UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Um Modelo de Otimização Inteira Mista para o Problema de
Planejamento da Produção de Fertilizantes**

André Valner Ruis

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria (MECAI)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

André Valner Ruis

Um Modelo de Otimização Inteira Mista para o Problema de Planejamento da Produção de Fertilizantes

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática, Estatística e Computação

Orientadora: Profa. Dr^a. Maristela Oliveira dos Santos

USP – São Carlos
Fevereiro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R934m Ruis, André Valner
Um Modelo de Otimização Inteira Mista para o
Problema de Planejamento da Produção de
Fertilizantes / André Valner Ruis; orientadora
Maristela Oliveira dos Santos. -- São Carlos, 2019.
72 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística
e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade
de São Paulo, 2019.

1. Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes. 2.
Indústria Química. 3. Planejamento e Programação da
Produção. 4. Produção de Fertilizantes Foliares
Líquidos. 5. Problema Multiestágio. I. Oliveira dos
Santos, Maristela , orient. II. Título.

André Valner Ruis

A Mixed Integer Optimization Model for the Planning Problem of the Fertilizer Production

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Professional Masters in Mathematics, Statistics and Computing Applied to Industry. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics, Statistics and Computing

Advisor: Profa. Dr^a. Maristela Oliveira dos Santos

USP – São Carlos
February 2020

*Este trabalho é dedicado a minha esposa Joice,
pela compreensão, companheirismo, carinho e força motivacional que me deu nesta e em tantas
outras jornadas.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço todos os dias a Deus por ter me dado o dom da vida e por me fortalecer todos os dias me dando saúde para seguir em frente e sabedoria para enfrentar todos os desafios. À Mãe Rainha, Nossa Senhora Aparecida, que jamais me desamparou e deixou que eu me afligisse em meio às dificuldades.

Agradeço com muito carinho o apoio que recebi em casa da minha esposa Joice, que ao longo de todo este período, foi compreensiva, carinhosa, atenta, aconselhadora e firme, tornando esta caminhada, se não menos cansativa, mais serena e tranquila.

Um agradecimento especial a minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Maristela (Mari), sempre atenta às minhas dúvidas, cobrando com precisão e contribuindo bastante para o meu crescimento na produção deste trabalho. Agradeço ainda o amadurecimento que me proporcionou na pesquisa e ajustes valiosos na produção desta dissertação.

Aos meus pais, Hélio e Rosa, meus irmãos, Eduardo e Melina, pelo carinho fraternal, incentivo e todo o aprendizado em família.

Agradeço especialmente ao amigo Ricardo, pelas valiosas contribuições na descrição deste trabalho. Por horas de atenção dispensadas a mim, além das inúmeras dúvidas que foram prontamente esclarecidas e permitiram elucidar com clareza a proposta deste trabalho.

Agradeço também a todos os familiares por parte da minha mulher, pelo incentivo e orações para conclusão com êxito deste trabalho. Também agradeço aos meus amigos pela torcida e apoio para conclusão deste desafio.

Também agradeço aos companheiros do MECAL, sobretudo ao amigo Felipe que certamente se tornou um amigo para vida, à Cecília, Rodolfo, Fábio, Marcelo, Robson, sempre ajudando e dando risada juntos. A todos os professores do programa que contribuíram bastante para aquisição de novos conhecimentos.

Aos meus alunos e companheiros da ETEC Professor José Carlos Seno Júnior, em Olímpia-SP, agradeço, pois busquei um meio de adquirir ainda mais conhecimento, e quem sabe futuramente, desenvolver projetos de melhoria de processos através da pesquisa operacional, envolvendo alunos de nível médio e técnico.

Gratidão pela conclusão deste trabalho, já que foi fruto de muito, mas muito esforço e suor, mesmo com tantas tarefas a cumprir e com uma carga de trabalho que excede as 44 horas semanais.

*“O objetivo da vida não é ser feliz.
É ser útil, honrado e compassivo, fazendo com que
a nossa vida, bem vivida, faça alguma diferença.”
(Ralph Waldo Emerson)*

RESUMO

RUIS, A. V. **Um Modelo de Otimização Inteira Mista para o Problema de Planejamento da Produção de Fertilizantes**. 2020. 74 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

A atividade produtiva da indústria química concentra sobretudo a transformação de substâncias através de processos químicos que geram produtos que atendem aos setores primário, através de insumos, defensivos e fertilizantes para agropecuária; secundário com a produção de embalagens e produtos de manutenção e limpeza nas indústrias; e terciário com materiais para o comércio e serviços. Nesta dissertação descreveremos o processo de produção de fertilizantes foliares líquidos produzido numa indústria química, que atende ao setor de agrociências, com a proposta de se obter um modelo matemático para o problema em questão. O presente estudo configura um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes multiestágio em máquinas paralelas distintas. No ambiente produtivo, misturas são produzidas em reatores de bateladas, em seguida, são armazenadas em tanques intermediários multipropósitos, não simultaneamente, para posterior envase, gerando assim produtos manufaturados. O modelo matemático obtido foi desenvolvido e testado em duas instâncias e a solução retornada pelo modelo foi discutida posteriormente. As etapas de produção foram divididas em dois estágios sincronizados e, com a modelagem, geramos um sequenciamento que pode ser automatizado, visando melhorias no processo de produção, além da minimização dos custos com estocagens e trocas nas máquinas.

Palavras-chave: Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes, Indústria Química, Planejamento e Programação da Produção, Produção de Fertilizantes Foliares Líquidos, Problema Multiestágio.

ABSTRACT

RUIS, A. V. **A Mixed Integer Optimization Model for the Planning Problem of the Fertilizer Production**. 2020. 74 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

The productive activity of the chemical industry concentrates mainly the transformation of raw material, which through chemical processes, generate products that serve to the primary sectors, through pesticides and fertilizers for agriculture; secondary to the production of packaging and maintenance and cleaning products in industries; and tertiary with materials for trade and services. In this dissertation we will describe the production process of liquid leaf fertilizers produced in a chemical industry, which serves the agrosocieties sector, with the proposal of obtaining a mathematical model for the problem in question. The present study sets up a multistage lot sizing and scheduling problem in distinct parallel machines with time-dependent production sequence, as mixtures are produced in batch reactors, then stored in multi-purpose buffers, not simultaneously, for storage later filling, thus generating manufactured products. The mathematical model obtained was developed and tested in two instances and the solution returned by the model was discussed later. The production steps were divided into two synchronized stages and, with the modeling, we generate a sequence that can be automated, aiming at improvements in the production process, as well as minimizing the costs of stocking and exchanging the machines.

Keywords: Lot Sizing and Scheduling, Chemical Industry, Production Planning and Scheduling, Liquid Leaf Fertilizer Production, Multistage Problem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estruturas de produto	30
Figura 2 – Layout da Indústria	40
Figura 3 – Fluxograma da produção	44
Figura 4 – Processo de produção da linha de fertilizantes foliares líquidos	46
Figura 5 – Estrutura decisória do processo de produção	47
Figura 6 – Sequência de produção dependente do tempo de preparação	48
Figura 7 – Capacidade de processamento de uma mistura num reator	49
Figura 8 – Roteiro de execução de uma mistura	49
Figura 9 – Dados da instância teste	58
Figura 10 – Planejamento da produção - 1º estágio	59
Figura 11 – Planejamento da produção - 2º estágio	59
Figura 12 – Tempos de início e término da produção - 1º estágio	60
Figura 13 – Tempos de início e término da produção - 2º estágio	61
Figura 14 – Produção nos reatores e transferência para o <i>buffer</i> - 1º estágio	66
Figura 15 – Tempos de produção no 1º estágio	66
Figura 16 – Envase dos produtos nas envasadoras - 2º estágio	67
Figura 17 – Tempos de produção no 2º estágio	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variáveis de decisão da instância teste	61
Tabela 2 – Variáveis binárias da instância teste	62
Tabela 3 – Parâmetros do modelo	63
Tabela 4 – Tempo de produção e custo da misturas	63
Tabela 5 – Tempo de envase, custo de estoque e custo de produção dos produtos	63
Tabela 6 – Tempos de troca entre misturas (em horas)	64
Tabela 7 – Custos de troca entre misturas (em \$)	64
Tabela 8 – Quantidade da mistura j para produzir o produto i (em litros)	64
Tabela 9 – Tempos de trocas entre produtos (em horas)	64
Tabela 10 – Custos de trocas entre produtos (em \$)	65
Tabela 11 – Demandas de produtos (i) por período (t)	65
Tabela 12 – Variáveis de decisão	68
Tabela 13 – Variáveis binárias	69

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CLSD	Capacitated Lot Sizing Problem with Sequence Dependent Setup Costs
CLSP	Capacitated Lot Sizing Problem
CSLP	Continuous Setup Lot Sizing Problem
CSTR	Reator tanque agitado contínuo
DLSP	Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem
EOQ	Economic Order Quantity
GLSP	General Lot Sizing and Scheduling Problem
IP	Programação Inteira
JIT	Just-in-time
MIP	Programação Inteira Mista
MRP	Material Requirement Planning
MRP-II	Material Resource Planning
OP	Ordem de Produção
PCP	Planejamento e Controle da Produção
PLSP	Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem
PPF	Procedimento Padrão de Fabricação
RPA	Reator perfeitamente agitado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	Dimensionamento de lotes monoestágio	25
2.1.1	<i>Dimensionamento de lotes monoestágio - único item</i>	26
2.1.2	<i>Dimensionamento de lotes monoestágio - múltiplos itens</i>	28
2.2	Dimensionamento de lotes multiestágio	30
2.3	Modelos de dimensionamento e sequenciamento de lotes	32
2.3.1	<i>Modelo geral de dimensionamento e sequenciamento de lotes</i>	34
2.3.2	<i>Modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes capacitado</i>	36
3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E MODELAGEM	39
3.1	Descrição do problema	39
3.1.1	<i>Descrição e caracterização dos processos de produção</i>	41
3.2	Modelo matemático	46
3.2.1	<i>Definição das funções, conjuntos, parâmetros e variáveis</i>	50
4	RESULTADOS	57
4.1	Exemplar ilustrativo - 1ª instância teste	57
4.2	Plano de produção para instância baseada em dados reais	62
5	CONCLUSÃO	70
	REFERÊNCIAS	72

INTRODUÇÃO

Ao longo da história da humanidade grandiosos foram os avanços evolutivos, alcançados em diferentes épocas, que permearam e indubitavelmente modificaram a realidade da vida do homem. Entre grandes mudanças ocorridas ao longo do tempo, a industrialização, ocorrida na Inglaterra por volta do século XVIII, produziu mudanças evidentes e significativas nos processos produtivos. A economia que até então baseava-se em processos artesanais, atividades no campo e relações comerciais tornou-se industrial produzindo a migração do homem do campo para as cidades gerando uma urbanização que mais tarde passaria a ser predominante. Os processos de produção eram arcaicos e os produtos eram produzidos em escala mínima, de forma praticamente individualizada com uso de ferramentais manuais que exigiam tempo e disponibilidade de mão-de-obra para efetivamente alcançar a produção, nem sempre uniforme, de um determinado item. Com a industrialização houve a mecanização dos processos produtivos e dessa forma os produtos passaram a ser produzidos de forma seriada possibilitando assim a padronização da produção dos itens e a produção em larga escala. Ao longo do tempo, impulsionados pela mecanização gerada durante a industrialização, os processos produtivos evoluíram gradativamente alcançando um nível de exigência em que a implementação de melhorias estratégicas de desempenho são fator primordial para as indústrias. Essas melhorias são questão de sobrevivência num mundo onde não há espaço para retrocessos, perdas produtivas e não adequação ao mercado e suas exigências, facultando as empresas que não atendem aos anseios econômicos do mundo moderno à completa extinção de suas atividades produtivas.

Os processos produtivos constituem apenas uma das etapas da função produção conforme destaca [Slack, Chambers e Johnston \(2002\)](#):

"A função de produção (ou simplesmente produção) na organização representa a reunião de recursos destinados a produção de seus bens e serviços"

Os bens e serviços a serem produzidos são gerados a partir de recursos de entrada¹ que são transformados num ambiente que possibilite a execução do processo produtivo. Durante o processo produtivo considera-se de forma cíclica até a execução do projeto as seguintes fases:

- elaboração do projeto;
- planejamento e controle;
- melhoria do processo;
- definição de uma estratégia de produção.

A exigência por sistemas de produção que sejam cada vez mais eficientes visando ao atendimento de uma demanda cumprida dentro dos prazos de negociação e otimizando os custos produtivos, faz parte dos desafios qualitativos que devem ser integralmente cumpridos, não apenas por grandes corporações, mas por todas as empresas que almejam projeção e espaço no cenário econômico. Os consumidores de produtos e serviços buscam a plena satisfação, que passa pela qualidade do produto recebido, agilidade na entrega, além de um atendimento pós-venda que funcione.

O abrandamento dos ciclos de vida dos produtos e uma mudança radical no comportamento dos clientes representam ainda mais características de uma crescente complexidade do mercado. Para ser bem sucedido no mercado de hoje, as empresas devem apontar para objetivos conflitantes, de modo a atender os pedidos dos clientes a tempo com baixos níveis de estoque, curto *lead time*² e o menor custo de produção. Essa sequência de eventos estruturalmente interligados faz parte do planejamento corporativo compreendido pelos seguintes tipos: **planejamento estratégico, tático e operacional**, descritos a seguir.

1. **Planejamento estratégico:** engloba o conjunto de decisões administrativas tomadas pela alta cúpula de uma corporação (presidentes, vice-presidentes, conselho de administração) com o propósito de definir as diretrizes a partir das necessidades propostas pela missão, visão e valores da empresa, sendo essas de cunho estratégico com a adoção de medidas necessárias para atingir os objetivos propostos. Envolve decisões que geralmente se estendem por um longo período, sendo estas de cunho estrutural, como instalação e layout da planta produtiva através da aplicação de recursos de alto custo, ou cunho funcional, como a aquisição de máquinas e equipamentos através da alocação orçamentária devidamente regida por um plano de gestão (anual, por exemplo);

¹ Podem ser materiais, informações ou mesmo consumidores segundo [Slack, Chambers e Johnston \(2002\)](#).

² Intervalo de tempo entre o início da produção de um produto e término com a obtenção do produto final acabado durante uma atividade produtiva.

2. **Planejamento tático:** conduzido pela diretoria executiva, que submete-se ao presidente, compreende o gerenciamento dos recursos financeiros alocados no planejamento estratégico. Neste nível, as decisões podem envolver um gestor financeiro, e também um gestor da produção que será responsável pelas etapas de criação e estratégias de execução dos projetos, como definição dos níveis de mão-de-obra, horas extras e subcontratação, com o propósito de cumprir ordens de produção geradas por uma demanda externa, integrando assim decisões de médio prazo. Neste nível defini-se também os tamanhos dos lotes que seguem para produção e também os níveis de estoque, dentro de um horizonte de planejamento de médio prazo, que pode variar de algumas semanas a seis meses. Este conjunto de ações descritas anteriormente engloba os subníveis planejamento agregado da produção e planejamento de quantidades de produção, sistematicamente e de forma integrada estes subníveis permitem saber qual produto e em que período deve-se iniciar a produção;
3. **Planejamento operacional:** consiste na execução prática a partir do que foi estabelecido pelos planejamentos estratégico e tático, envolvendo toda a rede de colaboradores que estão alinhados com os propósitos estipulados pela empresa, sendo orientados e monitorados pelos gestores e encarregados de departamento. A execução das tarefas neste nível tem um horizonte de planejamento curto, sendo decisões de curto prazo, (geralmente diárias) com início e término definidos, além de uma sequência de tarefas pré-estabelecidas, flexíveis, porém dependentes das estratégias estabelecidas sobretudo no nível tático.

Como se vê a percepção das empresas deve ser inerente a todos os fatores citados anteriormente e, a implementação de sistemas que atendam aos anseios de uma exigente demanda externa, com melhorias e minimização de custos dos processos de produção, gerando produtos de alta qualidade, é uma realidade impreterível, sobretudo no que diz respeito às decisões envolvendo o planejamento e a programação da produção. Afirmam [Arenales et al. \(2007\)](#)

"De modo geral, um "bom" plano de produção é aquele que satisfaz as demandas sem atraso, respeita a capacidade dos recursos disponíveis e minimiza os custos de produção."

Desta forma, intrinsecamente adjunto a todo este contexto, encontra-se o problema de dimensionamento de lotes (*lot sizing*) e também o sequenciamento de lotes para produção. O problema de dimensionamento de lotes está diretamente ligado ao planejamento da produção, e conforme destaca [Arenales et al. \(2007\)](#), devido a capacidades de produção limitadas (máquinas, mão-de-obra, etc.) das fábricas, deve-se planejar a produção, decidindo o quê e quanto produzir em cada período de um horizonte de planejamento. Ainda, segundo [Arenales et al. \(2007\)](#)

"No planejamento da produção, deseja-se determinar o tamanho dos lotes de produção, para anteder a demanda na data solicitada e de modo que a soma dos custos de produção e estocagem seja mínima".

Já o problema de sequenciamento de lotes visa determinar a sequência de produção dos lotes no plano de produção. Através do sequenciamento dos lotes, é possível diminuir o tempo de preparação para se obter um produto final, além de evitar eventuais contaminações residuais otimizando assim os recursos utilizados no processo e consequentemente melhorando a eficiência na produtividade. Como o sequenciamento, determina-se ainda no plano de produção os instantes de início e término do processamento das tarefas em cada período do horizonte de planejamento. Os problemas que tratam de forma integrada o dimensionamento e o sequenciamento dos lotes configuram problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes (*lot sizing and scheduling*).

Diversos problemas da literatura referentes ao dimensionamento e sequenciamento de lotes foram estudados, descrevendo características e apresentando modelos matemáticos para tais problemas, entre os quais podemos citar alguns como [Fleischmann \(1994\)](#), [Drexler e Haase \(1995\)](#), [Gupta e Magnusson \(2005\)](#), [Araujo, Arenales e Clark \(2008\)](#), [Kovács, Brown e Tarim \(2009\)](#), [Ferreira, Morabito e Rangel \(2009\)](#), [James e Almada-Lobo \(2011\)](#), [Camargo, Toledo e Almada-Lobo \(2012\)](#), [Almada-Lobo, Klabjan e Guimarães \(2014\)](#), [Baldo *et al.* \(2014\)](#).

