície que delimita esse elemento de volume. Cada uma das três componentes de $\int_{V_0} \mathbf{F}_i dV$ pode ser transformada numa integral de superfície. Logo, para a aplicação do teorema de Gauss, $\mathbf{F}_i$ deve ser posto na forma de um *divergente*, para que possamos levar uma integral

volumétrica para uma de superfície. Definimos

$$\mathbf{F}_i = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (4.15)$$

para que

$$\int_{V_0} \mathbf{F}_i dV = \int_{V_0} \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint_{S_0} \sum_k \sigma_{ik} d\mathbf{f}_k, \quad (4.16)$$

onde $d\mathbf{f}_k$ indica o elemento de superfície na direção k , apontando para *fora* de V_0 .

O tensor σ_{ik} é chamado de *tensor de tensões*. Seus elementos podem ser interpretados dessa forma: o elemento σ_{ik} é a i -ésima componente da força por unidade de área $\mathbf{F}$ perpendicular ao eixo $\hat{\mathbf{x}}_k$.

No equilíbrio, a soma das forças por unidade de volume em todas as direções é nula. Logo, um corpo em equilíbrio implica que

$$\mathbf{F}_i = 0 \longrightarrow \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (4.17)$$

Com isso, vamos encontrar um *valor médio* do tensor de tensões num corpo deformado. Seja $\mathbf{P}$ a força externa por unidade de área na superfície do corpo. No equilíbrio, deve surgir uma força restaurativa $-\sigma_{ik} d\mathbf{f}_k$ de tensões internas de tal forma que

$$\mathbf{P}_i dS - \sum_k \sigma_{ik} d\mathbf{f}_k = 0. \quad (4.18)$$

Como $d\mathbf{f}_k = dS \hat{\mathbf{n}}_k$, temos que

$$\mathbf{P}_i = \sum_k \sigma_{ik} \hat{\mathbf{n}}_k; \quad (4.19)$$

Essa condição deve ser satisfeita em todos os pontos da superfície do corpo em equilíbrio. Tomando a Eq. (4.17), pode-se integrar toda essa expressão num volume V_0 do corpo e obter:

$$\int_{V_0} \sum_l \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV = 0. \quad (4.20)$$

Note que $\frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{il} x_k) = \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k + \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l}$. Integrando num volume V_0 , temos que

$$\int_{V_0} \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{il} x_k) dV = \int_{V_0} \sum_l \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV + \int_{V_0} \sum_l \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dV. \quad (4.21)$$

O termo a esquerda da igualdade da Eq. (4.21) é zero; o primeiro termo à direita da igualdade é a integral no volume de um divergente, que pode ser escrita como

a integral sobre a superfície fechada S_0 que envolve V_0 , pelo teorema de Gauss. A derivada parcial no último termo à direita é uma δ_{kl} , de forma que ficamos com

$$\oint_{S_0} \sum_l \sigma_{il} x_k d\mathbf{f}_l - \int_{V_0} \sigma_{ik} dV = 0. \quad (4.22)$$

Com a Eq. (4.19), note que $\sum_l \sigma_{il} d\mathbf{f}_l = \sigma_{il} dS \hat{\mathbf{n}}_l = \mathbf{P}_i dS$. Portanto,

$$\oint_{S_0} \mathbf{P}_i x_k dS = \int_{V_0} \sigma_{ik} dV \quad (4.23)$$

Sendo $\bar{\sigma}_{ik}$ o valor médio do tensor de tensões, $\int_{V_0} \sigma_{ik} dV = V_0 \bar{\sigma}_{ik}$. Logo,

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V_0} \oint_{S_0} \mathbf{P}_i x_k dS; \quad (4.24)$$

Como o tensor de tensões σ_{ik} é simétrico,

$$\bar{\sigma}_{ki} = \frac{1}{V_0} \oint_{S_0} \mathbf{P}_k x_i dS; \quad (4.25)$$

E, portanto,

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V_0} \oint_{S_0} (\mathbf{P}_i x_k + \mathbf{P}_k x_i) dS. \quad (4.26)$$

Dessa forma, um valor médio para o tensor de tensões de um corpo é obtido considerando as combinações das forças externas com direções distintas na superfície do corpo.

4.3 Relação entre ϵ_{ik} e σ_{ik}

Com o objetivo de obter uma relação entre os tensores de deformações e de tensões, vamos analisar porção termodinâmica de um processo de deformação. Suponha que numa deformação, o vetor deslocamento u_i mude uma pequena quantidade δu_i . Qual é o trabalho realizado por tensões internas nessa mudança? Relembre que o trabalho realizado por uma força $\mathbf{F}$ na direção $\mathbf{d}$ é $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$ e, portanto, $\delta W = \mathbf{F}_i \delta u_i$. Num volume V_0 , temos

$$\int_{V_0} \delta W dV = \int_{V_0} \sum_i \mathbf{F}_i \delta u_i dV; \quad (4.27)$$

Da definição do tensor de tensões (4.15), integrando por partes, obtemos

$$\int_{V_0} \delta W dV = \oint_{S_0} \sum_{i,k} \sigma_{ik} \delta u_i d\mathbf{f}_k - \int_{V_0} \sum_{i,k} \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV. \quad (4.28)$$

Considerando um meio infinito (não deformável no infinito), $\sigma_{ik} = 0$ em S . Logo, $\oint_{S_0} \sum_{i,k} \sigma_{ik} \delta u_i d\mathbf{f}_k = 0$, de forma que podemos escrever (pela simetria de σ_{ik}),

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \delta W dV &= -\frac{1}{2} \int_{V_0} \sum_{i,k} \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV \\ &= - \int_{V_0} \sum_{i,k} \sigma_{ik} \delta \epsilon_{ik} dV, \end{aligned} \quad (4.29)$$

e como as integrais convergem absolutamente, podemos considerar uma igualdade ponto a ponto dos integrandos, obtendo

$$\delta W = - \sum_{i,k} \sigma_{ik} \delta \epsilon_{ik}. \quad (4.30)$$

Logo, nesse caso, o trabalho é dado em função da mudança no tensor de deformações.

Vamos assumir que o processo de deformação em questão ocorra tão lentamente que o equilíbrio termodinâmico é estabelecido *em cada instante*. Uma mudança infinitesimal dU da energia interna do sistema é dada, de acordo com a 1ª Lei da Termodinâmica, pela diferença entre o calor adquirido no volume considerado e o trabalho realizado por tensões internas. Isto é,

$$dU = T dS - dW. \quad (4.31)$$

Da equação (4.30), essa equação se modifica para

$$dU = T dS + \sum_{i,k} \sigma_{ik} \delta \epsilon_{ik}; \quad (4.32)$$

Essa é a *relação fundamental da termodinâmica para corpos deformados*. Introduzindo a *energia livre de Helmholtz* $F = U - TS$, temos

$$\begin{aligned} dF &= dU - T dS - dT S \\ &= -S dT + \sum_{i,k} \sigma_{ik} d\epsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

E introduzindo a *energia livre de Gibbs* $G = U - TS - \sum_{i,k} \sigma_{ik} \epsilon_{ik}$,

$$\begin{aligned} dG &= dF - d\sigma_{ik} \epsilon_{ik} - \sigma_{ik} d\epsilon_{ik} \\ &= -S dT - \sum_{i,k} \epsilon_{ik} d\sigma_{ik}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Portanto, as relações entre os tensores de deformações e tensões são, mantendo a entropia constante, $\sigma_{ik} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ik}}$; mantendo a temperatura constante, $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ik}}$ e $\epsilon_{ik} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ik}}$.

4.4 Coeficientes de Lamé

Consideremos um corpo isotrópico deformado numa dada temperatura (igual no corpo todo). O estado sem deformações é aquele em que o corpo encontra-se sem a ação das forças externas, nessa dada temperatura. Então, no equilíbrio, $\epsilon_{ik} = 0$ e, portanto, $\sigma_{ik} = 0$. Como $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ik}}$ para T constante, não há formas de existir termos lineares da expansão de F em uma série de potências de ϵ_{ik} (série de Taylor).

