

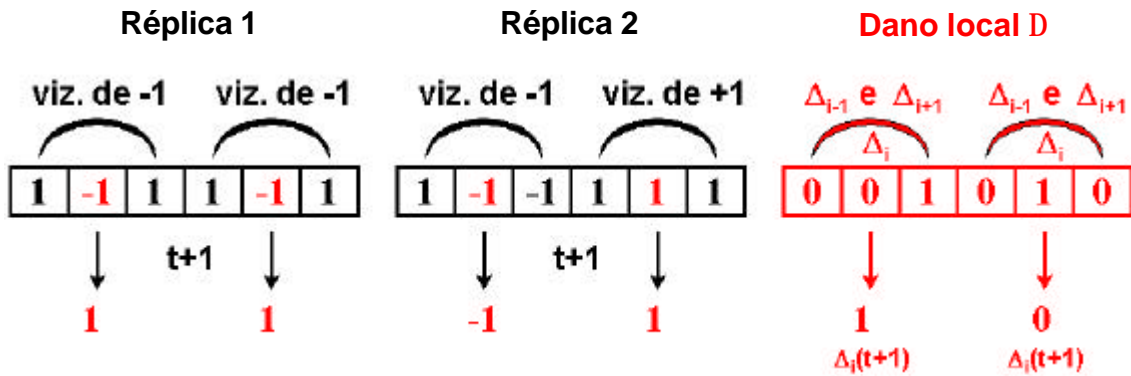
será igual a meio ( $p_i(t) = 1/2$ ), podendo a equação (4.20) ser reduzida a:

$$s(t+1) = s_{i-1}(t)s_{i+1}(t)\text{sinal}\left(\frac{1}{2} - r\right) \quad (4.23)$$

o que implica que o dano local,  $\Delta_i(t) = 1 - d_{s_i(t), s'_i(t)}$ , é regido por regras determinísticas:

$$\Delta_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \Delta_{i-1}(t) = \Delta_{i+1}(t) \\ 1 & \text{se } \Delta_{i-1}(t) \neq \Delta_{i+1}(t) \end{cases} \quad (4.24)$$

Vejam os um exemplo:

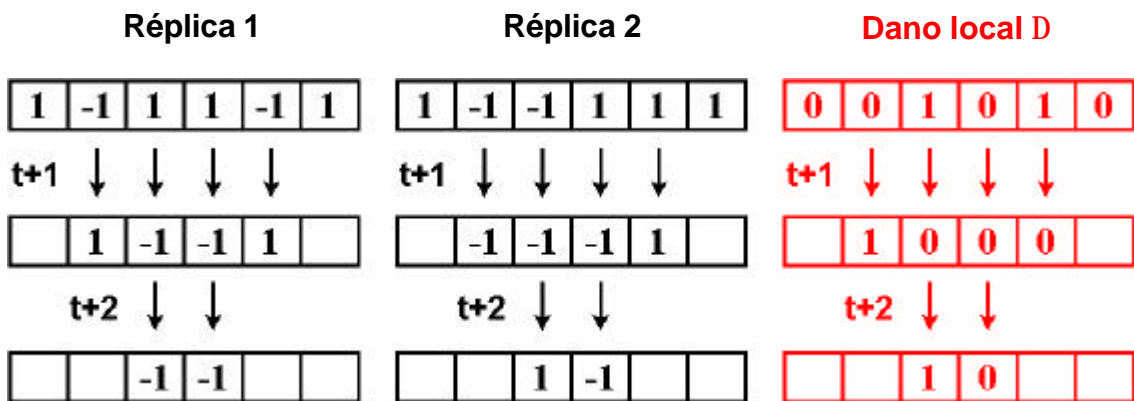


Temos duas réplicas num tempo ( $t$ ) formadas por  $s_i = 1$  ou  $-1$ , e o dano local representado por  $\Delta$  (obtido por comparação entre as duas réplicas). Se os spins correspondentes forem diferentes nas duas amostras, dizemos que há dano local e atribuímos à variável binária  $\Delta$  um valor igual a 1. Em caso contrário, não existirá o dano local e o valor dado à variável será igual a 0.

Evoluindo a primeira réplica, analisando apenas os spins em vermelho por motivo de simplificação, vemos que os seus valores foram atualizados segundo a equação (4.23). Para poder comparar as amostras, no instante  $t+1$ , consideramos sempre o número aleatório  $r$  menor do que  $1/2$ . A análise não seria modificada se considerássemos o número aleatório maior do que  $1/2$ , uma vez que o mesmo  $r$  será usado na evolução das duas réplicas, para o mesmo sítio.

Comparando as réplicas para um tempo ( $t+1$ ) observamos que houve o dano local apenas para o primeiro sítio estudado. Voltando a atenção para o dano local, observa-se que realmente a equação (4.24) é obedecida ou seja que o dano local, para um tempo imediatamente posterior, dependerá apenas do dano local de seus dois vizinhos.

Fazendo o mesmo procedimento para os demais sítios, teremos:



Analisando a evolução do dano local é fácil perceber que a regra de atualização é a mesma do autômato de Domany-Kinzel ,

**Tab. 4.1:** Probabilidades de transição do autômato de Domany-Kinzel

	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
1	$p_2$	$p_1$	$p_1$	0
0	$1 - p_2$	$1 - p_1$	$1 - p_1$	1

só que com  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0$ , se observarmos no diagrama de fases do autômato de Domany-Kinzel (Figura 4.17) veremos que essa é uma região da fase ativa e portanto conclui-se que para  $T = \infty$ , ocorre a propagação do dano.