O estudo em questão será desenvolvido numa indústria química que produz adubos fertilizantes e tecnologia para o setor de agrociências atendendo ao mercado nacional e, também esporadicamente, o mercado internacional em países sulamericanos como o Paraguai e Uruguai. Esta empresa localiza-se no estado de São Paulo e sua planta produtiva está instalada na região noroeste do estado, onde são produzidos e envasados os produtos. Além da produção e envase a empresa conta também com um laboratório de experimentação agrônômica, onde são realizados testes de produtos e desenvolvimento de tecnologias para aplicação em lavouras, realizados na própria empresa numa estação experimental anexa à planta fabril. Os principais produtos atendem a uma extensa diversidade de culturas, sendo sobretudo classificados na linha de adubos e fertilizantes foliares com características físicas líquidas e também sólidas (grânulos ou pó), além de uma tecnologia gerada na própria empresa para encapsulamento de grânulos de adubo para otimizar as propriedades químicas dos mesmos. A clientela estende-se desde revendas que atuam no setor de insumos agrícolas até produtores rurais incluindo também pequenos produtores caseiros que cultivam em pequenas chácaras.

A indústria química inclui empresas que produzem produtos químicos³, isto é, produtos em que matérias-primas passam por processos envolvendo reações químicas gerando produtos finais que constituem novas substâncias com fórmulas e propriedades físico-químicas específicas. Segundo [Costa e Silva \(2012\)](#),

"A indústria química envolve a fabricação de produtos com base em reações químicas que convertem matérias-primas (petróleo, gás natural e outras fontes, até mesmo da biomassa) em mais de setenta mil produtos químicos existentes".

³ Entre essas indústrias incluem-se as indústrias petroquímicas, farmacêuticas, de polímeros ou tintas, além das agroquímicas

Afirmam ainda [Costa e Silva \(2012\)](#)

"Segundo a Classificação Nacional de Atividade Econômica do IBGE (CNAE-2.0), pode-se dividir a indústria química em nove segmentos: fabricação de produtos químicos inorgânicos; fabricação de produtos químicos orgânicos; fabricação de resinas e elastômeros; fabricação de fibras artificiais e sintéticas; fabricação de defensivos agrícolas e desinfestantes domissanitários; fabricação de sabões, detergentes, produtos de limpeza, cosméticos, produtos de perfumaria e higiene pessoal; fabricação de tintas, vernizes, esmaltes, lacas e produto afins; e fabricação de produtos e preparados químicos diversos. "

A abrangência da indústria química estende-se por praticamente todas as atividades econômicas oferecendo soluções e extensa gama de produtos e insumos que atendem aos mais diversificados setores. No setor primário atendem a produção de adubos fertilizantes e compostos químicos agrícolas usados na agricultura e também extração de minérios, passando pelo setor secundário de manufatura, com o uso de produtos derivados do petróleo e outros produtos químicos usados em indústrias, além de atender o setor de serviços, sobretudo na área de saúde com as indústrias farmacêuticas. Destacamos ainda que a maioria dos tipos de embalagens utilizadas nas áreas de suporte e alimentícia são processados por indústrias químicas. Os investimentos para indústrias desse segmento tem sido vultuosos com grande capacidade de geração de postos de trabalho e o retorno financeiro proporcionado tem grande relevância no cenário econômico nacional. Conforme destacam [Costa e Silva \(2012\)](#) a indústria química tem uma importante posição internacional, ocupando em 2010 o sétimo lugar no *ranking* mundial em faturamento, com US\$130 bilhões, tendo ultrapassado países como Itália e Reino Unido.

A classificação peculiar da indústria abordada neste estudo é agroquímica, que atua na produção de defensivos agrícolas. Tratamos especificamente do problema de produção na linha de fertilizantes foliares líquidos. A estrutura produtiva para os produtos desta linha têm como característica a produção dos lotes de misturas por bateladas e, o processamento é exclusivo em reatores com capacidade instalada bem definida, em cada período. O armazenamento dos lotes produzidos em cada é feito em tanques de armazenamento multipropósito, também com capacidade limitada. As etapas de produção e armazenamento na linha configuram o estágio I da produção. O estágio II, integrado ao estágio I compreende a linha de envase, onde as misturas são envasados, dando origem aos produtos finais. A empresa em questão conta com um sistema gerencial integrado para o planejamento de recursos para produção - o *Material Resource Planning (MRP-II)*⁴ e grande parte dos processos de produção são automatizados e controlados através do software gerencial.

Nesta dissertação de mestrado, após descrição e caracterização dos processos de produção da linha de fertilizantes foliares líquidos, elaboramos um modelo matemático de otimização

⁴ Sistema que permite que as empresas avaliem as implicações de demanda futura nas áreas financeira e de engenharia, assim como as necessidades de materiais.

inteira mista com o propósito de obter um plano de produção para esta linha, nos estágios integrados I e II num horizonte de planejamento definido. O plano de produção obtido para o estágio I tem o objetivo de apoiar as decisões sobre quais misturas serão produzidas e as respectivas quantidades, definindo cada reator para produção e qual tanque de transferência alocará as misturas produzidas nos reatores. A produção das misturas no estágio I está diretamente vinculada à demanda de produtos por período que deverão ser envasados no estágio II, respeitando as capacidades limitadas de recursos disponíveis. O modelo matemático obtido para este problema teve como base modelos da literatura de dimensionamento e sequenciamento de lotes de problemas que possuem características similares a este como [Martins \(2017\)](#), [Baldo, Santos e Morabito \(2002\)](#) e [Camargo, Toledo e Almada-Lobo \(2012\)](#). Testes computacionais foram realizados considerando duas instâncias geradas com base em dados reais para validar as soluções obtidas por meio do modelo proposto.

Na realidade, a prática da empresa para a etapa de produção, compreende decisões tomadas com base na demanda anos anteriores e projeções levantadas pelo setor de vendas com base no cenário econômico para o período. Através da elaboração de um modelo matemático para o problema, buscamos fornecer uma alternativa de melhoria para os processos de produção através do dimensionamento e sequenciamento dos lotes. Algumas dificuldades pertinentes são o curto horizonte de programação e a atualização diária da demanda, com produtos entrando com alta prioridade na produção, devido a necessidade de alguns clientes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no **Capítulo 2**, abordamos uma revisão da literatura sobre o tema discutido e tratado nesta dissertação. No **Capítulo 3** sintetizamos a descrição e abordagem do problema, além da elaboração e definição do modelo matemático. O **Capítulo 4** apresenta os resultados retornados pelo modelo quando submetido a duas instâncias geradas através de dados reais e posterior discussão destes resultados. Por fim, o **Capítulo 5** traz a síntese da proposta deste projeto através dos resultados obtidos e perspectivas para trabalhos futuros.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Entre as questões envolvidas na área de produção e manufatura, encontra-se o problema de dimensionamento de lotes, que há algum tempo desperta interesse entre pesquisadores e também gestores da produção. A motivação pelo interesse no problema de dimensionamento de lotes vem da imprescindível questão fim de uma empresa: dimensionar o tamanho dos lotes que serão produzidos de modo a obter o máximo lucro possível com a atividade produtiva, atendendo a demanda solicitada e minimizando todos os custos envolvidos no processo. Para isto é crucial a implementação de uma gestão eficiente que permita diminuir perdas com insumos utilizados no processo além da redução dos custos produtivos, entre os quais estão os custos de preparação, manutenção, mão-de-obra, estocagem, horas extras, subcontratação, entre outros.

Em relação a estrutura dos produtos por exemplo, as possibilidades abrangem a estrutura de único nível ou monoestágio ,ou ainda, a estrutura de múltiplos níveis ou multiestágio. No primeiro tipo de estrutura, a produção de um item não depende de itens intermediários, sendo possível a produção de um único item ou múltiplos itens, sob demanda estacionária ou demanda dinâmica e sendo produzidos em uma única máquina ou em máquinas paralelas distintas. Já no segundo tipo de estrutura, a produção de um produto final é encadeada por níveis onde o produto final é composto a partir de subprodutos ou itens componentes que integrados constituirão o produto acabado.

Conforme [Karimi, Ghomi e Wilson \(2003\)](#), a complexidade dos problemas de dimensionamento de lotes depende dos recursos levados em consideração ao tratar o problema. Destacam os autores [Karimi, Ghomi e Wilson \(2003\)](#) que algumas características são fundamentais para elaboração de um modelo matemático para um problema de dimensionamento de lotes, como:

- Determinação do horizonte de planejamento, que compreende o período de produção;
- Número de produtos/itens que serão produzidos;

- Restrições de capacidade ou recursos, que determinam a limitação física, que pode ser de matéria-prima, mão-de-obra, tempo e processamento de máquina;
- Deteriorações de itens sujeitos ao tempo de estocagem;
- Demanda de produtos, que pode ser interna no caso de itens componentes ou externa, solicitada por clientes;
- Estrutura de preparação, considerando tempos de *setup* e custos atrelados ao preparo para produção;
- Estocagem mínima ou estoque de segurança, para atendimento de demandas emergenciais;

Sobre o horizonte de planejamento, que compreende o período para o planejamento da produção, é considerado na literatura como finito ou infinito, podendo ser discretizado, caso em que é finito com um número de períodos definido ou contínuo, sem uma divisão temporal em intervalos. No caso discreto, os períodos considerados no plano de produção, podem compreender grandes intervalos de tempo, permitindo a produção de vários itens por período ou macropériodo configurando um modelo *big bucket*, ou ainda, intervalos de tempo curtos em que há produção de um único item (ou no máximo dois itens, dependendo do problema), chamado de modelo *small bucket*.

Sobre o número de produtos, há problemas que consideram a produção de um único item durante os períodos e também há problemas que consideram a produção de múltiplos itens dentro de cada período. A produção pode ocorrer em uma única máquina ou em máquinas paralelas, que podem ser idênticas ou distintas.

Considerando recursos limitados, como em [Trigeiro, Thomas e McClain \(1989\)](#), há restrição de capacidade para praticamente todos os recursos como mão-de-obra, matéria-prima e capacidade de máquina, incorrendo em custos adicionais no caso de eventuais aumentos necessários para produção. Em [Wagner e Whitin \(1958\)](#), as limitações de recursos são infinitas.

Itens em estoque, ficam sujeitos a deteriorações produzidas pelo tempo e podem incorrer em custos adicionais de depreciação, sendo de suma importância a manutenção de níveis de estoque que não ocasionem tais custos.

A demanda para produtos é externa quando um determinado produto é vendido e deve ser produzido, entrando portanto como item no planejamento da produção. No caso de demanda interna, um item deve ser produzido para a elaboração de outro item, configurando assim um item componente.

Na elaboração de modelos para problemas de programação da produção passaram a ser consideradas ainda abordagens que integram outros aspectos fundamentais destacados em linhas de produção, em relação aos recursos envolvidos no planejamento da produção. Destacamos a sequência de produção de um produto entre períodos consecutivos, sendo que há modelos que

utilizam a preservação do estado de preparação e modelos que não consideram esta preservação do estado de preparação. Nos modelos que utilizam a preservação do estado de preparação, a produção de um item no período t após a produção desse mesmo item no período $t - 1$ é iniciada sem qualquer preparo na linha, utilizando-se assim da manutenção de estado da linha. Já em modelos que não consideram a preservação do estado de preparação para um mesmo item produzido em períodos consecutivos, num período subjacente a outro, ocorre nova preparação no início do período, acarretando assim aumento dos custos de preparação além de desperdício da capacidade produtiva, gerando eventualmente infactibilidade em planos de produção. Nestes modelos, sempre no início de cada período, deve ocorrer a preparação da linha para a produção de um item já produzido no período anterior (ARENALES *et al.*, 2007).

Em relação aos custos envolvidos no processo de produção, o custo de preparação das máquinas, atrelados ao tempo de preparação, pode ser influenciado e alterado conforme a sequencia produtiva executada. Se os custos de preparação forem iguais, independente do produto que foi produzido pela última vez, então a sequência é independente do tempo de preparação. Em problemas que o custo de preparação de máquinas é diferente devido a sequencia de itens produzidos, pois o último item manufaturado interfere no tempo de preparação para o item seguinte, a sequência é dependente do tempo de preparação (COPIL *et al.*, 2016).

Ao longo do tempo, os problemas de produção e seus respectivos sistemas produtivos passaram a ser observados e tratados com ênfase às características peculiares de cada um, estruturando modelos realistas e precisos para o dimensionamento de lotes. Mesmo com a dificuldade de implementação e a não garantia de se obter soluções de boa qualidade em tempos computacionais satisfatórios, vários problemas foram discutidos e devidamente tratados na literatura.

Um dos primeiros modelos de dimensionamento de lotes abordados e descritos pela literatura é o modelo *Economic Order Quantity (EOQ)*, desenvolvido por Harris (1913) que estabeleceu um limite máximo para a produção dos lotes, atrelados aos custos de mão-de-obra, matéria-prima e custos indiretos e também um limite mínimo estabelecido pelos custos de preparação, dimensionando assim a produção dos lotes. Conforme destaca Karimi, Ghomi e Wilson (2003) "O EOQ equilibra o custo de instalação e o custo de manutenção do estoque. No modelo EOQ, a demanda é conhecida com uma taxa estacionária e o horizonte de planejamento é infinito.". O intervalo de fabricação para o modelo proposto foi útil somente na medida em que nos permite efetuar o mínimo de estoque seguro, ou menor quantidade que o estoquista pode permitir que seu estoque diminua com a entrada de novas ordens de produção.

Posteriormente, novos modelos foram propostos atendendo a dimensões mais realísticas dos processos produtivos com a implementação de novos parâmetros, recursos e variáveis aos modelos. Conforme destaca Arenales *et al.* (2007) o primeiro problema de planejamento da produção a se considerar o dimensionamento de lotes com demanda dinâmica na literatura foi proposto por Wagner e Whitin (1958), que reúne características como a permissão da possibili-

dade de demandas por um único item, sem restrição de capacidade com custos de estocagem e preparação para a produção num horizonte de planejamento finito que varia ao longo de T períodos de tempo. Este modelo busca minimizar os custos de preparação e estoque, satisfazendo a demanda conhecida em todos os períodos. O modelo proposto por [Whitin \(1957\)](#), que considera a chamada "fórmula da raiz quadrada" para determinação do tamanho lote econômico sob o pressuposto de demanda constante antecedeu o modelo de [Wagner e Whitin \(1958\)](#) com demanda dinâmica. O algoritmo que resolve de forma mais eficiente o modelo sob demanda dinâmica segue o paradigma de programação dinâmica conforme observa [Wagner e Whitin \(1958\)](#).

A diversidade de problemas envolvendo dimensionamento de lotes é bastante ampla no âmbito da representatividade de problemas reais. Em geral, na modelagem matemática desses problemas recairemos sobre modelos de Programação Inteira (IP) ou Programação Inteira Mista (MIP). Em modelos de IP as variáveis envolvidas nos problemas assumem valores inteiros, já nos problemas de MIP as variáveis assumem valores inteiros e reais conforme destacado por [Arenales et al. \(2007\)](#):

"problemas de programação inteira e combinatória são resolvidos por *métodos ótimos (exatos)*, que fornecem uma solução ótima; por *algoritmos aproximados*, que garantem a distância máxima entre o valor da solução sub-ótima encontrada e o valor ótimo; ou por métodos heurísticos, que, em geral, fornecem uma solução sub-ótima, sem conhecimento da qualidade desta em relação a uma solução ótima."

Segundo [Karimi, Ghomi e Wilson \(2003\)](#), outras variantes do problema de dimensionamento de lotes e programação da produção sob demanda determinística e de nível único ou monoestágio foram propostos em problemas de dimensionamento de lotes como o *Capacitated Lot Sizing Problem (CLSP)*. Posteriormente, passou a se considerar também a integração com o sequenciamento dos lotes como nos casos dos problemas *Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem (DLSP)*, *Continuous Setup Lot Sizing Problem (CSLP)*, *Capacitated Lot Sizing Problem with Sequence Dependent Setup Costs (CLSD)*, *Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem (PLSP)* e *General Lot Sizing and Scheduling Problem (GLSP)*. Estes problemas, com seus respectivos modelos matemáticos elaborados através principais características inerentes a cada um, explicando as diferenças entre cada modelo, foram sintetizados e descritos por [Drexel e Kimms \(1997\)](#), com o propósito de fornecer algumas recomendações para as primeiras leituras. Posteriormente, [Copil et al. \(2016\)](#), revisou estes problemas dinâmicos, determinísticos e capacitados para melhor embasar pesquisas, olhando para o viés histórico do desenvolvimento científico e novas tendências em problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes. A seguir, apresentamos características dos problemas acima supracitados.

Capacitated Lot Sizing Problem (CLSP):

- produção de múltiplos itens;
- restrição de capacidade para produção;

- demanda dinâmica;
- modelo big bucket.

Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem (DLSP):

- macroperíodos do CLSP divididos em microperíodos, isto é, pequenos intervalos de tempo que duram turnos ou horas;
- política de produção "tudo ou nada": há produção de um item utilizando a capacidade total da linha produtiva ou não há produção;
- modelo small bucket. Neste tipo de modelo é permitido a produção de apenas um item por período (ou no máximo dois itens, dependendo do problema).

The Continuous Setup Lot Sizing Problem (CSLP):

- modelo semelhante ao DLSP;
- permite no máximo uma troca entre diferentes produtos por período e mantém o estado de preparação de máquina para períodos consecutivos;
- pode ser transformado num modelo com macroperíodos ([FLEISCHMANN, 1994](#));

Capacitated Lot Sizing Problem with Sequence Dependent Setup Costs (CLSD):

- horizonte de programação dividido em macroperíodos;
- permite a conservação do estado de preparação de máquina, mas limita a quantidade de lotes produzidos por período através de um parâmetro;
- há no máximo uma preparação para cada produto dentro do macroperíodo ;
- estrutura de produto monoestágio e produção em uma única máquina ([HAASE, 1996](#));

Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem (PLSP):

- considera o sequenciamento da produção para até dois itens consecutivos produzidos no período;
- o estado de preparação da máquina ao final de um período constitui uma variável de decisão;
- busca otimizar a capacidade de produção para períodos consecutivos;

- semelhante ao CSLP quando considera que períodos inativos entre dois lotes de um mesmo item não incorrem em custos de preparação adicionais.

General Lot Sizing and Scheduling Problem (GLSP):

- utilização de macroperíodos nas formulações;
- os lotes são sequenciados, isto é, possuem um número de posição para definir uma sequência de produção no período, além disso possui um número máximo de lotes produzidos por período restrito por um parâmetro (assim como no CLSD);
- múltiplos itens podem ser produzidos num período;

Em [Trigeiro, Thomas e McClain \(1989\)](#) foi discutido o problema de dimensionamento de lotes monoestágio capacitado (*CLSP*) considerando os tempos de preparação não nulos. No artigo enfatizam:

"A importância de contabilizar adequadamente o efeito dos tempos de preparação sobre o uso da capacidade foi destacada recentemente pela crescente atração da fabricação Just-in-time (JIT)".

