UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

**Funções Generalizadas, Modelos de Crescimento
Contínuos e Discretos e Caminhadas Estocásticas em Meios
Desordenados**

(Versão Corrigida)

Rodrigo Silva González

Ribeirão Preto
2011

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

**Funções Generalizadas, Modelos de Crescimento
Contínuos e Discretos e Caminhadas Estocásticas em Meios
Desordenados**

(Versão Corrigida)

Rodrigo Silva González

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez

Ribeirão Preto, Maio de 2011.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE DOCUMENTO, POR MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

González, R. S.

Funções Generalizadas, Modelos de Crescimento Contínuos e Discretos e Caminhadas Estocásticas em Meios Desordenados/ Rodrigo Silva González; orientador Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez.

– Ribeirão Preto/SP, 2011.

163 f.

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

Palavras Chaves: sistemas complexos, funções generalizadas, dinâmica populacional, modelos de crescimento, caminhadas determinista, caminhada estocástica, caminhada do turista, meios aleatórios.

Banca Examinadora:

Aos meus pais, Cícero e Esther, que sempre me incentivaram a perseguir meus objetivos.

*À minha querida companheira Cleusa, pelo apoio incondicional e pela paciência.
Aos caros mestres Antonio Luiz Menegucci e Milton Mitomi Ueda, que me mostraram
a beleza das ciências exatas.*

*Às memórias de meu avô materno Pablo “Palali” González e de meu sogro Manoel
Mello Rodrigues.*

Agradecimentos

Meus mais profundos agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez, que me guiou desde meus primeiros passos na área da Física Estatística e sob cuja orientação venho trabalhando desde a Iniciação Científica. Sua motivação, seu incentivo e sua dedicação foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço também aos meus colegas do Laboratório de Modelagem em Sistemas Complexos (LMSC) pela oportunidade de troca de experiências e de conhecimento.

Agradeço ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico (CNPq) pelo suporte financeiro durante a maior parte deste trabalho e à Universidade Federal de Viçosa (UFV), em especial ao Prof. Dr. Frederico Garcia Pinto, chefe do Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas (ICET) do campus de Rio Paranaíba - MG, pelo apoio e compreensão.

Quero também agradecer aos professores e funcionários do Departamento de Física (DF) da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLR) da Universidade de São Paulo (USP) pelo apoio e presteza sempre que precisei.

Finalmente, estes agradecimentos não estariam completos sem a menção à minha querida companheira, Cleusa, cujo apoio incondicional foi fundamental para a concretização deste trabalho.

“A descoberta consiste em ver o que todo mundo viu e pensar o que ninguém pensou.”

Albert Szent-Györgyi

Resumo

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira apresentamos as funções logaritmo e exponencial generalizadas. A partir delas uma grande variedade de outras funções generalizadas pode ser obtida, permitindo uma formulação única dos comportamentos oscilatório, exponencial e lei de potência, característicos dos principais fenômenos físicos. Também mostramos que é possível generalizar a função densidade de probabilidade (pdf) exponencial estendida (*stretched exponential*) e, a partir dela, uma vasta gama de outras pdfs, que caracterizam os sistemas complexos em Física. As funções logaritmo e exponencial generalizadas também são úteis na generalização de vários modelos contínuos de crescimento em uma formulação única: o modelo de crescimento generalizado de Tsoullaris e Wallace. O mesmo pode ser feito para modelos discretos de crescimento, obtendo, como modelo mais geral, o θ -Ricker generalizado. Encerrando a primeira parte, mostramos que a pdf gaussiana generalizada (um caso particular da exponencial estendida generalizada) é a solução da equação de difusão não-linear, que caracteriza a caminhada determinista do turista. Na segunda parte deste trabalho é apresentada a caminhada do turista e suas duas versões originais: a determinista (CDT) e a estocástica (CET). A primeira delas é uma caminhada parcialmente autorrepulsiva, caracterizada por uma memória μ , em um meio desordenado multidimensional formado por N pontos. Em um ambiente unidimensional, ela apresenta uma transição entre uma exploração local e outra global, em um valor bem definido de memória $\mu_1 = \log_2 N$. Em sua versão estocástica (da qual a CDT é um caso particular), a dinâmica de movimentação é regida pela memória μ e pela temperatura T , responsável, em última instância, pelas probabilidades de deslocamento. Da mesma forma que a CDT, a CET também apresenta uma transição entre os regimes de exploração, caracterizada por uma memória e uma temperatura críticas e pela idade N_p da caminhada (efeito de envelhecimento). Dada a dificuldade em tratar analiticamente a CET, introduzimos a caminhada estocástica modificada do turista (CEMT). Nesta versão, o parâmetro T passa a representar o alcance máximo de um passo da caminhada. Esta modificação permitiu tratar analiticamente a caminhada, sendo possível obter uma expressão analítica geral para a transição, em função dos parâmetros μ , T e N_p . Estes resultados foram validados por experimentos numéricos.

Palavras Chaves: sistemas complexos, funções generalizadas, dinâmica populacional, modelos de crescimento, caminhadas determinista, caminhada estocástica, caminhada do turista, meios aleatórios.

Abstract

The present work is splitted into two parts. In the first one we present the generalized logarithm and exponential functions. From them, a wide variety of other generalized functions can be obtained, that allow a unique formulation of oscillatory, exponential and power-law behaviors, that characterize physical phenomena. We also show that it is possible to generalize the stretched exponential probability density function (pdf) and, from there, a wide range of other pdf's that characterize complex systems in Physics. The generalized logarithm and exponential functions are also useful to generalize several continuous growth models into a single formulation: the generalized Tsoullaris and Wallace growth model. The same can be done for discrete growth models, getting, as more general model, the generalized θ -Ricker growth model. Concluding the first part, we show that the generalized Gaussian pdf (a special case of the generalized stretched exponential) is a solution of the nonlinear diffusion equation, which is a characteristic of deterministic tourist walk. In the second part we present the tourist walk and its two original versions: the deterministic one (DTW) and stochastic one (STW). The first one is a partially self-avoiding walk over a disordered multidimensional medium formed by N points and characterized by a memory μ . In a one-dimensional environment, it presents a transition from a local exploration to a global one at a well-defined memory value $\mu_1 = \log_2 N$. In its stochastic version (from which DTW is a particular case), the movement dynamics is ruled by the memory μ and a temperature T which is responsible by the displacement probabilities. Similar to DTW, STW also has a transition between exploration schemes, characterized by a critical memory and temperature and the walking age (N_p) (aging effect). Due the difficulty on analytical treatment of the CET, we introduced the modified stochastic tourist walk (MSTW). In this version, the parameter T plays the role of a maximum distance of one walking step. This modification allowed us to treat analytically the walk, being possible to obtain a general analytical expression for the transition, as function to the parameters μ , T and N_p . These results were validated by numerical experiments.

Keywords: complex systems, generalized functions, population dynamics, growth models, deterministic walk, stochastic walk, tourist walk, random media.

Sumário

Lista de abreviaturas e siglas

Lista de símbolos

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Prefácio p. 33

I Generalização de Funções Algébricas , Operadores Aritméticos e Modelos de Crescimento 35

1	Generalização de funções algébricas e operadores aritméticos	p. 37
1.1	Funções generalizadas	p. 37
1.2	Funções e operadores generalizados	p. 39
1.2.1	Função logaritmo natural generalizado	p. 39
1.2.2	Função exponencial generalizada	p. 42
1.2.3	Operadores algébricos generalizados	p. 44
1.3	Funções trigonométricas generalizadas	p. 47
1.3.1	Funções hiperbólicas	p. 47
1.3.2	Funções circulares	p. 48
1.4	Sistemas complexos	p. 52
1.5	Operador fatorial generalizado	p. 53

1.6	Operadores somatório e produtório generalizados	p. 54
1.6.1	Valores médios	p. 54
1.6.2	Operações sucessivas	p. 55
1.6.3	Polinômios simétricos	p. 56
1.7	Aplicações	p. 57
1.7.1	Entropia generalizada	p. 57
1.7.2	Taxas compostas de juros	p. 57
1.8	Conclusão	p. 58
2	Funções Densidade de Probabilidade Generalizadas	p. 59
2.1	Distribuições do tipo Beta	p. 59
2.2	Funções e processos especiais	p. 60
2.2.1	Função de Zipf-Mandelbrot	p. 61
2.2.2	Função exponencial estendida generalizada	p. 61
2.3	Funções densidade de probabilidade	p. 62
2.3.1	Uma cauda	p. 62
2.3.2	Duas caudas	p. 66
2.4	Conclusão	p. 68
3	Modelos Contínuos e Discretos de Crescimento	p. 69
3.1	Modelos contínuos de crescimento	p. 70
3.2	Funções $\tilde{q}$ -generalizadas e modelos contínuos de crescimento	p. 73
3.2.1	Modelo de Zipf-Mandelbrot	p. 74
3.2.2	Modelos de crescimento do tipo Richards	p. 74
3.2.3	Modelo de crescimento de Marusic e Bajzer	p. 77
3.2.4	Modelo de crescimento de Tsoularis e Wallace	p. 79
3.2.5	Recuperando os modelos de crescimento	p. 81

3.3	Modelos discretos de crescimento	p. 81
3.3.1	Discretização do modelo de Richards	p. 83
3.3.2	Modelo θ -Ricker generalizado	p. 86
3.3.3	Modelo de Skellam generalizado	p. 92
3.4	Conclusão	p. 93
4	Fenômenos de Transporte Anômalos	p. 95
4.1	Difusão anômala	p. 95
4.1.1	Equação de difusão não-linear	p. 96
4.1.2	Equação de difusão de Lévy-Gnedenko	p. 98
4.2	Conclusão	p. 100
5	Conclusão	p. 101

II Caminhadas Estocásticas em Meios Desordenados Multidimensionais **103**

6	Caminhada Determinista do Turista	p. 105
6.1	Estatística de posição de vizinhos	p. 106
6.1.1	Probabilidades de Cox em dimensionalidade finita	p. 107
6.1.2	Probabilidades em altas dimensões e modelo de ligações aleatórias . .	p. 107
6.1.3	Modelo de mapeamento aleatório	p. 109
6.2	Alguns resultado da caminhada determinista do turista	p. 109
6.2.1	Turista preguiçoso	p. 110
6.2.2	Turista sem memória	p. 111
6.2.3	Turista com memória	p. 112
6.2.4	Sistema unidimensionais	p. 112
6.2.5	Sistemas bidimensionais	p. 114

6.2.6	Dimensões mais altas	p. 114
6.2.7	Modelos de campo médio	p. 114
6.3	Conclusão	p. 116
7	Caminhada Estocástica do Turista	p. 117
7.1	Caminhada estocástica do turista	p. 118
7.2	Turista preguiçoso em sistemas com número arbitrário de dimensões: transição vítreia	p. 119
7.3	Turista sem memória em ambientes unidimensionais	p. 121
7.4	Sistemas unidimensionais com memória arbitrária	p. 122
7.5	Conclusão	p. 123
8	Caminhada Estocástica Modificada do Turista	p. 125
8.1	Modelo	p. 125
8.2	Tratamento analítico	p. 128
8.2.1	Transição na sobrevivência do caminhante	p. 128
8.2.2	Envelhecimento	p. 134
8.3	Resultados numéricos	p. 138
8.3.1	Transição na sobrevivência	p. 139
8.3.2	Envelhecimento	p. 142
8.3.3	Taxa de visitaão	p. 146
8.4	Conclusão	p. 146
9	Conclusão	p. 149
	Posfácio	p. 151
	Referências Bibliográficas	p. 155

Lista de abreviaturas e siglas

CDT	Caminhada determinista do turista,	p. 34
CEMT	Caminhada estocástica modificada do turista,	p. 34
CET	Caminhada estocástica do turista,	p. 34
CT	Caminhada do turista,	p. 33
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídas,	p. 108
MLA	Modelo de ligações aleatórias,	p. 106
MMA	Modelo de mapeamento aleatório,	p. 106
NP	Não-polinomial,	p. 117
PA	Progressão aritmética,	p. 69
PCV	Problema do caixeiro viajante,	p. 117
pdf	Função densidade de probabilidade,	p. 33
PG	Progressão geométrica,	p. 69
PPA	Problema do ponto aleatório,	p. 34

Lista de símbolos

ℓ	Separação média entre os sítios de um meio desordenado,	p. 118
$\langle X \rangle_A$	Média aritmética da grandeza X ,	p. 54
$\langle X \rangle_G$	Média geométrica da grandeza X ,	p. 54
$\langle t_r(\beta) \rangle$	Tempo médio de aprisionamento em um sítio em função de β ,	p. 119
$\ominus_{\tilde{q}}$	Operador subtração $\tilde{q}$ -generalizado,	p. 46
$\oplus_{\tilde{q}}$	Operador adição $\tilde{q}$ -generalizado,	p. 44
$\oslash_{\tilde{q}}$	Operador divisão $\tilde{q}$ -generalizado,	p. 46
$\otimes_{\tilde{q}}$	Operador produto $\tilde{q}$ -generalizado,	p. 45
$\wedge_{\tilde{q}}$	Operador $\tilde{q}$ -potência generalizado,	p. 55
β	Inverso da temperatura,	p. 118
μ	Janela de exclusão da memória,	p. 105
μ_d	Memória crítica na qual ocorre a transição no comportamento exploratório do caminhante para um determinado d ,	p. 113
μ_v	Memória de transição a V constante,	p. 133
τ	Memória do caminhante,	p. 105
ε	Largura da região de transição,	p. 113
$\prod \otimes_{\tilde{q}}$	Produtório $\tilde{q}$ -generalizado,	p. 55
$\sum \oplus_{\tilde{q}}$	Somatório $\tilde{q}$ -generalizado,	p. 55
$\cos_{\tilde{q}}(x)$	Cosseno $\tilde{q}$ -generalizado de x ,	p. 49
$\cosh_{\tilde{q}}(x)$	Cosseno hiperbólico $\tilde{q}$ -generalizado de x ,	p. 47
$\exp_{\tilde{q}}(x)$	Exponencial $\tilde{q}$ -generalizada de x ,	p. 42
$\ln_{\tilde{q}}(x)$	Logaritmo natural $\tilde{q}$ -generalizado de x ,	p. 39
$\sin_{\tilde{q}}(x)$	Seno $\tilde{q}$ -generalizado de x ,	p. 49
$\sinh_{\tilde{q}}(x)$	Seno hiperbólico $\tilde{q}$ -generalizado de x ,	p. 47
$\tan_{\tilde{q}}(x)$	Tangente $\tilde{q}$ -generalizada de x ,	p. 50
$\tanh_{\tilde{q}}(x)$	Tangente hiperbólica $\tilde{q}$ -generalizada de x ,	p. 47
d	Número de dimensões do meio,	p. 105

$e_{\tilde{q}}$	Base dos logaritmos naturais generalizado,	p. 56
f	Probabilidade de morte do caminhante na CEMT,	p. 130
n_e	Número de sítios explorados,	p. 111
n_v	Número de pontos no interior do volume V ,	p. 126
n_{μ}	Número de pontos do volume V que estão na janela de exclusão da memória,	p. 126
p	Período do ciclo,	p. 110
t	Comprimento do transiente,	p. 110
$x_i^{(k)}$	k -ésima coordenada do ponto i ,	p. 118
A_d	Volume de uma hiperesfera de d dimensões e raio unitário,	p. 120
$D_{i,j}$	Distância euclidiana normalizada entre os pontos i e j ,	p. 118
$E(D_{i,j})$	Função custo da distância normalizada,	p. 118
N	Número de pontos do meio,	p. 105
N_p	Número de passos,	p. 119
$P(N \mu)$	Probabilidade de ocorrerem N passos sem mudança de direção para uma dada memória μ ,	p. 112
$P_{m,n}^{(d,N)}$	Probabilidade de Cox,	p. 106
$S_{\mu,d}^{(N)}(t,p)$	Distribuição conjunta de t e p ,	p. 110
T	Temperatura (CET) ou alcance máximo (CEMT),	p. 118
V	Volume definido pelo alcance máximo T ,	p. 126
$W_{j \leftarrow i}$	Probabilidade de salto entre os pontos i e j ,	p. 118
$Z_i^{(\beta,\mu)}$	Coeficiente de normalização da probabilidade de salto a partir do ponto i ,	p. 119

Lista de Figuras

- 1.1 Comportamento hiperbólico ($\tilde{q} < 1$), constante ($\tilde{q} = 1$) e lei de potência ($\tilde{q} > 1$) da função $f_{\tilde{q}}(t) = t^{\tilde{q}-1}$ (Eq. 1.9) para diversos valores de $\tilde{q}$. Note-se que para $\tilde{q} = 2$ (função linear) ocorre uma mudança de concavidade nas leis de potência. p. 40
- 1.2 Comportamento da função $\tilde{q}$ -logarítmica (Eq. 1.10) para alguns valores de $\tilde{q}$. p. 40
- 1.3 Comportamento da função $\tilde{q}$ -exponencial (Eq 1.21) para alguns valores de $\tilde{q}$. p. 43
- 1.4 Comportamento das funções (a) cosseno (Eq 1.46), (b) seno (Eq. 1.47) e (c) tangente (Eq. 1.48) hiperbólicos generalizados para diversos valores de $\tilde{q}$. Note a sobreposição dos gráficos de $\sinh_{0,5}(x)$ e $\sinh_1(x)$. As linhas verticais observadas representam as assíntotas verticais das funções para $\tilde{q} = -1$ p. 49
- 1.5 Comportamento das funções (a) cosseno (Eq. 1.54), (b) seno (Eq. 1.55) e (c) tangente (Eq. 1.56) generalizados para diversos valores de $\tilde{q}$. Note a sobreposição dos gráficos de $\sin_{0,5}(x)$ e $\sin_1(x)$ e de $\tan_{-1}(x)$ e $\tan_1(x)$. As linhas verticais observadas representam as assíntotas verticais da função $\tan_{\tilde{q}}(x)$. . . p. 51
- 2.1 Comportamento da Eq. 2.14 em função de: (a) x e $\tilde{q}$, com $\beta = 1/2$ e $a = 1$; (b) x e β , com $\tilde{q} = 1/5$ e $a = 1$; (c) $\tilde{q}$ e β , com $x = 1$ e $a = 1$ p. 63
- 2.2 Comportamento da Eq. 2.14 em função de x : (a) com $\beta = 1/2$ e $a = 1$ para vários valores de $\tilde{q}$ (Projeção da Fig. 2.1a); (b) com $\tilde{q} = 1/5$ e $a = 1$ para vários valores de β (Projeção da Fig. 2.1b). p. 64
- 3.1 Modelos de crescimento obtidos a partir da Eq. 3.33, que apresentam solução analítica. As curvas foram obtidas utilizando os seguintes valores $p_0 = 0.001$, $\alpha = 0.1$ e $\varepsilon = -0.1$. Para os parâmetros da Tab. 3.1 cujos valores são arbitrários, foram utilizados os valores $\kappa = 1$, $q = 2$, e $\gamma = 1.5$ p. 82

- 3.2 Diagrama de bifurcação do mapa logístico generalizado (Eq. 3.42) para $\tilde{q} = 2$. Pode-se observar que a duplicação de períodos tem início em $\rho = (\tilde{q} + 2)/\tilde{q} = 2$ e que a fase caótica termina em $\rho_{max} = \exp_2(1) \exp_1(2)/\tilde{q} = \sqrt{27}/2 \approx 2.6$ (Eq. 3.45). **Detalhe interno:** Expoente de Lyapunov em função de $\rho_{\tilde{q}}$ para $\tilde{q} = 2$ p. 85
- 3.3 Diagrama de Bifurcação do mapa logístico generalizado (Eq. 3.42) para $\tilde{q} = 1/2$, $\tilde{q} = 1$ (logístico) e $\tilde{q} = 2$. Os pontos fixos são dados pelas Eqs. 3.46 e 3.47. p. 85
- 3.4 Histogramas de x para $\rho_{\tilde{q}} = \exp_{\tilde{q}}(1) \exp_1(\tilde{q})$ no mapa logístico generalizado (Eq. 3.42) para $\tilde{q} = 1/10$, $\tilde{q} = 1$ (logístico) e $\tilde{q} = 10$. Não há mudanças drásticas com relação ao mapa logístico. Apenas nas extremidades é possível ver algumas diferenças, como mostrados nos detalhes internos. p. 86
- 3.5 Diagramas de bifurcação típicos do modelo de θ -Ricker generalizado (Eq. 3.54). (a) $\tilde{q} = 1/2$ e $\theta = 2$, (b) $\tilde{q} = 1$ e $\theta = 3$ e (c) $\tilde{q} = 2$ and $\theta = 5$ p. 89
- 3.6 Esquema ilustrativo do comportamento típico de modelos de competição por acaso (quadrados) e por luta (circulos). A existência de um cimo no comportamento da competição por acaso mostra a tendência de extinção da espécie neste tipo de competição. p. 90
- 3.7 Pontos fixos dados pelas Eqs. 3.60 e 3.61, em função de k_1 . As regiões de instabilidade estão representadas por linhas tracejadas. O valor de κ_m é dado pela Eq. 3.59. p. 91
- 3.8 Diagrama mostrando os vários tipos de comportamentos do modelo θ -Ricker generalizado (Eq. 3.54). Para $\tilde{q} < 0$, tem-se o mapa $\tilde{x}_{i+1} = \kappa_1 \tilde{x}_i (1 - |\tilde{q}| \tilde{x}_i^\theta)^{1/|\tilde{q}|}$ e $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_m$, com x_m dado pela Eq. 3.56. Este sistema representa modelos de competição ao acaso e apresenta duplicação de períodos e caos. Para $\tilde{q} \geq 0$, $\tilde{x} \geq 0$ e o comportamento do sistema é regido pelos valores de θ . Não temos resultados analíticos para $\theta \geq 2\tilde{q}$. Para $\theta < 2\tilde{q}$ o sistema representa modelos de competição por luta, com apenas dois pontos fixos, dados pelas Eqs. 3.60 e 3.61. É importante ressaltar que ainda não conhecemos o comportamento do modelo na região entre o eixo $\tilde{q} = 0$ e a reta $\theta = 2\tilde{q}$ p. 92
- 6.1 Processo de Poisson bidimensional. Existem i pontos na intersecção das superfícies. Nos crescentes I e J existem, respectivamente, $n - 1 - i$ e $m - 1 - i$ pontos. p. 106

- 6.2 Gráfico da probabilidade de um caminhante efetuar N passos sem mudar de direção (Eq. 6.23) para $N = 10, 100$ e 1000 . É possível observar a existência de uma transição abrupta no valor de $P(N|\mu)$ em $\mu_1 = \log_2 N$, com uma região de transição estreita, de largura $\varepsilon = e/\ln 2$ p. 113
- 6.3 Distribuição conjunta do tempo de transiente (t) e do período dos ciclos (p) com $N = 1000$ e $d = 2$ para (a) $\mu = 9$ e (b) $\mu = 25$. Nota-se que o aspecto geral de ambos os histogramas é similar. p. 114
- 7.1 Taxa média de visitação de sítios distintos em função da memória para 10 valores diferentes de temperatura. Nota-se que o comportamento da taxa de visitação muda drasticamente com o aumento da temperatura. Para alguns casos ($T \geq 2$), não existe mais a transição entre a exploração localizada e estendida. (Gráfico adaptado da Ref. [130] com autorização dos autores) . . . p. 122
- 8.1 Caminhada estocástica modificada do turista com $d = 2$, $N = 40$ e $\mu = 4$. A linha tracejada mostra a trajetória. O círculo maior indica o volume V de raio T . Os pontos pretos (externos ao volume V) são inalcançáveis no passo seguinte. Os pontos cinzas fazem parte da memória e não podem ser revisitados no passo seguinte. Os pontos brancos podem ser visitados no passo seguinte com mesma probabilidade $W = 1/5$. Neste exemplo, $n_v = 8$ e $n_\mu = 3$ p. 126
- 8.2 Diagrama de Venn da CEMT. A intersecção de V e M apresenta n_μ pontos, a região de M que não está contida em V possui $\mu - n_\mu$ pontos e a região de V que não está contida em M possui $n_v - n_\mu$ pontos. O número de pontos de pontos do conjunto todo que não pertencem nem a M nem a V é $N - n_v - \mu + n_\mu$. p. 129
- 8.3 (a) Aspecto da probabilidade de morte do caminhante a cada passo (Eq. 8.8) para um ambiente com $N = 100$ pontos. Note que o aspecto deste gráfico não depende de d . (b) Curvas de nível da Eq. 8.8. As regiões mais claras são as mais prováveis. As curvas de níveis apresentadas são as que apresentam os valores $f = 0,2$; $f = 0,4$; $f = 0,6$ e $f = 0,8$ p. 131

- 8.4 Curvas de nível da probabilidade de morte do caminhante (Eq. 8.8) para diversos valores de N . As áreas mais claras são as mais prováveis. As curvas de níveis mostradas apresentam os valores $f = 0,2$; $f = 0,4$; $f = 0,6$ e $f = 0,8$. É possível notar claramente o efeito de tamanho finito, evidenciado pelo deslocamento da região de transição para a região em que $V \ll 1$ e $\mu \rightarrow N$. Para $N \rightarrow \infty$, a probabilidade de morte é nula $\forall V, \forall \mu \neq N$ p. 132
- 8.5 Comportamento da probabilidade de morte do caminhante (Eq. 8.8) para (a) μ constante e (b) V constante em um ambiente com $N = 100$ pontos. Observe o comportamento exponencial das curvas a V constante. p. 133
- 8.6 Curvas de transição entre a sobrevivência (região abaixo da curva) e a morte (região acima da curva) do caminhante na CEMT para um ambiente com $N = 100$ pontos: (a) $f = e^{-1}$ e (b) diversos valores de f . Os gráficos foram obtidos resolvendo numericamente a Eq. 8.9 com aproximação de 10^{-4} . As barras de erro são muito pequenas para serem mostradas. p. 134
- 8.7 Efeito da variação do número de passos (N_p) sobre a probabilidade de morte do caminhante na CEMT para um ambiente com $N = 128$ p. 135
- 8.8 Comportamento das curvas de probabilidade de morte em função de: (a) μ a V constante e (b) V a μ constante para um ambiente com $N = 128$ e $N_p = N$. É interessante observar que o comportamento das curvas é similar, independentemente da variação do parâmetro. p. 136
- 8.9 Colapso das curvas de probabilidade de morte em função de: (a) μ a V constante e (b) V a μ constante para um ambiente com $N = 128$ e $N_p = N$ p. 136
- 8.10 Deslocamento da curva de transição $\mu_v \times V$ em função de N_p para um ambiente com $N = 128$ pontos. p. 137
- 8.11 Evolução da memória crítica de transição a V constante (μ_v) em função de $\log(N_p/N)$ para um ambiente com $N = 128$ pontos. p. 138
- 8.12 Resultados numéricos para a sobrevivência do turista para $N_p = N = 32$ e $d = 1,2,3$ p. 140
- 8.13 Resultados numéricos para a sobrevivência do turista para $N_p = N = 64$ e $d = 1,2,3$ p. 141
- 8.14 Resultados numéricos para a sobrevivência do turista para $N_p = N = 128$ e $d = 1,2,3$ p. 142

8.15	Resultados numéricos do envelhecimento da caminhada para $N = 128$ e $d = 1$.	p. 143
8.16	Colapso dos dados numéricos para a CEMT com $N = N_p = 128$. A linha contínua representa o colapso analítico, mostrado na Fig. 8.9a. A grande dispersão dos dados numéricos em relação à previsão analítica pode ser reduzida aumentando a quantidade de mapas (M) analisados.	p. 144
8.17	Comparação entre a previsão analítica (a) e o resultado numérico (b) para o deslocamento da curva de transição $\mu_v \times V$ em função de N_p para um ambiente com $N = 128$ pontos. Nota-se claramente que no resultado numérico o deslocamento é mais rápido, devido aos efeitos de borda.	p. 145
8.18	Comparação entre a previsão analítica e o resultado numérico para a evolução da memória crítica de transição a V constante (μ_v) em função de $\log(N_p/N)$ para um ambiente com $N = 128$ pontos. Apesar da diferença observada nos valores de μ_v , nota-se que ambas mantém a tendência logarítmica para $V \geq 0,5$.	p. 145
8.19	Taxa de visitação em função de T e μ para a CEMT com $N = 128$ e $N_p = N$, para $d = 1, 2, 3$	p. 147

Lista de Tabelas

- 3.1 Modelos contínuos de crescimento que podem ser obtidos a partir da Eq. 3.33. Os asteriscos indicam que o parâmetro considerado pode assumir qualquer valor arbitrário dentro de seu domínio. p. 81
- 3.2 Relação de parâmetros para obter os modelos de crescimento discreto a partir da Eq. 3.54. Na coluna “tipo de competição”, a e l significam, respectivamente, modelos de competição por acaso e por luta. O símbolo * indica valores arbitrários. p. 88
- 3.3 Relação de parâmetros para obter os modelos discretos de competição por luta a partir da Eq. 3.64. p. 93

Prefácio

Durante os estudos de meu Mestrado [1], deparei-me com processos difusivos que não obedeciam o modelo de difusão tradicional, conforme descrito por Alfred Fick [2] e Albert Einstein [3]. Enquanto estes últimos apresentavam um comportamento gaussiano, os primeiros apresentavam um comportamento anômalo, melhor descrito pela função densidade de probabilidade (pdf) gaussiana generalizada [4]. Esta função deriva da função exponencial generalizada, que é a função inversa da função logaritmo natural generalizado, proposta por C. Tsallis no contexto da termodinâmica não-extensiva [5, 6].

O estudo da pdf gaussiana generalizada despertou meu interesse pelas funções generalizadas e suas aplicações. O resultado deste estudo é apresentado na primeira parte desta Tese. No Cap. 1 apresentamos as funções logaritmo natural e exponencial generalizados mediante uma abordagem original, derivada de argumentos puramente geométricos. Também são apresentados os operadores aritméticos generalizados, necessários para reobter a aditividade daquelas funções; as funções trigonométricas generalizadas, que podem ser derivadas diretamente da exponencial generalizada, e duas generalizações possíveis da operação fatorial. Como resultado novo, apresentamos os operadores somatório e produtivo generalizados, suas relações com as médias aritmética e geométrica e duas aplicações. No Cap. 2 mostramos como generalizar uma vasta gama de pdfs a partir da exponencial generalizada, em particular as de Laplace e de Gauss generalizadas, como casos particulares da exponencial estendida generalizada. No Cap. 3, apresentamos um estudo das dinâmicas populacionais discretas e contínuas de uma única espécie. Através da utilização do logaritmo natural generalizado e da exponencial generalizada, mostramos que é possível obter uma formulação única para todos os modelos mais conhecidos de modelos de crescimento contínuo e outra para os modelos discretos. Encerrando a primeira parte desta Tese, apresentamos um estudo dos fenômenos de transporte anômalos, cujas modelagens matemáticas utilizam a função exponencial generalizada. Estes fenômenos foram os que primeiramente despertaram meu interesse pelo estudo das funções generalizadas e representam o comportamento da caminhada do turista (CT) em sua versão determinista. As conclusões da primeira parte estão no Cap. 5.

A segunda parte desta Tese apresenta a caminhada do turista em suas versões determinista, estocástica e estocástica modificada. No Cap. 6 é apresentada a caminhada determinista do

turista (CDT), começando pelo problema da determinação das distâncias entre vizinhos em um ambiente desordenado - o problema do ponto aleatório (PPA) e apresentando os resultados já obtidos para alguns casos particulares da CDT. Também são apresentados dois modelos de campo médio, um dos quais representa o limite do espaço euclidiano para um grande número de dimensões. A caminhada estocástica do turista (CET) é apresentada no Cap. 7, principalmente nos casos sem memória em qualquer dimensão e com memória em ambientes unidimensionais. Um resultado importante em ambas versões da caminhada do turista é a transição no comportamento exploratório em função dos parâmetros das caminhadas. Na CDT foi possível derivar analiticamente a relação entre essa transição e o parâmetro de memória (μ) da caminhada em uma dimensão. Já na CET, foi possível encontrar uma relação empírica, mediante simulações numéricas, entre os parâmetros de memória e temperatura (T) da caminhada na região de transição. Uma solução analítica geral, entretanto, não foi possível de obter. A fim de obter uma solução analítica geral para a relação entre a memória e a temperatura na região de transição entre a exploração local e a global na caminhada do turista, modificou-se a regra de movimentação da CET, introduzindo a caminhada estocástica modificada do turista (CEMT). Esta versão da CT, juntamente com os resultados analíticos e numéricos é mostrada no Cap. 8. As conclusões da segunda parte desta Tese são apresentadas no Cap. 9.

As considerações finais desta Tese são apresentadas no Posfácio. Nele também são apresentadas as perspectivas de trabalhos futuros.

Parte I

Generalização de Funções Algébricas , Operadores Aritméticos e Modelos de Crescimento

1 Generalização de funções algébricas e operadores aritméticos

Neste capítulo apresentamos várias generalizações das funções logarítmica e exponencial, propostas nos mais variados contextos da ciência. Como novidade, utilizando argumentos totalmente geométricos, apresentamos uma generalização dessas funções similar à obtida no contexto da termodinâmica não-extensiva [5, 6]. A partir dessas definições, mostramos a generalização das funções trigonométricas hiperbólicas e circulares. Mostramos também que, da mesma forma que a função exponencial permite unificar matematicamente os comportamentos exponencial e oscilatório de vários fenômenos físicos, as funções generalizadas permitem unificar esses comportamentos com as leis de potência, característica dos sistemas complexos.

Além disso, mostramos que a aditividade das funções generalizadas pode ser obtida redefinindo os operadores algébricos soma e produto. Aplicações sucessivas destes operadores algébricos (somatório e produtório, respectivamente) apresentam expressões analíticas. Finalmente, apresentamos algumas aplicações deste formalismo, como a reobtenção da entropia de Tsallis e a composição de juros (aditiva com os operadores generalizados). A fim de destacar as propriedades de simetria, substituímos o parâmetro original q pelo parâmetro $\tilde{q} = 1 - q$.

1.1 Funções generalizadas

Baseado em argumentos da termodinâmica não-extensiva [5], C. Tsallis propôs uma generalização das funções logarítmica e exponencial [6]:

$$\ln_{\tilde{q}}(x) = \lim_{q' \rightarrow \tilde{q}} \frac{(x^{q'} - 1)}{q'}, \quad (1.1)$$

$$\exp_{\tilde{q}}(x) = \begin{cases} \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} [1 + \tilde{q}'x]^{1/\tilde{q}'} & , \text{ se } \tilde{q}x \geq -1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}. \quad (1.2)$$

Esta generalização não é unívoca. Por exemplo, uma outra generalização com um parâmetro para essas funções foi proposta por G. Kaniadakis no contexto da mecânica estatística relati-

vista [7, 8]:

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) = \frac{(x^\kappa - x^{-\kappa})}{2\kappa}, \quad (1.3)$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) = (\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x)^{1/\kappa}. \quad (1.4)$$

Uma terceira generalização com um parâmetro da função logarítmica foi obtida da teoria quântica de grupo por S. Abe, que, infelizmente, não admite uma função inversa (exponencial) analítica [9]:

$$\ln_q(x) = \frac{-(x^{1-q} - x^{1-q^{-1}})}{q - q^{-1}}. \quad (1.5)$$

Uma generalização com dois parâmetros dessas funções também foi proposta por G. Kaniadakis *et al.* [10]:

$$\ln_{\{\kappa, \varsigma\}}(x) = \frac{\ln_{\{\kappa\}}(\varsigma x) - \ln_{\{\kappa\}}(\varsigma)}{\sqrt{1 + \kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}^2(\varsigma)}}, \quad (1.6)$$

$$\exp_{\{\kappa, \varsigma\}}(x) = \left(\frac{1}{\varsigma}\right) \exp_{\{\kappa\}} \left[x \sqrt{1 + \kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}^2(\varsigma)} + \ln_{\{\kappa\}}(\varsigma) \right]. \quad (1.7)$$

Existe ainda uma generalização a três parâmetros, proposta também por G. Kaniadakis, que inclui todos os outros logaritmos generalizados como casos especiais [11]:

$$\ln_{\{\kappa, r, \varsigma\}}(x) = \frac{\varsigma^\kappa x^{r+\kappa} - \varsigma^{-\kappa} x^{r-\kappa} - \varsigma^\kappa + \varsigma^{-\kappa}}{(\kappa + r)\varsigma^\kappa + (\kappa - r)\varsigma^{-\kappa}}. \quad (1.8)$$

Note que a função inversa só pode ser obtida para alguns conjuntos específicos de parâmetros $\{\kappa, r, \varsigma\}$.

Como novos resultados neste assunto, mostraremos, a seguir, que é possível obter a generalização proposta por Tsallis (Eqs. 1.1 e 1.2) a partir de argumentos geométricos simples. Também serão introduzidos os operadores aritméticos generalizados e mostraremos que é possível estender a definição dos operadores soma e produto para um número arbitrário de termos. Estes operadores generalizados estão relacionados com as médias aritmética e geométrica de uma variável aleatória, que podem ter aplicações em algumas situações físicas, como mostrado na seção 1.7. Estes resultados foram obtidos em conjunto com T. J. Arruda e C. A. S. Terçariol e foram publicados na Ref. [12].

1.2 Funções e operadores generalizados

Uma generalização, com parâmetro único, das funções logarítmica e exponencial foi proposta na Ref. [6] com base em argumentos da termoestatística não-extensiva [5]. Entretanto, a mesma generalização pode ser obtida por meio de um simples argumento geométrico. Considere a família de funções $f_{\tilde{q}}(t) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{q} \in \mathbb{R}$:

$$f_{\tilde{q}}(t) = \frac{1}{t^{1-\tilde{q}}}. \quad (1.9)$$

Para $\tilde{q} < 1$, a família de funções acima corresponde a hipérboles assimétricas, exceto para $\tilde{q} = 0$. A Eq. 1.9 não diverge em $t = 0$, permitindo acrescentar a origem no domínio da função. Por outro lado, para $\tilde{q} > 1$, a Eq. 1.9 representa leis de potência. Para $\tilde{q} = 1$ obtém-se a função constante $f_1(t) = 1$. Para $\tilde{q} = 2$, a função é linear e é onde ocorre a mudança de concavidade nas leis de potência. A Fig. 1.1 mostra graficamente os diversos comportamentos da Eq. 1.9 para alguns valores do parâmetro $\tilde{q}$. Note-se que $f_{\tilde{q}}(1) = 1$, $\forall \tilde{q} \in \mathbb{R}$.