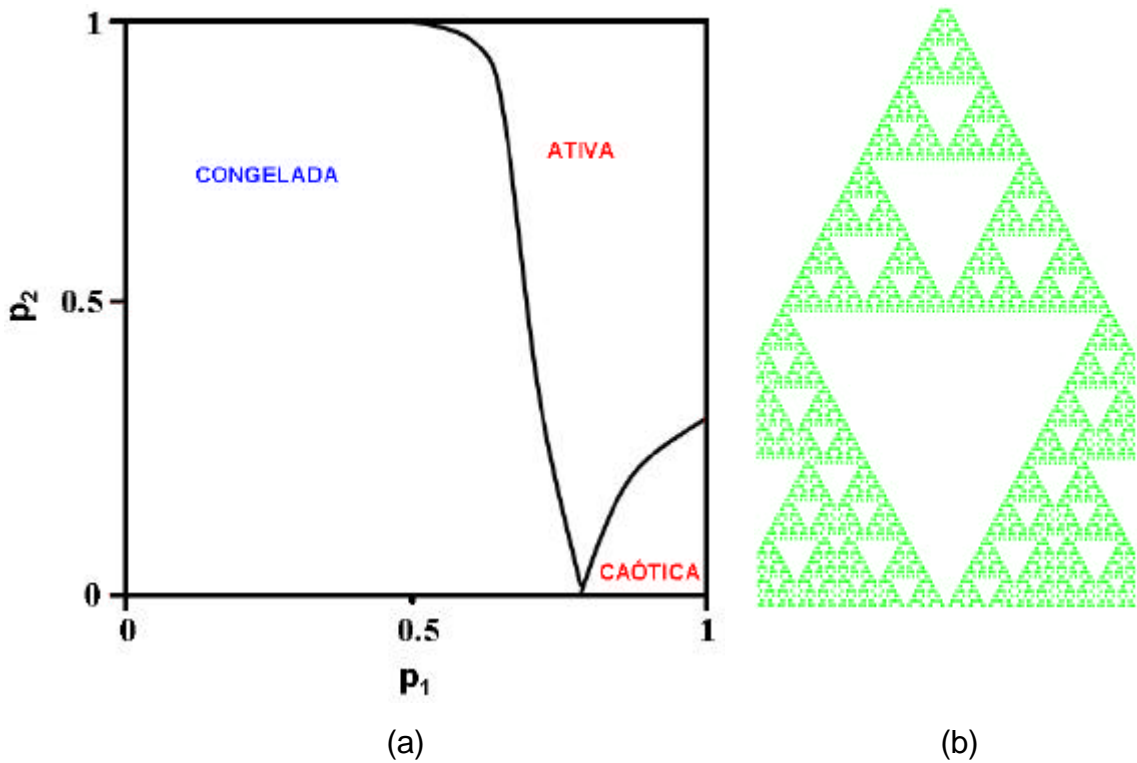


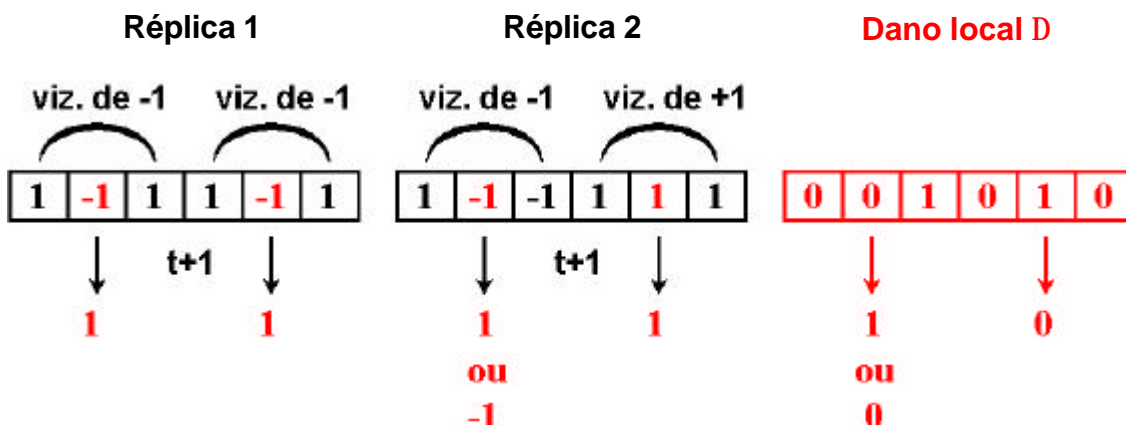
Fig. 4.17: (a) Diagrama de fases do autômato de Domany-Kinzel (b) Evolução do autômato quando  $p_2 = 0$  e  $p_1 = 1$ .

Indo ao outro extremo, para  $T = 0$ , e levando em consideração as equações (4.21) e (4.22) sabemos que a probabilidade de transição será dada por  $p = 1$  quando  $s_{i-1} = s_{i+1}$  e  $p = \frac{1}{2}$  quando  $s_{i-1} \neq s_{i+1}$ , sendo possível resumir a equação (4.20) como:

$$s_i(t+1) = \begin{cases} s_{i-1} & \text{se } s_{i-1} = s_{i+1} \\ \text{sinal}\left(r - \frac{1}{2}\right) & \text{se } s_{i-1} \neq s_{i+1} \end{cases} \quad (4.25)$$

Agora, ao contrário do caso  $T = \infty$ , a atualização envolve regras probabilísticas e não pode ser vista como um processo determinístico. No entanto, podemos observar que o dano, na média, obedece à inequação  $\langle \Delta_i(t+1) \rangle \leq \frac{1}{2} \langle \Delta_{i-1}(t) + \Delta_{i+1}(t) \rangle$  e portanto  $\langle \Delta(t+1) \rangle \leq \langle \Delta(t) \rangle$ .