Com a utilização do mecanismo JIT, há uma dinamização da programação da produção, já que o conceito deste sistema viabiliza a chamada *produção por demanda*, onde vende-se o produto para depois adquirir a matéria-prima e posteriormente manufaturá-lo. Dessa forma, faz-se necessária a adoção de medidas que minimizem o tempo de preparação e manutenção em linhas de montagem, além de exigir confiabilidade e eficiência de fornecedores, que capacitados e treinados, devem honrar seus compromissos com entregas pontuais de lotes de tamanho estratégico ([TRIGEIRO; THOMAS; MCCLAIN, 1989](#)).

O problema discreto de dimensionamento e programação de lotes com sequência dependente e custos de preparação também, foi abordado por [Fleischmann \(1994\)](#), que considerou o problema monoestágio de programar a produção de múltiplos itens em uma única máquina para atender uma demanda dinâmica conhecida e minimizar a soma dos custos de estocagem e preparação em sequências dependentes do tempo de preparação. Foi formulado como um problema do *caixeiro viajante (travelling salesman)* com janelas de tempo, com o propósito de apresentar um novo procedimento para determinar limites inferiores usando relaxação lagrangeana também como uma heurística, em face da não previsibilidade no atendimento das demandas dinâmicas pelos sistemas de programação da produção baseados em Material Requirement Planning (MRP).¹

Em relação ao problema estudado por [Fleischmann \(1994\)](#), o artigo de [Haase \(1996\)](#), que também considera um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes monoestágio

¹ Sistema lógico de cálculo que converte a previsão de demanda em programação da necessidade de seus componentes.

com sequência de produção dependente dos custos de preparação, trouxe a proposta de que o estado de preparação possa ser preservado durante o tempo de inatividade e, dessa forma, estaria mantido para períodos consecutivos. Este novo problema é resolvido através de uma heurística que aplica regra de prioridade, com os valores de prioridade sendo afetados por dois parâmetros significativos. A partir destes valores, realiza-se uma busca no espaço de parâmetros para se obter soluções de baixo custo. Para se estabelecer a qualidade da solução através heurística aplicada, o modelo foi submetido a instâncias pequenas, e a solução ótima foi comparada com as soluções retornadas após a aplicação da heurística, mostrando que a qualidade da solução heurística é aceitável.

Os problemas de programação da produção envolvendo dimensionamento de lotes, que, em síntese, fornecem o que produzir e o quanto produzir de um determinado produto com o objetivo de minimizar os custos, evidentemente reúnem diversas outras características além das que foram discutidas acima.

Os autores [Billington, McClain e Thomas \(1983\)](#) trouxeram em sua pesquisa a abordagem de problemas de programação da produção multiestágio com capacidade limitada. Mais tarde, [Maes, McClain e Wassenhove \(1991\)](#) apresentaram as primeiras heurísticas capazes de resolver problemas de dimensionamento de lotes multiestágio com restrições de capacidade em mais de um nível.

Ainda há que se considerar, nas linhas de montagem, a possibilidade de problemas que envolvam a utilização de máquinas paralelas, de forma que o processamento simultâneo de um mesmo item ou de múltiplos itens pode ocorrer num determinado período ao longo de um horizonte de planejamento. Um problema envolvendo dimensionamento de lotes capacitado com o uso de máquinas simples e máquinas paralelas foi abordado por [James e Almada-Lobo \(2011\)](#) combinando heurísticas de propósito geral com metaheurísticas relacionadas ao modelo de MIP definido pelo problema de dimensionamento e programação de lotes capacitado com uso de máquinas paralelas e tempos de preparação dependentes da sequência.

Buscando compreender o modelo apresentado, motivado pela descrição do problema objeto desta dissertação ambos descritos no [Capítulo 3](#), apresentaremos nas seções seguintes os modelos de dimensionamento de lotes monoestágio e multiestágio.

2.1 Dimensionamento de lotes monoestágio

O sistema de produção monoestágio possui como características principais a produção de um único item ou múltiplos itens, em uma máquina ou várias máquinas, de modo que o produto final obtido não passa por etapas de processamento ao longo do processo produtivo, ou seja, não há itens componentes ou produtos intermediários que comporão o produto final.

Especificamente, tratando do problema de dimensionamento de lotes monoestágio, os

modelos podem admitir ou não restrição de capacidade além da hipótese de se considerar tempos de preparação. Outras razões suscitam grande interesse na abordagem de estudos de problemas envolvendo dimensionamento de lotes monoestágio, segundo [Bahl, Ritzman e Gupta \(1987\)](#):

"A motivação para estudar a classe de problemas de dimensionamento de lotes monoestágios está no fato de que, além de sua potencialidade de aplicações, o problema monoestágio aparece como um subproblema em diversos casos, de modo que, implementações eficientes dos bons algoritmos disponíveis melhoram o desempenho de algoritmos projetados para problemas mais gerais".

Abordaremos a seguir alguns problemas descritos na literatura que descrevem as seguintes subdivisões do problema de dimensionamento de lotes monoestágio: produção de um único item ou múltiplos itens, considerando hipóteses de restrição de capacidade e tempos de preparação.

2.1.1 Dimensionamento de lotes monoestágio - único item

O problema de dimensionamento de lotes monoestágio sob produção de um único item atende especificamente à concepção de se determinar o tamanho dos lotes de produção em cada período ao longo de um horizonte de planejamento, de modo a minimizar a soma dos custos de preparação e estocagem, atendendo rigorosamente a demanda solicitada no período. Há que se considerar ainda a possibilidade de inserção de restrições no modelo quanto à capacidade produtiva sob demanda estacionária ou demanda dinâmica.

O modelo descrito a seguir, apresentado por [Araujo \(1999\)](#) refere-se ao problema de dimensionamento de lotes monoestágio com produção de um único item, sem restrição de capacidade. Para tal considere:

Parâmetros:

c_t : custo unitário de produção no período t ;
 s_t : custo de preparação para a produção no período t ;
 h_t : custo unitário de estocagem no período t ;
 d_t : demanda no período t ;
 M : número grande;
 T : número de períodos.

Variáveis:

X_t : quantidade de unidades produzidas no período t ;
 I_t : quantidade de unidades estocadas no período t ;

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{se há produção no período } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Índice:

$$t = \{1, \dots, T\}.$$

Formulação do problema:

$$\min \quad z = \sum_{t=1}^T (c_t X_t + h_t I_t + s_t Y_t) \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad I_{t-1} + X_t - I_t = d_t \quad \forall t \quad (2.2)$$

$$X_t - M Y_t \leq 0 \quad \forall t \quad (2.3)$$

$$X_t, I_t \geq 0 \quad \forall t \quad (2.4)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \quad (2.5)$$

A função objetivo (2.1) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação. As restrições (2.2) representam o balanceamento de estoque em cada período. As restrições (2.3) garantem que há produção somente se o custo de preparação é considerado e, por fim, as restrições (2.4) são de não negatividade e as restrições (2.5) são binárias. O estoques inicial e final considerados são nulos.

Como já destacado, este, que é considerado o mais simples problema de dimensionamento de lotes, foi resolvido com um algoritmo de programação dinâmica proposto por [Wagner e Whitin \(1958\)](#).

Considerando a restrição de capacidade, podemos reescrever um novo problema de programação linear inteira com a inserção do conjunto de restrições dado por (2.8), que limitam a capacidade de produção em cada período ao longo de um horizonte de planejamento. Para o modelo descrito, considere:

Parâmetros:

c_t : custo unitário de produção no período t ;

s_t : custo de preparação para a produção no período t ;

h_t : custo unitário de estocagem no período t ;

b_t : tempo necessário para produzir uma unidade no período t ;

sp_t : tempo de preparação para a produção no período t ;

CAP_t : capacidade máxima em unidades de tempo para a produção no período t ;

d_t : demanda no período t ;

M : número muito grande;

N : número de itens.

Variáveis:

X_t : quantidade de unidades produzidas no período t ;

I_t : quantidade de unidades estocadas no período t ;

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{se há produção no período } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Índice:

$$t = \{1, \dots, T\}.$$

Formulação do problema:

$$\min \quad z = \sum_{t=1}^T (c_t X_t + h_t I_t + s_t Y_t) \quad (2.6)$$

$$\text{sujeito a:} \quad I_{t-1} + X_t - I_t = d_t \quad \forall t \quad (2.7)$$

$$b_t X_t + s p_t Y_t \leq CAP_t \quad \forall t \quad (2.8)$$

$$X_t - M Y_t \leq 0 \quad \forall t \quad (2.9)$$

$$X_t, I_t \geq 0 \quad \forall t \quad (2.10)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \quad (2.11)$$

A função objetivo (2.6) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação. As restrições (2.7) representam o balanceamento de estoque e demanda por período. O bloco de restrições dado por (2.8) limitam a capacidade produtiva em cada período. As restrições (2.9) garantem o início da produção, somente se há preparação, de modo que as restrições dadas por (2.10) são de não negatividade e as restrições (2.11) são binárias.

2.1.2 Dimensionamento de lotes monoestágio - múltiplos itens

O problema de dimensionamento de lotes monoestágio que envolve produção de múltiplos itens, atende ao propósito de minimização da soma dos custos de produção, preparação de máquina e estocagem para vários itens que podem ser produzidos num mesmo período ao longo de um horizonte de planejamento, atendendo a demanda solicitada de acordo com as restrições de capacidade.

A formulação do modelo apresentada é referente ao problema *CLSP* proposto por Trigeiro, Thomas e McClain (1989).

Parâmetros:

c_{it} : custo unitário de produção do item i no período t ;

s_{it} : custo de preparação para a produção do item i no período t ;

h_{it} : custo unitário de estocagem do item i durante o período t ;

b_i : tempo necessário para produzir uma unidade do item i ;
 sp_i : tempo de preparação de máquina para a produção do item i ;
 CAP_t : tempo disponível de máquina para a produção no período t ;
 d_{it} : demanda do item i no período t ;
 M : número muito grande.

Variáveis:

X_{it} : quantidade de unidades produzidas do item i no período t ;
 I_{it} : quantidade de unidades estocadas do item i ao final do período t ;

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se há produção do item } i \text{ no período } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Índices:

$$i = \{1, \dots, N\}$$

$$t = \{1, \dots, T\}$$

Formulação do problema:

$$\min z = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it} X_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N s_{it} Y_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N h_{it} I_{it} \quad (2.12)$$

$$\text{sujeito a:} \quad I_{i(t-1)} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \quad \forall i, t \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^N b_{it} X_{it} + \sum_{i=1}^N sp_{it} Y_{it} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (2.14)$$

$$X_{it} - MY_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (2.15)$$

$$X_{it}, I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (2.16)$$

$$I_{i0} = 0 \quad \forall i \quad (2.17)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i, t \quad (2.18)$$

Para este modelo a função objetivo (2.12) minimiza a soma dos custos de produção, preparação de máquina e estoque. As restrições (2.13) são referentes ao balanceamento de estoque, de modo que, a produção de itens do tipo i durante o período t somada a quantidade de itens em estoque do tipo i do período anterior atende a demanda dos itens do tipo i no período t mais a quantidade que fica em estoque nesse período. As restrições (2.14) garantem que a produção de cada item i é limitada pela capacidade disponível levando em consideração o tempo disponível para produção de cada item e o tempo de preparação de máquinas durante todos os períodos em que há produção. As restrições (2.15) garantem que há produção de um item i no período t somente se a máquina está preparada. As restrições (2.16) são referentes a não negatividade das variáveis e as equações (2.17) determinam que o estoque inicial é nulo para todos os itens produzidos. As restrições (2.18) indicam ainda o domínio das variáveis Y_{it} .

Destacamos ainda que neste modelo não são permitidas horas extras laborais, porém, podem ser facilmente incluídas no modelo.

2.2 Dimensionamento de lotes multiestágio

O problema de dimensionamento de lotes multiestágio é caracterizado por uma estrutura de produção multinível em que itens primários e intermediários (desde que sejam necessários), são agregados para a composição de um produto final, constituindo uma estrutura de interdependência entre níveis. A estrutura de múltiplos níveis para manufatura de produtos pode ser caracterizada entre montagem e geral: na primeira um item possui um único item sucessor e na segunda um item tem mais de um item sucessor ([ARENALES *et al.*, 2007](#)). A [Figura 1](#) representa as possíveis estruturas de um produto.

Figura 1 – Estruturas de produto

Fonte: [Arenales *et al.* \(2007\)](#).

No trabalho publicado por [Maes, McClain e Wassenhove \(1991\)](#), foram apresentadas as primeiras heurísticas capazes de resolver o problema de dimensionamento de lotes multiestágio com restrição de capacidade em mais de um nível, elucidando que a possibilidade de solução para uma grande variedade de problemas reais, sobretudo os que incluem os tempos de preparação, configura viabilidade de solução na classe dos problemas NP-completo ([MAES; MCCLAIN; WASSENHOVE, 1991](#)). Os referidos autores destacam que os problemas de dimensionamento de lotes multiestágio abordados na literatura são simplificações de situações reais, e dessa forma o modelo geral pode ser apresentado com as seguintes características: a solicitação de uma demanda externa para N itens sob um horizonte de planejamento finito de T períodos, não permite atrasos de itens finais e a demanda de um item jamais pode ser reprimida por falta de itens componentes, considerando limites de capacidades para os recursos (sejam de máquinas, mão-de-obra, matérias-primas, etc...) e disponibilidade de itens componentes na fabricação de produto. Os custos e tempos de produção decorrentes das etapas de montagem de um produto

na estrutura multinível também integram o conjunto de restrições do modelo, sendo que o objetivo é minimizar tais custos cumprindo as restrições impostas pelo modelo. Para o modelo matemático elaborado por [Maes, McClain e Wassenhove \(1991\)](#), consideremos os seguintes conjuntos, parâmetros e variáveis:

Conjuntos:

N : quantidade de itens ($i = \{1, \dots, N\}$);
 M : quantidade de máquinas ($m = \{1, \dots, M\}$);
 T : número de períodos ($t = \{1, \dots, T\}$);
 $S(i)$: conjunto de sucessores de i ($S(i) = \emptyset$ se i é um item final);
 K_m : conjunto de itens produzido pelo recurso m ;
 M : valor muito grande.

Parâmetros:

sc_i : custo de preparação relativo ao item i ;
 h_i : custo de estoque unitário do item i ;
 r_{ij} : número de unidades do item i necessárias para produzir uma unidade do item j ;
 d_{it} : demanda externa do item i no período t ;
 a_i^k : capacidade necessária do recurso k para produzir uma unidade do item i ;
 A_i^k : tempo de preparação do recurso k para produzir uma unidade do item i ;
 b_i : tempo de preparação para a produção do item i ;
 CAP_{mt} : capacidade de produção da máquina m no período t .

Variáveis de decisão:

X_{it} : quantidade unitária do item i produzida no período t ;
 I_{it} : número de unidades em estoque do item i ao final período t ;
 $Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer uma preparação para produção do item } i \text{ no período } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Formulação do modelo:

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (sc_i \cdot Y_{it} + h_i \cdot I_{it}) \quad (2.19)$$

$$\text{sujeito a: } I_{i,(t-1)} + X_{it} - I_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \cdot X_{jt} \quad \forall i, t \quad (2.20)$$

$$\sum_{i \in K_m} (a_i^k \cdot X_{it} + b_i \cdot Y_{it}) \leq CAP_{mt} \quad \forall m, t \quad (2.21)$$

$$X_{it} \leq M \cdot Y_{it} \quad \forall i, t \quad (2.22)$$

$$X_{it}, I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (2.23)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i, t \quad (2.24)$$

A função objetivo dada por (2.19) visa minimizar os custos de preparação e de estoque de produto final. O conjunto de restrições dado por (2.20) controla o balanceamento de estoque entre demanda externa, itens produzidos, demanda interna e estoque de itens em cada período. Já as restrições (2.21) limitam a produção através da capacidade de recursos (ou horas de máquina) disponíveis em cada período. As restrições (2.22) condicionam a produção à preparação para produção de cada item para todos os períodos t . As variáveis de preparação são binárias (2.24) e as demais são reais e positivas (2.23).

Em relação ao modelo proposto para o problema de dimensionamento de lotes multiestágio capacitado, os autores [Maes, McClain e Wassenhove \(1991\)](#) discutem a viabilidade da implementação de heurísticas, fazendo posteriormente um comparativo da qualidade das soluções obtidas com o propósito de avaliar a complexidade do problema em questão.

2.3 Modelos de dimensionamento e sequenciamento de lotes

A abordagem de problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes compreende diferentes contextos, que conforme cada situação, geram modelos com características e particularidades diferentes. Alguns trabalhos na literatura abordaram características que se assemelham a alguns aspectos relacionados ao problema em estudo nesta dissertação. Entre esses problemas, temos os que definiram modelos matemáticos que não consideram o estado de preservação de máquina e os custos de tempo de preparação entre períodos consecutivos. Como destaca [Arenales et al. \(2007\)](#), em modelos sem preservação do estado de preparação, ao final de um período não ocorrem trocas ou preparações para a produção de um novo item no período imediatamente consecutivo a este. É necessário portanto, um novo preparo no início de períodos consecutivos, incorrendo em tempos adicionais no início do período para a preparação da produção de um novo item. Já em modelos com preservação do estado de preparação, considera-se eventualmente a possibilidade de ocorrer trocas na produção de itens entre períodos consecutivos, e desta forma

ao final de um período, utiliza-se uma parcela do tempo para deixar a máquina preparada para produção de um novo item no período seguinte.

Em [Ferreira, Morabito e Rangel \(2009\)](#) é apresentado um modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes e planejamento da produção que recai num problema de programação inteira mista que determina o tamanho do lote a ser produzido com sequenciamento da produção, que tem custos e tempos dependentes da sequência. As etapas de produção constituem: preparação líquida (1º estágio) e engarrafamento (2º estágio), sendo que os dois estágios são integrados e sincronizados. Para a solução do modelo, foram propostas estratégias de relaxamento e também foi utilizada uma heurística do tipo *relax-and-fix*.