É interessante observar que a função inversa de $f_{\tilde{q}}(t)$ é $f_{\tilde{q}'}(t)$, com $\tilde{q}' = \tilde{q}/(\tilde{q} - 1)$. Este fato pode ser observado graficamente na Fig. 1.1. Os gráficos das funções $f_3(t)$ e $f_{3/2}(t)$ apresentam uma simetria de espelhamento em torno da bissetriz do primeiro quadrante [$f_2(t)$], que é característica de funções inversas. O mesmo pode ser observado para os gráficos de $f_{1/2}(t)$ e $f_{-1}(t)$.

1.2.1 Função logaritmo natural generalizado

A função logaritmo natural generalizada (ou simplesmente $\tilde{q}$ -logaritmo), $\ln_{\tilde{q}}(x)$, $x > 0$, pode ser interpretada geometricamente como a área abaixo da curva da Eq. 1.9 no intervalo $[1, x]$:

$$\ln_{\tilde{q}}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^{1-\tilde{q}}} = \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} \frac{x^{\tilde{q}'} - 1}{\tilde{q}'} = \begin{cases} \frac{x^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}}, & \text{se } \tilde{q} \neq 0, \\ \ln x, & \text{se } \tilde{q} = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

É importante não confundir esta função com o logaritmo de base $\tilde{q}$ [$\log_{\tilde{q}}(x)$]. Esta é uma generalização da definição da função logaritmo natural, que é obtida como caso particular para $\tilde{q} = 0$. Devido à definição (Eq. 1.10), a área é considerada negativa para $0 < x < 1$ e positiva para $x > 1$, independentemente do valor de $\tilde{q}$. Além disso, para $x = 1$, a área é nula, mantendo a propriedade do logaritmo tradicional: $\log_{\tilde{q}} 1 = 0$. A Fig. 1.2 mostra o comportamento da Eq. 1.10 para alguns valores de $\tilde{q}$.

A imagem da função $\tilde{q}$ -logaritmo é obtida tomando-se os limites $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow +\infty$, para

Figura 1.1: Comportamento hiperbólico ($\tilde{q} < 1$), constante ($\tilde{q} = 1$) e lei de potência ($\tilde{q} > 1$) da função $f_{\tilde{q}}(t) = t^{\tilde{q}-1}$ (Eq. 1.9) para diversos valores de $\tilde{q}$. Note-se que para $\tilde{q} = 2$ (função linear) ocorre uma mudança de concavidade nas leis de potência.

Figura 1.2: Comportamento da função $\tilde{q}$ -logarítmica (Eq. 1.10) para alguns valores de $\tilde{q}$.

os casos $\tilde{q} < 0$ e $\tilde{q} > 0$, respectivamente. Assim, verifica-se que:

$$\text{Im}[\ln_{\tilde{q}}(x)] = \begin{cases} (-\infty, -1/\tilde{q}) & \text{se } \tilde{q} < 0; \\ \mathbb{R} & \text{se } \tilde{q} = 0; \\ (-1/\tilde{q}, +\infty) & \text{se } \tilde{q} > 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Dados uma deformação $\alpha \neq 0$ e um fator de escala $\beta \neq 0$, pode-se encontrar a seguinte propriedade do $\tilde{q}$ -logaritmo:

$$\ln_{\tilde{q}}(\beta x^\alpha) = \frac{(\beta x^\alpha)^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} = \alpha \left[\frac{(\beta^{1/\alpha} x)^{\alpha \tilde{q}} - 1}{\alpha \tilde{q}} \right] = \alpha \ln_{\alpha \tilde{q}}(\beta^{1/\alpha} x) . \quad (1.12)$$

Para $\alpha = -1$, temos que:

$$\ln_{\tilde{q}}\left(\frac{\beta}{x}\right) = -\ln_{-\tilde{q}}\left(\frac{x}{\beta}\right) . \quad (1.13)$$

É interessante notar que a Eq. 1.13 apresenta duas simetrias: uma aditiva e outra multiplicativa¹. Para o caso particular de $\beta = 1$, temos:

$$\ln_{\tilde{q}}(x^{-1}) = -\ln_{-\tilde{q}}(x) . \quad (1.14)$$

Igualmente, pode-se aplicar primeiramente a mudança de escala (β) e em seguida a deformação (α), obtendo:

$$\ln_{\tilde{q}}[(\beta x)^\alpha] = \frac{[(\beta x)^\alpha]^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} = \alpha \left[\frac{(\beta x)^{\alpha \tilde{q}} - 1}{\alpha \tilde{q}} \right] = \alpha \ln_{\alpha \tilde{q}}(\beta x) . \quad (1.15)$$

Para $\alpha = -1$, temos que:

$$\ln_{\tilde{q}}\left(\frac{1}{\beta x}\right) = -\ln_{-\tilde{q}}(\beta x) . \quad (1.16)$$

Para o caso particular de $\beta = 1$, reobtemos a Eq. 1.14

Assim, $\forall x > 0$, $\ln_{\tilde{q}}(x^{-1}) = -\ln_{-\tilde{q}}(x)$ se, e somente se, $\tilde{q} = 0$. Este resultado mostra que a função $\tilde{q}$ -logaritmo se comporta como função logarítmica tradicional apenas no limite $\tilde{q} \rightarrow 0$.

Aqui utilizamos a mesma representação das Refs. [13, 14] ($\tilde{q} = a = k$) ao invés da representação tradicional ($\tilde{q} = 1 - q$) utilizada na Ref. [15] porque a primeira evidencia melhor a simetria exposta na Eq. 1.13.

Dado que a função logaritmo generalizado é a área sob a curva de $f_{\tilde{q}}(x)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$\frac{d \ln_{\tilde{q}}(x)}{dx} = f_{\tilde{q}}(x) = x^{\tilde{q}-1} . \quad (1.17)$$

¹Um número y é simétrico aditivo de x se $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$. Os números z e w são simétricos multiplicativos se $z \cdot w = 1 \Rightarrow z = w^{-1}$ ($w \neq 0$).

De fato, é fácil comprovar que:

$$\frac{d^n \ln_{\tilde{q}}(x)}{dx^n} = x^{\tilde{q}-n} \prod_{k=1}^{n-1} (\tilde{q}-k) = (-1)^{n+1} x^{\tilde{q}-n} \frac{\Gamma(n-\tilde{q})}{\Gamma(1-\tilde{q})}, \quad (1.18)$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}$, $x > 0$ é a função gama [16]. Para isso usamos a identidade

$$\prod_{k=1}^{n-1} (\tilde{q}-k) = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n-\tilde{q})}{\Gamma(1-\tilde{q})}, \quad (1.19)$$

que pode ser verificada por indução.

Além disso, também pode-se demonstrar que:

$$\int dx \ln_{\tilde{q}}(x) = \frac{x}{1+\tilde{q}} [\ln_{\tilde{q}}(x) - 1]. \quad (1.20)$$

1.2.2 Função exponencial generalizada

A partir das Eqs. 1.10 e 1.11, temos que a função $\tilde{q}$ -logaritmo é bijetora e, portanto, admite inversão. Geometricamente, isso corresponde a determinar o limite superior do intervalo $[0, y]$ para o qual a área sob a curva da Eq. 1.9 é igual a x , isto é, $\ln_{\tilde{q}}(y) = x$. À função inversa do $\tilde{q}$ -logaritmo dá-se o nome de função exponencial generalizada (ou simplesmente $\tilde{q}$ -exponencial), $\exp_{\tilde{q}}(x)$. Devido às propriedades das funções inversas, e pela definição acima, $\exp_{\tilde{q}}(x) = y$, então, $\exp_{\tilde{q}}[\ln_{\tilde{q}}(y)] = y = \ln_{\tilde{q}}[\exp_{\tilde{q}}(y)]$. Analiticamente, a função $\tilde{q}$ -exponencial é dada por:

$$\begin{aligned} \exp_{\tilde{q}}(x) &= \begin{cases} \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} [1 + \tilde{q}'x]^{1/\tilde{q}'} & , \text{ se } \tilde{q}x \geq -1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \\ &= \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} [1 + \tilde{q}'x]_+^{1/\tilde{q}'}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde o uso do operador

$$[a]_+ = \max(a, 0) \quad (1.22)$$

é necessário, uma vez que $\exp_{\tilde{q}}(x)$ não é real se $\tilde{q}x < -1$. Esta propriedade da função $\tilde{q}$ -exponencial pode ser aplicadas em algumas situações, com por exemplo, permite obter transições de fase em modelos ecológicos [17]. A função $\tilde{q}$ -exponencial é estritamente não-negativa, $\exp_{\tilde{q}}(x) \geq 0$, e $\exp_{\tilde{q}}(0) = 1$, para qualquer valor de $\tilde{q}$. A Fig. 1.3 mostra o comportamento da Eq. 1.21 para alguns valores de $\tilde{q}$.

Dado $\alpha \neq 0$, obtém-se para a função $\tilde{q}$ -exponencial uma relação similar àquela expressa na

Figura 1.3: Comportamento da função $\tilde{q}$ -exponencial (Eq 1.21) para alguns valores de $\tilde{q}$.

Eq. 1.12:

$$[\exp_{\tilde{q}}(x)]^{\alpha} = (1 + \tilde{q}x)^{\alpha/\tilde{q}} = \left[1 + \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha}\right) \alpha x\right]^{\alpha/\tilde{q}} = \exp_{\tilde{q}/\alpha}(\alpha x). \quad (1.23)$$

Em particular, se $\alpha = -1$, temos:

$$[\exp_{\tilde{q}}(x)]^{-1} = \exp_{-\tilde{q}}(-x). \quad (1.24)$$

Assim, $\forall x > 0$, $[\exp_{\tilde{q}}(x)]^{-1} = \exp_{\tilde{q}}(-x)$ se, e somente se, $\tilde{q} = 0$. Este resultado mostra que a função $\tilde{q}$ -exponencial se comporta como função exponencial apenas no limite $\tilde{q} \rightarrow 0$.

A derivada de função $\tilde{q}$ -exponencial apresenta uma expressão analítica para qualquer ordem:

$$\frac{d^n \exp_{\tilde{q}}(x)}{dx^n} = [\exp_{\tilde{q}}(x)]^{1-n\tilde{q}} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - k\tilde{q}) = [\exp_{\tilde{q}}(x)]^{1-n\tilde{q}} (-\tilde{q})^n \frac{\Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})}, \quad (1.25)$$

onde usamos a identidade

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - k\tilde{q}) = (-\tilde{q})^n \frac{\Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})}, \quad (1.26)$$

que pode ser verificada por indução.

Também pode-se mostrar facilmente que:

$$\int dx \exp_{\tilde{q}}(x) = \frac{[\exp_{\tilde{q}}(x)]^{1+\tilde{q}}}{1+\tilde{q}}. \quad (1.27)$$

Na Seção 1.3 mostraremos que a partir da definição da função $\tilde{q}$ -exponencial, outras funções podem ser generalizadas, como as funções trigonométricas hiperbólicas [18] e circulares [18]. No Cap. 2, mostraremos que a função $\tilde{q}$ -exponencial também é bastante útil na generalização de diversas funções densidade de probabilidade (pdf), em particular função de distribuição gaussiana [19].

Uma propriedade bem conhecida das funções logaritmo é sua aditividade em função do produto dos argumentos: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$. Uma situação similar ocorre com a função exponencial: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Essas propriedades não ocorrem para as funções $\tilde{q}$ -logaritmo e $\tilde{q}$ -exponencial, exceto para $\tilde{q} = 0$. No entanto, como veremos a seguir, essa aditividade pode ser recuperada redefinindo os operadores aritméticos soma e produto e, conseqüentemente, seus opostos: subtração e divisão, respectivamente.

1.2.3 Operadores algébricos generalizados

Alguns sistemas físicos apresentam propriedades que não dependem de seu tamanho ou da quantidade de matéria. Tais propriedades são ditas *intensivas*. A temperatura, a densidade, a viscosidade e a resistividade elétrica são alguns exemplos deste tipo de propriedade. Por outro lado, algumas propriedades dependem do tamanho do sistema ou da quantidade de matéria presente no sistema. A essas propriedades dá-se o nome de *extensivas*. São exemplos de grandezas extensivas: a massa, o volume e a entropia. A entropia de Boltzmann-Gibbs é definida por $S = K_B \ln \Omega$, onde K_B é a constante de Boltzmann e Ω é o número de estados acessíveis a um sistema fechado com energia E . Assim, dados dois sistemas A e B , com entropias S_A e S_B , respectivamente, a entropia do sistema formado ao juntar A e B será $S_{A+B} = K_B \ln(\Omega_A \cdot \Omega_B) = K_B \ln \Omega_A + K_B \ln \Omega_B = S_A + S_B$. Note que no sistema $A + B$, o número de estados acessíveis é $\Omega_A \cdot \Omega_B$, considerando-se sistemas independentes. A função logarítmica permite explicitar a extensividade da entropia, assim, num abuso de linguagem, pode-se dizer que o logaritmo é uma função extensiva: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ [15].

A fim de estender a aditividade das funções logaritmo e exponencial às suas contrapartidas generalizadas, torna-se necessário redefinir os operadores soma e produto. Desenvolvendo o

produto de duas $\tilde{q}$ -exponenciais, temos:

$$\exp_{\tilde{q}}(a) \cdot \exp_{\tilde{q}}(b) = (1 + \tilde{q}a)^{1/\tilde{q}} \cdot (1 + \tilde{q}b)^{1/\tilde{q}} = (1 + \tilde{q}a + \tilde{q}b + \tilde{q}^2 ab)^{1/\tilde{q}} = \exp_{\tilde{q}}(a + b + \tilde{q}ab).$$

A $\tilde{q}$ -soma de duas parcelas reais é, então, definida por [15]:

$$a \oplus_{\tilde{q}} b = a + b + \tilde{q}ab. \quad (1.28)$$

A soma tradicional pode ser reobtida fazendo $\tilde{q} = 0$: $\oplus_0 = +$. Assim, obtêm-se as regras de composição a seguir:

$$\ln_{\tilde{q}}(x_1 \cdot x_2) = \ln_{\tilde{q}}(x_1) \oplus_{\tilde{q}} \ln_{\tilde{q}}(x_2) \quad \text{e} \quad (1.29)$$

$$\exp_{\tilde{q}}(x_1) \cdot \exp_{\tilde{q}}(x_2) = \exp_{\tilde{q}}(x_1 \oplus_{\tilde{q}} x_2). \quad (1.30)$$

Observe que o operador acima admite as propriedades associativa $[(a \oplus_{\tilde{q}} b) \oplus_{\tilde{q}} c = a \oplus_{\tilde{q}} (b \oplus_{\tilde{q}} c)]$ e comutativa $(a \oplus_{\tilde{q}} b = b \oplus_{\tilde{q}} a)$ da adição tradicional. Entretanto, a propriedade distributiva só é válida para $\tilde{q} = 0$, visto que, em geral, $c(a \oplus_{\tilde{q}} b) = ca + cb + \tilde{q}cab \neq (ca) \oplus_{\tilde{q}} (cb)$:

$$c(a \oplus_{\tilde{q}} b) = (ca) \oplus_{\tilde{q}} (cb) + (1 - c)\tilde{q}abc. \quad (1.31)$$

Da mesma forma, podemos desenvolver a soma de dois $\tilde{q}$ -logaritmos:

$$\begin{aligned} \ln_{\tilde{q}}(a) + \ln_{\tilde{q}}(b) &= \frac{a^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} + \frac{b^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} = \frac{a^{\tilde{q}} + b^{\tilde{q}} - 2}{\tilde{q}} = \frac{[(a^{\tilde{q}} + b^{\tilde{q}} - 1)^{1/\tilde{q}}]^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} \\ &= \ln_{\tilde{q}}[(a^{\tilde{q}} + b^{\tilde{q}} - 1)^{1/\tilde{q}}]. \end{aligned}$$

O $\tilde{q}$ -produto de dois fatores é, então, definido por:

$$a \otimes_{\tilde{q}} b = [a^{\tilde{q}} + b^{\tilde{q}} - 1]_+^{1/\tilde{q}}, \quad (1.32)$$

onde $[a]_+$ é definido pela Eq. 1.22. Da mesma forma que na $\tilde{q}$ -soma, o produto usual pode ser obtido fazendo $\tilde{q} = 0$: $\otimes_0 = \times$. Esta redefinição do produto permite as seguintes composições:

$$\ln_{\tilde{q}}(x_1 \otimes_{\tilde{q}} x_2) = \ln_{\tilde{q}}(x_1) + \ln_{\tilde{q}}(x_2) \quad \text{e} \quad (1.33)$$

$$\exp_{\tilde{q}}(x_1) \otimes_{\tilde{q}} \exp_{\tilde{q}}(x_2) = \exp_{\tilde{q}}(x_1 + x_2). \quad (1.34)$$

Também, da mesma forma que a $\tilde{q}$ -soma, o $\tilde{q}$ -produto admite as propriedades associativa $[(a \otimes_{\tilde{q}} b) \otimes_{\tilde{q}} c = a \otimes_{\tilde{q}} (b \otimes_{\tilde{q}} c)]$ e comutativa $(a \otimes_{\tilde{q}} b = b \otimes_{\tilde{q}} a)$, porém não a propriedade distributiva, visto que $(a \otimes_{\tilde{q}} b)^c = [a^{\tilde{q}} + b^{\tilde{q}} - 1]_+^{c/\tilde{q}} \neq a^c \otimes_{\tilde{q}} b^c$.

As definições da soma e do produto generalizados permitem escrever as seguintes propriedades:

$$\ln_{\tilde{q}}(x_1 \otimes_{\tilde{q}} x_2 \otimes_{\tilde{q}} \cdots \otimes_{\tilde{q}} x_n) = \sum_{i=1}^n \ln_{\tilde{q}} x_i \quad (1.35)$$

$$\exp_{\tilde{q}}(x_1 \oplus_{\tilde{q}} x_2 \oplus_{\tilde{q}} \cdots \oplus_{\tilde{q}} x_n) = \prod_{i=1}^n \exp_{\tilde{q}}(x_i). \quad (1.36)$$

Da mesma forma que a adição tradicional, a $\tilde{q}$ -soma também admite o 0 (zero) como elemento neutro. Assim o inverso $\tilde{q}$ -aditivo de a ($\ominus_{\tilde{q}} a$) pode ser definido fazendo $a \oplus_{\tilde{q}} (\ominus_{\tilde{q}} a) = 0$. Dessa forma, $\ominus_{\tilde{q}} a = -a/(1 + \tilde{q}a)$, com $a \neq -1/\tilde{q}$. O elemento inverso da $\tilde{q}$ -soma permite, então, definir a $\tilde{q}$ -subtração:

$$b \ominus_{\tilde{q}} a = b \oplus_{\tilde{q}} (\ominus_{\tilde{q}} a) = \frac{b - a}{1 + \tilde{q}a}, \quad (1.37)$$

que, por sua vez, define as seguintes propriedades:

$$\ln_{\tilde{q}}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln_{\tilde{q}}(x_1) \ominus_{\tilde{q}} \ln_{\tilde{q}}(x_2) \quad \text{e} \quad (1.38)$$

$$\frac{\exp_{\tilde{q}}(x_1)}{\exp_{\tilde{q}}(x_2)} = \exp_{\tilde{q}}(x_1 \ominus_{\tilde{q}} x_2). \quad (1.39)$$

É interessante chamar a atenção para o fato de que a Eq. 1.38 equivale à Eq. 1.12, com $\beta = x_1$ e $\alpha = -1$. Dessa forma, é possível escrever:

$$\ln_{\tilde{q}}(x_1) \oplus_{\tilde{q}} \ln_{\tilde{q}}(x_2^{-1}) = \ln_{\tilde{q}}(x_1) \ominus_{\tilde{q}} \ln_{\tilde{q}}(x_2). \quad (1.40)$$

O $\tilde{q}$ -produto também admite o 1 como elemento neutro, da mesma forma que o produto tradicional. O inverso $\tilde{q}$ -multiplicativo de a ($1 \oslash_{\tilde{q}} a$) pode ser definido fazendo $a \otimes_{\tilde{q}} (1 \oslash_{\tilde{q}} a) = 1$. Assim, $1 \oslash_{\tilde{q}} a = [2 - a\tilde{q}]_+^{1/\tilde{q}}$, para $a \geq 0$. É interessante notar que $1 \oslash_{\tilde{q}} 0$ não diverge se $\tilde{q} \neq 0$, mas diverge em $a = 2^{1/\tilde{q}}$. O elemento inverso da $\tilde{q}$ -multiplicação permite, então, definir a $\tilde{q}$ -divisão:

$$b \oslash_{\tilde{q}} a = b \otimes_{\tilde{q}} (1 \oslash_{\tilde{q}} a) = (b^{\tilde{q}} - a^{\tilde{q}} + 1)^{1/\tilde{q}}, \quad (1.41)$$

onde $a, b > 0$. Dessa forma, obtemos as seguintes propriedades:

$$\ln_{\tilde{q}}(x_1 \oslash_{\tilde{q}} x_2) = \ln_{\tilde{q}}(x_1) - \ln_{\tilde{q}}(x_2) \quad \text{e} \quad (1.42)$$

$$\exp_{\tilde{q}}(x_1) \oslash_{\tilde{q}} \exp_{\tilde{q}}(x_2) = \exp_{\tilde{q}}(x_1 - x_2). \quad (1.43)$$

Além disso, temos que, se:

1. $0 \leq a^{\tilde{q}} \leq 2$ então $1 \odot_{\tilde{q}} (1 \odot_{\tilde{q}} a) = a$,
2. $\tilde{q} > 0$ então $1 \odot_{\tilde{q}} 0 = 2^{1/\tilde{q}}$,
3. $a^{\tilde{q}} \leq 1 + b^{\tilde{q}}$ então $a \odot_{\tilde{q}} b = 1 \odot_{\tilde{q}} (b \odot_{\tilde{q}} a)$ e
4. $c^{\tilde{q}} - 1 \leq b^{\tilde{q}} \leq a^{\tilde{q}} + 1$ então $a \odot_{\tilde{q}} (b \odot_{\tilde{q}} c) = (a \odot_{\tilde{q}} b) \otimes_{\tilde{q}} c = (a \otimes_{\tilde{q}} c) \odot_{\tilde{q}} b$.

1.3 Funções trigonométricas generalizadas

A partir das definições introduzidas na Seção 1.2, em particular a função $\tilde{q}$ -exponencial, apresentamos nesta seção uma generalização das funções trigonométricas circulares e hiperbólicas. Analogamente àquelas, as funções aqui generalizadas também permitem obter suas versões tradicionais como casos particulares. Uma vez que tanto as funções trigonométricas circulares quanto as hiperbólicas podem ser definidas a partir da função exponencial, essa ideia pode ser transferida naturalmente para suas generalizações. Os resultados apresentados nesta seção são uma revisão daqueles obtidos na Ref. [15].

1.3.1 Funções hiperbólicas

Analogamente às relações trigonométricas de uma circunferência, é possível definir relações trigonométricas em uma hipérbole:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (1.44)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1.45)$$

Substituindo a função exponencial pela $\tilde{q}$ -exponencial, podemos definir as funções trigonométricas hiperbólicas generalizadas ($\tilde{q}$ -cosseno hiperbólico e $\tilde{q}$ -seno hiperbólico) como sendo:

$$\cosh_{\tilde{q}}(x) = \frac{\exp_{\tilde{q}}(x) + \exp_{\tilde{q}}(-x)}{2}, \quad (1.46)$$

$$\sinh_{\tilde{q}}(x) = \frac{\exp_{\tilde{q}}(x) - \exp_{\tilde{q}}(-x)}{2}. \quad (1.47)$$

Naturalmente, a função $\tilde{q}$ -tangente hiperbólica é definida por:

$$\tanh_{\tilde{q}}(x) = \frac{\sinh_{\tilde{q}}(x)}{\cosh_{\tilde{q}}(x)} = \frac{\exp_{\tilde{q}}(x) - \exp_{\tilde{q}}(-x)}{\exp_{\tilde{q}}(x) + \exp_{\tilde{q}}(-x)}. \quad (1.48)$$

A Fig. 1.4 mostra o comportamento das funções $\tilde{q}$ -cosseno, $\tilde{q}$ -seno e $\tilde{q}$ -tangente hiperbólicos para diversos valores de $\tilde{q}$.

Finalmente, das Eqs. 1.46 e 1.47, obtemos:

$$\cosh_{\tilde{q}}^2(x) - \sinh_{\tilde{q}}^2(x) = \exp_{\tilde{q}}(x) \exp_{\tilde{q}}(-x) = \exp_{\tilde{q}}(-\tilde{q}x^2), \quad (1.49)$$

que é uma generalização do Teorema Fundamental da Trigonometria para o caso hiperbólico. Observe o aparecimento, na Eq. 1.49, da função $\tilde{q}$ -gaussiana não normalizada. A função densidade de probabilidade $\tilde{q}$ -gaussiana será tratada em detalhes no Cap. 2.

As derivadas consecutivas das funções $\tilde{q}$ -cosseno hiperbólico e $\tilde{q}$ -seno hiperbólico são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \frac{d^n \cosh_{\tilde{q}}(x)}{dx^n} &= \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \frac{[\exp_{\tilde{q}}(x)]^{1-n\tilde{q}} + (-1)^n [\exp_{\tilde{q}}(-x)]^{1-n\tilde{q}}}{2} \\ &= \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \frac{\exp_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] + (-1)^n \exp_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[-(1-n\tilde{q})x]}{2} \\ &= \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \left\{ \begin{array}{ll} \sinh_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 1, 3, 5, \dots \\ \cosh_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}, \quad (1.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n \sinh_{\tilde{q}}(x)}{dx^n} &= \frac{[\exp_{\tilde{q}}(x)]^{1-n\tilde{q}} + (-1)^{n+1} [\exp_{\tilde{q}}(-x)]^{1-n\tilde{q}}}{2} \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \\ &= \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \left\{ \begin{array}{ll} \cosh_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sinh_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}, \quad (1.51) \end{aligned}$$

onde a notação $\left\{ \begin{array}{ll} A(x) & C_1 \\ B(x) & C_2 \end{array} \right\}$ indica que deve ser usada a função $A(x)$ se a condição C_1 for verdadeira ou $B(x)$ se C_2 for verdadeira.

1.3.2 Funções circulares

Em variáveis complexas, a fórmula de Euler permite associar as funções seno e cosseno à função exponencial de um número imaginário puro: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Esta expressão, associada à sua complexa conjugada, permite definir as funções seno e cosseno em termos da função exponencial:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (1.52)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1.53)$$

Figura 1.4: Comportamento das funções (a) cosseno (Eq. 1.46), (b) seno (Eq. 1.47) e (c) tangente (Eq. 1.48) hiperbólicos generalizados para diversos valores de $\tilde{q}$. Note a sobreposição dos gráficos de $\sinh_{0,5}(x)$ e $\sinh_1(x)$. As linhas verticais observadas representam as assíntotas verticais das funções para $\tilde{q} = -1$.

Dada a generalização da função exponencial (Eq. 1.21), é possível definir as funções cosseno e seno generalizadas² ($\tilde{q}$ -cosseno e $\tilde{q}$ -seno):

$$\cos_{\tilde{q}}(x) = \frac{\exp_{\tilde{q}}(ix) + \exp_{\tilde{q}}(-ix)}{2}, \quad (1.54)$$

$$\sin_{\tilde{q}}(x) = \frac{\exp_{\tilde{q}}(ix) - \exp_{\tilde{q}}(-ix)}{2i}. \quad (1.55)$$

Estas funções descrevem fenômenos físicos oscilantes modulados por leis de potência. Também podemos definir a função tangente generalizada ($\tilde{q}$ -tangente) como sendo:

$$\tan_{\tilde{q}}(x) = \frac{\sin_{\tilde{q}}(x)}{\cos_{\tilde{q}}(x)}. \quad (1.56)$$

É interessante notar a relação que existe entre as versões circular e hiperbólica das funções trigonométricas generalizadas:

$$\cos_{\tilde{q}}(ix) = \frac{\exp_{\tilde{q}}(-x) + \exp_{\tilde{q}}(x)}{2} = \cosh_{\tilde{q}}(x), \quad (1.57)$$

$$\sin_{\tilde{q}}(ix) = \frac{\exp_{\tilde{q}}(-x) - \exp_{\tilde{q}}(x)}{2i} = i \sinh_{\tilde{q}}(x), \quad (1.58)$$

$$\tan_{\tilde{q}}(ix) = \frac{\sin_{\tilde{q}}(ix)}{\cos_{\tilde{q}}(ix)} = i \tanh_{\tilde{q}}(x). \quad (1.59)$$

A Fig. 1.5 mostra o comportamento das funções $\tilde{q}$ -cosseno, $\tilde{q}$ -seno e $\tilde{q}$ -tangente para diversos valores de $\tilde{q}$.

A partir das Eqs. 1.54 e 1.55, é possível generalizar o Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\cos_{\tilde{q}}^2(x) + \sin_{\tilde{q}}^2(x) = \exp_{\tilde{q}}(ix) \exp_{\tilde{q}}(-ix) = \exp_{\tilde{q}}(ix \oplus_{\tilde{q}} -ix) = \exp_{\tilde{q}}(\tilde{q}x^2). \quad (1.60)$$

As Eqs. 1.54 e 1.55 permitem generalizar a fórmula de Euler: $\exp_{\tilde{q}}(\pm ix) = \cos_{\tilde{q}}(x) \pm i \sin_{\tilde{q}}(x)$. Esta generalização, juntamente com a Eq. 1.23 permitem generalizar a relação de De Moivre:

$$[\exp_{\tilde{q}}(\pm ix)]^n = [\cos_{\tilde{q}}(x) \pm i \sin_{\tilde{q}}(x)]^n = \cos_{\tilde{q}/n}(nx) \pm i \sin_{\tilde{q}/n}(nx) = \exp_{\tilde{q}/n}(\pm inx). \quad (1.61)$$

²A restrição $\tilde{q}x \geq -1$ da definição da $\tilde{q}$ -exponencial não se aplica neste caso, uma vez que o argumento da função não é real.

Figura 1.5: Comportamento das funções (a) cosseno (Eq. 1.54), (b) seno (Eq. 1.55) e (c) tangente (Eq. 1.56) generalizados para diversos valores de $\tilde{q}$. Note a sobreposição dos gráficos de $\sin_{0,5}(x)$ e $\sin_1(x)$ e de $\tan_{-1}(x)$ e $\tan_1(x)$. As linhas verticais observadas representam as assíntotas verticais da função $\tan_{\tilde{q}}(x)$.

As derivadas consecutivas das funções $\tilde{q}$ -cosseno e $\tilde{q}$ -seno são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d^n \cos_{\tilde{q}}(x)}{dx^n} &= \frac{[\exp_{\tilde{q}}(-ix)]^{1-n\tilde{q}} + (-1)^n [\exp_{\tilde{q}}(ix)]^{1-n\tilde{q}}}{2} \frac{(i\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \\ &= \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \left\{ \begin{array}{ll} \sin_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 1, 3, 5, \dots \\ \cos_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}, \quad (1.62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n \sin_{\tilde{q}}(x)}{dx^n} &= \frac{[\exp_{\tilde{q}}(-ix)]^{1-n\tilde{q}} + (-1)^n [\exp_{\tilde{q}}(ix)]^{1-n\tilde{q}}}{2} \frac{i(i\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \\ &= \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})}{\Gamma(-1/\tilde{q})} \left\{ \begin{array}{ll} \cos_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin_{\tilde{q}/(1-n\tilde{q})}[(1-n\tilde{q})x] & n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}. \quad (1.63) \end{aligned}$$

1.4 Sistemas complexos

Apresentamos uma breve discussão sobre o papel das funções $\tilde{q}$ -generalizadas na unificação dos principais comportamentos observados nos fenômenos físicos. Os fenômenos físicos apresentam, basicamente, três comportamentos distintos:

- exponencial, como o decaimento radioativo;
- oscilatório, como os fenômenos ondulatórios e
- lei de potência, característico de sistemas complexos.

Os dois primeiros apresentam uma escala característica (como o tempo de meia-vida para o decaimento radioativo, ou o período de uma onda). Embora aparentemente distintos, estes dois comportamentos podem ser unificados utilizando a fórmula de Euler, $e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$. De um lado da igualdade temos o comportamento exponencial e do outro o oscilatório.

Os fenômenos regidos por leis de potência, entretanto, não apresentam uma escala característica. Eles ocorrem, geralmente, em sistemas cujos componentes interagem de forma não-linear, apresentando divergências assintóticas, caracterizadas por um expoente. Tais sistemas são chamados de *sistemas complexos*. Como a função $\tilde{q}$ -exponencial apresenta tanto o comportamento exponencial ($\tilde{q} = 0$) quanto o de lei de potência ($\tilde{q} \neq 0$), ela se mostra particularmente útil na obtenção de uma formulação única para esses dois comportamentos. Por extensão, os fenômenos oscilatórios também podem ser colocados na mesma formulação, visto serem um caso particular dos fenômenos exponenciais. Assim, podemos unificar todos os comportamentos dos fenômenos físicos por meio da função exponencial generalizada.

1.5 Operador fatorial generalizado

A Eq. 1.25 pode ser utilizada para escrever a expansão da função $\tilde{q}$ -exponencial em uma série de Taylor em torno de $x = 0$:

$$\exp_{\tilde{q}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^n \exp_{\tilde{q}}(x)}{dx^n} \right]_{x=0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q}) x^n}{n! \Gamma(-1/\tilde{q})}, \quad (1.64)$$

lembrando que $\exp_{\tilde{q}}(0) = 1, \forall q \in \mathbb{R}$. Como se sabe,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.65)$$

Podemos também escrever, por analogia,

$$\exp_{\tilde{q}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n_{-\tilde{q}}!}, \quad (1.66)$$

o que nos dá uma definição para a operação $\tilde{q}$ -fatorial:

$$n_{-\tilde{q}}! = \frac{n! \Gamma(-1/\tilde{q})}{(-\tilde{q})^n \Gamma(n-1/\tilde{q})} = \frac{n(n-1)_{-\tilde{q}}!}{1 - \tilde{q}(n-1)}. \quad (1.67)$$

Podemos, ainda, definir a função gama generalizada ($\tilde{q}$ -gama):

$$\Gamma_{\tilde{q}}(n) = \int_0^{1/\tilde{q}} dt t^{n-1} \exp_{\tilde{q}}(-t) = \frac{1}{\tilde{q}^n} B\left(n, \frac{1}{\tilde{q}} + 1\right), \quad (1.68)$$

onde $a > 0$ e $B(a, b) = \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1}$ é a função beta [16]. É interessante notar que para $\tilde{q} \rightarrow 0$, obtém-se a função gama padrão [16], uma vez que $\exp_0(-t) = e^{-t}$ e $1/\tilde{q} \rightarrow \infty$. A partir das propriedades da função beta, podemos obter a seguinte relação de recorrência para a função q -gama:

$$\Gamma_{\tilde{q}}(n+1) = \frac{n \Gamma_{\tilde{q}}(n)}{1 + \tilde{q}(n+1)} \quad (1.69)$$

que generaliza a operação $\tilde{q}$ -fatorial:

$$n_{\tilde{q}}! = \frac{n(n-1)_{\tilde{q}}!}{1 + \tilde{q}(n+1)}. \quad (1.70)$$

Esta definição da operação $\tilde{q}$ -fatorial é compatível com a obtida a partir da série de Taylor (Eq. 1.67) se a reescrevermos como:

$$n_{\tilde{q}}! = \frac{n(n-1)_{\tilde{q}}!}{1 + \tilde{q}[n + \text{sgn}(\tilde{q})]}. \quad (1.71)$$

onde $\text{sgn}(x) = x/|x|$ é o sinal de x .

Ainda é possível definir uma outra forma de fatorial generalizada, a partir do produto generalizado:

$$n!_{\tilde{q}} = n \otimes_{\tilde{q}} (n-1) \otimes_{\tilde{q}} (n-2) \otimes_{\tilde{q}} \cdots \otimes_{\tilde{q}} 1. \quad (1.72)$$

É importante ressaltar que esta definição do fatorial generalizado não é compatível com a definição dada pela Eq. 1.71. por esse motivo, a diferenciação na notação com a mudança na posição do índice $\tilde{q}$ em relação ao sinal de fatorial ($\tilde{q}! \neq !_{\tilde{q}}$).

1.6 Operadores somatório e produtório generalizados

Na Seção 1.2, definimos os operadores $\tilde{q}$ -soma e $\tilde{q}$ -produto apenas para dois operandos. Entretanto, nada nos impede de aplicar a mesma operação sucessivamente a um conjunto de operandos. Nesta Seção, ampliaremos a definição desses operadores, de modo a calcular operações sucessivas para n valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ de uma grandeza X . Este trabalho foi publicado na Ref. [12].

1.6.1 Valores médios

Inicialmente, vamos relembrar que a média aritmética, apropriada para processos aditivos, é definida por: $\langle X \rangle_A = (\sum_{i=1}^n x_i)/n$, e que a média geométrica, apropriada para processos multiplicativos, é dada por: $\langle X \rangle_G = (\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n}$.

Consideremos a média aritmética do $\tilde{q}$ -logaritmo de X ,

$$\langle \ln_{\tilde{q}}(X) \rangle_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln_{\tilde{q}}(x_i) = \frac{1}{n} \ln_{\tilde{q}}(x_1 \otimes_{\tilde{q}} x_2 \otimes_{\tilde{q}} \cdots \otimes_{\tilde{q}} x_n), \quad (1.73)$$

que é igual ao $\tilde{q}$ -logaritmo do $\tilde{q}$ -produto sobre o número de termos.

Estatisticamente, se X for uma variável aleatória:

$$\begin{aligned} \langle \ln_{\tilde{q}}(X) \rangle_A &= \frac{1}{n} \ln_{\tilde{q}}(x_1 \otimes_{\tilde{q}} x_2 \otimes_{\tilde{q}} \cdots \otimes_{\tilde{q}} x_n) = \frac{1}{n} \ln_{\tilde{q}} \left(\left[\sum_{i=1}^n x_i^{\tilde{q}} - (n-1) \right]^{1/\tilde{q}} \right) \\ &= \frac{\langle X^{\tilde{q}} \rangle_A - 1}{\tilde{q}}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Assim, vemos que o $\tilde{q}$ -ésimo momento da grandeza X está relacionado com a média aritmética do $\tilde{q}$ -logaritmo:

$$\langle X^{\tilde{q}} \rangle_A = 1 + \tilde{q} \langle \ln_{\tilde{q}}(X) \rangle_A. \quad (1.75)$$

A média geométrica da $\tilde{q}$ -exponencial de X é:

$$\begin{aligned}\langle \exp_{\tilde{q}}(X) \rangle_G &= \left[\prod_{i=1}^n \exp_{\tilde{q}}(x_i) \right]^{1/n} \\ &= \left[\exp_{\tilde{q}}(x_1 \oplus_{\tilde{q}} x_2 \oplus_{\tilde{q}} \dots \oplus_{\tilde{q}} x_n) \right]^{1/n},\end{aligned}\quad (1.76)$$

que está relacionada com a $\tilde{q}$ -exponencial da $\tilde{q}$ -soma elevado ao inverso do número de fatores.

