

Capítulo 4

Propagação de dano no modelo de Ising unidimensional

4.1 Propagação de dano

O método da propagação de dano é uma técnica relativamente nova, introduzida por Kauffman⁶⁸ no contexto dos autômatos celulares, que consiste em monitorar a evolução temporal de duas amostras que inicialmente diferenciam-se entre si apenas em uma determinada e conhecida porcentagem de sítios. Em outras palavras, duas configurações iguais são geradas e um dano inicial é provocado sobre uma delas, alterando o estado de sítios aleatoriamente escolhidos. Mais tarde, essa técnica foi estendida para investigar sistemas de spins com dinâmica contínua^{69,70,71} e ganhou ainda mais impacto com o trabalho de Coniglio⁷².

Nos casos em que as duas configurações evoluem no tempo sobre trajetórias muito próximas no espaço de fases, ou seja, quando ao final da simulação, os spins das duas redes apresentam praticamente as mesmas

direções, pode-se dizer que o sistema apresenta-se em uma fase cicatrizada ou congelada. Por outro lado, quando as duas redes de spins apresentam configurações distintas depois de um grande número de passos, diz-se que o sistema encontra-se em uma fase em que o dano se propaga, o que alguns autores⁷³ chamam de fase caótica.

Para a evolução temporal das duas amostras elege-se a dinâmica a ser obedecida (Glauber, Metrópolis ou banho térmico) e normalmente utiliza-se a mesma seqüência de números aleatórios⁷⁴.

Como a energia no instante t é dada por:

$$\frac{-H}{k_B T} = -\sum_i h_i(t) \mathbf{s}_i(t), \quad \text{com} \quad h_i(t) = \sum_j K \mathbf{s}_j(t), \quad (4.1)$$

onde $K = J/k_B T$, $\mathbf{s}_i(t) = \pm 1$ e a soma estende-se sobre vizinhos mais próximos, todas as dinâmicas podem ser implementadas a partir de uma “probabilidade de transição” $p_i(t)$ dada por:

$$p_i(t) = \frac{e^{h_i(t)}}{e^{h_i(t)} + e^{-h_i(t)}} \quad (4.2)$$

Como já vimos no capítulo 3, a diferença virá da forma como usaremos essa probabilidade. Por exemplo, na dinâmica de banho térmico o novo estado do spin \mathbf{s}_i é obtido comparando um número aleatório r com a probabilidade do spin ser +1 no próximo passo (não depende do valor anterior do spin). Assim, teremos:

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \text{senal} [p_i(t) - r]. \quad (4.3)$$

Na dinâmica de Glauber a probabilidade de inverter um dado spin depende explicitamente do estado de \mathbf{s}_i no instante t . Portanto, dependendo do valor anterior do spin \mathbf{s}_i , o número aleatório será comparado a diferentes

partes do intervalo de probabilidades. Logo teremos:

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}[p_i(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = +1 \\ -\text{sinal}[1 - p_i(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = -1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Finalmente, para a dinâmica de Metrópolis um novo estado para o spin é proposto, verificando-se, a seguir, se a energia da nova configuração é menor ou maior do que a da configuração anterior. Na primeira situação, a nova configuração é aceita sem restrição; caso contrário a nova configuração ainda pode ser aceita, mas com uma probabilidade igual a $\exp(-\beta\Delta E)$, sendo ΔE o acréscimo de energia da velha para a nova configuração. Novamente, é possível exprimir o novo estado usando a função sinal:

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}[p_i^+(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = +1 \\ -\text{sinal}[p_i^-(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = -1 \end{cases} \quad (4.5)$$

só que dessa vez $p_i(t)$ é dada por:

$$p_i^\pm(t) = \min(1, e^{\mp 2h_i(t)}) \quad (4.6)$$

Pelo fato da propagação de dano, para um mesmo sistema, apresentar diferentes resultados de acordo com o algoritmo empregado é dito que a propagação não é uma propriedade intrínseca⁷⁵ do sistema. Ela depende da dinâmica. Há vários resultados conflitantes o que levou Hinrichsen e Domany⁷⁶ a proporem uma classificação que eles consideram objetiva para a propagação. No entanto, é consenso, qualquer que seja a dinâmica (convencional) adotada a propagação de dano no modelo de Ising unidimensional não é observada. Foi tentando superar essa barreira e provavelmente inspirados no autômato de Domany-Kinzel que Hinrichsen e Domany (que nesse trabalho será chamado de HD) propuseram⁴³ modificações na dinâmica que pudessem levar à propagação no modelo unidimensional de Ising.

4.2 Primeira dinâmica de Hinrichsen e Domany

Na primeira dinâmica não convencional investigada pelos autores utilizou-se uma dinâmica muito semelhante à de Glauber, mas levando em conta o sinal relativo dos seus dois vizinhos mais próximos e não do próprio spin que está sendo atualizado, como é usual. Assim, o novo estado do sítio obedece à

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}(p_i - r) & \text{se } \mathbf{s}_{i-1} = \mathbf{s}_{i+1} \\ -\text{sinal}(1 - p_i - r) & \text{se } \mathbf{s}_{i-1} \neq \mathbf{s}_{i+1} \end{cases}, \quad (4.7)$$

onde $\mathbf{s}_i(t) = \pm 1$, r é um número aleatório gerado e $p_i(t)$ a mesma “probabilidade de transição” já mencionada.

Duas réplicas foram evoluídas a partir das mesmas condições iniciais com um dano inserido no centro de uma delas, para vários valores de K . O objetivo era encontrar a temperatura em que a transição ocorre (se ela existir) e os expoentes críticos, se a transição for contínua. Para isso utilizou-se a chamada “simulação dependente do tempo”, introduzida por Grassberger e de La Torre⁷⁷, que tem sido largamente utilizada na literatura.

Como se pode observar na Figura 4.1.a, fora da criticalidade, em um gráfico $\log \text{Dano} \times \log t$ as linhas apresentadas não são retas. Já na criticalidade ($K = 0,23$) temos uma reta, o que está de acordo com uma dependência polinomial do tipo $\text{Dano}(t) \sim t^h$ com $\eta = 0,32 \pm 0,04$ (Figura 4.1.b).

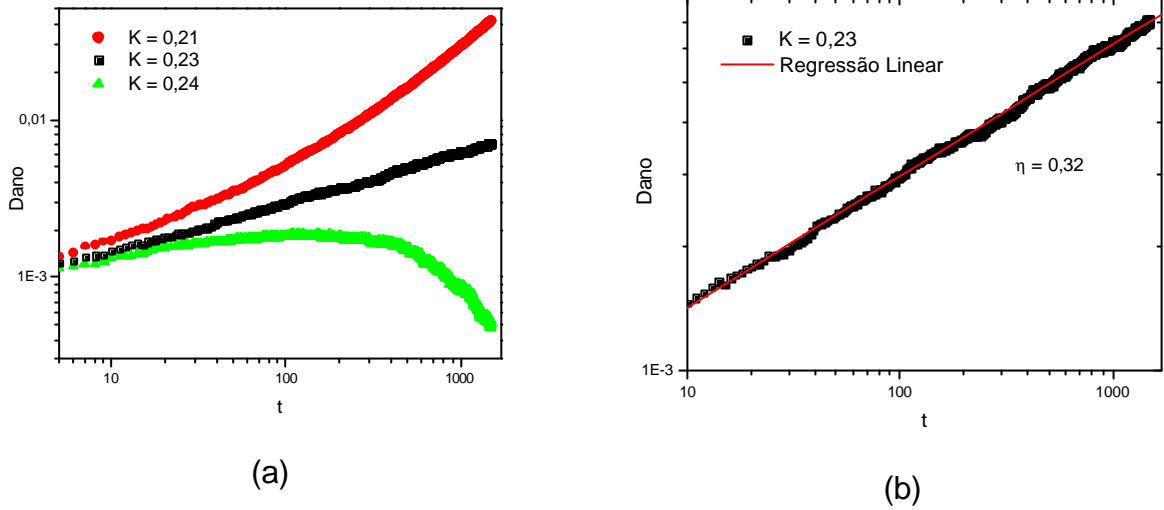


Fig. 4.1: (a) Evolução temporal do dano no modelo de 1-d Ising para vários valores de K, usando a primeira dinâmica de Hinrichsen e Domany (b) Gráfico log-log do dano versus tempo. Valor de $\eta = 0,32 \pm 0,04$.

