Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio

Fernando Herrero Lomas

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Fernando Herrero Lomas

Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert

USP – São Carlos
Julho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L634p Lomas, Fernando Herrero
Problemas isoperimétricos: uma abordagem no
ensino médio / Fernando Herrero Lomas; orientador
Marcelo Rempel Ebert. - São Carlos - SP, 2016.
51 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. problema isoperimétrico. 2. desigualdade
isoperimétrica. 3. área.. I. Ebert, Marcelo Rempel,
orient. II. Título.

Fernando Herrero Lomas

Isoperimetric problems: an approach in high school

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Program in Mathematics Professional Master. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert

USP – São Carlos
July 2016

Este trabalho é dedicado a minha esposa, aos meus pais, aos meus irmãos, aos meus afilhados e aos meus amigos professores, que sabem o quanto é difícil conciliar o tempo entre trabalho e estudo.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por estar realizando mais este sonho. Só Ele sabe o quanto foi difícil superar todas as dificuldades para ingressar e conseguir terminar mais esta etapa. Foi Ele, que me fez acreditar na minha capacidade, quando eu já estava perdendo as esperanças.

Agradeço a minha esposa Eloisa Pimenta Lomas, pelo todo tempo de apoio, cobrança e incentivo para que eu concluísse esse trabalho. Pela paciência de por muito tempo ver todos os sábados durante dois anos dedicados ao PROFMAT.

Agradeço aos meus pais Eloisia e Benedito pelo empenho em incentivar a formação como ser humano e professor.

Agradeço aos meus irmãos Ana Paula e Hugo por sempre me incentivar.

Agradeço aos professores do PROFMAT que abdicaram de ficar em suas casas aos sábados para contribuir com nossa formação, uma vez que nós professores encontramos inúmeros obstáculos para frequentar curso durante a semana.

Agradeço aos meus amigos de PROFMAT que mesmo a distância sempre se fizeram presentes através de mensagens.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert que sempre foi importante, não só para apoiar durante a dissertação, mas também por sempre se mostrar presente nos vários momentos do PROFMAT.

*“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela”
Albert Einstein.*

RESUMO

LOMAS, F. H.. **Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio.** 2016. [51](#) f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Nesta dissertação foram discutidas abordagens do problema isoperimétrico que podem ser aplicadas no ensino médio e para alunos de Licenciatura plena em Matemática. Foi realizada inicialmente uma abordagem histórica e posteriormente a discussão de casos particulares e gerais de desigualdade isoperimétrica tanto no plano como no espaço. A abordagem principal deste texto é no plano, no qual foram analisadas as áreas dos triângulos, quadriláteros e polígonos regulares dado um perímetro fixo.

Palavras-chave: problema isoperimétrico, desigualdade isoperimétrica, área..

ABSTRACT

LOMAS, F. H.. **Isoperimetric problems: an approach in high school**. 2016. [51](#) f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In this dissertation isoperimetric problem approaches were discussed that can be applied in high school and full degree students in mathematics. It was initially performed a historical approach and then the discussion of individual and general cases of isoperimetric inequality both in the plane and in space . The main approach of this text is in the plan, in which the areas of the triangles were analyzed , quadrilaterals and regular polygons given a fixed perimeter.

Key-words: isoperimetric problem, isoperimetric inequality, area..

