UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Estudo do método SVI aplicado à construção da volatilidade implícita para opções de ação e de índice no mercado brasileiro

Rubens Yoshio Yamamoto

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria (MECAI)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rubens Yoshio Yamamoto

Estudo do método SVI aplicado à construção da volatilidade implícita para opções de ação e de índice no mercado brasileiro

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática, Estatística e Computação

Orientador: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

USP – São Carlos
Novembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Y11e	<p>Yamamoto, Rubens Yoshio</p> <p>Estudo do método SVI aplicado à construção da volatilidade implícita para opções de ação e de índice no mercado brasileiro / Rubens Yoshio Yamamoto; orientador Marinho Gomes de Andrade Filho. -- São Carlos, 2017.</p> <p>84 p.</p> <p>Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.</p> <p>1. SVI. 2. Volatilidade implícita. 3. Opções de ação e índice. 4. Black-Scholes. I. Gomes de Andrade Filho, Marinho, orient. II. Título.</p>
------	---

Rubens Yoshio Yamamoto

**Study of SVI method applied to implied volatility construction
for stock and index options in Brazilian market**

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Professional Masters in Mathematics, Statistics and Computing Applied to Industry. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics, Statistics and Computing

Advisor: Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho

**USP – São Carlos
November 2017**

*Aos meus pais, irmão e minha namorada,
minha família amada.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família, em especial meus pais, que sempre me apoiaram em todas as ocasiões e nunca deixaram que faltasse nada. Obrigado pelos esforços que me possibilitaram ter acesso à educação de qualidade e hoje poder alcançar meus objetivos.

Obrigado professores Dorival Leão e Marcos Carreira por acreditarem em nós alunos do MECAl e por compartilhar parte de seus conhecimentos neste curso.

E por último e muito importante, agradeço à minha companheira, amiga, confidente e namorada Cláudia Adriana Silva, por ter me apoiado a todo momento e suportado todas as dificuldades junto, pois, sem isso, com certeza não teria conseguido chegar ao final do curso.

*“Stay hungry.
Stay foolish.”
(Steve Jobs)*

RESUMO

YAMAMOTO, R. Y. **Estudo do método SVI aplicado à construção da volatilidade implícita para opções de ação e de índice no mercado brasileiro**. 2017. 84 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Este trabalho tem por objetivo verificar a eficácia do modelo parametrizado SVI (*Stochastic Volatility Inspired*), apresentando-o como um método alternativo à construção da volatilidade implícita para opções de ações e de índice no mercado brasileiro. Primeiramente, o conceito financeiro de opção e sua teoria de precificação são apresentados, incluindo os modelos de Black-Scholes e Heston, a importância da volatilidade implícita e seu comportamento estocástico e detalhando o funcionamento de cada parâmetro do modelo SVI (*Stochastic Volatility Inspired*). Um algoritmo é desenvolvido em cima da base teórica, assim como sua implementação computacional. Além disso, são feitos experimentos com dados de mercado reais e seus resultados analisados e comparados com os de publicações anteriores.

Palavras-chave: SVI, Volatilidade implícita, Opções de ação e índice, Black-Scholes.

ABSTRACT

YAMAMOTO, R. Y. **Study of SVI method applied to implied volatility construction for stock and index options in Brazilian market.** 2017. 84 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

This work aims to verify the efficiency of parameterized SVI (*Stochastic Volatility Inspired*) model, presenting it as an alternative method to construct the implied volatility for stock and index options in Brazilian market. First, the financial option concept and its pricing theory are presented, including Black-Scholes and Heston models, the importance of implied volatility and its stochastic behavior and detailing the operation of each parameter of the SVI (*Stochastic Volatility Inspired*) model. An algorithm is developed on top of the theoretical basis, as well as its computational implementation. In addition, experiments are performed with real market data and their results are analyzed and compared with those of previous publications.

Keywords: SVI, Implied volatility, Stock and index options, Black-Scholes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Valor da opção de compra por preço de exercício	26
Figura 2 – Valor da opção de venda por preço de exercício	27
Figura 3 – Exemplo para desigualdade de Jensen	29
Figura 4 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro a	35
Figura 5 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro b	35
Figura 6 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro σ	35
Figura 7 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro ρ	36
Figura 8 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro m	36
Figura 9 – Exemplo de iteração do método Newton-Raphson para uma função $f(x)$. .	39
Figura 10 – Volatilidade implícita por preço de exercício	46
Figura 11 – Volatilidade implícita das opções fora do dinheiro	47
Figura 12 – Valor médio de cada volatilidade implícita fora do dinheiro	48
Figura 13 – Exemplo de ajuste do modelo SVI	50
Figura 14 – Volatilidades implícitas das opções de BBAS3 e modelo SVI ajustado para o vencimento 21/08/2017	53
Figura 15 – Volatilidades implícitas das opções de BBAS3 e modelo SVI ajustado para o vencimento 18/09/2017	54
Figura 16 – Volatilidades implícitas das opções de BBAS3 e modelo SVI ajustado para o vencimento 16/10/2017	55
Figura 17 – Variância total implícita de BBAS3	56
Figura 18 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 14/06/2017	62
Figura 19 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 12/07/2017	63
Figura 20 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 16/08/2017	64
Figura 21 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 18/10/2017	65
Figura 22 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 13/12/2017	66
Figura 23 – Variância total implícita do índice Bovespa	67

LISTA DE CÓDIGOS-FONTE

Código-fonte 1 – Obtenção da volatilidade implícita por meio do método Newton-Raphson e a fórmula de Black-Scholes	79
Código-fonte 2 – Exemplo de script de calibração do modelo SVI	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação da opção quanto ao <i>spot</i> em relação ao <i>strike</i>	27
Tabela 2 – Exemplo do livro de ofertas do ativo subjacente	43
Tabela 3 – Exemplo dos livros de ofertas das opções	44
Tabela 4 – Livro de ofertas da ação BBAS3	51
Tabela 5 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 21/08/2017	52
Tabela 6 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 18/09/2017	52
Tabela 7 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 16/10/2017	52
Tabela 8 – Precificação de opções BBAS3 com vencimento em 16/10/2017	57
Tabela 9 – Precificação de opções BBAS3 com vencimento em 18/09/2017	57
Tabela 10 – Precificação de opções BBAS3 com vencimento em 16/10/2017	58
Tabela 11 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 14/06/2017	59
Tabela 12 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 12/07/2017	59
Tabela 13 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 16/08/2017	60
Tabela 14 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 18/10/2017	60
Tabela 15 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 13/12/2017	61
Tabela 16 – Precificação de opções do índice com vencimento em 14/06/2017	68
Tabela 17 – Precificação de opções do índice com vencimento em 12/07/2017	68
Tabela 18 – Precificação de opções do índice com vencimento em 16/08/2017	69
Tabela 19 – Precificação de opções do índice com vencimento em 18/10/2017	69
Tabela 20 – Precificação de opções do índice com vencimento em 13/12/2017	69
Tabela 21 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 21/08/2017	76
Tabela 23 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 16/10/2017	77

Tabela 22 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em
18/09/2017 78

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Visão Geral	23
1.2	Proposta da tese	24
1.3	Estrutura da Dissertação	24
2	ABORDAGEM DA TEORIA	25
2.1	Opções	25
2.1.1	<i>Sinopse</i>	25
2.1.2	<i>O valor da opção no vencimento</i>	25
2.1.3	<i>Moneyness</i>	27
2.1.4	<i>Estilos de opção</i>	27
2.2	O comportamento aleatório na modelagem dos preços de opções .	28
2.3	Movimento Browniano	30
2.4	Modelo de Black-Scholes	31
2.5	Fórmula de Black-Scholes para precificação de opções	31
2.6	Modelo de Heston	32
2.7	Parametrização SVI	33
2.7.1	<i>Parametrização raw SVI</i>	34
2.7.2	<i>Parametrização natural SVI</i>	36
2.7.3	<i>Parametrização SVI Jump-Wings</i>	37
2.7.4	<i>Premissas e condições de não arbitragem</i>	38
2.8	Método de Newton-Raphson	39
2.9	Algoritmo Levenberg–Marquardt	39
2.9.1	<i>Método do gradiente</i>	40
2.9.2	<i>Método de Gauss-Newton</i>	41
2.9.3	<i>Método de Levenberg-Marquardt</i>	41
3	ALGORITMO E IMPLEMENTAÇÃO	43
3.1	Preparação dos dados de mercado	43
3.2	Obtenção da volatilidade implícita de mercado	44
3.3	Filtragem dos dados	46
3.4	Calibragem dos parâmetros do modelo SVI	48
3.5	Implementação	49

4	RESULTADOS	51
4.1	Opções de ação	51
4.1.1	<i>Os dados de mercado</i>	51
4.1.2	<i>Volatilidades implícitas e os parâmetros encontrados para o modelo SVI</i>	52
4.1.2.1	<i>Vencimento: 21/08/2017</i>	52
4.1.2.2	<i>Vencimento: 18/09/2017</i>	53
4.1.2.3	<i>Vencimento: 16/10/2017</i>	54
4.1.3	<i>Variância total</i>	55
4.1.4	<i>Teste de precificação</i>	56
4.2	Opções do índice Bovespa	58
4.2.1	<i>Os dados de mercado</i>	58
4.2.2	<i>Volatilidades implícitas e os parâmetros encontrados para o modelo SVI</i>	61
4.2.2.1	<i>Vencimento: 14/06/2017</i>	61
4.2.2.2	<i>Vencimento: 12/07/2017</i>	62
4.2.2.3	<i>Vencimento: 16/08/2017</i>	63
4.2.2.4	<i>Vencimento: 18/10/2017</i>	64
4.2.2.5	<i>Vencimento: 13/12/2017</i>	65
4.2.3	<i>Variância total</i>	66
4.2.4	<i>Teste de precificação</i>	67
5	CONCLUSÃO	71
5.0.1	<i>Trabalhos Futuros</i>	71
REFERÊNCIAS		73
APÊNDICE A	LIVROS DE OFERTAS DE OPÇÕES DE BBAS3	75
APÊNDICE B	CÓDIGO FONTE	79

INTRODUÇÃO

Este capítulo faz uma breve descrição da visão geral desta dissertação, sua proposta e estrutura.

1.1 Visão Geral

O mercado financeiro é um ambiente extremamente concorrido e muito competitivo, que reúne um conjunto de participantes, sejam eles investidores ou tomadores de recursos, permitindo a negociação de produtos financeiros, como títulos de dívida públicos ou privados, ações e fundos de investimentos. Porém, com o decorrer do tempo, este mercado tem se tornado muito sofisticado, diversificado e novos produtos são criados a todo momento, objetivando ganhos em qualquer prazo, seja ele curto, médio ou longo.

Um dos produtos mais negociados é a ação, classificada como renda variável, que pode ser interpretada como a menor parcela do capital social de uma empresa, portanto, um título patrimonial e, como tal, concede aos seus titulares todos os direitos e deveres de um sócio, no limite das ações possuídas. Como tal produto é um investimento de alto risco, pois seu valor pode apresentar grandes variações por algum evento extraordinário ou mesmo pela oferta e demanda, mostrou-se necessário proteger o capital contra oscilações de preço. Sendo assim, surgiu então o mercado de derivativos que, como o nome induz, trata-se de um ambiente onde são negociados contratos que derivam de outros ativos, por exemplo, futuros e opções. Com ênfase neste último, que será especificado, detalhado e apresentado o objeto central deste trabalho.

Uma opção é o direito, não obrigação, de comprar ou vender um ativo específico em uma data preestabelecida. Como qualquer produto negociado, existe a importância de se precificá-lo corretamente. Atualmente existem diversos modelos de precificação como por exemplo o [Black e Scholes \(1973\)](#) e [Heston \(1993\)](#), ambos consideram o trajeto do ativo subjacente, ação ou índice, como um movimento aleatório, ou seja, de comportamento estocástico, durante todo o

período de vida da opção até seu vencimento.

Apesar do modelo de Black-Scholes ser consagrado, este apresenta uma deficiência conhecida em que se supõe que a volatilidade do retorno do ativo subjacente é constante. Na prática isso não ocorre, pois observamos no mercado que os preços das opções são regidos pela volatilidade implícita cujo valor varia com o preço de exercício e o tempo até o vencimento. Um dos conceitos para lidar com este problema é presumir que a volatilidade do ativo subjacente por si só é uma variável aleatória, ou seja, apresenta um comportamento estocástico. O modelo de Heston captura essa dinâmica, considerando dois movimentos brownianos correlacionados, um para o preço do ativo e outro para a sua variância.

