UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Construção de um algoritmo para estimação da estrutura a termo da taxa de juros utilizando o método de taxas a termo constantes entre reuniões do Copom

Fernando Odair Bristotti

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria (MECAI)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Fernando Odair Bristotti

Construção de um algoritmo para estimação da estrutura a termo da taxa de juros utilizando o método de taxas a termo constantes entre reuniões do Copom

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática, Estatística e Computação

Orientador: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

**USP – São Carlos
Maio de 2018**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

B861c Bristotti, Fernando
 Construção de um algoritmo para estimação da
 estrutura a termo da taxa de juros utilizando o
 método de taxas a termo constantes entre reuniões
 do Copom / Fernando Bristotti; orientador Marinho
 Gomes de Andrade Filho. -- São Carlos, 2018.
 45 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística
 e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de
 Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade
 de São Paulo, 2018.

 1. estrutura a termo da taxa de juros. 2. taxa
 a termo constante Copom. 3. Copom. I. Filho,
 Marinho Gomes de Andrade, orient. II. Título.

Fernando Odair Bristotti

**Building an algorithm for implementing the term structure of
interest rate adopting the flat forward rate between Copom
meetings**

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Master – Professional Masters in Mathematics,
Statistics and Computing Applied to Industry. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics, Statistics and
Computing

Advisor: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

USP – São Carlos
May 2018

*Dedico este trabalho à minha família,
aos meu pais que me servem de fonte de inspiração,
a minha esposa Andressa Bristotti, pelo amor, carinho e apoio
e aos meus filhos a quem quero deixar este trabalho como inspiração.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, por todo o incentivo e apoio.

Agradeço ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP de São Carlos (ICMC) e principalmente a todo o pessoal da comissão de pós-graduação pelo suporte prestado durante o curso.

Agradeço especialmente ao meu orientador Marinho Gomes de Andrade Filho e ao professor Dorival Leão Pinto Junior. Agradeço-os imensamente por toda a orientação e por estarem sempre disponíveis para me ajudar na conclusão deste trabalho.

*“Discipline-se a fazer o que você sabe que é certo e importante, embora difícil.
Este é o caminho para o orgulho, auto-estima e satisfação pessoal.”
(Margaret Thatcher)*

RESUMO

BRISTOTTI, F. O. **Construção de um algoritmo para estimação da estrutura a termo da taxa de juros utilizando o método de taxas a termo constantes entre reuniões do Copom.** 2018. 45 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Para que um operador de uma mesa proprietária de um banco consiga fornecer um preço competitivo e de forma a auferir lucro em uma operação é fundamental uma estimação adequada da estrutura a termo da taxa de juros. Afinal, cada uma dessas demandas e ofertas por liquidez exigem diferentes prazos e na grande maioria das vezes instrumentos utilizados para realizar a imunização de acordo com o prazo dessa operação não estão disponíveis para negociação no mercado financeiro. A construção de uma estrutura a termo de juros é uma forma de sintetizar em uma única curva toda a informação disponível de contratos negociáveis no mercado financeiro e que reproduzam o preço mais justo para a taxa de juros de um determinado prazo.

O objetivo do presente trabalho é implementar a estimação da estrutura a termo da taxa de juros brasileira utilizando-se do método de taxas a termo constantes entre as reuniões do Comitê de Política Monetária (Copom). O algoritmo implementado deve ser capaz de resolver a estimação num tempo suficientemente rápido para que seja possível agregá-lo em um sistema de cotações de mercado em tempo real e fornecer aos operadores de mercado informações completas da curva de juros com as taxas zero cupom e as taxas a termo para cada prazo.

Nesta dissertação serão apresentados detalhes da implementação do algoritmo e também do arcabouço teórico utilizado. Será apresentando também uma breve descrição da dinâmica do mercado de juros brasileiro e suas peculiaridades, além de apresentar alguns métodos de estimação da estrutura a termo comumente utilizados.

Palavras-chave: estrutura a termo da taxa de juros, taxa a termo constante Copom, Copom.

ABSTRACT

BRISTOTTI, F. O. **Building an algorithm for implementing the term structure of interest rate adopting the flat forward rate between Copom meetings**. 2018. 45 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

For an operator of a bank to be able to provide a competitive price and to make a profit in an operation, an adequate estimation of the term structure of the interest rate is essential. After all, each of these demands and offers for liquidity require different terms and in most cases the instruments used to carry out the immunization according to the term of this operation are not available for trading in the financial market. The construction of an interest rate term structure is a way of synthesizing in a single curve all the available information of contracts negotiable in the financial market and that best reproduces the fairer price for the interest rate of a certain term.

The main purpose of this work is implement the estimation of the Brazilian term structure of interest rate using the flat forward rate method between Copom meetings. The implemented algorithm must be able to resolve the estimation in a sufficiently fast time so that it can be aggregated into a real-time market quotations system and provide to market operators information on the yield curve and forward rates.

This dissertation will present the algorithm implementation in details as well as the theoretical framework used. It will also present a brief description of the dynamics of the Brazilian interest market and its peculiarities, besides presenting some methods of estimation of the term structure commonly used.