Na seqüência passamos a analisar a evolução do tamanho quadrático médio do dano que pode ser definido como:

$$R_i^2 = \langle (\mathbf{s}_i^a(t) - \mathbf{s}_i^b(t)) d^2 \rangle, \quad (4.8)$$

onde $d = |i|$ é a distância entre o sítio analisado e a posição original do defeito. Espera-se para essa grandeza, na criticalidade, um comportamento do tipo $R_i^2 \sim t^{2/z}$, onde z é o expoente crítico dinâmico⁷⁸. Foram feitas várias curvas para vários valores de K (Figura 4.2.a). Sendo $R_i^2 \sim t^{2/z}$, calculamos o expoente crítico z , fazendo um gráfico log-log de R^2 versus tempo, e ajustando a melhor reta. O valor obtido foi de $1,31 \pm 0,05$. (Figura 4.2.b).

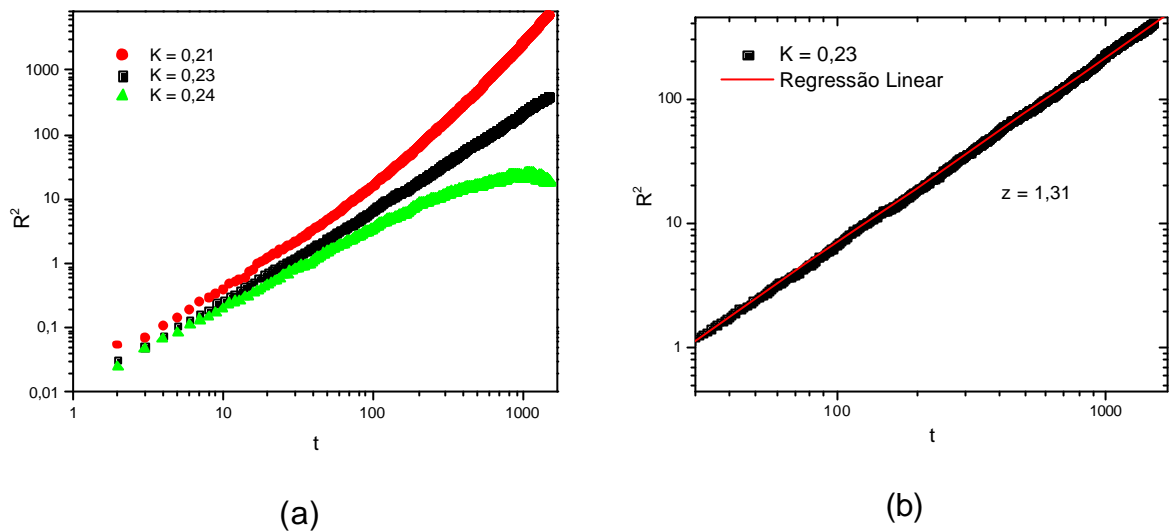


Fig. 4.2: (a) Gráfico log-log da evolução do tamanho médio quadrático do dano contra o tempo para vários valores de K . (b) Gráfico log-log de R^2 contra tempo, mostrando o expoente crítico $z = 1,31 \pm 0,05$.

Também foi investigado por Hinrichsen e Domany o comportamento da probabilidade de sobrevivência $P(t)$, definida como o número de amostras em que o dano não desapareceu até o instante t dividido pelo número total de amostras. Novamente observamos que, quando $K = 0,23$, o comportamento é do tipo polinomial com $P \sim t^{-d}$, onde o expoente crítico d nesse caso é igual a $0,17 \pm 0,05$ (Figura 4.3.b). Como nos casos anteriores nota-se, que fora da criticalidade, no gráfico $\log P(t) \times \log t$ as linhas apresentadas são curvas (figura 4.3.a).

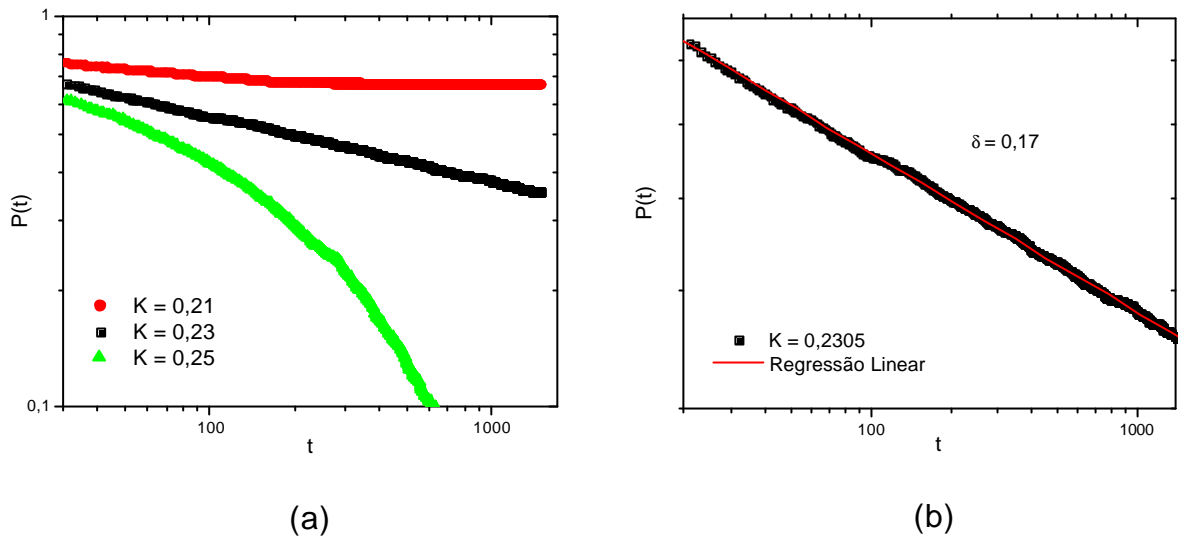


Fig. 4.3: (a) Gráfico log-log da probabilidade de sobrevivência para vários valores de K usando a primeira dinâmica de Hinrichsen e Domany. (b) Gráfico log-log de $P(t)$ contra tempo, mostrando o expoente crítico $\delta = 0,17 \pm 0,05$.

Ao contrário dos casos anteriores onde foi monitorada a evolução temporal de duas configurações de spins $\{s_i^a\}$ e $\{s_i^b\}$, as quais inicialmente diferenciam-se entre si apenas por uma determinada e conhecida porcentagem de spins centrais com orientações diferentes, é possível analisar o caso da propagação de dano quando duas configurações são geradas de forma independente e aleatória⁷⁸. Dessa forma aproximadamente metade dos sítios estarão danificados, lembrando que não existe um controle sobre esse dano inicial.

Para tal regra espera-se que o dano decresça obedecendo a um comportamento do tipo:

$$\sum_i |s_i^a(t) - s_i^b(t)| \sim t^{-q} \quad (4.9)$$

O expoente crítico q (que não deve ser confundido com o expoente do *critical initial slip*) obtido é igual a $0,15 \pm 0,01$ (Figura 4.4.b). Assim como nos casos anteriores, nota-se que fora da criticalidade em um gráfico log - log de Dano *versus* tempo, as linhas apresentadas são curvas (Figura 4.4.a).