Como vimos, um dos conceitos mais importantes na precificação de opções está em encontrar a volatilidade implícita correta. Esta informação pode ser extraída do mercado na sua forma bruta e construída usando vários métodos, como por exemplo, uma função polinomial, ajustando seu grau de liberdade. Contudo, este não prevê qualquer critério de arbitragem que significa oportunidade de lucro sem risco e, portanto, existe a chance de utilizar uma informação incorreta devido ao preço não ser justo. Outra desvantagem é não prever uma relação linear entre a respectiva variância e o preço de exercício quando $|K| \rightarrow \infty$.

1.2 Proposta da tese

Neste trabalho, abordaremos o modelo parametrizado SVI, publicado por Jim Gatheral em [Gatheral \(2004\)](#), que atende aos dois pontos mencionados acima. Além disso, há correspondência entre a parametrização SVI e o modelo de Heston para $T \rightarrow \infty$.

Sendo assim, o mesmo tem como objetivo motivar o uso da calibração SVI para a obtenção das curvas de volatilidades implícitas das opções de ações e do índice Bovespa para diferentes vencimentos.

1.3 Estrutura da Dissertação

No capítulo 1, é feita uma introdução do assunto, assim como a proposta da dissertação e sua organização. No capítulo 2, a teoria é apresentada e sub-dividida em pequenos tópicos explicando o modelo SVI em detalhes. No capítulo 3, desenvolve-se o algoritmo e a implementação computacional do modelo SVI. Adiante, o capítulo 4 apresenta testes com opções do índice Bovespa e opções de algumas ações, assim como os resultados obtidos. O capítulo 5 finaliza este trabalho apresentando as conclusões desta tese.

ABORDAGEM DA TEORIA

Esta seção descreve o conteúdo teórico necessário para o entendimento deste trabalho.

2.1 Opções

2.1.1 Sinopse

As opções são instrumentos financeiros que dão ao titular o direito de comprar ou vender um determinado ativo por um preço em uma data determinados previamente. Como o nome sugere, não existe obrigatoriedade do portador da opção exercer o direito no vencimento.

Existem os mais diversos tipos de ativos para as opções como por exemplo as das Petrobras e Vale. Outro ativo alvo de nosso trabalho é o índice Bovespa, que é um indicador negociável da BM&FBovespa e tem como objetivo representar o desempenho médio das cotações dos ativos de maior representatividade e negociabilidade do mercado de ações brasileiro.

Temos dois tipos de opções: opção de compra, também conhecido como *call* e opção de venda, conhecida como *put*. A *call* é o instrumento que dá ao titular o direito de comprar o ativo por um determinado preço no vencimento. Por sua vez, a *put* é o direito de vender.

A partir deste momento, começaremos a utilizar terminologias habituais do mercado financeiro. O preço estabelecido previamente a ser negociado na data de vencimento é chamado preço de exercício ou *strike*. Ao ativo da opção chamaremos de ativo subjacente ou *underlying* e seu preço é conhecido como *spot*. *Payoff* é a diferença entre o preço no vencimento e o preço acordado, ou seja, o lucro da operação.

2.1.2 O valor da opção no vencimento

Tomamos como exemplo uma opção de compra com preço de exercício a 50. No dia do vencimento, só será vantajoso exercer a opção se o ativo subjacente valer mais do que 50,

ou seja, estaremos adquirindo o ativo por um valor menor que o de mercado. Caso o valor seja menor, não é interessante exercer, então dizemos que a opção virou pó ou "micou".

Como é comum em finanças, representaremos o preço do ativo subjacente por S (*Spot*) e preço de exercício de K (*Strike*). Sendo assim, o *payoff* da operação fica:

$$\max(0, S - K)$$

O gráfico do valor da opção de compra no vencimento fica então como na figura 1:

Figura 1 – Valor da opção de compra por preço de exercício

Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso da opção de venda, o interessante ao titular é vendê-la por um preço maior que o de mercado, ou seja, quanto mais o preço do ativo desvalorizar, maior é o lucro. Em contrapartida, se no vencimento o preço do ativo for maior do que o preço de exercício, não é interessante vender mais barato que o mercado, então a opção não é exercida. O *payoff* da operação será o seguinte:

$$\max(0, K - S)$$

O gráfico do valor da opção de venda no vencimento fica então como na figura 2:

Figura 2 – Valor da opção de venda por preço de exercício

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.1.3 Moneyness

Uma prática muito comum no mercado é classificar as opções de acordo com o valor do *spot* em relação *strike*. Em finanças, é muito utilizado o termo em inglês *moneyness*.

Por exemplo, tomamos uma *call* com *strike* a 50. Se o *spot* for maior que 50, dizemos que a opção está "dentro do dinheiro" ou *in-the-money*. Caso o seja menor, classificamos como "fora do dinheiro" ou *out-of-the-money*. Finalmente, se for igual, "no dinheiro" ou *at-the-money*.

No caso da *put* a opção está "dentro do dinheiro" quando o *spot* for maior que o *strike*, "fora do dinheiro" quando for menor e "no dinheiro" quando for igual.

Na tabela 1, ilustramos como ficaria essa classificação para uma *call* e *put*:

Tabela 1 – Classificação da opção quanto ao *spot* em relação ao *strike*

condição	<i>call</i>	<i>put</i>
$spot > strike$	<i>in-the-money</i>	<i>out-of-the-money</i>
$spot = strike$	<i>at-the-money</i>	<i>at-the-money</i>
$spot < strike$	<i>out-of-the-money</i>	<i>in-the-money</i>

Fonte: Dados da pesquisa.

2.1.4 Estilos de opção

No mercado financeiro existem alguns estilos clássicos e que comumente são mais negociados:

- Opção européia: possui o direito de comprar ou vender o ativo subjacente a um determinado

preço somente na data de vencimento. É a mais comum de ser encontrada no mercado e é o estilo que será abordado neste trabalho;

- Opção americana: pode ser exercida a qualquer momento até a data de vencimento pelo preço definido previamente;
- Opção asiática: possui o direito de ser exercida na data de vencimento referente a média de preços durante esse período.

2.2 O comportamento aleatório na modelagem dos preços de opções

Na seção anterior, vimos como é dado o valor da opção no vencimento. Mas como precificamos antes da data de exercício se não sabemos o valor do ativo na data de vencimento antecipadamente?

Em [Wilmott \(2006\)](#), fica demonstrado que não se pode apenas projetar o preço futuro do ativo subjacente e descobrir o *payoff*. Com o auxílio do teorema da desigualdade de Jensen, mostra-se que é importante considerar a aleatoriedade do ativo-objeto e sua variância na modelagem de opções.

Por exemplo, digamos que o preço da ação hoje em dia é 100 e supondo que no prazo de um ano possa ser 50 ou 150. Se utilizarmos esse cenário para avaliar os possíveis valores de uma opção de compra com preço de exercício igual a 100, o *payoff*, com vencimento daqui um ano, ficaria como na figura 3:

Figura 3 – Exemplo para desigualdade de Jensen

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos interpretar de duas maneiras. A primeira é que o preço esperado da ação daqui um ano seja 100, já que é a média dos possíveis valores futuros. O *payoff* de uma *call* daqui um ano seria zero, assim como seu valor presente, pois o valor da ação será igual ao preço de exercício.

Contudo, de acordo com o autor, esta não seria a maneira de precificar uma opção. Seu valor esperado deveria ser maior que zero, já que metade do tempo existe um *payoff*.

A outra maneira é interpretar que existem dois *payoffs* e calcular o valor esperado. Se o preço da ação cair para 50, o *payoff* é zero. Caso suba para 150, o *payoff* é 150. O *payoff* esperado será a média, no caso, 25.

Temos então a ordem de cálculo do *payoff* e da esperança importam:

$$\text{Payoff}(E[S]) = 0$$

$$E[\text{Payoff}(S)] = 25$$

Com ajuda da desigualdade de Jensen, se utilizarmos uma função convexa $f(S)$ (em nosso exemplo é a função *payoff* de uma *call*) de uma variável aleatória S (preço do ativo subjacente), temos:

$$E[f(S)] \geq f(E[S]) \quad (2.1)$$

Para termos uma ideia do quanto o termo à esquerda é maior do que o da direita, utilizando aproximação por séries de Taylor com média ao redor de S , escrevemos:

$$S = \bar{S} + \varepsilon$$

onde $\bar{S} = E[S]$ e $E[\varepsilon] = 0$. Então:

$$\begin{aligned} E[f(S)] &= E[f(\bar{S} + \varepsilon)] = E[f(\bar{S}) + \varepsilon f'(\bar{S}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(\bar{S}) + \dots] \\ &\approx f(\bar{S}) + \frac{1}{2}f''(\bar{S})E[\varepsilon^2] \\ &= f(E[S]) + \frac{1}{2}f''(E[S])E[\varepsilon^2] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Então o lado esquerdo da equação 2.1 é maior que o direito em aproximadamente:

$$\frac{1}{2}f''(E[S])E[\varepsilon^2]$$

Isto mostra dois conceitos importantes:

- $f''(E[S])$: a convexidade da opção. De acordo com o autor, como regra, isso adiciona valor à opção;
- $E[\varepsilon^2]$: representa a aleatoriedade do ativo adjacente e sua variância.

Com isso, o autor conclui sua discussão sobre a importância de considerar a aleatoriedade na modelagem dos ativos.

2.3 Movimento Browniano

Em 1827, o botânico Robert Brown, observou em seu microscópio partículas de grãos de pólen imersas em água e que descreviam trajetórias praticamente aleatórias. Em princípio, Brown pensou que tais partículas pudessem apresentar vida, mas logo foi constatado o contrário quando testes com substâncias inorgânicas como cobre, bismuto, antimônio, manganês e asbesto resultaram no mesmo comportamento. Entretanto, Brown não foi capaz de dizer ao certo o que causava tais movimentos.

Com os trabalhos teóricos de Albert Einstein em 1905 e as pesquisas experimentais de Jean Baptiste Perrin em 1908, foi possível explicar em detalhes que os movimentos aleatórios observados por Brown eram, na realidade, causados pela colisão das partículas de pólen com as moléculas de água.

Este fenômeno aleatório ficou conhecido então como Movimento Browniano e o conceito aplicado em várias áreas. Em 1900, cinco anos antes da publicação de Einstein, Louis Bachelier introduziu pela primeira a aplicação do Movimento Browniano em finanças na tese de PhD "A Teoria da Especulação".

2.4 Modelo de Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes publicado em [Black e Scholes \(1973\)](#) é um dos mais populares quando iniciamos no mundo do mercado financeiro de derivativos. Sua simplicidade torna a questão mais fácil para darmos os primeiros passos na precificação de opções.

Primeiramente, existem algumas premissas a serem feitas com relação ao ativo e mercado:

- A dinâmica do preço do ativo (S) segue um movimento browniano geométrico com tendência (μ) e volatilidade (σ) constantes;
- A taxa de juros (r) é constante e livre de risco;
- O ativo não paga dividendos;
- O mercado é livre de arbitragem, ou seja, livre da possibilidade de lucro sem riscos;
- Transações não envolvem custos.

Após essas delimitações, o modelo define a dinâmica do preço do ativo pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Onde W_t é o processo de Wiener (movimento browniano).

Em [Action \(2017\)](#), demonstra-se, pela fórmula de Itô, que a única solução para a equação diferencial estocástica com preço inicial S_0 é dada por:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}$$

A partir dessas equações e utilizando o conceito de portfólio replicante, [Wilmott \(2006\)](#) prova como chegamos na equação de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

2.5 Fórmula de Black-Scholes para precificação de opções

Nesta sessão, mostraremos a fórmula de Black-Scholes para a precificação de opções europeias de compra e venda, que será extensivamente utilizada neste trabalho. A demonstração de como obter a fórmula a partir da equação de Black-Scholes é bem difundida e pode ser encontrada em vários materiais, por exemplo em [Wilmott \(2006\)](#).

A fórmula de Black-Scholes para uma opção de compra fica:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sendo os termos definidos por:

- C: preço da opção de compra;
- S: preço do ativo subjacente;
- K: preço de exercício;
- r: taxa livre de risco anualizada;
- σ : volatilidade do ativo subjacente;
- T: data de vencimento;
- t: data atual;
- $N(x)$: função distribuição acumulada de uma normal padrão.