Em seguida, como F é escalar, cada termo de sua expansão também deve sê-lo. *Dois escalares independentes de 2º grau podem ser formados pelas componentes do tensor simétrico ϵ_{ik}* : eles podem ser o quadrado da soma da diagonal principal ϵ_{ii}^2 e a soma dos quadrados de todas as componentes ϵ_{ik}^2 . Então,

$$F = F_0 + \frac{1}{2}\lambda \sum_i \epsilon_{ii}^2 + \mu \sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2 \quad (4.35)$$

As constantes λ e μ são chamados de **coeficientes de Lamé**. Caso $\sum_i \epsilon_{ii} = 0$, $\frac{dV' - dV}{dV} = 0 \Rightarrow dV' = dV$ (não há alteração no volume do corpo com a deformação, ele apenas altera sua forma). Esse tipo de deformação é chamada de *deformação de cisalhamento*. Caso contrário, isto é, $\sum_i \epsilon_{ii} \neq 0$, mas $\epsilon_{ik} = k\delta_{ik}$ (ou seja, não existe mudança na forma do corpo), a deformação é chamada de *compressão hidrostática*. **Toda** deformação pode ser escrita como a combinação de uma deformação de cisalhamento e uma compressão hidrostática. Para isso, usamos a identidade

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} \sum_l \epsilon_{ll} + \frac{1}{3}\delta_{ik} \sum_l \epsilon_{ll}, \quad (4.36)$$

onde os dois primeiros termos correspondem à componente de cisalhamento (pois para $k = i$, $\delta_{ii} = 3$ e os termos diagonais de $\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}$ são nulos). O último termo corresponde à compressão hidrostática. Com essa expressão, é conveniente reescrever (4.35), considerando um referencial conveniente tal que $F_0 = 0$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\lambda \sum_i \epsilon_{ii}^2 + \mu \sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2 = \frac{1}{2}\lambda \sum_i \epsilon_{ii}^2 + \mu \left[\sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2 - \sum_{i,k,l} \frac{2}{3}\epsilon_{ik}\delta_{ik}\epsilon_{ll} + \frac{1}{9}\sum_{i,k,l} \delta_{ik}\epsilon_{ll} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \sum_l \epsilon_{ll}^2 + \mu \left(\sum_{i,k} \epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} \delta_{ik}\epsilon_{ll} \right)^2 \\ &= \mu \left(\sum_{i,k} \epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} \delta_{ik}\epsilon_{ll} \right)^2 + \frac{1}{2}\kappa \sum_l \epsilon_{ll}^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

com $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ sendo o *módulo de compressão* e μ o *módulo de cisalhamento* da deformação. No equilíbrio, F é mínimo e, por isso, κ e $\mu > 0$.

Dessa forma, ao longo desse capítulo, fomos capazes de caracterizar não somente tensões e deformações num corpo rígido sob a ação de forças externas, bem como obter relações importantes entre essas duas quantidades, e caracterizar corpos a partir de seus coeficientes de Lamé ou de seus módulos de compressão e cisalhamento. De fato, grandezas semelhantes a essas serão obtidas no capítulo seguinte ao tratar de corpos viscoelásticos, de forma que uma introdução no assunto se fez muito necessária.

Sólidos viscoelásticos

Iremos, nesse capítulo, tratar do seguinte problema físico: uma onda inicialmente viaja num fluido ideal e incompressível. Num dado ponto de sua trajetória, existe um *obstáculo* de simetria esférica, que *espalha* essa onda. Nesse caso, esse obstáculo é feito de um material de natureza *viscoelástica*, isto é, deve responder de maneira *elástica* e *viscosa* quando sob o efeito de forças que tentem deformá-lo.

Como podemos descrever o espalhamento nesse tipo de material? Para responder a essa pergunta, precisamos nos certificar de que modo uma onda se propaga num material viscoelástico. Aqui, iremos usar o *modelo de Kelvin-Voigt* para tratar do sólido viscoelástico de interesse, pois podemos modelar células biológicas e alguns tipos de polímeros com ele. Seguiremos o tratamento tomando por base as Refs. [25, 39], a fim de aplicá-las à nossa situação.

5.1 Modelo de Kelvin-Voigt

Num sólido elástico, pode-se considerar uma relação de proporcionalidade entre o tensor de tensões σ e o tensor de deformações ϵ :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}; \quad (5.1)$$

Essa relação é a generalização da *Lei de Hooke* para materiais elásticos. O tensor C_{ijkl} é chamado de *tensor do módulo de elasticidade*, que contém as constantes de proporcionalidade entre σ e ϵ .

Num material viscoelástico, no entanto, há uma dependência na deformação do corpo ao longo do tempo, em decorrência de sua viscosidade. Isso é inserido no modelo considerando a possibilidade de haver dependências temporais nas tensões

e deformações. Com isso em mente, modifica-se a Eq. (5.1), pela Ref. [47], com o propósito de introduzir essas dependências:

$$\left[1 + \sum_{m=0}^{M_1} A_{ijkl}^m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right] \sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} + \sum_{m=0}^{M_2} B_{ijkl}^m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right] \epsilon_{kl}. \quad (5.2)$$

Essa expressão pode modelar diferentes tipos de corpos viscoelásticos, de acordo com os valores de A_{ijkl} , B_{ijkl} , M_1 e M_2 . Aqui, lida-se apenas com o *modelo de Kelvin-Voigt*, obtido ao tomar $M_1 = 0$ e $M_2 = 1$, produzindo

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + B_{ijkl} \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t}. \quad (5.3)$$

A Eq. (5.3) é o modelo que trata dos corpos viscoelásticos a serem considerados. A partir dela, deve ser possível determinar uma equação de onda ou de Helmholtz para alguma quantidade relevante no interior do sólido, por exemplo, o vetor deslocamento $\mathbf{u}$ tratado no Capítulo 4. O modelo de Kelvin-Voigt trata da interação entre dois pontos que sofrem a ação de tensões σ por associar em paralelo uma mola e um pistão, como mostra a figura a seguir.

Figura 5.1: Diagrama do modelo de Kelvin-Voigt, mostrando que a interação entre dois pontos do corpo sob a ação de tensões σ pode ser modelada pela associação em paralelo de uma mola (que representa o caráter elástico do material) com um pistão (que dá caráter viscoso à deformação).

5.2 Equação de Helmholtz em um sólido viscoelástico

Considere um tensor isotrópico de quarta ordem arbitrário D_{ijkl} (os tensores C_{ijkl} e B_{ijkl} são dessa forma). Conhecidas as constantes λ , μ e κ , pode-se escrever, de acordo com a Ref. [25],

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \kappa (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (5.4)$$

Com essa relação em mãos, reescreve-se a Eq. (5.3) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda_e \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_e (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \kappa_e (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \\ B_{ijkl} &= \lambda_v \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_v (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \kappa_v (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}); \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde os índices $_e$ e $_v$ são usados para os termos correspondentes aos fenômenos *elásticos* e *viscosos*, respectivamente. Com isso, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda_e \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} + \mu_e (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} + \kappa_e (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} \\ &\quad + \lambda_v \delta_{ij} \delta_{kl} \partial_t \epsilon_{kl} + \mu_v (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \partial_t \epsilon_{kl} + \kappa_v (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \partial_t \epsilon_{kl}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Usando as propriedades da delta de Kronecker, reescrevem-se os termos com ϵ_{kl} da seguinte forma:

$$\lambda_e \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} = \lambda_e \delta_{ij} \epsilon_{kk}, \quad (5.7a)$$

$$\mu_e (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} = \mu_e \delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{kl} + \mu_e \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon_{kl} = 2\mu_e \epsilon_{ij}, \quad (5.7b)$$

$$\kappa_e (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} = 0. \quad (5.7c)$$

De forma análoga, os termos com $\partial_t \epsilon_{kl}$ ficam:

$$\lambda_v \delta_{ij} \delta_{kl} \partial_t \epsilon_{kl} = \lambda_v \delta_{ij} \partial_t \epsilon_{kk}, \quad (5.8a)$$

$$\mu_v (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \partial_t \epsilon_{kl} = 2\mu_v \partial_t \epsilon_{ij}, \quad (5.8b)$$

$$\kappa_v (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \partial_t \epsilon_{kl} = 0, \quad (5.8c)$$

o que permite que se conclua que

$$\sigma_{ij} = \lambda_e \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_e \epsilon_{ij} + \lambda_v \delta_{ij} \partial_t \epsilon_{kk} + 2\mu_v \partial_t \epsilon_{ij}. \quad (5.9)$$

No modelo de Kelvin-Voigt, essa é a relação entre o tensor de tensões e o tensor de deformações. As constantes λ_e e μ_e são os coeficientes *elásticos* longitudinal e de cisalhamento, enquanto λ_v e μ_v são os coeficientes de *viscosidade* longitudinal e de cisalhamento. A equação (5.9) pode ser reescrita, usando notação tensorial, como

$$\sigma = [(\lambda_e + \lambda_v \partial_t) \text{tr } \epsilon] I + 2(\mu_e + \mu_v \partial_t) \epsilon, \quad (5.10)$$

com I simbolizando o tensor identidade ($I_{ij} = \delta_{ij}$), σ o tensor de tensões e ϵ o tensor de deformações.

