UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

A influência das commodities no Ibovespa: em busca de um modelo preditivo

Carlos Eduardo Alonso

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria (MECAI)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Carlos Eduardo Alonso

A influência das commodities no Ibovespa: em busca de um modelo preditivo

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática, Estatística e Computação

Orientador: Prof. Dr. Vicente Garibay Cancho

USP – São Carlos
Janeiro de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A454i Alonso, Carlos Eduardo
 A influência das commodities no Ibovespa: em
 busca de um modelo preditivo / Carlos Eduardo
 Alonso; orientador Vicente Garibay Cancho. -- São
 Carlos, 2021.
 78 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística
 e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de
 Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade
 de São Paulo, 2021.

 1. Commodities. 2. Ibovespa. 3. Séries
 Temporais. 4. Volatilidade. 5. DCC-GARCH. I.
 Garibay Cancho, Vicente, orient. II. Título.

Carlos Eduardo Alonso

**Commodities influence on Ibovespa: searching for a
predictive model**

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Professional Masters in Mathematics, Statistics and Computing Applied to Industry. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics, Statistics and Computing

Advisor: Prof. Dr. Vicente Garibay Cancho

USP – São Carlos
January 2021

Este trabalho é dedicado a todas as pessoas inquietas que, contrariando as urgências do mundo moderno, entregam-se a busca pela sua evolução pessoal, através da consciência plena e da paz interna.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é a realização de um sonho de mais de 20 anos, quando ao final da graduação, a realidade profissional se impôs e minha paixão pelo mundo acadêmico e pelo aprendizado foi esquecido. Nesta jornada, agradeço a minha esposa por todo o carinho, força e paciência durante a realização deste projeto. Agradeço também ao meu orientador, Dr. Vicente Cancho, por acreditar no meu trabalho e, com a sabedoria de um grande educador, me ajudar a trilhar este caminho acadêmico que, de nada tem de trivial, para uma pessoa como eu. E, por fim, agradeço à USP, ao ICMC e ao CEMEAI por investir no desenvolvimento acadêmico de profissionais da iniciativa privada e, principalmente, por criar esta oportunidade única para a realização do meu sonho.

*“What is past is left behind.
The future is as yet unreached.
Whatever quality is present
you clearly see right there,
right there.”*
*(Gautama Buddha,
Bhaddekaratta Sutta,
tradução por Thanissaro Bhikkhu)*

RESUMO

ALONSO, C. E. **A influência das commodities no Ibovespa: em busca de um modelo preditivo.** 2021. 78 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Nos últimos 20 anos, a economia brasileira sofreu um forte processo de desindustrialização caracterizado pela ascensão do setor agrícola, com destaque para a produção e exportação de commodities, como a base do crescimento do PIB brasileiro. As commodities brasileiras, incluindo as de origem mineral (petróleo e ferro), tornaram-se também uma das principais fontes de divisas em moeda forte, dado seu papel predominante na pauta exportadora brasileira.

Os movimentos das bolsas de valores mundiais refletem não apenas o desempenho financeiro das empresas que lastreiam os papéis negociados, como também as condições e perspectivas econômicas dos mercados locais. Em um ambiente de livre circulação de capitais internacionais, bolsa de valores com baixa liquidez e número de papéis negociados limitados, como a Bovespa, são mais sensíveis ao comportamento de investidores institucionais estrangeiros. A crescente importância das commodities na economia as tornaram um importante indicador de saúde econômica do país, contribuindo para a percepção de risco do mercado financeiro.

Este trabalho tem como objetivo estudar, através de um modelo de heterocedasticidade condicional (DCC-GARCH), os co-movimentos das volatilidades do índice Bovespa e de índices de commodities para a construção futura de um modelo preditivo robusto para o mercado de capitais brasileiro. Os resultados deste trabalho confirmam o potencial explicativo das commodities para os movimentos do Ibovespa, principalmente em períodos de grande volatilidade, marcados por crise econômica e aversão de investidores internacionais ou por forte expansão econômica e grande euforia no mercado financeiro.

Palavras-chave: Commodities, Ibovespa, Séries Temporais, DCC-GARCH, Volatilidade.

ABSTRACT

ALONSO, C. E. **Commodities influence on Ibovespa: searching for a predictive model.** 2021. 78 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In the last 20 years, the Brazilian economy has faced persistent deindustrialization process followed by the ascension of the agricultural business, mainly commodities production, as the main source of the Brazilian economy growth. Additionally, Brazilian commodities, including mineral ones (oil and iron mainly), has become one of the main sources of hard currency due to their dominance on current Brazilian exports.

Worldwide stock exchange movements, besides their dependence on the traded companies' financial performances, are sensible to current economic conditions and perspectives of local markets. On a free capital flow environment, stock exchanges with low liquidity and limited traded equities availability, as the Brazilian stock exchange (Bovespa), are more sensitive to international investors behavior. As a result of the growing importance of the commodities in the Brazilian economy, their prices were incorporated among other economic variables on country's economic health assessment and financial market's risk perception.

The main objective of this work is to study the volatilities co-movements of the Ibovespa and commodities indexes, through conditional heteroscedasticity models (DCC-GARCH), in order to support the development of a prospective robust predictive model for the Brazilian capital market. The results presented by this work strengthen the assumption that commodities prices have significant explanatory power for the Ibovespa movements, mainly on periods of high volatility, due to economic crises or economic expansion where investors confidence ranges from risk aversion to euphoria.

Keywords: Commodities, Ibovespa, Time Series, DCC-GARCH, Volatility.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ibovespa (2004 a 2015)	22
Figura 2 – ACF - Retornos Ibovespa (2000 a 2017)	23
Figura 3 – Exportações Totais - 2000 a 2017	25
Figura 4 – Exportações Commodities - 2000 a 2017	25
Figura 5 – CC-CRB - Composição do Índice	48
Figura 6 – Evolução dos índices (2004 a 2015)	49
Figura 7 – Evolução dos log retornos dos índices (2004 a 2015)	49
Figura 8 – Evolução dos índices (2004 a 2015)	51
Figura 9 – Preços Internacionais Commodities - 2017 a 2015	52
Figura 10 – IBOV log retorno - Distribuição	54
Figura 11 – Autocorrelação - Log Retorno IBOV	54
Figura 12 – Resíduos Arma - IBOV	55
Figura 13 – ACF - Quadrado dos Resíduos Arma - IBOV	55
Figura 14 – CC-CRB Log Retorno - Distribuição	57
Figura 15 – Autocorrelação - CC-CRB Log Retorno	57
Figura 16 – Resíduos Arma - CC-CRB	58
Figura 17 – ACF - Quadrado dos Resíduos Arma - CC-CRB	58
Figura 18 – ICB USD Log Retorno - Distribuição	60
Figura 19 – Autocorrelação - ICB USD Log Retorno	61
Figura 20 – Resíduos Arma - ICB USD	61
Figura 21 – ACF - Quadrado dos Resíduos Arma - ICB USD	62
Figura 22 – Correlação Condicional - CC-CRB e ICB USD	64
Figura 23 – Correlação Condicional - IBOV e CC-CRB	65
Figura 24 – Correlação Condicional - IBOV e ICB USD	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Características das Séries Temporais Financeiras e Metodologia Aplicada	21
1.2	A força das commodities na economia brasileira	24
1.3	Objetivo do Trabalho	26
1.4	Organização do Trabalho	26
2	REFERENCIAL TEÓRICO	27
2.1	Revisão da Produção Acadêmica	27
2.1.1	<i>Modelos de Precificação Clássicos</i>	27
2.1.2	<i>Relação entre preço de ativos e commodities</i>	28
2.2	Modelos ARMA - Autorregressivo de Médias Móveis (<i>Autoregressive Moving Averages</i>)	30
2.2.1	<i>Modelos AR - Autorregressivos</i>	31
2.2.2	<i>Modelos MA - Média Móvel (Moving Average)</i>	32
2.2.3	<i>Modelos ARMA</i>	33
2.3	Volatilidade e Modelos ARCH	35
2.4	Modelos GARCH	36
2.4.1	<i>Propriedades do Modelo GARCH</i>	38
2.4.2	<i>Estimação de Parâmetros - Univariado</i>	39
2.4.3	<i>Modelos Multivariados</i>	40
2.4.4	<i>Estimação de Parâmetros - Modelos Multivariados</i>	43
3	APLICAÇÃO	47
3.1	Análise das Séries Temporais	47
3.2	Estrutura da Análise	52
3.3	Análise e Modelagem das Series Financeiras Individuais	53
3.3.1	<i>Ibovespa ("IBOV")</i>	53
3.3.2	<i>Thompson Reuters Core Commodities CRB ("CC-CRB")</i>	56
3.3.3	<i>Índice de Commodities do Brasil em dólar - ("ICB USD")</i>	59
3.4	Modelagem Conjunta das Séries Financeiras - GARCH Multivariado	63
4	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	67
4.1	Conclusões	67

REFERÊNCIAS	69
APÊNDICE A	
COEFICIENTES E INDICADORES - GARCH MUL-	
TIVARIADO	75

INTRODUÇÃO

Por mais de 50 anos, modelos de precificações de ativos financeiros despertam grande interesse acadêmico. Tais modelos são peças-chaves para explicar e prever retornos destes ativos além da gestão de riscos de *portfolios* de investimentos, dois tópicos de grande relevância para o mercado financeiro. O CAPM (Capital Asset Pricing Model) ([SHARPE, 1964](#)), o modelo mais conhecido desta linha de pesquisa, determina que o retorno de um ativo financeiro é composto por uma taxa livre de risco adicionada ao risco de mercado, este, por sua vez, multiplicado por um coeficiente β que representa a sensibilidade do ativo em relação ao comportamento do mercado geral. Um ativo mais volátil ou, em outras palavras, mais arriscado (com grandes variações de retornos), apresenta um β alto em valor absoluto quando comparado a um ativo mais estável e seguro. Apesar de amplamente aceito no meio acadêmico, este modelo passou a ser questionado após surgirem evidências que parte dos retornos esperados não eram explicados apenas pelo risco de mercado, mas por outros fatores de risco. Surgiram, então, novos modelos como o Fama French 3 fatores ([FAMA; FRENCH, 1992](#)), cujos os preços dos papéis são correlacionados ao valor e ao tamanho da empresa além do risco do mercado de capitais, o Carhart 4 fatores, que adiciona o fator momentum ([CARHART, 1997](#)), e o Fama French 5 fatores ([FAMA; FRENCH, 2015](#)) que adiciona o fator investimentos, além de novas abordagens de precificação como a *Arbitrage Pricing Theory* ([STEPHEN, 1976](#)) que explora modelos multi-fatoriais sob o conceito de arbitragens.

As produções acadêmicas de maior relevância e influência nesta área de pesquisa estão concentradas no mercado de capitais americano, que se destaca pela longa série histórica de pregões, iniciada na década de vinte do século passado, e pelo vasto número de ativos e segmentos econômicos negociados durante todo este tempo (mais de 7000 papéis com liquidez diária).

O mercado brasileiro de capitais, apesar de sua origem datada do período colonial, pouco se desenvolveu durante este período. Foram de grande influência para este atraso a ausência de marco legal modernizante (surgido apenas na década de 60), que equiparam a

estrutura e controle deste mercado e dos agentes envolvidos aos padrões dos principais mercados mundiais, e a estabilidade macroeconômica do país. Como consequência, o mercado de capitais brasileiro, concentrado na B3 (antiga BMFBovespa), possui um histórico de apenas 20 anos de pregões em condições econômicas estáveis e, no máximo, 137 ativos com liquidez mínima para negociações diárias (FILHO, 2016). Produções acadêmicas com foco no mercado de capitais brasileiro, portanto, são diretamente impactadas pelas limitações da série histórica e tamanho deste mercado. Não há consenso quanto a validade dos principais modelos de precificação de ativos no Brasil, nem das estimativas dos prêmios associados aos principais fatores de risco.

Outra realidade do mercado de capitais brasileiros é sua concentração em segmentos com grande exposição a políticas macroeconômica, com destaque para instituições financeiras em geral (35,5% do Ibovespa); commodities, com destaque para o setor de óleo, gás e mineração (25,0% do Ibovespa); ou gerência governamental, com destaque para estatais (não incluindo Petrobrás) e concessões em rodovias e utilidades como energia, telecomunicações, saneamento (9,4% do Ibovespa) (B3, 2019). Além da qualidade e saúde financeira das empresas que lastreiam os ativos negociados na B3, as condições econômicas do país e ações políticas direcionadas ao desenvolvimento e modernização do país tem grande impacto na precificação destes ativos.

Nas últimas décadas, as commodities tornaram-se a principal fonte de divisas em moeda forte para a economia brasileira. Entre 1995 e 2017, a participação destes insumos na pauta de exportação do país saltou de 46% para 63% (UNCTAD, 2019). Dada sua importância para o equilíbrio da balança de pagamentos e obtenção de recursos externos para o desenvolvimento econômico, commodities tornaram-se uma das principais variáveis para mensurar o quão saudável está a economia do país.

Apesar da importância e fortes evidências científicas, construídas nas últimas décadas, dos modelos de precificação de ativos tradicionais (CAPM e APT), existe uma linha de pesquisa que busca uma abordagem alternativa a precificação dos ativos financeiros (ações ou *equities*). Seu foco é explorar as relações entre os preços dos *equities* e variáveis exógenas ao mercado de capitais que podem ter grande influência na economia ou no mercado onde estão inseridas as empresas cujas ações são negociadas na bolsa de valores. Dentre estas variáveis, destacam-se juros, câmbio e preço das commodities. Commodities tornaram-se objetos amplamente estudados em função de suas crescentes importâncias para a economia mundial, ainda mais para os países que dependem economicamente de suas exportações, como o Brasil, e pelo processo de financeirização a que foram submetidas. Commodities passaram a ser ativos financeiros, com grande importância para diversificação de riscos, atraindo considerável influxo de capitais (ADAMS; GLÜCK, 2015). O crescente mercado destes ativos passou a atuar em sinergia com o tradicional mercado de capitais.

Pesquisas nesta área têm se concentrado a atenção na caracterização das commodities como estratégia eficiente para diversificação de investimentos. Trabalhos como Gorton e Rouwenhorst (2006), Malik e Ewing (2009), Roll (2013), encontraram baixas correlações dinâmicas

entre preços de commodities e *equities*, confirmando o papel da commodities na diversificação. Estes resultados são questionados por uma série de trabalhos que identificaram alterações nas correlações dinâmicas em diferentes ciclos econômicos. [Creti, Joëts e Mignon \(2013\)](#) e [Büyükkşahin e Robe \(2014\)](#), para citar alguns exemplos, identificaram correlações positivas e crescentes, principalmente durante períodos de turbulência econômica como a crise de 2008.