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Livro Coleção Matemática - Edição de 1589	21
Figura 2 – Cidade de Paris	22
Figura 3 – Cidade de Braga	23
Figura 4 – Cidade Colônia	23
Figura 5 – Elipse com Focos F_1 e F_2	25
Figura 6 – Triângulo qualquer	26
Figura 7 – Triângulo qualquer com altura relativa a BC	26
Figura 8 – Triângulos com base no eixo maior da elipse	32
Figura 9 – Paralelepípedo reto retângulo com lados a , b e c	36
Figura 10 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 4$ lados e circunferência com mesmo perímetro	43
Figura 11 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 5$ lados e circunferência com mesmo perímetro	43
Figura 12 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 7$ lados e circunferência com mesmo perímetro	44
Figura 13 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 9$ lados e circunferência com mesmo perímetro	44
Figura 14 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 11$ lados e circunferência com mesmo perímetro	45
Figura 15 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 13$ lados e circunferência com mesmo perímetro	45
Figura 16 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 30$ lados e circunferência com mesmo perímetro	46
Figura 17 – Triângulo qualquer	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	ABORDAGEM HISTÓRICA	21
3	ASSUNTOS PRELIMINARES	25
3.1	A Elipse	25
3.2	Calculando a área de triângulos	26
3.3	Quadriláteros inscritíveis	27
3.4	Desigualdades das Médias	28
4	DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA	31
4.1	A Desigualdade Isoperimétrica no $\mathbb{R}^2$	31
4.1.1	<i>A Desigualdade Isoperimétrica para triângulos</i>	31
4.1.2	<i>A Desigualdade Isoperimétrica para Quadriláteros</i>	33
4.1.3	<i>A desigualdade isoperimétrica para polígonos</i>	35
4.2	A Desigualdade Isoperimétrica no $\mathbb{R}^3$	36
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICE A ROTEIRO DE AULA	41
A.1	Roteiro de aulas	42
A.1.1	<i>Aula 01 - Aspecto Histórico</i>	42
A.1.2	<i>Aula 02 - Relembrando alguns resultados da Geometria Plana</i>	42
A.1.3	<i>Aula 03 - O problema isoperimétrico</i>	42
A.1.4	<i>Aula 04 - Usando o Geogebra</i>	42
A.2	Considerações	46
	APÊNDICE B ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO DO GEOGEBRA	47
	APÊNDICE C DEMONSTRAÇÕES ADICIONAIS	49

INTRODUÇÃO

O problema isoperimétrico, um problema clássico da Matemática, é um assunto interessante a ser discutido com alunos dos Ensino Médio, pois o mesmo mostra claramente o quanto a Matemática se faz presente na vida das pessoas. Explorando esse assunto em sala de aula o professor poderá estimular seus alunos discutirem e pensar nas várias situações possíveis para obter a maior área dado o perímetro fixo. Ressalta-se ainda que através da experimentação em um laboratório de Matemática o aluno poderá perceber a importância de vários resultados matemáticos.

Este trabalho poderá servir como um manual ao professor da Educação Básica para aplicação em sala de aula, para que tal objetivo seja alcançado essa dissertação apresenta uma divisão em 4 partes principais e os anexos:

- Abordagem histórica - Um pouco de história e curiosidades.
- Assuntos preliminares - Itens de Matemática básica que servirão de apoio para melhor compreensão das demonstrações utilizadas.
- Desigualdes isoperimétricas no $\mathbb{R}^2$ - Casos particulares e o teorema que motivou esse trabalho de pesquisa.
- Desigualdes isoperimétricas no $\mathbb{R}^3$ - Caso particular.
- Anexo A, B e C que contemplam respectivamente um roteiro de aula, um roteiro de construção no Geogebra® e demonstrações adicionais.

ABORDAGEM HISTÓRICA

O problema isoperimétrico já são encontrados em textos gregos de Pappus (Pappus) ou Papo de Alexandria ¹. Segundo (EVES, 2004) um dos maiores trabalhos de Pappus foi *Coleção Matemática*. Esta coleção é uma combinação de guia de geometria da época, com várias proposições originais, extensões e notas históricas. Infelizmente dos oito livros que compõem essa obra perdeu-se o primeiro e parte do segundo livro.

Destacamos o livro V, que aborda amplamente à Isoperimetria, ou seja, comparação de áreas de figuras limitadas por perímetros iguais e também de volumes de sólidos que são limitados por áreas iguais. Nesta obra é abordado também de maneira interessante sobre os favos de mel das abelhas e propriedades de máximos e mínimos.

Figura 1 – Livro Coleção Matemática - Edição de 1589

Apesar das abordagens do problema isoperimétrico já no séc. IV, não há indícios de

¹ Pappus ou Papo de Alexandria foi um egípcio helenizado nascido em Alexandria, Egito, e um dos mais importantes matemáticos helenísticos da antiguidade.

uma prova formal para o problema, dentro deste período. Entretanto o problema isoperimétrico sempre despertou interesse de outros matemáticos, por exemplo, o interesse de Jakob Bernoulli² que no século XVII também propõe discussões sobre o problema de figuras isoperimétricas e por esse motivo este foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar no cálculo de variações, segundo (EVES, 2004).