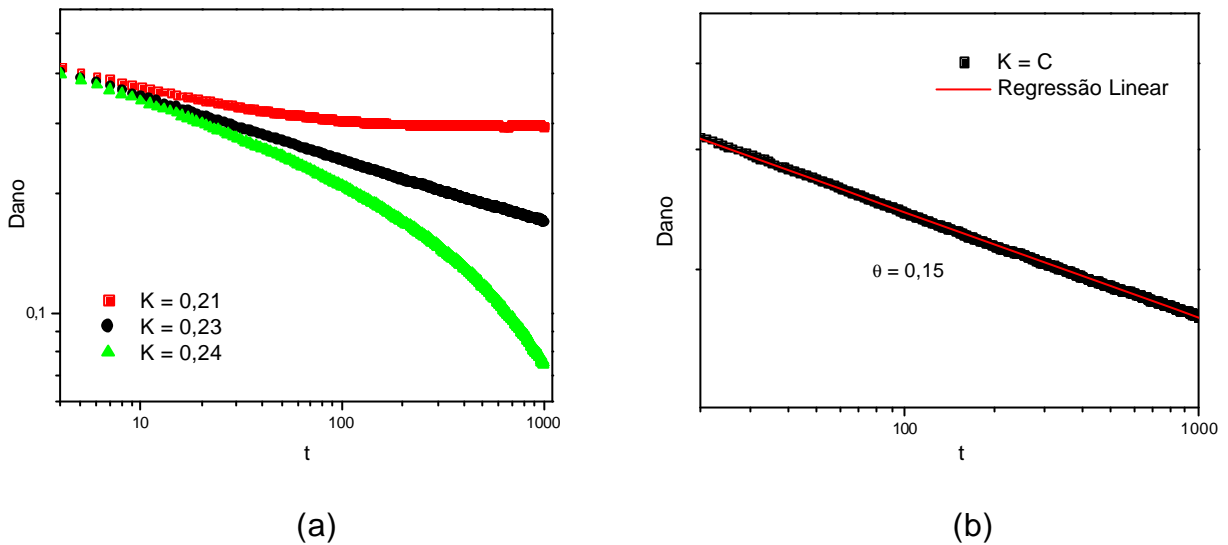


Fig. 4.4: (a) Gráfico log-log do decaimento do dano com o tempo para configurações iniciais independentes para vários valores de K usando a primeira dinâmica de Hinrichsen e Domany. (b) Gráfico log-log de Dano(t) contra tempo, mostrando o expoente crítico $\theta = 0,15 \pm 0,01$.

Um aspecto interessante é a semelhança entre os valores dos expoentes θ e δ no presente caso. Isso não ocorre, por exemplo, no modelo de Ising tridimensional com dinâmica de banho térmico⁷⁸ mas ocorre no autômato de Domany-Kinzel, conforme observado por Grassberger⁷⁵.

Para repetir o cálculo de todos os expoentes para a primeira dinâmica de HD, trabalhamos com sistemas de 5000 sítios, com condições periódicas de contorno, com 1500 unidades de tempo (MCS) e 5000 amostras. Esse conjunto de 5000 amostras foi dividido em 5 conjuntos (de 1000 amostras) para que fosse possível calcular a média e o desvio padrão.

Como se pode perceber, os expoentes críticos obtidos:

$$\eta = 0,32 \pm 0,04 \quad z = 1,31 \pm 0,05 \quad \delta = 0,17 \pm 0,03$$

estão de acordo com a conjectura de Grassberger, segundo a qual a transição para um estado absorvente simples (no caso, do sistema corrompido para o sistema 'cicatrizado') deve estar na classe de universalidade da percolação direcionada em $D = d + 1$ (nesse caso, 2) dimensões. Na literatura encontram-se para os expoentes da percolação direcionada os valores⁷⁹.

$$\eta = 0,31368(4) \quad z = 1,26523(4) \quad \delta = 0,15947(3).$$

4.3 Segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany

Antes de trabalhar com a segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany, vale a pena introduzir alguns conceitos que ainda não apareceram nessa dissertação. Isso se torna importante visto que nessa dinâmica o dano (ou sua ausência) jogam um papel simétrico o que é acompanhado da existência de dois estados absorventes relacionados por uma simetria Z_2 . Por isso mesmo, a distância de Hamming (a densidade dos sítios danificados) não pode ser usada como parâmetro de ordem. É preciso analisar, portanto, um outro parâmetro que nesse caso deve ser a densidade de *kinks* (paredes de domínio entre a região danificada e a não danificada).

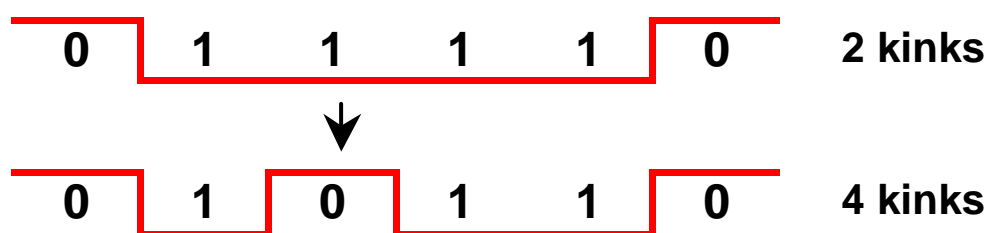


Fig. 4.5: Os pares 01 e 10 são os kinks

Note que a soma dos pares de vizinhos diferentes (kinks) e vizinhos iguais (11 ou 00) é constante e igual ao número total de pares. Por isso, freqüentemente se usa o número de pares de vizinhos iguais como o parâmetro de ordem. Isso é particularmente útil quando se tem muitas paredes de domínio no sistema, como ocorre nos casos que veremos a seguir (Figura 4.6 – 4.10).

Para ganhar intuição com esse novo parâmetro de ordem, decidimos estudar o autômato celular unidimensional de Grassberger *et al.*⁴⁵ que é uma generalização probabilística da regra 94 (modelo A) ou da regra 50 (modelo B) (segundo a notação de Wolfram⁸⁰). Os estados possíveis para cada sítio são 0 e 1 e suas regras de transição dependem apenas dos seus vizinhos mais próximos.

4.3.1 Autômatos unidimensionais de Grassberger

Os modelos A e B de Grassberger são caracterizados pelas seguintes regras⁴⁵:

Modelo A – Regra 94 combinada com a Regra 22

$$\begin{array}{cccccc}
 t: & 111 & 101 & 010 & 100 & 001 & \boxed{011 \quad 110} & 000 \\
 t+1: & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \begin{array}{l} 0 \text{ com prob. } p \\ 1 \text{ com prob. } 1-p \end{array} & 0
 \end{array} \quad (4.10)$$

Modelo B – Regra 50 combinada com a Regra 122

$$\begin{array}{cccccc}
 t: & 111 & 101 & 010 & 100 & 001 & \boxed{011 \quad 110} & 000 \\
 t+1: & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \begin{array}{l} 1 \text{ com prob. } p \\ 0 \text{ com prob. } 1-p \end{array} & 0
 \end{array} \quad (4.11)$$

Em ambos os modelos, as partículas (kinks) são conservadas módulo 2.

$$\begin{array}{ll}
 X \rightarrow 3X & \text{reprodução} \\
 2X \rightarrow 0 & \text{aniquilação}
 \end{array}$$

Para $p = 0$ podemos observar (Figura 4.6) que, tanto para o modelo A quanto para o modelo B, partindo de condições iniciais aleatórias, o sistema evolui rapidamente para um estado estacionário.