Note que para $\tilde{q} = 0$ ocorrem as seguintes relações entre as duas médias: $\ln \langle x \rangle_G = \langle \ln x \rangle_A$ e $\langle e^x \rangle_G = e^{\langle x \rangle_A}$.

1.6.2 Operações sucessivas

Para obter o operador generalizado de adição sucessiva ($\tilde{q}$ -somatório), podemos utilizar o resultado da Eq. 1.76:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \oplus_{\tilde{q}} x_i &= x_1 \oplus_{\tilde{q}} x_2 \oplus_{\tilde{q}} \dots \oplus_{\tilde{q}} x_n = \ln_{\tilde{q}} [\langle \exp_{\tilde{q}}(X) \rangle_G^n] \\ &= \frac{1}{\tilde{q}} \left[\prod_{i=1}^n (1 + \tilde{q} x_i) - 1 \right].\end{aligned}\quad (1.77)$$

Da mesma forma, podemos definir o operador generalizado de multiplicação sucessiva ($\tilde{q}$ -produtório) a partir da Eq. 1.74:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n \otimes_{\tilde{q}} x_i &= x_1 \otimes_{\tilde{q}} x_2 \otimes_{\tilde{q}} \dots \otimes_{\tilde{q}} x_n = \exp_{\tilde{q}} [n \langle \ln_{\tilde{q}}(X) \rangle_A] \\ &= \left[\sum_{i=1}^n x_i^{\tilde{q}} - (n-1) \right]^{1/\tilde{q}}.\end{aligned}\quad (1.78)$$

A validade destes resultados pode ser confirmada por indução. Alguns casos particulares também podem ser obtidos.

Não é difícil mostrar que, para $\tilde{q} = 0$, obtêm-se os operadores somatório e produtório tradicionais:

$$\sum_{i=1}^n \oplus_0 x_i = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^n \otimes_0 x_i = \prod_{i=1}^n x_i. \quad (1.79)$$

A $\tilde{q}$ -soma de n parcelas iguais nos fornece:

$$\sum_{i=1}^n \oplus_{\tilde{q}} a = \frac{(1 + \tilde{q}a)^n - 1}{\tilde{q}} = \ln_{\tilde{q}} \{ [\exp_{\tilde{q}}(a)]^n \} = \ln_{\tilde{q}} [\exp_{\tilde{q}/n}(an)], \quad (1.80)$$

conforme encontrado na Ref. [15].

Já o $\tilde{q}$ -produto de n fatores iguais nos permite definir o operador $\tilde{q}$ -potência ($\wedge_{\tilde{q}}$):

$$\begin{aligned} a \wedge_{\tilde{q}} n &= \prod_{i=1}^n \otimes_{\tilde{q}} a = [na^{\tilde{q}} - (n-1)]^{1/\tilde{q}} \\ &= \exp_{\tilde{q}}[n \ln_{\tilde{q}}(a)] . \end{aligned} \quad (1.81)$$

Tanto este operador quanto este resultado já eram conhecidos a partir da Ref. [15]. É interessante ressaltar o limite fundamental [20]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) \wedge_{\tilde{q}} n = \exp_{\tilde{q}}(a) . \quad (1.82)$$

Fazendo $a = 1$ na Eq. 1.82, podemos generalizar a base dos logaritmos naturais:

$$e_{\tilde{q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \wedge_{\tilde{q}} n = \exp_{\tilde{q}}(1) = (1 + \tilde{q})^{1/\tilde{q}} . \quad (1.83)$$

Note que, para $\tilde{q} = 0$, $e_0 = e = 2,71828\dots$. Aplicando esta definição na Eq 1.81, obtemos a identidade:

$$\begin{aligned} e_{\tilde{q}} \wedge_{\tilde{q}} x &= \exp_{\tilde{q}}[x \ln_{\tilde{q}}(e_{\tilde{q}})] \\ &= \exp_{\tilde{q}}\{x \ln_{\tilde{q}}[\exp_{\tilde{q}}(1)]\} \\ &= \exp_{\tilde{q}}(x) . \end{aligned} \quad (1.84)$$

1.6.3 Polinômios simétricos

Existe uma forma alternativa de calcular o $\tilde{q}$ -somatório. Esta forma é interessante porque resalta algumas características desse operador. Expandindo o operador $\tilde{q}$ -somatório, obtemos um polinômio de grau $n-1$ em $\tilde{q}$, no qual o coeficiente de $\tilde{q}^k$ está relacionado com o $(k+1)$ -ésimo momento:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \oplus_{\tilde{q}} x_i &= \sum_{i_1=1}^n x_{i_1} + \tilde{q} \sum_{i_1=1}^n x_{i_1} \sum_{i_2=i_1+1}^n x_{i_2} + \tilde{q}^2 \prod_{j=1}^3 \sum_{i_j=i_{j-1}+1}^n x_{i_j} + \dots + \tilde{q}^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{q}^k \prod_{j=1}^{k+1} \sum_{i_j=i_{j-1}+1}^n x_{i_j} , \end{aligned} \quad (1.85)$$

onde $i_0 = 0$ e pode-se perceber claramente que o coeficiente de $\tilde{q}^0$ é proporcional à média aritmética de X e o coeficiente de $\tilde{q}^{n-1}$ está relacionado com sua média geométrica. As potências intermediárias de $\tilde{q}$ apresentam uma mistura dessas médias, sendo que a proporção de cada uma é dada pela potência de $\tilde{q}$.

1.7 Aplicações

A seguir, apresentaremos duas aplicações do formalismo introduzido neste Capítulo. Na primeira, mostraremos uma forma simples de obter a entropia generalizada de Tsallis. Na segunda, estenderemos o procedimento apresentado na Ref. [13], para a composição de juros de uma conta de poupança em um número arbitrário de intervalos de tempo, mostrando que a mesma é aditiva mediante a redefinição dos operadores. Também são consideradas situações de depósito ou retirada dessa conta.

1.7.1 Entropia generalizada

Considere um sistema formado por W estados acessíveis, em que p_i representa a probabilidade de acesso ao estado i . Nesse sistema, calculemos o valor médio de $\ln_{\tilde{q}}(1/p_i)$ [21]. Postula-se que a média aritmética do $\tilde{q}$ -logaritmo do inverso da probabilidade (surpresa) é proporcional à entropia de Tsallis $S_{\tilde{q}}$ [5, 22]. Da Eq. 1.74:

$$\langle \ln_{\tilde{q}}(X) \rangle_A = \frac{1}{n} \ln_{\tilde{q}} \left(\prod_{i=1}^n \otimes x_i \right) = \frac{\langle X^{\tilde{q}} \rangle_A - 1}{\tilde{q}}. \quad (1.86)$$

Fazendo $x_i = p_i^{-1}$ e $\langle X^{\tilde{q}} \rangle_A = \sum_{i=1}^W p_i x_i^{\tilde{q}} = \sum_{i=1}^W p_i^{1-\tilde{q}}$, temos que:

$$\left\langle \ln_{\tilde{q}} \frac{1}{p_i} \right\rangle_A = \frac{\sum_{i=1}^W p_i^{1-\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} = \frac{S_{\tilde{q}}}{K_B}, \quad (1.87)$$

onde K_B é a constante de Boltzmann. A entropia $S_{\tilde{q}}$ se reduz à entropia de Boltzmann-Gibbs para $\tilde{q} = 0$ e se todos os estados i forem igualmente acessíveis, assim, $p_i = 1/W$ e $S_{\tilde{q}}/K_B = \ln_{\tilde{q}} W$.

É interessante ressaltar que a entropia generalizada foi postulada por Tsallis na Ref. [5]. Todo o desenvolvimento da mecânica estatística não-extensiva e da álgebra q -generalizada está baseado nesse postulado. Entretanto, como mostrado neste Capítulo, esses resultados podem ser obtidos a partir de argumentos puramente geométricos.

1.7.2 Taxas compostas de juros

Consideremos agora a evolução de um capital em uma conta de poupança, com uma quantia inicial x_0 , sujeita a uma taxa de juros r_i por um intervalo de tempo Δt . Após o primeiro intervalo de tempo, a quantia passa a ser $x_1 = x_0(1 + r_1)$ e, após dois intervalos de tempo, a quantia passa a $x_2 = x_1(1 + r_2) = x_0(1 + r_1)(1 + r_2)$. A taxa de juros efetiva nestes dois intervalos é: $r^{(2)} = x_2/x_0 - 1 = r_1 + r_2 + r_1 r_2 = r_1 \oplus_1 r_2$. Note que $r^{(1)} = r_1$.

Após o n -ésimo intervalo de tempo, a quantia inicial passa a ser $x_n = x_0 \prod_{i=1}^n (1 + r_i)$. Os juros efetivos após esse intervalo são:

$$r^{(n)} = \frac{x_n}{x_0} - 1 = \prod_{i=1}^n (1 + r_i) - 1 = \sum_{i=1}^n \oplus_1 r_i . \quad (1.88)$$

Desta forma, é possível generalizar o resultado obtido inicialmente na Ref. [13]. Taxas de juros compostos se tornam grandezas extensivas utilizando o operador $\tilde{q}$ -soma, para $\tilde{q} = 1$.

Seja a variável a_i uma quantia de depósito ($a_i > 0$) ou retirada ($a_i < 0$) no intervalo de tempo i na conta poupança considerada, de modo que $a_0 = x_0$. Neste caso, temos que a quantia obtida após n -ésimo intervalo de tempo é:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=k+1}^n \oplus_1 r_i . \quad (1.89)$$

Neste resultado, vemos a extensividade simples ($\tilde{q} = 0$) da quantia a_i ponderada pela taxa de juros, que é não-trivialmente extensiva ($\tilde{q} = 1$).

1.8 Conclusão

Neste capítulo apresentamos as generalizações das funções logaritmo natural e exponencial com base em argumentos geométricos. As funções $\tilde{q}$ -logaritmo e $\tilde{q}$ -exponencial foram utilizadas para generalizar outras funções usuais: as trigonométricas circulares e hiperbólicas, além da operação fatorial. Uma vez que o $\tilde{q}$ -logaritmo e a $\tilde{q}$ -exponencial não são funções trivialmente extensivas, foi necessário redefinir os operadores aritméticos de modo a reobter a extensividade. Essa redefinição nos forneceu os operadores $\tilde{q}$ -soma e $\tilde{q}$ -produto, que, por sua vez, permitiram obter os operadores $\tilde{q}$ -subtração, $\tilde{q}$ -divisão e $\tilde{q}$ -potência. A utilização repetida dos operadores $\tilde{q}$ -soma e $\tilde{q}$ -produto nos levou à definição dos operadores $\tilde{q}$ -somatório e $\tilde{q}$ -produtório, respectivamente. Estes dois operadores estão relacionados com as médias aritmética e geométrica, respectivamente, de um conjunto de valores de uma determinada grandeza. Finalmente, mostramos duas aplicações dos operadores $\tilde{q}$ -produtório e $\tilde{q}$ -somatório, no cálculo da entropia generalizada de Tsallis e na composição de taxas de juros, respectivamente.

2 *Funções Densidade de Probabilidade Generalizadas*

No Cap. 1, mostramos como é possível obter a generalização a um parâmetro da função logarítmica integrando hipérboles assimétricas. Também mostramos que a função resultante admite inversão, resultando na função exponencial generalizada. Neste Capítulo, mostramos que essas funções permitem generalizar algumas funções densidade de probabilidade (pdf) que são amplamente utilizadas no estudo de sistemas complexos. Uma distribuição de postos pode ser convenientemente descrita por meio da função exponencial generalizada. Finalmente, mostramos que a generalização das funções exponenciais estendidas (*stretched exponential*) de uma e duas caudas tem como casos particulares várias distribuições muito conhecidas, além de algumas novas. Como casos particulares, é possível obter a função erro generalizada, as pdfs de Zip-Mandelbrot, gaussiana generalizada e de Laplace. Os momentos e as funções acumuladas dessas distribuições também podem ser obtidas analiticamente.

A conveniência de generalizar a função logarítmica tem chamado a atenção dos pesquisadores há muito tempo [23] e, particularmente, nos últimos anos [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Em Física, várias generalizações a um, dois ou três parâmetros da função logarítmica foram propostos em diversos contextos, como mostrados no Cap. 1. Essas generalizações encontram aplicação nos mais diversos campos, como, por exemplo, na psicofísica [30, 31], na neurofísica [31, 32, 33], na econofísica [31, 34, 35], em redes complexas [36, 37], na dinâmica de populações [38, 39], etc. Neste capítulo, mostraremos que a função exponencial estendida generalizada, se escrita na forma de uma pdf, é útil na generalização de uma grande quantidade de pdf de uma ou duas caudas que são amplamente utilizadas no estudo de sistemas complexos.

2.1 Distribuições do tipo Beta

Inicialmente, consideremos variáveis aleatórias discretas, em particular, sua distribuição de posto. É possível mostrar que a distribuição de postos obtida por Naumis e Cocho [40] é convenientemente descrita pela função $\tilde{q}$ -exponencial. Dessa forma, vamos mostrar que podemos quantificar os efeitos de tamanho finito. Esta distribuição de postos é muito confiável, visto

que possui um modelo microscópico subjacente e foi validado por um grande número de dados experimentais [40].

Para ajustar simultaneamente o início, o meio e a cauda de distribuições experimentais de postos de sistemas complexos, Naumis e Cocho [40] consideraram N subsistemas independentes com um grande número de estados internos. O posto r de uma grandeza do sistema dependente dos estados iniciais dos subsistemas decai como uma função do tipo beta com dois parâmetros livres:

$$f(r) = K \left[1 - \frac{r}{(R+1)} \right]^\beta r^{-\alpha}, \quad (2.1)$$

onde

$$K = \frac{1}{\sum_{r=1}^N [1 - r/(R+1)]^\beta r^{-\alpha}}, \quad (2.2)$$

com R sendo o valor máximo de r ($R \leq N$), K o fator de normalização e o par α e β de parâmetros livres. Como notado pelos autores, se $R \gg 1$, então $K \approx 1/B(1-\alpha, 1+\beta)$, onde $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ é a função beta [16].

Observamos que os efeitos de tamanho finito são descritos pelo fator

$$\left[1 - \frac{r}{(R+1)} \right]^\beta \approx 1 - \beta \left(\frac{r}{R} \right) \approx e^{-r/r_0}, \quad (2.3)$$

para $R \gg r$ com $r_0 = R/\beta$. Desta forma, temos que a distribuição de postos de $f(r)$ é, na verdade, uma generalização da técnica padrão de multiplicar uma lei de potência ($r^{-\alpha}$) por um corte exponencial: $f(r) \propto r^{-\alpha} e^{-r/r_0}$.

Fazendo $[1 - r/(R+1)]^\beta = [1 - (1/\beta)\beta r/(R+1)]^\beta = \exp_{1/\beta}[-\beta r/(R+1)]$, então:

$$f(r) = \frac{K}{r^\alpha} \exp_{1/\beta} \left[\frac{-\beta r}{R+1} \right] = \frac{K}{r^\alpha} \left[\exp_1 \left(\frac{-r}{R+1} \right) \right]^\beta, \quad (2.4)$$

que mostra que a função $\tilde{q}$ -exponencial pode considerar explicitamente os efeitos de tamanho finito. O corte exponencial é reobtido quando R e β crescem, mas R deve crescer mais rapidamente que β , de modo que $R \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow \infty$, mas mantendo $\beta/R \rightarrow 0$.

2.2 Funções e processos especiais

Nesta Seção, mostramos que a função de Zipf-Mandelbrot, característica de sistemas complexos, pode ser escrita em termos da $\tilde{q}$ -exponencial. Elevando o argumento da $\tilde{q}$ -exponencial a uma potência dada, obtem-se a função exponencial estendida generalizada. Finalmente, obtemos o processo (equação diferencial) cuja solução é a função exponencial estendida generali-

zada.

2.2.1 Função de Zipf-Mandelbrot

O envelope de uma típica distribuição de postos de um sistema complexo pode ser bem descrito pela função de Zipf-Mandelbrot [41], que pode ser escrita em termos da função $\tilde{q}$ -exponencial:

$$P_{\tilde{q},\alpha,A}(x) = \frac{d}{(c+x)^\gamma} = \frac{A}{\exp_{\tilde{q}}(x/\alpha)} = A \exp_{-\tilde{q}}\left(\frac{-x}{\alpha}\right), \quad (2.5)$$

com $\tilde{q} = 1/\gamma$, $\alpha = c/\gamma$ e $A = d/c^\gamma$.

É importante ressaltar que a Eq. 2.5 apresenta outra aplicação interessante em espectroscopia luminescente dependente do tempo. Neste caso, o processo de relaxação é conhecido como função de decaimento de Becquerel [42].

2.2.2 Função exponencial estendida generalizada

A função exponencial estendida generalizada (ou $\tilde{q}$ -exponencial estendida) pode ser construída aplicando uma deformação no argumento da Eq. 2.5:

$$P_{\tilde{q},\alpha,\beta,A}(x) = P_{\tilde{q},\alpha,A}(x^{1/\beta}) = \frac{d}{(d+x^{1/\beta})^\gamma} = A \exp_{-\tilde{q}}\left(\frac{-x^{1/\beta}}{\alpha}\right). \quad (2.6)$$

A função exponencial estendida tradicional, também conhecida como função de Kohlrausch [43, 44, 45], é obtida da Eq. 2.6 no limite de $\tilde{q} \rightarrow 0$. A função exponencial estendida tradicional tem sido utilizada para descrever processos de relaxação em espectroscopia luminescente dependente do tempo [45]. Apesar disso, uma generalização do tipo $e^{\beta/a} e^{-\exp_{1/\beta}(x/\alpha)/a}$ parece ser mais conveniente no ajuste de dados experimentais [46]. Neste caso, é importante ressaltar que a $\tilde{q}$ -exponencial aparece como o argumento de uma função exponencial tradicional.

A função exponencial estendida também pode ser obtida pela solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{-x^{1/\beta-1}y(x)}{\alpha\beta}, \quad (2.7)$$

que pode ser reescrita em termos da função logarítmica (variação relativa):

$$\frac{d \ln y(x)}{dx} = -\frac{x^{1/\beta-1}}{\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

Substituindo a função logaritmica da Eq. 2.8 pela função $\tilde{q}$ -logaritmo, obtemos:

$$\frac{d \ln_{-\tilde{q}} y(x)}{dx} = - \frac{x^{1/\beta-1}}{\alpha\beta}, \quad (2.9)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{dy(x)}{dx} = - \frac{x^{1/\beta-1}}{\alpha\beta} y^{1+\tilde{q}}(x), \quad (2.10)$$

que é um caso particular da equação de Bernoulli:

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)y^{1+\tilde{q}}(x), \quad (2.11)$$

com $p(x) = 0$ e $q(x) = -x^{1/\beta-1}/(\alpha\beta)$, e cuja solução é a função exponencial estendida generalizada da Eq. 2.6.

2.3 Funções densidade de probabilidade

Nesta Seção, consideramos o fator $A > 0$ e o fato da Eq. 2.6 ser não-negativa para escrever a generalização da pdf exponencial estendida e estudar suas propriedades. Consideramos as distribuições de uma e de duas caudas, obtemos uma pdf conhecida (a gaussiana generalizada) e outras novas (função de erro generalizada e a pdf generalizada de Laplace) como casos particulares.

2.3.1 Uma cauda

Se os valores de uma variável independente x forem limitados a valores não-negativos (ou, alternativamente, não positivos) pode-se utilizar uma pdf de uma cauda. Considerando a generalização da pdf exponencial estendida, podemos obter analiticamente sua função acumulada e seus momentos. Desta pdf, obtém-se, como casos particulares, a função erro generalizada e a pdf de Zipf-Mandelbrot.

O fator de normalização A da Eq. 2.6 é:

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty dt \exp_{-\tilde{q}} \left(\frac{-t^{1/\beta}}{\alpha} \right) = \beta \left(\frac{\alpha}{\tilde{q}} \right)^\beta B \left(\beta, \frac{1}{\tilde{q}} - \beta \right). \quad (2.12)$$

A integral da Eq. 2.12 não diverge apenas se $0 < \tilde{q} < 1$, $0 < \beta < 1/\tilde{q}$ e $\alpha > 0$. Assim,

obtém-se a pdf exponencial estendida generalizada:

$$P_{\tilde{q},\alpha,\beta}^{(1)}(x) = \frac{(\tilde{q}/\alpha)^\beta}{\beta B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta)} \exp_{-\tilde{q}} \left[-\frac{x^{1/\beta}}{\alpha} \right]. \quad (2.13)$$

Para os propósitos deste trabalho, é mais conveniente escrever $a = (\alpha\beta)^\beta > 0$:

$$P_{\tilde{q},a,\beta}^{(1)}(x) = \frac{(\tilde{q}\beta)^\beta}{a\beta B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta)} \exp_{-\tilde{q}} \left[-\beta \left(\frac{x}{a} \right)^{1/\beta} \right], \quad (2.14)$$

cujos comportamentos estão ilustrados nas Figs. 2.1 e 2.2.

Figura 2.1: Comportamento da Eq. 2.14 em função de: (a) x e $\tilde{q}$, com $\beta = 1/2$ e $a = 1$; (b) x e β , com $\tilde{q} = 1/5$ e $a = 1$; (c) $\tilde{q}$ e β , com $x = 1$ e $a = 1$.

À medida que $\tilde{q} \rightarrow 0$, $B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta) \approx \tilde{q}^\beta \Gamma(\beta)$, desde que $1/\tilde{q} \gg \beta$, obtém-se a função exponencial estendida $P_{0,a,\beta}^{(1)}(x) = \beta^\beta e^{-\beta(x/a)^{1/\beta}} / [a\beta \Gamma(\beta)]$ ou $P_{0,\alpha,\beta}^{(1)}(x) = e^{-x^{1/\beta}/\alpha} / [\alpha^\beta \beta \Gamma(\beta)]$.

Figura 2.2: Comportamento da Eq. 2.14 em função de x : (a) com $\beta = 1/2$ e $a = 1$ para vários valores de $\tilde{q}$ (Projeção da Fig. 2.1a); (b) com $\tilde{q} = 1/5$ e $a = 1$ para vários valores de β (Projeção da Fig. 2.1b).

A função acumulada da Eq. 2.14 é:

$$F_{\tilde{q},a,\beta}^{(1)}(x) = \int_0^x dt P_{\tilde{q},a,\beta}^{(1)}(t) \quad (2.15)$$

$$= \frac{x}{A} {}_2F_1\left(\beta, \frac{1}{\tilde{q}}; \beta + 1; -\frac{\tilde{q}x^{1/\beta}}{\alpha}\right) \quad (2.16)$$

onde

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

é a função hipergeométrica [16] e

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

é o símbolo de Pochhammer.

Os momentos de x são:

$$\langle x^n \rangle_{\tilde{q},a,\beta} = \left[\frac{a}{(\tilde{q}\beta)^\beta} \right]^n \frac{B[(n+1)\beta, 1/\tilde{q} - (n+1)\beta]}{B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta)}, \quad (2.17)$$

onde se nota que eles são finitos apenas se $\tilde{q} < 1/[(n+1)\beta]$.

Se $\tilde{q} < 1/(3\beta)$, a média e a variância são finitos e dados, respectivamente, por:

$$\langle x \rangle_{\tilde{q},a,\beta} = \left(\frac{\alpha}{\tilde{q}} \right)^\beta \frac{B(2\beta, 1/\tilde{q} - 2\beta)}{B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta)} \quad (2.18)$$

$$\frac{\sigma_{\tilde{q},a,\beta}^2}{\langle x \rangle_{\tilde{q},a,\beta}^2} = \frac{B(3\beta, 1/\tilde{q} - 3\beta)B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta)}{B^2(2\beta, 1/\tilde{q} - 2\beta)} - 1. \quad (2.19)$$

Note que a razão $\sigma_{\tilde{q},a,\beta}^2 / \langle x \rangle_{\tilde{q},a,\beta}^2$ depende apenas de β e $\tilde{q}$, mas não de a .

Valores particulares de β permitem a $\tilde{q}$ -generalização da função erro e da pdf de Zipf-Mandelbrot.

2.3.1.1 Função erro generalizada

Para generalizar a função erro, vamos considerar $\beta = 1/2$ e $a = \beta^\beta$ (ou $\alpha = 1$) na Eq. 2.16, assim:

$$\text{erf}_{\tilde{q}}(x) = F_{\tilde{q},1/\sqrt{2},1/2}^{(1)}(x) \quad (2.20)$$

$$= \frac{2\sqrt{\tilde{q}}}{B(1/2, 1/\tilde{q} - 1/2)} \int_0^x dt \exp_{-\tilde{q}}(-t^2). \quad (2.21)$$

Fazendo $\tilde{q} \rightarrow 0$, temos $B(1/2, 1/\tilde{q} - 1/2) = \sqrt{\tilde{q}\pi}$ e reobtemos a função erro tradicional: $\text{erf}_0(x) = \text{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x dt e^{-t^2}$.

Uma forma alternativa de obter a Eq. 2.21 pode ser encontrada na Ref. [47].

2.3.1.2 PDF de Zipf-Mandelbrot

Para $\beta = 1$ na Eq. 2.13, obtém-se a pdf de Zipf-Mandelbrot:

$$P_{\tilde{q},\alpha,1}^{(1)}(x) = \frac{1-\tilde{q}}{\alpha} \exp_{-\tilde{q}}\left(\frac{-x}{\alpha}\right) = \frac{1-\tilde{q}}{\alpha} \frac{1}{(1+\tilde{q}x/\alpha)^{1/\tilde{q}}}. \quad (2.22)$$

cuja média e variância são, respectivamente:

$$\langle x \rangle_{\tilde{q},\alpha,1} = \frac{\alpha}{1-2\tilde{q}} \quad (2.23)$$

$$\frac{\sigma_{\tilde{q},\alpha,1}^2}{\langle x \rangle_{\tilde{q},\alpha,1}^2} = \frac{\tilde{q}-1}{3\tilde{q}-1}, \quad (2.24)$$

que é finita para $0 \leq \tilde{q} < 1/3$. Sua função acumulada pode ser obtida a partir da Eq. 2.16:

$$F_{\tilde{q},a,1}^{(1)}(x) = 1 - \frac{1}{[\exp_{\tilde{q}}(x/a)]^{1-\tilde{q}}} = 1 - \tilde{F}_{\tilde{q},a,1}^{(1)}(x), \quad (2.25)$$

onde a distribuição da cauda superior é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\tilde{q},a,1}^{(1)}(x) &= \int_x^\infty dt P_{\tilde{q},a,1}^{(1)}(t) = \left(1 + \tilde{q} \frac{x}{a}\right) \exp_{-\tilde{q}}\left(\frac{-x}{a}\right) \\ &= \left[\exp_{-\tilde{q}}\left(\frac{-x}{a}\right)\right]^{1-\tilde{q}} = \left[\exp_{\tilde{q}}\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\tilde{q}-1}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

que se ajusta melhor a dados reais do que a própria pdf (Eq. 2.22).

2.3.2 Duas caudas

Se o domínio da variável independente considerada é ilimitado, é interessante considerar seu módulo $|x|$ na Eq. 2.14, obtendo-se, dessa forma, uma pdf simétrica em relação ao eixo $x = 0$. Note que, neste caso, o fator de normalização deve ser metade daquele obtido anteriormente¹. A pdf exponencial estendida generalizada de duas caudas é, então:

$$P_{\tilde{q},a,\beta}^{(2)}(x) = \frac{(\tilde{q}\beta)^\beta}{2a\beta B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta)} \exp_{-\tilde{q}} \left[-\beta \left(\frac{|x|}{a} \right)^{1/\beta} \right], \quad (2.27)$$

que é a função conveniente para uso em ondeletas [48]. Sua função acumulada é:

$$F_{\tilde{q},a,\beta}^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn}(x) F_{\tilde{q},a,\beta}^{(1)}(|x|) \right], \quad (2.28)$$

onde $F_{\tilde{q},a,\beta}^{(1)}(x)$ é dada pela Eq. 2.16.

Devido à simetria em relação a $x = 0$, os momentos ímpares desta pdf se anulam $\langle x^{2n+1} \rangle = 0$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Já os momentos pares $\langle x^{2n} \rangle$ são finitos somente se $\tilde{q} < 1/[(2n+1)\beta]$:

$$\langle x^{2n} \rangle_{\tilde{q},a,\beta} = \left[\frac{a}{(\tilde{q}\beta)^\beta} \right]^{2n} \frac{B[(1+2n)\beta, 1/\tilde{q} - (1+2n)\beta]}{B(\beta, 1/\tilde{q} - \beta)}. \quad (2.29)$$

A seguir, mostraremos a pdf gaussiana generalizada como um caso particular da Eq. 2.27. Também mostraremos como generalizar a pdf de Laplace como outro caso particular da mesma equação e calcularemos as funções características de cada um desses casos particulares.

2.3.2.1 PDF gaussiana generalizada

A pdf exponencial estendida generalizada de duas caudas (Eq. 2.27) apresenta dois casos limites especialmente interessantes: a pdf gaussiana generalizada e a pdf de Cauchy (lorentziana).

A pdf gaussiana generalizada ($\tilde{q}$ -gaussiana) ocorre quando $\beta = 1/2$ [19]:

$$G_{\tilde{q},a}(x) = \frac{\sqrt{\tilde{q}} \Gamma(1/\tilde{q})}{\Gamma(1/\tilde{q} - 1/2)} \frac{\exp_{-\tilde{q}}[-(x/a)^2/2]}{\sqrt{2\pi a^2}}. \quad (2.30)$$

É interessante ressaltar que a Eq. 2.30 é a solução da equação de difusão generalizada,

¹Isto é necessário visto que, devido à simetria, o domínio é o dobro do caso anterior.

apresentada no Cap. 4. Devido à simetria, todos os momentos ímpares são nulos. Os momentos pares são dados pela Eq. 2.29:

$$\langle x^{2n} \rangle_{\tilde{q},a,1/2} = \left(\frac{2a^2}{\tilde{q}} \right)^n \frac{\Gamma(1/2+n)\Gamma(1/\tilde{q}-1/2-n)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/\tilde{q}-1/2)}. \quad (2.31)$$

e a variância é finita somente para $\tilde{q} < 2/3$:

$$\sigma_{\tilde{q},a}^2 = \langle x^2 \rangle_{\tilde{q},a} = \frac{2a^2}{2-3\tilde{q}}. \quad (2.32)$$

Fazendo $a \gg b$, temos que $\Gamma(a+b)/\Gamma(a) = a^b$, quando $\tilde{q} \rightarrow 0$ na Eq. 2.30, $\Gamma(1/\tilde{q})/\Gamma(1/\tilde{q}-1/2) = 1/\tilde{q}^{1/2}$ obtém-se uma gaussiana, com variância a^2 :

$$G_{0,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-(x/a)^2/2}, \quad (2.33)$$

como caso particular. Outro caso particular ocorre quando $\tilde{q} = 1$, fornecendo a função lorentziana (pdf de Cauchy):

$$G_{1,a}(x) = \frac{1}{\pi a \sqrt{2} [1 + (x/a)^2/2]}.$$

A função característica da Eq. 2.30 tem uma forma analítica fechada:

$$\begin{aligned} p_{\tilde{q},a,1/2}(k) &= \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx G_{\tilde{q},a}(x) e^{ikx} \\ &= \left(\frac{ka\sqrt{2/\tilde{q}}}{2} \right)^{1/\tilde{q}-1/2} \frac{2K_{1/\tilde{q}-1/2}(ka\sqrt{2/\tilde{q}})}{\Gamma(1/\tilde{q}-1/2)}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde $K_\nu(z)$ é a função K -modificada de Bessel [16]:

$$K_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi} z^{\nu+1}} \int_0^\infty \frac{dt \cos t}{[1 + (t/z)^2]^{\nu+1/2}}. \quad (2.35)$$

Para a gaussiana, a Eq. 2.34, fornece outra gaussiana: $p_{0,a}(k) = e^{-a^2 k^2/2}$, mas para a lorentziana fornece uma função de Laplace: $p_{1,a} = e^{-\sqrt{2}a|k|}$.

2.3.2.2 PDF de Laplace generalizada

Para $\beta = 1$ e $\tilde{q} = 0$, a Eq. 2.27 fornece a pdf de Laplace: $P_{0,a,1}^{(2)}(x) = e^{-|x|/a}/(2a)$. Para um $\tilde{q}$ arbitrário, obtemos a pdf de Laplace generalizada:

$$L_{\tilde{q},a}(x) = P_{\tilde{q},a,1}^{(2)}(x) = \frac{1-\tilde{q}}{2a} \exp_{-\tilde{q}} \left(\frac{-|x|}{a} \right), \quad (2.36)$$

cujas função acumulada é dada por:

$$F_{\tilde{q},a,1}^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \tilde{P}_{\tilde{q},a,1}(|x|), \quad (2.37)$$

onde $\tilde{P}_{\tilde{q},a,1}(x)$ é dada pela Eq. 2.22.

Os momentos ímpares da Eq. 2.36 são todos nulos e os pares são finitos para $\tilde{q} < 1/(1+2n)$:

$$\langle x^{2n} \rangle_{\tilde{q},a,1} = \frac{1}{\tilde{q}-1} \left(\frac{a}{\tilde{q}} \right)^{2n} B \left(1+2n, \frac{1}{\tilde{q}} - 2n - 1 \right). \quad (2.38)$$

Sua função característica apresenta uma forma analítica fechada:

$$\begin{aligned} p_{\tilde{q},a,1}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx L_{\tilde{q},a}(x) e^{ikx} = \frac{1-\tilde{q}}{a} \int_0^{\infty} dx \cos(kx) \exp_{-\tilde{q}}(-x/a) \\ &= \frac{1-\tilde{q}}{a} \int_0^{\infty} dx \frac{\cos(kx)}{(1+\tilde{q}x/a)^{1/\tilde{q}}} \\ &= \frac{\pi t_0^{1/\tilde{q}-1} \sin(t_0 + \pi/(2\tilde{q}))}{\sin(\pi/\tilde{q}) \Gamma(1/\tilde{q} - 1)} + {}_1F_2 \left(1; 1 - \frac{1}{2\tilde{q}}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2\tilde{q}}; -\frac{t_0^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $t_0 = ka/\tilde{q}$; ${}_1F_2(a; b_1, b_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ (a)_n / [(b_1)_n (b_2)_n] \} z^n / n!$ é a função hipergeométrica [16] e $(a)_n$ é o símbolo de Pochhammer.

2.4 Conclusão

Neste capítulo mostramos que é possível generalizar a função exponencial estendida a partir da função $\tilde{q}$ -exponencial, definida no Cap. 1. A função $\tilde{q}$ -exponencial estendida tem como casos particulares a função erro generalizada, a pdf de Laplace generalizada e a já conhecida pdf gaussiana generalizada. Além disso, utilizando a $\tilde{q}$ -exponencial, pudemos escrever a função de distribuição de postos obtida por Naumis and Cocho.

Como essas distribuições são soluções de equações diferenciais que descrevem sistemas complexos, a $\tilde{q}$ -generalização permite que vários sistemas diferentes possam ser descritos pelo mesmo processo subjacente.

3 *Modelos Contínuos e Discretos de Crescimento*

Nos Capítulos anteriores, mostramos a generalização das funções logaritmo natural e exponencial e como elas podem ser usadas para generalizar toda uma gama de outras funções. Além disso, mostramos que a função $\tilde{q}$ -exponencial estendida é a solução de um caso particular da Equação de Bernoulli.

Neste Capítulo mostraremos que a função $\tilde{q}$ -logaritmo também podem ser utilizada para generalizar as equações diferenciais que ocorrem no estudo de dinâmicas populacionais de uma espécie e modelos de crescimento. A função $\tilde{q}$ -exponencial é a solução dessas equações diferenciais. A discretização dessas equações diferenciais permite obter modelos discretos de crescimento populacional que, apesar de simples, podem apresentar comportamento extremamente ricos, com duplicação de períodos e caos. Além disso, os modelos discretos permitem modelar competições intraespecíficas do tipo competição por luta (*contest*), em que um estado estacionário é alcançado, e competição ao acaso (*scramble*), que pode levar à extinção da espécie.

A dinâmica de populações é o principal ramo de estudos da Matemática Biológica, que estuda as mudanças de tamanho e composição de idade de populações, além dos processos biológicos e ambientais que influenciam essas mudanças. O crescimento de populações é um dos principais ramos da dinâmica de populações.

Os modelos de crescimento populacional são utilizados para prever o tamanho de uma população em um tempo arbitrário t , $n(t)$, sendo conhecido o tamanho inicial $n_0 = n(t_0)$ dessa população no instante $t_0 \leq t$. O primeiro modelo de crescimento populacional foi proposto por Thomas R. Malthus, em 1798. Nesse modelo, Malthus propunha que a população humana cresceria em progressão geométrica (PG), enquanto que a produção de alimentos seguiria uma progressão aritmética (PA). O modelo de Malthus foi posteriormente ajustado pelos trabalhos de Benjamin Gompertz (1825) e Pierre François Verhulst (1838), que levaram em consideração o efeito do ambiente sobre o crescimento populacional, introduzindo a capacidade de suporte $[n_\infty = n(t \rightarrow \infty)]$, definida como o tamanho máximo de uma população que o ambiente, com

recursos finitos, consegue suportar indefinidamente. Outro parâmetro importante desse modelo é a taxa de crescimento intrínseco (r), definida como a taxa máxima de crescimento de uma população em um ambiente sem limitações. Um modelo mais genérico foi proposto por F. J. Richards (1959) [49], do qual os modelos de Gompertz, Verhulst são casos especiais. Uma descrição detalhada dos modelos contínuos de crescimento populacional é dada pelo modelo Tsoularis e Wallace [50]. O modelo de Tsoularis e Wallace pode ser generalizado utilizando as funções $\tilde{q}$ -logaritmo e $\tilde{q}$ -exponencial. O ajuste adequado dos parâmetros deste modelo generalizado permite obter toda uma gama de modelos contínuos específicos de crescimento populacional como casos particulares.