No geral, estas pesquisas tomaram como base as dinâmicas dos mercados de capitais de países desenvolvidos, com grande ênfase às commodities energéticas, em especial petróleo e gás, em função de sua grande relevância para a economia mundial. Alguns trabalhos porém destacam-se ao analisar o impacto de diferentes commodities em mercados emergentes, como [Tang e Xiong \(2012\)](#) que analisa as correlações entre índices de papéis emergentes com diferentes commodities ou [Boyrie e Pavlova \(2018\)](#) que analisa os comportamentos dos mercados de capitais de países desenvolvidos e emergentes em relação aos movimentos dos preços de commodities. Contrariando os modelos tradicionais de precificação reconhecidos no meio acadêmico, este trabalho apoia-se na tese de que tais modelos não são suficientes para explicar o movimento dos ativos financeiros brasileiros devido a percepção do risco da bolsa de valores brasileira estar atrelada às condições econômicas do país. Em outras palavras, quanto melhor forem as perspectivas futuras do Brasil, mais valorizados serão os ativos financeiros locais. Considerando o Ibovespa o principal indicador de valor dos ativos financeiros negociados em bolsa e, dada a importância das commodities para o crescimento da economia brasileira, este trabalho visa estudar uma possível correlação entre os movimentos históricos do Ibovespa (IBOV) e os ciclos das commodities para determinar um modelo preditivo do comportamento da bolsa de valores brasileira.

1.1 Características das Séries Temporais Financeiras e Metodologia Aplicada

Na literatura acadêmica, as análises de séries financeiras concentram-se nas suas variações temporais, conhecidas também como retornos. Suas propriedades estatísticas permitem uma melhor análise do comportamento das séries que o simples movimento histórico dos preços. Este trabalho, em linha com as produções na área, será desenvolvido com as séries de log-retorno para os índices Ibovespa (IBOV) e de commodities.

Log-retornos, ou simplesmente retornos, para um instante t é definido como:

$$y_t = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = p_t - p_{t-1},$$

onde:

y_t : log retorno do ativo no instante t ,

p_t : preço do ativo no instante t .

Séries de retornos financeiros apresentam diversas características em comum, dentre elas destacam-se:

- estacionariedade
- concentração de volatilidade
- autocorrelação do quadrado dos retornos
- caudas pesadas e curtose para distribuição incondicional dos retornos
- fraca dependência linear.

Ao analisar o histórico do Ibovespa (IBOV), entre os anos de 2000 e 2017, é possível identificar importantes características das séries de retornos financeiros em geral. Uma das principais é a **estacionariedade**. Séries históricas de preços (Figura 1a) indicam claramente tendências e, em alguns casos, movimentos sazonais que, por sua vez, são expurgados na séries de retornos (Figura 1b).

Figura 1 – Ibovespa (2004 a 2015)

Conhecida no mercado financeiro como volatilidade, a variância dos retornos financeiros é fundamental para definição de estratégias de investimentos e diversificação de riscos em função do seu comportamento no tempo. Séries de retornos financeiros em geral apresentam concentrações de volatilidade, marcadas por períodos de alta e baixa volatilidade. No histórico de retornos do Ibovespa (Figura 1b), por exemplo, nota-se um período de forte volatilidade por volta do ano de 2009, em linha com a crise financeira mundial originada pelos *subprimes* americanos. Neste mesmo período, é possível notar que choques negativos possuem um impacto maior sobre as variância dos retornos. Tais características indicam um comportamento tipicamente heterocedástico das variâncias dos retornos financeiros.

Séries de retornos financeiros, em geral, não apresentam autocorrelação. Porém, ao analisar os quadrados dos retornos, é possível detectar forte autocorrelação. Séries de retornos financeiros são, portanto, não correlacionada porém dependentes. O histórico dos retornos do Ibovespa reforçam esta característica. Conforme apresentado na Figura 2, não é possível identificar qualquer autocorrelação entre os retornos do Ibovespa, porém os quadrados dos retornos apresentam autocorrelações para lags até 50 dias, com forte correlação nos primeiros 20 dias de lag.

Para o desenvolvimento deste trabalho, é essencial aplicar um modelo estatístico que melhor se ajuste às principais características das séries financeiras, como heterocedasticidade condicional e autocorrelações dos quadrados dos retornos. Para tanto, foi selecionado o modelo GARCH - *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (BOLLERSLEV, 1986; NELSON, 1991). Esta classe de modelos, ao incorporar a variância condicional, autocorrelação dos quadrados e considerar distribuições mais pesadas que a normal na modelagem de séries temporais financeiras, tornou-se uma importante ferramenta para esta área de estudos.

Figura 2 – ACF - Retornos Ibovespa (2000 a 2017)

Fonte: Elaborada pelo autor.

1.2 A força das commodities na economia brasileira

Nas últimas décadas, o setor industrial vêm sofrendo uma redução contínua na participação do PIB mundial, com queda de 24,9% para 16,6% entre os anos 1970 e 2007 (BONELLI; PESSÔA, 2010). O mesmo pode ser observado na economia brasileira, porém, ao contrário dos países desenvolvidos onde o processo de desindustrialização foi acompanhado por um vigoroso crescimento na área de serviços e desenvolvimento tecnológico, a atividade industrial é superada pela vocação extrativista e agrícola do país.

O setor agrícola, com participação de 21,1% no PIB brasileiro em 2018 (ESALQ, 2018), é hoje um dos principais motores da economia brasileira. As commodities, em especial as commodities agrícolas, por suas vez, tornaram-se o principal produto exportado pelo Brasil (Figura 3. Entre 1995 e 2017, a exportação de commodities cresceu, em média, 11,4% ao ano (MDIC, 2019), enquanto que o total de exportação brasileiras cresceu, em média, 8,4% no mesmo período. Com isto, commodities passaram de 46% para 63% da pauta exportadora brasileira (UNCTAD, 2019), com destaque para commodities agrícolas (40%), minérios (14%) e petróleo e derivados (9%). Commodities, portanto, tornaram-se um dos principais meios para obtenção de divisas em moeda forte e, um importante fator para o desenvolvimento da economia nacional. Quanto maior a disponibilidade de commodities para exportação e, mais valorizado forem seus preços, maior os recursos disponíveis para investimentos e políticas de desenvolvimento do país e, conseqüentemente, maior as perspectivas econômicas futuras.

Outra característica importante relacionada às commodities brasileiras é a grande concentração da produção e exportação em muito poucos produtos. Cerca de 80% das exportações de commodities brasileiras, entre 2000 e 2017, estão restritas a apenas 5 (cinco) produtos (Figura 4: Soja, Petróleo, Ferro, Açúcar e Papel (MDIC, 2019).

¹ Disponível em <http://www.mdic.gov.br/balanca/SH/GRUPO_EXP.xlsx>. Acesso em 20 de Outubro de 2018.

Figura 3 – Exportações Totais - 2000 a 2017 (em USD Mil - Acumulado 12 Meses)¹

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4 – Exportações Commodities - 2000 a 2017 (em USD Mil - Acumulado 12 Meses)¹

Fonte: Elaborada pelo autor.

1.3 Objetivo do Trabalho

Os movimentos das bolsas de valores mundiais estão relacionados não apenas ao desempenho financeiro e perspectivas de crescimento das empresas cujos papéis são negociados, mas também às perspectivas econômicas dos países que as sediam. Portanto, o índice de uma bolsa de valores, assim como outros indicadores macroeconômicos como o PIB, juros, inflação, ajudam investidores a analisar as condições econômicas atuais e futuras de um país.

Dado que o Brasil é uma país cuja economia vem se especializando na produção e exportação de commodities há quase duas décadas, é esperado que as flutuações dos preços internacionais destes produtos possam impactar diretamente nas condições econômicas do país. Somando a isto, neste mesmo período, o mercado de capitais brasileiro passou a atrair cada vez mais os interesses de grandes investidores institucionais estrangeiros, atraídos pela estabilização econômica e boas perspectivas econômicas do país. Tais investidores, cujo capital passou a ter um peso relevante não apenas em investimentos de renda variável (bolsa de valores incluído) como investimentos diretos na economia brasileira, adquiriram grande poder de influência nos preços dos ativos locais.

O principal objetivo deste trabalho é analisar se há uma correlação entre as perspectivas futuras dos preços das commodities, capturadas pelas flutuações dos índices de contratos futuros das commodities (ou simplesmente "índice de futuros" ou "futuro das commodities"), e as perspectivas econômicas do país que, por sua vez, são refletidas no principal índice da bolsa brasileira, o Ibovespa (IBOV). Através de modelos de heterocedasticidade condicional (GARCH), este trabalho visa estudar os co-movimentos de índices de commodities nacionais e internacionais e o Ibovespa, relacionando-os com os principais fatos econômicos do país no período analisado.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está estruturado em 4 capítulos, incluindo esta introdução. O Capítulo 2 apresenta um resumo das produções acadêmicas relacionadas aos modelos tradicionais de precificação de ativos financeiros e pesquisas relacionadas às correlações entre movimentos do mercado de capitais com variáveis exógenas (commodities, em especial). Neste mesmo capítulo, será apresentado o modelo GARCH Multivariado, fatos teóricos associados e aplicações práticas. O Capítulo 3 apresenta uma análise das séries temporais aplicadas ao problema (Ibovespa e commodities), descreve a aplicação dos modelos propostos no capítulo anterior e compara os resultados obtidos. O Capítulo 4 abre com as conclusões do trabalho apresentado e encerra-se com possíveis caminhos que esta pesquisa poderá seguir no futuro.

REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Revisão da Produção Acadêmica

2.1.1 Modelos de Precificação Clássicos

Modelos de precificação de ativos surgiram com a teoria moderna dos portfólios de Markowitz ([MARKOWITZ, 1952](#)), seguido por [Sharpe \(1964\)](#) e [Lintner \(1965\)](#) no desenvolvimento do CAPM (Capital Asset Pricing Model). Contrariando o modelo CAPM, cuja principal característica era a dependência linear dos retornos dos papéis ao risco de mercado, Stephen Ross publicou uma nova teoria, a APT - *Arbitrage Pricing Theory* ([STEPHEN, 1976](#)), cujos fundamentos definiram a base teórica para o desenvolvimento de modelos multifatoriais, além do conceito de risco sistemático.

A partir dos anos 80, estudos empíricos confirmaram novas relações de risco e retorno não explicados pelo o modelo CAPM. Chamados de “anomalias” por [Fama e French \(2008\)](#), tais estudos demonstraram significância estatísticas para fatores como tamanho ([BANZ, 1981](#)), valor ([FAMA; FRENCH, 1992](#)), momentum ([CARHART, 1997](#)), entre outros. A partir destes estudos, surgiram novos modelos multifatoriais, cujas capacidades explanatórias apresentaram resultados superiores ao clássico CAPM. Dentre os modelos propostos, destacam-se o Fama French 3 fatores, Carhart 4 fatores, Fama French 5 fatores ([FAMA; FRENCH, 2015](#)). Estes modelos foram submetidos a uma série de testes empíricos quanto à capacidade de explicar as diferenças seccionais (*cross-section*) dos retornos e, através destes testes, surgiram modelos de avaliação que são amplamente utilizados nesta área de pesquisa. Destacam-se os modelos propostos por [Black et al. \(1972\)](#) e [Fama e MacBeth \(1973\)](#)

A vasta produção acadêmica nesta área foi elaborada com base no mercado de capitais americano, caracterizado por estabilidade, longas séries históricas (a partir de 1927) e alta disponibilidade de papéis. O mercado brasileiro, por outro lado, é caracterizado por uma curta

série histórica, em função de décadas de hiperinflação e políticas econômicas heterodoxas, alta volatilidade e baixa adesão de empresas. Portanto, um dos pilares da pesquisa local não se resume apenas a seleção de modelos estado-da-arte, mas a identificação de quais modelos/fatores apresentem relevância estatística quando aplicadas às características do mercado local.

No Brasil, a produção acadêmica nesta área de pesquisa é focada em três importantes pontos: i) [Málaga e Securato \(2004\)](#), [Chague \(2007\)](#), [Santos, Famá e Mussa \(2012\)](#), [Rogers e Securato \(2009\)](#), [Mussa \(2012\)](#), [Martinsa e Jr \(2015\)](#), [Varga e Brito \(2016\)](#), entre outros, buscaram testar a validade e/ou capacidade explanatória dos modelos de precificação de ativos no mercado brasileiro; ii) [Lucena e Figueiredo \(2008\)](#) propuseram alterações aos modelos ou metodologias para adequá-los às características do mercado brasileiro e; iii) [Filho \(2016\)](#) investigou as limitações no mercado brasileiro para aplicação de modelos multifatoriais e suas metodologias

2.1.2 Relação entre preço de ativos e commodities

Historicamente, commodities foram consideradas importante ativos para diversificação de portfólios de investimentos e redução de riscos. A financeirização das commodities, tendência global que envolve um grande influxo de capitais especulativos em busca de retornos para além do mercado de capitais, por sua vez, tem alterado as dinâmicas destas commodities, aumentando suas correlações com as flutuações históricas das ações de empresas e, o consequente transbordamento da volatilidade ([FALKOWSKI, 2011](#); [TANG; XIONG, 2012](#); [ADAMS; GLÜCK, 2015](#)). Esta tendência histórica se acentuou após a crise financeira de 2008, colocando dúvidas sobre seu papel como um fator de diversificação.

Em geral, a produção acadêmica têm se concentrado nas análises das correlações temporais entre os retornos dos *equities*, representado por índices constituídos por papéis de um ou mais mercados, e retorno dos preços das commodities, que pode ser representado por variações de índices específicos do setor ou dos seus preços futuros individuais. Tais pesquisas visam identificar modelos de co-integração das séries históricas analisadas, eventuais alterações nos comportamentos devido às novas dinâmicas do mercado financeiro (financeirização das commodities, por exemplo) e os potenciais impactos nas estratégias de diversificação de risco. Os resultados, porém, são inconclusivos já que tal produção aborda diversos modelos e ativos em diferentes mercados e horizontes de tempo.

Muitos estudos creditam às commodities um importante papel na diversificação de riscos. [Gorton e Rouwenhorst \(2006\)](#), ao estudarem os prêmios de riscos atrelados ao futuro das commodities, entre os anos de 1959 e 2004, identificaram uma alta correlação negativa entre as commodities e retorno dos *equities*, atribuindo a este comportamento reações diferentes de cada ativo aos ciclos econômicos. [Malik e Ewing \(2009\)](#), através da introdução de quebras estruturais ao modelos GARCH bivariados, detectaram forte transbordamento de volatilidade entre *equities* americanos e preços do petróleo e, portanto, asseguram a eficácia no uso das commodities (neste

caso o petróleo) em estratégias de hedging (proteção a quedas no mercado). Este trabalho é corroborado por [Chong e Miffre \(2010\)](#) e [Arouri e Nguyen \(2010\)](#), que, por sua vez, encontraram uma redução nas correlações dinâmicas entre commodities e índices de papéis nos períodos de crise, indicando um potencial benefício para diversificação nestes momentos. [Roll \(2013\)](#) confirma a existência de diferentes ciclos econômicos para *equities* e commodities.