Para um valor de $p \neq 0$ muito pequeno, teremos uma pequena probabilidade de $011 \rightarrow 0$ no modelo A e uma pequena probabilidade de $011 \rightarrow 1$ para o modelo B. O surgimento de novos kinks é contrabalançado pela sua aniquilação (Figura 4.7).

Nota-se que em ambos os modelos existem dois estados simétricos (simetria Z_2) absorventes (estado absorvente é aquele que pode ser atingido pelo sistema mas dele não se pode sair). Para o modelo A, ele consiste das linha verticais fixas (observe figuras 4.6.a e 4.7.a):

$$\mathbf{s}_i = \begin{cases} 0 & i \text{ par} \\ 1 & i \text{ ímpar} \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbf{s} = \begin{cases} 1 & i \text{ par} \\ 0 & i \text{ ímpar} \end{cases}$$

e para o modelo B corresponde ao padrão de um tabuleiro de xadrez (observe figuras 4.6.b e 4.7.b) com a troca de branco por preto.

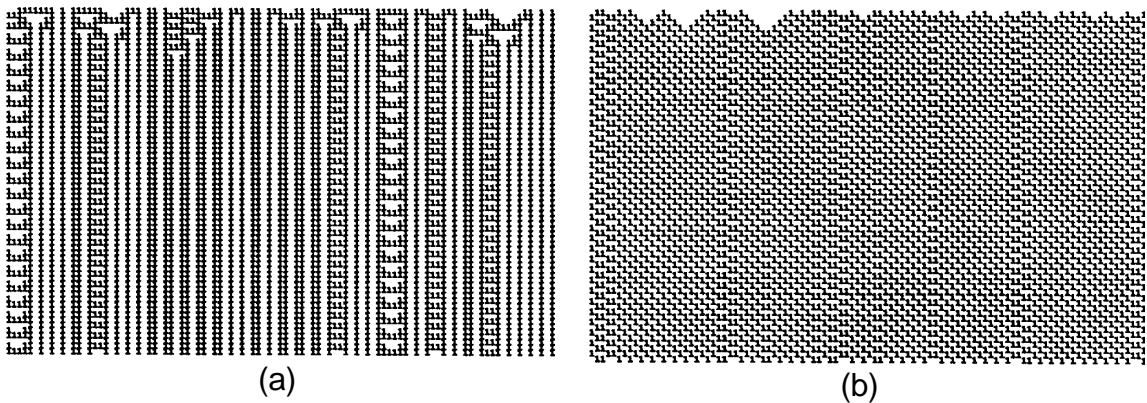


Fig. 4.6: Padrão criado, com $p = 0$ e configuração inicial aleatória para (a) modelo A e (b) modelo B

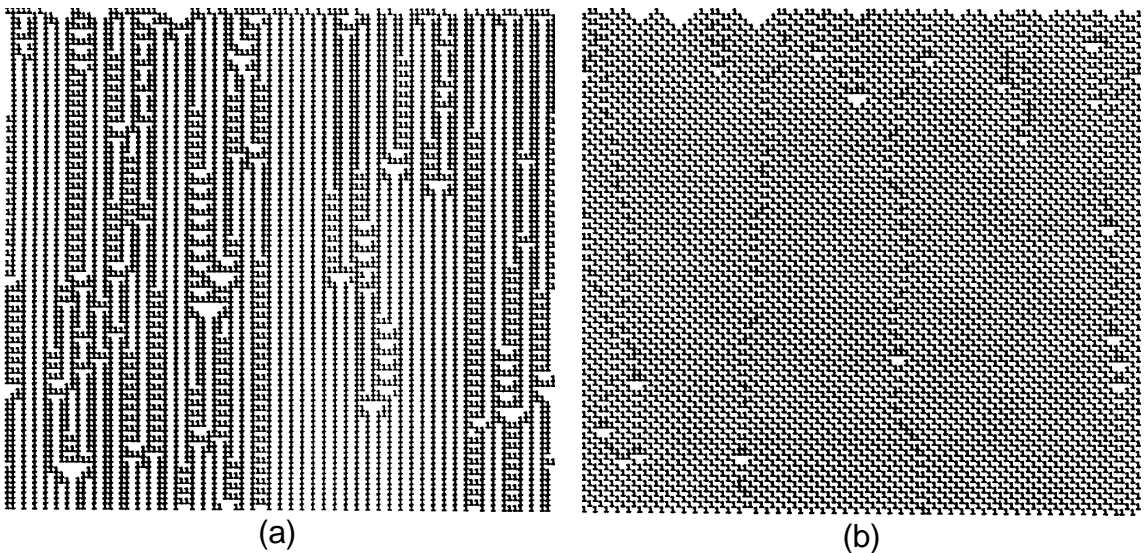


Fig. 4.7: Padrão criado a partir de uma configuração inicial aleatória para um valor de p pequeno. (a) Corresponde ao modelo A com $p = 0,05$, e (b) ao modelo B com $p = 0,20$.

No entanto, acima do valor da probabilidade crítica, um único *kink* (nesse caso um par 11) é suficiente para criar uma completa desordem no sistema (Figura 4.8).

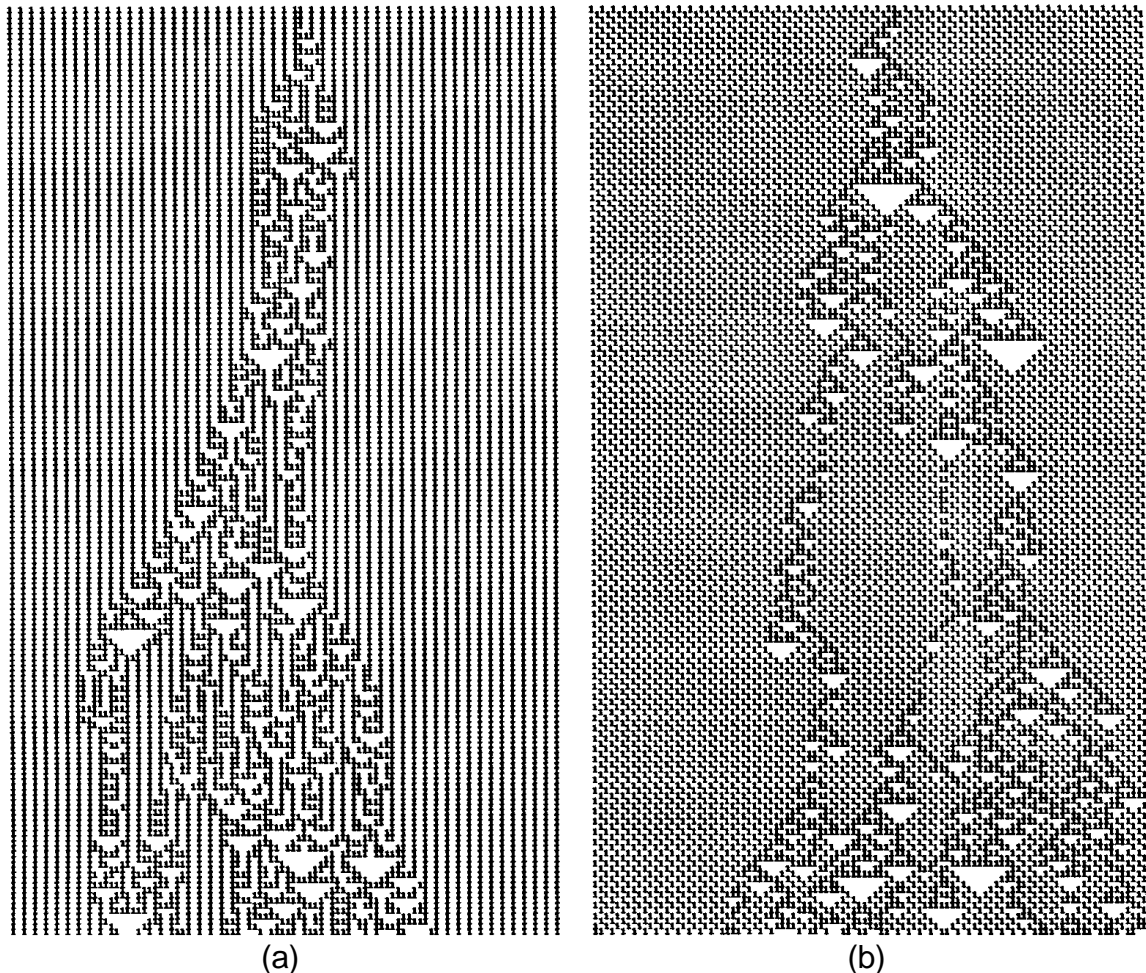


Fig. 4.8: Padrão criado a partir de uma configuração inicial que alterna spins com exceção de um *kink* central, sendo $p > p_{cr}$. (a) Mostra a evolução utilizando o modelo A com $p = 0,27$ e (b) mostra o modelo B com $p = 0,65$