Keywords: term structure of interest rate, flat-forward Copom, Copom.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Argumento de arbitragem que mostra que $P(t, T)$ deve ser decrescente em relação a T	24
Figura 2 – Histórico 2007-2017 de metas da Taxa Selic	27
Figura 3 – Histórico 2007-2017 das alterações na meta da Taxa Selic	28
Figura 4 – Mercado Interbancário	28
Figura 5 – Comparativo entre a META Selic e o CDI	29
Figura 6 – Série com a diferença entre a META Selic e o CDI em pontos base	30
Figura 7 – Número de operações no mercado interbancário	30
Figura 8 – Exemplo de interpolação onde o primeiro vértice é um vencimento de DI futuro	35
Figura 9 – Exemplo de interpolação onde o primeiro vértice é uma reunião do Copom	36
Figura 10 – Exemplo de interpolação onde existem dois vencimentos de DI futuro entre reuniões do Copom	36
Figura 11 – Exemplo de interpolação onde existem duas reuniões do Copom entre vencimentos de DI futuro	37
Figura 12 – Estrutura a Termo de 17-Jan-2014	39
Figura 13 – Estrutura a Termo de 6-Mar-2014	39
Figura 14 – Estrutura a Termo de 2-Jan-2017	40
Figura 15 – Estrutura a Termo de 10-Nov-2017	40
Figura 16 – Erro de estimação	41
Figura 17 – Tempo despendido na estimação	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Código de vencimento dos contratos futuros	32
Tabela 2 – Contratos em aberto de futuro de DI1 em 6 de outubro de 2017	32
Tabela 3 – Algoritmo FFC	38
Tabela 4 – Algoritmo FFC Diferenças	38

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	REVISÃO DA LITERATURA	23
2.1	Conceitos Básicos de Renda Fixa	23
2.2	Taxa a Termo - <i>Forward rates</i>	25
2.3	Mercado Financeiro	26
2.3.1	<i>Copom - Comitê de política monetária</i>	26
2.3.2	<i>DI - Depósito Interfinanceiro</i>	27
2.3.3	<i>Contrato Futuro de DI1</i>	29
2.4	Métodos de Interpolação	32
2.4.1	<i>Interpolação Linear</i>	32
2.4.2	<i>Taxa a Termo Constante - Flat Forward</i>	33
2.4.3	<i>Spline Cúbico</i>	33
2.5	Considerações finais	34
3	METODOLOGIA	35
3.1	Implementação	35
3.2	Resultados	38
3.3	Melhorias	42
4	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	45

INTRODUÇÃO

O mercado financeiro, de uma maneira resumida, é um centro provedor de liquidez para operações de captação e aplicação de recursos para diversos prazos e que estarão sujeitos aos mais variados tipos de indexadores como juros, câmbio, inflação, entre outros dependendo da necessidade de cada um dos participantes do mercado financeiro e que irão agir como tomadores dessa liquidez.

Para que bancos e outros agentes do mercado financeiro consigam atender essa demanda ou oferta por liquidez é necessário o desenvolvimento de um arcabouço para o apreçamento de forma consistente dos instrumentos financeiros disponíveis no mercado e que serão eventualmente utilizados na imunização de um ou mais riscos contraídos após a realização da operação. É importante lembrar que, na prática, não haverá instrumentos disponíveis e que sejam negociados com razoável liquidez para todos os prazos de vencimento, portanto é necessário sintetizar a informação observável no mercado através dos instrumentos mais negociados e que repliquem a taxa de juros e, após a aplicação de um método de estimação, resulte em uma curva que forneça uma taxa de juros para qualquer prazo solicitado.

Portanto, é parte fundamental desse arcabouço a estimação adequada dessa curva que damos o nome de Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ET TJ). É ela que fornecerá uma referencia, para o mercado, da medida de custo do dinheiro no tempo, sendo possível utilizá-la para realizar decisões de investimentos comparando numa base única diferentes prazos. Será utilizada também na precificação de praticamente todos os instrumentos financeiros, principalmente os instrumentos derivativos como opções, futuros, *swaps*, entre outros e que tenham como finalidade a imunização de determinado risco de uma carteira de investimento.

Diversos métodos podem ser empregados para a estimação da ET TJ e como exposto por exemplo em (RON *et al.*, 2000), não há um consenso do modelo correto a ser utilizado na geração da estrutura a termo a partir de uma série de taxas ou preços observado no mercado. É desejável que a curva de juros obtida seja suavizada, entretanto alguns cuidados devem ser

tomados para evitar uma super suavização da curva de maneira que informações de mercado sejam completamente eliminadas, implicando na possibilidade de ocorrência de operações de arbitragem, onde ganhos podem ser obtidos pelos demais participantes do mercado com quase nenhum risco.

Pode ser ou não aplicada a restrição de que todas as taxas devam ser interpoladas exatamente pelo modelo entretanto, assim como em (HAGAN; WEST, 2006), iremos dar preferência para uma escolha adequada de poucas taxas com razoável liquidez onde a interpolação exata seja viável.

O objetivo do presente trabalho será implementar, através de uma aplicação, a estimação da ETTJ utilizando o método de taxas a termo constantes entre as reuniões do Comitê de Política Monetária (Copom), proposto por (CARREIRA; BROSTOWICZ, 2016), e que no mercado financeiro é mais conhecido como metodologia *flat-forward* Copom (FFC). A ferramenta deve gerar a estimação da ETTJ num tempo razoável para que seja possível empregá-la num sistema de cotações de mercado em tempo real e que será sensibilizada pelas alterações na cotação do livro de ofertas dos inúmeros vencimentos de contrato futuros de DI1 apregoados na Bolsa de Mercados e Futuros (BM&F).

Os próximos capítulos estão divididos da seguinte forma: no Capítulo 2, faremos uma revisão dos conceitos básicos de cálculo para renda fixa na Seção 2.1, em seguida, na Seção 2.3 faremos uma breve descrição das dinâmicas do mercado financeiro de taxa de juros brasileiro e suas peculiaridades e também apresentaremos os instrumentos financeiros utilizados para estimação da ETTJ e por fim, na Seção 2.4 apresentaremos os principais métodos de estimação utilizado pelo mercado financeiro. No Capítulo 3 vamos entrar nos detalhes da implementação do algoritmo, dados de mercado utilizado e os resultados obtidos. Por último, o Capítulo 4 traz algumas considerações e propostas de melhorias para trabalhos futuros com o objetivo de evoluir o algoritmo desenvolvido.