O próximo passo é reescrever essa relação em função do *vetor de deslocamento*, **u**. Para isso, considere

- A definição do tensor de deformações para pequenas deformações, Eq. (4.12), com os índices alterados para

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (5.11)$$

- A relação tensão-deformação, Eq. (5.9);
- A relação de conservação de momento, análoga à conservação de momento no fluido ideal da Eq. (2.13), com ρ_1 sendo a densidade do sólido, dada por

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}; \quad (5.12)$$

Em componentes, a Eq. (5.12) é

$$\rho_1 \partial_t^2 u_i = \partial_{x_j} \sigma_{ji}. \quad (5.13)$$

Usando (5.9), obtém-se

$$\rho_1 \partial_t^2 u_i = \lambda_e \partial_{x_i} \epsilon_{kk} + 2\mu_e \partial_{x_j} \epsilon_{ji} + \lambda_v \partial_t \partial_{x_i} \epsilon_{kk} + 2\mu_v \partial_t \partial_{x_j} \epsilon_{ji}. \quad (5.14)$$

Dessa forma, faz-se necessária a expressão de $\partial_{x_i} \epsilon_{kk}$ e $\partial_{x_j} \epsilon_{ji}$ em termos de $\mathbf{u}$. Com a Eq. (5.11), escreve-se:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \epsilon_{kk} &= \frac{1}{2} \left(\partial_{x_{ji}}^2 u_j + \partial_{x_j}^2 u_i \right); \\ \partial_{x_j} \epsilon_{ji} &= \partial_{x_{jk}}^2 u_k. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Com isso, produz-se a expressão da conservação do momento em termos do vetor deslocamento $\mathbf{u}$. Em componentes:

$$\rho_1 \partial_t^2 u_i = (\lambda_e + \mu_e) \partial_{x_{ij}}^2 u_j + \mu_e \partial_{x_j}^2 u_i + (\lambda_v + \mu_v) \partial_{x_{ij}}^2 \partial_t u_j + \mu_v \partial_j^2 \partial_t u_j; \quad (5.16)$$

o análogo vetorial à equação (5.16) é:

$$\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda_e + \mu_e) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda_v + \mu_v) \nabla (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u}) + \mu_v \nabla^2 \partial_t \mathbf{u}. \quad (5.17)$$

Com a relação do cálculo vetorial $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$, pode-se reescrever:

$$\partial_t^2 \mathbf{u} = \frac{(\lambda_e + 2\mu_e)}{\rho_1} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\mu_e}{\rho_1} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \frac{(\lambda_v + 2\mu_v)}{\rho_1} \nabla (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u}) - \frac{\mu_v}{\rho_1} \nabla \times \nabla \times \partial_t \mathbf{u}. \quad (5.18)$$

Definem-se, então, algumas constantes convenientes:

- A velocidade do som *longitudinal*, c_ℓ :

$$c_\ell = \sqrt{\frac{(\lambda_e + 2\mu_e)}{\rho_1}}; \quad (5.19)$$

- A velocidade do som *de cisalhamento*, c_s :

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho_1}}; \quad (5.20)$$

- O tempo de relaxação *longitudinal*, τ_ℓ :

$$\tau_\ell = \left(\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\rho_1 c_\ell^2} \right); \quad (5.21)$$

- O tempo de relaxação *de cisalhamento*, τ_s :

$$\tau_s = \left(\frac{\mu_v}{\rho_1 c_s^2} \right); \quad (5.22)$$

Com essas definições em mãos, a Eq. (5.18) torna-se

$$\partial_t^2 \mathbf{u} = c_\ell^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_s^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \tau_\ell c_\ell^2 \nabla (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u}) - \tau_s c_s^2 \nabla \times \nabla \times \partial_t \mathbf{u}. \quad (5.23)$$

Nesse ponto, resolver essa equação seria bastante complicado. O caminho a ser seguido é o de decompor o vetor deslocamento $\mathbf{u}$ em um potencial escalar φ_ℓ e um potencial vetor $\mathbf{A}$ usando o teorema da decomposição de Helmholtz [48]:

$$\mathbf{u} = (\nabla \varphi_\ell + \nabla \times \mathbf{A}) e^{-i\omega t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.24)$$

Substituir a Eq. (5.24) na Eq.(5.23) produz o seguinte resultado:

$$\nabla \left[\partial_t^2 \varphi_\ell - c_\ell^2 \nabla^2 \varphi_\ell - \tau_\ell c_\ell^2 \partial_t \nabla^2 \varphi_\ell \right] e^{-i\omega t} + \nabla \times \left[\partial_t^2 \mathbf{A} - c_s^2 \nabla^2 \mathbf{A} - \tau_s c_s^2 \partial_t \nabla^2 \mathbf{A} \right] e^{-i\omega t} = 0. \quad (5.25)$$

Uma das formas da Eq. (5.25) ser válida é mediante a imposição de cada termo da soma ser independentemente igual a zero (ou supor sua ortogonalidade em L^2). Isso produz o seguinte par de equações:

$$\left[(1 + \tau_\ell \partial_t) \nabla^2 - c_\ell^{-2} \partial_t^2 \right] \varphi_\ell e^{-i\omega t} = 0; \quad (5.26a)$$

$$\left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \mathbf{A} e^{-i\omega t} = \mathbf{0}. \quad (5.26b)$$

Pode-se, agora, representar o potencial vetor $\mathbf{A}$ com o uso de dois potenciais escalares de Debye [49], $\psi_{s,1}$ e $\psi_{s,2}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \varphi_{s,1} + \nabla \times \mathbf{L} \varphi_{s,2}, \quad (5.27)$$

onde $\mathbf{L}$ é o operador de momento angular usual, $\mathbf{L} = -i \mathbf{r} \times \nabla$. Ao substituir a Eq. (5.27) na Eq. (5.26b), obtém-se

$$\left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] [\mathbf{L} \varphi_{s,1} + \nabla \times \mathbf{L} \varphi_{s,2}] e^{-i\omega t} = 0. \quad (5.28)$$

Nesse ponto, assume-se ortogonalidade entre as parcelas envolvidas na soma, como foi feito anteriormente, para produzir um sistema de equações:

$$\begin{aligned} \left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \mathbf{L} \varphi_{s,1} e^{-i\omega t} &= 0; \\ \left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \nabla \times \mathbf{L} \varphi_{s,2} e^{-i\omega t} &= 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

O Apêndice 3 mostra a comutabilidade dos operadores $\mathbf{L}$ e ∇^2 , bem como dos operadores $\nabla \times \mathbf{L}$ e ∇^2 . Com esses resultados, reescrevem-se as Eqs. (5.29) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -i \mathbf{r} \times \nabla \left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \varphi_{s,1} e^{-i\omega t} &= 0; \\ -i \nabla \times \mathbf{r} \times \nabla \left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \varphi_{s,2} e^{-i\omega t} &= 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

pois tanto $\mathbf{L}$ quanto $\nabla \times \mathbf{L}$ comutam com as derivadas temporais. Então, por fim, obtém-se um par de equações escalares:

$$\begin{aligned} \left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \varphi_{s,1} e^{-i\omega t} &= 0; \\ \left[(1 + \tau_s \partial_t) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \varphi_{s,2} e^{-i\omega t} &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para simplificar esse conjunto de equações, rearranjam-se os operadores das Eqs. (5.26a) e (5.31) da seguinte maneira: considere j como uma variável auxiliar, que pode ser s ou ℓ , de forma que o operador diferencial se escreve como:

$$(1 + \tau_j \partial_t) \nabla^2 - c_j^{-2} \partial_t^2; \quad (5.32)$$

como as derivações temporais atuarão somente sobre $e^{-i\omega t}$, produzem as constantes $-i\omega$ a cada derivação. Com isso, o operador se transforma em:

$$\nabla^2 - i\omega \tau_j \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c_j^2} = (1 - i\omega \tau_j) \nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c_j} \right)^2. \quad (5.33)$$

Então, defina

$$k_j = \frac{\omega}{c_j} \frac{1}{\sqrt{1 - i\omega \tau_j}}; \quad j = s \text{ ou } \ell \quad (5.34)$$

para obter as equações escalares que descrevem os fasores envolvidos na propagação sonora no meio viscoelástico:

$$(\nabla^2 + k_\ell^2) \varphi_\ell = 0; \quad (5.35a)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \varphi_{s,1} = 0; \quad (5.35b)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \varphi_{s,2} = 0; \quad (5.35c)$$

Assim, determinaram-se as equações de Helmholtz satisfeitas no interior do sólido viscoelástico. No entanto, esse resultado não reflete uma propriedade importante do coeficiente de absorção do material com a frequência da onda sonora que nele se propaga.