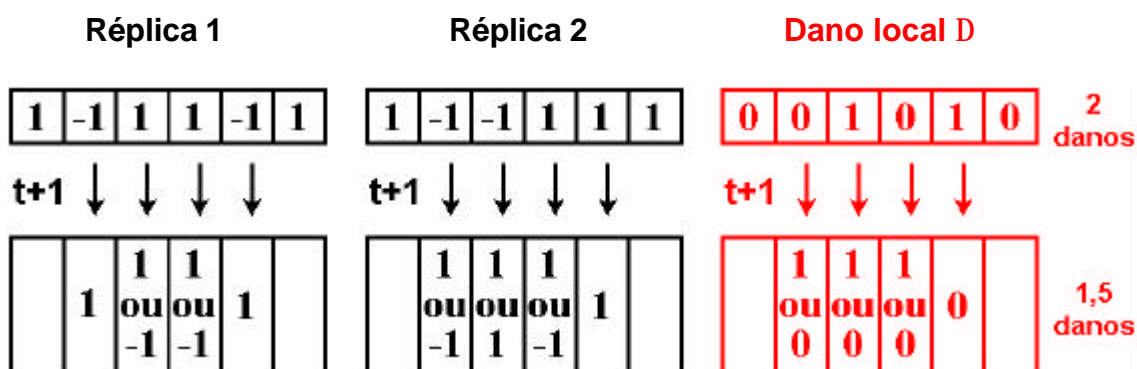
Consideremos o seguinte exemplo:



Evoluindo a primeira réplica e analisando, novamente, apenas os spins em vermelho (por motivo de simplificação), vemos que os seus valores, para um tempo (t+1), seguem o valor de seu vizinho imediatamente anterior (regra seguida quando os vizinhos dos spins são iguais (equação 4.25)). Já para a segunda réplica, o mesmo ocorreu para o segundo spin marcado que possui vizinhos idênticos. Porém, para o primeiro spin (também marcado), devido ao fato de não possuir vizinhos idênticos, apresenta igual (equação 4.25) probabilidade de continuar sendo -1 ou mudar para 1 em um instante posterior (t+1).

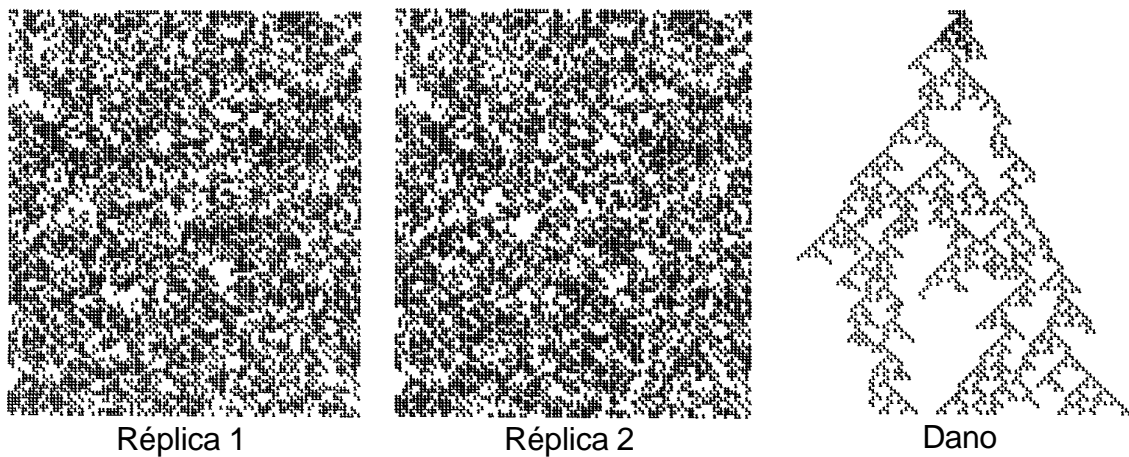
Dessa forma, observando o dano local, não se pode afirmar, para o primeiro spin analisado, se para um tempo (t+1) ele será ou não danificado.

Realizando o mesmo procedimento para os demais sítios passaremos a ter:



Nota-se que a igual probabilidade de ocorrer ou não o dano local fez com que diminuísse o dano para um tempo  $(t+1)$  passando de dois para um e meio, confirmando a inequação  $\langle \Delta(t+1) \rangle \leq \langle \Delta(t) \rangle$ . Isso significa que para uma temperatura  $T = 0$  não ocorre a propagação de dano para essa dinâmica.

De fato, podemos verificar que a propagação ocorre para valores de  $T$  acima de um certo valor crítico. Uma evolução temporal típica para essa dinâmica próxima da temperatura de transição, é mostrada a seguir (Figura 4.18):



**Fig. 4.18:** Evolução temporal do dano para o modelo de Ising unidimensional usando a dinâmica da equação (4.20) próximo da temperatura de transição  $J/k_B T^* = 0,23$ . Duas réplicas foram evoluídas nas mesmas condições iniciais com 5 sítios danificados em seu centro.

## 4.5 Relação entre a segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany e o autômato celular (modelo A) de Grassberger

A segunda dinâmica proposta por Hinrichsen e Domany obedece à equação (4.14) e possui dois estados absorventes, como num modelo de conservação de paridade<sup>45</sup>. Também exibe propagação de dano mesmo em uma dimensão, diferente do que ocorre num modelo de Ising tradicional.

A possibilidade de propagação do dano, na dinâmica (4.16) pode ser demonstrada, considerando que o valor de  $\lambda$  seja igual a zero portanto passando a seguir a regra (4.12) que para  $T = \infty$  poderia ser simplificada para:

$$s(t+1) = s_{i-1} s_i s_{i+1} \text{ sinal}\left(\frac{1}{2} - r\right), \quad (4.26)$$