Outros trabalhos buscaram analisar as correlações entre estes dois ativos em diferentes mercados, além de explorar novas commodities. [Zhu, Li e Li \(2014\)](#) encontraram fracas evidências de dependência entre índice de papéis asiáticos e preço do petróleo, enquanto que, [Graham, Kiviahio e Nikkinen \(2013\)](#), ao analisar as correlações temporais entre o índice de commodities S&P 500, um dos principais índice de papéis americanos, e S&P GSCI, índice de commodities, confirmam a importância das commodities como forma de diversificação.

Por outro lado, trabalhos como [Büyüksahin, Haigh e Robe \(2009\)](#), [Filis, Degiannakis e Floros \(2011\)](#), [Creti, Joëts e Mignon \(2013\)](#) e [Büyüksahin e Robe \(2014\)](#), identificaram correlações positivas e crescentes, principalmente durante períodos de turbulência econômica, como a crise de 2008, enfraquecendo a tese de diversificação de riscos através das commodities. [Wen, Wei e Huang \(2012\)](#), ao investigarem a dependência temporal entre commodities de energia e índices de ações americano (S&P 500) e chineses (Shanghai e Shenzhen), reforçam a alteração no comportamento destes ativos no período posterior a crise. Adicionalmente, [Delatte e Lopez \(2013\)](#) encontraram evidências da presença de fortes correlações temporais não apenas em períodos de crise financeira. [Büyüksahin, Haigh e Robe \(2009\)](#) aplicam técnicas de co-integração recursivas e correlações dinâmicas, enquanto que [Filis, Degiannakis e Floros \(2011\)](#) e [Creti, Joëts e Mignon \(2013\)](#) utilizam modelos de GARCH para estudar as correlações temporais entre *equities* e commodities. [Wen, Wei e Huang \(2012\)](#) e [Delatte e Lopez \(2013\)](#) apoiam suas pesquisas em modelos de cópulas e [Mensi et al. \(2013\)](#) aplicam modelos de VAR-GARCH para encontrar altas correlações temporais entre S&P 500 e índices de ouro e petróleo (WTI). [Berger e Uddin \(2016\)](#) aprofundaram o estudo da estrutura de dependência através da decomposição (*wavelet decomposition*) dos retornos destes ativos em tendências de curto e longo prazo, incluindo a influência de incertezas políticas. Incertezas políticas e econômicas são fatores de grande impacto na precificação dos ativos financeiros, sejam *equities* ou commodities, e possuem grande influência nas estratégias de diversificação de portfólios ([BLOOM, 2014](#)).

Os principais trabalhos apresentados nesta área de pesquisa concentram-se na análise do mercado de capitais de país desenvolvidos, e apoiam-se em commodities de grande importância para estes mercados. São poucas as pesquisas desenvolvidas para os mercados emergentes e, na sua maioria, apoiadas apenas nas dinâmicas do preço do petróleo. Dentre estas pesquisas, destacam-se [Soytas et al. \(2009\)](#) que analisam as correlações entre as commodities, juros e câmbio para o mercado turco, [Masih, Peters e Mello \(2011\)](#) cujo foco é a análise da dependência entre no mercado sul-coreano de capitais e o preço do petróleo, [Basher, Haug e Sadorsky \(2012\)](#) que analisam as dinâmica do preço do petróleo, câmbio e preço dos papéis dos mercados emer-

gentes. [Boyrie e Pavlova \(2018\)](#), através de modelos de correlação condicional dinâmica (DCC), identificam diferentes correlações e transbordamento de volatilidade entre commodities e mercados de capitais de economias desenvolvidas e emergentes. Países asiáticos, segundo este trabalho, apresentam baixas correlações quando comparados aos mercados desenvolvidos, enquanto que, países latino-americanos apresentam maior grau de co-integração com as commodities. [Tang e Xiong \(2012\)](#) encontraram correlações crescentes entre commodities e MSCI Emerging Markets Index, índice de ações construído para avaliar os retornos dos mercados emergentes. Porém, ao analisarem os co-movimentos entre futuro de commodities e retornos do mercado chinês de capitais, encontraram relativa estabilidade. Por fim, [Sadorsky \(2014\)](#), ao estudar a correlação entre *equities*, preço do petróleo em conjunto com outras commodities como cobre e trigo, encontrou evidências de diversificação. Em todos os casos, comprova-se a importância do petróleo para estratégias de diversificação de riscos.

Entre as pesquisas desenvolvidas para mercados emergentes, poucos se aventuram para além das relações com os preços do petróleo e, mais importante, para as dinâmicas presentes nos mercados emergentes altamente dependentes da exportação do mais variado conjunto de commodities. Dentre estes trabalhos, destaca-se [Bakshi, Panayotov e Skoulakis \(2010\)](#) que utilizam o BDI (Baltic Dry Index), índice mundial do custo de transporte marítimo, e [Jacobsen, Marshall e Visaltanachoti \(2018\)](#) que aplicam índices de metais não ferrosos (cobre e alumínio, por exemplo).

No Brasil, são raras as publicações nesta área de estudos e, portanto, com um grande potencial para a pesquisa científica. [Jr et al. \(2010\)](#), através de técnicas de DCCA (*Detrended Cross-Correlation Analysis*), apresenta uma forte correlação entre preço das ações de alguns setores econômicos (siderurgia, energia, entre outros) e preços de commodities, algo não presente no mercado americano. [Nogueira e Ferreira \(2010\)](#), ao analisar dados históricos do Ibovespa e CRB (Commodity Research Bureau), índice das principais commodities agrícolas mundiais apurado pela Reuters, identificam uma dependência dos preços de *equities* a variação dos preços das commodities. Para tanto, foram utilizados modelos auto-regressivos (AR) e GARCH. [Grola \(2011\)](#) compara preços futuros dos boi gordo e café com portfólio de ações baseados na teoria dos portfólios de Markowitz ([MARKOWITZ, 1991](#)), e conclui que tais commodities são ativos relevantes para diversificação de investimentos.

2.2 Modelos ARMA - Autorregressivo de Médias Móveis (*Autoregressive Moving Averages*)

Os modelos ARMA estão entre as principais ferramentas desenvolvidas para o estudo de séries temporais. Apesar de terem pouca aplicabilidade direta às séries financeiras, os fundamentos por trás destes modelos são essenciais para modelagem das volatilidade. Os modelos GARCH são de fato um modelo ARMA aplicado sobre o quadrado dos erros (ε_t^2). Modelos

ARMA, em linhas gerais, buscam explicar o comportamento de séries temporais sob influência do comportamento passado dos erros e da própria série analisada. A seguir, serão apresentados seus componentes individualmente: AR (*Autoregressive* ou Autorregressivo) e MA (*Moving Average* ou Média Móvel) e, posteriormente, sua estrutura completa.

Definição 1: Um processo estocástico $y_t = \{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é considerado fracamente estacionária, ou estacionário de segunda ordem se e somente se:

- $E(y_t) = E(y_{t-1}) = \mu, \forall t,$
- $Var(y_t) = \gamma_0 < \infty, \forall t,$
- $Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_{t,k}$, onde $\gamma_{t,k}$ é uma função de $(t - k)$.

Em outras palavras, uma série temporal para ser fracamente estacionário deverá ter 3 características principais: variância finita, primeiro momento constante e segundo momento $\gamma_{t,k}$ dependente de $(t - k)$ mas não apenas de t ou k .

2.2.1 Modelos AR - Autorregressivos

Quando as correlações de uma série temporal y_t apresentam significância estatística para p períodos de defasagem, seus valores passados $y_{t-1} \dots y_{t-p}$ podem ser bons preditivos para a série. Um modelo simples autorregressivo $AR(p)$ pode ser descrito como segue:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\ &= \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde p é um número inteiro não negativo, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ são constantes ($\phi_p \neq 0$) e ε_t é sequência de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com distribuição normal ($E[\varepsilon_t] = 0$ e $Var[\varepsilon_t] = 1$), denominada também como ruído branco.

Considerando a série y_t fracamente estacionária, ou seja, $E(y_t) = E(y_{t-1}) = E(y_{t-p}) = \mu$, e $E(\varepsilon_t) = 0$, os valores esperados da equação 2.1 são:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \phi_0 + \phi_1 E(y_{t-1}) + \dots + E(\phi_p y_{t-p}) \\ &= \frac{\phi_0}{(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $\phi_1 + \dots + \phi_p \neq 1$. Ainda sob a condição de estacionariedade, $Var(y_t) = Var(y_{t-1}) = Var(y_{t-p})$, temos:

$$Var(y_t) = \frac{\sigma_{\varepsilon_t}^2}{(1 - \phi_1^2 - \dots - \phi_p^2)}, \quad (2.3)$$

para $(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_p^2) < 1$. Isto implica que $|\phi_p| < 1$ ou $-1 < \phi_p < 1$, condição necessária e suficiente para que o processo seja estacionário.

Por fim, o modelo $AR(p)$ pode ser assumir a forma de um operador de defasagens, conhecido também como *backshift operator*:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p)y_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \phi(B)y_t &= \mu + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde o operador B é utilizado para expressar os valores passados do processo $By_t = y_{t-1}$, $B^2y_t = y_{t-2}$, ..., $B^py_t = y_{t-p}$. O $\phi(B)$ é conhecido também como polinômio autorregressivo de y_t e suas raízes determinam se a série analisada é estacionária (TSAY, 2014).

2.2.2 Modelos MA - Média Móvel (Moving Average)

Uma alternativa à representação autorregressiva de y_t é a combinação linear da sequência de variáveis aleatórias (ε), também conhecido como modelo de Média Móvel, ou $MA(q)$. Tsay (2014) adota uma abordagem alternativa a este modelo, considerando-o um caso específico de modelo autorregressivo com ordem finita. Um modelo de média móvel é definido como:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ y_t &= \mu - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde q é um número inteiro não negativo, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ são constantes ($\theta_q \neq 0$) e ε_t é sequência de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com distribuição normal ($E[\varepsilon_t] = 0$ e $Var[\varepsilon_t] = 1$).

O modelo pode também ser reescrito na forma de operador de defasagem:

$$y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.6)$$

onde $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_1 B^2 - \dots - \theta_q B^q$. Ao contrário do modelo autorregressivo, o processo é fracamente estacionário para qualquer parâmetro $\theta_1, \dots, \theta_1$ pois um modelo MA

é formado por um número finito de combinações lineares da série de variáveis aleatórias (ε) (TSAY, 2014).

Sob a condição de estacionariedade, o valor esperado do modelo é invariável ao tempo e é dado por:

$$E(y_t) = \mu. \quad (2.7)$$

Assim como o valor esperado, a variância do modelo MA é também invariável no tempo e é dada por:

$$\text{Var}(y_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2), \quad (2.8)$$

onde σ_ε^2 é a variância da série de variáveis aleatórias.

Um modelo $MA(q)$ pode ser traduzido também para um modelo AR de ordem infinita, $AR(\infty)$. Considerando um modelo $MA(1)$, para efeito de simplificação, e reescrevendo a equação 2.5 em função de ε_t , temos:

$$\varepsilon_t = y_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (2.9)$$

Através de sucessivas substituições na equação 2.9, é possível obter a seguinte transformação no modelo:

$$\varepsilon_t = y_t + \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} + \theta_1^3 y_{t-3} + \dots \quad (2.10)$$

Nesta nova formulação, ao substituir $\phi_i = \theta_1^i$ para $i \geq 1$, obtemos a formulação de um modelo AR cuja a ordem é infinita. Para garantir que a equação 2.9 seja estacionária, e que o modelo seja plausível, é necessário que o parâmetro θ_1 seja menor que 1 em valores absolutos. Desta forma, $\theta_1^i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Em outras palavras, a contribuição dos valores mais remotos reduziria exponencialmente, tornando-os irrelevantes para os choques mais recentes.

2.2.3 Modelos ARMA

Os modelos ARMA, também conhecidos por modelos paramétricos Box-Jenkins ou modelos autorregressivos de médias móveis, denotados por $ARMA(p, q)$, foram propostos por Box *et al.* (2015) com o objetivo de combinar os fundamentos dos modelos AR e MA em um modelo mais compacto de tal forma que os parâmetros necessários sejam poucos, e permita uma parametrização mais parcimoniosa (TSAY, 2014).

Um modelo $ARMA(p, q)$ pode ser descrito como segue:

$$\begin{aligned}
y_t &= \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \Rightarrow \\
y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p} &= \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

que, por sua vez, pode ser reduzido na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
y_t &= \phi_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \Rightarrow \\
y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} &= \phi_0 + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

onde p e q são números inteiros positivos, ϕ_0 é o termo constante, $\phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$ e ε_t é a série aleatório ou ruído branco. O lado esquerdo da equação 2.11 refere-se ao componente autorregressivo do modelo e o lado direito refere-se ao componente das médias móveis do modelo.

O modelo $ARMA(p, q)$ pode ser reescrito como operador de defasagem, como segue:

$$\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t. \quad (2.13)$$

O modelo $ARMA(p, q)$ requer que não haja fatores comuns para os componentes autorregressivo ($\phi(B)$) e média móvel ($\theta(B)$). Caso haja, tais fatores serão cancelados e o processo reduzido. No extremo, onde todos os fatores sejam idênticos, o processo é reduzido a um ruído branco (TSAY, 2014). Esta situação é conhecida também com redundância de parâmetros ou super parametrização.

Sob a condição de fraca estacionariedade, os valores esperados da equação 2.11 são obtidos da seguinte forma:

$$E(y_t) - \phi_1 E(y_{t-1}) - \dots - \phi_p E(y_{t-p}) = \phi_0 + E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \dots - \theta_q E(\varepsilon_{t-q}). \quad (2.14)$$

Considerando $E(\varepsilon_t) = 0$ para todo t , o valor esperado de y_t é :

$$E(y_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}. \quad (2.15)$$

No caso da variância do modelo, será tomado como base um modelo $ARMA(1, 1)$ para efeito de simplificação. Sob a condição de fraca estacionariedade, onde $Var(y_t) = Var(y_{t-1})$, a variância da equação 2.11 é dada por:

$$Var(y_t) = \frac{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}. \quad (2.16)$$

Como a variância é positiva, é imposta a restrição $\phi_1^2 < 1$, o que equivale a $|\phi_1| < 1$. Portanto, as condições de estacionariedade imposta ao modelo $ARMA(p, q)$ são as mesmas do modelo $AR(p)$.

2.3 Volatilidade e Modelos ARCH

Volatilidade, nome dado ao desvio-padrão dos retornos dos ativos financeiros, é um conceito de importância fundamental nos estudos de séries financeiras. A volatilidade é uma medida de risco e, portanto, uma variável necessária para o desenvolvimento de estratégias de investimentos.