Para visualizar tal relação, note que há um análogo ao índice de refração complexo embutido na Eq. (5.34). Denotando-o por $n_c(\omega\tau_j)$, onde j pode assumir o papel de s ou ℓ , temos

$$n_c(\omega\tau_j) = \frac{1}{\sqrt{1 - i\omega\tau_j}}. \quad (5.36)$$

Certamente, n_c pode ser escrito como a soma $n_R + i\tilde{\alpha}$, onde n_R é sua porção real e $\tilde{\alpha}$ a imaginária. A porção imaginária, $\tilde{\alpha}$, relaciona-se com a absorção adimensional do material, α . A fim de entender essa relação, considere o quadrado da relação de dispersão, dada pela Eq. (5.34):

$$k_j^2 = \left(\frac{\omega}{c_j}\right)^2 \left(\frac{1}{1 - i\omega\tau_j}\right); \quad (5.37)$$

separa-se, então, k_j em parte real e parte imaginária, $k_j = \beta_j + i\alpha_j$ (onde α_j é o coeficiente de absorção do material). Igualando as porções imaginárias de (5.37) juntamente com a igualdade anterior, tem-se:

$$2\alpha_j\beta_j = \left(\frac{\omega}{c_j}\right)^2 \frac{\tau_j\omega}{1 + \omega^2\tau_j^2}. \quad (5.38)$$

Englobando as dependências do material na constante α_0 , pode-se usar a aproximação conservativa de pequenez de Szabo [50],

$$\frac{\alpha_j}{\beta_j} \approx \frac{\alpha_0 |\omega_{\text{lim}}|}{\beta_0}, \quad (5.39)$$

onde ω_{lim} é a frequência ω da onda (contanto que não seja menor que um valor limite mínimo de 0,1 Hz) e $\beta_0 = \omega/c_0$ com c_0 sendo a velocidade do som na água. Dessa

aproximação e da Eq. (5.38), obtém-se

$$\alpha_j = \alpha_0 \omega. \quad (5.40)$$

Sabe-se que o coeficiente α_j tem uma dependência com a frequência angular ω dada por uma lei de potência para materiais viscoelásticos [50],

$$\alpha_j = \alpha_0 \omega^y, \quad (5.41)$$

com y variando continuamente entre 0 e 2, de acordo com o material (por exemplo, α_ℓ num tecido de fígado bovino tem dependência $y = 1,3$ demonstrada experimentalmente) [51]. No entanto, o resultado da Eq. (5.40) não reflete essa dependência com o parâmetro y . Para contornar esse problema, propõe-se que o modelo seja atualizado a fim de englobar tal dependência. Isso pode ser feito de diversas maneiras, como introduzindo-se uma derivada fracionária temporal no modelo de Kelvin-Voigt, ou ainda tornando fracionário o laplaciano em outros pontos do modelo [52]. Nesse trabalho, faremos uso da derivada fracionária temporal.

5.3 Modelo de Kelvin-Voigt fracionário

Com o objetivo de obter-se a relação do coeficiente da absorção dada pela Eq. (5.41), generaliza-se a derivada temporal da Eq. (5.3), introduzindo a possibilidade dela ser fracionária de ordem ν :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + B_{ijkl} \partial_t^\nu \epsilon_{kl}, \quad (5.42)$$

usando-se a derivação fracionária de Caputo [53], simplificada para uma função $f(t)$ como

$$\mathfrak{F} [\partial_t^\nu f(t)] = (-i\omega)^\nu \mathfrak{F} [f(t)], \quad (5.43)$$

onde $\mathfrak{F} [g(t)] = G(\omega)$ é a transformada de Fourier de uma função $g(t)$. De maneira explícita, denotando $\mathfrak{F} [f(t)] = F(\omega)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t^\nu f(t)] e^{-i\omega t} dt = (-i\omega)^\nu F(\omega). \quad (5.44)$$

Tal definição altera as passagens subsequentes feitas na sessão anterior nas derivadas temporais. Podemos resumir essas alterações com as seguintes redefinições:

- O tempo de relaxação *longitudinal*, τ_ℓ , agora é definido por:

$$\tau_\ell = \left(\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\rho_1 c_\ell^2} \right)^{\frac{1}{\nu}}; \quad (5.45)$$

- O tempo de relaxação *de cisalhamento*, τ_s , agora é definido por:

$$\tau_s = \left(\frac{\mu_v}{\rho_1 c_s^2} \right)^{\frac{1}{\nu}}; \quad (5.46)$$

Então, de maneira similar ao apresentado anteriormente, obtem-se as equações para os potenciais escalares. Para isso, é necessário que se determine

$$\partial_t^\nu e^{-i\omega t} = (-i\omega)^\nu e^{-i\omega t}, \quad (5.47)$$

resultado de (5.44) com $f(t) = e^{-i\omega t}$. Com isso, obtém-se

$$(\nabla^2 + k_\ell^2) \varphi_\ell = 0; \quad (5.48a)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \varphi_{s,1} = 0; \quad (5.48b)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \varphi_{s,2} = 0. \quad (5.48c)$$

Com a relação de dispersão dada por (considerando j como ℓ ou s):

$$k_j^2 = \left(\frac{\omega}{c_j} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + (-i\omega\tau_j)^\nu} \right). \quad (5.49)$$

Dessa potência ν que surge na relação de dispersão, podemos aplicar novamente a aproximação de Szabo e, dessa vez, obter

$$\alpha_j = \alpha_0 \omega^\nu \quad (5.50)$$

Obtendo a relação empírica conhecida, com $\nu = y$. Portanto, faremos uso desse modelo, dito fracionário, para tratar dos sólidos viscoelásticos, uma vez que ele nos permite recuperar um resultado experimental bastante consolidado.

5.4 Espalhamento por uma esfera viscoelástica

Considere o problema do espalhamento de uma onda acústica por uma partícula esférica de natureza viscoelástica. As soluções das equação de Helmholtz no

centro espalhador são

$$\begin{aligned}\varphi_\ell(k_\ell r, \cos \theta, \phi) &= \sum_{l,m} b_l a_{lm} j_l(k_\ell r) Y_l^m(\cos \theta, \phi); \\ \varphi_{s,1}(k_s r, \cos \theta, \phi) &= \sum_{l,m} c_l a_{lm} j_l(k_s r) Y_l^m(\cos \theta, \phi); \\ \varphi_{s,2}(k_s r, \cos \theta, \phi) &= \sum_{l,m} d_l a_{lm} j_l(k_s r) Y_l^m(\cos \theta, \phi).\end{aligned}\tag{5.51}$$

Supondo ondas incidentes e espalhadas muito longe da esfera ($kr \gg 1$), fazendo uso das relações do Apêndice 4:

$$\begin{aligned}\varphi_{in}(kr, \cos \theta, \phi) &\sim \frac{1}{kr} \sum_{l,m} a_{lm} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) Y_l^m(\cos \theta, \phi); \\ \varphi_{sc}(kr, \cos \theta, \phi) &\sim -\frac{ie^{ikr}}{kr} \sum_{l,m} i^{-l} s_l a_{lm} Y_l^m(\cos \theta, \phi),\end{aligned}\tag{5.52}$$