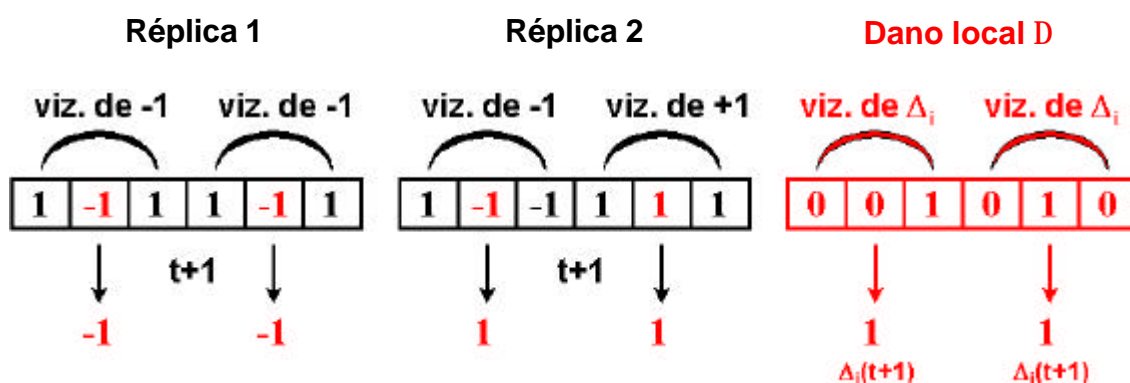
o que implica que o dano local  $\Delta$  passa a ser regido por regras determinísticas:

Tab. 4.2: Regras para o dano local considerando  $\lambda = 0$  e  $T = \infty$ .

	D							
t	100	001	101	110	011	111	000	010
t+1	1	1	0	0	0	0	0	1

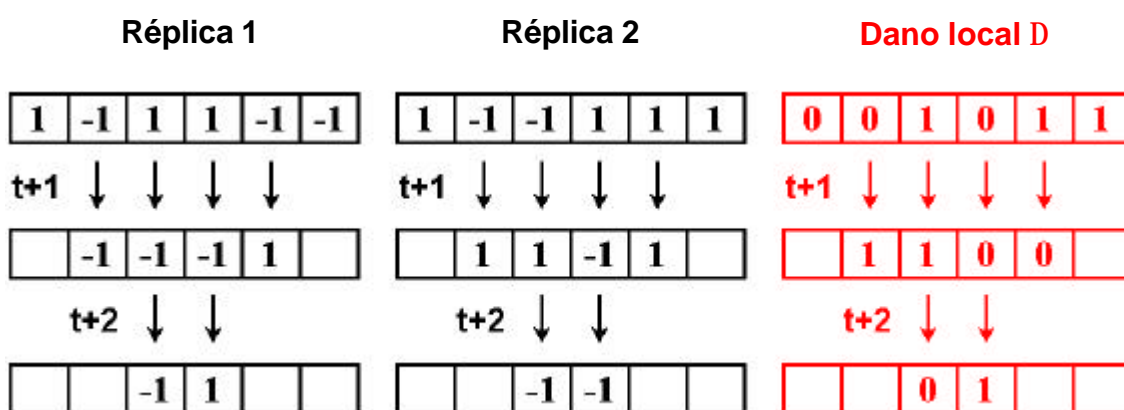
(4.27)

Demonstramos isso no seguinte exemplo:



Para chegar a essa conclusão evoluímos a primeira e a segunda réplica, (acompanhe apenas os spins em vermelho para facilitar o entendimento), atualizando os spins com a equação (4.26). Comparando as amostras no instante  $(t+1)$ , observamos que apareceu um dano local no segundo sítio e o dano n quinto sítio foi mantido. Nesses casos, a atualização do  $\Delta$  depende apenas de seu próprio valor ( $\Delta_t$ ) e de sua vizinhança.

Completando o mesmo procedimento para os demais sítios,



e observando a evolução do dano local nos outros casos, vemos que as regras de atualização para o dano local são aquelas da equação (4.27). Ocorre que essas regras (4.27) correspondem exatamente àquelas do autômato (modelo A) de Grassberger, dadas por:

Tab. 4.3: Regras do autômato (modelo A) de Grassberger.

<b>t</b>	100	001	101	110	011	111	000	010	(4.28)
<b>t + 1</b>	1	1	0	1-p	1-p	0	0	1	

no caso limite de  $p = 1$ . Mais do que isso, esse autômato é governado pela regra 22 (segundo a notação de Wolfram<sup>80</sup>) de um autômato celular unidimensional determinístico, e que, como se sabe, possui um comportamento caótico (duas amostras similares mesmo com uma pequena diferença entre elas, provocada por um dano, se distanciam) Isso pode ser visto nas figuras 4.9.a e 4.10.a. Assim, para  $T = \infty$  e  $\lambda = 0$ , explica-se e verifica-se a propagação de dano nesse modelo.

Na figura (4.19.c) mostra-se a evolução do dano utilizando a equação (4.12).

Para  $\lambda = 1$  e  $T = \infty$ , a equação (4.14) pode ser simplificada para:

$$s_i(t+1) = s_i \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2} - r\right) \quad (4.29)$$

o que leva às seguintes regras de evolução para o dano local,

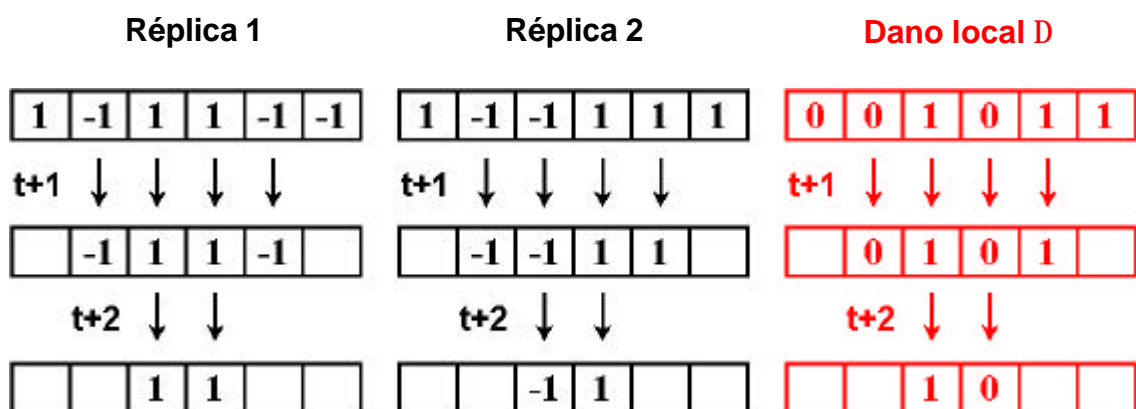
**Tab. 4.4:** Regras para o dano local considerando  $\lambda = 1$  e  $T = \infty$ .