Séries de retornos financeiros, em geral, não são correlacionados porém dependentes entre si já que seus quadrados são correlacionados. Estas séries não apresentam volatilidade constante ao longo tempo, com presença de períodos claros de fortes e baixas volatilidades. Pequenas variações na volatilidade tende a ser seguida por pequenas variações, assim como, grandes variações levam a grandes variações. A variação do log-retorno do IBOV entre os anos de 2008 e 2009 (figura 1b) ilustram estas características. Por fim, volatilidade tende a variar dentro de um intervalo determinado, o que indica que a série é estacionária (TSAY, 2014).

Tais características apontam para a presença de heteroscedasticidade condicional que, por sua vez, pode ser modelada através de um processo auto regressivo. Esta é a essência dos modelos ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), desenvolvido por Engle (1982), e sua versão generalizada GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) desenvolvidos por Bollerslev (1986) e Nelson (1991), que, ao modelarem a variância condicional ao longo do tempo, incorporam características específicas dos retornos dos ativos, como cauda longa e autocorrelação dos quadrados dos retornos.

O modelo ARCH, pioneiro entre os modelos de heterocedasticidade condicional, relaciona períodos de grande variações nos retornos (maiores erros ou inovações em relação a média condicional) com forte volatilidade condicional, além de produzir uma distribuição de caudas pesadas para as inovações.

Considerando $y = \{y_t, t = 1, \dots, T\}$ uma série de retornos financeiros, a formulação do modelo ARCH é:

$$y_t = \mu_t + a_t,$$

sendo:

$$a_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p a_{t-p}^2,$$

onde:

μ_t : média dos log-retornos no momento t ,

a_t : inovações ou erros no tempo t ,

ε_t : sequência de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com distribuição normal ($E[\varepsilon_t] = 0$ e $Var[\varepsilon_t] = 1$),

h_t : variância condicional de a_t dada a informação prévia $I_t = \{a_{t-1}, a_{t-2}, \dots\}$, $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$.

O processo implícito no modelo ARCH funciona da seguinte forma: um aumento significativo na inovação (a_{t-1}) resulta em uma variância (h_t) maior que a observada anteriormente. A inovação em t (a_t), como consequência, tende a apresentar uma magnitude maior do que as observações anteriores. A volatilidade, desta forma, propaga para os períodos posteriores, impactando as inovações subsequentes $a_{t+1}, \dots, a_{t+n}$ e as variâncias também. O comportamento da volatilidade tende a persistir, porém não indefinidamente. O coeficiente α_i , quando inferior a 1, garante uma convergência da volatilidade condicional para a volatilidade incondicional, o que significa que o processo é estacionário com variância finita.

De acordo com o [Tsay \(2014\)](#), modelos ARCH apresentam algumas desvantagens. Dentre elas destacam-se:

- Necessidade de um grande numero de lags p para obter um modelo ajustado satisfatoriamente, o que implica em um grande número de parâmetros,
- Choques positivos e negativos apresentam os mesmos efeitos sobre a volatilidade, embora seja sabido que as ativos financeiros reagem diferentemente quando sujeitos a choques positivos e negativos,
- Restrições ao modelo tornam-se mais complexas com aumento da ordem utilizada,
- Modelo pode superestimar a volatilidade em situações de choques isolados de grande magnitude, devido ao processo de propagação mencionado anteriormente.

2.4 Modelos GARCH

O GARCH, uma generalização do modelo ARCH, incorpora as variâncias condicionais passadas aos quadrados dos erros (inovações) da série de retornos financeiros para modelar a

variância condicional das inovações da série. Este modelo baseia-se em um processo ARMA (*Autoregressive Moving Average*), o que reduz os parâmetros necessários para uma modelagem satisfatória e garante maior assertividade na previsão da volatilidade. O modelo é também chamado de GARCH (p,q), onde a variância condicional, h_t , é resultado do quadrado dos p inovações anteriores e das variâncias condicionais dos q períodos anteriores.

Considerando $y = \{y_t, t = 1, \dots, T\}$ uma série de retornos financeiros, a formulação do modelo GARCH é a seguinte:

$$y_t = \mu_t + a_t, \quad (2.17)$$

sendo,

$$\begin{aligned} a_t &= \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \varepsilon_t \sim N(0, 1), \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde:

μ_t : média dos log-retornos no momento t ,

a_t : inovações ou erros no tempo t ,

ε_t : sequência de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com distribuição normal ($E[\varepsilon_t] = 0$ e $Var[\varepsilon_t] = 1$),

h_t : variância condicional de a_t dada a informação prévia $I_t = \{a_{t-1}, a_{t-2}, \dots\}$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$, $\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$ e $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. A última restrição ($\alpha_i + \beta_j$) implica que as variâncias de a_t são finitas, enquanto que as variâncias condicionais (h_t) evoluem com o tempo (TSAY, 2014).

A ordem é outro importante ponto para encontrar o modelo GARCH que melhor se ajuste à série histórica. Porém, dado a dificuldade para encontrar este parâmetro ótimo, Morettin (2017) recomenda a utilização de modelos de baixa ordem (com p e q até 2) e, uma vez que os modelos GARCH utilizam-se de processos ARMA para a modelagem dos erros quadráticos, é possível aplicar critérios tradicionais de seleção de modelos como o AIC - *Akaike Information Criteria* (AKAIKE, 1974) e BIC - *Bayesian Information Criteria* (SCHWARZ et al., 1978).

Há claras similaridades entre os modelos GARCH e ARMA. Enquanto que as inovações (a_t) seguem um processo GARCH, seus quadrados (a_t^2) seguem um processo ARMA como é apresentado na equação 2.19. Considerando $\eta_t = a_t^2 - h_t$, tal que, $h_t = a_t^2 - \eta_t$, a equação 2.18

pode ser reescrita como:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t, \quad (2.19)$$

onde a série η_t segue um processo martingale, $E(\eta_t) = 0$ e $Var(\eta_t) = 0$, embora não seja uma série i.i.d..

2.4.1 Propriedades do Modelo GARCH

Apesar dos erros ε_t serem apresentados através de uma distribuição Normal, o mesmo não se pode afirmar para as inovações a_t , cuja distribuição incondicional apresenta caudas mais pesadas. Nos modelos GARCH, o coeficiente α_i , assim como a distribuição dos erros do modelo (ε), são fatores determinante para o comportamento da cauda da série de inovações. Maiores magnitudes para α assim como distribuições com caudas mais pesadas aos erros (t-student, por exemplo) resultam em caudas mais pesadas à distribuição condicional de a_t , como é provado por [Orskaug \(2009\)](#).

Existem evidências que séries temporais financeiras apresentam ainda maior curtose às implícitas nos modelos GARCH com distribuição Normal para os erros ε_t . Para estes casos [Ardia \(2008\)](#) e [Ardia e Hoogerheide \(2009\)](#), por exemplo, propõe a utilização de distribuição t-Student para os erros do modelo GARCH. Outra alternativa é a utilização da distribuição GED (*Generalized Error Distribution*), que generaliza a distribuição normal ao permitir parametrizar as caudas das distribuição. [Gómez, Gomez-Viilegas e Marin \(1998\)](#) e [Giller \(2005\)](#) propõe algumas generalizações multivariadas para esta distribuição específica.

A média incondicional das inovações, portanto, é dada por:

$$\begin{aligned} E[a_t] &= E[E\{a_t|I_t\}] \\ &= E[E\{\varepsilon_t \sqrt{h_t}|I_t\}] \\ &= E[\sqrt{h_t} E\{\varepsilon|I_t\}] \\ &= E[\sqrt{h_t} E\{\varepsilon\}] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde I_t representa as informações disponíveis nos períodos anteriores ($I_t = a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-n}$) e ε são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Normal, $\mu[\varepsilon] = 0$ e $Var[\varepsilon] = 1$.

A variância incondicional é dada por:

$$\begin{aligned}
\text{Var}[a_t] &= E[a_t^2] \\
&= E[E\{a_t^2|I_t\}] \\
&= E[\{h_t \varepsilon^2|I_t\}] \\
&= E[h_t E\{\varepsilon^2|I_t\}] \\
&= E[h_t E\{\varepsilon^2\}] \\
&= E[h_t] \\
&= E[\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p a_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 + \dots + \beta_q h_{t-q}^2] \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i E[a_{t-i}^2] + \sum_{j=1}^q \alpha_j E[h_{t-j}] \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \text{Var}[a_{t-i}] + \sum_{j=1}^q \alpha_j E[h_{t-j}], \tag{2.21}
\end{aligned}$$

onde I_t representa as informações disponíveis nos períodos anteriores ($I_t = a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-n}$) e ε são variáveis aleatórias i.i.d com distribuição Normal, $\mu[\varepsilon] = 0$ e $\text{Var}[\varepsilon] = 1$. Considerando que a série de inovações a_t é estacionária, pode-se assumir que $\sigma^2 = \text{Var}[a_t] = \text{Var}[a_{t-1}] = \dots = \text{Var}[a_{t-p}]$. Ao resolver a equação 2.21 para σ^2 , chega-se a variância incondicional:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)}.$$

2.4.2 Estimação de Parâmetros - Univariado

A estimação dos parâmetros pode ser obtida através do método da máxima verossimilhança. Sob a condição de normalidade para os erros (ε) do modelo, a função de verossimilhança dos parâmetros GARCH é determinado por:

$$f(y_1, \dots, y_n | \theta) = \prod_{t=m+1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_t - \mu_t)^2}{h_t}\right) f(y_1, \dots, y_m | \theta), \tag{2.22}$$

onde n é o tamanho da amostra, $m = \max(p, q)$, $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ e $f(y_1, \dots, y_m | \theta)$ é a função de densidade de probabilidade conjunta. Esta função é normalmente excluída da função de verossimilhança, principalmente em amostras de dados suficientemente grandes onde sua contribuição é desprezível (TSAY, 2014). O resultado é a função de verossimilhança condicional a seguir:

$$f(y_{m+1}, \dots, y_n | \theta, y_1, \dots, y_m) = \prod_{t=m+1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_t - \mu_t)^2}{h_t}\right). \tag{2.23}$$

Considerando que $y_t = \mu_t + a_t$, podemos reescrever a função de verossimilhança condicional 2.23 em função da inovação a_t , como segue:

$$f(a_{m+1}, \dots, a_n | \theta, a_1, \dots, a_m) = \prod_{t=m+1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a_t^2}{h_t}\right), \quad (2.24)$$

onde h_t é obtido recursivamente. A estimação dos parâmetros é obtida pela maximização da função de verossimilhança condicional. Como a maximização da função dada é equivalente a maximização do seu logaritmo, é preferível utilizar a função logarítmica devido a facilidade de sua manipulação. A função logarítmica é dada por:

$$\begin{aligned} l(a_{m+1}, \dots, a_n | \theta, a_1, \dots, a_m) &= \sum_{t=m+1}^n \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(h_t) - \frac{1}{2} \frac{a_t^2}{h_t} \right] \\ &= - \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{1}{2} \ln(h_t) + \frac{1}{2} \frac{a_t^2}{h_t} \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.4.3 Modelos Multivariados

Os retornos de ativos financeiro podem sofrer influência dos retornos de outros ativos, além de suas dependência temporais. A análise e predição dos co-movimentos de ativos financeiro é uma importante área de pesquisa e, seus produtos, são de grande relevância estratégica na precificação de ativos, construção de portfolio de investimentos e mitigação de riscos. Um investidor, por exemplo, que busca diversificar investimentos, irá alocar seus recursos em ativos que possuam comportamentos distintos em determinadas condições econômicas. Um outro exemplo são ativos financeiros que podem ser ter seu preço depreciado ou valorizado conforme sua correlação com variáveis macroeconômicas (câmbio, juros, entre outros) e as condições econômicas dos países onde estes ativos estão inseridos. A importância dos co-movimentos dos retornos levou ao desenvolvimento de modelos multivariados, dentre eles, a extensão multivariada para os modelos GARCH.

Considerando $y_t = (y_{t,1}, \dots, y_{t,m})'$ um vetor de retornos no instante t para m séries temporais, o modelo GARCH multivariado pode ser definido a seguir:

$$y_t = \mu_t + a_t, \quad (2.26)$$

sendo,

$$a_t = H_t^{1/2} \varepsilon, \quad (2.27)$$

onde:

y_t : vetor $m \times 1$ dos retornos de m ativos no momento t ,

μ_t : vetor $m \times 1$ das média dos log-retornos no momento t ,

a_t : vetor $m \times 1$ das inovações ou erros no momento t ,

H_t : matriz $m \times m$ de covariâncias condicionais de a_t no momento t ,

$H_t^{1/2}$: matriz $m \times m$ positiva definida que pode ser obtida através do método de Cholesky para decomposição da matriz H_t ,

ε_t : O vetor de erros de ordem $m \times 1$, com distribuição Normal de média $E[\varepsilon_t] = 0$ e variância $Var(\varepsilon_t) = I_m$, sendo I_m a matriz identidade de ordem m .

Assim como no caso univariado, μ_t pode ser definido como um vetor constante ou obtido através de modelagem temporal como ARMA. O ponto mais importante na extensão multivariada do modelo GARCH é a obtenção da matriz de covariâncias condicionais (H_t). A matriz de covariâncias possui dependência temporal, portanto, cresce rapidamente com o número de ativos estudados em conjunto. Tais características aumentam a complexidade dos cálculos necessários e, conseqüentemente, a demanda computacional. Como o objetivo de reduzir a complexidade da estimação dos parâmetros, tornando-o modelo parcimonioso e flexível, foram desenvolvidas várias abordagens na construção do GARCH Multivariado.

Modelos como VEC (BOLLERSLEV; ENGLE; WOOLDRIDGE, 1988) e BEKK (ENGLE; KRONER, 1995) baseiam-se na obtenção direta da matriz de covariâncias H_t , enquanto que, modelos como CCC-GARCH (*Constant Conditional Correlation GARCH*), proposto por Bollerslev *et al.* (1990) e DCC-GARCH (*Dynamic Conditional Correlation GARCH*) propostos por Engle (2002) e Tse e Tsui (2002), baseiam-se no métodos indireto através da modelagem de variâncias condicionais e suas correlações. Enquanto que o CCC-GARCH considera uma correlação constante no horizonte de tempo da análise, o DCC-GARCH baseia-se na variação da volatilidade entre séries no decorrer do tempo. Trabalhos como Silvennoinen e Teräsvirta (2009), apresentam um completo panorama das modelos GARCH multivariados existentes.

Nos modelos de variância e correlações condicionais (CCC-GARCH e DCC-GARCH), a matriz de covariância condicional H_t é decomposta em matrizes de variância e correlações condicionais, como apresentado abaixo:

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad (2.28)$$

onde:

$D_t = \text{diag}(h_{1,t}^{1/2}, \dots, h_{m,t}^{1/2})$ é a matriz das variâncias condicionais e R_t : matriz de correlações condicionais no momento t .