Já para $p = 1$, o padrão criado para o modelo A é o mesmo da regra 22, e para o modelo B o da 122 (de acordo com a notação de Wolfram) (Figuras 4.9 e 4.10), ambos com regras determinísticas e reconhecidamente caóticos⁸¹.

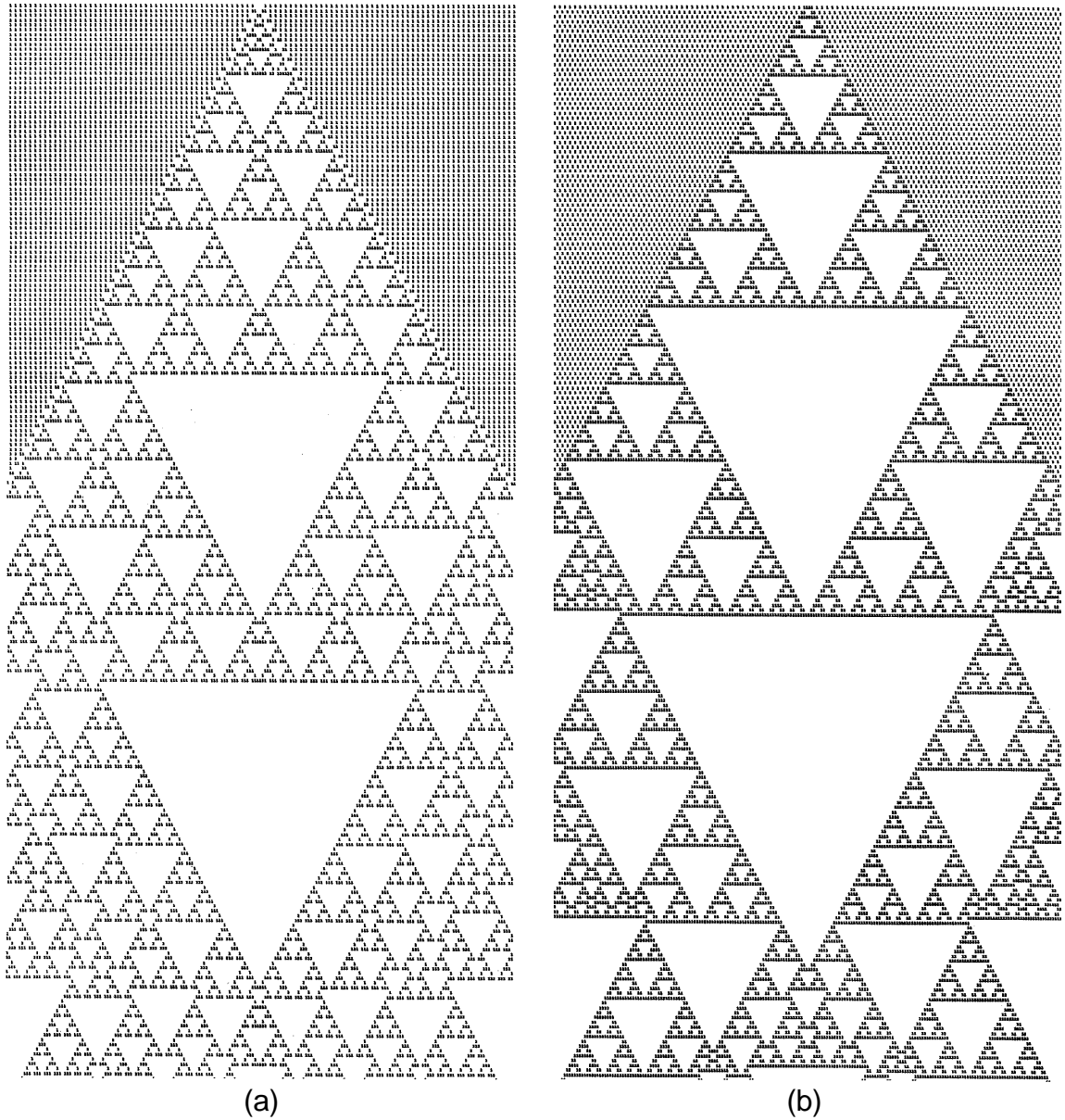


Fig. 4.9: Padrão criado a partir de uma configuração inicial que alterna spins com exceção de um *kink* central, sendo $p = 1$ (a) Mostra a evolução utilizando o modelo A , (b) mostra o modelo B.

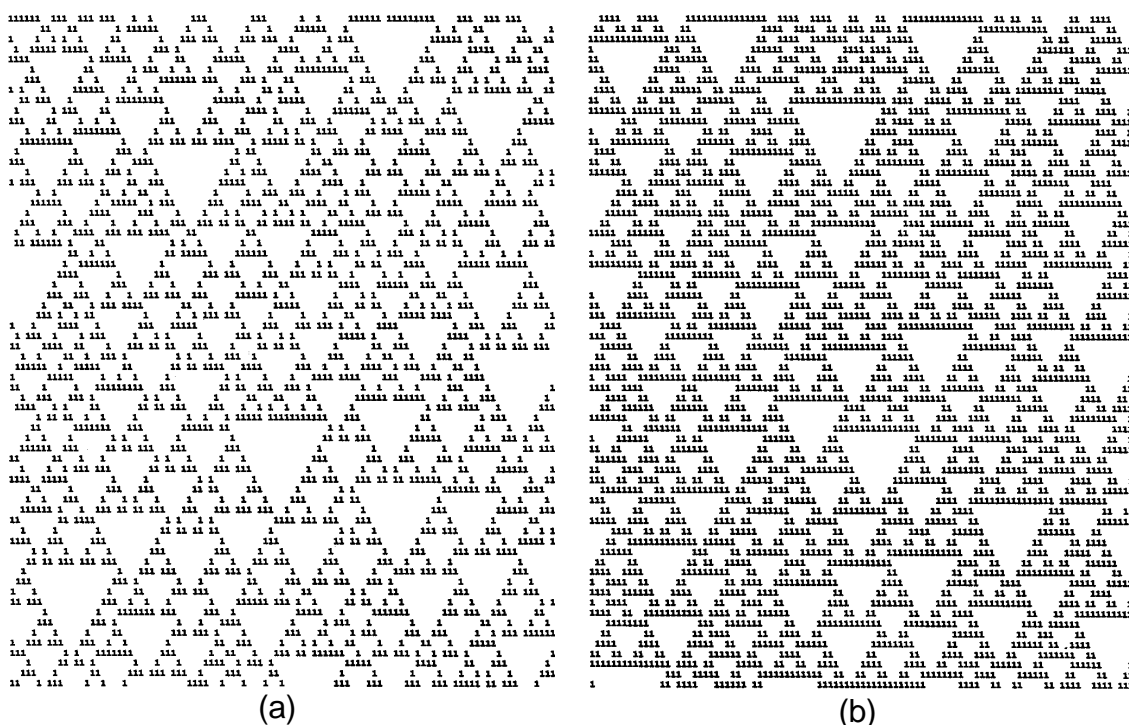


Fig. 4.10: Padrão criado, com $p = 1$ e configuração inicial aleatória para (a) modelo A e (b) modelo B.