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Conceitos Básicos de Renda Fixa

A estrutura a termo da taxa de juros é definida como uma relação entre a taxa de remuneração e o prazo de vencimento de um investimento zero cupom, ou seja, um investimento que possui um único fluxo de caixa que irá ocorrer exatamente no vencimento em T , devolvendo ao investidor o valor investido acrescido de uma remuneração.

Seja $P(t, T)$ o preço no instante t de um título que paga 1 unidade monetária no vencimento em T , ou seja, $P(T, T) = 1$. Denotaremos como $C(t, T)$ o inverso do preço do título e que é comumente denominado de fator de capitalização.

Com a introdução da taxa $r(t, T)$, a equação do preço do título na forma discreta, capitalizando juros m vezes ao ano, pode ser descrita da seguinte forma:

$$P(t, T) = \left(1 + \frac{r(t, T)}{m}\right)^{-m(T-t)}$$

Para obter a equação de preço no formato contínuo, fazemos $m \rightarrow \infty$ como segue:

$$P(t, T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r(t, T)}{m}\right)^{-m(T-t)}$$

e portanto, temos que:

$$P(t, T) = \exp^{-r(t, T)[T-t]} \quad (2.1)$$

e a partir de (2.1), podemos derivar a função da taxa juros:

$$r(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T-t} \quad (2.2)$$

Ao tomarmos o limite do comprimento do intervalo entre T e t tendendo a zero, obteremos a chamada taxa de juros livre de risco, cuja interpretação é de que existe um intervalo de tempo suficientemente pequeno onde os demais riscos de mercado não exerceriam influência.

Um fato imediato que decorre dessa dinâmica é que quanto maior for o prazo de vencimento T do título, menor será o seu valor $P(t, T)$, ou seja, a curva de fatores de desconto é monótona decrescente.

Caso contrário, suponha que exista $P(t, T_1) < P(t, T_2)$ para algum $T_1 < T_2$. Então, neste caso, um participante poderia lançar uma operação de arbitragem vendendo um instrumento com vencimento em T_2 e utilizando o valor obtido na venda para financiar a compra de um instrumento com vencimento em T_1 , realizando imediatamente um resultado sem risco $P(t, T_1) - P(t, T_2) > 0$. No tempo T_1 o investidor receberia 1 unidade monetária e utilizaria o valor resgatado para pagar a mesma 1 unidade monetária, no entanto, somente no vencimento do título em T_2 .

A [Figura 1](#) apresenta os fluxos de caixa dessa operação de arbitragem. É importante ressaltar que o conceito acima, assume que tais instrumentos são negociáveis com razoável liquidez e de modo contínuo, isto é, um instrumento zero cupom deve existir para qualquer vencimento compreendido em $(0, T]$. Na prática esse tipo de instrumento raramente está disponível no mercado.

Figura 1 – Argumento de arbitragem que mostra que $P(t, T)$ deve ser decrescente em relação a T

Fonte: Adaptada de [Hagan e West \(2008, p.2\)](#).

A curva de taxas de retorno $r(t, T)$ não segue o mesmo comportamento da curva de descontos $P(t, T)$, que como já vimos é monótona decrescente. É importante lembrar que alguns métodos de interpolação da taxa de juros não levam em consideração esse fato.

O mesmo comportamento não ocorre quando estamos observando a taxa real de juros, ou seja, a taxa de juros já descontada da expectativa de inflação. Como os fluxos de caixa futuro são desconhecidos por serem determinados pela evolução de um índice de preços desconhecido, o argumento de arbitragem não se aplica e, portanto, a função P da curva real de taxa de juros não é necessariamente decrescente. Esse fato pode ser observado empiricamente.

2.2 Taxa a Termo - *Forward rates*

A taxa de juros a termo, mais conhecida no mercado como taxa *forward* ou ainda *Forward Rate Agreement* (FRA), é uma taxa fixa conhecida em $t = 0$ e que somente terá aplicação efetiva a partir de um tempo $T_1 > 0$ até o tempo $T_2 > T_1$.

Dado que seja possível tomar um empréstimo a uma taxa fixa e conhecida em $t = 0$, para pagar em T_1 , e que também seja possível tomar um empréstimo a uma taxa fixa e conhecida em $t = 0$ para pagar em T_2 , então, utilizando o princípio da não arbitragem, nós podemos tomar um empréstimo em T_1 a uma taxa fixa e conhecida para pagar em T_2 . Claramente temos que:

$$P(t, T_1)P(t, T_1, T_2) = P(t, T_2) \quad (2.3)$$

em que $P(t, T_1, T_2)$ é uma taxa de desconto a termo para o período que compreende de T_1 a T_2 .

Aplicando-se continuamente o fator de desconto no período de T_1 e T_2 , temos que:

$$P(t, T_1, T_2) = \exp^{-r(t, T_1, T_2)[T_2 - T_1]}$$

Imediatamente, observamos que a taxa a termo é positiva e aplicando a equação de não arbitragem (2.3), definimos a taxa a termo como:

$$\begin{aligned} P(t, T_1, T_2) &= \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \\ \ln(P(t, T_1, T_2)) &= \ln(P(t, T_2)) - \ln(P(t, T_1)) \\ \ln\left(\exp^{-r(t, T_1, T_2)[T_2 - T_1]}\right) &= \ln\left(\exp^{-r(t, T_2)[T_2 - t]}\right) - \ln\left(\exp^{-r(t, T_1)[T_1 - t]}\right) \\ r(t, T_1, T_2) &= \frac{r(t, T_2)[T_2 - t] - r(t, T_1)[T_1 - t]}{[T_2 - T_1]} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pra ilustrar melhor a equação (2.4), podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$r(t, T_1, T_2) = r(t, T_2) + (r(t, T_2) - r(t, T_1)) \frac{[T_1 - t]}{[T_2 - T_1]} \quad (2.5)$$

Através dessa função é possível verificar que, se a curva de taxa zero cupom é ascendente entre T_1 e T_2 de modo que $r(t, T_2) > r(t, T_1)$, então $r(t, T_1, T_2) > r(t, T_2)$, ou seja, a taxa a termo para um período de tempo que termina em T_2 é maior do que a taxa zero cupom para T_2 . Da mesma forma, se a curva da taxa zero cupom é decrescente entre T_1 e T_2 , com $r(t, T_2) < r(t, T_1)$ então a taxa a termo para T_2 é menor que a taxa zero cupom para T_2 .