No trabalho apresentado por [Baldo et al. \(2014\)](#), apresenta-se um problema de planejamento da produção em indústrias cervejeiras, considerando um tanque de fermentação/maturação e múltiplas linhas de envase com a produção caracterizada por uma estrutura de dois estágios, em que o primeiro corresponde à preparação do líquido nos tanques e o segundo ao envase na linha de envasamento. Os dois estágios são acoplados e nos testes realizados após a elaboração do modelo foram utilizados dados reais. Devido a dificuldade de solução do modelo, foi implementada uma heurística resolutive do tipo *relax-and-fix*.

Na tese elaborada por [Martins \(2017\)](#), discute-se o problema de otimização da programação da produção de bebidas à base de frutas (néctares e refrescos) que constitui um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes multiestágio e multi-itens. Dividido em dois estágios sincronizados, no qual o primeiro estágio compreende a produção das bebidas em máquinas paralelas distintas, denominadas tanques preparatórios, e o segundo estágio, concatenado ao primeiro, constitui a linha de envase. Foram propostos, além do método *branch-and-cut* do do CPLEX, métodos heurísticos baseados na decomposição do problema em estágios e em modelos aproximados para o problema, sendo que heurísticas do tipo *relax-and-fix* e *fix-and-optimize* foram utilizadas para resolver o problema integrado, destacando também o uso de busca em vizinhança.

Os autores [Camargo, Toledo e Almada-Lobo \(2012\)](#) elaboraram em seu artigo três novos modelos para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes multiestágio, abordado em diversos problemas da indústria de processos. O problema trata do compartilhamento de um recurso de produção contínuo, ou quase contínuo, que gera itens finais na última etapa de manufatura, havendo sincronização entre os estágios de produção. O primeiro modelo gerado é baseado no *GLSP*, com o horizonte de planejamento dividido em T períodos, com a discretização do tempo de produção. O segundo modelo é um híbrido entre a representação discreta-contínua do tempo. E, por fim, o terceiro modelo é baseado numa representação contínua do tempo. A geração dos resultados foi obtida através da aplicação de testes computacionais em instâncias pequenas submetidos a um *solver* para MIP de última geração.

A compreensão do problema, objeto de estudo desta dissertação, torna-se mais simplificada quando tratamos alguns dos modelos já supracitados. Logo, na [Subseção 2.3.1](#) e

Subseção 2.3.2 evidenciaremos tais modelos com o propósito definido.

2.3.1 Modelo geral de dimensionamento e sequenciamento de lotes

Destacaremos nesta seção o modelo *GLSP* proposto por Drexl e Kimms (1997), cujas principais características foram descritas anteriormente. Este modelo geral de dimensionamento e programação de lotes, *big bucket*, evidencia a subdivisão dos macroperíodos em microperíodos de tamanhos variáveis e sequenciados. O pressuposto fundamental deste modelo é que o usuário restrinja o número de lotes por período, definindo assim um novo parâmetro para o modelo, e dessa forma o tamanho do lote é definido pela quantidade de microperíodos em que um determinado item foi produzido. Considere então os seguintes parâmetros e variáveis para o referido modelo:

Parâmetros:

- sc_i : custo de preparação para a produção do item i ;
- h_i : custo unitário de estocagem do item i ;
- p_i : capacidade necessária para produzir uma unidade do item i ;
- CAP_t : capacidade disponível de máquina no período t ;
- d_{it} : demanda externa do item i no período t ;
- N_t : número máximo de lotes no período t ;

Variáveis:

- I_{it} : quantidade de unidades estocadas do item i ao final do período t ;
- Q_{io} : quantidade produzida para o item i no lote o ;

$$X_{io} = \begin{cases} 1, & \text{se há preparação para produção do item } i \text{ no lote } o \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y_{io} = \begin{cases} 1, & \text{se a máquina está preparada para produção do item } i \text{ no lote } n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Índices:

- $i = 1, \dots, I$;
- $t = 1, \dots, T$;
- $o = 1, \dots, O$.

$$F_t = 1 + \sum_{\tau=1}^{t-1} N_\tau$$

para denotar a primeira posição no período t , e

$$L_t = F_t + N_t - 1$$

para denotar a última posição no período t .

$$N = \sum_{t=1}^T N_t$$

representa o número total de posições e assim o número máximo de lotes que podem ser produzidos.

Formulação do problema:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^I \sum_{o=1}^O sc_i X_{io} + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T h_i I_{it} \quad (2.25)$$

$$\text{sujeito a:} \quad I_{it} = I_{i,(t-1)} + \sum_{o=F_t}^{L_t} Q_{io} - d_{it} \quad \forall i, t \quad (2.26)$$

$$p_i Q_{io} \leq CAP_t Y_{io} \quad \forall i, t, o = F_t, \dots, L_t \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{o=F_t}^{L_t} p_i Q_{io} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (2.28)$$

$$\sum_{i=1}^I Y_{io} \leq 1 \quad \forall o \quad (2.29)$$

$$X_{io} \geq Y_{io} - Y_{i,(o-1)} \quad \forall i, o \quad (2.30)$$

$$Y_{i,o} \in \{0, 1\} \quad \forall i, o \quad (2.31)$$

$$I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (2.32)$$

$$Q_{i,o}, X_{i,o} \geq 0 \quad \forall i, o \quad (2.33)$$

A função objetivo dada por (2.25) visa minimizar os custos de preparação e estocagem de itens. As restrições dadas por (2.26) controlam o balanceamento de estoque e produção de itens conforme demanda do período. As restrições (2.27) garantem que um item i está programado para ser produzido no lote o desde que a máquina esteja preparada para produção, e o conjunto de restrições dado por (2.28) delimitam a capacidade produtiva da máquina no período t . Temos ainda, que através das restrições (2.29) uma única máquina fica preparada para a produção de cada item para cada posição e por fim, as restrições (2.30) garantem que há produção na posição n , somente se, houver preparação entre posições consecutivas. Os conjuntos de restrições dados por (2.31), (2.32) e (2.33) indicam o domínio das variáveis.

O artigo Haase e Kimms (2000) propôs o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes monoestágio, produção em única máquina em que os tempos e os custos de preparação são dependentes da sequência de produção. Este modelo de programação inteira mista *large-bucket* formulado considera apenas sequências eficientes e o problema foi resolvido através do método de enumeração implícita ajustado *branch-and-bound* com a solução de instâncias de forma ótima e eficiente.

2.3.2 Modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes capacitado

O trabalho elaborado por Almada-Lobo *et al.* (2007) sobre o dimensionamento de lotes capacitado em máquina única com vários produtos com preparações dependentes da sequência, considera a produção de vários itens produzidos em uma única máquina com sequência dependente dos tempos e custos de preparação. Para este problema de planejamento da produção, é possível admitir no modelo a inserção de custos de preparação sempre que há mudança na produção de um produto para outro, já que estes procedimentos incorrem em tempos distintos (e custos proporcionais) tornando assim os tempos de preparação dependentes da sequência de produção com a incorporação de todas as características necessárias durante as transições entre períodos. O modelo proposto é referente ao problema *CLSP* com sequência dependente dos custos e tempos de preparação e *setup carryover*. Segundo Almada-Lobo *et al.* (2007), *setup carryover* ocorre quando um produto é o último a ser produzido num período e o primeiro no período seguinte, eliminando a necessidade de qualquer preparação no último período. Destaca-se ainda que há preservação do estado de preparação entre períodos consecutivos.

Para apresentar o modelo de dimensionamento de lotes monoestágio envolvendo múltiplos itens produzidos numa única máquina proposto por Almada-Lobo *et al.* (2007) com sequência-dependente dos custos e tempos de preparação e *setup carryover*, considere:

Parâmetros:

h_i : custo de estocagem de uma unidade de um produto i de um período para outro;

p_i tempo de produção de uma unidade do produto i ;

d_{it} : demanda para o produto i no final do período t ;

CAP_t : capacidade de máquina no período t (medida em unidades de tempo);

b_{ij} : tempo de preparação de máquina do produto i para o produto j ;

sc_{ij} : custo de preparação de máquina do produto i para o produto j ;

$M_{it} = \min \left\{ \frac{CAP_t}{p_i}, \sum_{u=t}^T d_{iu} \right\}$: limite superior da quantidade de produto i a ser produzido no período t .

Variáveis de decisão:

X_{it} : quantidade do produto i produzida no período t ;

I_{it} : quantidade em estoque do produto i ao final do período t ;

$T_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer uma preparação para produção do produto } j \text{ após o produto } i \text{ no período } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$\alpha_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se a máquina estiver preparada para o produto } i \text{ no início do período } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

V_{it} : (variável auxiliar) atribui o produto i ao período t .

Índices:

$i, j = 1, \dots, I$ com $i \neq j$ (número de produtos);

$t = 1, \dots, T$ (número de períodos).

Formulação do problema:

$$\min \quad \sum_i \sum_j \sum_t sc_{ij} T_{ijt} + \sum_i \sum_t h_i I_{it} \quad (2.34)$$

$$\text{sujeito a:} \quad I_{i,(t-1)} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \quad \forall i, t \quad (2.35)$$

$$\sum_i p_i X_{it} + \sum_i \sum_j \sum_t b_{ij} T_{ijt} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (2.36)$$

$$X_{it} - M_{it} (\sum_j T_{jit} + \alpha_{it}) \leq 0 \quad \forall i, t \quad (2.37)$$

$$\sum_i \alpha_{it} = 1 \quad \forall t \quad (2.38)$$

$$\alpha_{it} + \sum_j T_{jit} = \alpha_{i,(t+1)} + \sum_j T_{ijt} \quad \forall i, t \quad (2.39)$$

$$V_{it} + IT_{ijt} - (I - 1) - I\alpha_{it} \leq V_{jt} \quad \forall i, j \ (i \neq j), t \quad (2.40)$$

$$X_{it}, I_{it}, \alpha_{it}, V_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (2.41)$$

$$T_{iit} = 0 \quad \forall i \quad (2.42)$$

$$X_{it}, I_{it}, \alpha_{it}, V_{it} \geq \quad (2.43)$$

$$T_{ijt} \in 0, 1 \quad (2.44)$$

A função objetivo (2.34) minimiza a soma dos custos de preparação dependentes da sequência e dos custos de estocagem. As restrições (2.35) representam o balanceamento de estoque e as restrições (2.36) asseguram que o tempo total de produção e preparação em cada período não exceda a capacidade disponível. As restrições (2.37) garantem que um produto é produzido somente se a máquina estiver preparada para produção. As restrições (2.38) garantem que um único produto é processado no período e a máquina está preparada para produção no início do período. As restrições (2.39) asseguram um estado balanceado do estado de preparação de máquina deixando a máquina preparada para produção no próximo período, dessa forma, se nenhuma preparação for realizada no período t , o que acontece quando $T_{ijt} = 0$ para cada i e j , o estado de preparação de máquina é transportado do período $t - 1$ para o período $t + 1$. As restrições (2.41) impõem que há um único componente atribuído ligado a α de modo que as variáveis auxiliares valorizam o estado da máquina através de qualquer sequência excluindo assim a possibilidade de se obter soluções que não sejam viáveis. As restrições (2.41) indicam a não negatividade das variáveis e as restrições 2.42 é óbvia já que o tempo de preparação é considerado apenas quando ocorre transição entre produtos distintos num período. Por fim, as restrições (2.43) e (2.44) indicam o domínio das variáveis.

Para a resolução do CLSP os autores supracitados propõem uma heurística para encontrar boas soluções através de um limitante superior para o valor ótimo. A heurística proposta é

composta por cinco etapas nas quais as duas primeiras tentam encontrar uma solução factível inicial, enquanto as três últimas buscam melhorar a qualidade da solução e os resultados. O problema *CLSP* com sequência dependente dos custos e tempos de preparação e *setup carryover* já havia sido abordado por [Guptaa e Magnusson \(2005\)](#), tratado num problema real sobre uma fábrica de produtos abrasivos (rolos de lixa), destacando que a dificuldade em resolver-se problemas deste tipo incide no fato de que a capacidade é limitada, os custos de preparação são elevados (quanto maior o número de preparações, mais caro torna-se o processo de produção) e dependentes da sequência e os tempos de preparação são não nulos. Foram consideradas além da solução exata uma heurística para resolver problemas de grandes instâncias através de um procedimento em que se obtém um limitante inferior para a solução ótima com a realização de testes computacionais para avaliar a precisão entre diferentes relaxações lineares inferiores e a solução aproximada obtida pela heurística. A heurística mostrou-se mais eficiente quando no número de produtos produzidos é bastante superior ao número de períodos ao longo do horizonte de planejamento.

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E MODELAGEM

3.1 Descrição do problema

A presente dissertação é resultado do estudo desenvolvido em uma indústria química que atende ao setor de agrociências, produzindo tecnologia e desenvolvendo produtos e soluções para o ramo de agronegócios, sobretudo na área de nutrição mineral de plantas para diversificadas culturas.

A estrutura do parque fabril está implantada em uma área de 210 mil m^2 e a planta física conta com barracões segmentados de forma que os produtos manufaturados em cada barracão são segregados por categoria.

No barracão I, ilustrado na [Figura 2](#), são fabricados sobretudo fertilizantes foliares de natureza líquida, que abrangem uma linha diversificada de produtos, atendendo a uma demanda para os mais variados tipos de culturas das quais podemos citar: algodão, café, cana-de-açúcar, citros, feijão, soja, milho e hortifruti. Este barracão tem uma estrutura física segmentada por setores que são interligados e concentra basicamente as seguintes subdivisões:

- Estoque de matéria-prima (produto primário) e produtos de almoxarifado;
- Tanques de estoque de matéria-prima (subprodutos);
- Reatores;
- Tanques de envase e linha de envasamento (envasadoras);
- Setor de embalagem;
- Almoxarifado e setor de manutenção;
- Área para estoque estratégico;

- Plataforma de embarque para produto final e carregamento (logística integrada);
- Laboratório de análise e controle de qualidade.

No barracão II temos a produção de uma tecnologia desenvolvida pela empresa: trata-se de um revestimento líquido aditivo para fertilizantes sólidos que produzem um encapsulamento do grânulo com o propósito de diminuir perdas dos principais nutrientes presentes no adubo, que é composto basicamente de Nitrogênio (N), Fósforo (P) e Potássio (K), perdas essas que ocorrem durante o processo de adubação devido principalmente a fenômenos como: volatilização de amônia do adubo no solo para atmosfera, nitrificação e desnitrificação, no caso do nitrogênio; fixação e precipitação no caso do fósforo e lixiviação no caso do potássio. Além disso no barracão II há também produção de um produto foliar em pó (adjuvante) e também um setor fechado onde são produzidas embalagens que são utilizadas no envasamento dos produtos líquidos com capacidade de 20 litros (denominado bomba), da linha foliar da empresa.

No barracão III são produzidos adubos fertilizantes de natureza sólida sob a estrutura de grânulos, além de fertilizantes para solo com textura em pó e também um laboratório de desenvolvimento interno promovendo pesquisa e inovação.

A empresa conta ainda com uma estação de pesquisa agrônômica (barracão IV) onde são realizados testes de produtos em desenvolvimento.

Figura 2 – Layout da Indústria

Fonte: Elaborada pelo autor.

Destacamos que a linha de fertilizantes foliares concentra o maior volume de produtos manufaturados pela empresa, respondendo por aproximadamente 80% da produção gerada pelas vendas faturadas. Neste trabalho, dissertaremos sobre a produção da linha de fertilizantes foliares líquidos (produzidos no barracão I), descrevendo características de manufatura mais detalhadas

desses produtos. Daremos ênfase aos processos de produção, desde a definição de quais produtos serão produzidos e suas respectivas quantidades, além do sequenciamento da produção até a estocagem de produto final acabado.

3.1.1 Descrição e caracterização dos processos de produção

O processo de produção inicia-se a partir da demanda de um produto específico que é lançado via sistema pelo setor de vendas, que dispõe de um cadastro atualizado dos produtos disponíveis para produção. O setor comercial recebe o registro da venda do produto, que é agregado a outros eventuais pedidos que estejam empenhados para entrar na linha a partir do registro no sistema com um prazo de finalização de 5 dias úteis. O setor de Planejamento e Controle da Produção (PCP) é controlado pelo sistema *SAP* que organiza, gerencia e realiza a integração entre os demais setores da estrutura corporativa da empresa.

A programação é estruturada e definida pelo setor de PCP que tem um prazo útil de 4 dias para finalizar a ordem de produção. O horizonte de planejamento é semanal, finito e dividido em períodos, contudo pode sofrer alterações conforme logística integrada ao processo de produção. A demanda dos produtos é dinâmica e determinística, sendo que a produção em excesso acarreta em custos de estocagem. A penalização dos estoques dos itens ocorre no final de cada período.

A Ordem de Produção (OP) é executada após um planejamento estratégico da produção, balizado conforme as vendas empenhadas pelo departamento comercial e considerando-se também o histórico de produção de anos anteriores através de uma previsão de demanda. Desta forma, a produção realizada se dá entre o balanceamento da estimativa de vendas, vendas concretizadas e itens em estoque, controlados em tempo real pelo *SAP*. Outros fatores estão associados a venda e posterior produção de determinados produtos como a sazonalidade de culturas, precipitação e ainda períodos excessivos de estiagem, que interferem diretamente no manejo das culturas e requisição dos produtos para nutrição vegetal ou proteção.

A partir da ordem de produção de um produto o sistema *SAP* faz a explosão de toda a matéria-prima que será utilizada durante o processo, definindo o empenho de tudo o que será utilizado para produção. A gerência de produção recebe a ordem de produção e define estrategicamente quais produtos entrarão com prioridade na linha e a partir desse cronograma, o setor de separação destinará as matérias-primas que serão utilizadas no processo. As matérias-primas são separadas por lotes e em seguida são enviadas para o setor de produção onde é feita a conferência do lote requisitado para produção. Inicia-se então o processo de produção na linha que já encontra-se lavada e preparada para iniciar a OP do referido produto. Há casos específicos do sequenciamento da produção em que não ocorre a lavagem completa da linha devido à similaridade de formulações de determinados produtos, ou seja, um determinado produto pode ser produzido imediatamente após outro sem que haja contaminação por contribuição da linha de produção.

A produção da linha de fertilizantes foliares é feita através de reatores de bateladas (também denominados misturadores), e o processo inicia-se com o bombeamento de matérias-primas, denominadas subprodutos, que estão armazenadas em tanques cativos, sendo transportadas até o Reator perfeitamente agitado (RPA) ou Reator tanque agitado contínuo (CSTR). No reator, com a OP e o Procedimento Padrão de Fabricação (PPF), que descreve além da receita, a sequência para produção de determinada mistura, o formulador inicia o processo de fabricação do líquido com a combinação dos ingredientes/componentes utilizados para a produção. Após esta primeira etapa os ingredientes passam por processo de agitação térmica, sem controle induzido de temperatura, gerando a mistura que posteriormente, após o tempo de uniformização e rareamento da espuma produzida durante o processo, será bombeada até os tanques de transferência, denominados *buffer*.¹ O produto final é obtido com o envase do líquido, que encontra-se armazenado no *buffer*,¹ após escoamento por gravidade, para as envasadoras na linha de envase.