Como se pode observar (Figura 4.11.a e 4.12.a) fora da probabilidade crítica, em um gráfico log-log de densidade de kinks por tempo as linhas apresentadas são curvas e na probabilidade crítica,

$$p_{cr} = \begin{cases} 0,13 & \text{modelo A (Figura 4.11)} \\ 0,54 & \text{modelo B (Figura 4.12)} \end{cases}$$

temos uma reta que confirma a dependência $n_{kink} \sim t^a$ com,

$$a = \begin{cases} 0,30 \pm 0,03 & \text{modelo A (figura 4.11.b)} \\ 0,27 \pm 0,02 & \text{modelo B (figura 4.12.b)} \end{cases}$$

Simulamos tanto o modelo A como o modelo B com um sistema de 5000 sítios, condições periódicas de contorno, 1500 passos e 1000 amostras. O mesmo sistema foi evoluído mais quatro vezes para obter o valor de α e o erro correspondente.

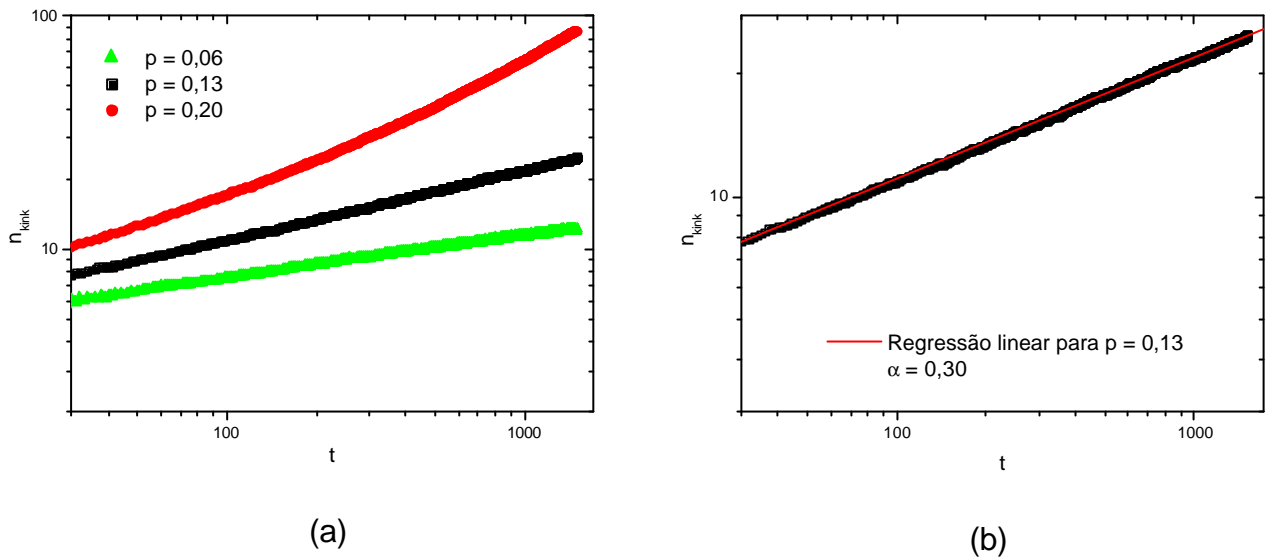


Fig. 4.11: (a) Gráfico log-log da evolução temporal da densidade de sítios ocupados no modelo A para vários valores de p . (b) Gráfico log-log de n_{kink} contra t , mostrando o expoente crítico $\alpha = 0,30 \pm 0,03$.

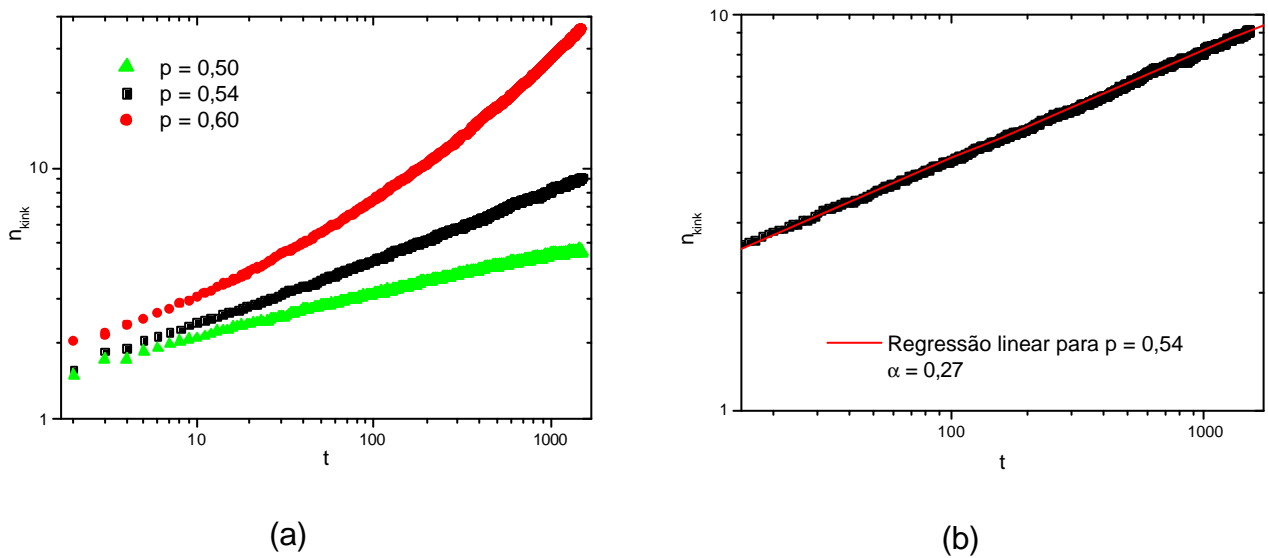


Fig. 4.12: (a) Gráfico log-log da evolução temporal da densidade de sítios ocupados no modelo B para vários valores de p . (b) Gráfico log-log de n_{kink} contra t , mostrando o expoente crítico $\alpha = 0,27 \pm 0,02$.

4.3.2 Implementação da segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany

Uma vez compreendida a ação dos kinks para a evolução do sistema e percebida a necessidade de utilizar um processo de atualização (update) síncrono, como explicaremos em maiores detalhes no final desse capítulo, passamos a trabalhar novamente com o modelo de Ising 1-D, usando a segunda dinâmica sugerida por Hinrichsen e Domany, onde são utilizadas alternativamente duas regras para a atualização dos spins:

$$\mathbf{s}(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}(p_i - r) & \text{se } \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\mathbf{s}_{i+1} = 1 \\ -\text{sinal}(1 - p_i - r) & \text{se } \mathbf{s}_{i-1}\mathbf{s}_i\mathbf{s}_{i+1} = -1 \end{cases} \quad (4.12)$$

e a de Glauber:

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}[p_i(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = +1 \\ -\text{sinal}[1 - p_i(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = -1 \end{cases} \quad (4.13)$$

Para que isso venha a ocorrer é introduzido um segundo parâmetro $0 \leq I \leq 1$ que indicará qual dessas dinâmicas será seguida. A cada atualização é gerado um número aleatório adicional (\tilde{r}). Se $\tilde{r} \geq I$ a regra (4.12) será aplicada; em caso contrário, a dinâmica de Glauber será a obedecida.