Analogamente, para a opção de venda (*put*), a equação fica:

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (2.5)$$

2.6 Modelo de Heston

Vimos anteriormente que o modelo Black-Scholes é baseado em várias premissas, mas algumas não são aplicáveis no mercado financeiro. Dentre as mais importantes é o fato do modelo assumir que a volatilidade é determinística e constante durante a vida da opção, o que não é verdade.

Em (HESTON, 1993) é proposto um modelo que introduz o conceito de volatilidade estocástica, além de considerar a dinâmica aleatória do preço do ativo.

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Onde v_t é a variação instantânea e W_t^1 e W_t^2 são processos de Wiener com correlação ρ :

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$$

Os parâmetros das equações acima são:

- μ : taxa de retorno do ativo;
- θ : variância de longo prazo;
- κ : taxa na qual v_t reverte θ ;
- ξ : determina a variância de v_t .

Com os dois movimentos brownianos levados em consideração, passou-se a precificar as opções mais realisticamente.

2.7 Parametrização SVI

Em [Gatheral \(2004\)](#), Jim Gatheral publicou o modelo SVI (*Stochastic Volatility Inspired*), cujo intuito é possibilitar o ajuste da volatilidade implícita das opções ($\sigma_{BS}(k, t)$), através da calibragem de seus parâmetros, de modo a garantir ausência de arbitragens estáticas. O modelo apresenta duas características importantes:

- Para um determinado vencimento t , a variância implícita ($\sigma_{BS}^2(k, t)$) é linear em relação ao *log-strike* k quando $|k| \rightarrow \infty$. Esta característica é referente à fórmula do momento para volatilidade implícita em preços de exercício extremos ([LEE, 2004](#));
- É relativamente fácil ajustar o modelo à volatilidade observada no mercado garantindo que não haja arbitragem entre vencimentos, também conhecido no mercado financeiro como *calendar spread*.

Conforme citado em [Aurell \(2014\)](#), um modelo parametrizado de volatilidade implícita possui certas vantagens, sendo elas:

- A partir da observação de alguns pontos dentro de um determinado vencimento, é possível utilizar o modelo para precificar outros pontos dentro do mesmo período que não possuem preço no mercado;
- As volatilidades implícitas podem ser interpoladas e extrapoladas;
- A volatilidade implícita é modelada por uma função suave e admite expressões analíticas explícitas para suas derivadas de todas as ordens, possibilitando economizar processamento computacional.

Nas seções seguintes, são descritas as três variações equivalentes do modelo SVI ([GATHERAL; ANTOINE, 2013](#)): *raw*, *natural* e *jump-wings*. Começaremos pela formulação original.

2.7.1 Parametrização *raw* SVI

A parametrização *raw* do modelo SVI foi apresentada em Gatheral e Antoine (2013) e tem como parâmetros o conjunto $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$. Sua função para modelagem da variância total implícita segue a forma:

$$w(k, \chi_R) = a + b \left\{ \rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right\} \quad (2.7)$$

Onde $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, $|\rho| < 1$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $k = \ln(K/F)$, sendo, este último, conhecido como *log-strike* no mercado financeiro. K é o preço de exercício e F o preço futuro do ativo subjacente. O ponto $k = 0$, onde ambos valores são iguais, é onde estamos "no-dinheiro projetado" (*at-the-money-forward*).

Como a calibragem é feita por vencimento, teremos conjunto de valores diferentes dos parâmetros para cada um: $\{\chi_{R_1}, \chi_{R_2}, \dots, \chi_{R_n}\}$ para n vencimentos. Sendo assim, a variância total implícita de cada ponto observado segue a relação:

$$w(k, t) = \sigma_{BS}^2(k, t)t$$

O aumento do valor de cada parâmetro significa:

- a : aumenta o nível geral da variância, ou seja, transladar o gráfico verticalmente para cima;
- b : diminui o ângulo entre as assíntotas esquerda e direita;
- σ : suaviza, reduz a curvatura do vértice na região "no dinheiro". Não confundir com o símbolo de volatilidade;
- ρ : rotaciona o gráfico no sentido anti-horário;
- m : translada o gráfico horizontalmente para direita.

A seguir, podemos ver o comportamento da variação de cada parâmetro na variância implícita pelo *log-strike*. Vamos utilizar os mesmos exemplos apresentados por Gatheral em Gatheral (2004).

Utilizaremos os seguintes valores base para construir uma curva padrão: $a = 0.04$, $b = 0.4$, $\sigma = 0.1$, $\rho = -0.4$, $m = 0$.

- Alterando parâmetro a de 0.04 para 0.08:

Figura 4 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro a

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Alterando parâmetro b de 0.4 para 0.8:

Figura 5 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro b

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Alterando parâmetro σ de 0.1 para 0.2:

Figura 6 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro σ

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Alterando parâmetro ρ de -0.4 para -0.8:

Figura 7 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro ρ

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Alterando parâmetro m de 0 para 0.2:

Figura 8 – Comportamento da variância implícita alterando o parâmetro m

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.7.2 Parametrização natural SVI

A parametrização natural é uma variação da *raw* apresentada anteriormente e tem como parâmetros o conjunto $\chi_N = \{\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta\}$. Sua função para modelagem da variância total implícita segue a forma:

$$w(k, \chi_N) = \Delta + \frac{\omega}{2} \left\{ 1 + \zeta \rho (k - \mu) + \sqrt{(\zeta(k - m) + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\} \quad (2.8)$$

Onde $\omega \geq 0$, $\Delta \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $|\rho| < 1$ e $\zeta > 0$.

Podemos fazer o mapeamento entre os parâmetros e transformar o modelo *raw* e natural:

$$(a, b, \rho, m, \sigma) = \left(\Delta + \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), \frac{\omega \zeta}{2}, \rho, \mu - \frac{\rho}{\zeta}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\zeta} \right)$$

Da mesma maneira, podemos existir a equivalência entre o modelo natural com *raw*:

$$(\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta) = \left(a - \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), m + \frac{\rho\sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \rho, \frac{2b\sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\sigma} \right)$$

2.7.3 Parametrização SVI *Jump-Wings*

Segundo (GATHERAL; ANTOINE, 2013), o significado dos parâmetros referentes aos dois modelos anteriores não são muito intuitivos para quem opera no mercado. Considerando que a calibragem é feita separadamente por vencimento, o resultado será um conjunto de parâmetros para cada um, podendo ser necessário gerenciar um grande número de valores sem muito significado prático.

Para tanto, foi elaborada a parametrização SVI *Jump-Wings* em termos dos parâmetros SVI *raw*, definidos pelo conjunto $\chi_J = \{v_t, \psi_t, p_t, c_t, \tilde{v}_t\}$, onde t é o tempo até o vencimento sendo $t > 0$.

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{a + b\{-\rho m + \sqrt{m^2 + \sigma^2}\}}{t}, \\ \psi_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} \frac{b}{2} \left(-\frac{m}{\sqrt{m^2 + \sigma^2}} + \rho \right), \\ p_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} b(1 - \rho), \\ c_t &= \frac{1}{\sqrt{w_t}} b(1 + \rho), \\ \tilde{v}_t &= \frac{1}{t} \left(a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aqui incluímos a notação v_t para a variância implícita que se relaciona com a variância total implícita e a volatilidade implícita apresentadas anteriormente:

$$w_t = v_t t = \sigma_{BS}^2 t$$

Notamos a dependência explícita dos parâmetros do tempo até o vencimento t . Abaixo temos o significado de cada parâmetro:

- v_t : representa a variância implícita na região "no-dinheiro" (ATM). Note que é a variância total implícita *raw* $w_t(k, t)$ dividida por tempo até o vencimento t na região onde $k = 0$:

$$v_t = \frac{w_t(k, t)}{t} \Big|_{k=0}$$

- ψ_t : é a variação da volatilidade implícita na região "no-dinheiro":

$$\psi_t = \partial_k \sqrt{\frac{w_t(k, t)}{t}} \Big|_{k=0}$$

- p_t : representa a inclinação da asa esquerda do sorriso da volatilidade, o que corresponde à região "fora-do-dinheiro" das opções de venda. Esta informação é escalada em $1/\sqrt{w_t}$:

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{w_t(k, t)}{k} = b(\rho + 1) = p_t \sqrt{w_t}$$

- c_t : é a inclinação da asa direita do sorriso da volatilidade, o que corresponde à região "fora-do-dinheiro" das opções de compra. Também escalada em $1/\sqrt{w_t}$, é calculada de forma análoga à p_t .
- $\tilde{v}_t$: representa a variância implícita mínima.

2.7.4 Premissas e condições de não arbitragem

Para esta dissertação, utilizaremos a parametrização **raw** e, de acordo com Gatheral em Gatheral (2004) e Gatheral e Antoine (2013), existem algumas premissas adotadas em relação à variância no modelo SVI:

- É sempre positiva;
- Precisa ser linear nas asas e curvada no meio;
- Aumenta linearmente com $|k|$, sendo k muito positivo ou negativo;
- Condição $a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \geq 0$, que garante $w(k, \chi_R) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Demonstrado em Rogers e Tehranchi (2010) e incorporado por Gatheral ao método SVI, abaixo temos a condição necessária para garantir a não arbitragem em cada vencimento que deve ser aplicada sobre a variância total implícita:

$$|\partial_k w(k, t)| \leq 4, \forall k, \forall t$$

Esta condição leva ao limite superior do parâmetro b :

$$b \leq \frac{4}{t(1 + |\rho|)}$$

2.8 Método de Newton-Raphson

Um dos métodos que utilizaremos nesta dissertação é o método iterativo de Newton-Raphson, que consiste em a raiz de uma determinada função $f(x)$ por meio de sucessivas aproximações.

O processo parte de um valor inicial x_0 que serve como uma primeira tentativa para achar a raiz de uma função $f(x)$. O próximo passo é calcular a derivada $f'(x_0)$ e utilizar em conjunto com $f(x_0)$ para encontrar o x_1 onde a tangente corta o eixo das abscissas:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Queremos encontrar $(\cdot)$, então

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Logo,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Generalizando, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Repetimos este procedimento até que $|x_{n+1} - x_n|$ seja suficientemente pequeno.

Figura 9 – Exemplo de iteração do método Newton-Raphson para uma função $f(x)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste trabalho, utilizaremos o método de Newton-Raphson para encontrar a volatilidade implícita de cada opção. Para tanto, vamos utilizar a fórmula de Black-Scholes do cálculo de opção de compra (2.3) e venda (2.5) apresentados na seção 2.5.

2.9 Algoritmo Levenberg–Marquardt

Nesta seção apresentaremos o algoritmo que usaremos para calibrar os parâmetros do modelo SVI e ajustá-lo às volatilidades implícitas das opções extraídas do mercado.

Publicado por Kenneth Levenberg em [Levenberg \(1944\)](#) e aperfeiçoado por Donald Marquardt em [Marquardt \(1963\)](#), o algoritmo Levenberg–Marquardt é uma solução numérica para problemas de mínimos quadrados não lineares e ajusta uma determinada função aos pontos observados por meio de dois métodos: o método do gradiente (ou máximo declive) e o algoritmo de Gauss-Newton.

Inicialmente, o algoritmo necessita um conjunto de m pontos observados $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_m, y_m)$ e a função do modelo que se deseja calibrar $\hat{y}(t, p)$, onde p é o conjunto de n parâmetros, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, com $m \geq n$.

Sendo $y(t_i)$ os dados observados, utilizaremos o critério do erro qui-quadrado para minimizar a soma dos erros quadrados ponderados:

$$\begin{aligned}\chi^2(p) &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{y(t_i) - \hat{y}(t_i, p)}{\sigma_{y_i}} \right]^2 \\ &= (y - \hat{y}(p))^T \mathbf{W} (y - \hat{y}(p)) \\ &= y^T \mathbf{W} y - 2y^T \mathbf{W} \hat{y} + \hat{y}^T \mathbf{W} \hat{y}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Onde σ_{y_i} é a medida de erro de $y(t_i)$ e $\mathbf{W}$ a matriz ponderada com diagonal $W = 1 / \sigma_{y_i}^2$.

O objetivo de cada iteração é encontrar a perturbação $\mathbf{h}$ para os parâmetros $\mathbf{p}$ que reduzem χ^2 .