Ao tomarmos o limite quando T_2 tende a T_1 na equação (2.4), obtemos:

$$\begin{aligned} r(t, T) &= \lim_{dT \downarrow 0} r(t, T, T + dT) \\ &= \lim_{dT \downarrow 0} \frac{r(t, T + dT)[T + dT - t] - r(t, T)[T - t]}{dT} \end{aligned} \quad (2.6)$$

e utilizando (2.1), substituímos $r(t, T)[T - t] = -\ln(P(t, T))$ em (2.6) obtendo:

$$\begin{aligned} r(t, T) &= -\frac{d}{dT} \ln(P(t, T)) \\ &= \frac{d}{dT} r(t, T)[T - t] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Integrando (2.7) temos:

$$r(t, T)[T - t] = \int_t^T r(t, s) ds$$

que é escrita como:

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r(t, s) ds \right)$$

Portanto, o preço do ativo $P(t, T)$ depende do acúmulo da taxa a termo instantânea $f(t, T)$ no intervalo de tempo entre t e T .

2.3 Mercado Financeiro

Nesta seção iremos fornecer alguns conceitos sobre as dinâmicas do mercado financeiro e sobre os produtos de renda fixa utilizados pelas instituições financeiras e que influenciam e servem de informação para a estimação da estrutura a termo da taxa de juros.

2.3.1 Copom - Comitê de política monetária

O Copom foi instituído em 1996, com o objetivo de estabelecer as diretrizes da política monetária de juros. Segundo (BACEN, 2017a), a criação do Comitê buscou proporcionar maior transparência e ritual adequado ao processo decisório da autoridade monetária, a exemplo do que já era adotado em países com um mercado financeiro mais desenvolvido.

A taxa de juros fixada na reunião do Copom é a meta para a Taxa Selic, que é a taxa média dos financiamentos diários lastreados em títulos públicos federais, apurados e liquidados pelo Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC). Atualmente, as reuniões ordinárias do

Copom dividem-se em dois dias: a primeira sessão às terças-feiras e a segunda às quartas-feiras, sendo que o calendário anual é divulgado até o fim de junho do ano anterior.

No primeiro dia das reuniões, os chefes de departamento apresentam uma análise da conjuntura doméstica abrangendo inflação, nível de atividade, evolução dos agregados monetários, finanças públicas, balanço de pagamentos, economia internacional, mercado de câmbio, reservas internacionais, mercado monetário, operações de mercado aberto, avaliação prospectiva das tendências da inflação e expectativas gerais para variáveis macroeconômicas.

No segundo dia da reunião, são apresentadas alternativas para a taxa de juros de curto prazo e são feitas recomendações acerca da política monetária. Em seguida, procede-se à votação das propostas, buscando-se, sempre que possível, o consenso. A decisão final da meta para a Taxa Selic e seu viés, se houver, é imediatamente divulgada à imprensa ao mesmo tempo em que é expedido Comunicado através do Sistema de Informações do Banco Central.

Figura 2 – Histórico 2007-2017 de metas da Taxa Selic

Fonte: Elaborada pelo autor.

A série histórica da taxa de juros da meta Selic pode ser obtida no sítio do Banco Central em (BACEN, 2017b). Nas Figura 2 e Figura 3 podemos observar o histórico da meta da Taxa Selic nos últimos dez anos e a evolução das alterações no nível da taxa a cada reunião.

2.3.2 DI - Depósito Interfinanceiro

De forma a garantir uma distribuição de recursos que atendesse ao fluxo de recursos demandado pelas instituições, foi criado, em meados da década de 1980, o Certificado de Depósitos Interbancários (CDI). Negociado exclusivamente entre instituições financeiras, o CDI

Figura 3 – Histórico 2007-2017 das alterações na meta da Taxa Selic

Fonte: Elaborada pelo autor.

é um título privado de renda fixa que auxilia na rotina de fechamento de caixa dos bancos como um instrumento de captação de recursos ou de aplicação de recursos excedentes do mercado interbancário, conforme exemplificado em [Figura 4](#).

Figura 4 – Mercado Interbancário

Fonte: Elaborada pelo autor.

As operações são realizadas fora do âmbito do Banco Central e as transações são acordadas diretamente entre as instituições financeiras e registradas eletronicamente na Central de Custódia e Liquidação de Títulos Privados (CETIP), onde o contrato recebe o nome de Depósito Interfinanceiro (DI).

A partir do registro dessas negociações, deriva-se a Taxa DI-CETIP, ou simplesmente CDI, obtida pelo cálculo da média ponderada das taxas das transações de DI prefixadas e com

prazo de um dia. Os detalhes da metodologia de cálculo da taxa podem ser obtidos no sítio da CETIP, em (CETIP, 2017). Atualmente a taxa DI-CETIP serve de referência de remuneração para a maior parte dos títulos de renda fixa ofertados ao investidor.

Figura 5 – Comparativo entre a META Selic e o CDI

Fonte: Dados da pesquisa.

Normalmente, o custo do dinheiro de um dia negociado no mercado interbancário é muito próximo do custo de troca das reservas bancárias disponíveis lastreadas em títulos federais que ocorrem no mercado aberto (Selic). É possível observar através da [Figura 5](#) que existe uma forte correlação entre a taxa CDI e a meta estabelecida pelo Copom. A fator de correlação calculado para o período de janeiro de 2010 a outubro de 2017 chega a 99,98%. E na [Figura 6](#) é possível observar a série de diferenças entre as duas taxas.