Cada mistura específica possui um PPF com receita própria e ao final do processo produção, dará origem a um produto final que é gerado a partir da mistura, sendo esta exclusiva na linha de produção. A estrutura produtiva caracteriza um problema de dimensionamento de lotes multiestágio, pois mais de um produto é obtido a partir de uma única mistura produzida num lote específico, ou seja, uma mistura pode ser um item componente para diferentes produtos.

Definida a produção de um determinado tipo de produto, após decisão tomada em nível tático, os mesmos são processados a partir de uma mistura, sendo que estes possuem um volume mínimo para iniciar a batelada. Este volume deve ser suficiente para cobrir a hélice do reator, determinando assim uma capacidade mínima de processamento para cada reator. A capacidade máxima do reator é delimitada pela capacidade física de processamento do mesmo, já que cada reator possui um volume capacitado. A produção das misturas não é necessariamente um múltiplo inteiro da batelada mínima, devido a possibilidade de fracionamento das receitas que proporcionarão uma quantidade inteira de produtos (itens) obtidos a partir do processamento da mistura (múltiplo proporcional da batelada mínima) e cada mistura tem um tempo específico de processamento e descanso conforme formulação pertinente ao PPF, independente da quantidade processada no reator delimitada pelos limites mínimos e máximos de uma batelada.

Na produção das misturas, após a etapa de agitação térmica no reator, é coletada uma amostra representativa para realização das análises no laboratório de controle de qualidade. A mistura permanece no reator durante o procedimento de análise, sendo que cada batelada constitui um lote para facilitar a rastreabilidade dos produtos envasados. A etapa de controle de qualidade e análise laboratorial tem a finalidade de garantir a periodicidade das amostras analisadas para atender às garantias comerciais dos produtos, que também são variáveis de produto para produto. Ao receber a instrução de conforme do controle de qualidade, a mistura passa por processo de filtragem de impurezas e é transferida através de bombeamento para um

¹ o termo *buffer* designará neste trabalho um tanque de transferência (ou tanque intermediário) comumente chamado na literatura, tanque pulmão.

buffer, ficando disponível para o envase na linha de envasamento. A transferência da mistura do reator para o *buffer* é feita através de bombeamento hidráulico e o tempo de bombeamento é desprezível para fins de modelagem.

Os produtos (itens), que serão gerados a partir da execução de misturas (produção de misturas), podem ser produzidos em máquinas paralelas distintas (reatores), já que a estrutura física comporta além dos tanques que armazenam os subprodutos, seis reatores: um exclusivo para produtos de uma linha que é produzida sob a ação de controle de temperatura (feitos em aço alumínio e exclusivo para o processamento de fosfitos), um reator é exclusivo para adjuvantes² ambos de capacidade 2.000 litros e os outros quatro são de fibra com capacidade limitada de 10.000 litros. Os reatores de fibra são multipropósito, mas não simultaneamente. Nesta dissertação não trataremos produtos que são produzidos no primeiro reator descrito, pois além de constituir uma linha exclusiva, e apesar de constarem também como fertilizantes foliares, seus processos de produção diferem consideravelmente dos demais produtos da linha de fertilizantes foliares. Também não serão incluídos no modelo os produtos da linha de adjuvantes, produzidos no segundo reator descrito, visto que também são produzidos em reatores dedicados, constituindo uma parcela específica de produtos dos quais não compartilham os demais reatores no processo de fabricação.

O armazenamento de uma mistura após o processo de fabricação descrito acima é feito em *buffers*, cuja linha conta com oito tanques de capacidade limitada de 10.000 litros, sendo que um tanque é feito em aço inox e os demais são de fibra. A mistura da linha de adjuvantes que dá origem aos produtos da mesma linha são armazenados exclusivamente no tanque 1 da [Figura 3](#):

Eventualmente, os próprios reatores podem armazenar as misturas, caso haja necessidade estratégica, excluindo assim a possibilidade de custos extras com descarte de mistura por exceder a capacidade de estoque do *buffer*. Os *buffers*, bem como os reatores também são multipropósitos (não simultaneamente), sendo que a mistura pode ficar acondicionado até 1 dia após o término do processo de produção.

Nesta etapa, armazenada num dos *buffers*, a mistura está pronta para o envase, gerando assim um produto final que pode ser acondicionado em frascos de 1 litro, galão de 5 litros e bombas (bombonas) de 20 litros. Excepcionalmente alguns produtos podem ser envasados em contêineres de 1.000 litros, situação esta que será desconsiderada para fins simplificação do modelo matemático do problema. O lote de uma mistura produzida num reator é totalmente transferido para o *buffer*, ficando assim disponível para envasamento na linha de envase, assim há um controle, por meio de identificação do lote produzido, realizado pelo setor de controle de qualidade.

A linha de envase é constituída por três envasadoras de bico duplo, culminando com o

² Os adjuvantes são substâncias adicionadas à formulação herbicida ou à calda herbicida para aumentar a eficiência do produto ou modificar determinadas propriedades da solução, visando facilitar a aplicação ou minimizar possíveis problemas. [Vargas e Roman \(2006\)](#)

Figura 3 – Fluxograma da produção

Fonte: Elaborada pelo autor.

término da produção: estas envasadoras operam por gravidade, e todos os tanques de envasamento compartilham todas as envasadoras, sendo que, uma das envasadoras é dedicada ao envasamento de frascos e galões e as outras duas são exclusivas para bombas. Esta prática todavia não exige a possibilidade de utilização das envasadoras para qualquer tipo das três embalagens descritas. Para a modelagem serão consideradas 6 envasadoras (já que uma envasadora, pode envasar ao mesmo tempo dois produtos distintos obtidos de uma mesma mistura, já que as três envasadoras possuem bico duplo). O tempo de envase depende da viscosidade do produto e do tipo de embalagem. Destacamos ainda que, tanques com uma mesma mistura podem compartilhar a mesma envasadora, mas não simultaneamente, por conta da rastreabilidade do lote. Consideraremos um tempo médio de envase conforme o tipo de embalagem, a saber:

- frasco: 900 litros/hora;
- galão: 2.400 litros/hora;
- bomba: 4.000 litros/hora;

Após envasados os produtos têm uma periodicidade em estoque que também varia de acordo com o tipo de produto, com tempo de validade mínimo estimado em 6 meses e máximo em 24 meses. O estoque de itens finais é permitido, com penalização, contudo não ocorre adição de custos com o estoque de mistura nos reatores ou nos *buffers*.

Posteriormente o produto é encaminhado para o setor de logística que realiza o *check-list* e reencaminha para o setor de embarque ou estoque estratégico conforme solicitação do setor comercial integrado ao PCP. A demanda dos produtos finais ocorre sempre no final de cada período.

Finalizada uma batelada, que compreende desde a produção da mistura no reator, posterior armazenamento em *buffers* e envase na linha de envasamento, é feita a lavagem completa da linha de produção e envasamento (*setup*). As trocas entre produtos distintos proporcionam tempos diferentes, caracterizando assim *setups* em que os tempos de troca são dependentes da sequência de produção. Destacamos novamente que, produtos que possuem similaridades na formulação e receita podem ser produzidos sequencialmente desconsiderando qualquer *setup* (manutenção ou lavagem), gerando assim um fluxo contínuo na linha de produção, constituindo assim lotes de produção distintos para um mesmo produto. A água utilizada para lavagem dos reatores passa por processo de tratamento e fica disponível para reuso como higienização de tanques e chão de fábrica, já que a empresa dispõe de estação de tratamento de água.

Neste processo produtivo, considera-se ainda o armazenamento de uma matéria-prima específica, utilizada na produção de grande parte dos produtos da linha de fertilizantes foliares líquidos, em tanques cativos. Este fator, entretanto, não incide em procedimentos decisórios para modelagem, já que esta matéria-prima é bombeada até os reatores, onde será misturada aos demais insumos utilizados na produção de uma mistura no início da produção, e está excluída a possibilidade de não iniciar-se um processo produtivo devido à falta desta matéria-prima.

Para fins de compreensão dos processos produtivos, considere o seguinte exemplo: uma mistura j_1 é produzida no reator m_1 totalizando 10.000 litros de volume líquido. Decorridos o tempo de preparação (este tempo é conhecido para todas as misturas) a mistura permanece no reator m_1 durante outro intervalo de tempo no mesmo período até que o setor de controle de qualidade efetue a análise qualitativa e posteriormente o volume de 10.000 litros da mistura j_1 é bombeado até o *buffer* k_1 , ficando disponível para o envase. Suponhamos que o volume de 10.000 litros seja dividido nos volumes 8.000 litros e 2.000 litros respectivamente, os quais hipoteticamente produzirão 400 bombas de 20 litros do produto i_1 (totalizando os 8.000 litros) num tempo de 2 horas (conforme vazão de 4.000 litros/hora), e também 400 galões de 5 litros do produto i_2 (totalizando os 2.000 litros) num período de tempo de $\frac{5}{6}$ de hora (segundo vazão de 2.400 litros/hora), os quais podem ser envasados de maneira simultânea. A Figura 4 ilustra a execução do processo descrito.

O custo de estocagem de um produto, acondicionado em frascos, galões e bombas, está dimensionado pelo departamento comercial da empresa, visto que o estoque estratégico visa atender a uma demanda dinâmica. O setor de PCP considera como previsibilidade de demanda o histórico de vendas de anos anteriores, fator este que é preponderante na tomada de decisão à nível tático para produção. Na Seção 3.2 apresentaremos a modelagem matemática ajustada às características descritas deste processo de produção, de modo que a elaboração do modelo permita a execução de um algoritmo que auxilie na tomada de decisões, sobretudo no que diz respeito à minimização de trocas entre produtos na linha de produção e também do estoque de produto final.

Figura 4 – Processo de produção da linha de fertilizantes foliares líquidos

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Modelo matemático

A elaboração do modelo matemático para o problema descrito na [Seção 3.1](#) está caracterizada pela estrutura produtiva dos processos, em que misturas (receitas), aqui consideradas como a produção de volumes de um determinado líquido, são executadas em máquinas paralelas distintas, denominadas reatores, e, em seguida são armazenadas em tanques de transferência intermediários multipropósito, denominados *buffer*. Após a etapa de produção de uma mistura, esta fica disponível para o envasamento em envasadoras que também constituem máquinas paralelas distintas, gerando ao final do processo um produto (item específico) que é composto pelo líquido produzido gerado pela mistura, que posteriormente é acondicionado e hermeticamente fechado numa embalagem de cada um dos tipos já citados, denominadas frasco (1 litro), galão (5 litros) e bomba (20 litros).

Neste modelo, consideramos portanto que, uma mistura (produção de uma batelada completa ou fração da batelada de uma mistura) pode produzir até três produtos distintos. Os produtos podem ser obtidos por mais de uma mistura, pois o volume de uma mistura pode ser produzido em mais de um reator de forma simultânea ou uma mesma mistura pode ser produzida sequencialmente num mesmo reator, gerando lotes distintos na produção. Contudo, a produção de uma mistura é exclusiva num determinado reator durante um período e a capacidade operacional de processamento no reator é limitada. A transferência da mistura de um reator para um *buffer* é realizada lote a lote e a quantidade total de mistura produzida é transferida para o *buffer*. Na linha de envase, o tempo para finalização de um produto considera, além de uma capacidade disponível em horas de trabalho, um número de envasadoras relativamente menor do que a quantidade de tanques disponíveis para armazenamento.

Desta forma o modelo matemático proposto considera a produção de misturas j , $j = \{1, \dots, J\}$, que são processadas em reatores de batelada (máquinas produtivas) m , $m = \{1, \dots, M\}$, e ficam disponíveis em *buffers* k , $k = \{1, \dots, K\}$ para posterior envasamento nas envasadoras n , $n = \{1, \dots, N\}$, culminando com a produção dos produtos i , $i = \{1, \dots, I\}$.

Um conjunto de reatores pode ser destinado a um conjunto de misturas produtivas j e, cada mistura j pode ser executada de forma particionada através de uma fração de batelada, que é possibilitada pela proporção dos ingredientes utilizados numa receita. Ao final do processamento nos reatores, uma quantidade de mistura comporá um número inteiro de itens que são envasados na linha de envase. O tempo de produção de cada mistura é conhecido e não depende do volume da batelada processado, além disso a capacidade produtiva de cada reator está delimitada por um volume mínimo e um volume máximo.

A produção de misturas, além do armazenamento e posterior envase que originam os produtos ocorrem em cada período t , $t = \{1, \dots, T\}$, considerando o horizonte de planejamento finito. As misturas produtivas são finalizadas após o completo envasamento das mesmas na linha de envase, gerando os produtos numa estrutura multinível. Após o processamento de uma mistura na linha de produção, composta por reator e *buffer*, que produziu e armazenou um lote o , $o = \{1, \dots, O\}$ dessa mistura, a mesma é completamente limpa no caso da produção de outra mistura qualquer ou fica disponível para o processamento de um novo lote $o + 1$. A demanda de um produto ao final de um período é obtida através da soma das demandas em cada período dentro do prazo para finalização da OP. A Figura 5 representa o encadeamento dos processos através de uma estrutura decisória, que ao final de um período, atenderá os objetivos e restrições para este problema de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção.

Figura 5 – Estrutura decisória do processo de produção

Fonte: Elaborada pelo autor.

A característica de armazenamento dos *buffers*, definidas por uma estrutura multipropósito não simultânea, também são controladas dentro de um período, ou excepcionalmente em períodos posteriores. A sequência de produção entre duas misturas distintas, ditas j_1 e j_2 ,

pode exigir tempos de preparação distintos, devido ao fato de algumas formulações de receitas exigirem um *setup* maior da linha de produção (lavagem completa da linha de produção e envase) e, como já destacado, a sequência de produção é dependente do tempo.

Por exemplo, na hipótese de execução da mistura j_1 e posteriormente a execução da mistura j_2 o *setup* aumenta se a ordem é invertida, como destacado na Figura 6:

Figura 6 – Sequência de produção dependente do tempo de preparação

Fonte: Elaborada pelo autor.

Este fato justifica-se pela similaridade de formulações de algumas misturas, e dependendo da sequência executada para duas misturas distintas, ou não há *setup*, ou o *setup* é relativamente menor. Em [Ferreira, Morabito e Rangel \(2009\)](#), discute-se a hipótese de produção de um refrigerante normal após a produção de um refrigerante *diet*. Os autores destacam que o tempo de limpeza (*setup*) da linha é maior, caso a sequência de produção adotada fosse invertida, isto é, na hipótese de se produzir um refrigerante *diet* após a produção de um refrigerante normal.

A modelagem proposta para o problema disponibiliza o volume da batelada a ser produzidas bem como o plano de produção para linha de envase e estoque de produto final, satisfazendo a demanda produtiva solicitada pelos clientes. O modelo visa a minimização das trocas entre misturas distintas na linha de produção, e também na linha de envase (já que incorrem em custos adicionais e aumento do *setup*) além da minimização do estoque de produto final em cada período. A estrutura decisória do processo produtivo concentra portanto a definição do que será produzido e em que sequência nos períodos, sendo que a demanda final de um produto é obtida ao final do período limite para finalização da OP. A distribuição da demanda será feita por período, sendo respeitados os limites de capacidade produtiva nos reatores.

Neste modelo não será considerada a aquisição de matérias-primas e respectivos custos relacionados à compra de insumos disponíveis para produção. Desta forma, supõe-se para fins de simplificação do problema que há disponibilidade de matéria-prima no início da preparação de cada produto num determinado período de modo que uma demanda não será reprimida por conta da falta de matéria-prima. Também está descartada a hipótese de custos adicionais a ser inseridos no modelo por conta de descarte de produto que eventualmente possa exceder a capacidade de armazenamento durante o processo produtivo. Toda mistura produzida é integralmente convertida em produtos após o envasamento, como feito em [Cunha \(2018\)](#).

Ainda em relação ao modelo, temos como característica intrínseca deste problema, como já estudado por [Cunha \(2018\)](#), e por ele destacado, que as bateladas são produzidas em quantidades flexíveis (proporção de uma batelada) e as misturas podem produzir mais de

um produto resultando num problema multiestágio. Neste sentido, a produção de uma mistura não é necessariamente múltiplo inteiro de uma batelada como comumente ocorre na indústria de processos. Há um volume mínimo (volume suficiente para cobrir completamente a hélice do reator) para iniciar a batelada de uma mistura no reator e uma capacidade máxima de processamento delimitada pelo tamanho do reator. Entre estes limitantes pode ser processada uma quantidade de mistura proporcional à quantidade de produtos que se deseja obter a partir de uma batelada. A Figura 7 ilustra as capacidades de processamento de uma mistura, num determinado reator:

Figura 7 – Capacidade de processamento de uma mistura num reator

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 8 mostra o processamento de uma mistura j no reator m_1 , em seguida, é armazenada no *buffer* k_1 e posteriormente na etapa de envase é envasada nas envasadoras n_1 e n_2 dando origem a mais de um produto, aqui denominados i_1 e i_2 . Observe que a partir de uma mesma mistura, pode-se obter até três produtos distintos (devido a quantidade de envasadoras na linha de envase) de forma simultânea:

Figura 8 – Roteiro de execução de uma mistura

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.1 Definição das funções, conjuntos, parâmetros e variáveis

Nesta subseção serão apresentados todos os conjuntos, parâmetros e variáveis que compõem a função objetivo, além de restrições para o modelo matemático descrito na [Seção 3.2](#). As decisões envolvem a quantidade de mistura j a ser produzida no reator m em lotes o , determinando qual *buffer* k irá receber a mistura para posterior envase em envasadoras n , finalizando com a quantidade de produtos finais i que serão manufaturados ao final de um de um período t . A função objetivo visa minimizar os custos de estocagem e as trocas, através do sequenciamento da produção, nos reatores e na linha de envase, atendendo a demanda produtiva em cada período. Neste modelo consideraremos ainda que as etapas de produção de uma mistura, armazenamento e envase dos produtos manufaturados a partir desta mistura, ocorrem dentro de cada período com início da produção e término do envase no mesmo período.