O modelo logístico tradicional (ou mapa logístico) é obtido pela discretização do modelo de Verhulst e, apesar de simples, apresenta um comportamento extremamente rico, com duplicação de períodos, caos, etc. É possível discretizar o modelo de Richards generalizado de modo a obter um modelo logístico generalizado. Um modelo discreto mais geral é o modelo θ -Ricker [51, 52], que permite descrever as competições intraespecíficas por luta (*contest*) e por acaso (*scramble*). Sua generalização através da função $\tilde{q}$ -exponencial permite obter toda uma gama de modelos discretos de crescimento populacional como casos particulares, inclusive com tipos distintos de competição intraespecífica.

3.1 Modelos contínuos de crescimento

A dinâmica de populações trata da evolução de espécies interagindo entre si e com o ambiente. Os modelos de uma espécie (ou do tipo logístico) são bem descritos pelos modelos de crescimento. Essencialmente, os modelos de crescimento relacionam a *taxa relativa de crescimento* de uma população, $dn(t)/[n(t)dt] = d\ln n(t)/dt$, com $n(t)$ indivíduos de uma dada espécie no instante t à *função de saturação induzida*, $G_{r,n_\infty}(n)$:

$$\frac{d\ln n(t)}{dt} = G_{r,n_\infty}(n) , \quad (3.1)$$

onde $n_\infty = n(\infty)$ é a capacidade de suporte do meio, que corresponde ao valor assintótico da solução estacionária [$d\ln n(t)/dt = G_{r,n_\infty}(n) = 0$], e r é a taxa de crescimento intrínseco. A fim de comparar populações em ambientes diferentes é mais interessante trabalhar com a razão entre o tamanho da população e a capacidade de suporte: $p(t) = n(t)/n_\infty$. Nesta variável, a Eq. 3.1 se torna:

$$\frac{d\ln p(t)}{dt} = G_r(p) . \quad (3.2)$$

Nesta notação, a função de saturação depende apenas de r , $G_r \propto r$. A contribuição ambiental é parte intrínseca da própria variável.

Considere agora o modelo de Malthus. Neste modelo, a população de uma determinada espécie aumenta conforme uma PG $(p_0, p_0k, p_0k^2, \dots, p_0k^t)$, isto é, a variação na população é proporcional à própria população, ou seja, $G_r(p) = r$. A Eq. 3.2 se torna:

$$\frac{d \ln p(t)}{dt} = r, \quad (3.3)$$

cuja solução é facilmente encontrada: $p(t) = p_0 e^{rt}$, com $p_0 = p(0)$. É fácil perceber que neste modelo, a capacidade de suporte é infinita, ou seja, o ambiente não limita o crescimento da população. Desta forma, a população tende a uma explosão demográfica. Como a produção de alimentos não acompanha o crescimento populacional, o modelo prevê que em um determinado instante, a população será devastada pela fome. Esse cenário ficou conhecido como a *catástrofe malthusiana*. Note que o modelo descrito pela Eq. 3.3 é contínuo, embora a descrição original de Malthus seja discreta (em termos de uma progressão geométrica). É possível, entretanto, transformar o caso discreto em contínuo, considerando o termo genérico da PG: $p(t) = p_t = p_0 k^t = e^{\ln(p_0 k^t)} = p_0 e^{rt}$, onde $r = \ln k$.

No séc. XIX, ficou claro que o modelo malthusiano não estava correto, uma vez que não levava em consideração fatores de limitação no crescimento populacional, como guerras, epidemias e catástrofes naturais. Em 1825, Benjamin Gompertz publicou o estudo *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*, no qual apresentou uma lei que descrevia o crescimento geométrico da taxa de mortalidade. Segundo Gompertz, a mortalidade tem duas causas coexistentes: uma, probabilística, que independe de predisposição à morte ou deterioração, e outra a deterioração, ou uma incapacidade para suportar aumento da destruição [53]. O modelo de Gompertz é dado por:

$$\frac{d \ln p(t)}{dt} = -\kappa \ln p. \quad (3.4)$$

Neste modelo, $G_\kappa(p) = -\kappa \ln p$. A solução desta equação é $p(t) = p_0^{\exp(-\kappa t)}$. Este modelo é utilizado ainda hoje no cálculo de seguros de vida [54, 55].

Em 1838, Pierre François Verhulst publicou outro modelo de crescimento populacional, baseado na avaliação de estatísticas disponíveis à época, e introduzindo termos que representam os fatores inibidores do crescimento. Seguindo a hipótese de Malthus, Verhulst postulou que populações pequenas cresceriam geometricamente, uma vez que a oferta de suprimentos era superior à demanda por eles. Quando a demanda e a oferta de suprimentos se equilibrasse, o crescimento populacional seria constante. Finalmente, a demanda por suprimentos excederia

sua oferta, causando um decréscimo no crescimento populacional à mesma taxa do crescimento inicial. A equação de Verhulst é:

$$\frac{d \ln p(t)}{dt} = r(1 - p), \quad (3.5)$$

no qual se nota facilmente que $G_r(p) = r(1 - p)$, e cuja solução é:

$$p(t) = \frac{p_0 e^{rt}}{1 + p_0(e^{rt} - 1)}.$$

Verhulst chamou essa função de “logística”, sem, entretanto, explicar o motivo dessa escolha. Entretanto, parece haver uma conexão com a base logarítmica da função. O termo “logaritmo” foi cunhado por John Napier (1550-1617) a partir do grego *logos* (razão, proporção) e *arithmos* (número). *Logístico* vem do grego *logisticos* (computacional). No séc. XVII, logarítmico e logístico eram sinônimos. Uma vez que são necessários recursos computacionais para prever a necessidade de suprimento no exército, a palavra logística acabou, por extensão, sendo associada à movimentação e ao suprimento de tropas [56].

Na Ref. [57, p. 83], mostra-se que os modelos de Gompertz e Verhulst podem ser generalizados por uma função simples, proposta por Montroll e Badger [58], que, de fato, é exatamente o modelo de Richards¹ [49]:

$$G_\kappa(p) = \kappa \frac{1 - p^{\tilde{q}}(t)}{\tilde{q}}, \quad (3.6)$$

onde $\kappa = r\tilde{q}$.

Fazendo $\tilde{q} = 1$, obtemos o modelo de Verhulst e fazendo $\tilde{q} \rightarrow 0$, o modelo de Gompertz. É interessante ressaltar que κ e r não são exatamente o mesmo parâmetro de crescimento intrínseco, embora estejam linearmente relacionados um com o outro.

Uma descrição mais geral dos modelos de crescimento foi dada recentemente pelo modelo de Tsoularis e Wallace [50, p. 22]. Eles consideraram a função de saturação induzida dada por:

$$G_\kappa(p) = \kappa p^{\alpha-1}(t) \left[\frac{1 - p^{\tilde{q}}(t)}{\tilde{q}} \right]^\gamma, \quad (3.7)$$

onde $\kappa = r\tilde{q}^\gamma n_\infty^{\alpha-1}$. A solução da Eq. 3.2 com a função de saturação induzida acima é dada por:

$$B_{p^{\tilde{q}}(t)} \left(\frac{1-\alpha}{\tilde{q}}, 1-\gamma \right) - B_{p_0^{\tilde{q}}} \left(\frac{1-\alpha}{\tilde{q}}, 1-\gamma \right) = \kappa t, \quad (3.8)$$

onde $B_x(a, b) = \int_0^x dt t^{a-1} (1-t)^{b-1}$ é a função beta incompleta. Dois conjuntos de valores são aceitáveis:

¹O modelo de Richards foi proposto como um modelo empírico para o crescimento de plantas.

1. $\alpha < 1, \tilde{q} > 0$ e $\gamma < 1$,
2. $\alpha > 1, \tilde{q} < 0$ e $\gamma < 1$.

Podemos considerar os seguintes casos especiais deste modelo:

- Para $\gamma = 0$, temos um modelo de crescimento do tipo Zipf-Mandelbrot, com dois casos particulares:
 - exponencial, para $\alpha = 1$ e
 - lei de potência, para $\alpha > 1$.
- Para $\gamma = 1$, temos o modelo de Marusic e Bajzer [59], que generaliza outros modelos de crescimento:
 - se $\tilde{q} = 1 - \alpha$, o modelo generalizado de von Bertalanffy ou
 - se $\alpha = 1$ e $\tilde{q} \geq -1$, o modelo de Richards.
- Para outros valores de γ obtemos:
 - Para $\alpha = 1$ e $\tilde{q} \rightarrow 0$, o modelo hyper-Gompertz $G_{\kappa}(p) = -\kappa \ln^{\gamma} p(t)$.
 - Para $\tilde{q} = 1$, o modelo de Blumberg [60] utilizado para modelar a evolução no tamanho de órgãos ou populações. O modelo de Blumberg se reduz ao modelo hiperbólico para o caso de crescimento regenerativo, se $\gamma = 1 + 1/N$ e $\alpha = 1 - 1/N$ (veja Ref. [61]).
 - Se $\alpha = 1 + \tilde{q}(\gamma - 1)$, o modelo de Tsoularis e Wallace se reduz ao modelo de Turner *et al.*, que admite solução analítica [62].

3.2 Funções $\tilde{q}$ -generalizadas e modelos contínuos de crescimento

A seguir, consideraremos um caso particular da equação de Bernoulli, $[d/dx + p(x)]y(x) = q(x)y^{1-\tilde{q}}(x)$, com $p(x) = 0$ e $q(x) = 1$. Esta equação é conhecida como equação cinética de ordem arbitrária e está relacionada com o modelo hiper-Gompertz. Quando um termo linear é adicionado a esta equação, ela passa a representar o modelo de Richards e, neste caso, podemos dar uma interpretação física para $\tilde{q}$. Se o termo adicionado for não-linear, obtemos a equação que representa os modelos de Marusic-Bajzer. O termo de esforço pode ser incluído considerando o $\tilde{q}$ -logaritmo elevado a uma potência, levando ao modelo de Tsoularis e Wallace.

3.2.1 Modelo de Zipf-Mandelbrot

A derivada da função $\tilde{q}$ -exponencial em relação a x é:

$$\frac{d \exp_{\tilde{q}}(kx)}{dx} = k [\exp_{\tilde{q}}(kx)]^{1-\tilde{q}},$$

de modo que a função $\tilde{q}$ -exponencial é a solução da equação diferencial não linear de primeira ordem [63, 64, 65]:

$$\frac{dy(x)}{dx} = k y^{1-\tilde{q}}(x), \quad (3.9)$$

onde k é uma constante. Em química, esta equação é conhecida como *equação cinética de ordem $1 - \tilde{q}$* . Esta equação não está diretamente relacionada com nenhum modelo de crescimento, mas se considerarmos $y = \ln p$, obteremos o modelo hiper-Gompertz.

A solução da Eq. 3.9 pode ser encontrada reescrevendo-a como [55]:

$$\tilde{q} y^{\tilde{q}-1} \frac{dy}{dx} = \tilde{q} k \Rightarrow \frac{dy^{\tilde{q}}(x)}{dx} = \tilde{q} k,$$

que é linear na variável $v(x) = y^{\tilde{q}}(x)$ e pode ser resolvida:

$$v(x) = \tilde{q} k x + v_0,$$

com as condições iniciais $v_0 = v(0) = y_0^{\tilde{q}}$ e $y_0 = y(0)$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{y(x)}{y_0} = \left(1 + \tilde{q} \frac{x}{x_{\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}} = \exp_{\tilde{q}}\left(\frac{x}{x_{\tilde{q}}}\right), \quad (3.10)$$

com $x_{\tilde{q}} = y_0^{\tilde{q}}/k$.

3.2.2 Modelos de crescimento do tipo Richards

A Eq. 3.9 pode ser generalizada para englobar outras situações interessantes. A equação diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx} = m y(x) + (k - m) y^{1-\tilde{q}}(x), \quad (3.11)$$

tem sido utilizada em modelos de crescimento [59] e em outros contextos [63, 64]. Fatorando $m y(x)$ e fazendo $\tilde{y} = [m/(m - k)]^{1/\tilde{q}} y(x)$, a Eq. 3.11 pode ser escrita como:

$$\frac{d \ln \tilde{y}^{-1}(x)}{dx} = m \tilde{q} \ln_{\tilde{q}} \tilde{y}^{-1}(x), \quad (3.12)$$

que remete ao modelo de Richards, como veremos.

3.2.2.1 Modelo de crescimento de Richards

Na Eq. 3.12, chamando a variável independente x de t , fazendo $p = 1/\tilde{y}$ e $m\tilde{q} = -\kappa$, podemos reescrevê-la como:

$$\frac{d \ln p(t)}{dt} = -\kappa \ln_{\tilde{q}} p(t) , \quad (3.13)$$

cujas solução é dada por

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{\exp_{\tilde{q}}[\ln_{\tilde{q}}(p_0^{-1})e^{-\kappa t}]} = \exp_{-\tilde{q}}[-\ln_{\tilde{q}}(p_0^{-1})e^{-\kappa t}] \\ &= \exp_{-\tilde{q}}[\ln_{-\tilde{q}}(p_0)e^{-\kappa t}] , \end{aligned} \quad (3.14)$$

que é o modelo de crescimento de Richards [49].

A discretização da Eq. 3.13 nos permite uma generalização do mapa logístico diferente daquela obtida no mapa de Feigenbaum. Um estudo inicial dessa equação recursiva foi apresentada na Ref. [38].

Casos particulares Alguns casos particulares das Eqs. 3.13 e 3.14 podem ser obtidos:

- Se $\tilde{q} = 1$, obtém-se o modelo de Verhuslt (equação logística):

$$\frac{d \ln p}{dt} = -\kappa \ln_1(p) = \kappa (1 - p) , \quad (3.15)$$

cujas solução é:

$$p(t) = \exp_{-1}[(1 - p_0^{-1})e^{-\kappa t}] = \frac{1}{1 + (p_0^{-1} - 1)e^{-\kappa t}} , \quad (3.16)$$

onde $p_0 = n_0/n_\infty$, com $n_0 = n(0)$ sendo o tamanho inicial da população e $n(\infty) = n_\infty$ a capacidade de suporte.

- Se $\kappa > 0$, então para $t \gg 1/\kappa$, $p(\infty) = 1$, ou seja, a capacidade de carga é um atrator.
- Se $\kappa < 0$, a capacidade de carga n_∞ se torna um repulsor e as soluções $p(t) = 1/[1 + (p_0^{-1} - 1)e^{|\kappa|t}] = \exp_{-1}[(1 - p_0^{-1})e^{|\kappa|t}]$, podem tanto convergir, para $n_0 < n_\infty$ (ou seja, $p_0 < 1$) ou divergir, caso contrário. Essa divergência significa que a população se torna não-limitada para tempos maiores que $t^* = \ln(1 - p_0^{-1})/\kappa$. Este tempo característico pode ser obtido igualando o denominador da Eq.(3.16) a zero.
- À medida que $n_\infty \rightarrow \infty$, então $p \rightarrow 0$, e obtém-se:

$$\frac{d \ln p}{dt} = \kappa , \quad (3.17)$$

que é o modelo de Malthus, cuja solução é bem conhecida:

$$p(t) = p_0 e^{\kappa t} . \quad (3.18)$$

- Se $\tilde{q} = 0$, obtém-se o modelo de Gompertz:

$$\frac{d \ln p}{dt} = -\kappa \ln p , \quad (3.19)$$

cuja solução é dada por:

$$p(t) = p_0^{\frac{1}{1-\kappa}} e^{-\kappa t} . \quad (3.20)$$

- Se $\tilde{q} = -1$, obtém-se o modelo de crescimento monomolecular, também conhecido como modelo de crescimento de Mitscherlich [50, p. 33]:

$$\frac{dp(t)}{dt} = k[1 - p(t)] , \quad (3.21)$$

cuja solução é:

$$p(t) = 1 - (1 - p_0)e^{-kt} . \quad (3.22)$$

Observe que o modelo de Mitscherlich (Eq. 3.21), que utiliza a taxa de crescimento absoluto (dp/dt), difere fundamentalmente do modelo de Verhulst (Eq. 3.15), que utiliza a taxa de crescimento relativo ($d \ln p/dt$).

3.2.2.2 Modelo de Richard-Schaefer

Se pudermos inserir ou retirar indivíduos de uma dada população em intervalos fixos de tempo e a uma taxa ε , chamada de *taxa de esforço*, então temos o modelo de Schaefer [54, 55]:

$$\frac{d \ln p}{dt} = -\kappa \ln_{\tilde{q}}(p) - \varepsilon , \quad (3.23)$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} p_{\varepsilon, \kappa}(t) &= \frac{\exp_{\tilde{q}}(\varepsilon)}{\exp_{\tilde{q}}\{\ln_{\tilde{q}}[\exp_{\tilde{q}}(\varepsilon)p_0^{-1}]e^{-(\kappa-\tilde{q}\varepsilon)t}\}} \\ &= \exp_{\tilde{q}}(\varepsilon) \exp_{-\tilde{q}}\{-\ln_{\tilde{q}}[\exp_{\tilde{q}}(\varepsilon)p_0^{-1}]e^{-(\kappa-\tilde{q}\varepsilon)t}\} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, quando $\varepsilon = 0$, reobtemos a Eq. 3.14.

3.2.2.3 Modelo microscópico

A competição entre células pela replicação e as interações inibitórias, que podem ser modeladas por interações de longo alcance entre elas, fornecem um mecanismo microscópico interessante para a obtenção do modelo de Richards [66]. As interações de longo alcance dependem da distância (r) entre duas células como uma lei de potência r^γ . Além disso, as células têm uma estrutura fractal caracterizada por uma dimensão fractal D_f . Utilizando a Eq. 1.10, pode-se reescrever a Eq. 7 da Ref. [66] como:

$$\frac{d \ln n(t)}{dt} = \langle G \rangle - J \omega \ln_{\tilde{q}} \left[\frac{D_f n(t)}{\omega} \right], \quad (3.25)$$

onde ω é uma constante relacionada à geometria do problema e $\tilde{q} = 1 - \gamma/D_f$ e $\langle G \rangle$ é uma taxa de carregamento. Aqui, o parâmetro $\tilde{q}$ adquire um significado físico relacionado ao alcance (γ) da interação e à dimensão fractal (D_f) da estrutura celular. Esta interpretação física de $\tilde{q}$ somente é possível devido às características subjacentes à descrição microscópica do modelo de Richards.

Também é possível obter casos particulares do modelo microscópico apresentado na Ref. [66]. Se todas as células interagem com a mesma intensidade para um D_f fixo ($D_f \neq 0$), então $\gamma = 0$ e $\tilde{q} = 1$, assim as Eqs. 3.13 e 3.14 fornecem o modelo de Verhulst. Outra forma de obter o modelo de Verhulst é fixando o alcance de interação entre as células $\gamma \neq 0$ e considerar dimensões fractais grandes ($D_f \rightarrow \infty$). Ambos os casos ilustram o fato de que o modelo de Verhulst é um modelo de campo médio. Se o alcance das interações celulares for comparável à dimensão fractal da estrutura, então $\gamma = D_f$ e $\tilde{q} = 0$, e as Eqs. 3.13 e 3.14 fornecem o modelo de Gompertz. Se $\gamma > D_f$, então $\tilde{q} < 0$ e a Eq. 3.14 se torna: $p(t) = 1 + \ln_{|\tilde{q}|}(p_0)e^{-\kappa t}$, para $\kappa t \gg 1$, o que resulta em um comportamento exponencial. Em particular, se $\gamma = 2D_f$, obtém-se o modelo de Mitscherlich (Eq. 3.22).

3.2.3 Modelo de crescimento de Marusic e Bajzer

Proposta por M. Marusic e Z. Bajzer [59] a equação

$$\frac{dy(x)}{dx} = ay^\alpha(x) + by^\beta(x), \quad (3.26)$$

com $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, fornece a base para modelos de dinâmica populacional de uma espécie, generalizando modelos de crescimento tradicionais.

Ressaltamos que a Eq. 3.26, com $a > 0$ e $b > 0$ foi estudada inicialmente na Ref. [67], que

trata de leis quantitativas em metabolismo e crescimento.

Uma derivação mais fundamental da Eq. 3.26 pode ser encontrada na Ref. [68, 69], no contexto da morfogênese alométrica. Marusic e Bajzer consideraram parâmetros reais arbitrários para resolver a Eq. 3.26.

É interessante notar que a Eq. 3.26 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\frac{dy(x)}{dx} &= ay^\alpha(x) + \frac{by^\alpha(x)(\beta - \alpha)[y^{\beta-\alpha}(x) - 1 + 1]}{(\beta - \alpha)} \\ &= \tilde{a}y^\alpha(x) + \tilde{b}y^\alpha(x)\ln_{\beta-\alpha}[y(x)]\end{aligned}\quad (3.27)$$

com $\tilde{a} = a + b$ e $\tilde{b} = b(\beta - \alpha)$. Desta forma, generaliza-se a Eq. 2 da Ref. [59]. A mesma equação é reobtida para o caso particular $\beta \rightarrow \alpha$.

Fazendo $a = m$, $b = k - m$, $\alpha = 1 + \tilde{q}'$ e $\beta = 1 + \tilde{q}' - \tilde{q}$ na Eq. 3.26, obtemos:

$$\frac{dy(x)}{dx} = my^{1+\tilde{q}'}(x) + (k - m)y^{1+\tilde{q}'-\tilde{q}}(x). \quad (3.28)$$

Fazendo $\tilde{q}' = 0$, recuperamos a Eq. 3.11. Fatorando $my^{1+\tilde{q}'}(x)$ e fazendo $\tilde{y} = [m/(m - k)]^{1/\tilde{q}}y(x)$, a Eq. 3.28 pode ser reescrita como:

$$\frac{d\ln_{\tilde{q}'}\tilde{y}^{-1}(x)}{dx} = m\tilde{q}\left(\frac{k - m}{m}\right)^{\tilde{q}'/\tilde{q}}\ln_{\tilde{q}}[\tilde{y}^{-1}(x)]. \quad (3.29)$$

Chamando a variável independente de t e fazendo $p = 1/\tilde{y}$ e $m\tilde{q}[(k - m)/m]^{\tilde{q}'/\tilde{q}} = \kappa$, a Eq. 3.29 se torna:

$$\frac{d\ln_{\tilde{q}'}p(t)}{dt} = -\kappa\ln_{\tilde{q}}p(t). \quad (3.30)$$

Esta equação apresenta solução analítica apenas para alguns valores de $\tilde{q}'$. Para $\tilde{q}' = 0$, obtemos o modelo de Richards (Eq. 3.13). Para $\tilde{q} \neq 0$, obtemos outros modelos conhecidos de crescimento como casos limites, como veremos a seguir.

3.2.3.1 Modelo de von Bertalanffy generalizado

Para $\tilde{q}' = \tilde{q}$, temos o modelo generalizado de von Bertalanffy [50, p. 47], e a Eq. 3.30 tem como solução:

$$p(t) = e_{\tilde{q}}[\ln_{\tilde{q}}(p_0)e^{-\kappa t}]. \quad (3.31)$$

Se $\tilde{q} = 1/3$, então $\tilde{q}' = \tilde{q} = 1/3$ e obtém-se o modelo especializado de von Bertalanffy [67].

3.2.3.2 Modelo de Smith

O modelo de Smith [50, p. 35] substitui o termo $1 - p$ do modelo de Verhulst por $1 - (p + a dp/dt)$. A equação resultante é:

$$\frac{d \ln p(t)}{dt} = r \left[\frac{1 - p(t)}{1 + r a p(t)} \right], \quad (3.32)$$

que não pode ser obtida imediatamente da Eq. 3.30, mas de uma aproximação dela, fazendo $\tilde{q} = 1$ e $\tilde{q}' = 1 - 0.473$.

3.2.4 Modelo de crescimento de Tsoularis e Wallace

O modelo de crescimento proposto por A. Tsoularis and J. Wallace [50] (Eq. 3.7) pode ser obtido generalizando a Eq. 3.30:

$$\frac{d \ln_{\tilde{q}'} p(t)}{dt} = \kappa [-\ln_{\tilde{q}} p(t)]^\gamma. \quad (3.33)$$

cujas soluções são dadas pela Eq. 3.8, com $\alpha = 1 - \tilde{q}'$. Para $\gamma = 1$, obtém-se o modelo de Marusic e Bajzer (Eq. 3.30). Para $\gamma \neq 1$, temos outros modelos comuns como casos limite.

O parâmetro γ funciona como uma taxa de esforço. Isso pode ser notado reescrevendo a Eq. 3.33 em termos de uma função $\tilde{q}$ -logaritmo suplementar:

$$\frac{d \ln_{\tilde{q}'} p(t)}{dt} = \tilde{\kappa} \ln_\gamma [-\ln_{\tilde{q}} p(t)] - \tilde{\varepsilon}, \quad (3.34)$$

onde $\tilde{\kappa} = \kappa \gamma$ e $\tilde{\varepsilon} = -\kappa$. Para comparação, veja a Eq. 3.23.

3.2.4.1 Modelo Hyper-Gompertz

Fazendo $\tilde{q}' = \tilde{q} = 0$ na Eq. 3.33, obtém-se o modelo hyper-Gompertz:

$$\frac{d \ln p}{dt} = \kappa [-\ln p]^\gamma. \quad (3.35)$$

Fazendo $y = \ln p$, esta equação se torna a Eq. 3.9, cuja solução é dada por Eq. 3.10. Na variável original, a solução da Eq. 3.35 é:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0^{\exp_{1-\gamma}[-\kappa t / (\ln p_0)^{1-\gamma}]} \\ &= e^{\exp_{1-\gamma}[-\kappa t / (\ln p_0)^{1-\gamma}] \ln(p_0)}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde ressaltamos a presença da função exponencial generalizada no argumento de uma exponencial normal.

3.2.4.2 Modelo de Blumberg

Fazendo $\tilde{q} = 1$ na Eq. 3.33, obtém-se o modelo de Blumberg[60], que foi proposto como modelo para a evolução do tamanho de órgãos:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln_{\tilde{q}'} p}{dt} &= \kappa [-\ln_1(p)]^\gamma \\ \frac{dp}{dt} &= \kappa p^{1-\tilde{q}'} (1-p)^\gamma, \end{aligned} \quad (3.37)$$

que pode ser reescrita como:

$$\int_{p_0}^{p(t)} dp p^{\tilde{q}'-1} (1-p)^{-\gamma} = \kappa t. \quad (3.38)$$

Se $\tilde{q}' > 0$ e $\gamma < 1$, obtém-se uma solução analítica fechada [como na Eq. 3.8, $\alpha = 1 - \tilde{q}'$]:

$$B_{p(t)}(\tilde{q}', 1 - \gamma) - B_{p_0}(\tilde{q}', 1 - \gamma) = \kappa t. \quad (3.39)$$

Note que na Eq. 3.37 para:

- $\gamma = 0$, tem-se a função de saturação induzida do tipo lei de potência $G_\kappa(p) = \kappa p^{1-\tilde{q}'}$ e
- $\gamma = 1 + 1/N$ e $\tilde{q} = 1 - 1/N$, tem-se o *modelo hiperbólico* para crescimento regenerativo (ver Ref. [61]).

3.2.4.3 Modelo de Turner *et al.* (Crescimento genérico)

Na Eq. 3.33, fazendo $\tilde{q}' = \tilde{q}(\gamma - 1)$, obtém-se o modelo de Turner *et al.* [62]:

$$\frac{d \ln p(t)}{dt} = \kappa p^{\tilde{q}(1-\gamma)}(t) [-\ln_{\tilde{q}} p(t)]^\gamma, \quad (3.40)$$

cuja solução é dada por:

$$p(t) = \exp_{-\tilde{q}} \left\{ \ln_{-\tilde{q}}(p_0) \exp_{1-\gamma} [-\kappa t (\ln_{\tilde{q}} p_0^{-1})^{\gamma-1}] \right\}. \quad (3.41)$$

Este modelo apresenta solução analítica devido apenas à escolha adequada de $\tilde{q}'$.

3.2.5 Recuperando os modelos de crescimento

Como se pode notar facilmente, todos os modelos contínuos de crescimentos aqui tratados foram generalizados pela Eq. 3.33. Para recuperá-los individualmente, é necessário escolher os valores apropriados para os parâmetros $\tilde{q}'$, $\tilde{q}$, γ e κ , conforme mostrados na Tab. 3.1. Alguns casos particulares apresentam solução analítica. Estes casos são mostrados graficamente na Fig. 3.1. Pode-se notar que para o modelo de Richards-Schaefer, o valor assintótico é $p_\infty = \exp_{\tilde{q}}(\varepsilon) = \sqrt{0.8} = 0.89 \dots$, devido à taxa de esforço $\varepsilon = -0.1$, ao invés de $p_\infty = 1$.

Modelo	$\tilde{q}'$	$\tilde{q}$	γ	κ	Equação
Malthus (exponencial)	0	*	0	r	$d \ln p / dt = r$
Verhulst (logístico)	0	1	1	r	$d \ln p / dt = r(1 - p)$
Gompertz	0	0	1	*	$d \ln p / dt = -\kappa \ln p$
hyper-Gompertz	0	0	*	*	$d \ln p / dt = \kappa(-\ln p)^\gamma$
Richards	0	*	1	$r\tilde{q}$	$d \ln p / dt = r(1 - p^{\tilde{q}})$
Tsoularis e Wallace	*	*	*	*	$d \ln_{\tilde{q}'} p / dt = \kappa(-\ln_{\tilde{q}} p)^\gamma$
Marusic e Bajzer	*	*	1	*	$d \ln_{\tilde{q}'} p / dt = -\kappa \ln_{\tilde{q}} p$
Mitscherlich (monomolecular)	1	1	1	*	$\ln_1 dp / dt = dp / dt = \kappa(1 - p)$
Blumberg	*	1	*	*	$d \ln_{\tilde{q}'} p / dt = \kappa(1 - p)^\gamma$
Turner <i>et al.</i>	$1 + \tilde{q}(1 - \gamma)$	*	*	*	$d \ln p / dt = \kappa p^{\tilde{q}(1-\gamma)}(-\ln_{\tilde{q}} p)^\gamma$
von Bertalanffy especializado	1/3	1/3	1	*	$d \ln_{1/3} p / dt = -\kappa \ln_{1/3} p$
von Bertalanffy generalizado	$\tilde{q}$	*	1	*	$d \ln_{\tilde{q}} p / dt = -\kappa \ln_{\tilde{q}} p$
Smith	$1 - 0.473$	1	1	*	aproximação

Tabela 3.1: Modelos contínuos de crescimento que podem ser obtidos a partir da Eq. 3.33. Os asteriscos indicam que o parâmetro considerado pode assumir qualquer valor arbitrário dentro de seu domínio.

3.3 Modelos discretos de crescimento

Na seção 3.1, mostramos que as funções logaritmo e exponencial generalizadas são úteis na generalização de modelos contínuos de crescimento. Nesta seção, mostramos que também é possível generalizar a discretização do modelo de Richards (que por sua vez é uma generalização dos modelos de Gompertz e e Verhulst). Este modelo discreto é conhecido como mapa logístico. Em seguida, apresentamos uma generalização do modelo θ -Ricker e determinamos analiticamente seus pontos fixos e a estabilidade deles.

Em seu artigo de 1954, A. J. Nicholson introduziu duas formas de competição entre indivíduos da mesma espécie (competição intraespecífica): a competição por luta (*contest*) e a competição por acaso (*scramble*) [70]. Estas formas de competição diferem entre si pela

Figura 3.1: Modelos de crescimento obtidos a partir da Eq. 3.33, que apresentam solução analítica. As curvas foram obtidas utilizando os seguintes valores $p_0 = 0.001$, $\alpha = 0.1$ e $\varepsilon = -0.1$. Para os parâmetros da Tab. 3.1 cujos valores são arbitrários, foram utilizados os valores $\kappa = 1$, $q = 2$, e $\gamma = 1.5$.

forma como uma população de indivíduos da mesma espécie compartilha um recurso natural limitado. Na competição por acaso, esse recurso é igualmente compartilhado por todos os indivíduos da população, enquanto estiver disponível. Neste caso, existe um tamanho crítico da população n_c , acima do qual a quantidade de recurso é insuficiente para assegurar a sobrevivência da população, levando-a à extinção. Na competição por luta, os indivíduos mais fortes da população asseguram para si a quantidade de recurso necessária para sua sobrevivência individual. Se houver o suficiente para todos, a população cresce, caso contrário, apenas os mais fortes sobrevivem e a população se mantém estável, com tamanho n_∞ .

A partir de dados experimentais, sabe-se que, por vezes, se faz necessária a introdução de outros parâmetros, além da taxa de crescimento intrínseco κ (e às vezes também da capacidade de suporte do meio n_∞), a fim de ajustar o modelo a uma dada população. Um dos modelos discretos mais geral é o modelo θ -Ricker [51, 52]. Este modelo descreve bem a competição por acaso, mas não consegue colocar em uma única formulação os modelos de competição por luta, como os modelos de Hassel [71], de Beverton-Holt [72] e de Maynard-Smith-Slatkin [73].

Nosso principal objetivo nesta seção é mostrar que a Eq. 1.21 é útil na unificação dos modelos discretos de crescimento mais conhecidos em uma equação simples. Para isso, partindo modelo de Richards (Eq. 3.13), mostramos que sua discretização nos leva a um mapa logístico generalizado. Mostramos, a seguir, que as características deste mapa (tais como seus pontos fixos e ciclos) dependem funcionalmente da exponencial generalizada. Curiosamente, o atrator

do mapa pode ser escrito em termos da exponencial generalizada mesmo no caso logístico original. A mesma função exponencial generalizada pode ser utilizada para generalizar o modelo θ -Ricker e para calcular analiticamente seus pontos fixos e sua estabilidade. Finalmente, mostramos a generalização do modelo de Skellam. Estas generalizações permitem obter tanto os modelos de competição por acaso como os por luta mais conhecidos como casos particulares.

3.3.1 Discretização do modelo de Richards

Para discretizar a Eq. (3.13), façamos:

$$\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta t} = -\kappa p_i \left(\frac{p_i^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} \right).$$

Em seguida, apliquemos as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \rho'_{\tilde{q}} &= 1 + \frac{\kappa \Delta t}{\tilde{q}} \\ x_i &= p_i \left(\frac{\rho'_{\tilde{q}} - 1}{\rho'_{\tilde{q}}} \right)^{1/\tilde{q}} \\ \rho_{\tilde{q}} &= \tilde{q} \rho'_{\tilde{q}} \end{aligned}$$

obtendo, finalmente:

$$x_{i+1} = -\rho_{\tilde{q}} x_i \ln_{\tilde{q}} x_i = \frac{\rho_{\tilde{q}} x_i (1 - x_i^{\tilde{q}})}{\tilde{q}}, \quad (3.42)$$

na qual se nota que o parâmetro $\tilde{q}$ mantém a mesma interpretação física do modelo contínuo.

Fazendo $\tilde{q} = 2$, obtemos o mapa cúbico com $r = 1/2$ [74]. Se, $\tilde{q} = 1$ e $\rho_1 = \rho'_1 = 4a$, com $a \in [0, 1]$, obtém-se o *mapa logístico*: $x_{i+1} = 4ax_i(1 - x_i)$, que é o exemplo clássico de um *sistema dinâmico*². Este mapa é obtido a partir da discretização do modelo de Verhulst. Apesar de simples, ele apresenta um comportamento extremamente rico, com duplicação de períodos e caos³ [75, 76]. Por ter o mapa logístico como caso particular, chamamos a Eq. 3.42 de *mapa logístico generalizado*.

Com base na Eq. 3.42, podemos definir a função $f(x) = -\rho_{\tilde{q}} x \ln_{\tilde{q}} x$. É fácil perceber que esta função é estritamente não negativa no intervalo $0 \leq x \leq 1$. O valor máximo da função é

²Um sistema dinâmico é aquele cujo estado varia no tempo.

³Um sistema é dito caótico quando apresenta forte dependência com relação às condições iniciais, ou seja, uma pequena variação nas condições iniciais pode provocar grandes alterações nas condições finais do sistema. Uma forma de verificar a dependência de um sistema em relação às condições iniciais é o expoente de Lyapunov, definido por $\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |\Delta x_0| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \frac{|\Delta x_t|}{|\Delta x_0|}$, onde $|\Delta x_0|$ indica a distância entre as condições iniciais e $|\Delta x_t|$ a distância no instante t . Se $\lambda > 0$, o sistema é considerado caótico.

obtido para:

$$\tilde{x} = \frac{1}{\exp_{\tilde{q}}(1)} = e_{\tilde{q}}^{-1}, \quad (3.43)$$

que é o inverso da base dos logaritmos naturais generalizado (Eq. 1.83). Neste ponto, o valor da função é:

$$\tilde{f} = f(\tilde{x}) = \frac{\rho_{\tilde{q}}}{e_{\tilde{q}} \exp_1(\tilde{q})}. \quad (3.44)$$

Como, no mapa logístico generalizado, $0 \leq x \leq 1$, então é necessário que $0 \leq \tilde{f} \leq 1$, de modo que seja possível a iteração infinita da Eq. 3.42. Dessa forma, o parâmetro $\rho_{\tilde{q}}$ deve ser limitado ao intervalo $0 \leq \rho_{\tilde{q}} \leq \rho_{max}$, onde:

$$\rho_{max} = e_{\tilde{q}} \exp_1(\tilde{q}) = (1 + \tilde{q})^{1+1/\tilde{q}}. \quad (3.45)$$

Um mapa iterado, como o mapa logístico generalizado, pode, eventualmente, apresentar valores x^* tais que $f(x^*) = x^*$. Tais pontos são chamados de *pontos fixos* do mapa. Os pontos fixos do mapa logístico generalizado são:

$$x_1^* = 0, \quad (3.46)$$

$$x_2^* = \exp_{\tilde{q}}\left(-\frac{1}{\rho_{\tilde{q}}}\right). \quad (3.47)$$

O ponto fixo x_1^* é estável para $0 \leq \rho_{\tilde{q}} < \tilde{q}$ e o ponto x_2^* é estável para $\tilde{q} \leq \rho_{\tilde{q}} < \tilde{q} + 2$.

O mapa logístico generalizado também apresenta o comportamento do mapa logístico em relação ao diagrama de bifurcação, como pode ser visto na Fig. 3.2. O detalhe interno da Fig. 3.2 mostra o expoente de Lyapunov em função do parâmetro $\rho_{\tilde{q}}$.