	D							
T	111	110	101	100	011	010	001	000
t+1	1	1	0	0	1	1	0	0

(4.30)

correspondentes à chamada regra 204 na notação de Wolfram<sup>80</sup>.

Mostramos isso no seguinte exemplo:



Observe que a existência ou não do dano local é sempre mantida nos passos de tempo subseqüentes, permanecendo em um estado estacionário. Note que são formados dois estados simétricos (simetria  $Z_2$ ) absorventes constituídos de linhas verticais fixas, típicas da regra<sup>80</sup> 204, não ocorrendo portanto a sua propagação.

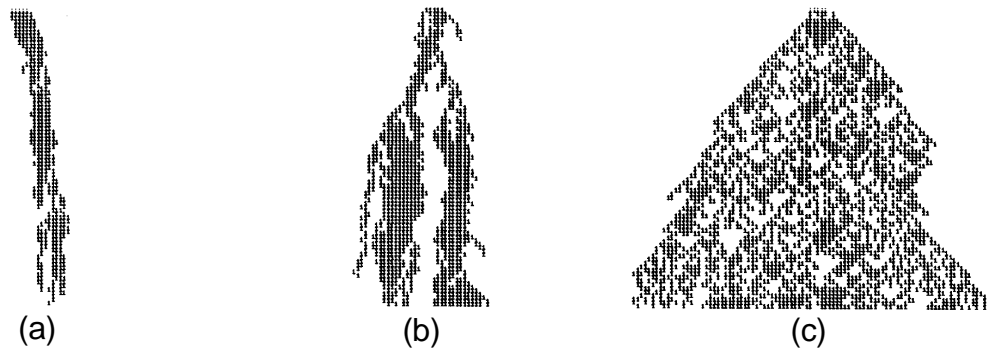
A ausência de propagação de dano, com  $\lambda = 1$ , já era esperada uma vez que a dinâmica (4.14), nesse limite, passa a seguir o modelo de Glauber (4.13) que como já é sabido não apresenta a propagação de dano em uma dimensão. A sua evolução temporal é mostrada na figura 4.19.a, onde se



observa que os sítios danificados ficam compactados uma vez que não ocorre cicatrização espontânea em seu interior, mas apenas nas laterais.

Chegamos à conclusão de que, para ocorrer a propagação de dano no modelo de Ising unidimensional, utilizando a segunda dinâmica, a uma temperatura fixa diferente de zero, é necessário que  $\lambda \neq 1$  para que a dinâmica de Glauber (que não apresenta propagação de dano) possa ser interpolada com a regra (4.12).

De fato, fixando a temperatura em  $J/k_B T = 0.25$ , verificamos que a propagação ocorre para valores de  $\lambda$  abaixo de um certo valor crítico (0.82). Na Figura 4.19.b é mostrada uma evolução típica dessa segunda dinâmica proposta por Hinrichsen e Domany.

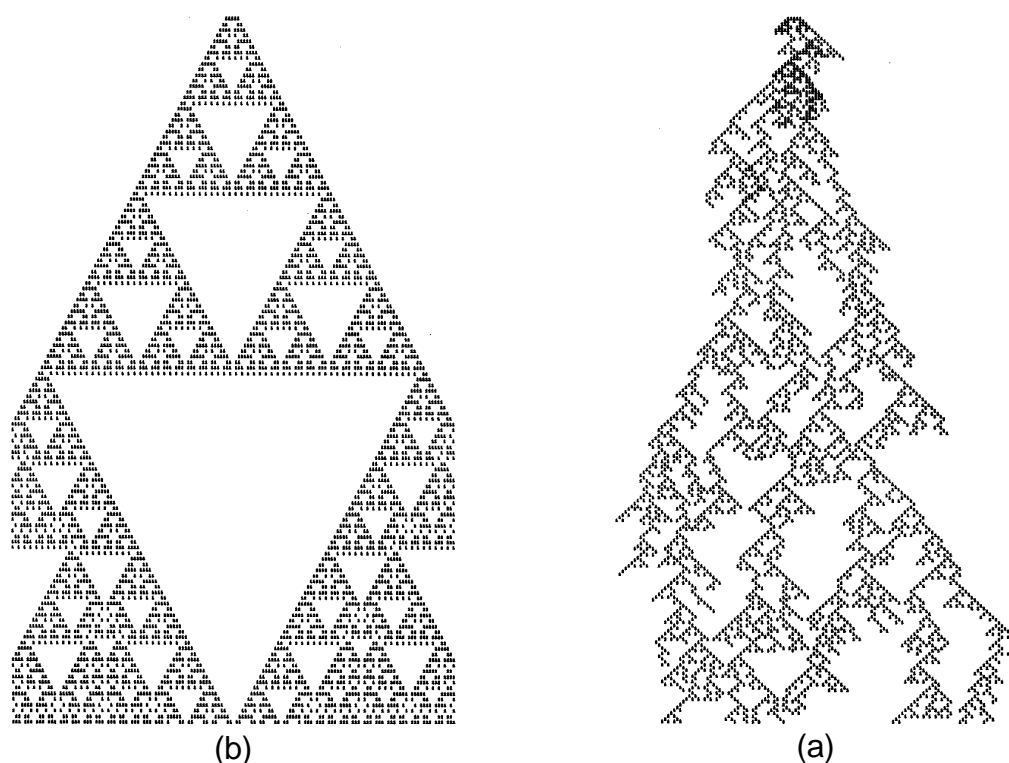


**Fig. 4.19:** Evolução temporal do dano para o modelo de Ising unidimensional fazendo uso da segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany. Duas réplicas com 500 sítios são iniciados a partir das mesmas condições, inserindo cinco sítios danificados em seu centro. Fixando a temperatura a  $J/k_B T = 0.25$  mostramos a evolução típica para o modelo (a) segundo a dinâmica de Glauber portanto tendo como  $\lambda = 1$ , (b) próximo a transição  $\lambda = 0.82$  e (c) em regime de propagação  $\lambda = 0$  seguido a eq (4.12).