Conjuntos e índices

$M(m \in M)$: reatores de batelada (máquinas produtivas ou misturadores) que podem ser utilizados para processar uma mistura j ;

$K(k \in K)$: *buffers* que podem armazenar uma mistura j ;

$J(j, l \in J)$: misturas que podem ser produzidas no reator m ;

$N(n \in N)$: envasadoras que podem envasar o produto i ;

$I(i, p \in I)$: itens manufaturados através da produção da mistura j ;

$O(o \in O)$: quantidade de lotes produzidos de uma mistura j ;

$T(t \in T)$: períodos do horizonte de planejamento.

Parâmetros

a_j^{mis} : tempo ³ para produzir uma batelada da mistura j , independente do tamanho do lote;

a_i^{env} : tempo para envasar uma unidade do produto i ;

$b_{j,l}^{mis}$: tempo de preparação para troca (*setup*) da mistura j para mistura l ;

$b_{i,p}^{env}$: tempo de preparação para iniciar o envasamento do produto p após o produto i ;

$d_{i,t}$: demanda em unidades do produto i envasados no período t ;

$e_{j,i}$: quantidade (em litros) da mistura j para envasar uma unidade de um produto do tipo i ;

$g_{j,m}$: quantidade mínima da batelada (em litros) da mistura j produzida no reator m ;

$h_{j,m}$: quantidade máxima da batelada (em litros) da mistura j produzida no reator m ;

pc_j : custo de produção da batelada mínima da mistura j ;

ic_i : custo ⁴ de estoque de uma unidade do produto i ;

$sc_{j,l}^{mis}$: custo de preparação na troca da mistura j para mistura l em períodos consecutivos;

$sc_{i,p}^{env}$: custo de preparação na troca produto i para o produto p em períodos consecutivos;

pc_i : custo de produção de uma unidade do produto i ;

$bigM$: número suficientemente grande;

$cap_{m,t}^{mis}$: capacidade de processamento (tempo) disponível do reator m num período t ;

³ todos os tempos e capacidades de processamento do modelo são dados em horas

⁴ todos os custos são dados pela moeda corrente \$

$cap_{n,t}^{env}$: capacidade de processamento (tempo) disponível da envasadora n num período t .

Variáveis inteiras

$X_{j,m,t,o}$: quantidade da mistura j (volume em litros) produzida por uma batelada proporcional no reator m , no período t , no lote o ;

$Q_{i,n,t,o}$: quantidade unitária de produtos do tipo i , envasados na envasadora n , no período t , a partir do lote o ;

$I_{i,t}$: quantidade unitária em estoque do produto i no final do período t ;

$B_{j,m,t,o,k}$: quantidade (volume em litros) da mistura j , produzida no reator m , no período t , lote o que entrou no tanque k ;

$E_{j,t,o,k}$: quantidade (volume em litros) da mistura j em estoque no tanque k , no período t , no lote o .

Variáveis binárias

$$Y_{j,m,t,o} = \begin{cases} 1, & \text{se a mistura } j \text{ é produzida no reator } m \text{ no período } t \text{ no lote } o; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Z_{j,l,m,t}^{mis} = \begin{cases} 1, & \text{se ocorre uma troca da mistura } j \text{ para mistura } l \text{ no reator } m, \text{ no período } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$W_{j,m,t,o,k} = \begin{cases} 1, & \text{se a mistura } j \text{ produzida no reator } m \text{ no período } t \text{ no lote } o \text{ é armazenada} \\ & \text{no buffer } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Z_{i,p,n,t}^{env} = \begin{cases} 1, & \text{se ocorre uma troca do produto } i \text{ para o produto } p \text{ na envasadora } n, \text{ no período } t \\ & \text{do período } t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\alpha_{i,n,t,o} = \begin{cases} 1, & \text{se a envasadora } n \text{ está preparada para o envase do produto } i \text{ no período } t, \text{ lote } o; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Variáveis contínuas

$\mu_{j,m,t,o}^s$: instante de início da produção do lote o da mistura j no reator m no período t ;

$\mu_{j,m,t,o}^e$: instante de término da produção do lote o da mistura j no reator m no período t ;

$\rho_{i,n,t,o}^s$: instante de início do envase do lote o para o item i na envasadora n no período t ;

$\rho_{i,n,t,o}^e$: instante de término do envase do lote o para o item i na envasadora n no período t ;

$\tau_{j,m,t,o,k}^s$: instante em que a mistura j preparada no reator m no período t , lote o , vai para o buffer k ;

$\tau_{j,m,t,o,k}^e$: instante em que a mistura j preparada no reator m no período t , lote o , deixa completamente o buffer k (toda mistura foi envasada);

Função objetivo

$$\min \sum_i \sum_t (ic_i \cdot I_{i,t}) + \sum_{\substack{j \\ j \neq l}} \sum_{\substack{l \\ l \neq j}} \sum_m \sum_t (sc_{j,l}^{mis} \cdot Z_{j,l,m,t}^{mis}) + \sum_{\substack{i \\ i \neq p}} \sum_{\substack{p \\ p \neq i}} \sum_n \sum_t (sc_{i,p}^{env} \cdot Z_{i,p,n,t}^{env}) \quad (3.1)$$

A função objetivo dada pela equação (3.1), visa minimizar os custos de estocagem de produtos por período, culminando com uma quantidade mínima de produto final envasado ao final de cada período, além dos custos de trocas entre misturas nos reatores e também os custos de trocas entre produtos nas envasadoras.

As etapas de produção foram subdivididas em dois estágios integrados e interdependentes, cada qual com blocos de restrições funcionais que constituem o modelo. Os dois estágios de produção são sincronizados, dessa forma nota-se uma similaridade bastante verossímil nas características dos processos de produção desta dissertação com a tese apresentada por [Martins \(2017\)](#), que propôs um novo modelo matemático de otimização para representar o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes dois estágios com limpezas temporais, para a produção de bebidas à base de frutas. *Restrições - estágio I*

O estágio I compreende a produção da mistura nos reatores e o posterior bombeamento do líquido manufaturado para tanques de transferência denominados *buffer*. A modelagem matemática para o estágio I tem como estrutura os seguintes blocos de restrições:

Balanceamento de estoque e demanda

$t = 1 :$

$$\sum_m \sum_o X_{j,m,1,o} = \sum_i ((d_{i,1} + I_{i,1}) \cdot e_{j,i}), \quad \forall j. \quad (3.2)$$

$t > 1 :$

$$\sum_i (I_{i,(t-1)}) \cdot e_{j,i} + \sum_m \sum_o X_{j,m,t,o} = \sum_i ((d_{i,t} + I_{i,t}) \cdot e_{j,i}), \quad \forall j, t > 1. \quad (3.3)$$

O conjunto de equações (3.2) atende a demanda inicial e funciona como *start* para produção e estoque de produtos nos períodos que sucedem o primeiro período.

Já o conjunto de restrições (3.3) definem a produção e o balanceamento de estoque a partir do segundo período.

Produção dos lotes de misturas nos reatores

$$g_{j,m} \cdot Y_{j,m,t,o} \leq X_{j,m,t,o} \leq h_{j,m} \cdot Y_{j,m,t,o}, \quad \forall j, m, t, o \quad (3.4)$$

$$Y_{j,m,t,(o-1)} \geq Y_{j,m,t,o}, \quad \forall j, m, t, o > 1 \quad (3.5)$$

$$\sum_j Y_{j,m,t,o} \leq 1 \quad \forall m, t, o \quad (3.6)$$

As restrições (3.4) limitam as quantidades mínima e máxima de uma mistura que podem ser produzidas num reator. A quantidade mínima deve ser suficiente para cobrir as hélices do reator e a quantidade máxima é delimitada pela capacidade física de cada reator, desde que o reator esteja preparado para produção. O conjunto restrições (3.5) elimina a possibilidade de lotes ociosos, já que há produção no lote o ocorre, somente se, ocorreu produção no lote $o - 1$. Já o conjunto de restrições dado por (3.6), garante que cada reator está preparado para produzir uma única mistura durante um período, para cada um dos lotes processados.

Trocas e sequenciamento dos lotes nos reatores

$$Z_{j,l,m,t}^{mis} \geq Y_{j,m,(t-1),o} + Y_{l,m,t,1} - 1 \quad \forall j, l (j \neq l), m, t > 1 \quad (3.7)$$

$$\sum_{\substack{j \\ j \neq l}} Z_{j,l,m,t}^{mis} \leq 1 \quad \forall l, m, t \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

O conjunto de restrições (3.7) controla a troca entre misturas diferentes, já que um determinado reator estará preparado para produção de uma nova mistura l , somente se, a mistura j foi produzida no período anterior no último lote, quando consideramos dois períodos consecutivos. Este conjunto de restrições foi inspirado no bloco de restrições usado por [Camargo, Toledo e Almada-Lobo \(2012\)](#). Já as restrições (3.8) evitam que mais de uma troca entre misturas distintas ocorram num período. Este bloco de restrições também foi extraído do artigo de [Camargo, Toledo e Almada-Lobo \(2012\)](#).

Conservação do fluxo e sequenciamento dos lotes da produção nos reatores

$$\mu_{j,m,t,1}^s = 0.0 \quad \forall j, m, t \quad (3.10)$$

$$\mu_{j,m,t,o}^e \geq \mu_{j,m,t,o}^s + a_j^{mis} - bigM \cdot (1 - Y_{j,m,t,o}), \quad \forall j, m, t, o \quad (3.11)$$

$$\mu_{j,m,t,o}^s \geq \mu_{j,m,t,(o-1)}^e - bigM \cdot (1 - Y_{j,m,t,o}), \quad \forall j, m, t, o > 1 \quad (3.12)$$

$$\mu_{l,m,t,1}^s \geq b_{j,l}^{mis} - bigM \cdot (1 - Z_{j,l,m,t}) - bigM \cdot (1 - Y_{l,m,t,1}), \quad \forall j, l (j \neq l), m, t > 1 \quad (3.13)$$

$$\mu_{j,m,t,o}^s \leq cap_{m,t}^{mis}, \quad \forall j, m, t, o \quad (3.14)$$

$$\mu_{j,m,t,o}^e \leq cap_{m,t}^{mis}, \quad \forall j, m, t, o \quad (3.15)$$

O conjunto de restrições (3.10) condiciona o início da produção de todas as misturas, para o primeiro lote, ao instante 0 de cada período t . Já o bloco de restrições dado por (3.11) dá o

instante do término da produção para cada lote processado. As restrições (3.12) sequenciam lotes consecutivos. O conjunto de restrições (3.13) estabelece o início da produção do primeiro lote de uma nova mistura após uma troca entre misturas distintas ocorrida entre períodos consecutivos. Em cada período, os instantes de início e término da produção estão limitados pela capacidade produtiva disponível (em horas) nos reatores, dados pelos blocos de restrições (3.14) e (3.15), respectivamente.

Transferência das misturas produzidas do reator para o buffer

$$\tau_{j,m,t,o,k}^s \geq \mu_{j,m,t,o}^e - \text{big}M \cdot (1 - W_{j,m,t,o,k}), \quad \forall j, m, t, o, k \quad (3.16)$$

$$\tau_{j,m,t,o,k}^e \geq \rho_{i,n,t,o}^e - \text{big}M \cdot (1 - \alpha_{i,n,t,o}) - \text{big}M \cdot (1 - W_{j,m,t,o,k}), \quad \forall j, m, t, o, k, i, n \quad (3.17)$$

As restrições dadas por (3.16) fornecem o instante do início do bombeamento da mistura produzida no reator para algum *buffer* disponível e no modelo esse instante ocorre imediatamente com o término da produção. O instante de esvaziamento completo do buffer dado por (3.17) se dá após o término do envase de todos os produtos obtidos a partir da mistura armazenada no *buffer*.

Alocação do buffer para a mistura

$$\sum_j \sum_m \sum_o W_{j,m,t,o,k} \leq 1, \quad \forall t, k \quad (3.18)$$

$$\sum_k W_{j,m,t,o,k} = Y_{j,m,t,o}, \quad \forall j, m, t, o \quad (3.19)$$

$$B_{j,m,t,o,k} \geq X_{j,m,t,o} - \text{big}M \cdot (1 - W_{j,m,t,o,k}), \quad \forall j, m, t, o, k \quad (3.20)$$

$$\sum_k \sum_o E_{j,t,o,k} \geq \sum_m \sum_o \sum_k B_{j,m,t,o,k} - \sum_i \sum_n \sum_o (Q_{i,n,t,o} \cdot e_{j,i}), \quad \forall j, t \quad (3.21)$$

O conjunto de restrições dados por (3.18) e (3.19) respectivamente, aloca, para cada lote de mistura produzido num reator, um único *buffer*. As restrições (3.20) transferem fisicamente o volume de líquido de um reator para um *buffer* e por fim as restrições (3.21) determinam o volume de mistura no *buffer* a medida que os produtos são envasados. Ao término do envase dos produtos obtidos a partir de uma mistura produzida no reator, o *buffer* é completamente esvaziado, e dessa forma a variável $E_{j,t,o,k} = 0$ no final de cada período.

Restrições - estágio II

As restrições do estágio II estão relacionadas ao envase dos produtos na linha de envasamento. Esta linha é constituída por envasadoras de bico duplo, configurando máquinas paralelas distintas que operam por gravidade com o escoamento do líquido armazenado nos *buffers*. Um lote de uma mistura produzida no estágio I é convertido em produtos, obtidos a partir deste lote, no estágio II. No modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes desta dissertação, os

estágios I e II ocorrem no mesmo período como já destacado, sendo que a finalização ocorre com o envase de um produto. O bloco de restrições a seguir compreende as etapas de envase dos produtos:

Envase dos produtos nas envasadoras

$$\sum_i \sum_n (Q_{i,n,t,o} \cdot e_{j,i}) = \sum_m \sum_k B_{j,m,t,o,k}, \quad \forall j, t, o \quad (3.22)$$

Este bloco de restrições utiliza o líquido armazenado nos *buffers* para envasar os produtos nas envasadoras, ou seja os produtos são obtidos a partir de uma mistura que está armazenada num *buffer*.

Demanda de produtos e estoque por período

$t = 1$:

$$\sum_n \sum_o Q_{i,n,1,o} = d_{i,1}, \quad \forall i \quad (3.23)$$

$t > 1$:

$$I_{i,(t-1)} + \sum_n \sum_o Q_{i,n,t,o} = I_{i,t} + d_{i,t}, \quad \forall i, t > 1 \quad (3.24)$$

O bloco de restrições dado por (3.23) atende a demanda de produtos no primeiro período da produção, gerando eventualmente estoque para o período seguinte conforme objetivo da função de otimização. As restrições dadas por (3.24) fornecem o balanceamento de estoque e demanda de produtos finais.

Preparação das envasadoras

$$\alpha_{i,n,t,(o-1)} \geq \alpha_{i,n,t,o}, \quad \forall i, n, t, o > 1 \quad (3.25)$$

$$\sum_i \alpha_{i,n,t,o} \leq 1, \quad \forall n, t, o \quad (3.26)$$

$$Q_{i,n,t,o} \leq \left(\frac{cap_{n,t}^{env}}{a_i^{env}} \right) \cdot \alpha_{i,n,t,o}, \quad \forall i, n, t, o \quad (3.27)$$

As restrições dadas por (3.25), sequenciam o envase dos produtos nas envasadoras para lotes consecutivos, evitando ociosidade nas envasadoras. Já as restrições dadas por (3.26) garantem a exclusividade das envasadoras no envasamento de cada lote de mistura por período. E por fim, as restrições (3.27) iniciam o envase, somente se, há envasadora preparada para começar o envase, atendendo a capacidade produtiva. Este conjunto de restrições foi utilizado por Baldo, Santos e Morabito (2002), dado que há similaridade no armazenamento dos líquidos, sendo cerveja filtrada no trabalho supracitado e fertilizante foliar líquido neste trabalho.

Conservação do fluxo e sequenciamento dos lotes nas envasadoras

$$\rho_{i,n,t,o}^s \geq \tau_{j,m,t,o,k}^s - \text{big}M \cdot (1 - W_{j,m,t,o,k}) - \text{big}M \cdot (1 - \alpha_{i,n,t,o}), \quad \forall i, j, m, n, t, o, k \quad (3.28)$$

$$\rho_{i,n,t,o}^s \geq \rho_{i,n,t,(o-1)}^s \quad \forall i, j, m, n, t, o > 1, k \quad (3.29)$$

$$\rho_{i,n,t,o}^e \geq Q_{i,n,t,o} \cdot a_i^{\text{env}} + \rho_{i,n,t,o}^s - \text{big}M \cdot (1 - \alpha_{i,n,t,o}), \quad \forall i, j, m, n, t, o, k \quad (3.30)$$

As restrições dadas por (3.28) fornecem o instante de início do envase de um lote armazenado num *buffer*, desde que a envasadora esteja preparada. O sequenciamento de lotes consecutivos é controlado pelas inequações (3.29). O término do envase de um lote é dado pelo conjunto de restrições (3.30).

Trocas e sequenciamento dos lotes nas envasadoras

$$Z_{i,p,n,t}^{\text{env}} \geq \alpha_{i,n,(t-1),O} + \alpha_{p,n,t,1} - 1, \quad \forall i, p, (i \neq p)n, t > 1 \quad (3.31)$$

$$\sum_{\substack{i \\ i \neq p}} Z_{i,p,n,t}^{\text{env}} \leq 1 \quad \forall p, n, t \quad (3.32)$$

$$\rho_{i,n,t,O}^s \leq \text{cap}_{n,t}^{\text{env}}, \quad \forall i, n, t, o \quad (3.33)$$

$$\rho_{i,n,t,O}^e \leq \text{cap}_{n,t}^{\text{env}}, \quad \forall i, n, t, o \quad (3.34)$$

Este bloco de restrições controla a troca e sequenciamento de lotes na linha de envasamento, considerando as possibilidades de troca de misturas numa envasadora entre períodos consecutivos, em (3.31). Além disso, uma única troca entre misturas é permitida entre períodos, sendo garantida pelas restrições (3.32). Por fim, os blocos de restrições dados por (3.33) e (3.34) limitam a capacidade produtiva (em horas) por período nas envasadoras.

Conservação do fluxo e sequenciamento dos lotes nas envasadoras - trocas

$$\rho_{p,n,t,1}^s \geq b_{i,p} - \text{big}M \cdot (1 - Z_{i,p,n,t}^{\text{env}}) - \text{big}M \cdot (1 - \alpha_{p,n,t,1}), \quad \forall i, p, (i \neq p)n, t > 1 \quad (3.35)$$

O bloco de restrições dado por (3.35) fornecem os instantes de início do envase de um produto p após o envase de um produto i entre períodos consecutivos, considerando a hipótese de troca entre produtos nas envasadoras.