Tomando o cuidado para a convergência da primeira série, apenas para $l \ll kr$ (na prática, tomam-se esse número de termos no cálculo numérico, então não há problemas de convergência nesse limite). A completa enunciação do problema é feita pelas condições de contorno nesse caso, levando em conta a deformação da estrutura viscoelástica. Para isso, consideram-se as seguintes hipóteses:

1. O deslocamento radial da partícula, na interface, deve ser igual ao deslocamento radial do fluido ideal que circunda a partícula.

$$u_r(a, \theta, \phi) = \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_{in}(r, \theta, \phi) + \varphi_{sc}(r, \theta, \phi)]_{r=a}; \tag{5.53}$$

2. Na superfície, a pressão do fluido deve ser igual à componente radial das tensões da partícula (uma vez que essa pressão deve ser a única atuante na partícula).

$$\sigma_{rr}(a, \theta, \phi) = -i\rho_0\omega [\varphi_{in}(a, \theta, \phi) + \varphi_{sc}(a, \theta, \phi)]; \tag{5.54}$$

3. Para que a partícula não gire no fluido, as componentes tangenciais das tensões devem ser nulas.

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta, \phi) = 0; \tag{5.55a}$$

$$\sigma_{r\phi}(a, \theta, \phi) = 0. \tag{5.55b}$$

Com essas condições de contorno, determinam-se os coeficientes de espalhamento e internos do campo acústico. Primeiramente, determina-se qual é a componente radial do vetor deslocamento, $\mathbf{u}$, em função das funções φ_ℓ , $\varphi_{s,1}$ e $\varphi_{s,2}$. Para isso, retome as Eqs. (5.24) e (5.27) e escreva

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_\ell + \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} \varphi_{s,1} + \nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} \varphi_{s,2}, \quad (5.56)$$

de forma que a componente radial é

$$u_r = \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial r} + \frac{\partial^2 (r \varphi_{s,2})}{\partial r^2} + k_s^2 r \varphi_{s,1}. \quad (5.57)$$

Para as condições de contorno, são necessárias as componentes do tensor de tensões σ . Para determiná-los, usa-se a expressão do tensor de deformações da Ref. [39]

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (5.58)$$

onde $\nabla \mathbf{u}$ representa o produto tensorial entre ∇ e $\mathbf{u}$, enquanto $\nabla \mathbf{u}^T$ simboliza sua transposta. Com essa expressão, fazendo uso da Eq. (5.57), obtemos a expressão do tensor de deformações ϵ . Com ele na Eq. (5.42), que pode ser reescrita como

$$\sigma = [(\lambda_e + \lambda_v \partial_t^\nu) \text{tr} \epsilon] \mathbf{I} + 2 (\mu_e + \mu_v \partial_t^\nu) \epsilon, \quad (5.59)$$

determinamos cada uma das componentes de σ , a saber,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -[\lambda_e + (-i\omega \lambda_v)^\nu] k_\ell^2 \varphi_\ell + 2 [\mu_e + (-i\omega \mu_v)^\mu] \\ & \times \left[\partial_r^2 (\varphi_\ell + \partial_r (r \varphi_{s,1})) + k_s^2 \partial_r (r \varphi_{s,1}) \right]; \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & [\mu_e + (-i\omega \mu_v)^\nu] \\ & \times \left\{ 2 \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_\theta (\varphi_\ell + \partial_r (r \varphi_{s,1})) \right] + k_s^2 \left[\partial_\theta \varphi_{s,1} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \left(\partial_r \varphi_{s,2} - \frac{\varphi_{s,2}}{r} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\phi} = & [\mu_e + (-i\omega \mu_v)^\nu] \\ & \times \left\{ \frac{2}{\sin \theta} \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_\phi (\varphi_\ell + \partial_r (r \varphi_{s,1})) \right] + k_s^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \varphi_{s,1} - \partial_\theta \left(\partial_r \varphi_{s,2} - \frac{\varphi_{s,2}}{r} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Aplicam-se, então, as condições de contorno em busca de um sistema de equações para s_l , b_l , c_l e d_l . Calculando a Eq. (5.53), usando a notação $x_\ell = k_\ell a$, $x_s = k_s a$ e

$$x_0 = k_0 a,$$

$$[lj_l(x_\ell) - x_\ell j_{l+1}(x_\ell)] b_l + l(l+1)j_l(x_s) c_l = \frac{i}{\omega} \left\{ lj_l(x_0) - x_0 j_{l+1}(x_0) + [lh_l^{(1)}(x_0) - x_0 h_l^{(1)}(x_0)] s_l \right\}; \quad (5.63)$$

fazendo uso da relação de recorrência do Apêndice 4 (4.24a), escreve-se

$$\overbrace{\left[-i \left(\frac{x_0}{\omega} \right) h_l^{(1)}(x_0) \right]}^{\alpha_{11}} s_l + \underbrace{[x_\ell j'_l(x_\ell)]}_{\alpha_{12}} b_l + \overbrace{[l(l+1)j_l(x_s)]}_{\alpha_{13}} c_l = \underbrace{\frac{x_0}{\omega} j'_l(x_0)}_{\beta_1}; \quad (5.64)$$

onde os termos α_{11} , α_{12} e α_{13} são os coeficientes de s_l , b_l e c_l , respectivamente, e β_1 é uma constante à direita da igualdade. Da segunda condição de contorno (5.54), calcula-se

$$\begin{aligned} -i\omega\rho_0 [j_l(x_0) + h_l^{(1)}(x_0)s_l] = & -[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu] k_\ell^2 j_l(x_\ell) b_l + 2[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] \\ & \times \left\{ k_\ell^2 j_l''(x_\ell) b_l + [3k_s^2 j_l''(x_s) + x_s k_s^2 j_l'''(x_s) + k_s^2 j_l(x_s) + x_s k_s^2 j_l'(x_s)] c_l \right\}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Manipulando as quantidades nessa equação usando as seguintes relações

$$[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu] = \frac{\omega^2 \rho_1}{k_s^2} \left(\frac{k_s^2 - 2k_\ell^2}{k_\ell^2} \right); \quad (5.66a)$$

$$[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] = \frac{\omega^2 \rho_1}{k_s^2}; \quad (5.66b)$$

e as relações de recorrência do Apêndice 4 (4.24b) e (4.24c), escreve-se

$$\begin{aligned} \overbrace{\left[\frac{i\rho_0 x_s^2}{\omega\rho_1} h_l^{(1)}(x_0) \right]}^{\alpha_{21}} s_l + \underbrace{\left\{ [2l(l+1) - x_s^2] j_l(x_\ell) - 4x_\ell j'_l(x_\ell) \right\}}_{\alpha_{22}} b_l + \\ + \underbrace{\left\{ 2l(l+1) [x_s j'_l(x_s) - j_l(x_s)] \right\}}_{\alpha_{23}} c_l = \underbrace{-\frac{i\rho_0 x_s^2}{\omega\rho_1} j_l(x_0)}_{\beta_2}; \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde essa é a segunda equação da forma $\alpha_{21}s_l + \alpha_{22}b_l + \alpha_{23}c_l = \beta_2$, a ser usada para determinar os coeficientes de expansão. A terceira condição de contorno, (5.55a), produz

$$\begin{aligned} \frac{im}{\sin\theta} [x_s^2 j'_l(x_s) - x_s k_s j_l(x_s)] Y_l^m(\cos\theta, \phi) d_l = & 2[j_l(x_\ell) - x_\ell j'_l(x_\ell)] \partial_\theta Y_l^m(\cos\theta, \phi) b_l + \\ & + [2j_l(x_s) - x_s^2 j_l(x_s) - 2x_s j'_l(x_s) - 2x_s^2 j_l''(x_s)] \partial_\theta Y_l^m(\cos\theta, \phi) c_l; \end{aligned} \quad (5.68)$$

a quarta, (5.55b), por sua vez, leva a

$$\begin{aligned} \left[x_s^2 j_l'(x_s) - x_s k_s \right] \partial_\theta Y_l^m(\cos \theta, \phi) d_l = -2 \frac{im}{\sin \theta} [j_l(x_\ell) - x_\ell j_l'(x_\ell)] Y_l^m(\cos \theta, \phi) b_l \\ - \frac{im}{\sin \theta} \left[2j_l(x_s) - x_s^2 j_l(x_s) - 2x_s j_l'(x_s) - 2x_s^2 j_l''(x_s) \right] Y_l^m(\cos \theta, \phi) c_l. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Combinar as equações (5.68) e (5.69) produz