Essa correlação se intensificou ainda mais após outubro de 2013, onde o número de operações interbancárias registradas passou a ser quase que consistentemente inferior a 10 operações, como pode ser observado na [Figura 7](#). A ativação do dispositivo de *fallback*, descrito na metodologia de cálculo do CDI disponível em (CETIP, 2017), reduz a taxa CDI a apenas uma função linear da taxa Selic.

2.3.3 Contrato Futuro de DI1

Segundo o sítio da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), em (B3, 2017b), o contrato futuro de DI1 é um derivativo operado na BM&F e que tem como ativo subjacente o acumulo da taxa média diária dos Depósitos Interfinanceiros (DI), calculada e divulgada pela Câmara de

Figura 6 – Série com a diferença entre a META Selic e o CDI em pontos base

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7 – Número de operações no mercado interbancário

Fonte: Dados da pesquisa.

Liquidação e Custódia (CETIP), compreendida entre a data de negociação, inclusive, e a data de vencimento do contrato, exclusive.

O valor do contrato futuro no seu vencimento equivale a R\$100,000.00 e o seu valor na data de negociação é calculado descontando-se a taxa de juros contratada para o vencimento T pelo valor de face do contrato que equivale a R\$100,000.00. A equação do cálculo do PU é dada por:

$$PU(t, T) = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{r(t, T)}{100}\right)^{\frac{n}{252}}}$$

em que:

n = número de saques-reserva, compreendidos no período entre a data da operação, inclusive, e a data de vencimento do contrato, exclusive

252 = número total de dias úteis no ano

Como a posição do investidor é atualizada diariamente pela taxa DI-CETIP através da dinâmica de atualização do PU pelo fator de correção, o investidor que carrega a posição até o vencimento ocorrem ajustes diários, que podem ser um pagamento ou um recebimento de fluxo de caixa dependendo do movimento do mercado no dia anterior e que se somados, equivalerão à diferença entre a taxa de juros contratada e a taxa de juros efetivamente realizada, sobre o montante financeiro da operação.

Como convenção do mercado local, as operações são realizadas pela compra ou venda de um certo número de contratos com vencimento em T por uma taxa fixa de juros $r(t, T)$. Após a concretização da operação, a bolsa fará a conversão da taxa contratada em PU e também fará a inversão da posição de compra por uma venda e de venda por uma compra devido a relação inversa entre a taxa e o PU. Segundo (CARREIRA; BROSTOWICZ, 2016), essa abordagem é utilizada devido à preferência dos participantes do mercado local por manter uma relação de que terão resultados positivos numa carteira ativa de contratos futuros numa eventual subida da taxa $r(t, T)$.

Os contratos de futuro de DI1 são apregoados na Bolsa de Mercadorias e Futuros através de um código de identificação, onde os três primeiros caracteres, DI1, identificam o tipo de contrato e os três últimos identificam o mês, representado por uma letra de acordo com Tabela 1, e o ano, representado por 2 dígitos, do vencimento do contrato.

No Brasil, o contrato futuro de DI1 é um dos instrumentos de taxa que possui maior liquidez como poder ser observado pela Tabela 2, que mostra o número de contratos futuros abertos no dia 6 de outubro de 2017. As cotações utilizados para testar o algoritmo foram obtidos a partir do sítio da B3 (B3, 2017a).

Tabela 1 – Código de vencimento dos contratos futuros

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Letra	F	G	H	J	K	M	N	Q	U	V	X	Z

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 2 – Contratos em aberto de futuro de DI1 em 6 de outubro de 2017

Ano	Mês											
	Jan	Mar	Jun	Jul	Nov	Abr	Ago	Dez	Fev	Mai	Out	Set
2017					551,398			379,095				
2018	4,856,437	73,845	40,430	1,508,552		2,038,959	9,255		81,865	28,035	712,683	6,105
2019	2,138,861			499,549		552,029					345,353	
2020	1,687,301			1,330,412		110,694					52,378	
2021	1,570,748			294,385		32,998					20,020	
2022	116,192			12,010		1,590						
2023	738,571			4,255								
2024	58,190			3,440								
2025	484,592											
2026	63,498											
2027	441,777											
2028	10											
2029	4,617											
2030	1,215											

Fonte: Dados da pesquisa.

2.4 Métodos de Interpolação

Muito do que iremos apresentar de forma resumida nessa seção está muito bem detalhado em (HAGAN; WEST, 2006). Apenas introduziremos os métodos mais utilizados no mercado financeiro para a estimação da ETTJ, os quais não serão utilizados neste trabalho.

2.4.1 Interpolação Linear

Suponha que exista $\tau \in (\tau_1, \tau_n)$ e seja i tal que $\tau_i < \tau < \tau_{i+1}$. Dessa forma, o método de interpolação linear utilizará somente as taxas r_i e r_{i+1} para estimar a taxa $r(\tau)$. O método pode ser formulado como uma interpolação linear na função das taxas de desconto, na taxa zero cupom, ou então em alguma outra transformação tal como o logaritmo de tais funções.

No caso em que a linearidade é nas taxas zero cupom, temos:

$$r(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_{i+1} + \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_i$$

e a taxa a termo pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f(\tau) &= \frac{d}{d\tau} r(\tau) \tau \\
&= r'(\tau) \tau + r(\tau) 1 \\
&= \frac{2\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_{i+1} + \frac{\tau_{i+1} - 2\tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} r_i
\end{aligned}$$

As principais vantagens do método de interpolação linear são: a sua simplicidade de implementação, ser um método local, ou seja, depende somente das taxas de juros obtidas no mercado com prazos subjacentes ao prazo que deseja-se estimar e é um método limitado pois a taxa estimada ficará contida no intervalo entre as taxas obtidas no mercado, ou seja, $r_i \leq r(\tau) \leq r_{i+1}$.