2.9.1 Método do gradiente

O método do gradiente é algoritmo iterativo que visa minimizar a soma quadrática dos erros, em que cada passo atualiza os valores dos parâmetros a serem calibrados na direção negativa do gradiente.

O gradiente da função chi-quadrado em relação aos parâmetros fica:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi^2}{\partial \mathbf{p}} &= 2(y - \hat{y}(\mathbf{p}))^T \mathbf{W} \frac{\partial (y - \hat{y}(\mathbf{p}))}{\partial \mathbf{p}} \\ &= -2(y - \hat{y}(\mathbf{p}))^T \mathbf{W} \left[\frac{\partial \hat{y}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right] \\ &= -2(y - \hat{y})^T \mathbf{W} \mathbf{J}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Onde a matriz Jacobiana $m \times n [\partial \hat{y} / \partial \mathbf{p}]$ representa a sensibilidade local da função $\hat{y}$ em relação às variações dos parâmetros $\mathbf{p}$. Para simplificar, utilizaremos $\mathbf{J}$ para $[\partial \hat{y} / \partial \mathbf{p}]$. O parâmetro $\mathbf{h}$ que move os parâmetros em direção ao máximo declive é dado por:

$$\mathbf{h}_{gd} = \alpha \mathbf{J}^T \mathbf{W} (y - \hat{y})$$

Onde o escalar positivo α determina o tamanho do passo em direção ao máximo declive.

2.9.2 Método de Gauss-Newton

O método de Gauss-Newton é utilizado para minimizar a soma dos quadrados de uma função.

Utilizando a primeira ordem da expansão das séries de Taylor, fazemos a aproximação local da função com uma perturbação nos parâmetros do modelo:

$$\hat{y}(\mathbf{p} + \mathbf{h}) \approx \hat{y}(\mathbf{p}) = \left[\frac{\partial \hat{y}}{\partial \mathbf{p}} \right] \mathbf{h} = \hat{y} + \mathbf{J}\mathbf{h} \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) pelo $\hat{y}$ na equação final em (2.10), temos:

$$\chi^2(\mathbf{p} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{y}^\top \mathbf{W} \mathbf{y} + \hat{\mathbf{y}}^\top \mathbf{W} \hat{\mathbf{y}} - 2\mathbf{y}^\top \mathbf{W} \hat{\mathbf{y}} - 2(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{W} \mathbf{J} \mathbf{h} + \mathbf{h}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J} \mathbf{h}$$

Isto mostra que χ^2 é aproximadamente quadrática na perturbação $\mathbf{h}$ e a Hessiana do critério de ajuste de χ^2 é aproximadamente $\mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J}$.

O parâmetro $\mathbf{h}$ que minimiza χ^2 é encontrado de $\partial \chi^2 / \partial \mathbf{h} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{p} + \mathbf{h}) \approx -2(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{W} \mathbf{J} + 2\mathbf{h}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J}$$

A equação final fica:

$$\left[\mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J} \right] \mathbf{h}_{\text{gn}} = \mathbf{J}^\top \mathbf{W}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

2.9.3 Método de Levenberg-Marquardt

O algoritmo utiliza os dois métodos, gradiente e Gauss-Newton, variando o comportamento entre eles

$$\left[\mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I} \right] \mathbf{h}_{\text{lm}} = \mathbf{J}^\top \mathbf{W}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

onde valores pequenos de λ resultam em atualizações dos parâmetros por meio de Gauss-Newton, enquanto valores grandes de λ atualizam por meio do gradiente.

Dessa forma, o parâmetro λ é inicializado para ser grande, então os primeiros passos vão em direção ao máximo declive. À medida que a chegamos perto da solução, o valor de λ diminui e o método se aproxima de Gauss-Newton.

Por fim, temos a contribuição de Marquardt:

$$\left[\mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda \text{diag}(\mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J}) \right] \mathbf{h}_{\text{lm}} = \mathbf{J}^\top \mathbf{W}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

ALGORITMO E IMPLEMENTAÇÃO

Nesta seção é detalhado o algoritmo para a calibração dos parâmetros do modelo SVI e um exemplo de sua implementação. Utilizaremos a formulação original *raw* detalhada na seção 2.7.1.

O roteiro a ser seguido foi dividido em três partes: preparação dos dados de mercado, obtenção da volatilidade implícita e calibragem dos parâmetros do modelo SVI.

3.1 Preparação dos dados de mercado

No processo de obtenção da volatilidade implícita, utilizaremos a fórmula de Black-Scholes e o processo iterativo numérico de Levenberg–Marquardt. Como vimos na seção 2.5, a fórmula de Black-Scholes necessita do preço do ativo subjacente (S), preço de exercício (K), taxa livre de risco (r), volatilidade (σ) e tempo até o vencimento (T).

No mercado encontram-se disponíveis S , K , r , T e os preços negociados de cada opção. Então temos todas as informações necessárias para encontrar a volatilidade implícita σ .

Na tabela 2 podemos verificar como as informações de preço do ativo subjacente (S) aparecem para os participantes no mercado. Ele é chamado livro de ofertas e é onde aparecem as melhores ordens de compra e venda. Ou seja, existem outros níveis no livro, mas, nesta dissertação, trabalharemos apenas com as melhores, também conhecido como topo do livro.

Tabela 2 – Exemplo do livro de ofertas do ativo subjacente

Ativo	Quantidade de compra	Preço de compra	Preço de venda	Quantidade de venda
PETR4	3200	15,74	15,75	9300

Fonte: Dados da pesquisa.

Temos então a primeira informação que necessitamos: o preço do ativo subjacente (S).

Utilizaremos o valor médio entre compra e venda que, no exemplo acima, seria $(15,74 + 15,75)/2 = 15,745$.

Para as opções, as informações do livro de cada uma segue a mesma estrutura do ativo subjacente. Contudo, vamos organizar as informações ordenando por vencimento e preço de exercício. Como mostrado na tabela 3, as opções de compra (*call*) estão disponibilizadas à esquerda e as opções de venda (*put*) à direita:

Tabela 3 – Exemplo dos livros de ofertas das opções

Vencimento	Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
19/12/2016	15,50	PETRL89	65000	1,12	1,14	84200	PETRX89	3200	0,75	0,76	107600
19/12/2016	16,00	PETRL19	41500	0,87	0,88	174500	PETRX19	249400	0,98	1,00	44000
16/01/2017	15,75	PETRA35	33500	1,38	1,44	33500	PETRM35	40500	1,10	1,15	40500
16/01/2017	16,00	PETRA96	9400	1,27	1,29	1000	PETRM96	400	1,23	1,27	40100
20/02/2017	15,75	PETRB75	18300	1,72	1,83	18300	PETRN75	22800	1,28	1,38	22800
20/02/2017	16,00	PETRB16	19100	1,60	1,71	19700	PETRN16	300	1,43	1,50	22500
20/03/2017	15,50	PETRC45	11900	2,08	2,23	11900	PETRO45	16200	1,29	1,37	16200
20/03/2017	16,00	PETRC16	12800	1,83	1,97	12800	PETRO16	15700	1,49	1,63	15700
17/04/2017	15,50	PETRD45	8100	2,28	2,47	8100	PETRP45	9600	1,38	1,48	9600
17/04/2017	16,00	PETRD16	8100	2,03	2,22	8100	PETRP16				

Fonte: Dados da pesquisa.

Repare que é possível não ter oferta para algumas opções, como é o caso da *put* PETRD16, ou mesmo ter oferta para apenas um dos lados (compra ou venda).

Com esses dados, conseguimos mais três informações necessárias: preço da opção, preço de exercício (K) e tempo até o vencimento.

Como no caso do ativo subjacente, vamos considerar o preço da opção como a média entre compra e venda.

Para o valor de T fazemos a diferença de dias úteis entre o vencimento e a data atual e anualizamos dividindo pela convenção 252. Por exemplo, se a data atual fosse 24/11/2016 e o vencimento 19/12/2016 teríamos 17 dias úteis. Dividindo por 252 ficamos com 0.06746 e este é o valor que usamos no lugar de (T-t) na fórmula de Black-Scholes.

Outra informação que extraímos do mercado é a taxa livre de risco (r) do período até o vencimento. Não faz parte do escopo deste trabalho informar como obter esta informação, mas podemos dizer que é próxima da taxa anualizada para o período do CDI (taxa média de empréstimos entre os bancos).

3.2 Obtenção da volatilidade implícita de mercado

De posse das informações necessárias, vamos utilizar o método iterativo de Newton-Raphson, descrito na seção 2.8. O processo será repetido para todos os preços de compra e venda de cada opção de cada vencimento.

Vamos tomar como exemplo a fórmula de Black-Scholes para opção de compra:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{r(T-t)}N(d_2) \quad (3.1)$$

onde,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Com base nos preços observados de mercado ($C(S, t)$) e em outras informações que são sabidas ou igualmente observadas no mercado (S, K, r, T, t), desejamos encontrar uma volatilidade implícita (σ), que satisfaça a seguinte equação:

$$f(\sigma) = SN(d_1) - Ke^{r(T-t)}N(d_2) - C(S, t) = 0$$

Como utilizaremos o método de Newton-Raphson, necessitamos de $f'(\sigma)$ que fica:

$$f'(\sigma) = SN'(d_1)d'_1 - Ke^{r(T-t)}N'(d_2)d'_2$$

Onde, $N'(d_1)$ é a função densidade de probabilidade normal padrão em d_1 :

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}$$

Analogamente,

$$N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2}$$

Dessa maneira, prosseguimos com o método iterativo de Newton-Raphson até que $|\sigma_{n+1} - \sigma_n|$ seja suficientemente pequeno:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)}$$

No final do processo, teremos um gráfico de volatilidades implícitas por preços de exercício (10), onde cada opção possui suas respectivas volatilidades implícitas de compra e venda. As volatilidades representadas em azul pertencem às opções de compra e as em vermelho às de venda:

Figura 10 – Volatilidade implícita por preço de exercício

Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico é exemplo de um determinado vencimento. A linha tracejada foi colocada como referência da região "no dinheiro", ou seja, é onde se localiza o preço do ativo subjacente. Em nosso exemplo é 15,745.

3.3 Filtragem dos dados

Antes de realizarmos a calibragem dos parâmetros do modelo SVI, precisamos fazer mais dois procedimentos.

O primeiro é considerar apenas as opções "fora do dinheiro", pois estes tendem a ser mais precisos na precificação já que estão aceitando um risco maior que as opções "dentro do dinheiro". Isso equivale a ficar apenas com as *puts* (símbolos vermelhos) à esquerda da linha tracejada e as *calls* à direita (símbolos azuis).

Figura 11 – Volatilidade implícita das opções fora do dinheiro

Fonte: Elaborada pelo autor.

Este passo poderia ser realizado na etapa de preparação dos dados de mercado, mas fizemos aqui para ilustrar melhor o processo.

O próximo passo é calcular o valor médio entre as volatilidades de compra e venda que restaram após o filtro.

Ficaremos então com a situação da figura 12:

Figura 12 – Valor médio de cada volatilidade implícita fora do dinheiro

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a filtragem pronta, agora temos os pontos observados que iremos utilizar na próxima seção.

3.4 Calibragem dos parâmetros do modelo SVI

Com as volatilidades implícitas σ_{BS} calculadas e filtradas, temos os pontos observados que iremos utilizar para calibrar os parâmetros do modelo SVI. Para tanto, utilizaremos o algoritmo de Levenberg-Marquardt descrito na seção 2.9. Nossa calibragem será feita por vencimento, então teremos conjunto de valores diferentes dos parâmetros para cada um.

Lembrando que, como foi descrito na seção 2.7.1, o modelo SVI considera a forma de variância total implícita em sua função:

$$w(k, \chi_R) = a + b\{\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}\}$$

Como a calibragem será feita por vencimento, a variância total implícita de cada ponto observado segue a relação:

$$w(k, t) = \sigma_{BS}^2(k, t)t$$

Para otimizar o processo, podemos limitar os valores dos parâmetros do modelo SVI com base na natureza conhecida da volatilidade implícita, como explicado em (AURELL, 2014).

Podemos admitir que $\sigma > 0$ e $b > 0$, pois sempre teremos alguma curvatura, respectivamente, na região "no dinheiro" e entre vértices.

k_i representa $\ln(K_i/F)$ e este estará em nosso eixo horizontal dos nossos pontos observados. O parâmetro responsável por movimentar nosso gráfico horizontalmente é o m e não queremos que seu valor ótimo seja maior que os limites observados. Sendo assim, podemos limitá-lo a $\min_i(k_i) \leq m \leq \max_i(k_i)$.