Apesar de não existirem provas formais, o fato de conhecer o resultado "provável" do problema, pode ter influenciado na organização de cidades durante a idade média. As cidades neste período histórico normalmente eram cercadas de muros e muitas vezes limitadas por rios ou montanhas para proteção.

Analisarmos alguns mapas da época, fica claro a disposição circular ou semicircular. Inclusive observa-se que de maneira inteligente verifica-se de fato a utilização de construção de muros semicirculares e rios como delimitações da fronteira. Pode-se citar como exemplos as cidades de Paris (França), Braga (Portugal) e Colônia (Alemanha).

Figura 2 – Cidade de Paris

Outra curiosidade é a referência a solução do problema isoperimétrico no épico Eneida do poeta romano Virgílio. Obra dividida em doze cantos, escrita em versos por Virgílio em seu retiro na Campânia durante os últimos 12 anos de sua vida (30-19 a.C.). A referência do problema isoperimétrico é feita na história da Rainha Dido, canto VI da obra de Virgílio, por isso encontramos versões desta história como "*A Lenda de Dido*". Após o assassinado do marido Dido negocia com o Rei Jarbas a compra de terras. Neste acordo ficou acertado que ela poderia comprar a terra em que ela pudesse cercar com a pele de um touro. Após cortar o couro em tiras bem finas e emendá-las foi realizada a escolha do lugar, escolhido um lugar a beira mar ela decidiu por fazer um semicírculo com essa longa tira de couro.

² Jakob Bernoulli foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

Figura 3 – Cidade de Braga

Figura 4 – Cidade Colônia

Dados os períodos históricos da Coleção de Pappus e a obra de Virgílio podemos concluir que já havia estudos anteriores sobre o assunto, mas tais registros devem ter se perdido.

Entretanto apenas em 1870, com Weierstrass³ surgiu uma prova rigorosa amplamente aceita. Segundo (LIMBERGER, 2012), essa prova aparece como corolário nos estudos da teoria de "Cálculo das Variações". Posteriormente apareceram novas provas no séc. XX pelos alemães Erhard Schmidt e Adolf Hurwitz, porém a demonstração deste último faz uso das Séries de Fourier. Tipo de demonstração que não será abordada neste trabalho uma vez que este tem como objetivo a aplicação no Ensino Médio.

³ Karl Weierstrass, foi um matemático alemão, professor na Universidade de Berlim no séc. XIX.

ASSUNTOS PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos de assuntos que representam os pré-requisitos para o entendimento dos resultados matemáticos que serão utilizados para demonstrar e apresentar o assunto.

3.1 A Elipse

Nesta seção vamos apenas apresentar o conceito de Elipse, pois a definição de Elipse será utilizada para demonstrar a desigualdade isoperimétrica para triângulos.

Dados dois pontos fixados F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles.

Definição 1. Uma **elipse** é o conjunto dos pontos P de α , cuja a soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ ($2a > 2c$).

$$Elipse = \{P \in \alpha | PF_1 + PF_2 = 2a\}$$

Figura 5 – Elipse com Focos F_1 e F_2

Denominamos $\overline{A_1A_2}$ como eixo maior e $\overline{B_1B_2}$ como eixo menor.

3.2 Calculando a área de triângulos

Para calcular a área de triângulos nas próximas demonstrações serão utilizados dois resultados em especial que são:

Figura 6 – Triângulo qualquer

Modo 1 - (Conhecido dois lados e um ângulo entre eles): Podemos utilizar a fórmula matemática que utiliza a trigonometria como recurso,

$$S = \frac{ac \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}. \quad (3.1)$$

Demonstração. Dado um $\triangle ABC$, pode-se tomar $\overline{BC}$ como base e traçar a altura relativa a $\overline{BC}$ como mostra a figura 7. Conhecendo o ângulo α , calcula-se a altura h :

Figura 7 – Triângulo qualquer com altura relativa a BC

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{c},$$

$$h = c \cdot \text{sen}(\alpha).$$

Seja S a área do $\triangle ABC$, então:

$$S = \frac{a \cdot h}{2},$$

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}(\alpha)}{2},$$

$$S = \frac{ac \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}.$$

□

Modo 2 - (Conhecido os três lados do triângulo): Podemos utilizar a famosa fórmula de Heron ¹:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}. \quad (3.2)$$

3.3 Quadriláteros inscritíveis

Nesta seção será discutido um pouco sobre os quadriláteros inscritíveis, para tal demonstraremos a seguinte proposição, que pode ser encontrada no livro (BARBOSA; PLANA,).