No modelo de correlação condicional constante (CCC-GARCH) a matriz de correlação é

invariável no tempo ($R_t = R$), portanto:

$$H_t = D_t R D_t. \quad (2.29)$$

A matriz de correlações $R_t = \{\rho_{ij,t}\}$ é simétrica e positiva definida para $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, m$, com $\rho_{ii,t} = 1$. Os elementos não pertencentes a diagonal de matriz H_t é dado por:

$$H_{ij,t} = h_{i,t}^{1/2} \rho_{ij} h_{j,t}^{1/2}, i \neq j. \quad (2.30)$$

Já as inovações a_{it} são obtidas através de um modelo GARCH univariado aplicado a cada série temporal analisada, e as variâncias condicionais resultantes são dadas por:

$$h_t = c + \sum_{j=1}^p A_j a_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q B_j h_{t-j}^2, \quad (2.31)$$

onde:

c é um vetor $m \times 1$ com as constantes do modelo,

$A_j = \text{diag}(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj})$ é a matriz diagonal $m \times m$ com os parâmetros α de cada série no momento t ,

$B_j = \text{diag}(\beta_{1j}, \dots, \beta_{mj})$ é a matriz diagonal $m \times m$ com os parâmetros β de cada série no momento t ,

$a_{t-j}^{(2)}$ é a multiplicação do vetor a_{t-j} por ele mesmo (*element wise*),

A matriz H_t e, por consequência R , são matrizes definidas positivas quando os elementos de c , A_j e B_j forem positivos.

O modelo com correlações condicionais constantes tem como vantagem a baixa demanda computacional, porém oferece limitações para uma adequada modelagem do co-movimentos das variâncias. Por esta razão, surgiu uma variação deste modelo onde é mantida a decomposição da matriz de covariâncias H_t porém tornando a matriz de correlações variável no tempo. Este é a essência do modelo DCC-GARCH, proposto por [Engle \(2002\)](#). O trabalho de [Bauwens, Laurent e Rombouts \(2006\)](#) oferece um amplo estudo sobre os diferentes modelos de correlação dinâmica propostos. Para efeito deste trabalho, será utilizado o modelo DCC-GARCH.

Formalmente, a matriz de covariância no modelo de correlações dinâmicas é dado por

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad (2.32)$$

onde:

$D_t = \text{diag}(h_{1,t}^{1/2}, \dots, h_{m,t}^{1/2})$ é a matriz das variâncias condicionais, e

R_t : matriz de correlações condicionais das inovações no momento t e normalizadas para $z_t = D_t^{-1}a_t \sim N(0, R_t)$.

Os elementos de H_t são dados por:

$$H_{ij,t} = \sqrt{h_{it}h_{jt}}\rho_{ij}. \quad (2.33)$$

Assim como no modelo de correlações condicionais constantes, as inovações a_{it} são obtidas através de modelo GARCH univariado, com a diferença que, neste modelo, é permitido a utilização de diferentes ordens para cada série financeira que compõe o modelo multivariado. Portanto, a variância condicional pode ser descrita como:

$$h_{it} = \alpha_{it} + \sum_{p=1}^{P_i} \alpha_{ip}a_{i,t-p}^2 + \sum_{q=1}^{Q_i} \beta_{iq}h_{i,t-q}^2. \quad (2.34)$$

A matriz de correlações R_t deve obedecer duas restrições principais:

- A matriz deve ser definida positiva para garantir que a matriz de covariância H_t seja definida positiva também,
- Os elementos da matriz deverão ser iguais ou menores a 1.

De forma a garantir que estas restrições sejam atendidas, a matriz de correlações é decomposta em:

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (2.35)$$

$$Q_t = (1 - a - b)S + a(z_{t-1}z'_{t-1}) + bQ_{t-1}, \quad (2.36)$$

onde $S = \text{Cov}[z_t z'_t] = E[z_t z'_t]$ é a matriz de covariâncias incondicionais dos erros normalizados (z_t). Os parâmetros $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b < 1$ garantem que a matriz H_t é definida positiva. Os elementos de S , por sua vez, garantem o atendimento a segunda restrição: $|\rho_{ij}| = \left| \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}} \right| \leq 1$.

2.4.4 Estimação de Parâmetros - Modelos Multivariados

Considerando que os erros normalizados do modelo, ε_t , seguem uma distribuição gaussiana, a função de distribuição conjunta pode ser definida como:

$$f(\varepsilon_t) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon'_t \varepsilon_t\right), \quad (2.37)$$

onde $t = 1, 2, \dots, T$, $E[\varepsilon_t] = 0$ e $VAR[\varepsilon_t] = E[\varepsilon\varepsilon'] = I$. Ao transformar a função de verossimilhança para as inovações $a_t = H_t^{1/2}\varepsilon_t$, temos:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |H_t^{1/2}|} \exp\left(-\frac{1}{2} a_t' H_t^{-1} a_t\right), \quad (2.38)$$

onde $\theta = (\phi_1, \dots, \phi_n, \psi)$ são os parâmetros do modelo, sendo $\phi_i = (\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \dots, \alpha_{pi}, \beta_{1i}, \dots, \beta_{qi})$ os parâmetros do modelo GARCH univariado para a i -ésima série de ativo financeiro ($i = 1, \dots, n$) e, $\psi = (a, b)$ os parâmetros da estrutura de correlação.

Ao substituir H_t pela sua forma $D_t R_t D_t$, e aplicando o logaritmo à função, temos a seguinte função de log-verossimilhança:

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta)) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + \ln(|H_t|) + a_t' H_t^{-1} a_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + \ln(|D_t R_t D_t|) + a_t' (D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1}) a_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + 2 \ln(|D_t|) + \ln(|R_t|) + a_t' (D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1}) a_t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Engle (2002) propõe, através desta função logarítmica, uma simplificação dos cálculos para estimação dos parâmetros, mesmo em situações que a matriz de covariâncias seja muito grande. Segundo ele, a função log-verossimilhança pode ser reescrita como a soma da parte relacionada aos parâmetros de volatilidade com a parte relacionada a correlação:

$$L(\theta) = L_v(\phi) + L_c(\phi, \psi). \quad (2.40)$$

A parte da volatilidade pode ser reescrita como a soma das log-verossimilhanças dos modelos GARCH univariados para os n ativos modelados, como é demonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} L_v(\phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + 2 \ln(|D_t|) + a_t' D_t^{-2} a_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^n [\ln h_{it} + \frac{a_{it}^2}{h_{it}}]) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (\ln(2\pi) + \ln h_{it} + \frac{a_{it}^2}{h_{it}}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Isto que significa que os parâmetros dos diversos modelos utilizados para cada ativo analisado podem ser estimados separadamente. Após esta primeira etapa, os parâmetros ϕ são estimados e, por consequência, as variâncias condicionais h_{it} para os ativos $i = 1, 2, \dots, n$, restando

apenas os parâmetros a e b da parte relacionada a correlação. A função de log-verossimilhança para a parte de correlações é dada por:

$$L_c(\phi, \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\ln(|R_t|) + z_t' R_t^{-1} z_t). \quad (2.42)$$

APLICAÇÃO

3.1 Análise das Séries Temporais

Este trabalho envolve a análise dos co-movimentos das volatilidades do Ibovespa ("IBOV"), principal indicador da bolsa de valores brasileira, e das volatilidades de dois índices de commodities selecionados: Thompson Reuters Core Commodities CRB ("CC-CRB") e Índice de Commodities do Brasil ("ICB"). Nas produções acadêmicas que visam relacionar movimentos do mercado de ações com outros instrumentos financeiros, mais especificamente, as commodities, é natural o uso de índices baseados nos preços futuros destes ativos. Este trabalho não será diferente. A escolha destes dois índices de commodities deve-se ao interesse em estudar possíveis correlações entre o IBOV e as variações dos preços futuros internacionais (CC-CRB) e nacionais (ICB) das commodities.

O IBOV foi criada em 1967 pela Bolsa de Valores de São Paulo (atual B3) na esteira de um movimento de reformas e modernização do mercado financeiro brasileiro. O principal objetivo era criar um indicador técnico para avaliação do mercado de capitais brasileiro. Na época de sua criação havia o IBV (Índice de Bolsa de Valores), criado pela Bolsa de Valores do Rio de Janeiro (BVRJ), como seu principal concorrente. A hegemonia conquistada, a partir de anos 90, pela Bolsa de Valores de SP e, a aquisição da BVRJ pela BM&F (Bolsa de Mercadoria e Futuro de São Paulo, braço de negociação de derivativos e futuros pertencente atualmente à B3) elevou o IBOV ao patamar de principal índice do mercado acionário brasileiro.

O IBOV é basicamente uma carteira teórica com as ações mais negociadas (líquidas) da B3, ponderada pelo valor de mercado das ações em circulação (negociadas em Bolsa). Nesta carteira um único papel não pode representar mais que 20% do total, garantindo maior diversidade em sua composição (B3, 2015a). Atualmente, o índice é composto por cerca de 65 ações negociadas.

O índice CC-CRB, pertencente a Thomson Reuters, empresa internacional de comunica-

ção e informações do mercado financeiro, é um índice de preços futuros de commodities criado em 1959 pela Commodities Research Bureau. Atualmente, o índice é formado por 19 commodities (Figura 5), negociadas nas principais bolsas de commodities mundiais (NYMEX, CBOT, LME, CME e COMEX), e ponderadas pela sua relevância no mercado global de commodities. Os pesos são revistos em intervalos de, no mínimo, 5 anos (REFINITIV, 2020).

Figura 5 – CC-CRB - Composição do Índice

	Commodity	Index Weight			Contract Months	Exchange
		CRB	Non-Energy	Non-Agri		
	WTI Crude Oil	23.00%	-	23.00%	Jan-Dec	NYMEX
Group I	Heating Oil	5.00%	-	5.00%	Jan-Dec	NYMEX
	Unleaded Gas	5.00%	-	5.00%	Jan-Dec	NYMEX
	Total	33.00%	-	33.00%		
	Natural Gas	6.00%	-	15.00%	Jan-Dec	NYMEX
	Corn	6.00%	9.84%	-	Mar, May, Jul, Sep, Dec	CBOT
	Soybeans	6.00%	9.84%	-	Jan, Mar, May, Jul, Nov	CBOT
Group II	Live Cattle	6.00%	9.84%	-	Feb, Apr, Jun, Aug, Oct, Dec	CME
	Gold	6.00%	9.84%	15.00%	Feb, Apr, Jun, Aug, Dec	COMEX
	Aluminum	6.00%	9.84%	15.00%	Mar, Jun, Sep, Dec	LME
	Copper	6.00%	9.84%	15.00%	Mar, May, Jul, Sep, Dec	COMEX
	Total	42.00%	59.04%	60.00%		
	Sugar	5.00%	8.20%	-	Mar, May, Jul, Oct	NYBOT
Group III	Cotton	5.00%	8.20%	-	Mar, May, Jul, Dec	NYBOT
	Cocoa	5.00%	8.20%	-	Mar, May, Jul, Sep, Dec	NYBOT
	Coffee	5.00%	8.20%	-	Mar, May, Jul, Sep, Dec	NYBOT
	Total	20.00%	32.80%	-		
	Nickel	1.00%	1.64%	3.50%	Mar, Jun, Sep, Dec	LME
	Wheat	1.00%	1.64%	-	Mar, May, Jul, Sep, Dec	CBOT
Group IV	Lean Hogs	1.00%	1.64%	-	Feb, Apr, Jun, Jul, Aug, Oct, Dec	CME
	Orange Juice	1.00%	1.60%	-	Jan, Mar, May, Jul, Sep, Nov	NYBOT
	Silver	1.00%	1.64%	3.50%	Mar, May, Jul, Sep, Dec	COMEX
	Total	5.00%	8.16%	7.00%		

Fonte: Thompson Reuters ¹

O índice ICB foi criado em 2008 pela B3 e contempla os principais contratos de futuros de commodities negociados no Brasil. São eles: soja, milho, álcool anidro, boi gordo e café. O índice é rebalanceado a cada quatro meses com base na relevância de cada commodity no mercado nacional e sua liquidez na B3 (volume negociado) (B3, 2015b).

A série histórica do IBOV foi obtida diretamente no site da B3² e o índice CC-CRB através do site *Investing.com*³. Já o índice ICB foi obtido diretamente com a empresa B3 em Maio/2020.

Para este trabalho foi considerado o período pós estabilização inflacionária, iniciado com a introdução da moeda Real em 1995, e excluindo os anos com políticas econômicas baseadas em

¹ Disponível em <https://www.refinitiv.com/content/dam/marketing/en_us/documents/methodology/cc-crb-index-methodology.pdf>, página 8. Acesso em 14 de Junho de 2020.

² Disponível em <http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-estatisticas-historicas.htm>. Acesso em 05 de Maio de 2020.

³ Disponível em <<https://www.investing.com/indices/thomson-reuters---jefferies-crb-historical-data>>. Acesso em 06 de Maio de 2020.

câmbios fixos (até 2001) e turbulências políticas (2002 a 2003, durante as eleições presidenciais e, a partir de 2016 com o processo de impeachment da então presidente Dilma Rousseff). O período de análise, portanto, compreende os anos de 2004 a 2015.

Figura 6 – Evolução dos índices (2004 a 2015)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7 – Evolução dos log retornos dos índices (2004 a 2015)

Fonte: Elaborada pelo autor.

O histórico dos índices utilizados neste trabalho (Figura 6) já permite levantar alguns pontos interessantes. As séries de IBOV e CC-CRB apresentam comportamento parecido, principalmente durante os anos de 2007 e 2009 quando o Brasil vivia um momento de sólido

crescimento econômico beneficiado pela década de grande valorização nas commodities. Após a crise de 2008-2009, ambos os índices retornaram a trajetória de valorização, porém CC-CRB apresentando uma recuperação mais fraca e, posteriormente, uma queda mais robusta no período de 2013-2015 marcado pelo fim do ciclo das commodities. Através da análise do log retorno de ambas as séries (Figura 7), é possível identificar agrupamentos de volatilidade, o que reforça a aplicação de modelos GARCH para estudo destas séries

Já o ICB apresenta comportamento diverso dos demais índices. Primeiro, a variação histórica não apresenta relação com os fatos econômicos brasileiros. Na primeira fase do período de forte valorização das commodities, até 2008, o índice não se valorizou. A crise de 2008-2009 praticamente não impactou no índice, ao contrário do observado nos demais índices que sofreram forte retração. Por fim, ao analisar os log retornos deste índice (Figura 7) é possível identificar alguns períodos com maior concentração de volatilidade (2004 a 2007), porém com pouco destaque dos períodos de baixa volatilidade. Esta série, em geral, apresenta baixa volatilidade pontuada por alguns outliers.