A união dessas duas dinâmicas pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{s}(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}(p_i - r) & \text{se } y = 1 \\ -\text{sinal}(1 - p_i - r) & \text{se } y = -1 \end{cases} \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{s}_i(t) = \pm 1$, $p_i(t)$ “probabilidade de transição” que é dada por:

$$p_i(t) = \frac{e^{h_i(t)}}{e^{h_i(t)} + e^{-h_i(t)}}$$

$$e \ y = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i [(1 + \mathbf{s}_{i-1} \mathbf{s}_{i+1}) + (1 - \mathbf{s}_{i-1} \mathbf{s}_{i+1}) \text{sinal}(I - \tilde{r})].$$

Duas réplicas foram evoluídas nas mesmas condições iniciais com 2 kinks inseridos em seu centro. Fixando a temperatura ($J/k_b T$) em 0,25 e variando o λ , foi possível determinar o seu valor crítico λ^* onde ocorre a propagação do dano, que pode ser definido como,

$$N(t) = \sum_i |s_i(t) - s_i(t+1)| \sim t^h \quad (4.15)$$

assim como determinar o expoente crítico η .

Como se pode observar (Figura 4.13.a), fora do λ^* , em um gráfico $\log N(t) \times \log t$ as linhas são curvas e na criticalidade (para $\lambda^* = 0,82$) temos uma reta que conduz à dependência $N(t) \sim t^h$ com $\eta = 0,01 \pm 0,02$ (Figura 4.13.b).

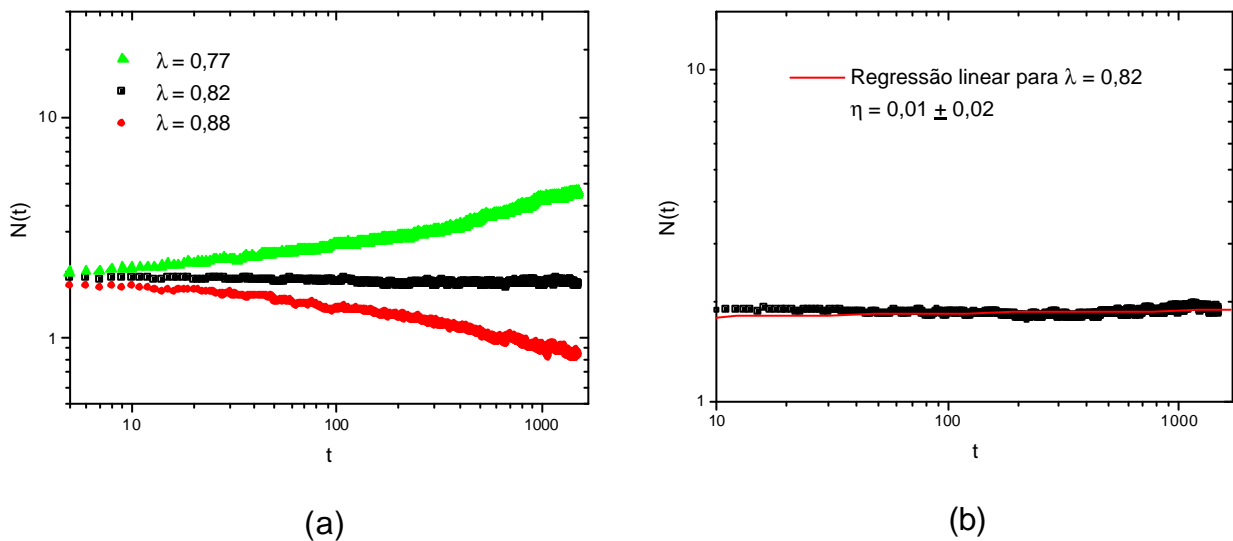


Fig. 4.13: (a) Evolução temporal do dano no modelo de 1-D Ising para vários valores de λ , usando a segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany (b) Gráfico log-log de densidade de kinks versus tempo. Valor de $\eta = 0,01 \pm 0,02$.

Na seqüência passamos a analisar a evolução da probabilidade de sobrevivência $P(t)$, que pode ser definida como o número de amostras em que os kinks não desapareceram até o instante t dividido pelo número total de amostras. Novamente, observamos que, quando $\lambda = 0,82$, o comportamento é do tipo polinomial, com $P(t) \sim t^{-\delta}$, onde δ é o expoente crítico, nesse caso igual a $0,27 \pm 0,02$ (Figura 4.14.b). Como nos casos anteriores nota-se que fora da criticalidade num gráfico $\log P(t) \times \log t$ as linhas apresentadas são curvas (Figura 4.14.a).

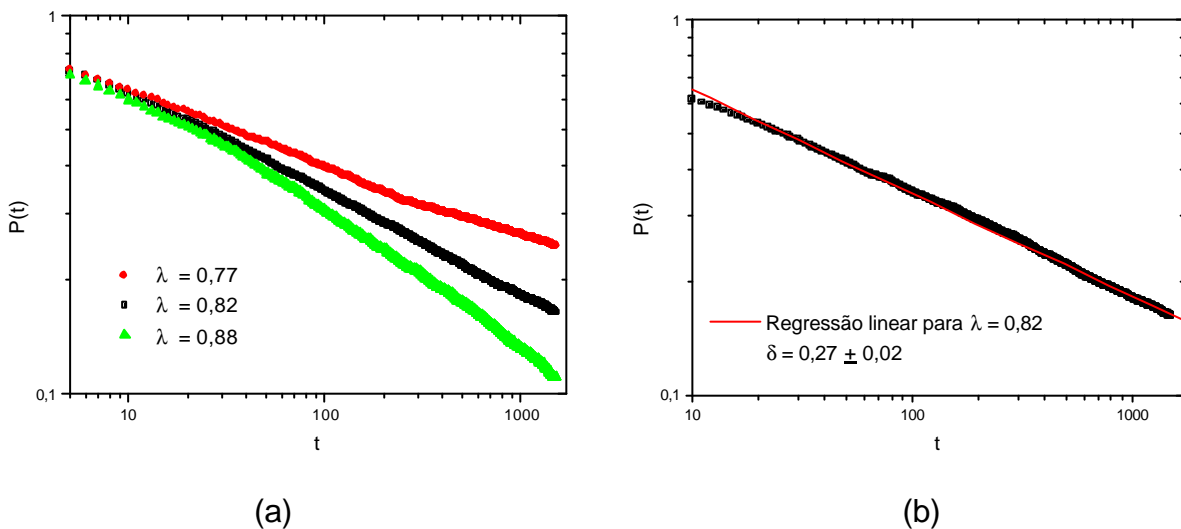


Fig. 4.14: Gráfico log-log da probabilidade de sobrevivência para três valores de λ usando a segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany. (b) Gráfico log-log de $P(t)$ contra tempo, mostrando o expoente crítico $\delta = 0,27 \pm 0,02$.

Também analisamos a evolução do tamanho quadrático médio do dano, definido como:

$$R_t^2 = \langle (s_i(t) - s_i(t+1))d^2 \rangle, \quad (4.16)$$

onde $d = |i|$ é a distância entre o sítio analisado e a posição original do defeito. Espera-se para essa grandeza, na criticalidade, um comportamento do tipo $R_t^2 \sim t^{2/z}$, onde z é o expoente crítico dinâmico⁷⁸.

Foram feitas várias curvas para vários valores de λ (Figura 4.15.a). Como sabemos que $R_t^2 \sim t^{2/z}$, na criticalidade, podemos calcular o expoente crítico z , fazendo um gráfico log-log de R^2 versus tempo, e ajustando a melhor reta. O valor obtido foi de $1,17 \pm 0,05$ (Figura 4.15.b).