2.4.2 Taxa a Termo Constante - Flat Forward

O método de taxas a termo constantes, é um dos mais comumente utilizados no mercado financeiro e frequentemente está disponível em aplicações de terceiros. É um método linear no logaritmo dos fatores de desconto e como veremos, corresponde a uma função por partes que tem como objetivo manter a taxa a termo constante entre as taxas observadas no mercado.

Sendo a curva de taxas a termo instantânea definida como $f(\tau) = \frac{d}{d\tau} r(\tau) \tau$, a função para interpolação da curva de taxas de retorno é dado por:

$$\begin{aligned}
\tau \ln(1 + r(\tau)) &= \tau_i \ln(1 + r_i) + (\tau_{i+1} \ln(1 + r_{i+1}) - \tau_i \ln(1 + r_i)) \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \\
(1 + r(\tau))^\tau &= \frac{(1 + r_i)^{\tau_i} (1 + r_{i+1})^{\tau_{i+1} \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}}}{(1 + r_i)^{\tau_i \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}}} \\
r(\tau) &= (1 + r_i)^{\frac{\tau_i}{\tau} \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}} \cdot (1 + r_{i+1})^{\frac{\tau_{i+1}}{\tau} \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}} - 1
\end{aligned}$$

Como vimos na [Seção 2.1](#), a taxa a termo pode ser facilmente obtida por:

$$f(\tau) = \left(\frac{(1 + r_{i+1})^{\tau_{i+1}}}{(1 + r_i)^{\tau_i}} \right)^{\frac{1}{(\tau_{i+1} - \tau_i)}} - 1$$

As principais vantagens do método *flat forward* são: é um método local, o que torna sua implementação relativamente simples e é um método limitado.

2.4.3 Spline Cúbico

O método de Spline cúbico é uma técnica empregada que consiste na subdivisão do intervalo que se deseja realizar uma aproximação e, para cada subintervalo, é interpolado um polinômio diferente de grau.

Como trata-se de um polinômio de classe C^2 com quatro coeficientes (a_i, b_i, c_i, d_i) , existe flexibilidade suficiente para garantir a suavidade na curva fazendo com que não somente o polinômio seja continuamente diferenciável no intervalo mas também seja diferenciável sua segunda derivada. Mais detalhes sobre a implementação desse método numérico de interpolação pode ser obtido em (BURDEN; FAIRES, 2011).

Suponha que $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ e $r_1, r_2, \dots, r_n$ sejam conhecidos. Para obter o resultado de uma interpolação por spline cúbico, desejamos encontrar os coeficientes (a_i, b_i, c_i, d_i) para $1 \leq i \leq n-1$ tal que satisfaçam cada uma das equações para o prazo τ :

$$r(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_i) + c_i(\tau - \tau_i)^2 + d_i(\tau - \tau_i)^3 \quad \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1} \quad (2.8)$$

Note que as derivadas até terceira ordem da Equação 2.8 devem satisfazer:

$$\begin{aligned} r'(\tau) &= b_i + 2c_i(\tau - \tau_i) + 3d_i(\tau - \tau_i)^2 & \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \\ r''(\tau) &= 2c_i + 6d_i(\tau - \tau_i) & \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \\ r'''(\tau) &= 6d_i & \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \end{aligned}$$

A característica do método de estimação da ETTJ por spline cúbico é não local e também é não limitado e possui uma alta sensibilidade aos parâmetros de entrada, além de que as taxas a termo obtidas podem ser inclusive negativas tendo pouco significado econômico. Uma aplicação do método para as taxas locais pode ser visto em (VARGA, 2000).

2.5 Considerações finais

Até aqui, podemos entender melhor as dinâmicas de mercado, os agentes financeiros envolvidos e o papel do Banco Central na fixação da meta da taxa SELIC. Abordamos também os principais instrumentos financeiros utilizados como informação na estimativa da estrutura a termo além de uma breve descrição dos métodos mais comuns utilizados no mercado financeiro atualmente para realizar tal estimação.

O próximo capítulo descreverá em detalhes a implementação do método descrito em (CARREIRA; BROSTOWICZ, 2016) e que consiste em utilizar uma variante do modelo de taxas a termo constantes, entretanto as alterações na taxa a termo serão modeladas de uma forma que ocorra entre as reuniões do Copom.

METODOLOGIA

Este capítulo apresentará os detalhes da implementação do algoritmo e a tecnologia que foi empregada em sua construção. Em seguida, será disponibilizado os resultados da estimação, bem como os erros obtidos na estimação e o tempo médio despendido.

3.1 Implementação

Para a estimação da curva de taxa zero cupom, construiremos uma série constituída pelas datas de reunião do Copom e os vencimento dos contratos futuros de DI1 negociados na bolsa. A série será ordenada de forma crescente pelo prazo definido entre a data do pregão em t e o vencimento do contrato futuro ou a reunião do Copom de acordo com cada vértice.

Figura 8 – Exemplo de interpolação onde o primeiro vértice é um vencimento de DI futuro

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após a obtenção da série, para cada um dos pontos será definido se deve ou não haver alteração na taxa a termo. Como é objetivo do trabalho, atribuiremos as datas de reunião do Copom como os pontos para a alteração da taxa, como ilustrado na [Figura 8](#).

Figura 9 – Exemplo de interpolação onde o primeiro vértice é uma reunião do Copom

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos casos em que o primeiro vértice seja uma reunião do Copom, ver [Figura 9](#), utilizaremos o $CDI(t)$ para calcular a taxa zero cupom para o prazo coincidente com a reunião e então calcular a alteração necessária na taxa a termo para o cálculo da taxa para o primeiro vencimento de DI1. Caso contrário, quando o primeiro vértice for um contrato futuro de DI1, a primeira taxa a termo já estará definida e será equivalente a taxa do primeiro vencimento de DI1.