RESULTADOS

Neste capítulo, discutiremos a execução e desempenho do modelo quando submetido à testes com instâncias geradas a partir de dados reais. Usaremos duas diferentes instâncias simulando dois cenários de produção num horizonte de tempo finito.

A primeira instância utilizada para testes constitui um exemplar ilustrativo pequeno para melhor entendimento do problema e será apresentada na [Seção 4.1](#).

A segunda instância foi gerada a partir de um plano de produção que pode compreender uma prática executável pela indústria num dado horizonte de programação.

O modelo foi implementado usando a linguagem *AMPL* sendo o *solver* CPLEX (versão 12.1) utilizado para determinar a solução ótima. Os testes computacionais foram executados numa máquina com processador Intel CORE i5 de 2.8GHz e 8GB de memória RAM.

4.1 Exemplar ilustrativo - 1ª instância teste

Para ilustrar a execução do modelo descrito na [Subseção 3.2.1](#) e uma respectiva solução preliminar, foi elaborada uma instância teste pequena. Todas as informações relacionadas aos conjuntos e parâmetros definidos na [Subseção 3.2.1](#) constam nas tabelas condensadas na [Figura 9](#). Por tratar-se de um teste inicial para o modelo, com o propósito de ilustrar o problema descrito no [Capítulo 3](#), selecionamos de forma aleatória uma quantidade pequena de misturas e produtos acabados respectivamente. Desta forma o esforço computacional não exigiu uma máquina com desempenho extraordinário para retornar os resultados.

As unidades de tempo, bem como as capacidades produtivas de reatores e envasadoras são dadas em horas, e o custos são dados pela moeda corrente (\$). Os volumes de misturas, dados em litros, itens unitários produzidos e também em estoque são quantidades inteiras, o que caracteriza um problema de programação da produção inteiro misto (MIP).

Figura 10 – Planejamento da produção - 1º estágio

Estágio 1 - Produção nos Reatores + Transferência para o Buffer (quantidades em Litros)									
Reatores (M)	Misturas (J)	Períodos							
		t = 1		t = 2		t = 3		t = 4	
		o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2
1	1								
2								10000	2280
1	2			10000		10000	10000	10000	10000
2				7400		10000			
Buffer (K)									
1				10000		10000			
2				7400			10000	10000	
3									2280
4									
5									10000
6						10000		10000	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Já o 2º estágio, define a etapa final da produção, culminando com o envase do líquido, que é a mistura produzida nos reatores, nas envasadoras, dando assim origem aos produtos. Nesta instância teste, a mistura j_1 dá origem aos produtos i_1 e i_2 , já a mistura j_2 viabiliza a produção dos produtos i_3 e i_4 . A Figura 11 descreve as quantidades de cada item envasados na linha de envase em cada período, considerando os lotes de produção e a disponibilidade das envasadoras:

Figura 11 – Planejamento da produção - 2º estágio

Estágio 2 - Envasamento dos produtos na envasadoras (quantidades em unidades)									
Envasadora (N)	Produtos (I)	Períodos							
		t = 1		t = 2		t = 3		t = 4	
		o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2
1	1								
	2							2000	
	3								
	4								
2	1								
	2								2280
	3								
	4					1000			
3	1								
	2								
	3								
	4						500	500	200
4	1								
	2								
	3								1200
	4			870					

Fonte: Elaborada pelo autor.

Notamos que a produção de mistura nos reatores, armazenamento e posterior envase de

produtos finais ocorrem dentro do mesmo período. A produção é executada por lotes, e cada lote gera uma quantidade de produtos finais visando ao atendimento da demanda solicitada.

Em relação a quantidade de lotes produzidos em cada período, estes foram delimitados como parâmetro fixo, sendo considerado o máximo de 2 lotes ($o \in O$) para todas as misturas, pois considerando-se a capacidade disponível em horas, esta seria uma quantidade de lotes viável para finalização do processo de produção das misturas num período, devido ao tempo de produção e envase dos produtos.

Os tempos de início e término da produção dos lotes em cada período, considerando o 1º e o 2º estágio, são dados pelas [Figura 12](#) e [Figura 13](#) respectivamente:

Figura 12 – Tempos de início e término da produção - 1º estágio

Estágio 1 - Produção nos Reatores + Transferência para o Buffer (tempo em horas)									
Reatores (M)	Misturas (J)	Períodos							
		t = 1		t = 2		t = 3		t = 4	
		o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2
tempos (início→término)									
1	1								
2								0 → 6	6 → 12
1	2			0 → 8		0 → 8	8 → 16	0 → 8	8 → 16
2				0 → 8		0 → 8			
Buffer (K)									
1				8 → 12.35		8 → 13			
2				8 → 12.35			16 → 18.5	6 → 12	
3									12 → 14.53
4									
5									16 → 18.496
6						8 → 13		8 → 10.5	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Tempos de início e término da produção - 2º estágio

Estágio 2 - Envasamento dos produtos na envasadoras (tempo em horas)									
Envasadora (N)	Produtos (I)	Períodos							
		t = 1		t = 2		t = 3		t = 4	
		o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2
tempos (início→término)									
1	1								
	2							7.84 → 12	
	3								
	4								
2	1								12 → 14.53
	2								
	3								
	4					8 → 13			
3	1								
	2								
	3								
	4						16 → 18.5	8 → 10.5	16 → 17
4	1								
	2								
	3								16 → 18.496
	4			8 → 12.35					

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 1 descreve as quantidades produzidas em cada período, para cada lote, em referência às variáveis de decisão:

Tabela 1 – Variáveis de decisão da instância teste

Variáveis de decisão	Períodos			
	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
$X_{j,m,t,o}$		$X_{2,1,2,1} = 10000$ $X_{2,2,2,1} = 7400$	$X_{2,1,3,1} = 10000$ $X_{2,1,3,2} = 10000$ $X_{2,2,3,1} = 10000$	$X_{1,2,4,1} = 10000$ $X_{1,2,4,2} = 2280$ $X_{2,1,4,1} = 10000$ $X_{2,1,4,2} = 10000$
$Q_{i,n,t,o}$		$Q_{4,4,2,1} = 870$	$Q_{4,2,3,1} = 1000$ $Q_{4,3,3,2} = 500$	$Q_{2,1,4,1} = 2000$ $Q_{1,2,4,2} = 1100$ $Q_{3,4,4,2} = 1200$ $Q_{4,3,4,1} = 500$ $Q_{4,3,4,2} = 200$
$I_{i,t}$		$I_{4,2} = 870$	$I_{4,3} = 2370$	

Fonte: Elaborada pelo autor.

As variáveis binárias retornadas pelo modelo aplicado à instância teste são apresentadas na Tabela 2:

Notamos pelos dados descritos na Figura 9, que devido a pequena quantidade de misturas produzidas nos reatores e também a pequena quantidade de produtos envasados nas envasadoras,

Tabela 2 – Variáveis binárias da instância teste

Variáveis Binárias	Períodos			
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$Y_{j,m,t,o}$		$Y_{2,1,2,1} = 1$ $Y_{2,2,2,1} = 1$	$Y_{2,1,3,1} = 1$ $Y_{2,1,3,2} = 1$ $Y_{2,2,3,1} = 1$	$Y_{1,2,4,1} = 1$ $Y_{1,2,4,2} = 1$ $Y_{2,1,4,1} = 1$ $Y_{2,1,4,2} = 1$
$Z_{j,l,m,t}$				
$W_{j,m,t,o,k}$		$W_{2,1,2,1,1} = 1$ $W_{2,2,2,1,2} = 1$	$W_{2,1,3,1,1} = 1$ $W_{2,1,3,1,2} = 1$ $W_{2,2,3,1,6} = 1$	$W_{1,2,4,1,2} = 1$ $W_{1,2,4,2,3} = 1$ $W_{2,1,4,1,6} = 1$ $W_{2,1,4,2,5} = 1$
$\alpha_{i,n,t,o}$		$\alpha_{4,4,2,1} = 1$	$\alpha_{4,2,3,1} = 1$ $\alpha_{4,3,3,2} = 1$	$\alpha_{2,1,4,1} = 1$ $\alpha_{1,2,4,2} = 1$ $\alpha_{3,4,4,2} = 1$ $\alpha_{4,3,4,1} = 1$ $\alpha_{4,3,4,2} = 1$
$Z_{i,p,n,t}$				

Fonte: Elaborada pelo autor.

as variáveis de troca nos reatores, $Z_{j,l,m,t}$, e nas envasadoras, $Z_{i,p,n,t}$, não são ativadas em nenhum período para qualquer lote.

Neste exemplar, as demandas solicitadas foram atendidas e não houve estoque gerado ao final do horizonte de programação. Ainda em relação à solução, o problema ajustado retornou 1688 variáveis, das quais 560 são binárias, 112 são inteiras e 1016 são variáveis contínuas. A solução encontrada foi ótima e o valor da função objetivo é \$8197.20. O tempo para o processamento da solução para a instância teste foi de 0.19 segundos.

4.2 Plano de produção para instância baseada em dados reais

Nesta seção aplicaremos o modelo elaborado na [Subseção 3.2.1](#) submetido a dados que foram gerados a partir de dados reais. Estes dados constituem uma instância que simula uma ordem de produção num horizonte de programação de 5 períodos. A quantidade de reatores e *buffers* no 1º estágio e também a quantidade envasadoras no 2º estágio, são as mesmas utilizadas na linha de produção de fertilizantes foliares líquidos de acordo com a realidade da empresa.

Os dados relacionados à quantidade de períodos de produção, limitados a um número máximo de lotes fixado por período, número de reatores, *buffers* e envasadoras, além das quantidades de misturas e produtos finais obtidos e também o parâmetro de penalização, são descritos na [Tabela 3](#).

Tabela 3 – Parâmetros do modelo

T	K	M	N	J	I	O	$bigM$
5	8	4	6	5	8	2	15000

A [Tabela 4](#) apresenta os tempos e custos de produção das misturas.

Tabela 4 – Tempo de produção e custo da misturas

Mistura (J)	a_j^{mis}	pc_j
1	8	5514.48
2	7	5293.92
3	7	5763.92
4	7	3493.92
5	7	3553.92

A seguir, a [Tabela 5](#) descreve o tempo de envase, custo de estoque e custo de produção para cada um dos produtos.

Tabela 5 – Tempo de envase, custo de estoque e custo de produção dos produtos

Produto (i)	a_i^{env}	hc_i	pc_i
1	0.00208	4.15	2.76
2	0.00500	3.96	10.65
3	0.00208	4.10	2.65
4	0.00500	3.83	10.05
5	0.00208	4.57	2.88
6	0.00500	4.04	10.47
7	0.00500	2.30	6.99
8	0.00500	2.36	7.11

A [Tabela 6](#), fornece o tempo de troca entre misturas. Notamos que muitas entradas da tabela são nulas e, este fato deve-se à similaridade de formulações entre as misturas produzidas, sendo que misturas semelhantes podem ser produzidas sequencialmente sem a necessidade de *setup* e neste cenário fica descartada a hipótese de contaminação da linha por falta de limpeza. O *setup* portanto, depende da sequência de produção, e como já destacado anteriormente na [Seção 3.2](#), este fator é relevante para estrutura decisória do modelo. A similaridade entre formulações de misturas distintas influencia também no custos das trocas entre misturas e, este fato pode ser comprovada através da descrição da [Tabela 7](#).

A [Tabela 8](#) apresenta a quantidade de mistura para envasar uma unidade de um determinado produto. Após o envase do líquido na linha de envasamento, seguem as etapas sequenciais de fechamento hermético e colocação de lacre, para assim ter um produto final acabado.

O tempos de trocas entre produtos nas envasadoras, bem como o custo para trocar produtos distintos entre períodos consecutivos, são apresentados nas [Tabela 9](#) e [Tabela 10](#), respectivamente.

Tabela 6 – Tempos de troca entre misturas (em horas)

Mistura $j \rightarrow l$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0.25
2	0	0	0	0	0.25
3	0	0	0	0	0.25
4	0	0	0	0	0.25
5	0.25	0.25	0.25	0.25	0

Tabela 7 – Custos de troca entre misturas (em \$)

Mistura $j \rightarrow l$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	20.68
2	0	0	0	0	20.68
3	0	0	0	0	20.68
4	0	0	0	0	20.68
5	20.68	20.68	20.68	20.68	0

Tabela 8 – Quantidade da mistura j para produzir o produto i (em litros)

mistura/produto	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	20	0	0	0	0	0	0
2	0	0	5	20	0	0	0	0
3	0	0	0	0	5	20	0	0
4	0	0	0	0	0	0	20	0
5	0	0	0	0	0	0	0	20

Tabela 9 – Tempos de trocas entre produtos (em horas)

Produto $i \rightarrow p$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2	0.1	0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
3	0.2	0.2	0	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2
4	0.2	0.2	0.1	0	0.2	0.2	0.2	0.2
5	0.2	0.2	0.2	0.2	0	0.1	0.2	0.2
6	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0	0.2	0.2
7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
8	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0

Tabela 10 – Custos de trocas entre produtos (em \$)

Produto $i \rightarrow p$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	20.68
2	0	0	0	0	0	0	0	20.68
3	0	0	0	0	0	0	0	20.68
4	0	0	0	0	0	0	0	20.68
5	0	0	0	0	0	0	0	20.68
6	0	0	0	0	0	0	0	20.68
7	0	0	0	0	0	0	0	20.68
8	20.68	20.68	20.68	20.68	20.68	20.68	20.68	0

Já a [Tabela 11](#) apresenta as demandas de produtos em cada período.

Tabela 11 – Demandas de produtos (i) por período (t)

Demanda	Períodos (t)				
Produtos (i)	1	2	3	4	5
1	240	0	0	0	0
2	400	500	0	0	200
3	50	0	0	0	100
4	150	0	0	0	180
5	200	0	0	0	195
6	950	1000	1000	1000	950
7	0	0	610	0	0
8	0	0	200	0	0

As quantidades de produtos demandadas por período estão limitadas às capacidades mínima e máxima de produção em cada reator sendo $g_{j,m} = 1000$ e $h_{j,m} = 10000$ para toda mistura j , $j = \{1, \dots, 5\}$ em todos os reatores m , $m = \{1, \dots, 4\}$.

Ainda em relação aos parâmetros, a capacidade de processamento, em horas, disponível para reatores e envasadoras, também é limitada em cada período. As capacidades de processamento nos reatores são $cap_{m,t}^{mis} = 24$ horas, para todos os reatores m , $m = 1, \dots, 4$, em todos os períodos t , $t = \{1, \dots, 5\}$. Os tempos de envase nas envasadoras são $cap_{n,t}^{env} = 8$ horas, para todas as envasadoras n , $n = \{1, \dots, 6\}$, em todos os períodos t , $t = \{1, \dots, 5\}$.

Os dados sobre a demanda e tipos de produtos descritos anteriormente foram propostos com base numa possível prática real desenvolvida pela empresa num horizonte de programação de 5 períodos. Desta forma espera-se do modelo uma resposta que atenda as expectativas buscadas na função objetivo em tempo computacional satisfatório. As características descritas configuram um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes multiestágio, realizado em máquinas paralelas distintas, com sequência da produção dependente do tempo. A solução retornada pelo modelo quando submetido a estes dados é apresentada em cada estágio, considerando quantidades produzidas e também os tempos de produção, de acordo com o sequenciamento ajustado pelo modelo.

A Figura 14 define o plano de produção, com as respectivas quantidades produzidas para cada mistura j e também o sequenciamento da produção no reatores, para cada período no 1º estágio. O 1º estágio compreende ainda o armazenamento das misturas, que após o preparo nos reatores, são acondicionados em *buffers*.

Figura 14 – Produção nos reatores e transferência para o *buffer* - 1º estágio

Estágio 1 - Produção nos Reatores + Transferência para o Buffer (Volume em litros)										
Reatores (M)	Períodos									
	t = 1		t = 2		t = 3		t = 4		t = 5	
	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2
1	10000 L	8000 L	1000 L		10000 L		10000 L	1000 L	1000 L	1000 L
2	3250 L		1000 L	9000 L	9000 L	1000 L	1000 L		7975 L	10000 L
3	8200 L	1000 L	9000 L		4000 L		8000 L		4000 L	
4	1000 L	1000 L	10000 L		2200 L	10000 L			4100 L	
Buffer (K)										
1		8000 L				10000 L				
2	3250 L		10000 L							1000 L
3		1000 L	1000 L				10000 L		4100 L	
4			1000 L		9000 L				1000 L	
5	1000 L				4000 L				7975 L	
6		1000 L	9000 L		2200 L		1000 L			
7	8200 L				10000 L			1000 L	4000 L	
8	10000 L			9000 L		1000 L	8000 L			10000 L

LEGENDA

MISTURA	COR
J1	
J2	
J3	
J4	
J5	
Folga	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os tempos início e término da produção nos reatores para cada lote, em todos os períodos do horizonte de planejamento, são apresentados na Figura 16. Também são apresentados os tempos de início da transferência para os *buffers* e completo esvaziamento dos mesmos, que ocorre com a finalização do envase dos produtos na linha de envase.

Figura 15 – Tempos de produção no 1º estágio

Estágio 1 - Produção nos Reatores + Transferência para o Buffer (início → término)										
Reatores (M)	Períodos									
	t = 1		t = 2		t = 3		t = 4		t = 5	
	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2
1	0 → 7	17 → 24	0 → 7		0 → 7		0 → 7	17 → 24	0 → 7	17 → 24
2	0 → 7		0 → 8	16 → 24	0 → 7	17 → 24	0 → 7		0 → 7	17 → 24
3	0 → 8	16 → 24	0 → 7		0 → 7		0 → 7		0 → 8	
4	0 → 7	17 → 24	0 → 7		0 → 7	17 → 24			0 → 7	
Buffer (K)										
1		17 → 26				24 → 26.5				
2	7 → 7.5		7 → 12							24 → 26.75
3		17 → 26	7 → 12				7 → 11.75		7 → 7.9	
4			8 → 8.25		7 → 11.75				7 → 9	
5	7 → 9.875				7 → 8				7 → 9	
6		16 → 24.208	7 → 12		7 → 7.55		7 → 11.75			
7	8 → 9.875				7 → 11.75			24 → 24.25	8 → 9	
8	7 → 9.875			16 → 26.25		17 → 24.25	7 → 11.75			24 → 26.75

Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo retorna também as quantidades de produtos envasados nas envasadoras, considerando a produção lote-a-lote dentro de cada um dos períodos, e para esta instância temos esta solução dada pela [Figura 15](#).