A Fig. 3.3 mostra o diagrama de bifurcação para $\tilde{q} = 1/2, 1$ e 2 . Nesta figura, o eixo das abcissas foi reescalado para $\rho_{\tilde{q}}[-(\tilde{q} + 2)/\tilde{q}]/(\tilde{q}\rho_{max})$, onde ρ_{max} é dado pela Eq. 3.45. Pode-se notar que os diagramas apresentam a mesma estrutura, embora cada uma tenha seus próprios parâmetros de escala. O aumento de $\tilde{q}$ faz com que o diagrama de bifurcação se desloque para cima e antecipa a ocorrência da fase caótica. A região de duplicação de períodos tem início em

$$x_2^*(\tilde{q}) = \exp_{\tilde{q}}\left(-\frac{1}{\tilde{q} + 2}\right) = \left(1 - \frac{1}{1 + 2/\tilde{q}}\right)^{1/\tilde{q}},$$

assim, para $x_2^*(1/2) = 0.64$, $x_2^*(1) \approx 0.67$ e $x_2^*(2) \approx 0.71$.

Quando $\rho_{\tilde{q}} = \exp_{\tilde{q}}(1) \exp_1(\tilde{q})$, $x_i \in (0, 1)$. Na Fig. 3.4, pode-se ver o histograma da distribuição da variável x_i . Note que, à medida que $\tilde{q}$ aumenta, os histogramas mantêm a mesma forma do histograma logístico, entretanto, ocorre um deslocamento no sentido horário, em torno do valor

Figura 3.2: Diagrama de bifurcação do mapa logístico generalizado (Eq. 3.42) para $\tilde{q} = 2$. Pode-se observar que a duplicação de períodos tem início em $\rho = (\tilde{q} + 2)/\tilde{q} = 2$ e que a fase caótica termina em $\rho_{max} = \exp_2(1) \exp_1(2)/\tilde{q} = \sqrt{27}/2 \approx 2.6$ (Eq. 3.45). **Detalhe interno:** Expoente de Lyapunov em função de $\rho_{\tilde{q}}$ para $\tilde{q} = 2$.

Figura 3.3: Diagrama de Bifurcação do mapa logístico generalizado (Eq. 3.42) para $\tilde{q} = 1/2$, $\tilde{q} = 1$ (logístico) e $\tilde{q} = 2$. Os pontos fixos são dados pelas Eqs. 3.46 e 3.47.

$$x = 1/2.$$

Para encerrar esta subseção, consideremos o mapa de Feigenbaum [77]:

$$y_{i+1} = 1 - \mu y_i^{\tilde{q}+1}, \quad (3.48)$$

Figura 3.4: Histogramas de x para $\rho_{\tilde{q}} = \exp_{\tilde{q}}(1)\exp_1(\tilde{q})$ no mapa logístico generalizado (Eq. 3.42) para $\tilde{q} = 1/10$, $\tilde{q} = 1$ (logístico) e $\tilde{q} = 10$. Não há mudanças drásticas com relação ao mapa logístico. Apenas nas extremidades é possível ver algumas diferenças, como mostrados nos detalhes internos.

com $\tilde{q} > 0$, $0 < \mu \leq 2$ e $-1 \leq y_i \leq 1$. Primeiro, consideremos o caso particular de $\tilde{q} = 1$. Substituindo $y_i = \tilde{y}_i - b$, com b constante, obtemos:

$$\tilde{y}_{i+1} = -\mu b^2 + b + 1 + 2\mu b \tilde{y}_i \left[1 - \frac{\tilde{y}_i}{2b} \right]. \quad (3.49)$$

Fazendo $-\mu b^2 + b + 1 = 0$, obtemos $b_{\pm} = (1 \mp \sqrt{1+4\mu})/(2\mu)$ e substituindo $x_i = \tilde{y}_i/(2b)$, obtemos o mapa logístico com $\rho_1 = \rho'_1 = 4a = 1 + \sqrt{1+4\mu}$, de modo que $0 < \rho_1 \leq 4$. É relativamente simples relacionar os parâmetros de controle destes dois mapas, tornando-os equivalentes. Entretanto, para valores arbitrários de $\tilde{q}$, não há uma forma analítica geral fechada para expandir $|\tilde{y}_i - b|^{\tilde{q}+1}$, não sendo possível simplesmente transformar o parâmetro de controle da Eq. 3.42 a fim de obter o mapa de Feigenbaum. Dessa forma, não sabemos se ambos os mapas são de fato equivalentes. Seria interessante estudar a sensibilidade da Eq. 3.42 com relação às condições iniciais, como já estudado exhaustivamente para o mapa de Feigenbaum [78, 79, 80, 81].

3.3.2 Modelo θ -Ricker generalizado

O modelo θ -Ricker [51, 52] é dado por:

$$x_{i+1} = x_i e^{r[1-(x_i/\kappa)^\theta]}, \quad (3.50)$$

onde $\theta > 0$.

Note que $\tilde{x} = r^{1/\theta} x / \kappa$ é a variável de interesse. Fazendo $\kappa_1 = e^r > 0$, a Eq. 3.50 pode ser reescrita como $\tilde{x}_{i+1} = \kappa_1 \tilde{x}_i e^{-\tilde{x}_i^\theta}$. Para $\theta = 1$, obtém-se o modelo de Ricker padrão [82]. Para θ arbitrário, a expansão de primeira ordem da função exponencial permite obter o mapa logístico generalizado (Eq. 3.42), que se torna o mapa logístico para $\theta = 1$. Os modelos de Ricker e θ -Ricker são modelos de competição por acaso.

Substituindo a função exponencial pela exponencial generalizada na Eq. 3.50, obtém-se o modelo de θ -Ricker *generalizado*:

$$x_{i+1} = \kappa_1 x_i \exp_{-\tilde{q}} \left[-r \left(\frac{x_i}{\kappa} \right)^\theta \right] = \frac{\kappa_1 x_i}{[1 + \tilde{q} r (x_i / \kappa)^\theta]^{1/\tilde{q}}} . \quad (3.51)$$

A notação padrão pode ser obtida fazendo $c = 1/\tilde{q}$ e $\kappa_2 = r/(\kappa c)$, assim [83]:

$$x_{i+1} = \frac{\kappa_1 x_i}{(1 + \kappa_2 x_i)^c} . \quad (3.52)$$

O modelo generalizado com $\theta = 1$ nos permite obter o modelo de Hassel [71], que pode ser um modelo de competição tanto por acaso como por luta. Um modelo bem conhecido de competição por luta é o modelo de Beverton-Holt [72], que pode ser obtido fazendo $\tilde{q} = c = 1$. Para $\tilde{q} = 0$, obtém-se novamente o modelo de Ricker e para $\tilde{q} = -1$, o modelo logístico.

É interessante ressaltar que o modelo de Beverton-Holt é um dos poucos modelos que apresentam a evolução temporal escrita explicitamente:

$$\tilde{x}_i = \frac{\kappa_1^i \tilde{x}_0}{1 + \frac{(1 - \kappa_1^i) \tilde{x}_0}{1 - \kappa_1}} , \quad (3.53)$$

a partir da qual se pode notar que $x_{i(\gg 1)} = 0$ para $\kappa_1 \leq 1$ e $x_{i(\gg 1)} = \kappa_1 - 1$ para $\kappa_1 > 1$.

Outros casos particulares da Eq. 3.51 podem ser obtidos ajustando os valores dos parâmetros $\tilde{q}$ e θ :

- para $\tilde{q} = 0$ e θ arbitrário, obtém-se o modelo θ -Ricker;
- para $\tilde{q} = 1$ e θ arbitrário, obtém-se o modelo de Maynard-Smith-Slatkin;
- para $\tilde{q} = -1$, obtém-se o mapa logístico generalizado;
- para $\tilde{q} \rightarrow -\infty$, temos um modelo linear trivial.

Em termos da variável relevante $\tilde{x}$, a Eq. 3.51 pode ser reescrita como:

$$\tilde{x}_{i+1} = \kappa_1 \tilde{x}_i \exp_{-\tilde{q}}(-\tilde{x}_i^\theta), \quad (3.54)$$

onde $\tilde{x}_i \geq 0$. A Eq. 3.54 permite obter os modelos de crescimento discretos mais usuais como casos particulares, mediante a escolha adequada dos parâmetros $\tilde{q}$ e θ , como mostrado na Tabela 3.2. Alguns diagramas de bifurcação típicos da Eq. 3.54 estão mostrados na Fig. 3.5.

Modelo	$\tilde{q}$	θ	tipo de competição
Linear	$-\infty$	> 0	
Logístico	-1	1	a
Logístico generalizado	-1	> 0	a
Ricker	0	1	a
θ -Ricker	0	> 0	a
Hassel	*	1	a ($\tilde{q} < 1/2$) ou l ($\tilde{q} \geq 1/2$)
Maynard-Smith-Slatkin	1	> 0	a ($\theta > 2$) ou l ($\theta \leq 2$)
Beverton-Holt	1	1	l

Tabela 3.2: Relação de parâmetros para obter os modelos de crescimento discreto a partir da Eq. 3.54. Na coluna “tipo de competição”, *a* e *l* significam, respectivamente, modelos de competição por acaso e por luta. O símbolo * indica valores arbitrários.

A fim de obter alguns resultados analíticos para o mapa da Eq. 3.54, vamos reescrevê-lo como $\tilde{x}_{i+1} = f_{gtr}(\tilde{x}_i)$, com

$$f_{gtr}(\tilde{x}) = \kappa_1 \tilde{x} \exp_{-\tilde{q}}(-\tilde{x}^\theta) = \frac{\kappa_1 \tilde{x}}{(1 + \tilde{q} \tilde{x}^\theta)^{1/\tilde{q}}}. \quad (3.55)$$

O domínio de $\tilde{x}$ não é limitado para $\tilde{q} \geq 0$. Entretanto, para $\tilde{q} < 0$, $f_{gtr}(\tilde{x}) = \kappa_1 \tilde{x} (1 - |\tilde{q}| \tilde{x}^\theta)^{1/|\tilde{q}|}$ e o domínio de $\tilde{x}$ é limitado ao intervalo $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_m$, com

$$\tilde{x}_m = \frac{1}{(-\tilde{q})^{1/\theta}}, \quad (3.56)$$

de tal forma que:

- para $|\tilde{q}| < 1$, $\tilde{x}_m > 1$;
- para $|\tilde{q}| = 1$, $\tilde{x}_m = 1$,⁴ e
- para $|\tilde{q}| > 1$, $\tilde{x}_m < 1$.

⁴Para $\tilde{q} = -1$, este é o caso logístico generalizado em θ ao invés de $\tilde{q}$, na Eq. 3.42, e, para $\tilde{q} = 1$, é o modelo de Maynard-Smith-Slatkin.

Figura 3.5: Diagramas de bifurcação típicos do modelo de θ -Ricker generalizado (Eq. 3.54). (a) $\tilde{q} = 1/2$ e $\theta = 2$, (b) $\tilde{q} = 1$ e $\theta = 3$ e (c) $\tilde{q} = 2$ and $\theta = 5$.

O ponto de máximo de f_{gtr} pode ser obtido tomando-se sua derivada em relação a $\tilde{x}$ e igualando-a a zero:

$$f'_{gtr}(\tilde{x}) = \frac{\kappa_1 [1 + (\tilde{q} - \theta)\tilde{x}^\theta]}{(1 + \tilde{q}\tilde{x}^\theta)^{1+1/\tilde{q}}} = 0,$$

de onde se obtém o valor máximo da Eq. 3.55:

$$\tilde{f}_{gtr} = f_{gtr}(\tilde{x}_{max}) = \frac{\kappa_1 \tilde{x}_m \exp_{\tilde{q}}(-1/\theta)}{\exp_{\theta}(-1/\tilde{q})}, \quad (3.57)$$

que ocorre em

$$\tilde{x}_{max} = \frac{1}{(\theta - \tilde{q})^{1/\theta}} = \frac{\tilde{x}_m}{\exp_{\theta}(-1/\tilde{q})}. \quad (3.58)$$

O parâmetro de controle κ_1 é ilimitado ($\kappa_1 > 0$) para $\tilde{q} \geq 0$, mas para $\tilde{q} < 0$, desde que $\tilde{f}_{gtr} \leq \tilde{x}_m$,

ele está restrito ao intervalo $0 < \kappa_1 \leq \kappa_m$, onde:

$$\kappa_m = \frac{\exp_{\theta}(-1/\tilde{q})}{\exp_{\tilde{q}}(-1/\theta)} = \exp_{\theta}(-1/\tilde{q}) \exp_{-\tilde{q}}(1/\theta). \quad (3.59)$$

O gráfico dos modelos de competição por acaso apresentam uma região inicial monotonicamente crescente, seguida de outra monotonicamente decrescente, sem pontos de inflexão, de modo a formar um cimo. Este cimo não ocorre em modelos de competição por luta, que crescem monotonicamente até um valor assintótico (ver Fig. 3.6). Pode-se notar que a Eq. 3.58 não apresenta tal cimo para $\theta < \tilde{q}$, o que a caracteriza como um modelo de competição por luta. No valor crítico $\theta = \tilde{q}$, a função $f_{gtr}(\tilde{x})$ começa a apresentar um valor máximo no infinito. Para $\theta > \tilde{q}$, a função $f_{gtr}(\tilde{x})$ apresenta um cimo, com valor máximo em x_{max} (Eq. 3.58) tal que, quando $\theta \rightarrow \infty$, $x_{max} \rightarrow 1$. Neste último caso, temos um comportamento de competição por acaso.

Figura 3.6: Esquema ilustrativo do comportamento típico de modelos de competição por acaso (quadrados) e por luta (círculos). A existência de um cimo no comportamento da competição por acaso mostra a tendência de extinção da espécie neste tipo de competição.

Os pontos fixos do mapa são:

$$\tilde{x}_1^* = 0 \quad (3.60)$$

$$\tilde{x}_2^* = [\ln_{\tilde{q}}(\kappa_1)]^{1/\theta} \geq 0. \quad (3.61)$$

Estes pontos fixos são mostrados em função de κ_1 na Fig. 3.7.

Figura 3.7: Pontos fixos dados pelas Eqs. 3.60 e 3.61, em função de κ_1 . As regiões de instabilidade estão representadas por linhas tracejadas. O valor de κ_m é dado pela Eq. 3.59.

O ponto fixo $\tilde{x}_1^*$ representa a extinção da espécie e é estável para $0 < \kappa_1 < 1$. Para $\kappa_1 = 1$, ambos os pontos fixos são marginais. Para $1 < \kappa_1 < \exp_{-\tilde{q}}(2/\theta)$, $\tilde{x}_1^*$ se torna instável e $\tilde{x}_2^* > 0$ é estável e representa a sobrevivência da espécie. Para $\kappa_1 = \exp_{-\tilde{q}}(2/\theta)$, $\tilde{x}_2^*$ se torna instável e, à medida que κ_1 aumenta, aparece um ciclo estável de período 2. Para $\tilde{q} < 0$, à medida que κ_1 cresce ainda mais, o ciclo de período 2 se torna instável para alguns valores de κ_1 , dando lugar a uma rota para o caos através da duplicação de períodos, como no mapa logístico. Entretanto, para $\tilde{q} \geq 0$, vários cenários podem ocorrer. Mesmo para $\tilde{q} > 0$ e $\theta > \tilde{q}$, se $\tilde{q} < \theta < 2\tilde{q}$, o mapa f_{gtr} apresenta um cimo, mas não suficientemente estreito para produzir atratores com períodos maiores que 1. Neste caso, f_{gtr} produz apenas dois pontos fixos $\tilde{x}_1^*$ e $\tilde{x}_2^*$, que caracterizam modelos de competição por luta. Já os modelos de competição por acaso ($\theta > 2\tilde{q}$) apresentam mapas com um cimo estreito o suficiente para produzir atratores estáveis com períodos maiores que 1. Assim, em modelos de competição ao acaso, podemos encontrar cenários mais complexos, com duplicação de períodos como rota para o caos, para $\kappa_1 > \exp_{-\tilde{q}}(2/\theta)$. Ainda não foi possível obter analiticamente o comportamento do sistema

para $\tilde{q} > 0$ e $\theta > 2\tilde{q}$. O diagrama $\theta \times \tilde{q}$ está mostrado na Fig. 3.8.

Figura 3.8: Diagrama mostrando os vários tipos de comportamentos do modelo θ -Ricker generalizado (Eq. 3.54). Para $\tilde{q} < 0$, tem-se o mapa $\tilde{x}_{i+1} = \kappa_1 \tilde{x}_i (1 - |\tilde{q}| \tilde{x}_i^\theta)^{1/|\tilde{q}|}$ e $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_m$, com x_m dado pela Eq. 3.56. Este sistema representa modelos de competição ao acaso e apresenta duplicação de períodos e caos. Para $\tilde{q} \geq 0$, $\tilde{x} \geq 0$ e o comportamento do sistema é regido pelos valores de θ . Não temos resultados analíticos para $\theta \geq 2\tilde{q}$. Para $\theta < 2\tilde{q}$ o sistema representa modelos de competição por luta, com apenas dois pontos fixos, dados pelas Eqs. 3.60 e 3.61. É importante ressaltar que ainda não conhecemos o comportamento do modelo na região entre o eixo $\tilde{q} = 0$ e a reta $\theta = 2\tilde{q}$.

Para $\tilde{q} = \theta = 1$, obtém-se novamente o modelo de Beverton-Holt, com os pontos fixos $\tilde{x}_1^* = 0$ e $\tilde{x}_1^* = \ln_1(\kappa_1) = \kappa_1 - 1$. Para $\tilde{q}$, obtém-se o mapa logístico generalizado.

3.3.3 Modelo de Skellam generalizado

Todos os modelos de competição por luta generalizados pela Eq. 3.51 são do tipo lei de potência para $\tilde{q} \neq 0$. O modelo de Skellam, por outro lado, não pode ser obtido por esta forma, por se tratar do complemento e um decaimento exponencial [84]:

$$x_{i+1} = \kappa(1 - e^{-rx_i}). \quad (3.62)$$

Entretanto, é interessante substituir a função exponencial pela exponencial generalizada neste modelo:

$$x_{i+1} = k[1 - \exp_{-\tilde{q}}(-rx_i)], \quad (3.63)$$

e, fazendo $\tilde{x} = rx$ and $\kappa = rk$, obtemos:

$$\tilde{x}_{i+1} = \kappa \left[1 - \exp_{-\tilde{q}}(-\tilde{x}_i) \right] . \quad (3.64)$$

Para $\tilde{q} \rightarrow -\infty$, a Eq. 3.64 se torna um modelo constante (a população não se altera com o tempo), para $\tilde{q} = -1$, obtém-se o modelo trivial de crescimento linear. Para $\tilde{q} = 0$, obtém-se o modelo de Skellam e, finalmente, para $\tilde{q} = 1$, obtém-se o modelo de competição por luta de Beverton-Holt (ver Tabela 3.3).

Modelo	$\tilde{q}$
constante	$-\infty$
linear	-1
Skellam	0
Beverton-Holt	1

Tabela 3.3: Relação de parâmetros para obter os modelos discretos de competição por luta a partir da Eq. 3.64.

3.4 Conclusão

O principal objetivo deste Capítulo foi mostrar que a generalização das funções exponencial e logaritmo obtidos a partir da física estatística não-extensiva é útil na descrição de uma grande quantidade modelos de crescimento, tanto contínuos quanto discretos. Nos modelos contínuos, a função $\tilde{q}$ -logaritmo aparece nas equações diferenciais que definem os modelos, enquanto que a função $\tilde{q}$ -exponencial aparece nas soluções dessas equações, quando elas existem. O modelo contínuo de crescimento mais geral é o de Tsoularis e Wallace, dado pela Eq. 3.33, que apresenta uma forma simples quando escrita em termos da função $\tilde{q}$ -logaritmo. Uma interpretação física para o parâmetro $\tilde{q}$ aparece no modelo de Richards, que foi possível devido ao modelo microscópico apresentado na Ref. [66].

A partir da discretização do modelo de Richards, foi possível obter a generalização do mapa logístico e estudar suas propriedades. Uma generalização do modelo θ -Ricker nos permitiu obter diversos casos de competição por acaso e por luta como casos particulares. A Eq. 3.54 nos permitiu o uso de ferramentas computacionais a fim de encontrar os valores de $\tilde{q}$ e θ que melhor se adaptassem aos modelos mais bem-conhecidos de crescimento discreto. Além disso, também foi possível obter uma generalização do modelo de Skellam. Apesar dos resultados apresentados, ainda não foi possível obter analiticamente o comportamento do modelo de θ -Ricker generalizado para a região com $\tilde{q} > 0$ e $\theta > 2\tilde{q}$.

4 *Fenômenos de Transporte Anômalos*

Durante os estudos de meu Mestrado [1], deparei-me com processos difusivos que não obedeciam o modelo de difusão tradicional, conforme descrito por Alfred Fick [2] e Albert Einstein [3]. Enquanto estes últimos apresentavam um comportamento gaussiano, os primeiros apresentavam um comportamento anômalo, melhor descrito pela distribuição $\tilde{q}$ -gaussiana, descrita no Cap. 2.

Neste Capítulo, mostraremos que a função exponencial generalizada é também bastante útil na descrição de fenômenos difusivos anômalos, que são aqueles que violam o teorema do limite central de Gauss.

4.1 Difusão anômala

Apesar da descrição de Fick da difusão ser puramente fenomenológica, Einstein mostrou que sua dinâmica estava relacionada com a aleatoriedade do movimento browniano, no qual as partículas de pólen em suspensão colidiam continuamente com as moléculas de um líquido. A explicação de Einstein para a difusão se baseia na existência de uma distância média entre as colisões, e na existência de um tempo médio de voo entre essas colisões.

Por esse motivo, nota-se a dependência linear do desvio quadrático médio em relação ao tempo, isto é, $\langle x^2 \rangle \propto t$. De fato, esta é uma consequência direta do teorema do limite central e da natureza markoviana do processo estocástico¹ [86].

Entretanto, a partir de meados da década de 1970, processos de difusão que não se adaptam ao modelo descrito por Einstein têm sido cada vez mais estudados. Um exemplo é o princípio de funcionamento das impressoras a laser e das fotocopiadoras. Ele se baseia no transporte de portadores cargas em semicondutores amorfos no interior de um campo elétrico. No início da década de 1970, ficou claro que o movimento desses portadores de carga não podia ser descrito

¹Um processo estocástico é um conjunto ordenado de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, associado com sua distribuição de probabilidades. A noção de processo estocástico é útil para descrever, por exemplo, o comportamento de um sistema que evolui com o tempo. Um processo markoviano é um processo estocástico em que o estado futuro de uma variável aleatória é depende exclusivamente do seu estado atual, isto é: $X_{t+1} = f(X_t)$ [85].

pela equação da difusão tradicional. O problema foi resolvido em 1975, quando Harvey Scher, da Xerox, e Eliot Montroll, da Universidade de Rochester, mostraram que cargas em movimento em meios amorfos tendem a ficar aprisionadas em imperfeições locais, sendo liberadas por flutuações térmicas [87, 88]. Isto significa que o tempo de aprisionamento é melhor descrito por uma distribuição de Lévy² do que por uma gaussiana.

Outros processos difusivos que não seguem a difusão tradicional têm sido estudados em sistemas como difusão em plasmas [89], difusão em fluidos turbulentos [90, 91], transporte de fluidos em meios porosos [92], difusão em fractais [93], análise de histogramas de batidas do coração em indivíduos saudáveis [94], entre outros sistemas físicos. Processos deste tipo são chamados de *difusão anômala*.

O comportamento anômalo pode ser verificado no crescimento da variância da posição como uma lei de potência:

$$\sigma^2 \propto t^\beta. \quad (4.1)$$

Neste caso, em relação ao expoente β , o processo pode ser:

- subdifusivo, se $\beta < 1$, neste caso a mobilidade é menor do que numa difusão normal,
- normal, se $\beta = 1$, ou
- superdifusivo, se $\beta > 1$, neste caso a mobilidade é maior do que numa difusão normal.

A equação geral da difusão é:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^\xi \rho^{1+\tilde{q}}(x, t)}{\partial x^\xi}, \quad (4.2)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}$ é a ordem da derivada e $\tilde{q}, D \in \mathbb{R}$.

4.1.1 Equação de difusão não-linear

Uma outra forma de modelar a difusão anômala é relaxar a condição de independência das variáveis no teorema do limite central de Gauss, obtendo a equação de difusão correlacionada,

²A distribuição de Lévy é definida por:

$$L_c(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{e^{-c/2x}}{x^{3/2}},$$

com parâmetro de escala $c > 0$ e com $x \geq 0$. Note-se que esta distribuição não admite nem primeiro nem segundo momentos.

ou equação de difusão para meios porosos [86, 4]. A forma unidimensional desta equação é obtida fazendo $\xi = 2$ na Eq. 4.2:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho^{1+\tilde{q}}(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.3)$$

Para uma concentração inicial $\rho(x, 0) = \delta(x)$ e sem limites, esta equação tem solução dependente do tempo do tipo Barenblatt-Pattle [4]³:

$$\rho(x, t) = G_{\tilde{q}, a}(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{2a^2\pi}} \left[1 + \tilde{q} \left(-\frac{x^2}{a^2} \right) \right]^{1/\tilde{q}}, \quad (4.4)$$

onde $G_{\tilde{q}, a}$ é a função q -gaussiana, definida pela Eq. 2.30 com a dependente do tempo dado por:

$$a(t) = \sqrt{[2Dt(1 + \tilde{q})(2 + \tilde{q})\gamma^{-\tilde{q}}]^{2/(2+\tilde{q})}}, \quad (4.5)$$

e γ responsável pela normalização⁴:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{2+3\tilde{q}}{-2\tilde{q}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\tilde{q}}{\tilde{q}}\right)} \sqrt{\tilde{q}} & \text{se } \tilde{q} > 0, \\ 1 & \text{se } \tilde{q} = 0, \\ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{\tilde{q}}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+\tilde{q}}{-2\tilde{q}}\right)} \sqrt{-\tilde{q}} & \text{se } -2 < \tilde{q} < 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Uma característica da $\tilde{q}$ -gaussiana é que, ajustando o valor do parâmetro $\tilde{q}$, várias outras podem ser obtidas [4]:

- $\tilde{q} = 0$ resulta na distribuição gaussiana,
- $\tilde{q} = -1$ resulta na distribuição de Cauchy,
- $\tilde{q} = -2/(n+1)$ resulta na distribuição t de Student com n graus de liberdade.

A partir do segundo momento de x , que segue a pdf $G_{\tilde{q}, a}(x)$, podemos determinar sua variância:

$$\sigma_{\tilde{q}}^2 = \frac{a^2}{2+3\tilde{q}} = \frac{[2Dt(1 + \tilde{q})(2 + \tilde{q})\gamma^{-\tilde{q}}]^{2/(2+\tilde{q})}}{2+3\tilde{q}}, \quad (4.7)$$

³A função $\delta(x - x_0)$ (delta de Dirac) em uma dimensão é definida como:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad \text{se } x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) &= 1 \end{aligned}$$

⁴A Eq. 2.30 é normalizável para $\tilde{q} > -2$.

que mostra a relação do parâmetro a^2 com a dispersão da função.

Neste caso, a dependência entre a variância de x e o tempo é dada por:

$$\sigma_{\tilde{q}}^2 \propto t^{2/(2+\tilde{q})}. \quad (4.8)$$

Dessa forma, o processo de difusão descrito pela Eq. 4.3 pode ser:

- subdifusivo, se $\tilde{q} > 0$,
- normal, se $\tilde{q} = 0$, ou
- superdifusivo, se $-2 < \tilde{q} < 0$,

porém a variância só será finita para $\tilde{q} > -2/3$.

O tipo de distribuição resultante depende do valor do expoente $\tilde{q}$. Para $\tilde{q} > 0$, $\rho(x, t) = 0$ quando $1 - \tilde{q}x^2/a^2(t) < 0$, implicando em um comportamento de cauda curta, comparado com a gaussiana, com um corte em $x_0(t) = [\tilde{q}/a^2(t)]^{-1/2}$.⁵ Note-se que este resultado indica um comportamento similar ao observado por Scher e Montroll, no qual uma partícula em difusão fica aprisionada em impurezas do meio. Para $-2 < \tilde{q} < 0$, a distribuição tem cauda longa, com comportamento assintótico do tipo lei de potência, com $\rho(x, t) \propto x^{2/\tilde{q}}$ [86]. Um caso particular ocorre quando $\tilde{q} = -1$. Neste caso, não há difusão, visto que $\rho(x, t)$ se torna independente do tempo [$\partial\rho(x, t)/\partial t = 0$] e a variância de x tende ao infinito, transformando-se em uma distribuição de Cauchy [4]:

$$C_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}. \quad (4.9)$$

4.1.2 Equação de difusão de Lévy-Gnedenko

Em alguns processos difusivos, a variância pode não ser finita, de modo que o teorema do limite central de Gauss não se aplica. A análise destes processos depende da generalização do teorema do limite central, feita por Paul Lévy e Boris V. Gnedenko [95]. Neste caso, visa-se relaxar a condição de segundo momento finito no teorema do limite central de Gauss. O estudo deste tipo de difusão anômala pode levar a equações diferenciais parciais de ordem fracionária, obtidas fazendo $\tilde{q} = 0$ na Eq. 4.2:

$$\frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^\xi \rho(x, t)}{\partial x^\xi}, \quad (4.10)$$

⁵ $\rho(x, t)$ é uma pdf e, como tal deve ser nula ou positiva.

onde a derivada parcial de ordem fracionária é definida por:

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} f(t, x) \right\} = |\omega|^{2\mu} F(t, \omega), \quad (4.11)$$

onde $\mathfrak{F}\{f(t, x)\} = F(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) e^{-i\omega x}$ é a transformada de Fourier da função $f(t, x)$ e $\mu \in \mathbb{R}$. A Eq. 4.10 tem solução do tipo α -estável de Lévy, definida por:

$$f(x : \alpha, \beta, c, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k : \alpha, \beta, c, \mu) e^{-ikx}, \quad (4.12)$$

com:

$$\tilde{f}(k : \alpha, \beta, c, \mu) = \exp [ik\mu - |ck|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(k)\Phi(k, \alpha))], \quad (4.13)$$

onde $\operatorname{sgn}(k)$ é o sinal de k e

$$\Phi(k, \alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2) & \text{se } \alpha \neq 1, \\ -(2/\pi) \log |k| & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Os parâmetros da distribuição são:

- μ é o parâmetro de deslocamento e indica a média quando $\alpha \leq 1$;
- c é o fator de escala e mede a dispersão da distribuição;
- $\alpha \in]0, 2]$ é o expoente ou índice da distribuição e indica o comportamento assintótico da distribuição para $\alpha < 2$; e
- $\beta \in [-1, 1]$ indica a simetria da distribuição em torno de μ , se $\beta = 0$, a distribuição é simétrica.

A distribuição α -estável de Lévy não pode ser expressa analiticamente, exceto para alguns casos particulares [96]:

- para $\alpha = 2$, a distribuição é gaussiana, com média μ e variância $\sigma^2 = 2c^2$, neste caso o parâmetro β não tem significado;
- para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, temos a distribuição de Cauchy, com parâmetros de escala c e de deslocamento μ ;
- para $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$, temos a distribuição de Lévy, com parâmetros de escala c e de deslocamento μ ;
- no limite de $c \rightarrow 0$ ou $\alpha \rightarrow 0$, a distribuição se torna a função delta de Dirac: $\delta(x - \mu)$.

4.2 Conclusão

A difusão consiste em um processo natural e espontâneo que ocorre quando os sistemas se encaminham para o equilíbrio, como consequência da Segunda Lei da Termodinâmica. Ela se baseia no princípio da conservação da matéria e na proporcionalidade entre fluxo de matéria e o gradiente de sua concentração na direção do fluxo. Como consequência, a distribuição de matéria no espaço em função do tempo, em um meio isotrópico, tem um comportamento gaussiano, com a concentração no centro diminuindo proporcionalmente a $t^{-1/2}$, enquanto que o raio de dispersão aumenta proporcionalmente a $t^{1/2}$.

Entretanto, a partir de meados da década de 1970, começaram a ser estudados processos difusivos que não se adaptam ao modelo descrito por Einstein. Este tipo de processo passou a ser conhecido como *difusão anômala*. Nele, o crescimento da variância da distribuição da concentração se dá por uma lei de potência: $\sigma^2 \propto t^\beta$. O expoente β determina se o processo é subdifusivo ($\beta < 1$), normal ($\beta = 1$) ou superdifusivo ($\beta > 1$).

O comportamento deste tipo de difusão, para o caso não-linear, é dado pela distribuição gaussiana generalizada, ou $\tilde{q}$ -gaussiana. Para processos subdifusivos, a distribuição $\tilde{q}$ -gaussiana apresenta uma cauda curta com um corte em $x_0(t) = [(1 - \tilde{q})/a^2(t)]^{-1/2}$. Para processos superdifusivos, a distribuição $\tilde{q}$ -gaussiana apresenta uma cauda longa, do tipo lei de potência, com a concentração proporcional a $x^{-2/(\tilde{q}-1)}$.

Outra forma de modelar a difusão anômala consiste em relaxar a condição de segundo momento finito no teorema do limite central de Gauss. Esta condição leva às distribuições α -estáveis de Lévy e ao teorema do limite central generalizado de Lévy-Gnedenko. Da mesma forma que as $\tilde{q}$ -gaussianas, as α -estáveis podem assumir uma grande variedade de formas, dependendo dos valores dos parâmetros.

5 *Conclusão*

Na primeira parte desta Tese, apresentamos as funções logaritmo e exponencial generalizada. Estas funções foram originalmente introduzidas por C. Tsallis no contexto da mecânica estatística não extensiva. Entretanto, aqui conseguimos obtê-las por meio de argumentos puramente geométricos. A seguir, mostramos que estas funções são bastante úteis na generalização de um grande número de funções e de operadores aritméticos, apresentando, inclusive, algumas aplicações para estes operadores.

Mostramos também que as funções logaritmo e exponencial generalizadas podem ser utilizadas para generalizar vários modelos de crescimento populacional, sejam eles contínuos ou discretos. Esses modelos generalizados nos permitiram encontrar duas expressões simples, das quais os modelos mais conhecidos são casos particulares.

A generalização das funções densidade de probabilidade (pdf) nos apresentou como um caso particular a função $\tilde{q}$ -gaussiana, que, como mostramos, é a solução da equação de difusão não-linear. Esta equação difere da equação de difusão tradicional por violar o teorema do limite central de Gauss. Dessa forma, não podem ser modelados por meio de caminhadas aleatórias simples, mas sim por meio de caminhadas mais complexas, como os voos de Lévy.

Na segunda parte desta Tese, apresentaremos a Caminhada do Turista (CT). Esta caminhada, em sua versão determinista, apresenta uma dinâmica difusiva semelhante à dos voos de Lévy, tendo como solução a pdf $\tilde{q}$ -gaussiana.

Parte II

Caminhadas Estocásticas em Meios Desordenados Multidimensionais

6 *Caminhada Determinista do Turista*

Caminhadas aleatórias em redes regulares e meios aleatórios têm sido exaustivamente estudadas, e apresentam uma grande gama de aplicações [97, 98, 99]. Apesar de não tão investigadas, as caminhadas deterministas em meios regulares [100, 101, 102] e desordenados [103] também apresentam resultados muito interessantes. Neste capítulo, apresentamos um algoritmo de caminhada determinista parcialmente autorrepulsiva, denominada caminhada determinista do turista (CDT) [104, 105].

Uma maneira de construir um meio desordenado consiste em espalhar aleatoriamente N pontos (com coordenadas uniformemente distribuídas ao longo das arestas) de um hipercubo como d dimensões. Determinar as distâncias e as estatísticas de vizinhança entre cada par de pontos desse meio consiste no *problema do ponto aleatório* (PPA). Esses pontos podem ser considerados como sítios (cidades) em uma paisagem (mapa) aleatória, de modo que um caminhante (turista) pode se mover por eles. Seguindo a regra determinista de, a cada intervalo discreto de tempo, dirigir-se ao ponto mais próximo não visitado nos τ passos anteriores, o caminhante realiza uma caminhada parcialmente autorrepulsiva, onde a autorrepulsividade é limitada pela janela de memória $\mu = \tau + 1$.¹ Esta grandeza representa um tempo característico que deve transcorrer até que o sítio se torne novamente atrativo ao caminhante (tempo refratário) e evita que a trajetória intersecte a si mesma dentro dessa janela de memória.

O comportamento do turista depende estritamente da configuração inicial dos pontos, e sua movimentação ocorre totalmente baseada numa tabela de vizinhança. Esta tabela representa o *grafo do turista*, ou seja, N nodos com τ ligações de saída orientadas e ponderadas e um número variável de ligações de entrada. Note-se que as distâncias entre os sítios é apenas uma forma de ordenar a vizinhança.

¹A principal diferença entre os parâmetros τ e μ está no fato de que μ inclui o ponto em que o caminhante se encontra, enquanto que τ indica as cidades que não podem ser revisitadas no passo seguinte. Apesar dessa diferença conceitual, no decorrer deste texto, trataremos indistintamente ambas grandezas como “memória”.

6.1 Estatística de posição de vizinhos

A probabilidade $P_{m,n}^{(d,N)}$ de um ponto arbitrário, dentre N possíveis em um ambiente d -dimensional, ser o m -ésimo vizinho mais próximo de seu próprio n -ésimo vizinho mais próximo no PPA foi inicialmente estudado por Clark e Evans [106] e Clark [107] em relação a alguns aspectos de padrões espaciais em populações biológicas. A Fig. 6.1 mostra uma representação geométrica para $d = 2$. Para o caso de $m = n$, os vizinhos são ditos reflexivos. O trabalho deles foi corrigido por Dacey [108] ($m, n > 1$) no contexto da análise geográfica e posteriormente generalizada (para $m \neq n$) por Cox [109]. Nesta Tese, chamamos a variável $P_{m,n}^{(d,N)}$ de *probabilidade de Cox*. Na Ref. [110] estas probabilidades foram calculadas utilizando apenas a distribuição de Poisson, ao invés das várias distribuições utilizadas no artigo original [109]. Diferentemente de Cox, as expressões resultantes foram escritas em termos de funções (ao invés de escrevê-las em termos de uma integral) e distribuições conhecidas (multinomial, binomial e hipergeométrica).