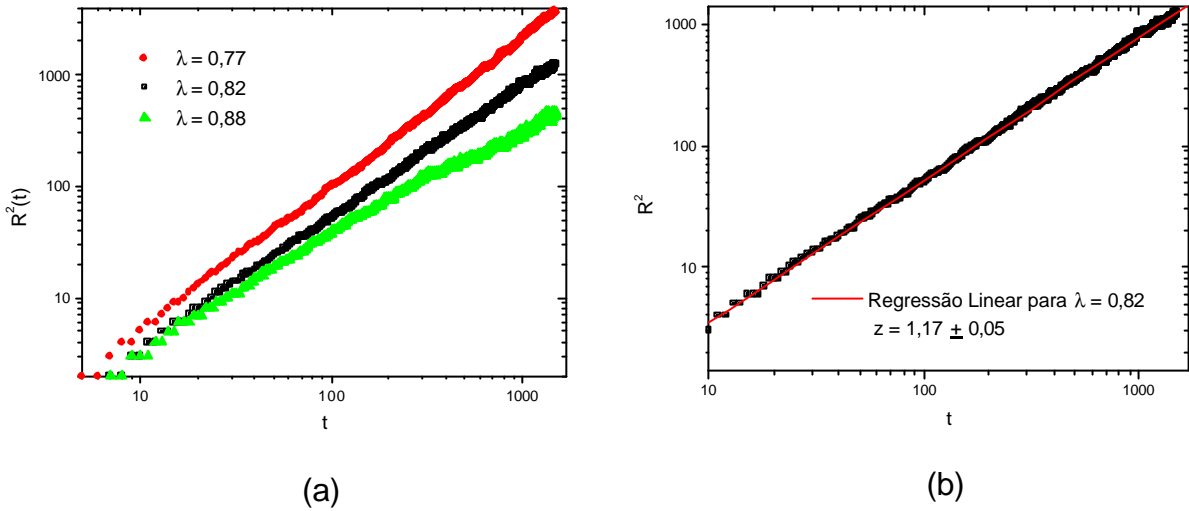


Fig. 4.15: (a) Gráfico log-log da evolução do tamanho médio quadrático do dano contra o tempo para vários valores de λ . (b) Gráfico log-log de R^2 contra tempo, mostrando o expoente crítico $z = 1,17 \pm 0,05$.

Também analisamos, para essa dinâmica, o caso em que as duas réplicas são geradas de forma independente e aleatória⁷⁸.

Para tal regra espera-se que o dano decresça obedecendo o seguinte comportamento:

$$\sum_i |s_i(t) - s_i(t+1)| \sim t^{-q} \quad (4.17)$$

O expoente crítico θ com $\lambda = 0,82$ foi igual a $0,290 \pm 0,001$ (Figura 4.16). De maneira análoga à primeira dinâmica, a propagação de dano a partir de duas configurações iniciais geradas independentemente se dá com o expoente θ aproximadamente igual ao expoente δ da sobrevivência.

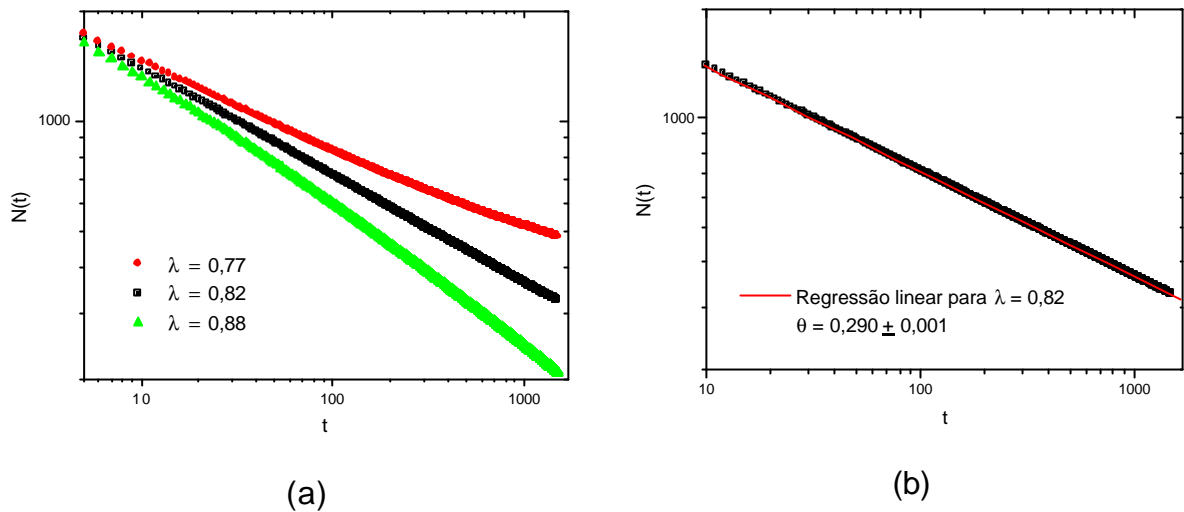


Fig. 4.16: (a) Gráfico log-log do decaimento do dano com o tempo para configurações iniciais independentes para vários valores de λ usando a segunda dinâmica de Hinrichsen e Domany. (b) Gráfico log-log de $N(t)$ contra tempo, mostrando o expoente crítico $\theta = 0,290 \pm 0,001$.

Para repetir o cálculo de todos os expoentes da segunda dinâmica de HD, trabalhamos com sistemas de 5000 sítios, com condições periódicas de contorno, com 1500 unidades de tempo (MCS) e 5000 amostras. Esse conjunto de 5000 amostras foi dividido em 5 conjuntos (de 1000 amostras) para que fosse possível calcular a média e o desvio padrão.

Os expoentes críticos obtidos para essa segunda dinâmica,

$$\eta = 0,01 \pm 0,02 \qquad \delta = 0,27 \pm 0,02 \qquad z = 1,17 \pm 0,05$$

estão de acordo com os expoentes para modelos com conservação de paridade (*parity conserving – PC*) como é o caso dos autômatos de Grassberger. Na literatura encontramos para esses expoentes os valores⁸¹.

$$\eta = 0,0000(1) \qquad \delta = 0,285(2) \qquad z = 1,141(2)$$

que estão de acordo com os resultados obtidos por Hinrichsen e Domany.

4.4 Relação entre a primeira dinâmica de Hinrichsen e Domany e o autômato de Domany-Kinzel

Como sabemos, tanto com a dinâmica de Glauber,

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}[p_i(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = +1 \\ -\text{sinal}[1 - p_i(t) - r] & \text{se } \mathbf{s}_i(t) = -1 \end{cases} \quad (4.18)$$

quanto com a do banho térmico

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \text{sinal}[p_i(t) - r] \quad (4.19)$$

ou a de Metrópolis, não há propagação de dano no modelo de Ising em uma dimensão.

No entanto, a propagação ocorre quando se usa a primeira dinâmica sugerida por Hinrichsen e Domany

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{cases} +\text{sinal}(p_i - r) & \text{se } \mathbf{s}_{i-1} = \mathbf{s}_{i+1} \\ -\text{sinal}(1 - p_i - r) & \text{se } \mathbf{s}_{i-1} \neq \mathbf{s}_{i+1} \end{cases} \quad (4.20)$$

Isso pode ser visto, por exemplo, analisando a dinâmica para altas temperaturas ($T \rightarrow \infty$, $K \rightarrow 0$). Nesse caso, a probabilidade de transição $p_i(t)$

$$p_i(t) = \frac{e^{h_i(t)}}{e^{h_i(t)} + e^{-h_i(t)}} \quad (4.21)$$

com $\frac{H}{k_B T} = -\sum_i h_i(t) \mathbf{s}_i(t)$, e $h_i(t) = \sum_j K \mathbf{s}_j(t)$, (4.22)