Por outro lado, é necessário considerar que as commodities que compõe o índice ICB são precificadas em dólar no mercado internacional e, seus preços definidos nas principais bolsas de commodities mundiais, dentre elas, destaca-se a CBOT (*Chicago Board of Trade*, ou traduzida como Bolsa de Chicago) líder em negociação de derivativos agrícolas, energéticos e financeiros (juros, principalmente). Portanto, os valores dos índices são influenciados tanto pelos preços internacionais como pela variação cambial entre dólar e real. Ao converter a série histórica do ICB pela cotação oficial do dólar (a *ptax* divulgada pelo Banco Central brasileiro ⁴), nota-se que os movimentos deste novo índice criado ("ICB USD") são semelhantes aos encontrados no IBOV e CC-CRB (Figura 8). Assim como nos demais índices, o ICB dolarizado apresenta uma valorização expressiva entre os anos de 2004 e 2008, seguindo a primeira fase de valorização das commodities para, em seguida, sofrer forte ajuste em razão da crise do *subprime*. Os últimos anos caracterizam-se por uma queda contínua do preço do índice em dólar apesar da forte valorização do índice em reais. Este movimento em reais deve-se principalmente a valorização da commodity boi gordo, que representa próximo de 50% do ICB, porém não o suficiente para conter a forte desvalorização do real.

A seguir serão analisados o comportamento dos índices futuros internacionais das principais commodities que compõe o ICB e seus impactos no Brasil. Os índices futuros na Bolsa de Chicago para a soja e milho, duas commodities de grande importância na pauta de exportação brasileira, tiveram um período de forte valorização entre os anos de 2007 e 2008. Entre os anos de 2008 e 2009, período de forte retração nos mercados financeiros mundiais (crise do *subprime*), os futuros destas duas commodities desvalorizaram quase 50% (Figura 9). Uma nova tendência de valorização das commodities deu início em 2010, atingindo seu ponto mais alto em 2013.

⁴ Disponível em <<https://www.bcb.gov.br/estabilidadefinanceira/historicocotacoes>>. Acesso em 08 de Agosto de 2020.

Figura 8 – Evolução dos índices (2004 a 2015)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Estes últimos 3 anos fazem parte do período conhecido como o "boom das commodities" e marcado por uma demanda incremental de matérias-primas pela China. Este ciclo encerra-se em 2014, com a estabilidade e posterior queda nos preços internacionais.

Os preços futuros do etanol no mercado internacional não podem ser tomados como base de análise já que o etanol brasileiro não é um item de grande importância para exportação brasileira, ao contrário do açúcar. O etanol é amplamente destinado para suprir o mercado interno de combustível (incluindo a diluição obrigatória da gasolina). Esta commodity, portanto, é menos dependente das flutuações dos preços internacionais agrícolas e mais dependente dos preços do petróleo (substituto natural). O boi gordo, por sua vez, apresentou uma queda mais suave durante o período de crise (2008-2009) e um forte e constante crescimento nos períodos seguintes em decorrência de uma demanda crescente da China. Como mencionado anteriormente, dado que o futuro do boi gordo tem peso significativo no índice (B3, 2015b), pode-se atribuir a esta commodity parte da valorização do ICB nos últimos anos do período analisado (Figura 9). Outro fator de grande importância foi a forte desvalorização do real entre os anos 2013 e 2015, compensando parte das perdas dos preços internacionais.

⁵ Disponível em <www.trendview.com>. Acesso em 14 de Junho de 2020

Figura 9 – Preços Internacionais Commodities - Período de 2007 a 2015 ⁵

Fonte: Trendview

3.2 Estrutura da Análise

Para este trabalho serão analisadas as séries históricas do IBOV, CC-CRB e a versão dolarizada do ICB ("ICB USD"). A aplicação do modelo GARCH multivariado às séries financeiras selecionadas para este trabalho será feito em duas etapas. Na primeira etapa, serão apresentadas análises individuais e construções de modelos univariados para o IBOV, CC-CRB e ICB USD. Seguindo o modelo de construção proposto por [Tsay \(2014\)](#), a primeira fase contará com o modelagem dos log retornos, através da aplicação de modelo ARMA, seguida da análise dos resíduos quanto a presença do efeitos ARCH. Um vez analisados os resíduos, serão simulados modelos GARCH univariados para cada uma das séries e serão selecionados os melhores com base no critério de informação AIC (*Akaike information criterion*) ([AKAIKE, 1974](#)).

Na segunda etapa, serão construídos modelos GARCH multivariados para analisar as correlações entre os índices analisados, com destaque para as relações entre índices nacionais e internacionais (CC-CRB vs ICB USD) e as relações entre os índices com o mercado de capitais brasileiro, representado pelo IBOV (IBOV vs CC-CRB e IBOV vs ICB).

Todas as análises foram desenvolvidas em linguagem R, com a utilização dos pacotes Stats (ACF, Ljung-Box), Forecast (ARIMA), MTS (Arch-LM), Rugarch (GARCH univariado, AIC) e Rmgarch (GARCH multivariado).

3.3 Análise e Modelagem das Series Financeiras Individuais

3.3.1 Ibovespa ("IBOV")

O período de análise selecionado para este trabalho corresponde aos anos de 2004 a 2015, compreendendo 2.995 pregões. Durante este período, o IBOV atingiu a mínima de aproximadamente 17 mil pontos em 2004 e a máxima de aproximadamente 73 mil pontos (Figura 6), com um período de grande volatilidade entre os anos de 2008 e 2009 marcada pela crise financeira dos *subprimes* no mercados desenvolvidos.

Tabela 1 – Indicadores básicos - Log Retorno IBOV

Indicador	Valor
Mínimo	-0,120961
Máximo	0,136782
1º Quartil	-0,009043
3º Quartil	0,010118
Média	0,000220
Mediana	0,000291
Variância	0,000315
Desvio Padrão	0,017748
Assimetria	-0,029385
Curtose	5,178659

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os log retornos do IBOV (Figura 7) apresentam uma distribuição com média próxima de 0 e desvio-padrão 0,02 (Tabela 1), com claros períodos de agrupamentos de volatilidade (períodos específicos de baixa e alta volatilidade). Testes de normalidade (Figura 10) indicam uma distribuição com caudas largas (*fat tails*) e viés a esquerda.

Através dos gráficos ACF (Figura 11), podemos afirmar que os log retornos do IBOV não são correlacionados. Já os quadrados dos log retornos indicam autocorrelação e, portanto, confirmam que série é dependente apesar de não ser autocorrelacionada.

Na etapa seguinte, a serie de log retornos foi projetada em um modelo ARIMA. Para tanto, foi utilizada a função "auto arima" disponível pelo pacote Forecast do R (HYNDMAN; KHANDAKAR *et al.*, 2007) que seleciona o modelo com melhor *fit* baseando-se no critério de informação AIC (*Akaike information criterion*). Com base neste critério, o melhor modelo é o ARMA (2,1)

A análise detalhada dos resíduos do modelo ARMA (2,1), apresentada na Figura 12, indica presença de agrupamentos de volatilidade, o que sugere efeitos ARCH, e não correlação.

Figura 10 – IBOV log retorno - Distribuição

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Autocorrelação - Log Retorno IBOV

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por sua vez, os quadrados dos resíduos indicam autocorrelação e confirmam que os resíduos gerados pelo modelo ARIMA são dependentes.

Os testes de Ljung-box (BOX; PIERCE, 1970; LJUNG; BOX, 1978) e ARCH-LM (ENGLE, 1982) aplicados aos quadrados dos resíduos ARMA descartam a hipótese de que os quadrados dos resíduos são i.i.d. (Tabela 2), confirmando as observações do ACF (Figura 13).

A construção do modelo GARCH, para a série de resíduos dos log retornos do IBOV, seguiu a recomendação dada por Morettin (2017). Foram simulados modelos de baixa ordem, limitando p e q a ordem máxima de 2. A seleção do melhor modelo, assim como na modelagem ARMA, foi baseada no critério de informações AIC. Outro critério utilizado foi a probabilidade

Figura 12 – Resíduos Arma - IBOV

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – ACF - Quadrado dos Resíduos Arma - IBOV

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 2 – ARIMA (2,1) IBOV - Testes ARCH

Teste	Valor	Valor-p
Ljung-Box	4165,2	< 0,01
ARCH-LM	1970,8	< 0,01

Fonte: Elaborada pelo autor.

relativa (*relative likelihood*) do modelo mais simples (GARCH (1,1)) ser tão bom quanto o escolhido pelo menor AIC (BURNHAM, 2002). O objetivo é simplificar a modelagem sem comprometer o critério de informação. Com base neste critério foi selecionado o modelo GARCH (1,1) com a probabilidade de 99,8% de ser tão bom quanto o melhor modelos pelo critério AIC, o GARCH(2,2) (Tabela 3).

Tabela 3 – Simulação GARCH IBOV

p	q	AIC
1	1	-5,455168
1	2	-5,454500
2	1	-5,457220
2	2	-5,457678

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.2 Thompson Reuters Core Commodities CRB ("CC-CRB")

O período analisado (2004 a 2015) para a série compreende 3.029 observações. A série, durante este período, apresentou valor mínimo de 170,70 e máximo de 473,52 (Figura 6), com média e mediana próximas de 295,00 (Tabela 4).

Tabela 4 – Indicadores básicos - Log Retorno CC-CRB

Indicador	Valor
Mínimo	-0,068779
Máximo	0,057463
1º Quartil	-0,006188
3º Quartil	0,006450
Média	-0,000126
Mediana	0,000166
Variância	0,000134
Desvio Padrão	0,011564
Assimetria	-0,301577
Curtose	2,979427

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os log retornos do CC-CRB (Figura 14) apresentam distribuição com média próxima de zero e desvio padrão de 0,0116 (Tabela 4). Sua distribuição apresenta caudas pesadas, porém menos acentuadas quando comparadas às da série IBOV, e viés a esquerda.

A análise de autocorrelação da série de log retornos do CC-CRB apresenta resultados esperados para séries temporais financeiras. Apesar de não haver correlação dos log retornos, o mesmo não pode ser dito do quadrado destes retornos, como atesta o gráfico ACF (Figura 15).

Figura 14 – CC-CRB Log Retorno - Distribuição

Fonte: Elaborada pelo autor.

O comportamento dos quadrados dos log retornos indica relação de dependência na série de retornos.

Figura 15 – Autocorrelação - CC-CRB Log Retorno

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a mesma metodologia e ferramentas aplicadas à série IBOV, foi selecionado o modelo AR(1) para projetar a série de log retornos do CC-CRB. Porém, um modelo ARMA(1,1) para as médias condicionais desta série garantiram um modelo mais robusto GARCH. Apesar do modelo ARMA(1,1) apresentar uma probabilidade baixa (17,6%) de ser um modelo tão bom quanto o melhor modelo selecionado pelo critério de informação (AR(1)), a diferença de AIC (3,5) está entre a faixa de grande confiança (0 a 2) e alguma confiança (4-7) (BURNHAM, 2002), o que permite selecioná-lo para modelagem da série.

A análise dos resíduos dos modelo ARMA(1,1) indicam presença de concentração de volatilidade e não correlação com os valores passados (Figura 16). O gráfico de ACF para os quadrados dos resíduos (Figura 17) indicam porém que se trata de uma série dependente. Em linha com o encontrado na série IBOV, os testes Ljung-Box e ARCH-LM (Tabela 5) refutam a hipótese que os quadrados dos resíduos do modelo ARMA(1,1) são i.i.d. e, portanto, podem ser modelados através de um modelo GARCH.

Figura 16 – Resíduos Arma - CC-CRB

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – ACF - Quadrado dos Resíduos Arma - CC-CRB

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para seleção do modelo GARCH foram adotados os mesmos critérios para a série IBOV, ou seja, baixa ordem ($p \leq 2$ e $q \leq 2$), com equilíbrio entre simplificação e adequado critério de

Tabela 5 – ARMA (1,1) CC-CRB - Testes ARCH

Teste	Valor	Valor-p
Ljung-Box	1943,6	< 0,01
ARCH-LM	785,76	< 0,01

Fonte: Elaborada pelo autor.

informação. O modelo selecionado, GARCH(1,1) apesar de possuir o menor AIC dos modelos simulados, está muito próximo do modelo ideal, GARCH(2,1) (Tabela 6), com probabilidade de 99,9% de ser o melhor modelo. Como mencionado anteriormente, foi utilizado um modelo ARMA (1,1) em detrimento ao AR(1) para projeções das médias condicionais do modelo GARCH. A decisão foi baseada na robustez dos coeficientes de ambos os modelos. O modelo selecionado apresentou maior significância estatística para os coeficientes de GARCH. O modelo GARCH com médias condicionais modeladas por um ARMA(1,1) apresentou uma probabilidade de 99,9% de ser o melhor modelo, quando comparado a alternativa AR(1), reforçando a utilização deste modelo com médias móveis.

Tabela 6 – Simulação GARCH IBOV

p	q	AIC
1	1	-6,299158
1	2	-6,299291
2	1	-6,299289
2	2	-6,298629

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.3 Índice de Commodities do Brasil em dólar - ("ICB USD")

O período analisado (2004 a 2015) para a série do ICB USD compreende 2.968 observações. A série deste índice foi iniciada em 2004, com valor atribuído de 3464.8 pontos (10.000 em reais) e, atingiu o valor máximo ao final em Set/11 com valor de 13.490 (Figura 8).

Os log retornos do ICB USD (Figura 18) apresentam distribuição com média próxima de zero e seu desvio padrão 0,012 (Tabela 7). Sua distribuição apresenta caudas longas, mais acentuadas que as presentes no IBOV, e viés a direita.

A análise de autocorrelação da série ICB USD indica um comportamento em linha com as demais séries temporais financeiras analisadas: retorno não correlacionados porém dependentes entre si (Figura 19).

Utilizando a função "auto arima" do R e, através do critério AIC, foi selecionado o modelo ARMA(2,2) como mais adequado para modelar a série de log retornos do ICB USD. Os

Tabela 7 – Indicadores básicos - Log Retorno ICB USD

Indicador	Valor
Mínimo	-0,087894
Máximo	0,076102
1º Quartil	-0,006461
3º Quartil	0,006936
Média	0,000203
Mediana	0,000183
Variância	0,000145
Desvio Padrão	0,012054
Assimetria	-0,023507
Curtose	4,523352

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – ICB USD Log Retorno - Distribuição

Fonte: Elaborada pelo autor.

resíduos do modelo ARMA, detalhados na Figura 20 não apresentam auto-correlação porém uma baixa e persistente correlação entre seus quadrados (Figura 21). A dependência é corroborada pelos testes de Ljung-box e ARCH-LM (Tabela 8) cujos resultados descartam a hipótese de que os quadrados dos resíduos são i.i.d..

Tabela 8 – ARIMA (2,2) ICB USD - Testes ARCH

Teste	Valor	Valor-p
Ljung-Box	647,2	< 0,01
ARCH-LM	534,1	< 0,01

Os resíduos da série de log retornos do ICB USD foram projetados em modelos GARCH de baixa ordem ($p \leq 2$ e $q \leq 2$), dos quais, o GARCH(2,2) destaca-se pelo critério de AIC (Tabela 9) como o melhor modelo para esta série. Assim com nas séries anteriormente analisadas, foi utilizado critério de probabilidade relativa para comparar o melhor modelo selecionado com o

Figura 19 – Autocorrelação - ICB USD Log Retorno

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Resíduos Arma - ICB USD

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – ACF - Quadrado dos Resíduos Arma - ICB USD

Fonte: Elaborada pelo autor.

modelo mais simples, GARCH(1,1). Com base neste critério, a probabilidade do modelo mais simples ser tão bom quanto o modelo selecionado é de 99,9%, o que confirma a utilização do GARCH(1,1) para este estudo.