Proposição 1. Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.

Demonstração. Supondo que o quadrilátero possa ser inscrito em um círculo. Desta forma cada um dos ângulos é um ângulo inscrito no círculo. Seja ABCD esse quadrilátero. Considerando os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$. Esses ângulos juntos com os pontos B e D determinam os dois arcos. Como esses arcos somam 360° e sabemos que todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente, a soma dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ será 180° , portanto suplementares. Seja agora um quadrilátero ABCD com um par de ângulos opostos suplementares. Como a soma dos ângulos internos dos quadriláteros é 360° , então, o outro par de ângulos opostos também é suplementar. Observe as figuras abaixo:

É sempre possível estabelecer 3 pontos sobre o círculo, mas quando vamos colocar o quarto ponto, temos três possibilidades para esse ponto: Ponto sobre o círculo, dentro ou fora do círculo. Vamos supor que o ponto esteja fora, desta forma observe o segmento B_1D_1 e o E, ponto sobre o círculo. O Quadrilátero $A_1B_1C_1E$ é um quadrilátero inscrito no círculo e, portanto seus ângulos são suplementares.

$$\widehat{A_1B_1C_1} + \widehat{A_1EC_1} = 180^\circ.$$

Por hipótese também temos

¹ Demonstração no Anexo C

$$A_1\widehat{B_1C_1} + A_1\widehat{D_1C_1} = 180^\circ.$$

Dessas duas igualdades, concluímos que $A_1\widehat{D_1C_1} = A_1\widehat{E C_1}$. Observe ainda que:

$A_1\widehat{E B_1} > A_1\widehat{D_1B}$ e $B_1\widehat{E C_1} > B_1\widehat{D_1C_1}$ (ângulos externos). Desta forma:

$$A_1\widehat{E C_1} = A_1\widehat{E B_1} + B_1\widehat{E C_1} > A_1\widehat{D_1B_1} + B_1\widehat{D_1C_1} = A_1\widehat{D_1C_1}.$$

Esta contradição mostra que D não pode estar fora do círculo. A prova que o D não está dentro do círculo é análoga.

□

3.4 Desigualdades das Médias

Nesta seção serão apresentadas todas as médias, porém faremos apenas a demonstração das desigualdade entre a média aritmética e geométrica, pois será utilizada na demonstração desigualdade isoperimétrica entre quadriláteros.

Definição 2. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ números reais positivos. Os valores

$$m_h(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad (3.3)$$

$$m_g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad (3.4)$$

$$m_a(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (3.5)$$

e

$$m_q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (3.6)$$

são chamados, respectivamente, de média harmônica, média geométrica, média aritmética e média quadrática dos números a_i , no qual $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Proposição 2. Dados $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos tem-se $m_g(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq m_a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas etapas:

Etapa 1: A desigualdade vale para $n = 2^m$.

Provaremos por indução. Para $n = 2$ a desigualdade vale. De fato,

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0.$$

Assim, $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$ e consequentemente $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Agora queremos provar que se a desigualdade vale para $n = k = 2^m$, então também vale para $n = 2k = 2^{m+1}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}}{2k} &= \frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}}{k}}{2} \\
 &\geq^* \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k}}}{2} \\
 &\geq^{**} \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k}}} \\
 &= \sqrt[2k]{a_1 a_2 \dots a_{2k}},
 \end{aligned}$$

onde em (*) e (**) usamos a validade da desigualdade para $n = k$ e para $n = 2$, respectivamente. Provado para $n=2$, é claro que vale para $n = 4, 8, \dots, 2^m, \dots$, como já era esperado.