Figura 10 – Exemplo de interpolação onde existem dois vencimentos de DI futuro entre reuniões do Copom

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante observar que haverá casos em que duas ou mais reuniões do Copom estarão entre vencimentos de DI1, ver [Figura 11](#) e, neste caso, as alterações na taxa a termo serão distribuídas entre tais reuniões. Relembrando o que discutimos na seção sobre a dinâmica da meta da taxa Selic, principalmente sobre a autocorrelação em suas alterações e sobre a maneira parcimoniosa com que é conduzida a política monetária, o valor mais provável para alteração na meta Selic é a própria alteração estabelecida na última reunião. Isso nos sugere que a curva de alterações na taxa a termo seja a mais suavizada possível.

Outro caso que deve ser considerado com bastante atenção, é quando ocorre dois vencimentos de DI1 entre reuniões do Copom. Nessas situações pode haver um potencial problema

Figura 11 – Exemplo de interpolação onde existem duas reuniões do Copom entre vencimentos de DI futuro

Fonte: Elaborada pelo autor.

numérico, pois o primeiro vencimento de DI1 estará muito próximo, talvez um ou dois dias, de uma reunião do Copom e isso pode gerar uma alta sensibilidade na alteração da taxa a termo. Haverá ainda a necessidade de alteração na taxa a termo fora de uma reunião do Copom. Desta forma, conforme sugerido em (CARREIRA; BROSTOWICZ, 2016), iremos retirar da série o primeiro vencimento de DI1.

Não será realizada a extrapolação de datas de reunião do Copom para além das oficialmente divulgadas e, a partir da última data, o algoritmo passará a considerar alterações na taxa a termo também nos vencimentos de DI1.

Após determinar em quais pontos ocorrerão as alterações e recebendo como entrada os valores da taxa a termo para cada vértice, calcula-se a taxa zero cupom. O erro de estimação então será definido como a diferença em módulo entre a taxa zero cupom calculada e a taxa observada no mercado através do contrato de DI1.

O algoritmo rodará em duas etapas. Na primeira inicializando-se o valor das taxas a termo de cada vértice com o valor da taxa observada no vencimento do contrato futuro de DI1 mais próximo e com prazo menor ou igual ao vencimento do vértice. Em seguida, utilizando-se de um método numérico, minimizaremos o somatório do erro. Na segunda etapa, inicializamos o valor as taxas a termo obtidas na primeira etapa do algoritmo e além do erro, minimizaremos também a segunda diferença da curva de alterações na taxa a termo com o objetivo de suavizar a curva.

As Tabela 3 e Tabela 4 mostram o esquema descrito, o qual será utilizada pelo algoritmo de minimização, onde o símbolo $\oplus$ denota uma operação de composição entre duas taxas de acordo com seus prazos. A Tabela 4 ilustra o cálculo da segunda diferença da curva de alterações nas taxas a termo, onde o objetivo será suavizar a curva de taxas zero cupom minimizando o valor resultante do somatório da coluna $|\Delta(\Delta(\Delta r_{i,i+1}))|$. A coluna Taxa Zero Cupom é o resultado final obtido pelo algoritmo, ou seja, a estimação da estrutura a termo da taxa de juros.

Tabela 3 – Algoritmo FFC

t	Agenda	Taxa Observada	Mesma Taxa a Termo	Inicialização	Taxa a Termo	Taxa Zero Cupom	$ rm_i - r_i $
t_1	DI	rm_1	NÃO	$f_1 = rm_1$	$r_{0,1} = rm_1$	$r_1 = rm_1$	0
t_2	COPOM		SIM	$f_2 = rm_1$	$r_{1,2} = r_{0,1}$	$r_2 = r_1 \oplus r_{1,2}$	
t_3	DI	rm_3	NÃO	$f_3 = rm_3$	$r_{2,3} = f_3$	$r_3 = r_2 \oplus r_{2,3}$	0
t_4	COPOM		SIM	$f_4 = rm_3$	$r_{3,4} = r_{2,3}$	$r_4 = r_3 \oplus r_{3,4}$	
t_5	COPOM		NÃO	$f_5 = rm_3$	$r_{4,5} = f_5$	$r_5 = r_4 \oplus r_{4,5}$	
t_6	DI	rm_6	NÃO	$f_6 = rm_6$	$r_{5,6} = f_6$	$r_6 = r_5 \oplus r_{5,6}$	0

Fonte: Adaptada de [Carreira e Brostowicz \(2016, p.2\)](#).

Tabela 4 – Algoritmo FFC Diferenças

t	$\Delta r_{i,i+1}$	$\Delta(\Delta r_{i,i+1})$	$ \Delta(\Delta(\Delta r_{i,i+1})) $
t_1			
t_2			
t_3	$d_3 = r_{2,3} - r_{1,2}$		
t_4			
t_5	$d_5 = r_{4,5} - r_{3,4}$	$dd_5 = d_5 - d_3$	
t_6	$d_6 = r_{5,6} - r_{4,5}$	$dd_6 = d_6 - d_5$	$ddd_6 = dd_6 - dd_5$

Fonte: Adaptada de [Carreira e Brostowicz \(2016, p.2\)](#).

Para realizar essa minimização, o método de gradiente reduzido generalizado descrito em ([LASDON; FOX; RATNER, 1974](#)) será empregado na função obtida a partir da coluna $|rm_i - r_i|$ da [Tabela 3](#). Não será objetivo do presente trabalho a implementação do método e, portanto, iremos utilizar uma biblioteca chamada *Microsoft Solver Foundation* ([MICROSOFT, 2017](#)) amplamente utilizada em produtos e aplicações de mercado e que disponibiliza uma implementação do método citado.

A aplicação foi desenvolvida na linguagem de programação C# e seu código fonte está disponível para consulta em <https://github.com/fbristotti/Bristotti.Finance>.