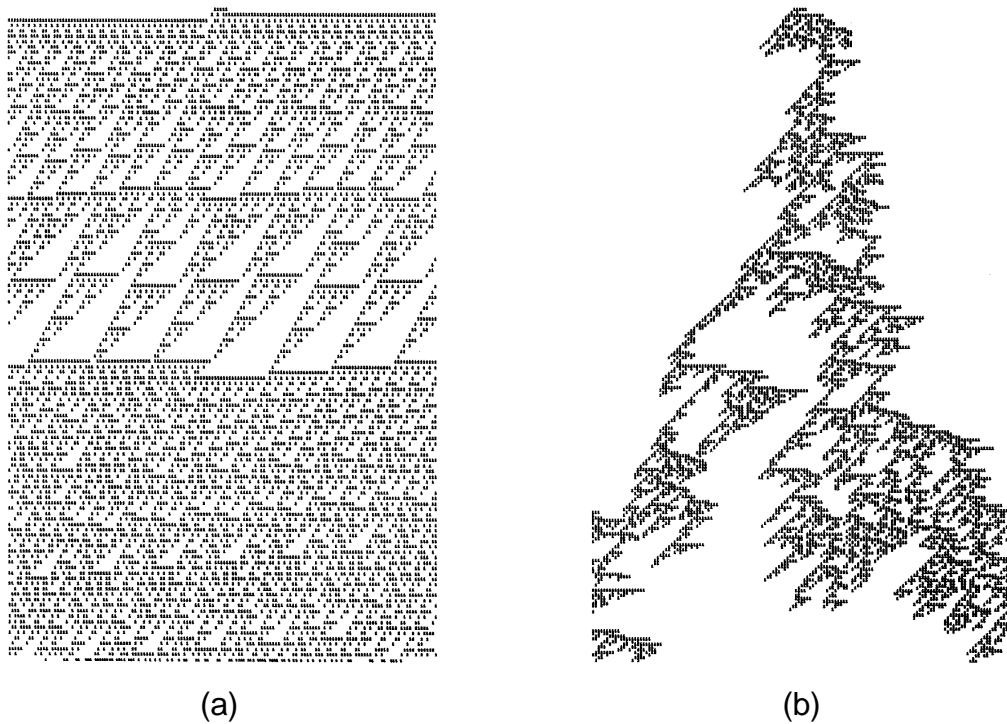
## 4.6 Influência da atualização na propagação de danos

Chama-se também atenção para o fato de que a propagação do dano nessa segunda dinâmica só foi observada quando a atualização dos spins (“update”) foi feita de forma sincronizada (como é usual em autômatos), o mesmo não ocorria na primeira dinâmica.

Analisando a evolução do dano para o autômato celular unidimensional de Domany-Kinzel, num estado caótico ( $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0$ ), há uma grande diferença entre as duas formas de atualização (Figura 4.20.a – síncrona e Figura 4.21.a – assíncrona). Para uma situação próxima da transição ( $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0,31$ ) a evolução com dinâmica contínua (Figura 4.20.b), mesmo apresentado uma evolução diferente da atualização sincronizada (Figura 4.21.b), também possui propagação de dano.



**Fig. 4.20** : Evolução temporal do dano para o autômato unidimensional de Domany-Kinzel com atualização sincronizada. (a) No estado ativo caótico,  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0$  (b) próximo a transição,  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0,31$ .



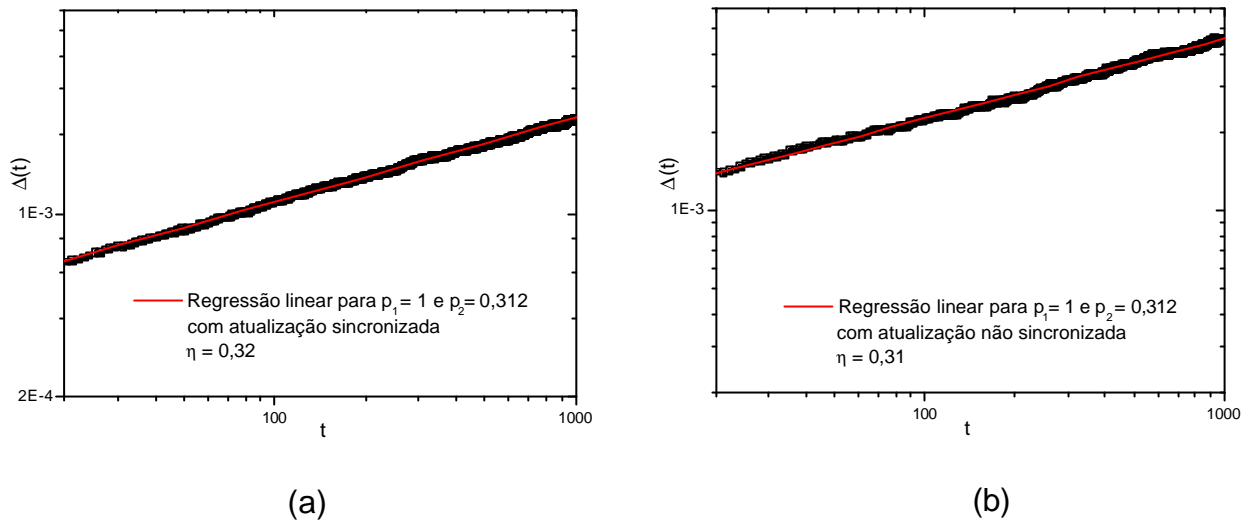
**Fig. 4.21** : Evolução temporal do dano para o autômato unidimensional de Domany-Kinzel com atualização assíncrona. (a) No estado ativo caótico,  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0$  (b) próximo a transição,  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0,31$ .