Etapa 2: Dado m inteiro positivo, então a desigualdade vale para todo $n < 2^m$. Para que isso seja verificado, definimos o número $L = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$, e como a desigualdade vale para $n = 2^m$, temos então que

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1 + \dots + a_n + \underbrace{L + \dots + L}_{(2^m - n) \text{ vezes}}}{2^m} &\geq \sqrt[2^m]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot L^{2^m - n}} \\
 &= \sqrt[2^m]{L^n \cdot L^{2^m - n}} = L.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a_1 + \dots + a_n + (2^m - n)L}{2^m} \geq L,$$

logo

$$a_1 + \dots + a_n \geq 2^m L - (2^m - n)L = nL,$$

obtendo desta maneira

$$a_1 + \dots + a_n \geq nL = n\sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

ou seja, a desigualdade desejada. O caso em que $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ é imediato.

□

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Este capítulo está dedicado a desigualdade isoperimétrica no plano e um exemplo no espaço. Será observado a desigualdade no triângulo, no quadrilátero e nos polígonos regulares. Posteriormente serão realizadas algumas observações acerca do problema sobre uma superfície não plana e um caso particular no $\mathbb{R}^3$.

4.1 A Desigualdade Isoperimétrica no $\mathbb{R}^2$

Apresentaremos alguns casos de desigualdade isoperimétrica no plano.

4.1.1 A Desigualdade Isoperimétrica para triângulos

Vamos discutir como determinar entre triângulos com mesmo perímetro qual terá maior área. Seja então uma família de triângulos cujo os vértices da base sejam fixados e que seja determinado um perímetro fixo.

Pela definição da Elipse, podemos sem perda de generalização determinar que se fixarmos o lado de um triângulo (chamaremos de base) e fixarmos o perímetro o terceiro vértice deste triângulo estará sobre uma elipse cujos focos são vértices da base previamente fixada. De fato podemos afirmar que o terceiro vértice estará sobre uma elipse, pois a soma das distâncias do terceiro vértice aos outros dois lados é constante.

Sendo assim dada essa família de triângulos com o mesmo perímetro, precisamos determinar qual triângulo terá a maior área.

Dado que a base foi fixada, tem-se que a maior área será a do triângulo que apresentar maior altura, ou seja, o triângulo cujo o terceiro vértice coincidir com o vértice superior ou inferior da elipse. Sendo assim entre todos os triângulos ABC de base AB fixa e perímetro dado, temos que o de maior área será o triângulo isósceles.

Figura 8 – Triângulos com base no eixo maior da elipse

Proposição 3. Dentre todos os triângulo ABC de base AB com medida fixa e perímetro dado, o de maior área é o isósceles

Demonstração. Tomando um triângulo de lados a , b e c pela fórmula de Heron temos que

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Fixando a , para maximizar a área basta que o produto $M = (p-b)(p-c)$ seja máximo. Tomando $p = \frac{a+b+c}{2}$, ou seja,

$$2p = a + b + c, \quad (4.1)$$

isolando b e substituindo em M , obtemos

$$M = (p - (2p - a - c))(p - c) = -p^2 + (a + 2c)p + (ac + c^2). \quad (4.2)$$

Como temos uma função quadrática na variável p , com discriminante $\Delta = a^2 > 0$, o valor máximo de M é assumido no vértice da parábola, ou seja, na abscissa

$$p = \frac{a + 2c}{2}. \quad (4.3)$$

Comparando (4.1) e (4.3) temos que $a + b + c = a + 2c$. Desta forma o produto M será máximo quando $b = c$, ou seja, quando o triângulo for isósceles. $\square$

Precisamos considerar também as situações em que não se tem nenhum lado fixado. Sendo assim podemos tratar um caso mais geral.

Proposição 4. Entre todos os triângulos apenas com um perímetro P fixado o de maior área é o triângulo equilátero.

Demonstração. Tomando um triângulo de lados a , b e c pela fórmula de Heron temos que:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Admitindo a média geométrica e aritmética por definição respectivamente como

$$m_g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (4.4)$$

e

$$m_a(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (4.5)$$

e ainda conhecendo a desigualdade $m_g \leq m_a$ podemos escrever que

$$A \leq \sqrt{p \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Logo a maior área que pode ser atingida é $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Considerando que na desigualdade $m_g \leq m_a$ só ocorre a igualdade quando $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, temos que $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c$, ou seja, quando o triângulo é equilátero. Sendo assim a área $\frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $\square$

Concluimos o estudo da desigualdade isoperimétrica de um triângulo chegando no resultado que dado um perímetro P a maior área é encontrada quando a medida do lado ℓ deste triângulo for igual a $\frac{1}{3}P$.