Tabela 9 – Simulação GARCH ICB USD

p	q	AIC
1	1	-6,101059
1	2	-6,100940
2	1	-6,102440
2	2	-6,102806

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Modelagem Conjunta das Séries Financeiras - GARCH Multivariado

Como mencionado no Capítulo 2 deste trabalho, foi construído um modelo DCC-GARCH para analisar as correlações entre as séries financeiras IBOV, CC-CRB e ICB USD. A estimação dos parâmetros foi obtida através da função de log-verossimilhança proposta por Engle (2002). Esta modelagem foi desenvolvida através do pacote RMGARCH disponível em R (GHALANOS, 2019). Os parâmetros do modelo são detalhados no apêndice A.

Os índices de futuros das commodities utilizados (CC-CRB e ICB USD) neste trabalho curiosamente apresentam períodos de baixa e alta correlação condicional (Figura 22). Por refletirem expectativas dos preços internacionais de uma gama de produtos padronizados e comercializados mundialmente, era esperado um comportamento mais estável e marcado por alta correlação. Porém, este comportamento é confirmado entre os anos de 2008 e 2012 somente. Na primeira fase da valorização das commodities (2004 a 2008), nota-se um persistente aumento da correlação entre os índices, atingindo seu máximo em 2008. Este período é marcado pela valorização de todas as principais commodities mundiais, seja energético (petróleo), metal (ferro) ou agrícola (soja). A queda dos preços resultante da crise do *subprime* (2008-2009), seguida por uma forte recuperação, impactou novamente em todas as commodities (Figura 9), garantindo uma alta correlação entre os índices.

O período posterior, de 2012 a 2015, é marcado por forte volatilidade dos preços das commodities e moedas. O comportamento do futuro de boi gordo, cujo peso é relevante na carteira do índice ICB, é marcado por forte valorização, ao contrário das demais commodities. Este comportamento associado a desvalorização do real contribuiu para o descasamento entre os índices e eventual queda nas correlações condicionais.

As correlações condicionais entre o IBOV e os índices de commodities ICB USD (Figura 24) e CC-CRB (Figura 23) apresentam comportamentos muito semelhantes. A série inicia-se com período de baixa correlação entre os anos 2004 e 2006. As correlações seguem a trajetória de alta com a valorização das commodities e da Bolsa brasileira entre os anos de 2007 e 2012, intervalado pela crise dos *subprimes*. Os anos seguintes seguem o movimento de descasamento entre commodities e mercado financeiro brasileiro com queda persistente nas correlações condicionais. Entre 2013 e 2014, observa-se uma tendência de queda nos preços das commodities, porém com impacto limitado na volatilidade da série do CC-CRB. O IBOV, ao contrário do CC-CRB, apresentou forte volatilidade neste período, concomitante com persistente tendência de queda (Figura 6), o que contribuiu para a queda nas correlações condicionais. Durante este período, além das perspectivas de encerramento de um ciclo de crescimento econômico, o Brasil iniciava a fase de forte crise política com reflexo direto em empresas de grande relevância para economia local e para o mercado de capitais, como a Petrobras⁶. Em 2015, a tendência

⁶ Disponível em <<https://oglobo.globo.com/economia/crise-da-petrobras-freia-economia-do-pais-14889297>>.

Figura 22 – Correlação Condicional - CC-CRB e ICB USD

Fonte: Elaborada pelo autor.

de queda no índice internacional das commodities é acentuada, liderada pela forte queda nos preços do petróleo (Figura 9), e acompanhada por forte volatilidade no período. Na B3, tendência de queda e forte volatilidade são mantidos, contribuindo para um aumento significativo nas correlações condicionais entre estes dois índices.

Apesar dos movimentos semelhantes, nota-se uma maior correlação do IBOV com o índice internacional. Isto pode ser explicado pelo comportamento dos investidores estrangeiros, que passaram a ter participação expressiva nos investimentos brasileiros (incluindo o mercado de capitais) a partir de 2006. De acordo com a Comissão de Valores Mobiliários (CVM), a carteira de investimentos dos estrangeiros saltou de US\$ 15 bilhões em 2001 para US\$ 101,6 bilhões em 2006 e, finalmente, para US\$ 398,7 bilhões em 2012⁷. O volume total de ações na carteira de investimentos estrangeiros atingiu seu pico em 2010 com US\$ 254,2 bilhões. Nos anos seguintes, apesar do aumento dos investimentos estrangeiros, a participação em ações é reduzida para US\$ 109,4 bilhões (2015) ou 57% de queda do ano mais expressivo (2010).

O período de valorização de commodities é conhecido também pela euforia por mercados emergentes, com destaque para o Brasil. Investidores estrangeiros, reconhecendo o potencial brasileiro em commodities, passaram a atrelar o sucesso econômico do país ao ciclo destes produtos e, com isto, aumentaram a participação do capital estrangeiro na B3. As flutuações

Acesso em 09 de Outubro de 2020

⁷ Disponível em <http://www.cvm.gov.br/menu/aceso_informacao/serieshistoricas/serieshistoricas/investimento_estrangeiro.html>. Acesso em 09 de Setembro de 2020.

Figura 23 – Correlação Condicional - IBOV e CC-CRB

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Correlação Condicional - IBOV e ICB USD

Fonte: Elaborada pelo autor.

do IBOV passaram a sofrer portanto forte influência do clima internacional. A percepção de um encerramento do ciclo positivo das commodities acelerou a saída dos estrangeiros da bolsa de valores local, contribuindo para queda do seu índice.

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

4.1 Conclusões

O objetivo deste trabalho foi testar a hipótese de que as expectativas dos preços futuros das commodities, refletida nos índices de contratos futuros, tenham relevante importância explicativa para o comportamento da Bolsa de Valores brasileira (B3), representado pelo seu principal índice, o Ibovespa.

A abordagem adotada foi estudar os movimentos das volatilidades das séries financeiras envolvidas (Ibovespa ou “IBOV”, Índice de Commodities do Brasil ou “ICB” e Thompson Reuters Core Commodities CRB ou “CC-CRB”) e as correlações condicionais entre seus movimentos. Para tanto foi utilizado o modelo DCC-GARCH (*Dynamic Conditional Correlation*) com a distribuição normal para os erros do modelo.

Como resultado, observou-se uma forte correlação entre o IBOV e os índices de commodities em períodos de forte volatilidade, como os anos marcados pela crise do *subprime* (2008-2009) e os anos de 2014 e 2015 marcados por forte queda nos preços das commodities concomitante com início de uma crise econômica e política brasileira. Estes resultados corroboram estudos anteriormente publicados como os trabalhos de [Filis, Degiannakis e Floros \(2011\)](#), [Creti, Joëts e Mignon \(2013\)](#).

O modelo capturou correlação condicional significativa também em período de forte expansão econômica, corroborando o trabalho de [Delatte e Lopez \(2013\)](#). Este período, que abrange os anos seguintes à crise do *subprime* (2010 a 2014), é marcado por forte valorização das commodities e percepção dos investidores de um momento muito promissor para o desenvolvimento econômico brasileiro.

Ademais, os resultados deste trabalho comprovam que os movimentos do índice da bolsa brasileira apresentam maior correlação com os preços futuros internacionais (representado pelo CC-CRB) do que os preços futuros locais (ICB), mesmo depois de ajustados pela

variação cambial. O CC-CRB, apesar de ser composto por cerca de 20 commodities internacionais, muitas delas não presentes na pauta exportadora brasileira, possui grande importância para o mercado financeiro internacional como “termômetro” das perspectivas econômicas dos ativos denominados commodities. É esperado portanto que tal comportamento fosse observado, dada a dependência da bolsa de valores brasileira de capitais internacionais e a percepção dos investidores estrangeiros de que a economia brasileira é fortemente dependente do ciclo das commodities.

Em resumo, os resultados obtidos confirmam que os preços das commodities internacionais podem ter grande poder explicativo aos movimentos do IBOV e, portanto, podem ser tomados como base para o desenvolvimento de um futuro modelo preditivo. Além disto, este trabalho também oferece algumas contribuições importantes para pesquisas econômicas como:

- trazer a luz a importância de variáveis exógenas ao mercado de capitais brasileiro no estudo dos seus movimentos, uma área de pesquisa ainda incipiente no país;
- analisar o papel das commodities para além de sua importância no desenvolvimento econômico de países emergentes exportadores, com ênfase no uso como ferramentas para investimentos no mercado de capitais destes países;
- fornecer, através de um estudo empírico, uma visão das dinâmicas dos mercados emergentes exportadores de commodities, representado pelo Brasil, em relação aos mercados financeiros internacionais;
- a validade de modelos de heterocedasticidade condicional para o estudo de comovimentos de séries financeiras em ciclos econômicos completos.

Por fim, este trabalho oferece muitas oportunidades de estudos nos campos estatístico, econométrico e computacional. Algumas das oportunidades identificadas visam:

- aumentar o poder explicativo dos movimentos do mercado de capitais brasileiro, através da incorporação de variáveis macroeconômicas locais, com destaque para o PIB, juros, câmbio e, variáveis internacionais com grande influência no comportamento dos capitais internacionais (juros americanos de curto e longo prazo, por exemplo);
- aprofundar o entendimento das relações entre commodities e bolsa de valores brasileira através do estudo da estrutura de dependência e causalidade entre as séries financeiras envolvidas;
- explorar algoritmos de machine learning no desenvolvimento de um modelo preditivo para o Ibovespa, incorporando as relações causais das commodities e demais séries financeiras que aumentem o poder explicativo dos seus movimentos.

REFERÊNCIAS

ADAMS, Z.; GLÜCK, T. Financialization in commodity markets: A passing trend or the new normal? **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 60, p. 93–111, 2015. Citado nas páginas 20 e 28.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. In: **Selected Papers of Hirotugu Akaike**. [S.l.]: Springer, 1974. p. 215–222. Citado nas páginas 37 e 52.

ARDIA, D. Bayesian estimation of a markov-switching threshold asymmetric garch model with student-t innovations. **The Econometrics Journal**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 12, n. 1, p. 105–126, 2008. Citado na página 38.

ARDIA, D.; HOOGERHEIDE, L. F. Bayesian estimation of the garch (1, 1) model with student-t innovations. 2009. Citado na página 38.

AROURI, M. E. H.; NGUYEN, D. K. Oil prices, stock markets and portfolio investment: Evidence from sector analysis in europe over the last decade. **Energy Policy**, Elsevier, v. 38, n. 8, p. 4528–4539, 2010. Citado na página 29.

B3. **Ibovespa - Metodologia**. 2015. Disponível em: <<http://www.b3.com.br/data/files/1C/56/F7/D5/96E615107623A41592D828A8/IBOV-Metodologia-pt-br.pdf>>. Acesso em: 20/08/2020. Citado na página 47.

_____. **Índice Commodities do Brasil - Metodologia**. 2015. Disponível em: <http://www.b3.com.br/en_us/market-data-and-indices/indices/indices-de-segmentos-e-setoriais/brazil-commodities-index-icb.htm>. Acesso em: 20/08/2020. Citado nas páginas 48 e 51.

_____. **Ibovespa - Composição Carteira**. 2019. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carteira.htm>. Acesso em: 29/09/2019. Citado na página 20.

BAKSHI, G.; PANAYOTOV, G.; SKOULAKIS, G. The baltic dry index as a predictor of global stock returns, commodity returns, and global economic activity. **Commodity Returns, and Global Economic Activity (October 1, 2010)**, 2010. Citado na página 30.

BANZ, R. W. The relationship between return and market value of common stocks. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 3–18, 1981. Citado na página 27.

BASHER, S. A.; HAUG, A. A.; SADORSKY, P. Oil prices, exchange rates and emerging stock markets. **Energy Economics**, Elsevier, v. 34, n. 1, p. 227–240, 2012. Citado na página 29.

BAUWENS, L.; LAURENT, S.; ROMBOUTS, J. V. Multivariate garch models: a survey. **Journal of applied econometrics**, Wiley Online Library, v. 21, n. 1, p. 79–109, 2006. Citado na página 42.

- BERGER, T.; UDDIN, G. S. On the dynamic dependence between equity markets, commodity futures and economic uncertainty indexes. **Energy Economics**, Elsevier, v. 56, p. 374–383, 2016. Citado na página 29.
- BLACK, F.; JENSEN, M. C.; SCHOLES, M. *et al.* The capital asset pricing model: Some empirical tests. **Studies in the theory of capital markets**, Praeger, New York, v. 81, n. 3, p. 79–121, 1972. Citado na página 27.
- BLOOM, N. Fluctuations in uncertainty. **Journal of Economic Perspectives**, v. 28, n. 2, p. 153–76, 2014. Citado na página 29.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of econometrics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986. Citado nas páginas 23 e 35.
- BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; WOOLDRIDGE, J. M. A capital asset pricing model with time-varying covariances. **Journal of political Economy**, The University of Chicago Press, v. 96, n. 1, p. 116–131, 1988. Citado na página 41.
- BOLLERSLEV, T. *et al.* Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model. **Review of Economics and statistics**, Cambridge, v. 72, n. 3, p. 498–505, 1990. Citado na página 41.
- BONELLI, R.; PESSÔA, S. d. A. Desindustrialização no brasil: um resumo da evidência. 2010. Citado na página 24.
- BOX, G. E.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C.; LJUNG, G. M. **Time series analysis: forecasting and control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado na página 33.
- BOX, G. E.; PIERCE, D. A. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. **Journal of the American statistical Association**, Taylor & Francis Group, v. 65, n. 332, p. 1509–1526, 1970. Citado na página 54.
- BOYRIE, M. E. de; PAVLOVA, I. Equities and commodities comovements: Evidence from emerging markets. **Global Economy Journal**, World Scientific, v. 18, n. 3, p. 20170075, 2018. Citado nas páginas 21 e 30.
- BURNHAM, K. **Model Selection and Multimodel Inference; Burnham, KP, Anderson, DR, Eds.** [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 2002. Citado nas páginas 56 e 57.
- BÜYÜKSAHİN, B.; HAIGH, M. S.; ROBE, M. A. Commodities and equities: ever a “market of one”? **The Journal of Alternative Investments**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 12, n. 3, p. 76–95, 2009. Citado na página 29.
- BÜYÜKŞAHİN, B.; ROBE, M. A. Speculators, commodities and cross-market linkages. **Journal of International Money and Finance**, Elsevier, v. 42, p. 38–70, 2014. Citado nas páginas 21 e 29.
- CARHART, M. M. On persistence in mutual fund performance. **The Journal of finance**, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 57–82, 1997. Citado nas páginas 19 e 27.
- CHAGUE, F. D. **The CAPM and Fama-French models in Brazil: A comparative study**. Tese (Doutorado), 2007. Citado na página 28.