Embora a propagação, na sua evolução, seja bem diferente para os dois casos, os expoentes críticos para probabilidade de sobrevivência (Figura 4.23) e propagação de dano (Figura 4.22) são muito semelhantes, independentemente da forma como foi realizada a atualização dos spins.

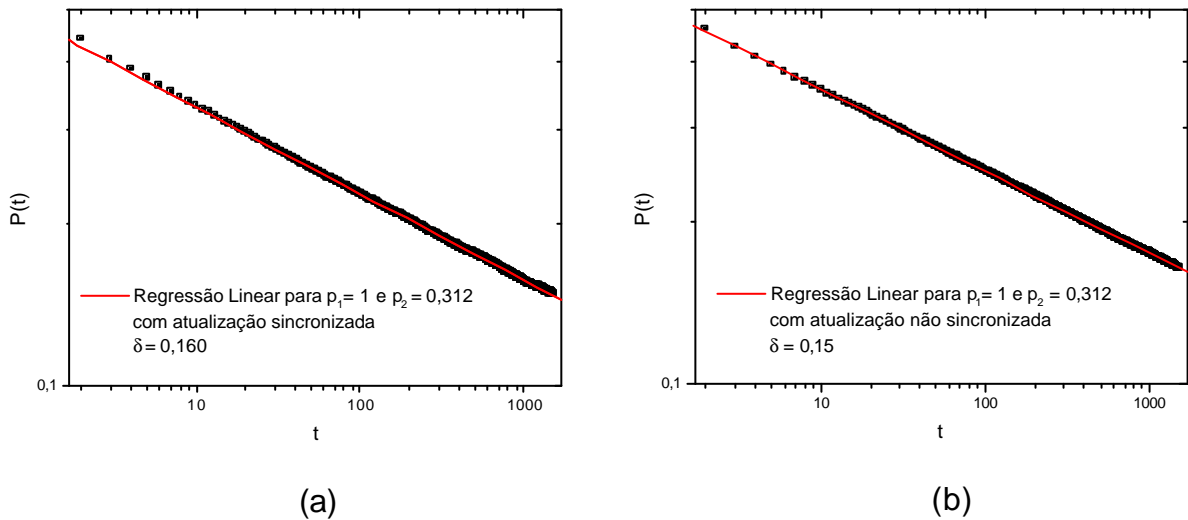
**Tab. 4.5:** Comparação entre os expoentes críticos para a propagação de dano e para a probabilidade de sobrevivência utilizando a atualização sincronizada e a não sincronizada.

Atualização sincronizada	Atualização não sincronizada
$\eta = 0.32 \pm 0.01$ (Figura 4.21.a)	$\eta = 0.31 \pm 0.01$ (Figura 4.21.b)
$\delta = 0.160 \pm 0,005$ (Figura 4.22.a)	$\delta = 0.15 \pm 0.01$ (Figura 4.22.b)

Para o cálculo dos dois expoentes trabalhamos com sistemas de 5000 sítios, com condições periódicas de contorno, com 1500 unidades de tempo (MCS) e 4000 amostras. Esse conjunto de 4000 amostras foi dividido em 4 conjuntos (de 1000 amostras) para que fosse calculado a médio e o desvio.



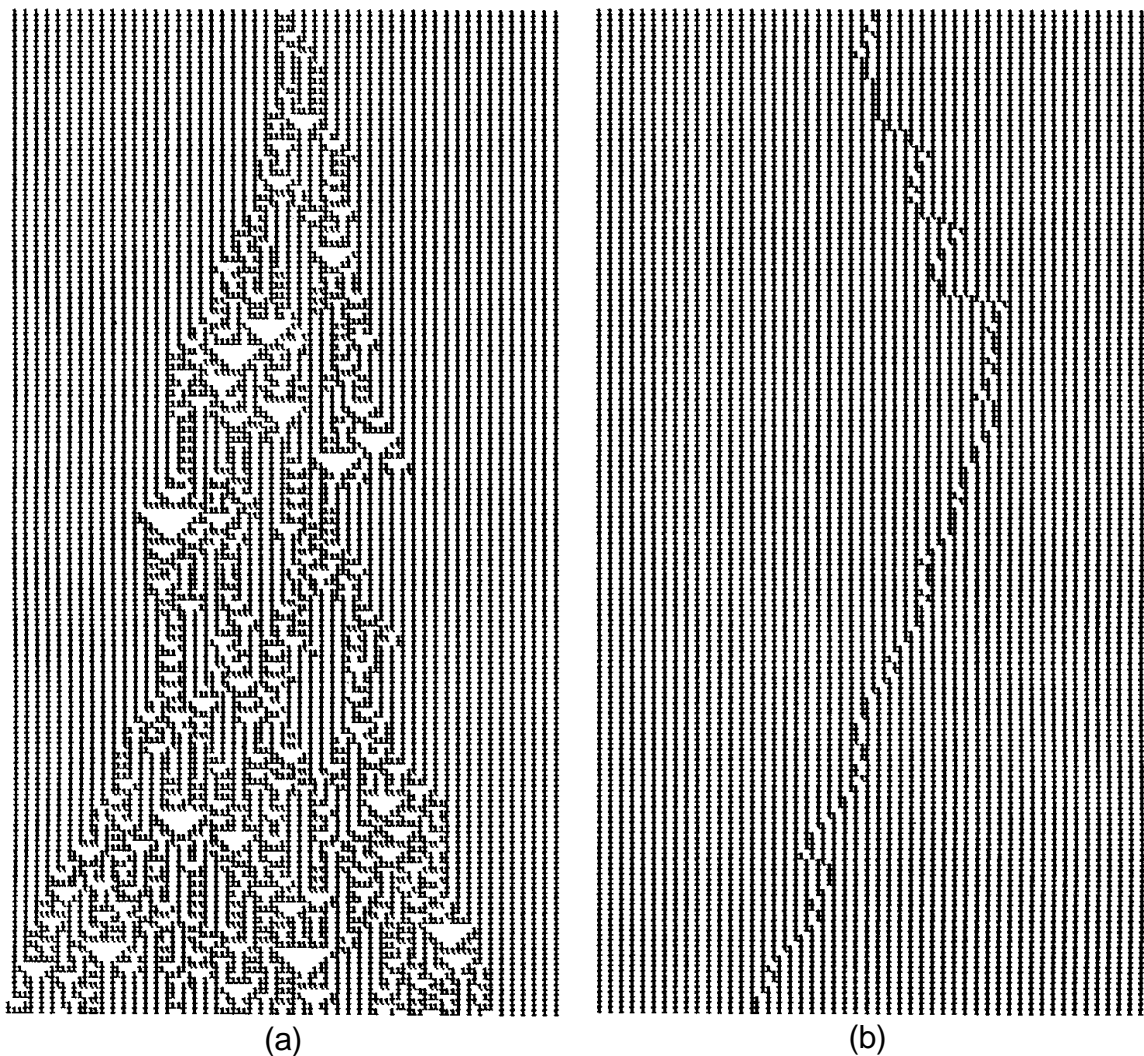
**Fig. 4.22 :** Gráfico log-log da propagação de dano para  $p_1 = 1,0$  e  $p_2 = 0,312$  usando a regra do autômato celular unidimensional de Domany-Kinzel. (a) Gráfico com atualização síncrona, tendo como expoente  $\eta = 0,32 \pm 0,01$ . (b) Gráfico com dinâmica contínua, tendo como expoente  $\eta = 0,31 \pm 0,01$ .