Figura 6.1: Processo de Poisson bidimensional. Existem i pontos na intersecção das superfícies. Nos crescentes I e J existem, respectivamente, $n - 1 - i$ e $m - 1 - i$ pontos.

A seguir, mostraremos as probabilidades de Cox para um número finito de dimensões. Em seguida, calculamos o limite para altas dimensionalidades, que nos leva ao *modelo de ligações aleatórias* (MLA), também conhecido por *random link model*. Também apresentamos o *modelo de mapeamento aleatório* (MMA), ou *random map model*.

6.1.1 Probabilidades de Cox em dimensionalidade finita

Originalmente, a fórmula de Cox é escrita da seguinte maneira [109]:

$$P_{m,n}^{(d)} = \sum_{i=0}^{\min(m-1, n-1)} \frac{(m+n-2-i)!}{i!(m-1-i)!(n-1-i)!} \frac{(1-I_d)^i I_d^{m+n-2-2i}}{(1+I_d)^{m+n-1-i}}. \quad (6.1)$$

Como m e n indicam a posição relativa entre os vizinhos, eles devem ser inteiros positivos, com $m \geq 1$ e $n \geq 1$. Além disso,

$$I_d = I_{1/4} \left(\frac{1}{2}, \frac{d+1}{2} \right) \quad (6.2)$$

onde

$$I_z(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^z dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} \quad (6.3)$$

com $\text{Re}(a) > 0$, $\text{Re}(b) > 0$ é a *função beta incompleta normalizada* [16]. Geometricamente, I_d representa o volume relativo do crescente², em comparação ao da hiperesfera, em um processo de Poisson, como mostrado na Fig. 6.1 para $d = 2$ [110]. Note que I_d depende apenas da dimensionalidade do PPA. Permitindo que i varie de 1 até $\min(m, n)$ e reagrupando os termos, é possível reescrever a Eq. 6.1 como:

$$\frac{P_{m,n}^{(d)}}{P_{1,1}^{(d)}} = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \text{Mult} \left(i-1, m-i, n-i; \frac{1-I_d}{1+I_d}, \frac{I_d}{1+I_d}, \frac{I_d}{1+I_d} \right) \quad (6.4)$$

$$P_{1,1}^{(d)} = \frac{1}{1+I_d}, \quad (6.5)$$

onde $P_{1,1}^{(d)}$ é a densidade de pares ou casais (vizinhos mutuamente mais próximos) e

$$\text{Mult}(n_a, n_b, n_c; \pi_a, \pi_b, \pi_c) = \frac{(n_a + n_b + n_c)!}{n_a! n_b! n_c!} \pi_a^{n_a} \pi_b^{n_b} \pi_c^{n_c} \quad (6.6)$$

é a distribuição multinomial.

6.1.2 Probabilidades em altas dimensões e modelo de ligações aleatórias

As distâncias entre quaisquer pares de pontos não são todas variáveis aleatórias independentes, devido aos efeitos de borda e às desigualdades triangulares. Para N fixo no PPA, à medida que d aumenta, os efeitos de borda se tornam mais pronunciados e as distâncias entre pares de pontos se tornam menos correlacionadas. Os efeitos de borda podem ser minimizados com a utilização de condições periódicas de contorno e, no limite de dimensionalidade infinita,

²O crescente se refere ao volume de uma hiperesfera que não faz parte da intersecção entre as hiperesferas (Fig. 6.1). Note que como as hiperesferas têm o mesmo raio, ambos os crescentes têm o mesmo volume.

todas as distâncias entre dois pontos se tornam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Este é o modelo de ligações aleatórias (MLA) [111, 112], que é uma descrição de campo médio do PPA. Note que no MLA, ainda persistem duas restrições da geometria euclidiana:

1. a distância de um ponto a si mesmo é sempre nula ($D_{ii} = 0, \forall i$) e
2. as distâncias de ida e volta são iguais ($D_{ij} = D_{ji}, \forall i, j$).

O limite de alta dimensionalidade para a probabilidade de Cox pode ser obtido diretamente da Eq. 6.4, fazendo $d \rightarrow \infty$. Neste caso, $I_\infty = 1$. No limite termodinâmico ($N \gg 1$), a distribuição multinomial se torna:

$$\frac{P_{m,n}^{(rl)}}{P_{1,1}^{(rl)}} = \text{Bin} \left(m-1, n-1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (6.7)$$

$$P_{1,1}^{(rl)} = \frac{1}{2}, \quad (6.8)$$

onde

$$\text{Bin}(n_a, n_b; \pi_a, \pi_b) = \frac{(n_a + n_b)!}{n_a! n_b!} \pi_a^{n_a} \pi_b^{n_b} \quad (6.9)$$

é a distribuição binomial. A partir da Eq. 6.8, expressões simples podem ser obtidas, tais como:

$$P_{1,n}^{(rl)} = 1/2^n, P_{2,n}^{(rl)} = n/2^{n+1}.$$

Até agora, as distâncias euclidianas foram apenas um mecanismo para conseguir as probabilidades de ordem de vizinhança. Entretanto, estas probabilidades são independentes de uma escolha particular da distribuição de probabilidades da distância [113]. Por uma questão de simplicidade, podemos considerar uma distribuição uniforme de distâncias entre os N pontos no intervalo $[0, 1]$. No caso das ligações aleatórias, é possível obter as probabilidades de Cox para um sistema finito [110]. Para levar em conta os efeitos de tamanho finito, basta substituir a distribuição binomial na Eq. 6.7 pela distribuição hipergeométrica:

$$\text{Hypg}(N_a, N_b; n_a, n_b) = \frac{\binom{N_a}{n_a} \binom{N_b}{n_b}}{\binom{N_a + N_b}{n_a + n_b}}. \quad (6.10)$$

Dessa forma, a Eq. 6.7 se torna:

$$\frac{P_{m,n}^{(rl,N)}}{P_{1,1}^{(rl,N)}} = \text{Hypg}(N-2, N-2; m-1, n-1) \quad (6.11)$$

$$P_{1,1}^{(rl,N)} = \frac{N-1}{2N-3}, \quad (6.12)$$

com $m = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ e $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. É fácil notar que as Eqs. 6.11 e 6.12 se reduzem às Eqs. 6.7 and 6.8 quando $N \gg 1$.

Note-se que é possível gerar conjuntos de dados extremamente grandes para o MMA, considerando que os geradores deterministas de números pseudo-aleatórios possuem ciclos bastante longos [114].

6.1.3 Modelo de mapeamento aleatório

Removendo a restrição da simetria entre as distâncias de ida e volta no MLA, obtemos o *modelo de mapeamento aleatório* (MMA) [115]. O MMA é a aproximação de campo médio para o modelo de Kauffman [116] e permite a obtenção de resultados analíticos. Inclusive, é possível obter as probabilidades de Cox para este modelo.

Conservando a restrição de que $D_{ii} = 0, \forall i$, quando um ponto arbitrário I é escolhido, seu m -ésimo vizinho J é automaticamente apontado, entretanto, o n -ésimo vizinho de J pode ser qualquer um dos demais $N - 1$ pontos, com igual probabilidade, visto que as distâncias são totalmente independentes. Dessa forma, a probabilidade $P_{m,n}^{(rm)}$ do ponto I ser o n -ésimo vizinho de seu próprio m -ésimo vizinho é simplesmente:

$$P_{m,n}^{(rm)} = \frac{1}{N - 1}, \quad (6.13)$$

onde $m = 1, 2, \dots, N - 1$ e $n = 1, 2, \dots, N - 1$.

Por outro lado, caso se permita que $D_{ii} \neq 0$, a probabilidade $P_{m,n}^{(rm)}$ passa a ser duas vezes maior para os vizinhos reflexivos do que para os demais, visto que cada ponto sempre é seu próprio m -ésimo vizinho para algum m . Portanto:

$$P_{m,n}^{(rm)} = \frac{1 + \delta_{m,n}}{N - 1}, \quad (6.14)$$

onde $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker, $m = 1, 2, \dots, N$ e $n = 1, 2, \dots, N$. Note-se que no limite termodinâmico $N \gg 1$, estes casos ainda são distinguíveis devido à presença do fator 2 para vizinhos reflexivos.

6.2 Alguns resultado da caminhada determinista do turista

Em um hipercubo d -dimensional de arestas unitárias são distribuídos aleatoriamente N pontos, com coordenadas uniformemente distribuídas ao longo das arestas. Na paisagem desordenada assim formada, um caminhante se move entre os pontos seguindo a regra determinista

de, a cada intervalo discreto de tempo, dirigir-se ao ponto mais próximo não visitado nos τ passos anteriores. A caminhada parcialmente autorrepulsiva obtida dessa forma é chamada de caminhada determinista do turista (CDT). Todas as CDT possuem uma parte inicial transiente de comprimento t e terminam em ciclos. Cada ciclo possui um período p . Os comprimentos de transiente e os ciclos dos períodos podem ser combinados em uma distribuição conjunta $S_{\mu,d}^{(N)}(t,p)$. Essas distribuições dependem dos parâmetros de memória (μ) e dimensão (d) da caminhada³. A seguir, apresentamos alguns casos especiais obtidos pela combinação de μ e d .

6.2.1 Turista preguiçoso

O caso mais simples da CDT é o caso em que $\mu = 0$. Este caso é conhecido como *turista preguiçoso*, porque além de não lembrar de nenhuma das cidades previamente visitadas, o turista também não reconhece a cidade em que se encontra atualmente, permanecendo, assim, indefinidamente no mesmo local. Neste caso, ocorrem duas situações particulares: dimensão arbitrária, porém finita e o mapa aleatório. Ambas situações são tratadas a seguir.

6.2.1.1 Espaço euclidiano com número de dimensões finito

Este é um caso trivial, visto que o caminhante tem memória nula. Dessa forma, ele não reconhece nem mesmo o ponto em que se encontra como já visitado. Assim a cada intervalo de tempo ele permanece no mesmo lugar, gerando uma trajetória de transiente nulo e ciclo de período unitário $p = 1$. A distribuição conjunta de transiente e período é simplesmente dada por:

$$S_{0,d}^{(N)}(t,p) = \delta_{t,0} \delta_{p,1} , \quad (6.15)$$

onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker.

Apesar de trivial, este caso se torna interessante por ser a situação mais simples da caminhada estocástica do turista (CET), que será tratada no Cap. 7 [117]. Mesmo na CDT, este caso pode ser solucionado analiticamente e apresenta um resultado não-trivial para o MMA, como veremos a seguir.

6.2.1.2 Mapa aleatório

Neste caso, as restrições do espaço euclidiano são removidas e, dessa forma, a distância de um ponto a si mesmo pode ser diferente de zero. Nesta situação, a distância pode ser interpre-

³Note que, enquanto d se refere a uma característica do meio (estático) em que as caminhadas se desenvolvem, μ se refere a uma característica dinâmica da caminhada.

tada como um custo. Assim, o custo de permanência em um ponto pode ser maior que o custo de deslocamento, de modo que o caminhante pode não permanecer no mesmo sítio, mesmo com memória nula. Assim sendo, o turista preguiçoso pode não existir no MMA. Mesmo com $\mu = 0$, podem existir trajetórias não-triviais. De fato, a distribuição conjunta do tempo de transiente e de períodos de ciclos para o mapa aleatório com N pontos é dada por [113]:

$$S_{0,rm}^{(N)}(t, p) = \frac{\Gamma[N]}{\Gamma[N+1-(t+p)]N^{t+p}}. \quad (6.16)$$

É interessante notar que, aqui, a variável relevante é $n_e = t + p$ que indica o número de sítios explorados ao longo das trajetórias. A distribuição de períodos é simplesmente:

$$S_{0,rm}^{(N)}(p) = \sum_t S_{0,rm}^{(N)}(t, p), \quad (6.17)$$

que, para $n \gg 1$, pode ser aproximada por:

$$S_{0,rm}^{(N)}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2N}} \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{\sqrt{2N}}\right) \approx \frac{e^{-p^2/(2N)}}{p}, \quad (6.18)$$

na qual vale ressaltar que, para $p \ll \sqrt{2N}$ a distribuição de períodos decai como uma lei de potência:

$$S_{0,rm}^{(N)}(p) \approx p^{-1}, \quad (6.19)$$

independentemente do tamanho N do sistema.

6.2.2 Turista sem memória

Para $\mu = 1$ ($\tau = 0$), o caminhante conhece apenas o sítio em que se encontra, não lembrando de nenhum dos sítios previamente visitados⁴. Dessa forma, a cada intervalo de tempo, ele precisa sair do local atual e deslocar-se para o sítio mais próximo. A regra determinista de movimentação, associado à falta de memória do caminhante, não permite uma exploração muito extensa do meio, visto que após um curto transiente ele se vê preso em um ciclo formado por um par de sítios mutuamente mais próximos (casais). Estes casais são os atratores do sistema. A distribuição dos períodos é dado por:

$$S_{1,d}^{(N)}(p) = \sum_t S_{1,d}^{(N)}(t, p) = \delta_{p,2}. \quad (6.20)$$

⁴Por esse motivo, o nome “turista sem memória”.

A distribuição conjunta do tempo de transiente e do período dos ciclos pode ser obtido analiticamente para $N \gg 1$ [113]:

$$S_{1,d}^{(\infty)}(t, p) = \frac{\Gamma(1 + I_d^{-1})(t + I_d^{-1})}{\Gamma(t + p + I_d^{-1})} \delta_{p,2}, \quad (6.21)$$

onde I_d é dado pela Eq. 6.2.

6.2.3 Turista com memória

Quando permitimos que o caminhante se movimente com memória $\mu > 0$, notamos um fenômeno bastante interessante. Neste caso, a distribuição de ciclos não apresenta mais um pico no valor $p_{min} = \mu + 1$, mas apresenta todo um espectro de valores de períodos $p \geq p_{min}$, com possível decaimento como lei de potência [104, 105, 118].

6.2.4 Sistema unidimensionais

É interessante ressaltar que, em sistemas unidimensionais, o determinismo impõe fortes restrições, discutidas a seguir. Na subseção 6.2.4.1, apresentamos o caso em que a memória do caminhante é muito menor que o tamanho do sistema, e na subseção 6.2.4.2, mostramos que, mesmo com uma memória pequena, é possível explorar todo o ambiente.

6.2.4.1 Memória muito curta

Para $\mu \ll N$, não se observa a existência de ciclos com períodos $p \in [2\mu + 1, 2\mu + 3]$. Além disso, para $\mu = 2$ todos os períodos ímpares, exceto $p_{min} = 3$ são proibidos. A Ref. [119] apresenta um estudo detalhado da dinâmica da formação dos ciclos, mostrando porque alguns períodos são proibidos. O número de sítios por atrator é [104]:

$$n(p) = \frac{p}{2} + \tau + 1. \quad (6.22)$$

6.2.4.2 Transição entre os regimes de exploração local e estendido

Um dos resultados obtidos no meu Mestrado [1] é a probabilidade de um caminhante percorrer N cidades diferentes em uma caminhada com uma dada memória μ . Se um caminhante iniciar sua caminhada em uma das extremidades de um sistema unidimensional com condições abertas de contorno, poderá alcançar a outra extremidade se conseguir dar N passos sem mudar de direção. Para tanto, ele precisa ter uma memória grande o suficiente para evitar ficar preso

em ciclos. Para uma determinada memória μ , isso acontece com probabilidade [1, 120, 121]:

$$P(N|\mu) = (1 - 2^{-\mu})^{N-\mu-1}. \quad (6.23)$$

A Fig. 6.2 mostra o gráfico da Eq. 6.23 para três valores de N . Nota-se facilmente a existência de uma mudança abrupta no comportamento exploratório do caminhante em uma dimensão. Essa mudança ocorre numa faixa muito estreita de valores de memória. Considerando $N \gg 1$ e calculando a inflexão da Eq. 6.23, pode-se determinar o valor da memória em que ocorre essa transição [1]:

$$\mu_1 = \log_2 N. \quad (6.24)$$

A largura da faixa de transição independe de N e vale $\varepsilon = e/\ln 2$.

Quando $\mu < \mu_1$, o caminhante fica aprisionado em ciclos no interior do sistema. Não podendo atingir a outra extremidade, a exploração permanece local. Por outro lado, quando $\mu > \mu_1$, o número de sítios visitados cresce, permitindo ao caminhante alcançar a outra extremidade do sistema, tornando a exploração global.

Figura 6.2: Gráfico da probabilidade de um caminhante efetuar N passos sem mudar de direção (Eq. 6.23) para $N = 10, 100$ e 1000 . É possível observar a existência de uma transição abrupta no valor de $P(N|\mu)$ em $\mu_1 = \log_2 N$, com uma região de transição estreita, de largura $\varepsilon = e/\ln 2$.

6.2.5 Sistemas bidimensionais

A Fig. 6.3, mostra a distribuição conjunta dos tempos de transiente e períodos de ciclos para um sistema com $N = 1000$ e $d = 2$ para valores de memória $\mu = 9$ e $\mu = 25$. Como se pode notar facilmente, a cauda longa da distribuição marginal de períodos $S_{\mu,d}^{(N)}(p)$ permite ao caminhante explorar todo o sistema mesmo para pequenos valores de memória ($\mu \ll N$), de forma similar ao que ocorre em sistemas unidimensionais. Esta característica permitiu que a CDT fosse utilizada na análise de texturas em imagens [123, 124, 125, 126, 127].

Figura 6.3: Distribuição conjunta do tempo de transiente (t) e do período dos ciclos (p) com $N = 1000$ e $d = 2$ para (a) $\mu = 9$ e (b) $\mu = 25$. Nota-se que o aspecto geral de ambos os histogramas é similar.

6.2.6 Dimensões mais altas

A cauda longa da distribuição marginal de ciclos da Fig. 6.3 mostra que é possível obter ciclos longos mesmo para valores pequenos de memória. Esta característica da CDT permitiu que ela fosse utilizada com sucesso na caracterização de vocabulários [118] e como método de agrupamento [122].

6.2.7 Modelos de campo médio

A aproximação de campo médio consiste em fazer cada ponto interagir com a mesma intensidade com todos os outros pontos do sistema. A seguir, analisamos dois sistemas que apresentam esta característica: os modelos de ligações aleatórias e de mapeamento aleatório. O

primeiro é o limite natural para altas dimensões do espaço euclidiano e, portanto, do ambiente natural em que se desenvolve a CDT. O segundo é o único que apresenta uma solução analítica com uma distribuição não-trivial de ciclos, mesmo para o caso do turista preguiçoso e do turista sem memória. Ambos os modelos foram estudados para a CDT na Ref. [113].

6.2.7.1 Ligações aleatórias

À medida que o número de dimensões do espaço euclidiano aumenta, as correlações entre as distâncias se tornam mais fracas. Quando $d \rightarrow \infty$, essas correlações podem ser desprezadas e as distâncias entre os pontos podem ser consideradas como variáveis aleatórias independentes. Neste modelo, a distribuição do tempo de transiente, no limite termodinâmico, para a caminhada do turista sem memória pode ser obtida tomando o limite $d \rightarrow \infty$ na Eq. 6.21:

$$S_{1,rl}^{(\infty)}(t) = \frac{t+1}{(t+2)!} . \quad (6.25)$$

Para $\mu = 2$, a distribuição conjunta dos tempos de transiente e dos períodos dos ciclos é dada por [128]:

$$S_{2,rl}^{(N)}(t, p) = \frac{e^{-\frac{(t+p-2)(t+p-3)}{3N}}}{(3 - \delta_{t,0})N} . \quad (6.26)$$

As distribuições marginais dos tempos de transiente e dos períodos podem ser obtidas integrando a Eq. 6.26, obtendo, respectivamente:

$$S_{2,rl}^{(N)}(t) = \left(1 + \frac{\delta_{t,0}}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{6N}} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{6N}}\right) , \quad (6.27)$$

$$S_{2,rl}^{(N)}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{6N}} \operatorname{erfc}\left(\frac{p-7/2}{\sqrt{6N}}\right) \approx \frac{e^{-p/(6N)}}{p} . \quad (6.28)$$

É interessante notar que o decaimento da distribuição do tempo de transiente para $\mu = 1$ é muito mais rápido do que para $\mu \geq 2$. Isto se deve ao fato de que, no primeiro caso, a dinâmica é regida pela estatística de valores extremos, enquanto que no segundo é regida por uma estatística combinatória. Esta mudança na descrição estatística faz com que a distribuição $\delta_{p,2}$ para $\mu = 1$ se transforme em uma distribuição de períodos larga, com decaimento em lei de potência, para $\mu \geq 2$. Dessa forma, pode-se concluir que mesmo uma janela de memória de um único passo favorece sobremaneira a exploração do ambiente aleatório pelo caminhante.

6.2.7.2 Mapeamento aleatório

Neste modelo, todas as restrições de simetria são relaxadas, e a distância de um ponto a si mesmo não é necessariamente nula. Assim, para um ambiente de N pontos, existem N^2 distâncias aleatórias independentes. A distribuição conjunta dos tempos de transiente e dos períodos dos ciclos para este caso, com $\mu = 0$, são, respectivamente, dados pelas Eqs. 6.16 e 6.18. Utilizando a grandeza $n_e = t + p$, a Eq. 6.16 pode ser reescrita como:

$$S_{0,rm}^{(N)}(n_e) = \frac{\Gamma[N]}{\Gamma[N - n_e + 1]N^{n_e}}, \quad (6.29)$$

na qual se nota que a distribuição diverge no limite termodinâmico.

6.2.7.3 Equivalência entre o MLA e o MMA

Os modelos de ligações aleatórias e de mapeamento aleatório são as aproximações de campo médio do PPA e do modelo de Kauffmanm, respectivamente. Estes modelos são muito diferentes na essência, entretanto suas aproximações de campo médio são similares. Comparando as Eqs. 6.28 e 6.18, pode-se notar uma equivalência não-trivial entre o MMA com $3N$ pontos e $\mu = 0$ e o MLA com N pontos e $\mu = 2$ [128].

6.3 Conclusão

Apesar de menos exploradas que as caminhadas aleatórias, as deterministas também apresentam resultados bastante interessantes. Neste capítulo apresentamos uma revisão do problema do ponto aleatório e da caminhada determinista do turista. Para o PPA, mostramos algumas características geométricas e as propriedades estáticas do meio no qual se desenvolve a CDT. Mostramos que o comportamento da CDT muda em função do número de dimensões do sistema e da memória do caminhante, ressaltando as distribuições conjuntas dos tempos de transiente e dos períodos dos ciclos, bem como a existência de uma transição para ambientes unidimensionais. Apresentamos ainda dois modelos de campo médio, que sugerem o comportamento da CDT em ambientes com muitas dimensões.

7 *Caminhada Estocástica do Turista*

Caminhadas aleatórias e técnicas estocásticas estão cada vez mais presentes em ciência e em engenharia, principalmente nos estudos de fenômenos naturais. A caminhada aleatória tem sua origem nos estudos do movimento de partículas em um líquido [3]. As caminhadas aleatórias podem se desenvolver sobre uma rede regular ou em meios desordenados. Um exemplo clássico é o problema do caixeiro viajante (PCV), no qual um caminhante (o caixeiro viajante) conhece *a priori* a localização de todas as cidades de uma determinada região. A distribuição espacial dessas cidades pode formar um meio desordenado, similar ao descrito pelo problema do ponto aleatório (PPA - Cap. 6) [111, 112]. Este caixeiro viajante inicia sua jornada em uma determinada cidade e deve visitar todas as outras uma única vez, retornando, ao fim, à cidade de origem, utilizando, para isso, o caminho mais curto possível. Por se tratar de um problema não-polinomial (NP) de difícil solução, seu estudo por meios numéricos ou analíticos são reconhecidamente complicados. Atualmente, as ferramentas numéricas mais utilizadas no estudo deste problema são o recozimento simulado (simulated annealing) e o algoritmo genético. Apesar de reconhecidamente eficientes, estes métodos demandam recursos computacionais muito grandes. Dessa forma, métodos alternativos que reduzam essa demanda por recursos computacionais são bastante desejáveis.

Lima *et al.* [104], em 2001 apresentaram uma nova forma de explorar um sistema desordenado, utilizando um caminhante que se move por meio de uma regra determinista, sujeito a uma memória μ . Essa caminhada é conhecida como a “caminhada do turista” (CT) [105] e foi apresentada no Cap. 6. Neste Capítulo, apresentamos a versão estocástica da CT, conhecida como “Caminhada Estocástica do Turista” (CET). A CET foi estudada por Martinez *et al.* [129] para ambientes com número de dimensões d arbitrário e para um caminhante com $\mu = 0$. Risau-Gusman *et al.* [117] examinaram o caso particular de sistemas unidimensionais com $\mu = 1$. Em ambos os casos, foi encontrada uma transição vítrea. Mais recentemente, J. M. Berbert e A. S. Martinez [130] mostraram que a transição observada na caminhada determinista do turista (CDT) em sistemas unidimensionais também ocorre na CET [131].

7.1 Caminhada estocástica do turista

A caminhada estocástica do turista é uma generalização da CDT [104], de modo a representar situações mais realistas. Assim, uma paisagem desordenada pode ser formada por N pontos que representam, por exemplo, locais de alimentação, como flores, árvores, poças d'água, ilhas, etc [129], em um ambiente de d dimensões. Cada ponto dessa paisagem tem suas coordenadas, $x_i^{(k)}$, com $i = 1, 2, \dots, N$ e $k = 1, 2, \dots, d$, tiradas aleatoriamente, com distribuição uniforme sobre as arestas de um hipercubo de d dimensões. Para se mover entre os diversos pontos (sítios), o caminhante utiliza uma estratégia baseada em alguma função custo $E(D_{i,j})$, que é uma função monotonamente crescente da distância euclidiana normalizada $D_{i,j}$ entre os sítios i e j . A distância normalizada é obtida dividindo a distância real pela separação média entre os sítios que formam o sistema. Geometricamente, podemos imaginar que o volume total de um hipercubo de aresta L é N vezes o volume de um hipercubo com arestas iguais à separação média entre os N sítios do meio (ℓ). Assim, pode-se escrever: $N\ell^d = L^d \Rightarrow \ell = LN^{-1/d}$. Como na CET, $L = 1$, distância euclidiana normalizada é, então:

$$D_{i,j} = N^{1/d} \left\{ \sum_{k=1}^d \left[x_i^{(k)} - x_j^{(k)} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (7.1)$$

Este procedimento preserva a densidade de sítios à medida que o número de dimensões do sistema aumenta, permitindo comparar sistemas com número de dimensões diferentes.

A estratégia de movimentação do caminhante neste ambiente se baseia na função custo $E(D_{j,i})$ e segue uma pdf que depende do inverso de uma temperatura ($\beta = 1/T$, $T > 0$) e da memória do caminhante ($\mu \geq 0$). Essa pdf deve ser tal que admita duas situações limites:

1. à medida que β diminui (T aumenta), saltos mais longos são favorecidos, de modo que quando $\beta \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$), todos os destinos podem ser alcançados com a mesma probabilidade (saltos puramente aleatórios), e
2. à medida que β aumenta (T diminui), a exploração local é favorecida, de modo que para $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$), a CDT é reobtida.

Assim, a estocasticidade é controlada pelo parâmetro $\beta = 1/T$ enquanto que a memória é responsável pela autorrepulsividade, da mesma forma que na CDT, proibindo a revisitação de um sítio pelos próximos μ passos. A probabilidade do caminhante efetuar um salto do ponto i ao j então pode ser escrita como:

$$W_{j \leftarrow i} = \frac{e^{-\beta E(D_{i,j})}}{Z_i^{(\beta, \mu)}}, \quad (7.2)$$

onde $Z_i^{(\beta, \mu)}$ é o coeficiente de normalização, dado por:

$$Z_i^{(\beta, \mu)} = \sum_{k=1}^N ' e^{-\beta E(D_{i,k})}, \quad (7.3)$$

onde a memória proíbe a revisitação dos últimos μ sítios. Essa correção é feita pelo símbolo de somatório $\sum'$, que exclui os sítios proibidos.

Note-se que a Eq. 7.2 admite as duas condições limites apresentadas anteriormente. A exploração local é privilegiada para para $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$), recuperando a CDT. Além disso, para $T \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$), o caminhante pode visitar todos os pontos permitidos com probabilidade

$$W_{j \leftarrow i} = \frac{1}{N - \mu} \quad (7.4)$$

para todos os j permitidos. Uma vez que temos dois comportamentos totalmente distintos para a Eq. 7.2, podemos acreditar na existência de uma transição entre esses dois comportamentos, em função de T e μ .

A seguir, mostramos que uma transição vítrea ocorre para uma temperatura crítica, para uma função custo específica, em um sistema com um número arbitrário de dimensões e $\mu = 0$. Além disso, ressaltamos as dificuldades de um estudo analítico em sistemas unidimensionais, exceto para $\mu = 1$. Finalmente, mostramos que a transição entre os regimes de exploração localizada e estendida ocorre em sistemas unidimensionais e pode ser escrita em termos em termos de T , μ e do número de passos N_p .

7.2 Turista preguiçoso em sistemas com número arbitrário de dimensões: transição vítrea

Estudando a CET em ambientes multidimensionais com memória $\mu = 0$, Martinez *et al.* [129] encontraram uma conexão entre modelos de comportamento exploratório [132, 133] e a física estatística de transições vítreas descritas por modelos de aprisionamento [134, 135, 136, 137, 138, 139]. Os autores mostraram que a transição vítrea pode ocorrer quando um caminhante explora um meio aleatório. Esta exploração depende de uma função custo $E(D_{i,j})$, utilizada para ponderar os movimentos possíveis.

Para cada número de dimensões d do sistema, existe uma função custo apropriada que permite a transição entre os comportamentos de exploração localizada e estendida. O parâmetro de ordem é o tempo médio de aprisionamento $\langle t_r(\beta) \rangle$, ou seja, o tempo médio que o caminhante permanece aprisionado em um sítio. O tempo médio de aprisionamento $\langle t_r \rangle$ diverge abaixo de

um nível estocástico finito T_d . Neste caso, o sistema permanece em um estado fora do equilíbrio e aparecem fenômenos de envelhecimento.

O cálculo de $\langle t_r(\beta) \rangle$ pode ser encontrado nas Refs. [129, 140]. A função custo deve ser uma função monotonamente crescente da distância, de modo que quanto mais distante, maior seja o custo para realizar o deslocamento. Existem várias formas de uma função ser monotonamente crescente, dentre essas, podemos destacar a lei de potência e a exponencial, ou uma função generalizada que inclua estas duas situações, como as vistas no Cap. 1 [12]. Nestes casos, a função cresce indefinidamente, entretanto, existem situações nas quais a função cresce até atingir um valor máximo, como é o caso das funções acumuladas de pdf's. Estas ainda podem ser divididas em duas categorias: as que apresentam ponto de inflexão (mudança de concavidade) e as que não o apresentam. Algumas destas funções foram apresentadas no Cap. 3, no contexto das dinâmicas populacionais [39].

Assumindo-se $E(D)$ como uma lei de potência: $E(D_{i,j}) = D_{i,j}^\alpha$, onde α é um expoente ajustável, podemos observar diferentes comportamentos para o tempo médio de aprisionamento em função de α :

- $\alpha < d$: neste caso, $\langle t_1(\beta) \rangle$ é finito para qualquer valor de β , de tal forma que, para tempos longos, o sistema é subdifusivo.
- $\alpha > d$: neste caso, $\langle t_1(\beta) \rangle$ sempre diverge.
- $\alpha = d$: esta é a situação mais interessante, uma vez que a competição entre o tempo de residência e a cauda da distribuição das distâncias aos primeiros vizinhos permite o aparecimento de uma transição vítrea para um valor finito de β :

$$\langle t_1(\beta) \rangle = \begin{cases} 1/(1 - \beta/A_d) & (\beta < A_d) \\ \infty & (\beta \geq A_d) \end{cases}, \quad (7.5)$$

onde $A_d = \pi^{d/2}/\Gamma(d/2 + 1)$ é o volume de uma hipersfera de d dimensões e raio unitário. Neste caso, o tempo médio de residência é finito apenas para $\beta < A_d$ e divergem em $\beta_d = A_d$, isto é, o caminhante pode explorar o meio até que β assumo o valor do volume de uma hipersfera de raio unitário de d dimensões. Após isso, o sistema entra em um regime fora do equilíbrio e os fenômenos de envelhecimento emergem.

A pdf do tempo de residência como função de β apresenta uma cauda de lei de potência e uma transição vítrea ocorre quando é utilizada a função custo $E(D_{i,j}) = D_{i,j}^d$. É importante ressaltar que este resultado somente ocorre para a distribuição particular de sítios utilizada

(processo de Poisson) e para uma função custo do tipo lei de potência. Entretanto, este não é o único cenário possível. Estudos futuros deverão levar em conta outras funções custo, tais como as funções generalizadas, que podem trazer uma maior riqueza ao espaço de parâmetros do problema.

7.3 Turista sem memória em ambientes unidimensionais

Consideremos agora o caso do caminhante com memória $\mu = 1$. Como ele não pode permanecer no mesmo sítio, ele salta para um de seus $N - 1$ vizinhos com uma probabilidade que depende da distância a cada um deles de acordo com uma função custo $E(D)$. Este caso particular da CET foi estudada por S. Risau-Gusman *et al.* [117]. A dinâmica da caminhada mostra que, para baixas temperaturas, o caminhante sempre se desloca para o vizinho mais próximo. Dessa forma, ele eventualmente fica aprisionado em um ciclo formado por um par de vizinhos mutuamente mais próximos (casal). Estes casais desempenham o mesmo papel que os sítios do caso $\mu = 0$. Entretanto, para $T > 0$, esses ciclos não são mais estáveis e podem ser caracterizados por uma distribuição de tempos de aprisionamento $P(t_r)$. Esta distribuição permite encontrar o tempo médio de aprisionamento nos casais a partir da distribuição das distâncias por um processo de Poisson espacial.

Considerando a mesma função custo utilizada no caso $\mu = 0$, $E(D_{i,j}) = D_{i,j}^d$, com $d = 1$, e que a distância ao primeiro vizinho do casal é muito maior que a distância que separa o casal, verifica-se que o tempo médio de aprisionamento no casal assume valores finitos para $\beta < \beta_1 = 2$, e diverge para $\beta \geq \beta_1 = 2$. Portanto, o sistema apresenta um comportamento ergódico para altas temperaturas ($\beta < \beta_1$) e não-ergódico para baixas temperaturas ($\beta \geq \beta_1$).

A temperatura crítica obtida neste caso é a mesma obtida para $\mu = 0$: $\beta_1 = A_1 = 2$. Isto pode ser entendido se notarmos que $2/3$ dos N pontos do meio formam casais [118, 113]. Assim, podemos desprezar o efeito dos $N/3$ pontos que formam o transiente na CDT. Considerando os casais como pontos e renormalizando o tempo (contando um passo a cada dois), obtemos a mesma situação para $\mu = 1$ e para $\mu = 0$, o que explica porque ambos casos apresentam a mesma temperatura crítica.

Os casos com $\mu \geq 2$ são muito mais difíceis de tratar analiticamente devido ao fato de que na CDT, esses sistemas não apresentam um período de ciclo característico, mas todo um espectro de valores [128], que pode ser largo, de modo que o valor médio não é representativo da distribuição. Assim, não é possível a renormalização do tempo (contar o tempo em intervalos de $\mu + 1$), como feito para $\mu = 1$.

7.4 Sistemas unidimensionais com memória arbitrária

Consideremos agora o caso em que o caminhante tem uma memória de tamanho arbitrário ($\mu > 1$) em ambientes unidimensionais. Este caso foi estudado nas Refs. [130, 131].

Primeiramente consideremos que, devido à natureza estocástica da CET, é possível que o caminhante escape dos ciclos, mesmo em temperaturas baixas. Para tanto, basta esperar um tempo suficientemente longo, o que, numericamente, equivale a aumentar o número de passos (N_p) da simulação. Além disso, o aumento da temperatura permite que o caminhante escape mais facilmente dos ciclos, favorecendo uma exploração mais ampla do meio. A Fig. 7.1 mostra a taxa média de visitação de sítios distintos em função da memória para diversas temperaturas. Nota-se claramente que, para baixas temperaturas, existe um valor bem definido de memória no qual ocorre a transição entre a exploração local e a estendida, enquanto que, para altas temperaturas apenas um regime é observado.

Figura 7.1: Taxa média de visitação de sítios distintos em função da memória para 10 valores diferentes de temperatura. Nota-se que o comportamento da taxa de visitação muda drasticamente com o aumento da temperatura. Para alguns casos ($T \geq 2$), não existe mais a transição entre a exploração localizada e estendida. (Gráfico adaptado da Ref. [130] com autorização dos autores)

O aumento de N_p deforma levemente os gráficos da Fig. 7.1. Considerando o ponto de inflexão dos gráficos como sendo a memória crítica na qual ocorre a transição entre os regimes de exploração, é possível determinar a relação entre T e μ_1 . Sendo T_0 a temperatura crítica quando $\mu = 0$ e μ_0 a memória crítica quando $T = 0$, quando $N_p \rightarrow \infty$, é possível escrever a relação empírica [130]:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_0}. \quad (7.6)$$

O efeito de tamanho finito de N_p pode ser quantificado numericamente [130], de tal forma que a relação entre a temperatura e a memória crítica na transição entre os regimes de exploração é dada por:

$$\frac{T}{10T_0} \left(\frac{N_p}{N} \right)^{5/18} = 1 - \frac{3\mu_1}{2\mu_0} \left(\frac{N_p}{N} \right)^{-1/18}. \quad (7.7)$$

Outro resultado interessante da Ref. [130] é a limitação do tempo de envelhecimento máximo da caminhada em $N_p \approx 4000N$ passos. Este tempo de caminhada é suficiente para obter os mesmo resultados da Eq. 7.6, obtido na hipótese de $N_p \rightarrow \infty$. Este resultado é interessante, pois limita o tempo das simulações numéricas em um valor razoavelmente baixo, de modo a torná-las suficientemente rápidas.

7.5 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos a caminhada estocástica do turista (CET), uma variação da CDT, que apresenta esta última como caso particular para $T = 0$. Mostramos que, apesar de sua natureza estocástica, a CET também apresenta uma transição no comportamento exploratório do caminhante em ambientes multidimensionais, com $\mu = 0$ e unidimensionais com memória de tamanho arbitrário. Entretanto, o estudo realizado até aqui está longe de esgotar o tema da CET. Estudos futuros deverão levar em conta outras funções custo, tais como as funções logaritmo e exponencial generalizadas, que podem trazer uma maior riqueza ao espaço de parâmetros do problema. Outro estudo ainda pendente tanto para a CET quanto para a CDT se refere aos processos não poissônicos, não contemplados pelos estudos realizados até agora.