Da mesma forma, temos o parâmetro a que movimenta o gráfico verticalmente e seu valor ótimo não deve ultrapassar a variância total observada $\{w_i\}$. Logo, $a \leq \max_i(w_i)$.

A condição de correlação ρ entre os movimentos brownianos do ativo e da variância também nos dá um intervalo limitado de valores, sendo $\rho \in [-1; 1]$.

Como consequência das restrições acima, temos:

$$a \geq -b\rho\sqrt{1-\rho^2}$$

E por último, temos a condição de não arbitragem em cada vencimento T :

$$b(1 + |\rho|) \leq \frac{4}{T}$$

3.5 Implementação

Com os pontos observados, modelo e limites definidos para os parâmetros, podemos implementar o algoritmo.

Primeiramente, para o cálculo das volatilidades implícitas a partir dos preços das opções, foi desenvolvido um programa próprio utilizando método de Newton-Raphson e a fórmula de Black-Scholes. Esse trecho do código pode ser encontrado em B.

Na próxima etapa, utilizamos a linguagem Python, pois este já reúne várias ferramentas úteis, inclusive o método de Levenberg-Marquardt com possibilidade de incluir restrições e desigualdades.

O código fonte em Python referente à calibragem do exemplo deste capítulo pode ser encontrado em B.

Como resultado, temos a figura abaixo referente a volatilidade implícita por preço de exercício de um vencimento:

Figura 13 – Exemplo de ajuste do modelo SVI

Fonte: Elaborada pelo autor.

RESULTADOS

Nesta seção são mostrados testes práticos com a calibração dos parâmetros do modelo SVI para opções de ação de uma empresa brasileira e para opções do índice Bovespa.

4.1 Opções de ação

Para nosso teste com opções de ação, vamos considerar um ativo que apresente bastante liquidez atualmente. Escolhemos BBAS3, referente às ações ordinárias do Banco do Brasil.

4.1.1 Os dados de mercado

As tabelas seguintes apresentam a foto com alguns dos preços praticados no mercado às 15:22:11 (quinze horas, vinte e dois minutos e onze segundos) do dia 18/07/2017:

Tabela 4 – Livro de ofertas da ação BBAS3

Quantidade de compra	Preço de compra	Preço de venda	de	Quantidade de venda
2000	29,24	29,25		5100

Fonte: Dados da pesquisa.

As tabelas completas dos livros das opções podem ser encontradas em [A](#):

Tabela 5 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 21/08/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
28,80	BBASH29	3000	1,33	1,36	3000	BBAST29	4000	0,69	0,72	10100
29,05	BBASH89	20800	1,17	1,23	20800	BBAST89	24600	0,78	0,83	24600
29,30	BBASH59	22100	1,04	1,09	22100	BBAST59	24300	0,89	0,94	24300
30,05	BBASH60	24600	0,69	0,74	24600	BBAST60	3000	1,29	1,32	6100
30,30	BBASH11	2000	0,61	0,64	31300	BBAST11	4000	1,37	1,54	4000

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 6 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 18/09/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
28,80	BBASI68	3000	1,86	1,89	6000	BBASU68	9500	1,05	1,09	9600
29,05	BBASI29	3500	1,70	1,76	3500	BBASU29	3500	1,15	1,20	3500
29,30	BBASI59	3500	1,56	1,62	3500	BBASU59	3500	1,26	1,32	19900
29,55	BBASI9	18700	1,43	1,49	3500	BBASU9	3500	1,38	1,44	19900
29,80	BBASI30	3000	1,33	1,36	3000	BBASU30	12600	1,50	1,54	3000

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 7 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 16/10/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
28,30	BBASJ28					BBASV28	11900	1,17	1,26	11900
28,55	BBASJ78					BBASV78	11900	1,27	1,36	11900
28,80	BBASJ58					BBASV58	11900	1,36	1,46	11900
29,05	BBASJ69	11300	2,16	2,26	11300	BBASV69	11900	1,47	1,56	11900
29,30	BBASJ29	11800	2,03	2,13	11800	BBASV29	11900	1,58	1,67	11900
29,55	BBASJ4	11900	1,90	2	11900	BBASV4	11900	1,69	1,79	11900

Fonte: Dados da pesquisa.

4.1.2 Volatilidades implícitas e os parâmetros encontrados para o modelo SVI

Aplicando nosso algoritmo descrito no capítulo 3, encontramos as seguintes volatilidades implícitas (em azul e vermelho), com os parâmetros do modelo SVI ajustados (em verde) por vencimento.

4.1.2.1 Vencimento: 21/08/2017

Para o vencimento do dia 21/08/2017, utilizamos os seguintes dados de mercado (S , r , T), além dos preços de vencimento de cada opção, e os seguintes parâmetros calibrados:

- Preço do ativo subjacente (S): 29,24;

- Taxa livre de risco anualizada (r): 0,0724;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0,1706;
- Parâmetros ajustados: $a = 0,0127$; $b = 0,0251$; $\sigma = 0,0251$; $\rho = -0,8949$; $m = -0,0019$.

Utilizando os valores calibrados, podemos observar que o ajuste fica compreendido em praticamente todas as volatilidades implícitas conforme mostra a figura 14:

Figura 14 – Volatilidades implícitas das opções de BBAS3 e modelo SVI ajustado para o vencimento 21/08/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2.2 Vencimento: 18/09/2017

Prosseguimos ajustando os parâmetros para cada vencimento.

- Preço do ativo subjacente (S): 29,24;
- Taxa livre de risco anualizada (r): 0,0724;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0,1706;
- Parâmetros ajustados: $a = -0,0698$; $b = 0,1214$; $\sigma = 0,6943$; $\rho = 0,0003$; $m = 0,0914$.

Figura 15 – Volatilidades implícitas das opções de BBAS3 e modelo SVI ajustado para o vencimento 18/09/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2.3 Vencimento: 16/10/2017

- Preço do ativo subjacente (S): 29,24;
- Taxa livre de risco anualizada (r): 0.0716;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0.2460;
- Parâmetros ajustados: $a = 0.0220$; $b = 0.0242$; $\sigma = 0.0790$; $\rho = -0.4789$; $m = 0.0544$.

Figura 16 – Volatilidades implícitas das opções de BBAS3 e modelo SVI ajustado para o vencimento 16/10/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.3 Variância total

Agora que temos todos os parâmetros calibrados para cada vencimento, podemos substituir no modelo SVI e construir o gráfico para comparar a variância total resultante. Assim, conseguimos verificar se houve a ocorrência de *calendar spread*, ou seja, oportunidade de arbitragem entre vencimentos.

Figura 17 – Variância total implícita de BBAS3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando o intervalo observado de k_i onde $\ln(K_i/F)$, podemos notar que não houve cruzamento entre os gráficos. Logo, a nossa superfície de volatilidade contempla a condição $\partial_t w(k, t) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.

4.1.4 Teste de precificação

Para finalizar, vamos utilizar a volatilidade implícita SVI, encontrada após a calibragem, e utilizar no modelo Black-Scholes para verificar que nossos preços estão de acordo com o mercado.

Nas tabelas seguintes, podemos verificar que os preços teóricos ficaram dentro do intervalo de compra e venda praticados no mercado, como era esperado, mesmo para os preços de exercício mais afastados da região "dentro-do-dinheiro". Os preços ao lado esquerdo da coluna "Preço de exercício" são referentes às opções de compra e os preços da direita às de venda.

Tabela 8 – Precificação de opções BBAS3 com vencimento em 16/10/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
0,04	6,36		23,05	0,01	0,01	0,05
	5,87		23,55		0,02	
	5,39		24,05		0,03	1
4,63	4,67	4,71	24,8	0,05	0,06	0,07
	4,43		25,05	0,06	0,07	0,39
	4,20		25,3	0,05	0,08	
3,55	3,73	3,99	25,8	0,11	0,12	0,14
	3,51		26,05	0,05	0,14	
	3,28		26,3	0,05	0,16	0,85
	3,06		26,55	0,01	0,19	
2,72	2,85		26,8	0,21	0,22	0,24
2,4	2,64		27,05		0,26	0,49
2,2	2,43		27,3	0,27	0,30	0,34
2,02	2,04	2,06	27,8	0,39	0,40	0,42
	1,67		28,3	0,52	0,54	0,56
1,35	1,50		28,55	0,6	0,61	0,64
1,33	1,34	1,36	28,8	0,69	0,70	0,72
1,17	1,19	1,23	29,05	0,78	0,80	0,83
1,04	1,05	1,09	29,3	0,89	0,91	0,94
0,69	0,70	0,74	30,05	1,29	1,31	1,32
0,61	0,61	0,64	30,3	1,37	1,46	1,54
0,51	0,53	0,55	30,55		1,63	
0,45	0,45	0,47	30,8		1,80	
0,32	0,33	0,33	31,3	1,92	2,18	
0,25	0,28	0,32	31,55		2,38	
0,23	0,24	0,26	31,8		2,58	
0,16	0,17	0,2	32,3		3,01	
0,01	0,14	0,18	32,55		3,23	
0,01	0,12	0,15	32,8		3,45	
0,05	0,08	0,1	33,3		3,91	
	0,06		33,55		4,14	
	0,05	0,16	33,8		4,38	
0,01	0,03	0,07	34,3		4,86	
0,01	0,02		34,8		5,34	

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 9 – Precificação de opções BBAS3 com vencimento em 18/09/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
	3,65		26,3	0,37	0,38	0,42
	3,44		26,55	0,42	0,42	0,46
	3,25		26,8	0,47	0,47	0,5
	3,05		27,05	0,52	0,52	0,59
2,65	2,86		27,3	0,58	0,58	0,67
2,5	2,68		27,55	0,64	0,65	0,72
2,5	2,50	2,53	27,8	0,71	0,72	0,75
2,2	2,33		28,05	0,78	0,79	0,83
2	2,17		28,3	0,86	0,88	0,92
1,9	2,01	3	28,55	0,95	0,96	1
1,86	1,86	1,89	28,8	1,05	1,06	1,09
1,7	1,72	1,76	29,05	1,15	1,16	1,2
1,56	1,58	1,62	29,3	1,26	1,27	1,32
1,43	1,45	1,49	29,55	1,38	1,39	1,44
1,33	1,33	1,36	29,8	1,5	1,52	1,54
1,09	1,11	1,15	30,3	1,77	1,79	1,83
0,99	1,01	1,05	30,55	1,91	1,94	1,98
0,92	0,91	0,95	30,8		2,09	
0,66	0,67	0,71	31,55		2,59	

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 10 – Precificação de opções BBAS3 com vencimento em 16/10/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
	2,95		27,8	1	1,02	1,09
	2,79		28,05	1,08	1,10	1,17
	2,63		28,3	1,17	1,19	1,26
	2,48		28,55	1,27	1,29	1,36
	2,33		28,8	1,36	1,39	1,46
2,16	2,19	2,26	29,05	1,47	1,49	1,56
2,03	2,06	2,13	29,3	1,58	1,60	1,67
1,9	1,92	2	29,55	1,69	1,71	1,79
1,78	1,80	1,87	29,8	1,81	1,83	1,91
1,66	1,68	1,75	30,05	1,94	1,96	2,03
1,55	1,57	1,64	30,3	2,07	2,09	2,17
1,34	1,36	1,43	30,8	2,35	2,37	2,45
1,24	1,26	1,33	31,05	2,5	2,52	2,6
1,15	1,17	1,24	31,3		2,68	
0,99	1,00	1,07	31,8		3,00	
0,91	0,93	1	32,05		3,17	
0,84	0,86	0,93	32,3		3,35	

Fonte: Dados da pesquisa.

4.2 Opções do índice Bovespa

Apesar de não ter um volume muito grande de negociações, as opções do índice Bovespa apresentam curvas de volatilidade para uma quantidade considerável de vencimentos. Além disso, o índice é um indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro. Portanto, essa natureza o difere de uma ação normal e, por isso, é um teste interessante para realizarmos em nosso trabalho.