$$\left[x_s^2 j_l'(x_s) - x_s j_l(x_s) \right] d_l = 0, \quad (5.70)$$

que deve ser válida para todos os d_l , bem como para as funções às quais estão multiplicando d_l . Assim, os coeficientes $d_l = 0, \forall l = 0, 1, \dots$. Dessa forma a equação (5.68) pode ser reescrita como

$$\overbrace{\{2[j_l(x_\ell) - x_\ell j_l'(x_\ell)]\}}^{\alpha_{32}} b_l + \underbrace{\{2x_s j_l'(x_s) + [x_s^2 - 2l(l+1) + 2] j_l(x_s)\}}_{\alpha_{33}} c_l = \overbrace{0}^{\beta_3}, \quad (5.71)$$

sendo essa a última equação do sistema linear de equações a ser resolvido. Na sua forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_l \\ b_l \\ c_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

ou, simplesmente,

$$\alpha \mathbf{v} = \beta, \quad (5.73)$$

onde a matriz α de coeficientes tem seus termos nas Eqs. (5.64), (5.67) e (5.71).

Esse sistema pode ser resolvido inteiramente determinando-se a matriz inversa de α , α^{-1} , assumindo que ela exista. Dessa forma, todos os coeficientes possuem fórmulas explícitas e analíticas, de forma que o problema está completamente determinado com essa equação.

Conclusões e perspectivas

Nesse trabalho, tratamos do espalhamento de campos acústicos por diferentes materiais. Ao longo dos capítulos, propomos e respondemos diversas perguntas-chave que sumarizam o que foi estudado. No Capítulo 2, concluímos que uma onda sonora harmônica no tempo é caracterizada por um fasor φ que satisfaz a equação de Helmholtz, $(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0$. Suas soluções, numa geometria esférica, são combinações lineares de funções radiais (Bessel, Neumann ou Hankel) com funções angulares (harmônicos esféricos). Explicitamos fórmulas a serem usadas na expressão dos campos acústicos em todas as regiões de interesse. No Capítulo 3, enunciamos e resolvemos o problema de espalhamento para uma esfera penetrável, explicitando os coeficientes da onda acústica no interior do centro espalhador. Também obtivemos expressões analíticas da quantidade de energia (potencial e cinética) depositada pela onda acústica no processo de espalhamento, observando parâmetros que produzem ressonâncias nessas grandezas. O Capítulo 4 tratou formalmente de tensões e deformações para sólidos, fundamentais para a análise de corpos rígidos num processo de espalhamento. Vimos como determinar parâmetros relevantes para suas caracterizações, como os coeficientes de Lamé. No Capítulo 5, modelamos e resolvemos o problema de espalhamento por um objeto esférico viscoelástico, tratado pelo modelo de Kelvin-Voigt fracionário. Em seu interior, vimos que seriam necessários dois fatores para descrever o campo acústico (não somente um, como no caso de um fluido incompressível, e não três como no caso mais geral viscoelástico, pois a geometria do problema simplifica um dos potenciais necessários). Ainda, explicitamos o sistema linear que determina os coeficientes de forma única, sendo esse o principal objetivo do trabalho.

Os resultados referentes ao cálculo da energia interna de centros espalhadores fluidos são originais. Temos, por perspectiva, continuar a abordagem desse problema para diferentes geometrias dos centros espalhadores (cilindros e sistemas “core-shell” de esferas e cilindros), bem como tratar de diferentes modelos viscoelásticos (modelo de Maxwell, Zener e Wiechert, por exemplo). Esperamos, com isso, enriquecer a literatura científica nessa teoria, fundamentando possíveis resultados experimentais que envolvam materiais viscoelásticos, bem como estimulando o desenvolvimento de metamateriais acústicos.

Solução da equação de Helmholtz - coordenadas esféricas

Considere $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ (de forma que θ simboliza o ângulo azimutal entre o eixo z e $\mathbf{r}$), descrito pela transformação

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (1.1a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (1.1b)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (1.1c)$$

com $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

Figura 1.1: Diagrama que representa as coordenadas esféricas, adotadas ao longo do trabalho. Caracteriza-se um ponto de coordenadas retangulares (x, y, z) a partir das análogas esféricas (r, θ, ϕ) fazendo uso da transformação (1.1).

Pode-se resolver a equação de Helmholtz para um fasor $\varphi(\mathbf{r})$, $(\nabla^2 + k^2) \varphi = 0$, usando o método de *separação de variáveis*, que consiste em fazer a seguinte hipótese:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (1.2)$$

Nessas coordenadas, pode-se escrever o operador Laplaciano ∇^2 como:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (1.3)$$

Assim, a equação de Helmholtz fica:

$$\frac{\Theta \Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R \Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 R \Theta \Phi = 0; \quad (1.4)$$

multiplicando toda a equação por $r^2 \sin^2 \theta (R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi))^{-1}$, obtém-se

$$\sin^2 \theta \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + r^2 k^2 \right] = 0. \quad (1.5)$$

Isso implica na possibilidade de isolar uma porção da equação unicamente dependente de ϕ :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \sin^2 \theta \left[-r^2 k^2 - \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right]. \quad (1.6)$$

Dessa forma, existe alguma constante real que deve ser igual a ambos os lados da igualdade. Considere $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2; \quad (1.7a)$$

$$\sin^2 \theta \left[-r^2 k^2 - \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] = -m^2. \quad (1.7b)$$

Ainda, a Eq. (1.7b) pode ser melhorada, a fim de que surjam equações unicamente dependentes de r e θ . Para isso, basta dividir os dois lados da igualdade por $\sin^2 \theta$ e separar os termos da seguinte forma:

$$r^2 k^2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right). \quad (1.8)$$

Com isso, considere outra constante $l \in \mathbb{Z}$ escrita como $l(l+1)$ e escreva as equações separadas:

$$r^2 k^2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1); \quad (1.9a)$$

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1). \quad (1.9b)$$

Agora considere a Eq. (1.7a). Sua solução é uma exponencial complexa, tal que

$$\Phi(\phi) = \Phi_1 e^{im\phi}; \quad (1.10)$$

a constante m pertence aos inteiros devido à periodicidade do ângulo polar ϕ : $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$.

A outra equação angular do problema, Eq. (1.9b), deve ser resolvida mediante a mudança de variáveis $\eta = \cos \theta$. Essa mudança de variáveis mostra que, na simetria em questão, o cosseno de θ é a variável natural do problema, pois é em termos dela que suas soluções são visualizadas.

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{d\Theta}{d\eta}(\eta) \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] \Theta(\eta) = 0. \quad (1.11)$$

Essa equação denomina-se *equação associada de Legendre*, que possui por soluções as chamadas *funções associadas de Legendre* no argumento $\eta = \cos \theta$, ou seja,

$$\Theta(\eta) = \Theta_1 P_l^m(\eta). \quad (1.12)$$

É bastante comum reescrever o produto $\Phi(\phi)\Theta(\eta)$ como um conjunto de funções, normalizadas por conveniência, conhecidas como *harmônicos esféricos* $Y_l^m(\cos \theta, \phi)$. Uma de suas representações matemáticas é

$$Y_l^m(\cos \theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad l \geq 0, -l \leq m \leq l. \quad (1.13)$$

Figura 1.2: Funções $Y_l^m(\cos \theta, \phi)$ para $l = 0, 1, 2$ e $m = 0, 1, 2$, quando possível.

Com relação à dependência radial, dada pela Eq. (1.9a), suas soluções são dadas aos pares (como uma soma de duas soluções linearmente independentes). Uma opção é a soma de uma *função de Bessel esférica* de ordem l , $j_l(kr)$, e uma *função de Neumann esférica* de ordem l , $y_l(kr)$, ou seja,

$$R(r) = R_1 j_l(kr) + R_2 y_l(kr); \quad (1.14)$$

ou ainda por uma soma de *funções de Hankel de primeiro e segundo tipo* de ordem l , $h_l^{(1)}(kr)$ e $h_l^{(2)}(kr)$, como

$$R(r) = R_3 h_l^{(1)}(kr) + R_4 h_l^{(2)}(kr). \quad (1.15)$$

Figura 1.3: À esquerda: funções de Bessel esféricas $j_l(x)$, para $l = 0, 1, 2, 3, 4$. À direita: valor absoluto das funções de Hankel esféricas do primeiro tipo, $|h_l^{(1)}(x)|$. Nota-se que as funções de Bessel são bem definidas na origem, e oscilam quando $x \rightarrow \infty$, enquanto as funções de Hankel esféricas do primeiro tipo não são bem definidas para $x \rightarrow 0$, mas decaem a zero a medida que $x \rightarrow \infty$.