- CHONG, J.; MIFFRE, J. Conditional return correlations between commodity futures and traditional assets. **Journal of Alternative Investments**, v. 12, n. 3, p. 61–75, 2010. Citado na página 29.
- CRETI, A.; JOËTS, M.; MIGNON, V. On the links between stock and commodity markets' volatility. **Energy Economics**, Elsevier, v. 37, p. 16–28, 2013. Citado nas páginas 21, 29 e 67.
- DELATTE, A.-L.; LOPEZ, C. Commodity and equity markets: Some stylized facts from a copula approach. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 37, n. 12, p. 5346–5356, 2013. Citado nas páginas 29 e 67.
- ENGLE, R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 20, n. 3, p. 339–350, 2002. Citado nas páginas 41, 42, 44 e 63.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 987–1007, 1982. Citado nas páginas 35 e 54.
- ENGLE, R. F.; KRONER, K. F. Multivariate simultaneous generalized arch. **Econometric theory**, Cambridge University Press, v. 11, n. 1, p. 122–150, 1995. Citado na página 41.
- ESALQ, C. **PIB Agronegócio 2019**. [S.l.]: Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada - ESALQ - USP, 2018. Citado na página 24.
- FALKOWSKI, M. Financialization of commodities. **Contemporary Economics**, v. 5, n. 4, p. 4–17, 2011. Citado na página 28.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross-section of expected stock returns. **the Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 47, n. 2, p. 427–465, 1992. Citado nas páginas 19 e 27.
- _____. Dissecting anomalies. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 63, n. 4, p. 1653–1678, 2008. Citado na página 27.
- _____. A five-factor asset pricing model. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 116, n. 1, p. 1–22, 2015. Citado nas páginas 19 e 27.
- FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. **Journal of political economy**, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 607–636, 1973. Citado na página 27.
- FILHO, E. C. **Risk premia estimation in Brazil: wait until 2041**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado nas páginas 20 e 28.
- FILIS, G.; DEGIANNAKIS, S.; FLOROS, C. Dynamic correlation between stock market and oil prices: The case of oil-importing and oil-exporting countries. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 20, n. 3, p. 152–164, 2011. Citado nas páginas 29 e 67.
- GHALANOS, A. **Pacote R - RMGARCH**. 2019. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/rmgarch/index.html>>. Acesso em: 09 Set. 2020. Citado na página 63.
- GILLER, G. L. A generalized error distribution. 2005. Citado na página 38.

- GÓMEZ, E.; GOMEZ-VIILEGAS, M.; MARIN, J. A multivariate generalization of the power exponential family of distributions. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 27, n. 3, p. 589–600, 1998. Citado na página 38.
- GORTON, G.; ROUWENHORST, K. G. Facts and fantasies about commodity futures. **Financial Analysts Journal**, Taylor & Francis, v. 62, n. 2, p. 47–68, 2006. Citado nas páginas 20 e 28.
- GRAHAM, M.; KIVIAHO, J.; NIKKINEN, J. Short-term and long-term dependencies of the s&p 500 index and commodity prices. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 13, n. 4, p. 583–592, 2013. Citado na página 29.
- GROLA, M. **Análise da relação entre contratos futuros agropecuários e mercado de ações com foco em períodos de crise**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado na página 30.
- HYNDMAN, R. J.; KHANDAKAR, Y. *et al.* **Automatic time series for forecasting: the forecast package for R**. [S.l.]: Monash University, Department of Econometrics and Business Statistics ..., 2007. Citado na página 53.
- JACOBSEN, B.; MARSHALL, B. R.; VISALTANACHOTI, N. Stock market predictability and industrial metal returns. **Management Science**, INFORMS, 2018. Citado na página 30.
- JR, E. L. S.; STOŠIĆ, T.; BEJAN, L.; STOŠIĆ, B. Correlations and cross-correlations in the brazilian agrarian commodities and stocks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 389, n. 14, p. 2739–2743, 2010. Citado na página 30.
- LINTNER, J. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 20, n. 4, p. 587–615, 1965. Citado na página 27.
- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 65, n. 2, p. 297–303, 1978. Citado na página 54.
- LUCENA, P.; FIGUEIREDO, A. C. Anomalias no mercado no mercado de ações brasileiro: uma modificação do modelo de fama de fama e french. 2008. Citado na página 28.
- MÁLAGA, F. K.; SECURATO, J. R. Aplicação do modelo de três fatores de fama e french no mercado acionário brasileiro: um estudo empírico do período 1995-2003. **Encontro Anual da Associação Nacional dos Programas de Pós-Graduação em Administração**, v. 28, 2004. Citado na página 28.
- MALIK, F.; EWING, B. T. Volatility transmission between oil prices and equity sector returns. **International Review of Financial Analysis**, v. 3, n. 18, p. 95–100, 2009. Citado nas páginas 20 e 28.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Citado na página 27.
- MARKOWITZ, H. M. **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, Wiley, New York, Yale University Press new Haven. [S.l.]: Basil Blackwell, Oxford, 1991. Citado na página 30.
- MARTINSA, C. C.; JR, W. E. Pricing assets with fama and french 5-factor model: a brazilian market novelty. **XV Encontro Brasileiro de Finanças**, p. 23–25, 2015. Citado na página 28.

MASIH, R.; PETERS, S.; MELLO, L. D. Oil price volatility and stock price fluctuations in an emerging market: evidence from south korea. **Energy Economics**, Elsevier, v. 33, n. 5, p. 975–986, 2011. Citado na página 29.

MDIC. **Exportações Brasileiras - Histórico por Grupo Produtos**. 2019. Disponível em: <<http://www.mdic.gov.br/index.php/comercio-exterior/estatisticas-de-comercio-exterior/series-historicas>>. Acesso em: 29/09/2019. Citado na página 24.

MENSI, W.; BELJID, M.; BOUBAKER, A.; MANAGI, S. Correlations and volatility spillovers across commodity and stock markets: Linking energies, food, and gold. **Economic Modelling**, Elsevier, v. 32, p. 15–22, 2013. Citado na página 29.

MORETTIN, P. A. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. [S.l.]: Editora Blucher, 2017. Citado nas páginas 37 e 54.

MUSSA, A. **A liquidez e os modelos de precificação de ativos: um estudo empírico no mercado acionário brasileiro de 1995 a 2011**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 28.

NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 347–370, 1991. Citado nas páginas 23 e 35.

NOGUEIRA, I. V.; FERREIRA, B. P. Análise da influência dos preços internacionais das commodities sobre a bolsa de valores de são paulo. **RACE-Revista de Administração, Contabilidade e Economia**, v. 9, n. 1-2, p. 91–114, 2010. Citado na página 30.

ORSKAUG, E. **Multivariate dcc-garch model:-with various error distributions**. Dissertação (Mestrado) — Institutt for matematiske fag, 2009. Citado na página 38.

REFINITIV. **CC-CRB - Metodologia**. Refinitiv and CoreCommodity Indexes LLC, 2020. Disponível em: <https://www.refinitiv.com/content/dam/marketing/en_us/documents/methodology/cc-crb-index-methodology.pdf>. Acesso em: 20/08/2020. Citado na página 48.

ROGERS, P.; SECURATO, J. R. Estudo comparativo no mercado brasileiro do capital asset pricing model (capm), modelo 3-fatores de fama e french e reward beta approach. **RAC-Eletrônica**, v. 3, n. 1, 2009. Citado na página 28.

ROLL, R. Volatility, correlation, and diversification in amulti-factor world. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 39, n. 2, p. 11–18, 2013. Citado nas páginas 20 e 29.

SADORSKY, P. Modeling volatility and correlations between emerging market stock prices and the prices of copper, oil and wheat. **Energy Economics**, Elsevier, v. 43, p. 72–81, 2014. Citado na página 30.

SANTOS, J. O. dos; FAMÁ, R.; MUSSA, A. A adição do fator de risco momento ao modelo de precificação de ativos dos três fatores de fama & french aplicado ao mercado acionário brasileiro. **REGE-Revista de Gestão**, Elsevier, v. 19, n. 3, p. 453–471, 2012. Citado na página 28.

SCHWARZ, G. *et al.* Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978. Citado na página 37.

- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964. Citado nas páginas [19](#) e [27](#).
- SILVENNOINEN, A.; TERÄSVIRTA, T. Multivariate garch models. In: **Handbook of financial time series**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 201–229. Citado na página [41](#).
- SOYTAS, U.; SARI, R.; HAMMOUDEH, S.; HACIHASANOGLU, E. World oil prices, precious metal prices and macroeconomy in turkey. **Energy Policy**, Elsevier, v. 37, n. 12, p. 5557–5566, 2009. Citado na página [29](#).
- STEPHEN, R. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of Economic Theory**, v. 13, n. 3, p. 341–360, 1976. Citado nas páginas [19](#) e [27](#).
- TANG, K.; XIONG, W. Index investment and the financialization of commodities. **Financial Analysts Journal**, Taylor & Francis, v. 68, n. 6, p. 54–74, 2012. Citado nas páginas [21](#), [28](#) e [30](#).
- TSAY, R. S. **An introduction to analysis of financial data with R**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014. Citado nas páginas [32](#), [33](#), [34](#), [35](#), [36](#), [37](#), [39](#) e [52](#).
- TSE, Y. K.; TSUI, A. K. C. A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 20, n. 3, p. 351–362, 2002. Citado na página [41](#).
- UNCTAD. **The State of Commodity Dependence 2019**. [S.l.]: United Nations Geneva, 2019. Citado nas páginas [20](#) e [24](#).
- VARGA, G.; BRITO, R. D. The cross-section of expected stock returns in brazil. **Available at SSRN 2800229**, 2016. Citado na página [28](#).
- WEN, X.; WEI, Y.; HUANG, D. Measuring contagion between energy market and stock market during financial crisis: A copula approach. **Energy Economics**, Elsevier, v. 34, n. 5, p. 1435–1446, 2012. Citado na página [29](#).
- ZHU, H.-M.; LI, R.; LI, S. Modelling dynamic dependence between crude oil prices and asia-pacific stock market returns. **International Review of Economics & Finance**, Elsevier, v. 29, p. 208–223, 2014. Citado na página [29](#).

COEFICIENTES E INDICADORES - GARCH MULTIVARIADO

Tabela 10 – DCC-GARCH (1,1) IBOV, CC-CRB, ICB USD - Principais Parâmetros

Parameters	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
ibov-mu	0,000459	0,000427	1,075465	0,282167
ibov-ar1	0,784856	0,163916	4,788145	0,000002
ibov-ar2	-0,009202	0,030760	-0,299149	0,764826
ibov-ma1	-0,801993	0,173469	-4,623261	0,000004
ibov-omega	0,000005	0,000059	0,087832	0,930010
ibov-alpha1	0,063656	0,079998	0,795726	0,426192
ibov-beta1	0,916794	0,123600	7,417437	0,000000
cc crb-mu	-0,000080	0,000159	-0,504755	0,613731
cc crb-ar1	-0,458159	0,533474	-0,858822	0,390439
cc crb-ma1	0,435538	0,540627	0,805616	0,420464
cc crb-omega	0,000000	0,000000	0,960747	0,336679
cc crb-alpha1	0,038926	0,003081	12,634963	0,000000
cc crb-beta1	0,958915	0,002195	436,781447	0,000000
icb usd-mu	0,000112	0,000227	0,495690	0,620113
icb usd-ar1	-0,063205	0,124431	-0,507952	0,611487
icb usd-ar2	0,858289	0,119901	7,158333	0,000000
icb usd-ma1	0,065963	0,131324	0,502289	0,615464
icb usd-ma2	-0,829878	0,125575	-6,608652	0,000000
icb usd-omega	0,000002	0,000000	3,462879	0,000534
icb usd-alpha1	0,033766	0,004751	7,107566	0,000000
icb usd-beta1	0,953570	0,004684	203,563961	0,000000
Joint dcca1	0,006464	0,001528	4,231191	0,000023
Joint dccb1	0,991685	0,002026	489,362215	0,000000

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 11 – Testes GARCH (1,1) IBOV

Ljung-Box - Resíduos Normalizados (dof = 3)				
lag	statistic	p-value		
1	0,4502	0,5022		
8	2,8111	0,9992		
14	4,0274	0,9730		
Ljung-Box - Resíduos Quadrados Normalizados (dof = 2)				
lag	statistic	p-value		
1	2,848	0,091483		
5	11,890	0,002977		
9	13,906	0,006539		
ARCH - LM Test				
lag	Statistic	Shape	Scale	P-Value
3	0,6813	0,500	2,000	0,4091
5	0,8332	1,440	1,667	0,7830
7	1,6542	2,315	1,543	0,7899
Viés de Sinais				
Viés de Sinais	t-value	prob sig		
Viés	0,7397	4,595e-01		
Negativo	0,7067	4,798e-01		
Positivo	4,0538	5,169e-05		
Efeito conjunto	23,0127	4,014e-05		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Testes GARCH (1,1) CC-CRB

Ljung-Box - Resíduos Normalizados (dof = 2)				
lag	statistic	p-value		
1	0,2595	0,6105		
5	0,7512	1,0000		
9	1,7955	0,9915		
Ljung-Box - Resíduos Quadrados Normalizados (dof = 2)				
lag	statistic	p-value		
1	0,002113	0,9633		
5	1,729387	0,6836		
9	2,889881	0,7770		
ARCH - LM Test				
lag	Statistic	Shape	Scale	P-Value
3	0,04103	0,500	2,000	0,8395
5	0,87315	1,440	1,667	0,7709
7	1,33217	2,315	1,543	0,8543
Viés de Sinais				
Viés de Sinais	t-value	prob sig		
Viés	1,7107	0,08723		
Negativo	0,6295	0,52906		
Positivo	0,9193	0,35802		
Conjunto	8,8589	0,03123		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 13 – Testes GARCH (1,1) ICB USD

Ljung-Box - Resíduos Normalizados (dof = 4)				
lag	statistic	p-value		
1	0,7922	0,3734		
11	5,4257	0,8291		
19	11,5542	0,2421		
Ljung-Box - Resíduos Quadrados Normalizados (dof = 2)				
lag	statistic	p-value		
1	0,2922	0,5888		
5	1,8589	0,6521		
9	2,6574	0,8139		
ARCH - LM Test				
lag	Statistic	Shape	Scale	P-Value
3	1,855	0,500	2,000	0,1732
5	2,618	1,440	1,667	0,3501
7	2,736	2,315	1,543	0,5648
Viés de Sinais				
Viés de Sinais	t-value	prob sig		
Viés	0,8923	0,37232		
Negativo	1,4743	0,14050		
Positivo	0,5120	0,60870		
Conjunto	10,2474	0,01658		

Fonte: Elaborada pelo autor.