Figura 16 – Envase dos produtos nas envasadoras - 2º estágio

Estágio 2 - Envasamento dos produtos na envasadoras (Quantidades unitárias)											LEGENDA	
Envasadora (N)	Períodos										PRODUTO	COR
	t = 1		t = 2		t = 3		t = 4		t = 5			
	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2		
1		200	50	450	950	50			400	550	i1	
2	140	100			200				180		i2	
3	50								195		i3	
4	550	400							100		i4	
5	150										i5	
6	375	25	1000		110	500	950	50	200		i6	
											i7	
											i8	
											Folga	

Fonte: Elaborada pelo autor.

O tempo de produção, considerando início e término, nas envasadoras está ilustrado pela [Figura 17](#).

Figura 17 – Tempos de produção no 2º estágio

Estágio 2 - Envasamento dos produtos na envasadoras (início → término)										
Envasadora (N)	Períodos									
	t = 1		t = 2		t = 3		t = 4		t = 5	
	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2	o=1	o=2
1		24 → 24.416	8 → 8.25	24 → 26.25	7 → 11.75	24 → 24.25			7 → 9	24 → 26.75
2	8 → 8.2913	24 → 24.208			7 → 8				7 → 7.9	
3	7 → 7.104								7 → 7.4056	
4	7 → 9.875	24 → 26							7 → 7.208	
5	7 → 7.75									
6	8 → 9.875	24 → 24.125	7 → 12		7 → 7.55	24 → 26.5	7 → 11.75	24 → 24.25	8 → 9	

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, temos a [Tabela 12](#) com as variáveis de decisão. Notamos que não há estoque para nenhum produto em qualquer período. Além disso, as demandas solicitadas foram atendidas em cada período.

Em relação à solução das variáveis binárias, descritas na [Tabela 13](#), notamos que houve uma troca entre as misturas j_1 e j_3 , no reator 3, no 2º período e a mesma troca ocorreu no início do 3º período. Na linha de envasamento também houve troca entre produtos numa mesma envasadora em períodos consecutivos. No início do 2º período, ocorreu uma troca entre os produtos i_2 e i_6 na envasadora 6 e também uma troca entre os produtos i_5 e i_2 na envasadora 1. A troca entre os produtos i_2 e i_6 ocorreu novamente no início do 3º período, mas agora na envasadora 1, como nota-se pela ativação das variáveis de troca $Z_{i,p,n,t}$.

Em relação ao tempo de produção nos reatores, notamos que devido à folga na capacidade produtiva estabelecida nos dados, o início da produção entre lotes consecutivos dentro de um mesmo período não está ocorrendo após a finalização da produção do 1º lote. O reator fica um período sem utilização no período, e a finalização do 2º lote ocorre no término do período.

Devido à sincronização entre 1º e 2º estágio, o início do envase dos produtos na linha de envasamento inicia-se com a transferência instantânea da mistura para o *buffer*, e por escoamento gravitacional, esta já pode ser utilizada na linha de envasamento. O término do envase coincide com o completo esvaziamento do *buffer* que armazenava a mistura que origina os produtos.

Para a solução desta instância, o problema ajustado contou com 11696 variáveis, das quais 4360 são variáveis binárias, 496 são variáveis inteiras e 6840 são variáveis contínuas. O valor da função objetivo, devido às características adotadas para esta instância é \$0, e o tempo de processamento de máquina é 5.59 segundos.

Tabela 12 – Variáveis de decisão

Variáveis	Períodos				
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$X_{j,m,t,o}$	$X_{3,1,1,1} = 10000$ $X_{3,1,1,2} = 8000$ $X_{2,2,1,1} = 3250$ $X_{1,3,1,1} = 8200$ $X_{1,3,1,2} = 1000$ $X_{3,4,1,1} = 1000$ $X_{3,4,1,2} = 1000$	$X_{3,1,2,1} = 1000$ $X_{1,2,2,1} = 1000$ $X_{1,2,2,2} = 9000$ $X_{3,3,2,1} = 9000$ $X_{3,4,2,1} = 10000$	$X_{3,1,3,1} = 10000$ $X_{3,2,3,1} = 9000$ $X_{3,2,3,2} = 1000$ $X_{5,3,3,1} = 4000$ $X_{4,4,3,1} = 2200$ $X_{4,4,3,2} = 10000$	$X_{3,1,4,1} = 10000$ $X_{3,1,4,2} = 1000$ $X_{3,2,4,1} = 1000$ $X_{3,3,4,1} = 8000$	$X_{3,1,5,1} = 1000$ $X_{3,1,5,2} = 1000$ $X_{3,2,5,1} = 7975$ $X_{3,2,5,2} = 10000$ $X_{1,3,5,1} = 4000$ $X_{2,4,5,1} = 4100$
$Q_{i,n,t,o}$	$Q_{1,2,1,1} = 140$ $Q_{2,6,1,1} = 375$ $Q_{3,3,1,1} = 50$ $Q_{4,5,1,1} = 150$ $Q_{6,4,1,1} = 550$ $Q_{1,2,1,2} = 100$ $Q_{2,6,1,2} = 25$ $Q_{5,1,1,2} = 200$ $Q_{6,4,1,2} = 400$	$Q_{2,1,2,1} = 50$ $Q_{6,6,2,1} = 1000$ $Q_{2,1,2,2} = 450$	$Q_{6,1,3,1} = 950$ $Q_{7,6,3,1} = 110$ $Q_{8,2,3,1} = 200$ $Q_{6,1,3,2} = 50$ $Q_{7,6,3,2} = 500$	$Q_{6,6,4,1} = 950$ $Q_{6,6,4,2} = 50$	$Q_{2,6,5,1} = 200$ $Q_{3,4,5,1} = 100$ $Q_{4,2,5,1} = 180$ $Q_{5,3,5,1} = 195$ $Q_{6,1,5,1} = 400$
$I_{i,t}$					

Tabela 13 – Variáveis binárias

Variáveis	Períodos				
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$Y_{j,m,t,o}$	$Y_{3,1,1,1} = 1$ $Y_{3,1,1,2} = 1$ $Y_{2,2,1,1} = 1$ $Y_{1,3,1,1} = 1$ $Y_{1,3,1,2} = 1$ $Y_{3,4,1,1} = 1$ $Y_{3,4,1,2} = 1$	$Y_{3,1,2,1} = 1$ $Y_{1,2,2,1} = 1$ $Y_{1,2,2,2} = 1$ $Y_{3,3,2,1} = 1$ $Y_{3,4,2,1} = 1$	$Y_{3,1,3,1} = 1$ $Y_{3,2,3,1} = 1$ $Y_{3,2,3,2} = 1$ $Y_{5,3,3,1} = 1$ $Y_{4,4,3,1} = 1$ $Y_{4,4,3,2} = 1$	$Y_{3,1,4,1} = 1$ $Y_{3,1,4,2} = 1$ $Y_{3,2,4,1} = 1$ $Y_{3,3,4,1} = 1$	$Y_{3,1,5,1} = 1$ $Y_{3,1,5,2} = 1$ $Y_{3,2,5,1} = 1$ $Y_{3,2,5,2} = 1$ $Y_{1,3,5,1} = 1$ $Y_{2,4,5,1} = 1$
$W_{j,m,t,o}$	$W_{3,1,1,1,8} = 1$ $W_{3,1,1,2,1} = 1$ $W_{2,2,1,1,2} = 1$ $W_{1,3,1,1,7} = 1$ $W_{1,3,1,2,6} = 1$ $W_{3,4,1,1,5} = 1$ $W_{3,4,1,2,3} = 1$	$W_{3,1,2,1,3} = 1$ $W_{1,2,2,1,8} = 1$ $W_{1,2,2,2,8} = 1$ $W_{3,3,2,1,6} = 1$ $W_{3,4,2,1,2} = 1$	$W_{3,1,3,1,7} = 1$ $W_{3,2,3,1,4} = 1$ $W_{3,2,3,2,8} = 1$ $W_{5,3,3,1,5} = 1$ $W_{4,4,3,1,6} = 1$ $W_{4,4,3,2,1} = 1$	$W_{3,1,4,1,3} = 1$ $W_{3,1,4,2,7} = 1$ $W_{3,2,4,1,6} = 1$ $W_{3,3,4,1,8} = 1$	$W_{3,1,5,1,4} = 1$ $W_{3,1,5,2,2} = 1$ $W_{3,2,5,1,5} = 1$ $W_{3,2,5,2,8} = 1$ $W_{1,3,5,1,7} = 1$ $W_{2,4,5,1} = 1$
$Z_{j,l,m,t}$		$Z_{1,3,3,2} = 1$	$Z_{1,3,2,3} = 1$		
$\alpha_{i,n,t,o}$	$\alpha_{1,2,1,1} = 1$ $\alpha_{2,6,1,1} = 1$ $\alpha_{3,3,1,1} = 1$ $\alpha_{4,5,1,1} = 1$ $\alpha_{6,4,1,1} = 1$ $\alpha_{1,2,1,2} = 1$ $\alpha_{2,6,1,2} = 1$ $\alpha_{5,1,1,2} = 1$ $\alpha_{6,4,1,2} = 1$	$\alpha_{2,1,2,1} = 1$ $\alpha_{6,6,2,1} = 1$ $\alpha_{2,1,2,2} = 1$	$\alpha_{6,1,3,1} = 1$ $\alpha_{7,6,3,1} = 1$ $\alpha_{8,2,3,1} = 1$ $\alpha_{6,1,3,2} = 1$ $\alpha_{7,6,3,2} = 1$	$\alpha_{6,6,4,1} = 1$ $\alpha_{6,6,4,2} = 1$	$\alpha_{2,6,5,1} = 1$ $\alpha_{3,4,5,1} = 1$ $\alpha_{4,2,5,1} = 1$ $\alpha_{5,3,5,1} = 1$ $\alpha_{6,1,5,1} = 1$
$Z_{i,p,n,t}$		$Z_{2,6,6,2}$ $Z_{5,2,1,2}$	$Z_{2,6,1,3}$		

CONCLUSÃO

Nesta dissertação propusemos um modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes multiestágio, realizado em máquinas paralelas distintas e com sequenciamento da produção dependente do tempo.

O problema desta dissertação foi descrito e possibilitou a implementação de um modelo matemático útil para apoiar decisões relacionadas ao planejamento e controle da produção. As instâncias simuladas são pequenas e possibilitaram o retorno de resultados viáveis para a execução num pequeno horizonte de planejamento.

A prática cotidiana da empresa, apesar de não termos tido a permissão para a continuidade dos estudos por falta de agenda do departamento de produção e orientações do assessoramento jurídico, nos levou a geração de uma instância que descreve um cenário baseado em dados reais. Este cenário pode evidentemente simular uma prática da empresa num dado horizonte de programação e, as misturas e produtos escolhidos para compor os dados utilizados neste modelo foram feitas através de um banco de dados que contém dados bastante aproximados da realidade.

Este trabalho configura um estudo inicial sobre o estudo da produção de fertilizantes foliares líquidos, sendo um trabalho aplicado. Uma perspectiva para trabalhos futuros é submeter o modelo à instâncias geradas aleatoriamente, e também estender o horizonte de planejamento.

Para trabalhos futuros pode-se pensar na possibilidade de minimizar também o uso dos reatores através da variável $Y_{j,m,t,o}$. A integração entre o estágio de produção nos reatores com a transferência para os *buffers* e o estágio na linha de envase deixa as envasadoras em uso numa quantidade de períodos menor que o uso dos reatores como nota-se na [Figura 15](#).

Outra característica desta dissertação é que as trocas entre misturas na linha de produção e entre produtos na linha de envase estão ajustadas para ocorrer apenas entre períodos, e não há possibilidade de ocorrência de trocas num mesmo período. Uma referência para trabalhos futuros com este tipo de abordagem pode ser o trabalho de [Martins \(2017\)](#) em que há a possibilidade de

trocas entre produtos distintos dentro de um mesmo período.

Outra possibilidade de abordagem, visando melhorias no processo de produção através do dimensionamento e sequenciamento dos lotes, é em relação a perspectiva de se iniciar a produção de uma mistura, ou também envase de um produto, num período e terminar no período seguinte. Esta condição foi discutida e proposta no trabalho de [Camargo, Toledo e Almada-Lobo \(2012\)](#), com a inclusão de duas variáveis binárias: uma retorna se o início da produção de um lote for iniciado antes do final do período t (isto é, a produção ocorre dentro do período t) e a outra responde se a produção de um lote termina antes do final do período t (isto é, a produção inicia-se no período $t - 1$ e termina no período t).

As soluções obtidas através de um modelo matemático para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes na produção de fertilizantes foliares líquidos podem ser comparadas com as práticas desenvolvidas por empresas do setor de agrociências e, assim gerar alternativas reais para melhorias dos processos de planejamento e controle da produção.

REFERÊNCIAS

ALMADA-LOBO, B.; KLABJANZ, D.; CARRAVILLA, M. A.; OLIVEIRA, J. F. Single machine multi-product capacitated lot sizing with sequence-dependent setups. **International Journal of Production Research**, v. 45, n. 20, p. 4873–4894, 2007. Citado na página 36.

ALMADA-LOBO, B.; KLABJANZ, D.; GUIMARÃES, L. Modeling lotsizing and scheduling problems with sequence dependent setups. **European Journal of Operational Research**, 2014. Citado na página 16.

ARAUJO, S. A.; ARENALES, M. N.; CLARK, A. R. Lot sizing and furnace scheduling in small foundries. **Computers & Operations Research**, v. 35, p. 916–932, 2008. Citado na página 16.

ARAUJO, S. A. de. **Estudos de Problemas de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP, São Carlos, 1999. Citado na página 26.

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. Citado nas páginas 15, 21, 22, 30 e 32.

BAHL, H. C.; RITZMAN, L. P.; GUPTA, J. N. D. Determining lot sizes and resource requirements. **Operational Research Society of America**, v. 35, n. 3, p. 329–345, 1987. Citado na página 26.

BALDO, T. A.; SANTOS, M. O.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. An optimization approach for the lot sizing and scheduling problem in the brewery industry. **Computers & Industrial Engineering**, v. 72, p. 58–71, 2014. Citado nas páginas 16 e 33.

BALDO, T. A.; SANTOS, M. O.; MORABITO, R. Planejamento e programação da produção de cerveja considerando tanques-pulmão para armazenar cerveja filtrada. **Management Science**, v. 48, p. 1587–1602, 2002. Citado nas páginas 18 e 55.

BILLINGTON, P. J.; MCCLAIN, J. O.; THOMAS, L. J. Mathematical programming approaches to capacity-constrained mrp systems: Review, formulation and problem reduction. **Management Science**, p. 1126–1141, 1983. Citado na página 25.

CAMARGO, V. C.; TOLEDO, F. M. B.; ALMADA-LOBO, B. Three time-based scale formulations for the two-stage lot sizing and scheduling in process industries. **Journal of the Operational Research Society**, v. 63, p. 1613–1630, 2012. Citado nas páginas 16, 18, 33, 53 e 71.

COPIL, K.; WÖRBELAUER, M.; MEYR, H.; TEMPELMEIER, H. Simultaneous lotsizing and scheduling problems: a classification and review of models. **OR Spectrum - Springer**, 2016. Citado nas páginas 21 e 22.

COSTA, L. M. da; SILVA, M. F. de Oliveira e. **A indústria química e o setor de fertilizantes**. Rio de Janeiro: Produção BNDES, 2012. 12-60 p. Citado nas páginas 16 e 17.

CUNHA, A. L. da. **Modelos matemáticos para problemas de planejamento da produção em indústrias de processos**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Campus de São Carlos, ICMC/USP, 2018. Citado na página 48.

DREXL, A.; HAASE, K. Proportional lot sizing and scheduling. **International journal of production economics**, v. 40, p. 73–87, 1995. Citado na página 16.

DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling - survey and extensions. **European Journal of Operational Research**, v. 99, p. 221–235, 1997. Citado nas páginas 22 e 34.

FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. **European Journal of Operational Research**, v. 196, n. 3, p. 697–706, 2009. Citado nas páginas 16, 33 e 48.

FLEISCHMANN, B. The discrete lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs. **European Journal of Operational Research** 75, p. 395–404, 1994. Citado nas páginas 16, 23 e 24.

GUPTAA, D.; MAGNUSSON, T. The capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs and setup times. **Computers & Operations Research**, v. 32, p. 727–747, 2005. Citado nas páginas 16 e 38.

HAASE, K. Capacitated lot-sizing with sequence dependent setup costs. **OR Spektrum**, p. 51–59, 1996. Citado nas páginas 23 e 24.

HAASE, K.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling with sequence-dependent setup costs and times and efficient rescheduling opportunities. **Int. J. Production Economics**, v. 66, p. 159–169, 2000. Citado na página 35.

HARRIS, F. W. How many parts to make at once. **The Magazine of Management**, v. 10, n. 2, p. 135–136, 1913. Citado na página 21.

JAMES, R. J.; ALMADA-LOBO, B. Single and parallel machine capacitated lot sizing and scheduling: New iterative mip-based neighborhood search heuristics. **Computers & Operations Research**, v. 38, n. 12, p. 1816–1825, 2011. Citado nas páginas 16 e 25.

KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. **Science Direct**, p. 365–378, 2003. Citado nas páginas 19, 21 e 22.

KOVÁCS, A.; BROWN, K. N.; TARIM, S. A. An efficient mip model for the capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setups. **Int. J. Production Economics**, p. 282–291, 2009. Citado na página 16.

MAES, J.; MCCLAIN, J. O.; WASSENHOVE, L. N. V. Multilevel capacitated lot sizing complexity and lp-based heuristics. **European Journal of Operational Research**, v. 53, p. 131–148, 1991. Citado nas páginas 25, 30, 31 e 32.

MARTINS, A. T. **Problema da programação da produção de bebidas à base de frutas: modelos de otimização e métodos heurísticos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos - São Carlos, Departamento de Engenharia de Produção/UFSCAR, 2017. Citado nas páginas 18, 33, 52 e 70.

SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. **Administração da Produção**. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2002. Citado nas páginas 13 e 14.

TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, L. J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. **Management Science**, v. 35, n. 3, p. 353–366, 1989. Citado nas páginas 20, 24 e 28.

VARGAS, L.; ROMAN, E. S. Conceitos e aplicações dos adjuvantes. **Documentos on line - Embrapa**, 2006. Citado na página 43.

WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. **Management Science**, v. 5, n. 1, p. 89–96, 1958. Citado nas páginas 20, 21, 22 e 27.

WHITIN, T. M. The theory of inventory management. **Princeton University Press**, v. 2, n. 1, 1957. Citado na página 22.