4.2.1 Os dados de mercado

As tabelas seguintes apresentam a foto com alguns dos preços praticados no mercado às 12:23:04 (doze horas, vinte e três minutos e quatro segundos) do dia 05/06/2017. Uma observação é que não existe um livro de ofertas para o índice, pois este não é negociável diretamente. Para tanto, vamos utilizar o valor calculado e informado pela BM&FBovespa 62468.

Tabela 11 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 14/06/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
55000	IBOVF25					IBOVR25	50	5	87	50
56000	IBOVF96					IBOVR96	50	22	107	50
57000	IBOVF57					IBOVR57	50	47	140	50
58000	IBOVF58					IBOVR58	50	120	165	30
59000	IBOVF59					IBOVR59	50	201	253	30
60000	IBOVF4					IBOVR4	30	335	391	40
61000	IBOVF61	30	2113	2241	30	IBOVR61	30	560	603	30
62000	IBOVF62	30	1460	1519	30	IBOVR62	30	858	913	30
63000	IBOVF63	30	898	954	30	IBOVR63	30	1290	1345	30
64000	IBOVF64	30	502	553	30	IBOVR64	30	1884	1931	30
65000	IBOVF65	30	238	283	40	IBOVR65	30	2567	2693	30
66000	IBOVF66	30	92	141	50	IBOVR66	30	3420	3540	30
67000	IBOVF27	30	20	74	50	IBOVR27	30	4358	4465	30
68000	IBOVF28	80	22	42	50	IBOVR28	30	5327	5433	30
69000	IBOVF29	30	2	33	50	IBOVR29	30	6315	6417	30

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 12 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 12/07/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
56000	IBOVG56					IBOVS56	50	339	439	50
57000	IBOVG57					IBOVS57	50	445	550	50
58000	IBOVG58					IBOVS58	40	602	640	10
59000	IBOVG59					IBOVS59	40	765	825	40
60000	IBOVG60					IBOVS60	30	977	1037	30
61000	IBOVG61	30	3231	3358	30	IBOVS61	10	1242	1300	30
62000	IBOVG62	30	2606	2666	30	IBOVS62	30	1580	1640	30
63000	IBOVG63	30	2019	2069	10	IBOVS63	30	1981	2041	30
64000	IBOVG64	30	1514	1569	10	IBOVS64	30	2464	2524	30
65000	IBOVG65	30	1102	1162	30	IBOVS65	30	2997	3125	30
66000	IBOVG66	30	762	822	30	IBOVS66	30	3647	3773	30
67000	IBOVG67	40	495	555	40	IBOVS67	30	4362	4506	30
68000	IBOVG68	50	305	365	50	IBOVS68	30	5165	5298	30
69000	IBOVG69	50	177	237	50	IBOVS69	30	6023	6143	30
70000	IBOVG70	50	75	160	50	IBOVS70				
71000	IBOVG71	50	26	98	50	IBOVS71				

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 13 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 16/08/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
57000	IBOVH57					IBOVT57	10	300	1500	10
58000	IBOVH58					IBOVT58	30	956	1013	40
59000	IBOVH59					IBOVT59	30	1177	1220	30
60000	IBOVH60					IBOVT60	30	1432	1462	30
61000	IBOVH61	30	4139	4289	30	IBOVT61	30	1718	1749	30
62000	IBOVH62	30	3568	3598	30	IBOVT62	30	2042	2092	30
63000	IBOVH63	30	2962	3006	30	IBOVT63	30	2419	2472	30
64000	IBOVH64	30	2413	2469	30	IBOVT64	30	2861	2903	30
65000	IBOVH65	30	1932	1984	30	IBOVT65	30	3300	3466	30
66000	IBOVH66	30	1524	1567	30	IBOVT66	30	3869	4047	30
67000	IBOVH67	30	1173	1216	30	IBOVT67	30	4507	4656	30
68000	IBOVH68	30	875	925	30	IBOVT68	30	5193	5339	30
69000	IBOVH69	40	632	688	30	IBOVT69	30	5921	6077	30
70000	IBOVH70	40	420	547	40	IBOVT70				
71000	IBOVH71	50	276	393	50	IBOVT71				
72000	IBOVH72	50	172	282	50	IBOVT72				
73000	IBOVH73	50	96	203	50	IBOVT73				
74000	IBOVH74	50	50	150	50	IBOVT74				

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 14 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 18/10/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
57000	IBOVJ57					IBOVV57	40	1181	1363	40
58000	IBOVJ58					IBOVV58	30	1442	1499	10
59000	IBOVJ59					IBOVV59	30	1665	1725	30
60000	IBOVJ6					IBOVV6	30	1921	1981	30
61000	IBOVJ11	30	5451	5686	30	IBOVV11	10	2208	2267	30
62000	IBOVJ62	30	4901	4961	30	IBOVV62	10	2538	2591	30
63000	IBOVJ63	30	4299	4359	30	IBOVV63	30	2903	2963	30
64000	IBOVJ64	30	3738	3797	10	IBOVV64	30	3298	3358	30
65000	IBOVJ65	30	3218	3278	30	IBOVV65	30	3646	3891	30
66000	IBOVJ66	30	2744	2804	30	IBOVV66	30	4157	4376	30
67000	IBOVJ67	30	2311	2371	30	IBOVV67	30	4674	4915	30
68000	IBOVJ18	40	1936	1996	30	IBOVV18	30	5257	5483	30
69000	IBOVJ69	30	1593	1653	30	IBOVV69	30	5884	6118	30
70000	IBOVJ70	30	1228	1436	30	IBOVV70				
71000	IBOVJ71	30	956	1175	30	IBOVV71				
72000	IBOVJ72	40	748	950	40	IBOVV72				
73000	IBOVJ73	40	560	755	40	IBOVV73				
74000	IBOVJ74	50	417	596	50	IBOVV74				

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 15 – Exemplo dos livros de ofertas das opções do índice Bovespa com vencimento em 13/12/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
40000	IBOVL14					IBOVX14	20	1	581	20
45000	IBOVL25					IBOVX25	20	1	581	20
50000	IBOVL1					IBOVX1	20	312	892	20
56000	IBOVL36					IBOVX36	20	1042	1622	20
60000	IBOVL6					IBOVX6	20	1939	2519	20
64000	IBOVL24	20	4377	4957	20	IBOVX24				
70000	IBOVL7	20	1840	2420	20	IBOVX7				
75000	IBOVL15	20	617	1197	20	IBOVX15				
80000	IBOVL40	20	24	604	20	IBOVX40				

Fonte: Dados da pesquisa.

4.2.2 Volatilidades implícitas e os parâmetros encontrados para o modelo SVI

4.2.2.1 Vencimento: 14/06/2017

Para o vencimento do dia 14/06/2017, utilizamos os seguintes dados de mercado (S , r , T), além dos preços de vencimento de cada opção, e os seguintes parâmetros calibrados:

- Preço do ativo subjacente (S): 62468;
- Taxa livre de risco anualizada (r): 0,0864;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0.0277;
- Parâmetros ajustados: $a = -0.5099$; $b = 0,2114$; $\sigma = 2,4203$; $\rho = -0,0527$; $m = 0,0137$.

Utilizando os valores calibrados, podemos observar que o ajuste fica compreendido em praticamente todas as volatilidades implícitas conforme mostra a figura 18:

Figura 18 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 14/06/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2.2 Vencimento: 12/07/2017

- Preço do ativo subjacente (S): 62468;
- Taxa livre de risco anualizada (r): 0,0864;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0.1031;
- Parâmetros ajustados: $a = -0,0069$; $b = 0,4914$; $\sigma = 0,1512$; $\rho = -0,9955$; $m = -0,4285$.

Utilizando os valores calibrados, podemos observar que o ajuste fica compreendido em praticamente todas as volatilidades implícitas conforme mostra a figura 19:

Figura 19 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 12/07/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2.3 Vencimento: 16/08/2017

- Preço do ativo subjacente (S): 62468;
- Taxa livre de risco anualizada (r): 0,0848;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0.2023;
- Parâmetros ajustados: $a = 0,0037$; $b = 0,0276$; $\sigma = 0,2051$; $\rho = -0,9999$; $m = 0,0702$.

Utilizando os valores calibrados, podemos observar que o ajuste fica compreendido em praticamente todas as volatilidades implícitas conforme mostra a figura 20:

Figura 20 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 16/08/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2.4 Vencimento: 18/10/2017

- Preço do ativo subjacente (S): 62468;
- Taxa livre de risco anualizada (r): 0,0835;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0.3730;
- Parâmetros ajustados: $a = -0,0274$; $b = 5,3560$; $\sigma = 0,1146$; $\rho = -0,9990$; $m = -0,8089$.

Utilizando os valores calibrados, podemos observar que o ajuste fica compreendido em praticamente todas as volatilidades implícitas conforme mostra a figura 21:

Figura 21 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 18/10/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2.5 Vencimento: 13/12/2017

- Preço do ativo subjacente (S): 62468;
- Taxa livre de risco anualizada (r): 0,0798;
- Dias úteis até o vencimento anualizados (T): 0.5238;
- Parâmetros ajustados: $a = 0,0165$; $b = 0,0410$; $\sigma = 0,1979$; $\rho = -0,9999$; $m = 0,0488$.

Utilizando os valores calibrados, podemos observar que o ajuste fica compreendido em praticamente todas as volatilidades implícitas conforme mostra a figura 22:

Figura 22 – Volatilidades implícitas das opções do índice Bovespa e modelo SVI ajustado para o vencimento 13/12/2017

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.3 Variância total

Assim como fizemos com as opções de ação, vamos construir o gráfico para comparar a variância total resultante e verificar se houve a ocorrência de arbitragem entre vencimentos.

Figura 23 – Variância total implícita do índice Bovespa

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos notar que não houve cruzamento entre os gráficos. Logo, a nossa superfície de volatilidade está livre da ocorrência de arbitragens.

4.2.4 Teste de precificação

Por último, as tabelas seguintes mostram os resultados com teste da precificação usando a volatilidade implícita ajustada ao modelo SVI para cada vencimento. Lembrando que os preços à esquerda da coluna de preço de exercício corresponde às opções de compra e, à esquerda, as de venda.

Tabela 16 – Precificação de opções do índice com vencimento em 14/06/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
	4752		58000	120	144	165
	3839		59000	201	229	253
	2976		60000	335	363	391
2113	2186	2241	61000	560	571	603
1460	1497	1519	62000	858	880	913
898	937	954	63000	1290	1317	1345
502	524	553	64000	1884	1902	1931
238	255	283	65000	2567	2631	2693
92	106	141	66000	3420	3479	3540
20	36	74	67000	4358	4407	4465
22	10	42	68000	5327	5379	5433
2	2	33	69000	6315	6368	6417

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 17 – Precificação de opções do índice com vencimento em 12/07/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
	7350		56000	339	384	439
	6459		57000	445	484	550
	5598		58000	602	614	640
	4774		59000	765	782	825
	3998		60000	977	996	1037
3231	3276	3358	61000	1242	1266	1300
2606	2620	2666	62000	1580	1601	1640
2019	2037	2069	63000	1981	2009	2041
1514	1533	1569	64000	2464	2496	2524
1102	1113	1162	65000	2997	3067	3125
762	775	822	66000	3647	3719	3773
495	515	555	67000	4362	4451	4506
305	324	365	68000	5165	5252	5298
177	193	237	69000	6023	6111	6143
75	108	160	70000		7017	
26	56	98	71000		7956	

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 18 – Precificação de opções do índice com vencimento em 16/08/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
	7249		57000	300	810	1500
	6440		58000	956	984	1013
	5663		59000	1177	1190	1220
	4924		60000	1432	1434	1462
4139	4228	4289	61000	1718	1721	1749
3568	3579	3598	62000	2042	2055	2092
2962	2983	3006	63000	2419	2442	2472
2413	2444	2469	64000	2861	2886	2903
1932	1965	1984	65000	3300	3390	3466
1524	1547	1567	66000	3869	3955	4047
1173	1192	1216	67000	4507	4583	4656
875	897	925	68000	5193	5271	5339
632	659	688	69000	5921	6016	6077
420	471	547	70000		6811	
276	329	393	71000		7651	
172	223	282	72000		8529	
96	147	203	73000		9436	
50	94	150	74000		10366	

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 19 – Precificação de opções do índice com vencimento em 18/10/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
	8486		57000	1181	1268	1363
	7713		58000	1442	1464	1499
	6968		59000	1665	1688	1725
	6255		60000	1921	1944	1981
5451	5575	5686	61000	2208	2234	2267
4901	4933	4961	62000	2538	2561	2591
4299	4330	4359	63000	2903	2927	2963
3738	3768	3797	64000	3298	3335	3358
3218	3250	3278	65000	3646	3786	3891
2744	2775	2804	66000	4157	4280	4376
2311	2345	2371	67000	4674	4820	4915
1936	1960	1996	68000	5257	5404	5483
1593	1619	1653	69000	5884	6033	6118
1228	1321	1436	70000		6704	
956	1064	1175	71000		7416	
748	845	950	72000		8166	
560	661	755	73000		8951	
417	509	596	74000		9769	

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 20 – Precificação de opções do índice com vencimento em 13/12/2017

Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda	Preço de exer- cício	Preço com- pra	Preço teórico SVI	Preço de venda
	24207		40000	1	100	581
	19549		45000	1	238	581
	15039		50000	312	522	892
	9999		56000	1042	1237	1622
	7027		60000	1939	2101	2519
4377	4527	4957	64000		3437	
1840	1917	2420	70000		6582	
617		1197	75000			
24		604	80000			

Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos verificar que a volatilidade implícita SVI, aplicada na precificação, manteve os preços condizentes com o mercado e ainda foi capaz de precificar opções sem ordens no mercado.