8 *Caminhada Estocástica Modificada do Turista*

Nos capítulos anteriores mostramos as caminhadas determinista (CDT) e estocástica (CET) do turista. Apesar de simples no enunciado e na implementação numérica, as duas versões da caminhada do turista (CT) apresentam grandes dificuldades tanto no tratamento analítico quanto no numérico. Somente algumas situações particulares puderam ser estudadas mais detalhadamente até agora. No caso particular da CET, a principal dificuldade está no coeficiente de normalização $Z_i^{(\beta, \mu)}$ da Eq. 7.2, cujo valor muda em função do instante e do ponto considerado. A fim de contornar essa dificuldade, resolvemos modificar o modelo, criando a caminhada estocástica modificada do turista (CEMT), que é um modelo original e será apresentada neste capítulo. A CEMT foi estudada analiticamente e os resultados obtidos foram validados numericamente, por meio de simulações computacionais. Este estudo mostrou que a CEMT também apresenta uma transição, além de permitir obter analiticamente a relação entre os parâmetros μ e T na região de transição.

8.1 Modelo

Consideremos o ambiente desordenado no qual se desenvolvem as caminhadas determinista e estocástica do turista. Ela ocorre um hipercubo de d dimensões com N pontos cujas coordenadas são sorteadas (com distribuição uniforme) nas arestas de comprimento L . Um caminhante, movendo-se nesse ambiente, segue a regra determinista de, a cada intervalo discreto de tempo, deslocar-se para um ponto, dentro de um alcance máximo T ,¹ que não tenha sido visitado nos μ passos anteriores. Como T representa a distância máxima do passo seguinte, ele determina um volume hipersférico d -dimensional centrado no ponto em que o caminhante se encontra em um dado instante. Esse volume é dado por:

$$V = \frac{\pi^{d/2} T^d}{\Gamma(1 + d/2)}, \quad (8.1)$$

¹ Note que, neste modelo, o parâmetro T não representa uma temperatura formal, mas uma distância.

onde $\Gamma(x)$ é a função gama. Como o meio é um hipercubo d -dimensional de aresta unitária ($L = 1$), T deve variar dentro da faixa $0 \leq T \leq d^{1/2}$, visto que a máxima distância é a diagonal do hipercubo. O interior do volume V é composto de n_v pontos, dos quais n_μ fazem parte da janela de exclusão da memória². Os pontos do meio pode estar em uma de três situações:

- os μ pontos dentro da janela de exclusão da memória estão proibidos de revisitação no passo seguinte;
- os n_v pontos dentro do volume V definido pelo alcance máximo T , exceto os n_μ que estão na janela de exclusão, têm a mesma probabilidade de serem visitados no passo seguinte;
- os demais pontos do meio estão inalcançáveis no passo seguinte.

A Fig. 8.1 ilustra a situação descrita para $d = 2$.

A probabilidade do caminhante, localizado no ponto i , se deslocar para o ponto j qualquer será:

$$W_{j \leftarrow i} = \begin{cases} \frac{1}{n_v - n_\mu} & \text{se } D_{ij} \leq T \text{ e } j \text{ não pertencer à memória,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8.2)$$

Figura 8.1: Caminhada estocástica modificada do turista com $d = 2$, $N = 40$ e $\mu = 4$. A linha tracejada mostra a trajetória. O círculo maior indica o volume V de raio T . Os pontos pretos (externos ao volume V) são inalcançáveis no passo seguinte. Os pontos cinzas fazem parte da memória e não podem ser revisitados no passo seguinte. Os pontos brancos podem ser visitados no passo seguinte com mesma probabilidade $W = 1/5$. Neste exemplo, $n_v = 8$ e $n_\mu = 3$.

²Note que $n_\mu \leq \mu$.

Note que, na Eq. 8.2, quanto mais n_μ se aproximar de n_v , maior será a probabilidade individual de cada ponto remanescente do volume V ser visitado no passo seguinte. Isso porque, aumentando o número de pontos na janela de exclusão, menos pontos sobram no interior de V para serem visitados. Entretanto, se $n_\mu = n_v$, $W_{j \leftarrow i}$ diverge, o que claramente é um absurdo, visto que nenhuma probabilidade pode ser maior que a unidade. Esta situação ocorre quando todos os pontos de V já foram visitados nos passos anteriores e $\mu \geq n_v$. Chamamos esta condição de *morte do turista*. A caminhada, neste caso, termina por “apoptose”³. Esta condição é idêntica à que ocorre na CDT com $\mu = N$.

Consideremos a separação média $\ell = LN^{-1/d}$ entre os pontos que formam o ambiente. Se $T \ll \ell$, a maioria dos volumes formados terão apenas um ponto em seu interior. Nessa condição, essas caminhadas terminarão prematuramente por apoptose antes do primeiro passo, independentemente do tamanho da memória $\mu > 0$. Como T é constante durante toda a caminhada, é interessante observar que, se o primeiro passo foi dado, então $n_v \geq 2$, ou seja, no interior de V existem sempre pelo menos 2 pontos⁴: a localização do caminhante em um dado instante (que é o centro de V) e o ponto visitado no passo imediatamente anterior (cuja distância ao centro é, no máximo, igual a T). Assim, se $T \geq \ell$, os volumes formados terão, em média, pelo menos dois pontos em seu interior e as caminhadas poderão ocorrer, dependendo do valor de μ . Neste caso, a morte do turista só ocorrerá se $\mu \geq n_v$. É importante deixar claro que esta condição, embora necessária, não é suficiente para que ocorra a morte do turista.

Em suma:

- para T pequeno em relação a ℓ , o caminhante sempre morre, desde que $\mu > 0$.
- Se T é comparável a (ou maior que) ℓ , a sobrevivência do caminhante depende das relações entre μ , n_μ e n_v :
 - se $\mu < n_v$, sempre haverá pontos a serem visitados e o caminhante sobrevive;
 - se $\mu \geq n_v$ e $n_\mu < n_v$, há pontos a serem visitados e o caminhante sobrevive;
 - se $\mu \geq n_v$ e $n_\mu = n_v$, todo o volume V está ocupado pela memória e o caminhante morre.
- Se $\mu = 0$, o caminhante sempre sobrevive, independentemente do valor de T . Note que, neste modelo, o turista preguiçoso só existe se $n_v = 1$. Se $n_v > 1$, o caminhante pode se locomover para qualquer ponto do volume V (até mesmo para o ponto que está ocupando) com probabilidade $W = 1/n_v$.

³O termo apoptose é utilizado em analogia à auto-destruição celular (morte programada).

⁴Considerando como “interior” de V toda a região interna à hipersfera de raio T , inclusive sua borda.

É importante observar que, para que haja uma exploração efetiva do meio, é necessário garantir a sobrevivência do caminhante pela maior quantidade possível de passos. Além disso, nota-se claramente que, da mesma forma que na CDT e na CET unidimensionais, neste modelo também existe uma mudança drástica (transição) no comportamento do caminhante, embora o parâmetro, neste caso, não seja a taxa de visitação, mas a sobrevivência. A variável relevante na sobrevivência do caminhante é o número de pontos disponíveis para visitação $n_d = n_v - n_\mu$, que depende diretamente de T e μ . Além disso, vale ressaltar que toda esta análise foi efetuada em termos do volume V , independentemente do número de dimensões do sistema. Dessa forma, pode-se concluir que tal mudança de comportamento esteja presente para qualquer valor de d , e não apenas para $d = 1$, como nos casos anteriores.

8.2 Tratamento analítico

A principal modificação introduzida na CEMT está na alteração do parâmetro estocástico T de uma temperatura formal para uma distância. Esta modificação simplificou o problema de modo a permitir um tratamento analítico baseado na estatística de variáveis aleatórias discretas. Os resultados obtidos mostram que a CEMT também apresenta uma transição similar à encontrada na CDT e na CET, embora não na taxa de visitação, mas na de morte do caminhante. Além disso, observou-se que a CEMT também apresenta um efeito de envelhecimento, em qualquer dimensionalidade, como o observado empiricamente para a CDT unidimensional. Os resultados analíticos obtidos foram validados numericamente através de simulações computacionais. Estas simulações também mostraram que a transição observada favorece a visitação plena do meio desordenado.

8.2.1 Transição na sobrevivência do caminhante

Como na CEMT os pontos estão aleatoriamente distribuídos no espaço, n_v é uma variável aleatória discreta. Para encontrar a distribuição de n_v , imaginemos o seguinte problema: em um ambiente d -dimensional de volume V' , N pontos são distribuídos aleatoriamente e uniformemente. Qual é a probabilidade de que, em um volume $V \leq V'$, existam exatamente k pontos? Sejam n_v o número de pontos no interior do volume V e $v = V/V'$ a fração que o volume V representa do volume total V' . Como a distribuição dos pontos é uniforme, o valor médio de n_v é $\langle n_v \rangle = Nv$. De fato, é fácil perceber que n_v segue uma distribuição binomial, com probabilidade de sucesso v :

$$p(n_v = k) = \binom{N}{k} v^k (1 - v)^{N-k}. \quad (8.3)$$

Este resultado foi validado numericamente. Na CEMT, $V' = 1$ e, dessa forma, temos que $v = V$, com V dada pela Eq. 8.1. Assim, podemos escrever a Eq. 8.3 explicitando a dependência com T e d :

$$p(n_v = k) = \binom{N}{k} \left[\frac{\pi^{d/2} T^d}{\Gamma(1 + d/2)} \right]^k \left[1 - \frac{\pi^{d/2} T^d}{\Gamma(1 + d/2)} \right]^{N-k}. \quad (8.4)$$

Por ser uma característica exclusivamente estática do meio, n_v não depende de μ .

Assim como n_v , n_μ também é uma variável aleatória. Para encontrar sua distribuição, consideremos o seguinte problema: Em um conjunto de N pontos, μ apresentam uma característica C . Qual a probabilidade de que, em uma amostra V , de tamanho n_v , existam exatamente k elementos com a característica C ? Sejam n_μ o número de elementos de V que apresentam a característica C e M o subconjunto de todos os elementos com essa característica, conforme o diagrama de Venn mostrado na Fig. 8.2. A distribuição de n_μ segue a distribuição hipergeométrica [85], dada por:

$$p(n_\mu = k) = \frac{\binom{n_v}{k} \binom{N-n_v}{\mu-k}}{\binom{N}{\mu}}. \quad (8.5)$$

Este resultado também foi validado numericamente.

Figura 8.2: Diagrama de Venn da CEMT. A intersecção de V e M apresenta n_μ pontos, a região de M que não está contida em V possui $\mu - n_\mu$ pontos e a região de V que não está contida em M possui $n_v - n_\mu$ pontos. O número de pontos do conjunto todo que não pertencem nem a M nem a V é $N - n_v - \mu + n_\mu$.

Para que ocorra a morte do caminhante é necessário que $n_v = n_\mu$. Isto significa que as condições $n_v = k$ e $n_\mu = k$ devem ser simultaneamente satisfeitas. Sejam A o evento $n_v = k$ e B o evento $n_\mu = k$. Observando o diagrama da Fig. 8.2, pode-se supor que B é um subconjunto

de A . Esta suposição, aliada ao fato de que $n_\mu \leq n_\nu$, nos leva a crer que B é dependente de A . Assim, podemos escrever:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A). \quad (8.6)$$

Se o primeiro passo foi dado na caminhada, então no interior de V existem pelo menos 2 pontos, isto é, $n_\nu \geq 2$. Considerando que $B \equiv A$ e que A possui $\binom{n_\nu}{j}$ subconjuntos com j elementos, dos quais devemos desconsiderar os subconjuntos vazios e unitários, então: $P(B|A) = \frac{1}{\sum_{j=2}^{n_\nu} \binom{n_\nu}{j}} = \frac{1}{2^{n_\nu} - n_\nu - 1}$. Assim: $P(A \cap B) = \left(\frac{1}{2^{n_\nu} - n_\nu - 1}\right) \binom{N}{k} V^k (1-V)^{N-k}$, com V dada pela Eq. 8.1 fornecendo a dependência com T e d . Entretanto, a suposição de que B é um subconjunto de A está errada. Embora $n_\mu \leq n_\nu$, o valor de n_μ não depende de n_ν , mas de μ , visto que n_μ só poderá ser igual a n_ν se $\mu \geq n_\nu$.

Como μ não depende de n_ν , este último não representa uma restrição em si para o valor de n_μ e, portanto, os eventos são independentes e $P(B|A) = P(B)$ na Eq. 8.6. Dessa forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) = \binom{N}{k} V^k (1-V)^{N-k} \frac{\binom{n_\nu}{k} \binom{N-n_\nu}{\mu-k}}{\binom{N}{\mu}} = \\ &= \binom{\mu}{k} V^k (1-V)^{N-k}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Para determinar a probabilidade de que o caminhante morra a cada passo, é necessário somar a Eq. 8.7 sobre todos os valores permitidos de k . Considerando que T seja grande o suficiente para permitir que a caminhada aconteça, então $2 \leq k \leq \mu$, visto que a condição $k = 0$ não pode ocorrer e que para $k = 1$ a caminhada não acontece. Assim, a probabilidade f do caminhante morrer a cada passo é dada por:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=2}^{\mu} \binom{\mu}{k} V^k (1-V)^{N-k} = \sum_{k=2}^{\mu} \binom{\mu}{k} V^k (1-V)^{N-\mu} (1-V)^{\mu-k} \\ &= (1-V)^{N-\mu} \sum_{k=2}^{\mu} \binom{\mu}{k} V^k (1-V)^{\mu-k} \\ &= (1-V)^{N-\mu} \left[\sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} V^k (1-V)^{\mu-k} - (1-V)^\mu - \mu V (1-V)^{\mu-1} \right] \\ &= (1-V)^{N-\mu} [1 - (1-V)^\mu - \mu V (1-V)^{\mu-1}] \\ &= (1-V)^N \left[-1 + (1-V)^{-\mu} - \frac{\mu V}{1-V} \right]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

A Fig. 8.3a mostra o aspecto da Eq. 8.8 para um ambiente com $N = 100$ pontos. Como o gráfico está em função de V , seu aspecto não é influenciado por mudanças no número de

dimensões do sistema. É possível notar que a morte do turista ocorre preferencialmente quando $\mu \sim \mathcal{O}(N)$, exceto quando $V \rightarrow 0$. No caso $V \rightarrow 0$, a morte só ocorre se $n_v = 1$, entretanto, se o primeiro passo ocorreu na caminhada, $n_v > n_\mu$ e a sobrevivência do caminhante está garantida. Nos demais casos, a sobrevivência é a regra geral. A Fig. 8.3b mostra as curvas de nível de f . É interessante observar que a largura da região de transição entre a sobrevivência e a morte do caminhante apresenta uma largura variável.

Figura 8.3: (a) Aspecto da probabilidade de morte do caminhante a cada passo (Eq. 8.8) para um ambiente com $N = 100$ pontos. Note que o aspecto deste gráfico não depende de d . (b) Curvas de nível da Eq. 8.8. As regiões mais claras são as mais prováveis. As curvas de níveis apresentadas são as que apresentam os valores $f = 0,2$; $f = 0,4$; $f = 0,6$ e $f = 0,8$.

É importante ressaltar que o fator fora dos colchetes na Eq. 8.8 depende apenas de N , enquanto que o fator dentro dos colchetes depende apenas de μ . Dessa forma, o primeiro fator explicita o efeito de tamanho finito do sistema, enquanto que o segundo, o efeito da memória. No limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), $f \rightarrow 0$, mostrando que a sobrevivência é a regra geral. De fato, se $V > 0$, com $N \rightarrow \infty$, $\langle n_v \rangle = NV \rightarrow \infty$, fazendo a Eq. 8.4 tornar-se $p(n_v = k) = \delta_{k,\infty}$. Assim, $n_\mu < n_v$, $\forall \mu \neq N$, favorecendo a sobrevivência do caminhante. A Fig. 8.4 mostram o efeito de N finito sobre o comportamento da Eq. 8.8.

As curvas de nível da Fig. 8.4 mostram que, à medida que N aumenta, a região de transição entre sobrevivência e morte sofre um deslocamento para a região onde $V \ll 1$ e $\mu \rightarrow N$, tornando-se cada vez mais estreita. Para determinar a dependência entre μ e V na região de transição, é necessário analisar o comportamento da Eq. 8.8 para μ e V constantes.

A Fig. 8.5a mostra o comportamento da Eq. 8.8 a μ constante, para diversos valores de

Figura 8.4: Curvas de nível da probabilidade de morte do caminhante (Eq. 8.8) para diversos valores de N . As áreas mais claras são as mais prováveis. As curvas de níveis mostradas apresentam os valores $f = 0,2$; $f = 0,4$; $f = 0,6$ e $f = 0,8$. É possível notar claramente o efeito de tamanho finito, evidenciado pelo deslocamento da região de transição para a região em que $V \ll 1$ e $\mu \rightarrow N$. Para $N \rightarrow \infty$, a probabilidade de morte é nula $\forall V, \forall \mu \neq N$.

μ . Para que exista a transição procurada, é necessário que a curva analisada tenha uma região de sobrevivência total ($f = 0$) e outra de morte total ($f = 1$). Claramente isso não ocorre nas curvas da Fig. 8.5a, visto que o ponto de máximo das curvas com $\mu \neq N$ não corresponde a $f = 1$. Dessa forma, as curvas a μ constante não são adequadas para determinar a região de transição da CEMT.

Por outro lado, os gráficos da Fig. 8.5b (probabilidade de morte com V constante), atingem

o valor máximo $f = 1$. É interessante observar que estes gráficos têm um comportamento exponencial e, portanto, apresentam uma escala característica em μ . Em um modelo de decaimento exponencial, $y = Ae^{-kx}$, a escala característica é dada por $x_0 = 1/k$, que equivale à abscissa na qual a função atinge o valor $y = A/e$. Em primeira aproximação, podemos considerar essa função como sendo $y = A$ se $0 \leq x \leq 1/k$ e $y = 0$ se $x > 1/k$. Usando esta mesma aproximação para as curvas da Fig. 8.5b, podemos considerar que o valor de μ no qual ocorre a transição (μ_v) será aquele no qual $f = e^{-1}$. Para determinar o valor de μ_v em função de V é necessário encontrar as raízes da equação:

$$(1 - V)^N [-1 + (1 - V)^{-\mu_v} - \mu_v V (1 - V)^{-1}] - f = 0. \quad (8.9)$$

Esta equação não tem solução analítica, mas é possível resolvê-la numericamente. Utilizando o método de Newton-Raphson⁵ para estimar as raízes da Eq. 8.9 com aproximação de 10^{-4} , obtivemos o gráfico mostrado na Fig. 8.6a, que mostra μ_v em função de V , para um ambiente com $N = 100$ pontos.

Figura 8.5: Comportamento da probabilidade de morte do caminhante (Eq. 8.8) para (a) μ constante e (b) V constante em um ambiente com $N = 100$ pontos. Observe o comportamento exponencial das curvas a V constante.

É importante ressaltar que a escolha de μ_v é arbitrária. O valor escolhido, neste caso, foi devido ao comportamento exponencial das curvas de f a V constante, entretanto, nada impede outra escolha. Escolher μ_v como sendo o valor no qual $f < e^{-1}$, por exemplo, implica em obter uma curva de transição abaixo da mostrada na Fig. 8.6a. A Fig. 8.6b mostra as curvas de transição para diversos valores de f .

Considerando o problema da exploração do meio desordenado, a sobrevivência do cami-

⁵O método de Newton-Raphson permite resolver numericamente uma equação do tipo $f(x) = 0$ por meio da iteração $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$, onde $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$.

Figura 8.6: Curvas de transição entre a sobrevivência (região abaixo da curva) e a morte (região acima da curva) do caminhante na CEMT para um ambiente com $N = 100$ pontos: (a) $f = e^{-1}$ e (b) diversos valores de f . Os gráficos foram obtidos resolvendo numericamente a Eq. 8.9 com aproximação de 10^{-4} . As barras de erro são muito pequenas para serem mostradas.

nhante garante a continuidade da exploração. Neste caso, escolher um ponto (μ, V) na região abaixo da curva de transição pode parecer uma escolha razoável. Por outro lado, é necessário levar em consideração o custo computacional envolvido. Consideremos um valor de V que garanta a sobrevivência do caminhante para uma grande faixa de valores de μ . Se, neste caso, $\mu \ll N$, $n_v > n_\mu$ e o número de pontos disponíveis para visitação no passo seguinte será grande. Desta forma, o caminhante tende a perder muito tempo preso em uma região, eventualmente visitando os mesmos pontos mais de uma vez. Por outro lado, se $\mu \rightarrow N$, o tratamento da memória consumirá muito tempo de processamento, tornando a exploração lenta. Acreditamos que o melhor compromisso entre a exploração do meio e o custo computacional ocorra sobre a curva $\mu_v \times V$ que é solução da Eq. 8.9 (Fig. 8.6). Esta curva descreve um regime de exploração onde n_v é maior que n_μ , garantindo a sobrevivência do caminhante, mas não grande demais a ponto de encarecer computacionalmente a exploração.

8.2.2 Envelhecimento

A Eq. 8.8 fornece a probabilidade f de um caminhante morrer a cada passo dado na CEMT. Logo, probabilidade de sobrevivência a cada passo é dada por seu complementar: $s = 1 - f$. Tendo sobrevivido ao primeiro passo, o caminhante deve dar o passo seguinte, ao qual sobreviverá novamente com probabilidade s . Assim, a probabilidade de um caminhante continuar vivo após dois passos é $s^2 = (1 - f)^2$. Após completar N_p passos, o caminhante tem uma probabilidade $s^{N_p} = (1 - f)^{N_p}$ de ainda estar vivo. Portanto, a probabilidade de esse caminhante morrer

em algum passo intermediário é dado por:

$$g = 1 - s^{N_p} = 1 - (1 - f)^{N_p} = 1 - \left\{ 1 - (1 - V)^N \left[-1 + (1 - V)^{-\mu} - \frac{\mu V}{1 - V} \right] \right\}^{N_p}. \quad (8.10)$$

A Fig. 8.7 mostra o efeito do aumento de N_p sobre a probabilidade de morte do caminhante para $N = 128$ e $N_p = N, 5N, 10N$ e $100N$ passos⁶. Note a existência de uma transição bastante abrupta entre a região de sobrevivência (região baixa) e de morte (região alta) do caminhante. É interessante notar que as curvas da probabilidade de morte em função de μ a V constante

Figura 8.7: Efeito da variação do número de passos (N_p) sobre a probabilidade de morte do caminhante na CEMT para um ambiente com $N = 128$.

apresentam o mesmo tipo de comportamento, independentemente do valor de V . A Fig. 8.8a mostra esse comportamento para um ambiente formado por $N = 128$ pontos e $N_p = N$. O mesmo pode ser observado para as curvas da probabilidade de morte em função de V para μ constante, como pode ser visto na Fig 8.8b.

Uma vez que o comportamento das curvas é similar, podemos reescalá-las de modo a observar o colapso delas. Para as curvas da Fig. 8.8a, tomando o ponto de inflexão delas (μ_v) como

⁶Os resultados mostrados nesta seção apresentam comportamento similar, independentemente do valor de N , a exceção do efeito de tamanho finito, discutido na Sec. 8.2.1. Por esse motivo, serão mostrados apenas os resultados gráficos para $N = 128$ pontos, a fim de poder compará-los com os resultados obtidos nas simulações numéricas, nas quais este foi o maior valor que se pôde utilizar.

Figura 8.8: Comportamento das curvas de probabilidade de morte em função de: (a) μ a V constante e (b) V a μ constante para um ambiente com $N = 128$ e $N_p = N$. É interessante observar que o comportamento das curvas é similar, independentemente da variação do parâmetro.

sendo o ponto de transição e a largura da região de transição ($\Delta^{(v)}\mu$) como o fator de escala, o reescalamto pode ser feito mapeando μ em $(\mu - \mu_v)/\Delta^{(v)}\mu$. Da mesma forma, para as curvas da Fig. 8.8b, podemos mapear V em $(V - V_\mu)/\Delta^{(\mu)}V$, onde V_μ e $\Delta^{(\mu)}V$ são, respectivamente, o ponto de inflexão e a largura da transição a μ constante. Os pontos de inflexão e as larguras das regiões de transição podem ser obtidos numericamente da Eq. 8.10 a partir, respectivamente, da segunda derivada e da inclinação da função nesse ponto. Assim, obtemos os gráficos das Figs. 8.9a e 8.9b.

Figura 8.9: Colapso das curvas de probabilidade de morte em função de: (a) μ a V constante e (b) V a μ constante para um ambiente com $N = 128$ e $N_p = N$.

O efeito mais visível do aumento de N_p é o aumento da região em que o caminhante morre.

Esse aumento se deve ao fato de que, quanto mais passos ele consegue andar sem morrer, mais n_μ aumenta e, conseqüentemente, mais n_ν diminui, aumentando a probabilidade de que ele morra no passo seguinte. Esse fato, provoca um deslocamento da região de transição entre sobrevivência e morte na direção contrária ao provocado pelo aumento de N . Dessa forma, um grande aumento de N_p pode permitir a existência da transição mesmo no limite termodinâmico. De fato, é possível inferir que, para um ambiente com N finito, quanto maior N_p , maior o número de caminhadas que terminarão por apoptose, sendo, neste caso, a morte a regra geral para $N_p \rightarrow \infty$. A Fig. 8.10 mostra o deslocamento da região de transição em função de N_p para um ambiente com $N = 128$ pontos. As curvas de transição foram traçadas considerando a memória de transição como o ponto de inflexão das curvas $g \times \mu$ com V constante (μ_ν).

Figura 8.10: Deslocamento da curva de transição $\mu_\nu \times V$ em função de N_p para um ambiente com $N = 128$ pontos.

Uma vez que N_p está diretamente ligado ao tempo na CEMT (visto que cada passo é dado a um intervalo discreto de tempo), podemos entender o deslocamento da curva de transição como um efeito de envelhecimento do sistema. Como pode ser facilmente observado na Fig. 8.10, as curvas de transição se deslocam para baixo, sendo a primeira delas a curva de $N_p = 1$, mostrada na Fig. 8.6. Como valor de μ_ν diminui com o passar do tempo, é possível que exista um valor limite de $\mu_\nu > 0$. Assim, dentro de uma margem aceitável de erro, poderíamos determinar um valor de N_p a partir do qual o envelhecimento se torne tão lento que possa ser desprezado, como obtido para a CET unidimensional: $N_p \approx 4000N$ passos [130]. Para isso é necessário que o comportamento da curva $\mu_\nu \times N_p$ admita a existência de uma assíntota horizontal. A Fig. 8.11 mostra a evolução de μ_ν em função de N_p/N para diversos valores de V em um ambiente com $N = 128$ pontos. Nota-se claramente que $\mu_\nu \propto -\log(N_p/N)$ para todos os valores de V , de tal forma que o sistema continua envelhecendo indefinidamente até $N_p \rightarrow \infty$.

Figura 8.11: Evolução da memória crítica de transição a V constante (μ_v) em função de $\log(N_p/N)$ para um ambiente com $N = 128$ pontos.

8.3 Resultados numéricos

A fim de validar os resultados analíticos obtidos nas Sec. 8.2.1 e 8.2.2, foram efetuadas simulações numéricas da CEMT. As simulações foram realizadas para ambientes com $N = 32, 64$ e 128 e $d = 1, 2, 3$. Também foram realizadas simulações com o modelo de ligações aleatórias para o limite de alta dimensionalidade. Entretanto, este modelo cobre apenas uma parte muito pequena do espaço euclidiano de infinitas dimensões, uma vez que as distâncias são tiradas aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Uma hipersfera de infinitas dimensões e volume unitário deve ter um raio infinito (isto pode ser obtido a partir da Eq. 8.1), o que implica que as distâncias no limite $d \rightarrow \infty$ devem ser tiradas no intervalo $[0, \infty)$ ⁷. Os valores de N foram escolhidos como potências de 2 devido à propriedade apresentada na Eq. 6.24 e limitados a 128 devido à limitação de memória e tempo de processamento dos computadores utilizados. Um ambiente com N pontos requer o cálculo e armazenamento de N^2 distâncias. Já a variação de d foi utilizada para validar o resultado analítico segundo o qual o comportamento do sistema não se altera quando d varia, desde que as medidas sejam feitas em termos da variável V . Além disso, à medida que V cresce, n_v aumenta, juntamente com o número de pontos passíveis de visitação, aumentando o tempo de processamento. Também foi variado o número de passos N_p das simulações. Foram utilizados os valores $N_p = N, 5N, 10N, 25N, 50N, 70N, 90N$ e $100N$ passos. Além do fenômeno de envelhecimento mostrado na Sec. 8.2.2, a variação de N_p é importante porque a CEMT não termina naturalmente, a não ser por apoptose. Dessa forma é necessário utilizar um mecanismo de parada da simulação. Neste caso, as caminhadas foram

⁷Uma solução para este problema pode ser mapear o intervalo $[0, \infty)$ no intervalo $(1, 2]$ através de uma transformação de escala e tirar as distâncias a partir de uma distribuição de Pareto. Entretanto, é necessário garantir que a população do meio seja grande o suficiente para que os pontos não fiquem esparsos, inviabilizando a caminhada.

encerradas após o caminhante morrer ou percorrer N_p passos, o que ocorresse primeiro.

Para cada conjunto de valores de N e d foram utilizados $M = 10^4$ mapas. Para cada mapa foram realizadas N caminhadas, uma partindo de cada ponto do mapa. Além disso, em cada mapa variou-se μ no intervalo $0 \leq \mu \leq N$, em passos de uma unidade, e V no intervalo $0 \leq V \leq 1$, em passos de 0,01.

Embora em um ambiente d -dimensional a maior distância no interior de um hipercubo de arestas unitárias seja $T_{max} = d^{1/2}$, este valor corresponde ao raio de uma hiperesfera de volume maior que 1. Como foi mostrado na Sec. 8.2.1, com $V = 1$ a sobrevivência do caminhante é a regra geral, praticamente não existindo condição de morte. Assim, prolongar as simulações até $T = T_{max}$ apenas aumentaria o tempo de processamento, sem trazer nenhuma informação relevante sobre o sistema.

Os códigos numéricos foram implementados na linguagem de programação C++ ANSI em um microcomputador com processador Pentium DualCore com 1GB de memória e sistema operacional Windows XP. As simulações foram efetuadas em diversos microcomputadores, alguns com processadores Pentium 4 e memória de 512 MB e outros com processador Pentium DualCore e memória de 1 GB, todos com sistema operacional Linux⁸.

8.3.1 Transição na sobrevivência

Pra medir a probabilidade de morte do caminhante nas simulações dividiu-se o número total de caminhadas que terminaram por apoptose, para cada configuração de μ e V , por $M \times N$. Este procedimento foi realizado para cada valor de N_p . As Figs. 8.12, 8.13 e 8.14 mostram os resultados obtidos para $N = 32, 64, 128$, com $d = 1, 2, 3$ e $N_p = N$.

É possível observar claramente o efeito de tamanho finito nas superfícies para d constante, mediante a diminuição da região de morte total para $V \rightarrow 0$, da mesma forma que mostrado nos gráficos da Fig. 8.4, obtidos analiticamente. Entretanto, observa-se também uma clara diferença entre as superfícies da Fig 8.14 em relação às da Fig. 8.7 com relação ao aumento da região em que a probabilidade de morte é máxima. Esta diferença pode ser explicada por um fator que não costuma ser levado em conta em tratamentos analíticos, mas que é fundamental em simulações numéricas: o efeito de borda.

O efeito de borda não influencia o resultado analítico porque, por hipótese, a população de pontos é uniforme em todas as regiões do espaço analisado, de tal forma que os pontos

⁸Testes realizados com $M = 100$ mapas para todos os valores de N e $N_p = N, 5N$ e $10N$ mostraram que os resultados numéricos não seriam influenciados pela diferença de sistema operacional ou compilador.

Figura 8.12: Resultados numéricos para a sobrevivência do turista para $N_p = N = 32$ e $d = 1, 2, 3$.

próximos à borda têm o mesmo número de vizinhos que aqueles no centro. Na simulação numérica, entretanto, isso não é verdade, uma vez que os pontos próximos à borda têm vizinhos apenas de um lado dela. Assim, o volume V centrado em um desses pontos apresentará uma região não populada além da borda, violando a hipótese de uniformidade de todas as regiões do espaço e, portanto, comprometendo a simulação e aumentando a probabilidade de morte nessa região. Além disso, nota-se também nas Figs. 8.12, 8.13 e 8.14 um aumento na probabilidade de morte na região de V alto, à medida que d aumenta com N constante, contrariando o resultado analítico, segundo o qual essa probabilidade não depende de d . Esse aumento também é explicado pelo efeito de borda, visto que com o aumento do número de dimensões do sistema, aumenta a quantidade de bordas, tornando mais fortes seus efeitos.

Figura 8.13: Resultados numéricos para a sobrevivência do turista para $N_p = N = 64$ e $d = 1, 2, 3$.

Uma solução comumente utilizada para resolver o problema o efeito de borda é a utilização de condições periódicas de contorno. Estas condições equivalem a unir as bordas opostas do espaço, de modo a obter um meio infinito em todas as direções. Entretanto, como efeito acessório, as condições periódicas de contorno também simulam um ambiente de população infinita ($N \rightarrow \infty$), eliminando o efeito de tamanho finito do sistema, este sim levado em consideração na resolução analítica. Como visto na Sec. 8.2.1, no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), a sobrevivência é a regra geral. Dessa forma, para observar a transição entre sobrevivência e morte, não é interessante eliminar o efeito de tamanho finito nas simulações numéricas, o que inviabiliza o uso das condições periódicas de contorno e, portanto, mantém o efeito da borda no sistema.

Figura 8.14: Resultados numéricos para a sobrevivência do turista para $N_p = N = 128$ e $d = 1, 2, 3$.

8.3.2 Envelhecimento

Um fator importante presente nas simulações numéricas é a limitação no número de passos da simulação. Ao contrário da CDT, a CEMT não termina naturalmente, a não ser por apoptose. Por esse motivo é necessário limitar o tempo da simulação. Isto é feito introduzindo uma condição de parada para as caminhadas nas quais não ocorra apoptose. Para isso, utilizamos a grandeza N_p , que armazena o número de passos efetuados em uma caminhada. Assim, a caminhada prossegue até N_p atingir um número de passos máximo, fixado no início da simulação. Nas simulações efetuadas, foram utilizados os valores de $N_p = N, 5N, 10N, 25N, 50N, 70N, 90N$ e $100N$ passos. A variação do número de passos da caminhada também permite validar numericamente o efeito de envelhecimento do sistema, como descrito na Sec. 8.2.2.

A Fig. 8.15 mostra o efeito do envelhecimento da caminhada para um ambiente unidimensional com $N = 128$ pontos e $N_p = N, 5N, 10N$ e $100N$ passos. É fácil notar que no experimento numérico, a região de morte total avança muito mais rapidamente do que o previsto no modelo analítico. Isto se deve à maior quantidade de caminhadas que terminam prematuramente na região próxima à borda, aumentando a estatística de morte. Apesar disso, o comportamento de ambas é bastante semelhante, podendo-se observar o avanço da região de morte total e o aspecto sigmoide das curvas de transição a V ou μ constante, similares ao observado nos gráficos da Fig. 8.7.

Figura 8.15: Resultados numéricos do envelhecimento da caminhada para $N = 128$ e $d = 1$.

As superfícies dos gráficos da Fig. 8.15 apresentam uma rugosidade muito alta, devido ao

espalhamento dos dados numéricos em relação à superfície média. Este espalhamento se deve principalmente ao pequeno número de mapas utilizados ($M = 10^4$). Aumentando o número de mapas é possível suavizar as superfícies e, também, as curvas de transição. A Fig. 8.16 mostra que, apesar do alto ruído presente nas curvas de transição a V constante, ainda é possível observar um colapso delas, que coincide com o previsto analiticamente (linha contínua). Este colapso mostra que, apesar de deslocadas em relação à previsão teórica, as curvas de transição se comportam da forma prevista, coincidindo totalmente com o modelo analítico. Os valores da memória de transição (μ_v) e a largura da região de transição ($\Delta^{(v)}\mu$) foram calculados utilizando a primeira e a segunda derivadas numéricas de cada curva. Nos casos em que a curva não possui mudança de concavidade, utilizou-se a memória relativa à altura média de g como sendo μ_v .

Figura 8.16: Colapso dos dados numéricos para a CEMT com $N = N_p = 128$. A linha contínua representa o colapso analítico, mostrado na Fig. 8.9a. A grande dispersão dos dados numéricos em relação à previsão analítica pode ser reduzida aumentando a quantidade de mapas (M) analisados.

Traçando os valores de μ_v em função de V para diversos valores de N_p é possível observar o deslocamento das curvas de transição, característica principal do envelhecimento da CEMT. A Fig. 8.17 mostra a comparação entre a previsão teórica e o experimento numérico. Apesar da diferença entre os valores previstos e obtidos numericamente para μ_v , é possível observar que, em ambos os casos, o comportamento do fenômeno de envelhecimento é o mesmo: a redução da região de sobrevivência do caminhante em função do aumento de N_p . De fato, esta redução é bem mais rápida nos experimentos numéricos.

Tomando os valores de μ_v em função de N_p é possível observar a como o envelhecimento afeta a memória crítica de transição. A Fig. 8.18 mostra a comparação entre a previsão teórica e o resultado numérico obtido para diversos valores de V . Novamente, nota-se que os resultados numéricos não estão de acordo com os previstos analiticamente. Entretanto, embora para valo-

Figura 8.17: Comparação entre a previsão analítica (a) e o resultado numérico (b) para o deslocamento da curva de transição $\mu_v \times V$ em função de N_p para um ambiente com $N = 128$ pontos. Nota-se claramente que no resultado numérico o deslocamento é mais rápido, devido aos efeitos de borda.

res pequenos de V a discrepância entre os valores previstos e obtidos numericamente seja muito grande, é possível notar que, para $V \geq 0,5$, mantém-se a tendência logarítmica de envelhecimento do sistema. O lento envelhecimento observado na curva com $V = 0,1$ se deve ao fato de que, nestas condições, os volumes formado têm poucos pontos em seu interior, aumentando a probabilidade de apoptose. Esse fato, aliado aos efeitos de borda, causa a apoptose em poucos passos e, portanto, a memória de transição é pouco afetada pelo aumento de N_p .