**Fig. 4.23:** Gráfico log-log da probabilidade de sobrevivência para  $p_1 = 1,0$  e  $p_2 = 0,312$  usando a regra do autômato celular unidimensional de Domany-Kinzel. (a) Gráfico com atualização síncrona, tendo como expoente  $\delta = 0,160 \pm 0,005$  (b) Gráfico com dinâmica contínua, tendo como expoente  $\delta = 0,15 \pm 0,01$ .

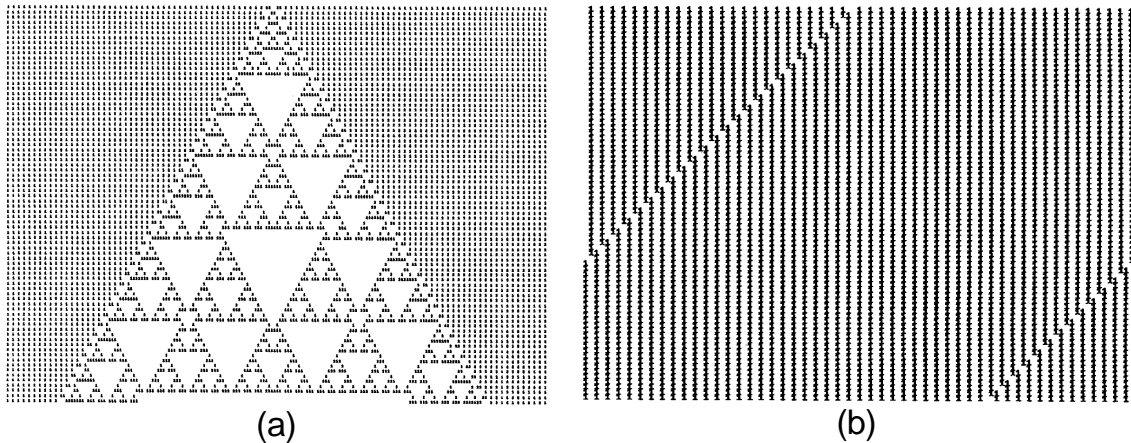
Dessa forma, como o autômato de Domany-Kinzel apresenta propagação de dano mesmo com atualização não sincronizada, a primeira dinâmica de Hinrichsen e Domany, cuja regra, foi baseada neste autômato (como foi mostrado na “RELAÇÃO ENTRE A PRIMEIRA DINÂMICA DE HINRICHSEN E DOMANY E O AUTÔMATO DE DOMANY-KINZEL”), também não apresentou uma diferença perceptível nos valores dos expoentes críticos.

Já para o modelo A de Grassberger, ao contrário do que ocorre no autômato de Domany-Kinzel, não há o espalhamento quando se usa a dinâmica contínua (Figura 4.24.b).



**Fig. 4.24:** Evolução do modelo A de Grassberger (com uma configuração inicial que intercala 1 e 0) com  $p = 0,30$ . (a) com atualização sincronizada (b) com atualização não sincronizada.

A evolução presente com  $p = 1$  (que é igual à regra 22, de acordo com a notação de Wolfram) com a atualização síncrona (Figura 4.25.a) e com a dinâmica contínua (Figura 4.25.b) quando não há sinal de espalhamento do defeito, sendo o *kink* inserido no seu centro apenas deslocado nos passos de tempo subseqüentes.



**Fig. 4.25:** Padrão criado a partir de uma configuração inicial que alterna spins com exceção de um kink central, utilizando o modelo A de Grassberger, com  $p = 1$ . (a) Evolução com atualização síncrona, (b) evolução com dinâmica contínua.

Dessa forma, constatamos que a propagação de dano com a segunda dinâmica de HD só pode ser observada quando se atualizam os estados dos spins de forma sincronizada. É isso que permite o nosso mapeamento no autômato de Grassberger (com  $p = 1$ ) e que sustenta a propagação de dano no modelo unidimensional e ainda com expoentes diferentes daqueles da percolação direcionada.