CONCLUSÃO

Este estudo teve como objetivo testar e incentivar a aplicação do modelo parametrizado SVI (*Stochastic Volatility Inspired*) no mercado brasileiro de opções das ações e índice. O método mostrou ser uma ferramenta poderosa, simples e rápida na obtenção da volatilidade implícita.

Durante os testes, verificou-se que, em poucos casos, ocorreram cruzamentos nos gráficos de variância total implícita. Uma das hipóteses seria a escassez de pontos observáveis em preços de exercícios mais distantes da região "no-dinheiro" em um determinado vencimento. Isso faria com que a volatilidade implícita ficasse deslocada (rotacionada e/ou transladada) com relação ao real, apesar de conseguir se ajustar perfeitamente aos pontos observados.

Outra hipótese seria o fato de calibrar os parâmetros separadamente por vencimento (curva) ao invés de considerar a superfície como um todo. Devido a contratempos, não foi possível implementar a classe da superfície de volatilidade SVI conhecida por SSVI (*Surface SVI*), descrita em [Gatheral e Antoine \(2013\)](#), que é uma extensão da parametrização natural 2.7.2 e ausência de arbitragem por toda superfície.

Apesar disso, para o domínio dos pontos observados, calibragem funcionou perfeitamente e os preços obtidos utilizando a volatilidade implícita SVI ($\sigma_{SVI}(k, t)$) corresponderam aos praticados no mercado.

Portanto, este trabalho concluiu o objetivo preterido. Seus resultados foram baseados em dados reais e, sua implementação, poderá ser aproveitada em trabalhos posteriores.

5.0.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros para a presente pesquisa, podemos destacar:

- Cada oferta de compra e venda possui uma quantidade ofertada, além do preço. Seria interessante utilizar essa informação para atribuir pesos em cada ponto observado de

volatilidade implícita, podendo ser utilizada em conjunto com o método Análise de Componentes Principais (ACP) ou *Principal Component Analysis* (PCA). Esse procedimento poderia incorporar a relevância de cada ponto, o que seria importante, pois tal informação pode trazer à tona possíveis alterações na curvatura da volatilidade;

- Implementar a classe SSVI (*Surface SVI*), descrita em [Gatheral e Antoine \(2013\)](#).

REFERÊNCIAS

ACTION, P. **10.5 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS**. 2017. Disponível em: <<http://www.portalection.com.br/1659-105-equacoes-diferenciais-estocasticas#exemplo10.5.1>>. Acesso em: 29/07/2017. Citado na página 31.

AURELL, A. **The SVI implied volatility model and its calibration**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Real de Tecnologia - Estocolmo, Suécia, Suécia, 2014. Citado nas páginas 33 e 49.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Citado nas páginas 23 e 31.

GATHERAL, J. A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives. **Presentation at Global Derivatives and Risk Management**, Madrid, 2004. Citado nas páginas 24, 33, 34 e 38.

GATHERAL, J.; ANTOINE, J. Arbitrage-free svi volatility surfaces. **Quantitative Finance**, 2013. Citado nas páginas 33, 34, 37, 38, 71 e 72.

HESTON, S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. **Review of Financial Studies** 6, 1993. Citado nas páginas 23 e 32.

LEE, R. W. The moment formula for implied volatility at extreme strikes. **Mathematical Finance**, v. 14, n. 3, p. 469–480, 2004. Citado na página 33.

LEVENBERG, K. A method for the solution of certain problems in least squares. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 5, n. 5, p. 164–168, 1944. Citado na página 40.

MARQUARDT, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963. Citado na página 40.

ROGERS, L. C. G.; TEHRANCHI, M. R. Can the implied volatility surface move by parallel shifts? **Finance and Stochastics**, v. 14, n. 2, p. 235–248, 2010. Citado na página 38.

WILMOTT, P. **Paul Wilmott on Quantitative Finance**. Second. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2006. Citado nas páginas 28 e 31.

LIVROS DE OFERTAS DE OPÇÕES DE BBAS3

Tabelas completas dos livros das opções de BBAS3:

Tabela 21 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 21/08/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
15,55	BBASH36					BBAST36				
19,55	BBASH70					BBAST70				
19,80	BBASH10					BBAST10			0,02	50000
22,80	BBASH52					BBAST52	2200	0,02	0,04	50000
23,05	BBASH83	600	0,04			BBAST83	20000	0,01	0,05	50000
23,55	BBASH53					BBAST53				
24,05	BBASH84					BBAST84			1	2500
24,80	BBASH25	10200	4,63	4,71	10200	BBAST25	1000	0,05	0,07	10500
25,05	BBASH85					BBAST85	2000	0,06	0,39	2000
25,30	BBASH55					BBAST55	100	0,05		
25,80	BBASH26	2300	3,55	3,99	200	BBAST26	24300	0,11	0,14	23300
26,05	BBASH86					BBAST86	19200	0,05		
26,30	BBASH56					BBAST56	1100	0,05	0,85	1000
26,55	BBASH87					BBAST87	800	0,01		
26,80	BBASH27	2300	2,72			BBAST27	26300	0,21	0,24	500
27,05	BBASH5	4000	2,4			BBAST5			0,49	300
27,30	BBASH57	4000	2,2			BBAST57	3500	0,27	0,34	3500
27,80	BBASH28	6100	2,02	2,06	6000	BBAST28	6500	0,39	0,42	3100
28,30	BBASH58					BBAST58	3500	0,52	0,56	26400
28,55	BBASH78	4000	1,35			BBAST78	4000	0,6	0,64	25900
28,80	BBASH29	3000	1,33	1,36	3000	BBAST29	4000	0,69	0,72	10100
29,05	BBASH89	20800	1,17	1,23	20800	BBAST89	24600	0,78	0,83	24600
29,30	BBASH59	22100	1,04	1,09	22100	BBAST59	24300	0,89	0,94	24300
30,05	BBASH60	24600	0,69	0,74	24600	BBAST60	3000	1,29	1,32	6100
30,30	BBASH11	2000	0,61	0,64	31300	BBAST11	4000	1,37	1,54	4000
30,55	BBASH13	25700	0,51	0,55	4000	BBAST13				
30,80	BBASH30	1200	0,45	0,47	2700	BBAST30				
31,30	BBASH1	6000	0,32	0,33	500	BBAST1	1000	1,92		
31,55	BBASH61	3500	0,25	0,32	3500	BBAST61				
31,80	BBASH32	6500	0,23	0,26	32900	BBAST32				
32,30	BBASH2	3500	0,16	0,2	4500	BBAST2				
32,55	BBASH12	1000	0,01	0,18	2000	BBAST12				
32,80	BBASH33	20000	0,01	0,15	1500	BBAST33				
33,30	BBASH3	10000	0,05	0,1	10000	BBAST3				
33,55	BBASH73					BBAST73				
33,80	BBASH34			0,16	3000	BBAST34				
34,30	BBASH4	59000	0,01	0,07	20000	BBAST4				
34,80	BBASH35	30000	0,01			BBAST35				
35,05	BBASH95					BBAST95				
35,55	BBASH65			1	3400	BBAST65				
35,80	BBASH6			1	10000	BBAST6				
36,30	BBASH16			1,78	400	BBAST16				
36,80	BBASH37					BBAST37				
37,05	BBASH67					BBAST67				
37,30	BBASH7			0,05	15000	BBAST7				
37,80	BBASH38					BBAST38				
38,30	BBASH8					BBAST8				
38,80	BBASH39					BBAST39				
39,30	BBASH9					BBAST9				
39,80	BBASH40					BBAST40				
40,05	BBASH90					BBAST90				
40,30	BBASH80					BBAST80				

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 23 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 16/10/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. com- pra	Preço com- pra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. com- pra	Preço com- pra	Preço venda	Qtd. de venda
15,3	BBASJ16					BBASV16				
15,8	BBASJ86					BBASV86				
18,05	BBASJ3					BBASV3				
20,55	BBASJ81					BBASV81				
21,3	BBASJ21					BBASV21				
21,8	BBASJ51					BBASV51				
22,3	BBASJ22					BBASV22				
22,8	BBASJ10					BBASV10	25000	0,01		
23,05	BBASJ63					BBASV63				
23,3	BBASJ23					BBASV23				
23,8	BBASJ53					BBASV53				
24,3	BBASJ24					BBASV24				
24,8	BBASJ54					BBASV54				
25,05	BBASJ65					BBASV65				
25,3	BBASJ25					BBASV25				
25,55	BBASJ75					BBASV75				
25,8	BBASJ55					BBASV55				
26,05	BBASJ66					BBASV66				
26,3	BBASJ26					BBASV26				
26,55	BBASJ76					BBASV76				
26,8	BBASJ56					BBASV56				
27,05	BBASJ77					BBASV77				
27,3	BBASJ27					BBASV27				
27,55	BBASJ67					BBASV67				
27,8	BBASJ57					BBASV57	11900	1	1,09	11900
28,05	BBASJ68					BBASV68	11900	1,08	1,17	11900
28,3	BBASJ28					BBASV28	11900	1,17	1,26	11900
28,55	BBASJ78					BBASV78	11900	1,27	1,36	11900
28,8	BBASJ58					BBASV58	11900	1,36	1,46	11900
29,05	BBASJ69	11300	2,16	2,26	11300	BBASV69	11900	1,47	1,56	11900
29,3	BBASJ29	11800	2,03	2,13	11800	BBASV29	11900	1,58	1,67	11900
29,55	BBASJ4	11900	1,9	2	11900	BBASV4	11900	1,69	1,79	11900
29,8	BBASJ59	11900	1,78	1,87	11900	BBASV59	11900	1,81	1,91	11900
30,05	BBASJ80	11900	1,66	1,75	11900	BBASV80	11900	1,94	2,03	11900
30,3	BBASJ30	11900	1,55	1,64	11900	BBASV30	11900	2,07	2,17	11900
30,8	BBASJ60	11900	1,34	1,43	11900	BBASV60	11900	2,35	2,45	11900
31,05	BBASJ71	11900	1,24	1,33	11900	BBASV71	11600	2,5	2,6	11600
31,3	BBASJ31	11900	1,15	1,24	11900	BBASV31				
31,8	BBASJ1	11900	0,99	1,07	11900	BBASV1				
32,05	BBASJ82	11900	0,91	1	11900	BBASV82				
32,3	BBASJ32	11900	0,84	0,93	11900	BBASV32				
32,8	BBASJ2					BBASV2				
33,05	BBASJ73					BBASV73				
33,3	BBASJ33					BBASV33				
33,8	BBASJ93					BBASV93				
34,3	BBASJ34					BBASV34				
34,8	BBASJ94					BBASV94				

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 22 – Exemplo dos livros de ofertas das opções de BBAS3 com vencimento em 18/09/2017