Figura 8.18: Comparação entre a previsão analítica e o resultado numérico para a evolução da memória crítica de transição a V constante (μ_v) em função de $\log(N_p/N)$ para um ambiente com $N = 128$ pontos. Apesar da diferença observada nos valores de μ_v , nota-se que ambas mantêm a tendência logarítmica para $V \geq 0,5$.

É importante ressaltar que os efeitos observados para $N = 128$ também ocorrem para os outros valores de N utilizados. Devido ao aumento do número de pontos no meio, inclusive

próximo às bordas, os efeitos de borda são mais acentuados para $N = 128$ do que para os demais casos.

Apesar de diferir quantitativamente dos resultados previstos no tratamento analítico da CEMT, os resultados numéricos apresentados concordam com estes qualitativamente, apresentando comportamento similar ao previsto. Os desvios observados podem ser explicados pelos efeitos de borda que, para este caso particular, são difíceis de eliminar. Desta forma, podemos afirmar que os resultados numéricos apresentados validam o tratamento analítico mostrado na Sec. 8.2.

8.3.3 Taxa de visitação

Uma preocupação com relação à utilização da CEMT como estratégia de exploração é garantir que o caminhante visite todo o ambiente. Efetuar a caminhada em um ponto do espaço de parâmetros $T \times \mu$ que garanta sua sobrevivência não é garantia de que ele não acabe preso em uma determinada região, frustrando a exploração global. Para verificar que a sobrevivência do caminhante é garantia de visitação plena, foram realizados experimentos numéricos, medindo a taxa de visitação em função dos parâmetros da caminhada (T e μ). A taxa de visitação é definida como sendo a razão entre o número de sítios diferentes visitados na caminhada (n_e) e o número total de pontos do meio (N). Assim, uma taxa de visitação de 100% indica que todos os pontos do meio foram visitados pelo menos uma vez durante a caminhada. A Fig. 8.19 mostra os resultados obtidos para $N = 128$, $d = 1, 2, 3$ e $N_p = N$, que é o menor número de passos necessário para uma visitação plena. É interessante observar que, da mesma forma que a probabilidade de morte do caminhante, a taxa de visitação parece não se alterar com a variação de d . Além disso, a visitação é plena para $T = 1$, que é, para $d > 1$, menor que $T_{max} = \sqrt{d}$, garantindo, assim, que a visitação será plena mesmo para $V < 1$.

8.4 Conclusão

A caminhada estocástica modificada do turista (CEMT) foi apresentada a fim de resolver as dificuldades encontradas no tratamento analítico da CET. A principal modificação introduzida na CEMT, em relação à CET, está na interpretação do parâmetro T , que deixou de representar uma temperatura para representar um alcance máximo. Estudos numéricos, tanto da CET quanto da CDT, mostraram que ambas versões da CT apresentavam uma transição na taxa de exploração do meio pelo caminhante em alguns casos particulares. Apesar de conceitualmente diferente da CET, a CEMT manteve a transição, embora em outra grandeza: a taxa de sobre-

Figura 8.19: Taxa de visitação em função de T e μ para a CEMT com $N = 128$ e $N_p = N$, para $d = 1, 2, 3$.

vivência (ou de morte) do caminhante.

Devido às alterações efetuadas, foi possível resolver a CEMT analiticamente, mostrando que a transição não depende da dimensionalidade do sistema, quando analisada em termos da grandeza V ao invés de T . Além disso, obteve-se uma expressão analítica para a dependência entre os parâmetros V e μ da caminhada na região de transição. Entretanto, também foi possível mostrar que, na CEMT, a transição na probabilidade de morte em um único passo é um efeito de tamanho finito, uma vez que no limite termodinâmico a sobrevivência do caminhante é a regra geral.

Por outro lado, quando se considera uma caminhada formada por N_p passos, aparece um

efeito de envelhecimento no sistema. Este efeito é responsável pelo deslocamento da curva de transição para a região de sobrevivência, aumentando a probabilidade de morte do caminhante. Um efeito similar já havia sido observado em experimentos numéricos com a CET. O tratamento analítico do fenômeno de envelhecimento da CEMT mostrou que as curvas de transição a V constante apresentam um comportamento único, sendo, portanto, possível efetuar um colapso delas em uma curva universal. O mesmo ocorre para as curvas de transição a μ constante. Também foi possível mostrar que, diferentemente do observado na CET, onde o envelhecimento para após aproximadamente $4000N$ passos, na CEMT o sistema continua envelhecendo indefinidamente, de acordo com uma curva logarítmica.

Todos os resultados analíticos foram validados por experimentos numéricos, embora tais experimentos tenham sofrido forte influência dos efeitos de borda, que não puderam ser eliminados das simulações. Apesar disso, os experimentos numéricos mostraram também que, uma vez garantida a sobrevivência do caminhante, a caminhada evolui em direção a uma visitaço plena do meio.

9 Conclusão

Na segunda parte desta Tese, foi apresentada a caminhada do turista (CT). Esta caminhada apresenta, originalmente, duas versões: uma determinista (CDT) e outra estocástica (CET), sendo que a primeira é um caso particular da segunda quando o parâmetro estocástico T é nulo.

A CDT foi estudada analiticamente em alguns casos particulares em função dos parâmetros dimensão (d) e memória (μ). Um dos principais resultados encontrados foi a transição no regime de exploração do meio em ambientes unidimensionais. Esta transição é caracterizada por uma memória crítica $\mu_1 = \log_2 N$, onde N é o número de pontos do meio. Também foram estudados analiticamente os limites de alta dimensionalidade, representados por dois modelos de campo médio: o modelo de ligações aleatórias e o de mapeamento aleatório, nos quais foi possível encontrar estatísticas do comprimento da parte transiente da caminhada e dos períodos dos ciclos.

A CET também foi estudada analiticamente para alguns casos particulares de d e μ , tendo sido encontrada uma transição no tempo médio de aprisionamento para $\mu = 0$ com d arbitrário e para $\mu = 1$ em ambientes unidimensionais. Um estudo numérico da CET com $d = 1$ e memória arbitrária mostrou a existência da mesma transição observada na CDT unidimensional, com relação à taxa de exploração do meio, caracterizada por uma memória e uma temperatura (T) críticas e dependente do número de passos da caminhada (envelhecimento do sistema). A relação entre os parâmetros na transição é dada pela Eq. 7.7.

Apesar dos valiosos resultados obtidos, as tentativas de encontrar uma solução analítica geral para a CET (e, conseqüentemente para a CDT, que é um caso particular da primeira) esbarraram na dificuldade de determinar a probabilidade de um caminhante deslocar-se de um ponto para outro em uma situação geral, para μ , T e d arbitrários. A fim de resolver este problema, modificou-se a CET, criando-se a caminhada estocástica modificada do turista (CEMT). Nesta última, o parâmetro T , originalmente uma temperatura formal, passou a representar o alcance máximo de um passo. Dessa forma, foi possível tratar analiticamente o problema através da estatística de variáveis aleatórias discretas. Os resultados obtidos mostraram a existência de uma transição similar às encontradas na CET e na CDT, embora em outra grandeza: a proba-

bilidade de morte do caminhante (situação na qual o caminhante não encontra nenhum ponto disponível para visitao, encerrando prematuramente a caminhada). O tratamento analtico da CEMT permitiu encontrar uma relao analtica entre os parmetros T e μ na regio de transio (Eq. 8.8). Alm disso, quando tratado em termos de V ao invs de T , os resultados analticos no dependem da dimensionalidade do sistema. O fenmeno de envelhecimento observado na CET tambm foi encontrado e tratado analiticamente na CEMT. Neste caso, foi possvel encontrar uma curva universal para as transies a V constante e outra para as transies a μ constante. Finalmente, pde-se mostrar que na CEMT o envelhecimento prossegue indefinidamente, diferentemente do observado na CET, onde ele para aps aproximadamente $4000N$ passos. Todos os resultados analticos obtidos para a CEMT foram validados por experimentos numricos, embora tais experimentos tenham sofrido forte influncia dos efeitos de borda, que no puderam ser eliminados das simulaes. Apesar disso, os experimentos numricos mostraram tambm que, uma vez garantida a sobrevivncia do caminhante, a caminhada evolui em direo a uma visitao plena do meio.

Posfácio

O estudo do comportamento difusivo não-linear da caminhada determinista do turista (CDT), descrito pela função de distribuição gaussiana generalizada, despertou meu interesse pelo estudo das funções logaritmo e exponencial generalizadas, inicialmente propostas por C. Tsallis no contexto da termodinâmica não-extensiva.

O estudo destas funções, apresentado na primeira parte desta Tese, mostrou a versatilidade delas na generalização de diversas funções, permitindo colocar em uma formulação única os fenômenos físicos caracterizados por comportamentos oscilatórios, exponenciais ou que seguem leis de potência. Tais funções foram apresentadas no Cap. 1, juntamente com as generalizações dos operadores aritméticos, necessários para reobter a aditividade delas. Também foram apresentados os operadores somatório e produtivo generalizados e alguns exemplos de suas aplicações. No Cap. 2, a função exponencial generalizada foi utilizada para generalizar a função densidade de probabilidade (pdf) exponencial estendida e, a partir dela, uma variada gama de outras pdfs. Como estas pdfs são soluções de equações diferenciais que descrevem sistemas complexos, a generalização delas permite que diversos sistemas diferentes possam ser descritos pelo mesmo processo. No Cap. 3, as funções logaritmo e exponencial generalizadas foram utilizadas para generalizar um grande número de modelos de crescimento tanto contínuos quanto discretos, em particular, os modelos mais gerais de cada caso, os de Tsoularis e Wallace (contínuo) e o θ -Ricker (discreto), dos quais os demais são casos particulares. Encerrando a primeira parte desta Tese, no Cap. 4 foi apresentado um estudo dos modelos de difusão anômalos, fazendo uma ligação entre as duas partes da Tese.

Na segunda parte da Tese, foram apresentadas as duas versões originais da caminhada do turista (CT): a determinista (CDT) e a estocástica (CET). A primeira, apresentada no Cap. 6, trata-se de uma caminhada determinista parcialmente autorrepulsiva, caracterizada por uma memória (μ). Esta caminhada foi estudada analiticamente apenas para alguns casos particulares. Um dos principais resultados obtidos mostrou a existência de uma transição no comportamento exploratório do caminhante em um valor de memória bem definido $\mu_1 = \log_2 N$, para um ambiente unidimensional com N pontos. No Cap. 7 foi apresentada a versão estocástica da CT. Nesta versão, a caminhada depende não só do parâmetro determinista μ , mas também de um parâmetro estocástico T , responsável por alterar as probabilidades de movimentação e que pode

ser entendido como uma temperatura. Da mesma forma que a CDT, a CET também só pôde ser estudada analiticamente em alguns casos particulares: memória nula com dimensionalidade arbitrária e em sistemas unidimensionais sem memória ($\mu = 1$). Em ambos casos foi possível observar a existência de uma transição tempo de aprisionamento nos sítios da caminhada. Um estudo numérico da CET em ambientes unidimensionais com memória arbitrária mostrou a existência de uma transição similar à observada na CET unidimensional, dependente não só de μ mas também de T e da idade da caminhada (N_p), caracterizando também um fenômeno de envelhecimento.

Devido à dificuldade em tratar analiticamente ambas versões da CT, propusemos a modificação do modelo, criando a caminhada estocástica modificada do turista (CEMT). Neste modelo, o parâmetro estocástico T passou a representar um alcance máximo. Tanto na CDT quanto na CDT, todos os pontos do meio, exceto os que estivessem na memória, estavam disponíveis para visitação em função da distância entre eles e da temperatura. Na CEMT somente os sítios no interior do raio de alcance máximo T estão disponíveis para visitação (exceto os que estiverem na memória). Esta alteração provocou o aparecimento de um fenômeno não observado nas outras versões da CT: a possibilidade de término prematuro da caminhada devido à inexistência de pontos passíveis de visitação dentro do alcance máximo permitido. A este fenômeno deu-se o nome de morte do caminhante. A alteração introduzida na CEMT permitiu um estudo analítico completo do modelo, baseado na estatística de variáveis aleatórias discretas. Este estudo mostrou que a CEMT apresenta uma transição na probabilidade de morte do caminhante, dependente dos parâmetros T e μ . O estudo também mostrou que, analisado na variável V , que representa o volume definido pelo alcance T , os resultados analíticos ficam independentes da dimensionalidade do sistema. A transição encontrada, entretanto, é apenas um efeito de tamanho finito do sistema, uma vez que no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) a sobrevivência passa a ser a regra geral. Além disso, também foi possível mostrar analiticamente o efeito do envelhecimento do sistema. Este efeito causa um deslocamento da curva de transição $\mu \times V$ na direção da região de sobrevivência. Como o processo de envelhecimento prossegue indefinidamente, acreditamos que, no limite de idade infinita do sistema, a morte passe a ser a regra geral. Ainda com relação ao processo de envelhecimento, foi possível mostrar que as curvas de transição a V constante apresentam um comportamento universal, permitindo colapsá-las em uma única curva. O mesmo foi observado para as curvas de transição a μ constante. Todos os resultados analíticos encontrados para a CEMT foram validados por experimentos numéricos, embora estes últimos tivessem sofrido forte influência dos efeitos de borda, que não puderam ser retirados das simulações. Apesar disso, os experimentos numéricos mostraram também que, uma vez garantida a sobrevivência do caminhante, a caminhada evolui em direção a uma visitação plena

do meio.

Estes resultados nos permitem imaginar a CEMT como estratégia de exploração mista (parte determinista, parte estocástica) no espaço de fases de um problema de otimização. A principal dificuldade deste tipo de estratégia consiste em dosar quanto de determinismo e quanto de estocasticidade são necessários para uma estratégia de busca ótima. Acreditamos que a curva de transição da CEMT define um regime ótimo de exploração, conjugando uma visitação plena do meio sem comprometer demasiadamente os recursos computacionais disponíveis. Nossa principal perspectiva de trabalho futuro consiste em implementar a CEMT para explorar o espaço de soluções de problemas de otimização conhecidos, a fim de comparar sua eficiência com algoritmos bem conhecidos, como o genético e o recozimento simulado. Além disso, é necessário estudar numericamente o comportamento da CEMT no limite de alta dimensionalidade. O modelo de ligações aleatórias, apresentado no Cap. 6 como limite de alta dimensionalidade do espaço euclidiano, não se mostrou eficiente no estudo da CEMT, uma vez que representa apenas uma pequena parte do espaço de infinitas dimensões.

Referências Bibliográficas

- [1] R. S. González, “Difusão anômala: transição entre os regimes localizado e estendido na caminhada do turista unidimensional,” Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, Setembro 2006. <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/59/59135/tde-02022007-115428/>.
- [2] A. Fick, “Ueber diffusion,” *Ann. Phys.*, vol. 170, pp. 59–86, 1855.
- [3] A. Einstein, “Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen,” *Ann. Phys.*, vol. 322, pp. 549–560, 1905.
- [4] C. Anteneodo, “Non-extensive random walks,” *Physica A*, vol. 358, pp. 289–298, 2005.
- [5] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics,” *J. Stat. Phys.*, vol. 52, pp. 479–487, 1988.
- [6] C. Tsallis, “What are the numbers experiments provide?,” *Química Nova*, vol. 17, no. 6, pp. 468–471, 1994.
- [7] G. Kaniadakis, “Non-linear kinetics underlying generalized statistics,” *Physica A*, vol. 296, pp. 405–425, Jul 2001.
- [8] G. Kaniadakis, “Statistical mechanics in the context of special relativity,” *Phys. Rev. E*, vol. 66, p. 056125, Nov 2002.
- [9] S. Abe, “A note on the q -deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics,” *Phys. Lett. A*, vol. 224, pp. 326–330, 1997.
- [10] G. Kaniadakis, M. Lissia, and A. M. Scarfone, “Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: a consistent framework for generalized statistical mechanics,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, no. 4, p. 046128, 2005.
- [11] G. Kaniadakis, “Statistical mechanics in the context of special relativity. ii,” *Phys. Rev. E*, vol. 72, no. 3, p. 036108, 2005.
- [12] T. J. Arruda, R. S. González, C. A. S. Terçariol, and A. S. Martinez, “Arithmetical and geometrical means of generalized logarithmic and exponential functions: generalized sum and product operators,” *Phys. Lett. A*, vol. 372, pp. 2578–2582, 2008.
- [13] L. Nivanen, A. L. Méhauté, and Q. A. Wang, “Generalized algebra within a nonextensive statistics,” *Rep. Math. Phys.*, vol. 52, no. 3, pp. 437–444, 2003.
- [14] N. Kalogeropoulos, “Algebra and calculus for Tsallis thermo-statistics,” *Physica A*, vol. 356, pp. 408–418, 2005.

- [15] E. P. Borges, “A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics,” *Physica A*, vol. 340, pp. 95–101, 2004.
- [16] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, 1972.
- [17] B. C. T. Cabella, A. S. Martinez, and F. Ribeiro, “Data collapse, scaling function and analytical solutions of generalized growth models,” *Phys. Rev. A*, 2011.
- [18] E. P. Borges, “On a q -generalization of circular and hyperbolic functions,” *J. Phys. A*, vol. 31, pp. 5281–5288, 1998.
- [19] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. M. C. Souza, and R. Maynard, “Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, no. 20, pp. 3589–3593, 1995.
- [20] H. Suyari, “Mathematical structures derived from the q -multinomial coefficient in Tsallis statistics,” *Physica A*, vol. 368, pp. 63–82, August 2006.
- [21] C. Tsallis, D. Prato, and A. R. Plastino, “Nonextensive statistical mechanics: some links with astronomical phenomena,” *Astrophys. Space Sci.*, vol. 290, no. 3-4, pp. 259–274, 2004.
- [22] C. Tsallis, “Nonextensive thermostatics: brief review and comments,” *Physica A*, vol. 22, pp. 277–290, 1995.
- [23] R. L. Rogers, “Second memoir on the expansion of certain infinite products,” *Proc. London Math. Soc.*, vol. 25, pp. 318–343, 1893.
- [24] L. C. Biedenharn, “The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators,” *J. Phys. A*, vol. 22, no. 18, pp. L873–L878, 1989.
- [25] A. J. Macfarlane, “On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$,” *J. Phys. A*, vol. 22, no. 21, pp. 4581–4588, 1989.
- [26] R. Floreanini, J. LeTourneux, and L. Vinet, “More on the q -oscillator algebra and q -orthogonal polynomials,” *J. Phys. A*, vol. 28, no. 10, pp. L287–L293, 1995.
- [27] D. S. McAnally, “ q -exponential and q -gamma functions. i. q -exponential functions,” *J. Math. Phys.*, vol. 36, no. 1, pp. 546–573, 1995.
- [28] D. S. McAnally, “ q -exponential and q -gamma functions. ii. q -exponential functions,” *J. Math. Phys.*, vol. 36, no. 1, pp. 574–595, 1995.
- [29] N. M. Atakishiyev, “On a one-parameter family of q -exponential functions,” *J. Phys. A*, vol. 29, no. 10, pp. 223–L227, 1996.
- [30] T. Takahashi, H. Oono, and M. H. Radford, “Psychophysics of time perception and intertemporal choice models,” *Physica A*, vol. 387, pp. 2066–2074, 2008.
- [31] N. Destefano and A. S. Martinez, “The additive property of the inconsistency degree in intertemporal decision making through the generalization of psychophysical laws,” *Physica A*, vol. 390, pp. 1763–1772, 2011.

- [32] T. Takahashi, “A comparison of intertemporal choices for oneself versus someone else based on Tsallis’ statistics,” *Physica A*, vol. 385, no. 2, pp. 637–644, 2007.
- [33] D. O. Cajueiro, “A note on the relevance of the q -exponential function in the context of intertemporal choices,” *Physica A*, vol. 364, pp. 385–388, 2006.
- [34] T. Takahashi, “A probabilistic choice model based on Tsallis’ statistics,” *Physica A*, vol. 386, no. 1, pp. 335–338, 2007.
- [35] C. Anteneodo, C. Tsallis, and A. S. Martinez, “Risk aversion in trade transactions,” *Europhys. Lett.*, vol. 59, no. 5, pp. 635–641, 2002.
- [36] C. Tsallis and M. P. de Albuquerque, “Are citations of scientific papers a case of nonextensivity?,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 13, pp. 777–780, 2000.
- [37] A. de Jesus Holanda, I. T. Pizza, O. Kinouchi, A. S. Martinez, and E. E. S. Ruiz, “The-saurus as a complex network,” *Physica A*, vol. 344, pp. 530–536, 2004.
- [38] A. S. Martinez, R. S. González, and A. L. Espíndola, “Generalized exponential function and discrete growth models,” *Physica A*, vol. 388, no. 14, pp. 2922–2930, 2009.
- [39] A. S. Martinez, R. S. González, and C. A. S. Terçariol, “Continuous growth models in terms of generalized logarithm and exponential functions,” *Physica A*, vol. 387, no. 23, pp. 5679–5687, 2008.
- [40] G. G. Naumis and G. Cocho, “Tail universalities in rank distributions as an algebraic problem: the beta-like function,” *Physica A*, vol. 387, pp. 84–96, 2008.
- [41] S. P. Junior, R. S. Mendes, and L. C. Malacarne, “Statistical properties of the circulation of magazines and newspapers,” *Europhys. Lett.*, vol. 72, no. 5, pp. 865–871, 2005.
- [42] M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, and B. Valeur, “Mathematical functions for the analysis of luminescence decays with underlying distributions: 2. Becquerel (compressed hyperbola) and related decay functions,” *Chem. Phys.*, vol. 317, no. 1, pp. 57–62, 2005.
- [43] S. P. Junior, R. S. Mendes, and L. C. Malacarne, “ q -exponential, weibull, and q -weibull distributions: an empirical analysis,” *Physica A*, vol. 324, no. 3-4, pp. 678–688, 2003.
- [44] M. Cardona, R. V. Chamberlin, and W. Marx, “The history of the stretched exponential function,” *Ann. Physik*, vol. 16, no. 12, pp. 842–845, 2007.
- [45] M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, and B. Valeur, “History of the Kohlrausch (stretched exponential) function: Pioneering work in luminescence,” *Ann. Physik*, vol. 17, no. 7, pp. 460–461, 2008.
- [46] M. N. Berberan-Santos, “A relaxation function encompassing the stretched exponential and the compressed hyperbola.” arxiv:0804.2702, 2008.
- [47] H. Suyari and M. Tsukada, “Law of error in Tsallis statistics,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 2, pp. 753–757, 2005.
- [48] E. P. Borges, C. Tsallis, J. G. V. Miranda, and R. F. S. Andrade, “Mother wavelet functions generalized through q -exponentials,” *J. Phys. A*, vol. 37, no. 39, pp. 9125–9137, 2004.

- [49] F. J. Richards, “A flexible growth functions for empirical use,” *J. Exp. Bot.*, vol. 10, pp. 290–300, 1959.
- [50] A. Tsoularis and J. Wallace, “Analysis of logistic growth models,” *Math Biosci.*, vol. 179, pp. 21–55, Jul-Ago 2002.
- [51] T. S. Bellows, “The descriptive properties of some models for density dependence,” *J. Anim. Ecol.*, vol. 50, pp. 139–156, 1981.
- [52] A. A. Berryman, *Principles of population dynamics and their applications*. Cheltenham: Thornes, 1999.
- [53] P. F. Hooker, “Benjamin Gompertz, 1779-1865,” *JIA*, vol. 91, pp. 203–212, 1965.
- [54] J. D. Murray, *Mathematical Biology: an introduction*. New York: Springer Verlag, 3 ed., 2002.
- [55] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. John Wiley & Sons, New York, seventh ed., 2001.
- [56] J. M. Linacre, “Why logistic ogive and not autocatalytic curve?,” *Rasch Measurement Transactions*, vol. 6, no. 4, pp. 260–1, 1993.
- [57] E. W. Montroll and B. J. West, *Fluctuation Phenomena*, ch. On an enriched collection of stochastic processes, pp. 61–205. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1979.
- [58] E. W. Montroll and L. W. Badger, *Introduction to quantitative aspects of social phenomena*. New York: Gordon and Breach, 1974.
- [59] M. Marusic and Z. Bajzer, “Generalized two-parameter equation of growth,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 179, pp. 446–462, 1993.
- [60] A. A. Blumberg, “Logistic growth rate functions,” *J. Theor. Biol.*, vol. 21, p. 42, 1968.
- [61] R. P. Spencer and M. J. Coulombe, “Quantification of hepatic growth and regeneration,” *Growth*, vol. 30, p. 277, 1966.
- [62] M. E. Turner, E. L. Bradley, K. A. Kirk, and K. M. Pruitt, “Theory of growth,” *Math. Biosci.*, vol. 29, no. 3-4, pp. 367–373, 1976.
- [63] C. Tsallis, G. Bemsiki, and R. S. Mendes, “Is re-association in folded proteins a case of nonextensivity?,” *Phys. Lett. A*, vol. 257, pp. 93–98, June 1999.
- [64] M. A. Montemurro, *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications*, vol. Santa Fe Institute studies in the science of complexity, ch. A generalization of the Zipf-Mandelbrot law in linguistics, pp. 347–356. New York: Oxford Publisher Press, 2004.
- [65] R. K. Niven, “ q -exponential structure of arbitrary-order reaction kinetics,” *Chem. Eng. Sci.*, vol. 61, pp. 3785–3790, June 2006.
- [66] J. C. M. Mombach, N. Lemke, B. E. J. Bodmann, M. A., and P. Idiart, “A mean-field theory of cellular growth,” *EPL*, vol. 59, no. 6, p. 923, 2002.

- [67] L. von Bertalanffy, "Quantitative laws in metabolism and growth," *Quart. Rev. Biol.*, vol. 32, pp. 217–231, September 1952.
- [68] M. A. Savageau, "Allometric morphogenesis of complex systems: Derivation of the basic equations from first principles," *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 76, no. 12, pp. 6023–6025, 1979.
- [69] M. A. Savageau, "Growth equations: A general equation and a survey of special cases," *Math. Biosci.*, vol. 48, no. 3-4, pp. 267–278, 1980.
- [70] A. J. Nicholson, "An outline of the dynamics of animal populations," *Aust. J. Zool.*, vol. 2, no. 1, pp. 9–65, 1954.
- [71] M. P. Hassell, "Density-dependence in single-species populations," *J. Anim. Ecol.*, vol. 45, pp. 283–296, 1975.
- [72] R. J. H. Beverton and H. S. J., "On the dynamics of exploited fish populations," *Fish. Invest. Ser. II Mar. Fish. G. B. Minist. Agric. Fish. Food*, vol. 19, 1957.
- [73] J. Maynard-Smith and M. Slatkin, "The stability of predator-prey systems," *Ecology*, vol. 54, pp. 384–391, 1973.
- [74] W. H. Steeb, F. Solms, T. K. Shi, and R. Stoop, "Cubic map, complexity and Ljapunov exponent," *Phys. Scripta*, vol. 55, pp. 520–522, 1997.
- [75] R. M. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics," *Nature (London)*, vol. 261, pp. 459–467, 1976.
- [76] N. Fiedler-Ferrara and C. P. C. do Prado, *Caos Uma Introdução*. Edgard Blücher, 1995.
- [77] M. J. Feigenbaum, "The universal metric properties of nonlinear transformations," *J. Statist. Phys.*, vol. 21, pp. 669–706, 1979.
- [78] M. L. Lyra, A. R. Plastimo, C. Tsallis, and U. M. S. Costa, "Power-law sensitivity to initial conditions within a logistic-like family of maps : fractality and nonextensivity," *Phys. Rev. B*, vol. 56, pp. 2698–2703, 1997.
- [79] M. L. Lyra and C. Tsallis, "Non-extensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 53–56, 1998.
- [80] C. R. Silva, H. R. da Cruz, and M. L. Lyra, "Low-dimensional non-linear dynamical systems and generalized entropy," *Braz. J. Phys.*, vol. 29, pp. 14–152, 1999.
- [81] M. L. Lyra, F. A. B. F. de Moura, and U. Tirnakli, "Convergence to the critical attractor of dissipative maps: Log-periodic oscillations, fractality and non-extensivity," *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 6361–6365, 2000.
- [82] W. E. Ricker, "Stock and recruitment," *J. Fisheries Res. Board Can.*, vol. 11, pp. 559–623, 1954.
- [83] A. Brännström and D. J. T. Sumpter, "The role of competition and clustering in population dynamics," *Proc. R. Soc. Lond. B*, vol. 272, pp. 2065–2072, October 2005.

- [84] J. G. Skellam, “Random dispersal in theoretical populations,” *Biometrika*, vol. 38, pp. 196–218, 1951.
- [85] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1 and 2. New York: John Wiley and Sons, 1966.
- [86] I. T. Pedron and R. S. Mendes, “Difusão anômala e equações generalizadas de difusão,” *Rev. Bras. Ens. Fis.*, vol. 27, pp. 251–258, 2005.
- [87] J. Klafter and I. M. Sokolov, “Anomalous diffusion spreads its wings,” *Phys. World*, August 2005.
- [88] H. Scher and E. Montroll, “Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids,” *Phys. Rev. B*, vol. 12, pp. 2455–2477, 1975.
- [89] J. G. Berryman and C. J. Holland, “Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations II,” *J. Math. Phys.*, vol. 19, pp. 2476–2480, 1978.
- [90] M. F. Shlesinger, J. Klafter, and B. West, “Random walks with applications to turbulence and chaos,” *Physica A*, vol. 104, pp. 212–218, 1986.
- [91] M. F. Shlesinger, B. J. West, and J. Klafter, “Levy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1100–1103, 1987.
- [92] H. Spohn, “Surface dynamics below the roughening transition,” *J. Phys. I (France)*, vol. 3, pp. 69–81, 1993.
- [93] J. Stephenson, “Some non-linear diffusion equations and fractal diffusion,” *Physica A*, vol. 222, pp. 234–247, 1995.
- [94] C.-K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, “Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1343–1346, 1993.
- [95] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley, 1954.
- [96] J. P. Nolan, *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhäuser, 2007.
- [97] D. S. Fisher, “Random walks in random environments,” *Phys. Rev. A*, vol. 30, pp. 960–964, August 1984.
- [98] R. Metzler and J. Klafter, “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach,” *Phys. Rep.*, vol. 339, pp. 1–77, 2000.
- [99] B. Derrida, “From random walks to spin glasses,” *Physica D*, vol. 107, pp. 186–198, September 1997.
- [100] H. Freund and P. Grassberger, “The Red Queens walk,” *Physica A*, vol. 190, pp. 218–237, December 1992.
- [101] L. A. Bunimovich and S. E. Troubetzkoy, “Recurrence properties of Lorentz lattice gas cellular automata,” *J. Stat. Phys.*, vol. 67, pp. 289–302, April 1992.

- [102] D. Gale, J. Propp, S. Sutherland, and S. Troubetzkoy, "Further travels with my ant," *Math. Intelligencer*, vol. 17, no. 3, pp. 48–56, 1995.
- [103] L. A. Bunimovich, "Deterministic walks in random environments," *Physica D*, vol. 187, pp. 20–29, 2004.
- [104] G. F. Lima, A. S. Martinez, and O. Kinouchi, "Deterministic walks in random media," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 010603, Jun 2001.
- [105] H. E. Stanley and S. V. Buldyrev, "Statistical physics - the salesman and the tourist," *Nature (London)*, vol. 413, pp. 373–374, 27 September 2001.
- [106] P. J. Clark and F. C. Evans, "On some aspects of spatial pattern in biological populations," *Science*, vol. 121, pp. 397–398, March 1955.
- [107] P. J. Clark, "Grouping in spatial distributions," *Science*, vol. 123, pp. 373–374, September 1956.
- [108] M. F. Dacey, "Proportion of reflexive n th-order neighbours in a spatial distribution," *Geographical Analysis*, vol. 1, pp. 385–388, 1969.
- [109] T. F. Cox, "Reflexive nearest neighbours," *Biometrics*, vol. 37, pp. 367–369, June 1981.
- [110] C. A. S. Terçariol, F. de Moura Kiipper, and A. S. Martinez, "An analytical calculation of neighbourhood order probabilities for high dimensional poissonian processes and mean field models," *J. Phys. A*, vol. 40, no. 9, pp. 1981–1989, 2007.
- [111] M. Mézard and G. Parisi, "Mean-field equations for the matching and travelling salesman problem," *Europhys. Lett.*, vol. 2, pp. 913–918, December 1986.
- [112] A. G. Percus and O. C. Martin, "Finite size and dimensional dependence in the Euclidean travelling salesman problem," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 1188–1191, February 1996.
- [113] C. A. S. Terçariol and A. S. Martinez, "Analytical results for the statistical distribution related to a memoryless deterministic walk: Dimensionality effect and mean-field models," *Phys. Rev. E*, vol. 72, no. 2, p. 021103, 2005.
- [114] C. A. S. Terçariol and A. S. Martinez, "An efficient algorithm to generate random uncorrelated euclidean distances: The random link model," *Braz. J. Phys.*, vol. 36, pp. 232–236, March 2006.
- [115] B. Derrida and H. Flyvbjerg, "The random map model - a disordered model with deterministic dynamics," *J. Phys. (Paris)*, vol. 48, pp. 971–978, June 1987.
- [116] S. A. Kauffman, "Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets," *J. Theor. Biol.*, vol. 22, p. 437, 1969.
- [117] S. Risau-Gusman, A. S. Martinez, and O. Kinouchi, "Escaping from cycles through a glass transition," *Phys. Rev. E*, vol. 68, p. 016104, Jul 2003.
- [118] O. Kinouchi, A. S. Martinez, G. F. Lima, G. M. Lourenço, and S. Risau-Gusman, "Deterministic walks in random networks: an application to thesaurus graphs," *Physica A*, vol. 315, pp. 665–676, December 2002.

- [119] W. T. R. Oliveira, *Novos Resultados nas Caminhadas Deterministas Parcialmente Auto-repulsivas em Meios Aleatórios Obtidos com o Gerenciamento Numérico da Memória dos Caminhantes*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, Maio 2010. <http://www.dominiopublico.gov.br>.
- [120] C. A. S. Terçariol, R. S. González, and A. S. Martinez, “Analytical calculation for the percolation crossover in deterministic partially self-avoiding walks in one-dimensional random media,” *Phys. Rev. E*, vol. 75, no. 6, p. 061117, 2007.
- [121] C. A. S. Terçariol, R. S. González, W. T. R. Oliveira, and A. S. Martinez, “Deterministic and random partially self-avoiding walks in random media,” *Physica A*, vol. 386, pp. 648–680, 2007.
- [122] M. G. Campiteli, P. D., O. Kinouchi, and A. S. Martinez, “Deterministic walks as an algorithm of pattern recognition,” *Phys. Rev. E*, vol. 74, no. 2, p. 026703, 2006.
- [123] A. R. Backes, O. M. Bruno, M. G. Campiteli, and A. S. Martinez, “Deterministic tourist walks as an image analysis methodology based,” *Lect. Note Comput. Sci.*, vol. 4225, pp. 784–793, 2006.
- [124] M. G. Campiteli, A. S. Martinez, and O. M. Bruno, “An image analysis methodology based on deterministic tourist walks,” *Lect. Note Comput. Sci.*, vol. 4140, pp. 159–167, 2006.
- [125] A. R. Backes, W. N. Gonçalves, A. S. Martinez, and O. M. Bruno, “Texture analysis and classification using deterministic tourist walk,” *Pattern Recogn.*, vol. 43, pp. 685–694, 2010.
- [126] A. R. Backes, A. S. Martinez, and O. M. Bruno, “Texture analysis based on maximum contrast walker,” *Pattern Recogn. Lett.*, vol. 31, pp. 1701–1707, 2010.
- [127] A. R. Backes, A. S. Martinez, and O. M. Bruno, “Texture analysis using graphs generated by deterministic partially self-avoiding walks,” *Pattern Recogn.*, vol. 44, pp. 1684–1689, 2011.
- [128] C. A. S. Terçariol and A. S. Martinez, “The influence of memory in deterministic walks in random media: analytical calculation within a mean field approximation,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, no. 7, p. 031111, 2008.
- [129] A. S. Martinez, O. Kinouchi, and S. Risau-Gusman, “Exploratory behavior, trap models, and glass transitions,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, no. 1, p. 017101, 2004.
- [130] J. M. da Silva Berbert and A. S. Martinez, “Crossover between the extended and localized regimes in stochastic partially self-avoiding walks in one-dimensional systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 81, p. 061127, 2010.
- [131] J. M. da Silva Berbert, “Transição entre os comportamentos estendido e localizado em caminhadas estocásticas parcialmente auto-repulsivas em sistemas desordenados unidimensionais,” Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2009. <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/59/59135/tde-16102009-132755/publico/DissertacaoBerbert.pdf>.

- [132] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince, and H. E. Stanley, “Lévy flight search patterns of wandering albatrosses,” *Nature (London)*, vol. 381, pp. 413–415, May 1996.
- [133] G. M. Viswanathan, S. Buldyrev, S. Havlin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposol, and H. E. Stanley, “Optimizing the success of random searches,” *Nature (London)*, vol. 401, pp. 911–914, October 1999.
- [134] J.-P. Bouchaud, “Weak ergodicity breaking and aging in disordered-systems,” *J. Phys. I (France)*, vol. 2, pp. 1705–1713, September 1992.
- [135] J. C. Dyre, “Energy master equation: a low-temperature approximation to Bassler’s random-walk model,” *Phys. Rev. B*, vol. 51, pp. 12276–12294, 1 May 1995.
- [136] C. Monthus and J.-P. Bouchaud, “Models of traps and glass phenomenology,” *J. Phys. A*, vol. 29, pp. 3847–3869, July 1996.
- [137] B. Rinn, P. Maass, and J.-P. Bouchaud, “Hopping in the glass configuration space: subaging and generalized scaling laws,” *Phys. Rev. B*, vol. 64, p. 104417, 1 September 2001.
- [138] E. M. Bertin and J. P. Bouchaud, “Subdiffusion and localization in the one-dimensional trap model,” *Phys. Rev. E*, vol. 67, p. 026128, February 2003.
- [139] R. A. Denny, D. R. Reichman., and J.-P. Bouchaud, “Trap models and slow dynamics in supercooled liquids,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 025503, January 2003.
- [140] J. M. da Silva Berbert, R. S. González, and A. S. Martinez, “Stochastic touristic walk: analytical approaches, algorithm and numerical results,” *JCIS*, vol. 1, no. 1, pp. 33–39, 2008.