Por fim, essas soluções são conectadas no fasor $\varphi(kr, \cos \theta, \phi)$, de acordo com a região do espaço que tratamos: caso a função deva ser definida em $r = 0$, tomamos a combinação de funções de Bessel esféricas e de Neumann esféricas,

$$\varphi(kr, \cos \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} y_l(kr)] Y_l^m(\cos \theta, \phi); \quad (1.16)$$

caso a situação seja tal que a função precise ser bem definida quando $r \rightarrow \infty$, a combinação das funções de Hankel de primeiro e segundo tipo é mais conveniente:

$$\varphi(kr, \cos \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [s_{lm} h_l^{(1)}(kr) + c_{lm} h_l^{(2)}(kr)] Y_l^m(\cos \theta, \phi). \quad (1.17)$$

Essas expressões são usadas para recuperar a onda de pressão $p(\mathbf{r}, t)$ e o

campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ através das relações de recorrência

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \varphi(kr, \cos \theta, \phi) \partial_t e^{-i\omega t}, \quad (1.18a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi(kr, \cos \theta, \phi) e^{-i\omega t}; \quad (1.18b)$$

onde ρ_0 indica a densidade do meio onde a onda se propaga.

Tensor de deformações - geometria esférica

Consideremos o vetor posição $\mathbf{r} = (r, \eta, \phi)$, onde $\eta = \cos \theta$ simboliza o cosseno do ângulo azimutal das coordenadas esféricas. Nessa representação, o vetor deslocamento $\mathbf{u}$ se escreve em coordenadas como $\mathbf{u} = (u_r, u_\eta, u_\phi)$. Nessas coordenadas, o tensor de deformações ϵ tem componentes dadas por

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
 \epsilon_{\eta\eta} &= \frac{1}{r} \left(u_r - \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right); \\
 \epsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{r\sqrt{1 - \eta^2}} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \eta u_\eta + \sqrt{1 - \eta^2} u_r \right); \\
 2\epsilon_{\eta\phi} &= -\frac{1}{r\sqrt{1 - \eta^2}} \left(\eta u_\phi + (1 - \eta^2) \frac{\partial u_\phi}{\partial \eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial \phi} \right); \\
 2\epsilon_{r\eta} &= \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_\eta}{\partial r} - u_\eta - \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial u_r}{\partial \eta} \right); \\
 2\epsilon_{\phi r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - u_\phi \right).
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Comutabilidade de operadores

Inicialmente, mostramos que o operador de momento angular usual, $\mathbf{L} = -i \mathbf{r} \times \nabla$, comuta com o operador Laplaciano, ∇^2 . Tome u sendo uma função escalar diferenciável, ao menos, até terceira ordem. Então, considere a i -ésima componente de $[\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla) u]$:

$$\begin{aligned} [\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla) u]_i &= \nabla^2 [\mathbf{r} \times (\nabla u)]_i = \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} (x_j \partial_k u - x_k \partial_j u) \\ &= x_j \left(\sum_n \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_k} \right) - x_k \left(\sum_n \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

E a i -ésima componente de $[(\mathbf{r} \times \nabla) \nabla^2 u]$ é:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{r} \times \nabla) \nabla^2 u]_i &= \left\{ \mathbf{r} \times \left[\nabla \left(\sum_n \partial_n^2 u \right) \right] \right\}_i \\ &= x_j \left[\nabla \left(\sum_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \right]_k - x_k \left[\nabla \left(\sum_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \right]_j \\ &= x_j \left(\sum_n \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_k} \right) - x_k \left(\sum_n \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^2 \partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como (3.20) e (3.21) são iguais, $\mathbf{L}$ e ∇^2 comutam. De maneira semelhante, podemos provar que $\nabla \times \mathbf{L}$ e ∇^2 também comutam. Para isso, fazemos uso do cálculo vetorial:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{L}) &= \nabla [\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{L})] - \nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{L} \\ &= -\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
[\nabla \times \mathbf{L}] \nabla^2 &= \nabla \times (\mathbf{L} \nabla^2) \\
&= \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{L}) \\
&= \nabla \times [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{L}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{L}] \\
&= -\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{L},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde a segunda passagem de (3.23) vem do fato de $\mathbf{L}$ e ∇^2 comutarem. (3.22) e (3.23) implicam que ∇^2 e $\nabla \times \mathbf{L}$ comutam.

Fórmulas de recorrência e assintóticas - funções de Bessel e Hankel

Inicialmente, consideremos as fórmulas de recorrência para as funções de Bessel e Hankel de primeiro tipo, usando a Ref. [44, 54].

1. Funções de Bessel esféricas

$$j_l(x) = -j_{l+1}(x) + \frac{l}{x}j_l(x); \quad (4.24a)$$

$$x^2 j_l''(x) + 2x j_l'(x) + [x^2 - l(l+1)] j_l(x) = 0; \quad (4.24b)$$

$$x^2 j_l'''(x) + 4x j_l''(x) + [2 + x^2 - l(l+1)] j_l'(x) + 2x j_l(x) = 0. \quad (4.24c)$$

2. Funções de Hankel de primeiro tipo

$$h_l^{(1)'}(x) = -h_{l+1}^{(1)} + \frac{l}{x}h_l^{(1)}(x); \quad (4.25)$$

Consideremos, agora, as expressões assintóticas:

1. Casos assintóticos quando $x \ll 1$

(a) Funções de Bessel esféricas

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!}; \quad (4.26a)$$

$$j_l'(x) \sim \frac{-x^{l+1} + l(2l+3)x^{l-1}}{(2l+3)!!}. \quad (4.26b)$$

(b) Funções de Hankel do primeiro tipo

$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{-i(2l+1)!!}{x^{l+1}}; \quad (4.27a)$$

$$h_l^{(1)'}(x) \sim \frac{i(l+1)(2l-1)!!}{x^{l+2}}. \quad (4.27b)$$

2. Casos assintóticos quando $x \gg 1$

(a) Funções de Bessel esféricas

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right); \quad (4.28a)$$

$$j_l'(x) \sim \frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{l\pi}{2} \right) + \frac{l}{x^2} \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (4.28b)$$

(b) Funções de Hankel do primeiro tipo

$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{i^{-l-1}}{x} e^{ix}; \quad (4.29a)$$

$$h_l^{(1)'}(x) \sim \frac{-i^l e^{ix}}{x} \left(1 + i \frac{l}{x} \right). \quad (4.29b)$$

Referências¹

- [1] H. C. Hulst e H. C. van de Hulst, *Light scattering by small particles*. Courier Corporation, 1981. 1
- [2] J. W. Strutt e B. Rayleigh, *The theory of sound*. Dover, 1945. 1
- [3] L. Rayleigh, “Xii. on our perception of sound direction”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 13, no. 74, pp. 214–232, 1907. 1
- [4] L. Rayleigh, “Xii. on the propagation of sound in narrow tubes of variable section”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 31, no. 182, pp. 89–96, 1916.
- [5] L. Rayleigh, “Xxxvii. on the passage of waves through apertures in plane screens, and allied problems”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 43, no. 263, pp. 259–272, 1897. 1
- [6] K. Chadán e P. C. Sabatier, *Inverse problems in quantum scattering theory*. Springer Science & Business Media, 2012. 1
- [7] J. R. Taylor, *Scattering theory: the quantum theory of nonrelativistic collisions*. Courier Corporation, 2006.
- [8] R. G. Newton, *Scattering theory of waves and particles*. Springer Science & Business Media, 2013. 1
- [9] P. M. Morse e K. U. Ingard, *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, 1987. 1, 5, 10
- [10] J. J. Faran Jr, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *The Journal of the acoustical society of America*, vol. 23, no. 4, pp. 405–418, 1951. 1, 18

¹De acordo com o estilo LMSC (baseado no estilo IEEE Transactions - Electrical and Electronics Engineers).