Preço de exercício	Call	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda	Put	Qtd. compra	Preço compra	Preço venda	Qtd. de venda
14,8	BBASI5					BBASU5				
16,55	BBASI87					BBASU87			0,59	5000
17,05	BBASI67					BBASU67			0,23	5000
17,55	BBASI88					BBASU88			0,03	10000
18,3	BBASI18					BBASU18				
19,05	BBASI89					BBASU89				
19,55	BBASI79					BBASU79	5000	0,01		
20,05	BBASI70					BBASU70	6200	0,02	0,04	15000
21,55	BBASI1					BBASU1	2200	0,02	2	500
21,8	BBASI2					BBASU2	7200	0,02		
22,05	BBASI72					BBASU72			0,13	3000
22,3	BBASI62					BBASU62				
23,8	BBASI53					BBASU53				
24,3	BBASI24					BBASU24				
24,8	BBASI54					BBASU54				
25,05	BBASI75					BBASU75				
25,3	BBASI25					BBASU25				
25,8	BBASI55					BBASU55				
26,05	BBASI76					BBASU76				
26,3	BBASI26					BBASU26	3500	0,37	0,42	19900
26,55	BBASI86					BBASU86	3500	0,42	0,46	19900
26,8	BBASI3					BBASU3	6500	0,47	0,5	3000
27,05	BBASI77					BBASU77	3500	0,52	0,59	3500
27,3	BBASI27	2300	2,65			BBASU27	3500	0,58	0,67	3500
27,55	BBASI78	4000	2,5			BBASU78	3500	0,64	0,72	3500
27,8	BBASI28	3100	2,5	2,53	6000	BBASU28	27000	0,71	0,75	22900
28,05	BBASI8	4300	2,2			BBASU8	3500	0,78	0,83	3500
28,3	BBASI58	4000	2			BBASU58	19900	0,86	0,92	19900
28,55	BBASI99	4000	1,9	3	1000	BBASU99	3500	0,95	1	3500
28,8	BBASI68	3000	1,86	1,89	6000	BBASU68	9500	1,05	1,09	9600
29,05	BBASI29	3500	1,7	1,76	3500	BBASU29	3500	1,15	1,2	3500
29,3	BBASI59	3500	1,56	1,62	3500	BBASU59	3500	1,26	1,32	19900
29,55	BBASI9	18700	1,43	1,49	3500	BBASU9	3500	1,38	1,44	19900
29,8	BBASI30	3000	1,33	1,36	3000	BBASU30	12600	1,5	1,54	3000
30,3	BBASI60	19900	1,09	1,15	3500	BBASU60	3500	1,77	1,83	3500
30,55	BBASI61	19900	0,99	1,05	19900	BBASU61	17400	1,91	1,98	3500
30,8	BBASI31	500	0,92	0,95	12600	BBASU31				
31,55	BBASI81	3500	0,66	0,71	3500	BBASU81				
31,8	BBASI32	1000	0,62	0,64	27000	BBASU32				
32,05	BBASI82	3500	0,48	0,59	13500	BBASU82				
32,3	BBASI52					BBASU52				
32,55	BBASI92					BBASU92				
32,8	BBASI33	3500	0,35	0,45	3500	BBASU33				
33,3	BBASI4	3500	0,28	0,38	3500	BBASU4				
33,55	BBASI13					BBASU13				
33,8	BBASI34	12300	0,15	1	4800	BBASU34				
34,3	BBASI6					BBASU6				
34,55	BBASI64					BBASU64				
34,8	BBASI35					BBASU35				
35,3	BBASI65					BBASU65				
35,55	BBASI7					BBASU7				
35,8	BBASI36	2000	0,02	0,35	200	BBASU36				
38,3	BBASI38	15000	0,01	0,02	10000	BBASU38				
38,8	BBASI39					BBASU39				
39,05	BBASI69			0,01	47000	BBASU69				
40,05	BBASI80					BBASU80				
40,3	BBASI20	75000	0,01			BBASU20				
41,3	BBASI11	10000	0,02	0,03	16100	BBASU11				
41,55	BBASI71					BBASU71				
41,8	BBASI42	10000	0,01	0,03	16100	BBASU42				

Fonte: Dados da pesquisa.

CÓDIGO FONTE

Código-fonte 1 – Obtenção da volatilidade implícita por meio do método Newton-Raphson e a fórmula de Black-Scholes

```
1:  public double GetImpliedVolatility(OptionType type, double
    price, double spot, double strike, double riskFreeRate,
    double timeToMaturity)
2:  {
3:      double impliedVol = 0.00;
4:      double relTolerance = 0.0001;
5:      int maxAttempts = 10;
6:      double[] volGuess = { 0.2000, 0.4000, 0.6000, 0.8000 };
7:
8:      for (int i = 0; i < volGuess.Length; i++)
9:      {
10:         impliedVol = this.GetImpliedVolatility(type, price, spot,
            strike, riskFreeRate, timeToMaturity, volGuess[i],
            relTolerance, maxAttempts);
11:
12:         if (impliedVol > 0.00000 && impliedVol < 1000)
13:         {
14:             break;
15:         }
16:     }
17:
18:     return impliedVol;
19: }
20:
```

```
21:  // Calculate market implied volatility, by inverting Black-  
22:  Scholes formula, through Newton-Raphson method  
23:  public double GetImpliedVolatility(OptionType type, double  
24:      price, double spot, double strike, double riskFreeRate,  
25:      double timeToMaturity, double volatilityGuess, double  
26:      relativeTolerance, int maxAttempts)  
27:  {  
28:      double phi = (type == OptionType.Call) ? 1 : -1;  
29:      double S = spot;  
30:      double K = strike;  
31:      double r = riskFreeRate;  
32:      double ttm = timeToMaturity;  
33:      double currentError = 999999999;  
34:      double previousIV = volatilityGuess;  
35:      double currentIV = previousIV;  
36:      int i = 0;  
37:      while (i < maxAttempts && currentError > relativeTolerance)  
38:      {  
39:          double[] d = this.GetDs(ttm, S, K, r, previousIV);  
40:          double[] firstOrderD = this.GetFirstOrderDs(ttm, S, K, r,  
41:              previousIV);  
42:          Normal normal = new Normal();  
43:          double cdf1 = normal.CDF(phi * d[0]);  
44:          double cdf2 = normal.CDF(phi * d[1]);  
45:          double f = phi * S * cdf1 - phi * K * Math.Exp(-r * ttm)  
46:              * cdf2 - price;  
47:          double pdf1 = normal.PDF(phi * d[0]);  
48:          double pdf2 = normal.PDF(phi * d[1]);  
49:          double firstOrderF = S * pdf1 * firstOrderD[0] - K * Math.  
50:              .Exp(-r * ttm) * pdf2 * firstOrderD[1];  
51:          currentIV = previousIV - f / firstOrderF;  
52:          currentError = Math.Abs(currentIV - previousIV) / Math.  
53:              Abs(previousIV);  
54:          previousIV = currentIV;  
55:          i++;  
56:      }
```

```

55:     return currentIV;
56: }
57:
58: // Calculate d1 and d2 (Black-Scholes)
59: private double[] GetDs(double ttm, double S, double K, double
    r, double sigma)
60: {
61:     double[] d = new double[2];
62:     double sigmaSqrtT = sigma * Math.Sqrt(ttm);
63:     d[0] = (Math.Log(S / K) + (r + 0.5 * sigma * sigma) * ttm)
        / (sigmaSqrtT);
64:     d[1] = d[0] - sigmaSqrtT;
65:
66:     return d;
67: }
68:
69: // Calculate first order of d1 and d2 (Black-Scholes)
70: private double[] GetFirstOrderDs(double ttm, double S, double
    K, double r, double sigma)
71: {
72:     double[] d = new double[2];
73:     double sqrtT = Math.Sqrt(ttm);
74:     double sigmaSigma = sigma * sigma;
75:     double sigmaSigmaT = sigmaSigma * ttm;
76:
77:     d[0] = sqrtT * (sigmaSigmaT - (Math.Log(S / K) + (r + 0.5 *
        sigmaSigma) * ttm)) / (sigmaSigmaT);
78:     d[1] = d[0] - sqrtT;
79:
80:     return d;
81: }

```

Código-fonte 2 – Exemplo de script de calibração do modelo SVI

```

1:  #!/usr/bin/env python
2:  #<examples/doc_basic.py>
3:  from lmfit import minimize, Minimizer, Parameters, Parameter,
    report_fit
4:  import numpy as np
5:  import matplotlib.pyplot as plt
6:
7:  #reference date = 24-Nov-2016

```

```

8:  #expiry = 19-Dec-2016
9:  daysToMaturity=25
10: busDaysToMaturity=17
11:  r = 0.136681531621066-0.01
12:  T = busDaysToMaturity / 252
13:  S = 15.745
14:
15:  K = np.array([10.5, 10.75, 11, 11.25, 11.5, 11.75, 12, 12.25,
    12.5, 13, 13.5, 13.75, 14, 14.5, 14.75, 15, 15.5, 16, 17,
    17.75, 18, 19, 20])
16:
17:  impliedVols = np.array([0.808296300272725, 0.809433840654064,
    0.772792107796888, 0.76615116647492, 0.750678018433719,
    0.736877079860606, 0.717390155871561, 0.706331821215034,
    0.692298126086919, 0.668327088604872, 0.644055485514253,
    0.633705367567162, 0.621184471963892, 0.60314318834066,
    0.595390960067371, 0.588432819290643, 0.576124248367278,
    0.569330775214732, 0.568031932360491, 0.572665504973536,
    0.578521388308414, 0.589528917817755, 0.60334618945583])
18:
19:  w = impliedVols**2
20:  #F = S * np.exp(r*T)
21:  F = S * (1+r)**T
22:  x = np.log(K / F)
23:
24:  # define objective function: returns the array to be
    minimized
25:  def fcn2min(params, x, w):
26:  a = params['a']
27:  b = params['b']
28:  rho = params['rho']
29:  m = params['m']
30:  sigma = params['sigma']
31:  model = a + b * (rho * (x - m) + np.sqrt((x - m) * (x - m) +
    sigma * sigma) )
32:  return model - w
33:
34:  # create a set of Parameters
35:  params = Parameters()
36:  params.add('b', value= 0.1, min=0, vary=True)
37:  params.add('sigma', value= 0.1, min=0.00000001, vary=True)
38:  params.add('rho', value= 0, min=-1, max=1, vary=True)

```

```

39:  params.add('m', value= 0.1, vary=True)
40:
41:  params.add('u', value= 0.1,  min=0, vary=True)
42:  params.add('a', expr='u-b*sigma*sqrt(1-(rho*rho))')
43:
44:  params.add('v', value= 0.5,  min=0, vary=True)
45:  params.add('T', value= T,  vary=False)
46:  params.add('b', expr='(4-v) / (T * (1 + abs(rho)))')
47:
48:  # do fit, here with leastsq model
49:  minner = Minimizer(fcn2min, params, fcn_args=(x, w))
50:  result = minner.minimize()
51:
52:  # calculate final result
53:  wResidual = w + result.residual
54:
55:  # write error report
56:  report_fit(result)
57:
58:  impliVolsPercent = impliedVols * 100
59:  fittedVols = np.sqrt(wResidual) * 100
60:
61:  #Polynomial fit
62:  K_new = np.linspace(K[0], K[-1], num=len(K)*10)
63:  polyCoefs = np.polyfit(K, impliedVols, 4)
64:  funcPolyFit = np.poly1d(polyCoefs)
65:  polyFittedVols = funcPolyFit(K_new)
66:  polyFittedVolsPercent = polyFittedVols * 100
67:
68:  #orig vols
69:  callAsk_x, callAsk_y = np.loadtxt("20161219_all_call_ask_vols
    .txt", delimiter=',', unpack=True)
70:  callBid_x, callBid_y = np.loadtxt("20161219_all_call_bid_vols
    .txt", delimiter=',', unpack=True)
71:
72:  putAsk_x, putAsk_y = np.loadtxt("20161219_all_put_ask_vols.
    txt", delimiter=',', unpack=True)
73:  putBid_x, putBid_y = np.loadtxt("20161219_all_put_bid_vols.
    txt", delimiter=',', unpack=True)
74:
75:  # try to plot results
76:  fig, ax = plt.subplots()

```

```
77: ax.axvline(S, color='k', linestyle='--')
78: plt.plot(K, impliVolsPercent, 'k+')
79: plt.plot(K, fittedVols, 'g')
80: plt.plot(callAsk_x, callAsk_y*100, 'bv')
81: plt.plot(callBid_x, callBid_y*100, 'b^')
82: plt.plot(putAsk_x, putAsk_y*100, 'rv')
83: plt.plot(putBid_x, putBid_y*100, 'r^')
84: ax.set_xlabel('K')
85: ax.set_ylabel('Volatility (%)')
86: plt.show()
```