3.2 Resultados

Nesta seção apresentamos na forma de gráfico a curva obtida pela aplicação na estimação e os erros da estimação que podem ser observados na [Figura 16](#). O tempo médio de execução do algoritmo, disponibilizado em [Figura 17](#), foi de aproximadamente 2 segundos e este tempo aumenta conforme o número de vértices que é fornecido como parâmetro de entrada do algoritmo.

Isso significa que a seleção de pontos representativos é fundamental tanto para a qualidade da estimação quanto para a redução no tempo de execução do algoritmo em questão. Ainda assim, considerando que a execução não foi realizada em um servidor com alta capacidade de processamento, o tempo médio despendido na estimação da ETTJ torna o algoritmo viável para empregá-lo num sistema de cotações em tempo real com a ressalva de estabelecer-se um intervalo mínimo de tempo entre execuções.

Figura 12 – Estrutura a Termo de 17-Jan-2014

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 13 – Estrutura a Termo de 6-Mar-2014

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 14 – Estrutura a Termo de 2-Jan-2017

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 15 – Estrutura a Termo de 10-Nov-2017

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 16 – Erro de estimação

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 17 – Tempo despendido na estimação

Fonte: Dados da pesquisa.

3.3 Melhorias

Uma possível melhoria para o algoritmo seria introdução de uma função de cálculo de liquidez para cada contrato futuro de DI1 levando-se em consideração a profundidade do livro de ofertas, o número de contratos futuros em aberto e o volume financeiro já registrado para o pregão.

CONCLUSÃO

Uma estimação adequada da estrutura a termo da taxa de juros é fundamental para que um operador de mesa proprietária de um banco possa atender as demandas e ofertas de liquidez do mercado financeiros a preços competitivos e de tal forma que seja possível realização de lucro na operação com o mínimo de risco. Com os resultados obtidos nesse trabalho, é viável integrar o algoritmo de estimação da estrutura a termo considerando alterações na taxa a termo entre reuniões do Copom em um sistema de cotações em tempo real dando mais agilidade para o operador.

Apresentamos neste trabalho uma introdução sobre o mercado de juros no Brasil, sua dinâmica, peculiaridades e os principais tipos de instrumentos financeiros que influenciam diretamente na marcação da curva de juros. Descrevemos os métodos de interpolação mais utilizados pelo mercado atualmente e expomos as características de cada modelo com as vantagens e desvantagens de cada um. Em seguida, vimos que o comportamento da taxa DI está intimamente relacionado com a política monetária exercida pelo Copom através do estabelecimento da meta da taxa Selic.

Com base nessas dinâmicas, implementamos o modelo descrito em (CARREIRA; BROSTOWICZ, 2016) que sugeriu uma estimação da estrutura a termo da taxa de juros determinando que alterações na taxa a termo devam ocorrer somente nas reuniões do Copom. Com a implementação do algoritmo utilizando uma linguagem de programação robusta torna-se viável sua utilização em um sistema de cotações em tempo real e até mesmo em algoritmos de negociação.

A introdução de uma função de cálculo de liquidez mais robusta para os contratos futuros de DI1, utilizando-se de informações como por exemplo a profundidade do livro de ofertas. A melhoria do cálculo de liquidez aperfeiçoaria o algoritmo eliminando pontos menos representativos da curva e reduziria também o tempo total utilizado para a estimação.

REFERÊNCIAS

B3. **BM&F Bovespa**. 2017. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/>. Acesso em: 04/11/2017. Citado na página 31.

_____. **Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia**. 2017. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm>. Acesso em: 04/11/2017. Citado na página 29.

BACEN. **Comitê de Política Monetária - Histórico**. 2017. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/htms/copom/a-hist.asp>>. Acesso em: 04/11/2017. Citado na página 26.

_____. **Histórico das taxas de juros da meta Selic**. 2017. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/Pec/Copom/Port/taxaSelic.asp>>. Acesso em: 04/11/2017. Citado na página 27.

BURDEN, R.; FAIRES, J. **Numerical Analysis**. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011. ISBN 9780538735643. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=KlfrjCDayHwC>>. Citado na página 34.

CARREIRA, M. C.; BROSTOWICZ, R. J. Brl interest rate market and credit risk. In: **Brazilian Derivatives and Securities**. [S.l.]: Springer, 2016. p. 87–109. Citado nas páginas 22, 31, 34, 37, 38 e 43.

CETIP. **Metodologia de Cálculo do CDI**. 2017. Disponível em: <http://estatisticas.cetip.com.br/astec/di_documentos/metodologia1_i1.htm>. Acesso em: 04/11/2017. Citado na página 29.

HAGAN, P. S.; WEST, G. Interpolation methods for curve construction. **Applied Mathematical Finance**, Taylor & Francis, v. 13, n. 2, p. 89–129, 2006. Citado nas páginas 22 e 32.

_____. Methods for constructing a yield curve. **Wilmott Magazine**, May, p. 70–81, 2008. Citado na página 24.

LASDON, L. S.; FOX, R. L.; RATNER, M. W. Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method. **Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle**, EDP Sciences, v. 8, n. V3, p. 73–103, 1974. Citado na página 38.

MICROSOFT. **Microsoft Solver Foundation**. 2017. Disponível em: <[https://msdn.microsoft.com/en-us/library/ff524509\(v=vs.93\).aspx](https://msdn.microsoft.com/en-us/library/ff524509(v=vs.93).aspx)>. Acesso em: 04/11/2017. Citado na página 38.

RON, U. *et al.* **A practical guide to swap curve construction**. [S.l.]: Bank of Canada Ottawa, 2000. Citado na página 21.

VARGA, G. Interpolação por cubic spline para a estrutura a termo brasileira. **Resenha BM&F**, n. 140, p. 29–35, 2000. Citado na página 34.