- [11] A. D. Pierce, *Acoustics. An Introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America, 1994. 2, 10, 17
- [12] W. N. Kellogg, R. Kohler e H. Morris, “Porpoise sounds as sonar signals.”, *Science*, 1953. 2
- [13] M. B. Dobrin e C. H. Savit, *Introduction to geophysical prospecting*, vol. 4. McGraw-hill New York, 1960. 2
- [14] E. Saenger, B. Steiner e S. Schmalholz, “Time reverse reservoir localization”, mar. 9 2010. US Patent 7,675,815. 2
- [15] J. M. Ziman, *Electrons and phonons: the theory of transport phenomena in solids*. Oxford university press, 2001. 2
- [16] Z. Yang, H. Dai, N. Chan, G. Ma e P. Sheng, “Acoustic metamaterial panels for sound attenuation in the 50–1000 hz regime”, *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 4, p. 041906, 2010. 2
- [17] Z. Liang e J. Li, “Extreme acoustic metamaterial by coiling up space”, *Physical review letters*, vol. 108, no. 11, p. 114301, 2012. 2
- [18] J. Mei, G. Ma, M. Yang, Z. Yang, W. Wen e P. Sheng, “Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound”, *Nature communications*, vol. 3, p. 756, 2012. 2
- [19] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics (Course of theoretical physics, v.6)*. Pergamon Press, Oxford, 1987. 2, 13, 29
- [20] N. I. Landy, S. Sajuyigbe, J. J. Mock, D. R. Smith e W. J. Padilla, “Perfect metamaterial absorber”, *Physical review letters*, vol. 100, no. 20, p. 207402, 2008. 2
- [21] P. Moitra, B. A. Slovick, W. Li, I. I. Kravchenko, D. P. Briggs, S. Krishnamurthy e J. Valentine, “Large-scale all-dielectric metamaterial perfect reflectors”, *ACS Photonics*, vol. 2, no. 6, pp. 692–698, 2015. 2
- [22] V. Bargmann, “On the connection between phase shifts and scattering potential”, *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, no. 3, p. 488, 1949. 2

- [23] N. Esbjerg e J. Nørskov, “Dependence of the he-scattering potential at surfaces on the surface-electron-density profile”, *Physical Review Letters*, vol. 45, no. 10, p. 807, 1980. 2
- [24] J. A. Weitzen e W. T. Ralston, “Meteor scatter: An overview”, *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 36, no. 12, pp. 1813–1819, 1988. 2
- [25] J. P. Leão-Neto e G. T. Silva, “Acoustic radiation force and torque exerted on a small viscoelastic particle in an ideal fluid”, *Ultrasonics*, vol. 71, pp. 1–11, 2016. 3, 39, 40
- [26] J. Lee, C. Lee, H. H. Kim, A. Jakob, R. Lemor, S.-Y. Teh, A. Lee e K. K. Shung, “Targeted cell immobilization by ultrasound microbeam”, *Biotechnology and bioengineering*, vol. 108, no. 7, pp. 1643–1650, 2011. 3
- [27] H. Mulvana, S. Cochran e M. Hill, “Ultrasound assisted particle and cell manipulation on-chip”, *Advanced drug delivery reviews*, vol. 65, no. 11-12, pp. 1600–1610, 2013. 3
- [28] B. Barshan e R. Kuc, “A bat-like sonar system for obstacle localization”, *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 22, no. 4, pp. 636–646, 1992. 3
- [29] J. Reijniers e H. Peremans, “Biomimetic sonar system performing spectrum-based localization”, *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no. 6, pp. 1151–1159, 2007. 3
- [30] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens e J. V. Sanders, “Fundamentals of acoustics”, *Fundamentals of Acoustics, 4th Edition, by Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, James V. Sanders, pp. 560. ISBN 0-471-84789-5. Wiley-VCH, December 1999.*, p. 560, 1999. 3, 10
- [31] T. J. Arruda e A. S. Martinez, “Electromagnetic energy within a magnetic infinite cylinder and scattering properties for oblique incidence”, *JOSA A*, vol. 27, no. 7, pp. 1679–1687, 2010. 3
- [32] T. J. Arruda e A. S. Martinez, “Electromagnetic energy within magnetic spheres”, *JOSA A*, vol. 27, no. 5, pp. 992–1001, 2010.

-
- [33] T. J. Arruda, F. A. Pinheiro e A. S. Martinez, “Electromagnetic energy within coated spheres containing dispersive metamaterials”, *Journal of Optics*, vol. 14, no. 6, p. 065101, 2012.
- [34] T. J. Arruda, F. A. Pinheiro e A. S. Martinez, “Electromagnetic energy within single-resonance chiral metamaterial spheres”, *JOSA A*, vol. 30, no. 6, pp. 1205–1212, 2013.
- [35] T. J. Arruda, A. S. Martinez e F. A. Pinheiro, “Electromagnetic energy within coated cylinders at oblique incidence and applications to graphene coatings”, *JOSA A*, vol. 31, no. 8, pp. 1811–1819, 2014.
- [36] T. J. Arruda, A. S. Martinez e F. A. Pinheiro, “Electromagnetic energy and negative asymmetry parameters in coated magneto-optical cylinders: Applications to tunable light transport in disordered systems”, *Physical Review A*, vol. 94, no. 3, p. 033825, 2016.
- [37] T. J. Arruda, F. A. Pinheiro e A. S. Martinez, “Electromagnetic energy stored in inhomogeneous scattering systems”, *JOSA A*, vol. 34, no. 10, pp. 1934–1939, 2017.
- [38] T. J. Arruda, A. S. Martinez, F. A. Pinheiro, R. Bachelard, S. Slama e P. W. Courteille, “Fano resonances in plasmonic core-shell particles and the purcell effect”, *arXiv preprint arXiv:1808.06897*, 2018. 3
- [39] J. P. Leão-Neto, *Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física., 2015. 5, 9, 39, 49
- [40] E. G. Williams, *Fourier acoustics: sound radiation and nearfield acoustical holography*. Elsevier, 1999. 11
- [41] J. D. Jackson, “Classical electrodynamics”, 1999. 18
- [42] D. C. Thomas, K. L. Gee e R. S. Turley, “A balloon lens: Acoustic scattering from a penetrable sphere”, *American Journal of Physics*, vol. 77, no. 3, pp. 197–203, 2009. 19

-
- [43] G. Müller e M. Möser, *Handbook of engineering acoustics*. Springer Science & Business Media, 2012. 23
- [44] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. Courier Corporation, 1965. 24, 25, 65
- [45] T. J. Arruda, “Espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas e cilindros magnéticos: confinamento e transporte de ondas no limite de pequenas partículas e independência da energia armazenada com relação à forma do centro espalhador”, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2015. 24
- [46] B. D. C. Cohen-Tannoudji e F. Laloë, *QUANTUM MECHANICS*. Wiley-vch, 1977. 27
- [47] F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2010. 40
- [48] G. Hirasaki e J. Hellums, “Boundary conditions on the vector and scalar potentials in viscous three-dimensional hydrodynamics”, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 28, no. 2, pp. 293–296, 1970. 43
- [49] C. Gray e B. Nickel, “Debye potential representation of vector fields”, *American Journal of Physics*, vol. 46, no. 7, pp. 735–736, 1978. 43
- [50] T. L. Szabo, “Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 96, no. 1, pp. 491–500, 1994. 45, 46
- [51] J. Pohlhammer, C. Edwards e W. D. O’Brien, “Phase insensitive ultrasonic attenuation coefficient determination of fresh bovine liver over an extended frequency range”, *Medical Physics*, vol. 8, no. 5, pp. 692–694, 1981. 46
- [52] B. E. Treeby e B. Cox, “Modeling power law absorption and dispersion in viscoelastic solids using a split-field and the fractional laplacian”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 136, no. 4, pp. 1499–1510, 2014. 46

- [53] W. Chen e S. Holm, “Modified szabo’s wave equation models for lossy media obeying frequency power law”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 114, no. 5, pp. 2570–2574, 2003. 46
- [54] F. W. J. Olver, *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*. Cambridge university press, 2010. 65