4.1.2 A Desigualdade Isoperimétrica para Quadriláteros

Esta seção tem o objetivos de analisar os problemas isoperimétricos nos quadriláteros.

Proposição 5. Dentre todos os quadriláteros com comprimentos de lados fixados aquele de maior área é o inscritível.

Demonstração. Conhecida a fórmula de Bretschneider ¹ para a área S de um quadrilátero convexo $ABCD$ de lados $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ e $d = \overline{DA}$ e ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$:

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - d\right) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\widehat{A} + \widehat{C})]}, \text{ na qual } p = a + b + c + d.$$

Para que o valor S seja maximizado é suficiente minimizar $1 + \cos(\widehat{A} + \widehat{C})$. Isso acontecerá quando o valor do cosseno for assumir o valor -1 , ou seja, $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$. Sabendo que um quadrilátero é inscritível, se e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares. $\square$

Proposição 6. Entre todos os quadriláteros inscritíveis o de maior área é quadrado.

¹ Demonstração no Anexo C

Demonstração.

Dado um quadrilátero qualquer $ABCD$, podemos calcular a área em duas etapas. Calculando a área do triângulo ABD e a área do triângulo BCD , assim temos:

$$A_1 = \frac{ad \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}. \quad (4.6)$$

$$A_2 = \frac{cb \cdot \text{sen}(\beta)}{2}. \quad (4.7)$$

$$A = \frac{ad \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} + \frac{cb \cdot \text{sen}(\beta)}{2}. \quad (4.8)$$

Para que (4.8) seja máxima é preciso que (4.6) e (4.7) tenham o maior valor possível. Para tal é necessário que $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{sen}(\beta)$ sejam máximos, ou seja, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

Isso já garante que o quadrilátero seja um retângulo e assim com um par de ângulos suplementares, sendo assim inscritível.

Para concluir a prova temos que demonstrar que dado um perímetro fixo a área do quadrado é maior que de um retângulo. Então que seja um retângulo $ABCD$ com lados de medidas x e y . Assim a área e perímetro deste retângulo é determinada respectivamente por

$$A = x \cdot y \quad (4.9)$$

e

$$p = 2x + 2y. \quad (4.10)$$

Isolando y encontra-se $y = \frac{p-2x}{2}$, agora substituindo em (4.9) temos

$$A = \frac{xp - 2x^2}{2}. \quad (4.11)$$

Desta função quadrática podemos determinar que o máximo valor será atingido quando $x = y = \frac{p}{4}$, ou seja, quando esse retângulo for um quadrado.

□

4.1.3 A desigualdade isoperimétrica para polígonos

A demonstração da desigualdade isoperimétrica para polígonos regulares é inapropriada para ser aplicada no Ensino Médio. Desta forma torna-se mais adequado a apresentação de uma atividade interativa utilizando um software livre, tal como Geogebra (software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino), para que os alunos intuitivamente percebam que ao fixar um perímetro P o polígono regular terá sua área aumentada a cada aumento no número de lados, tal atividade está disponível no Anexo A.

A seguir apresentamos uma prova simples, utilizando cálculo diferencial. Sabe-se que a mesma não pode ser aplicada no Ensino Médio, mas trata-se de uma demonstração de fácil entendimento para estudantes de Licenciatura e por esse motivo é apresentada.

Proposição 7. Se $i < j$, i e j inteiros positivos, então a área de um polígono regular de i lados é menor do que a área de um polígono regular de j lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

Demonstração. Seja p o perímetro de um polígono regular de n lados. Desta maneira, pode-se afirmar que esse polígono possui lados com medida $l = \frac{p}{n}$. Dividindo esse polígono regular em n triângulos isósceles de base l e altura a , $a = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$. A área S deste polígono pode ser determinada por $S = \frac{p^2}{4n} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$, multiplicando o numerador e denominador da fração por $\frac{\pi}{n}$, pode-se rescrever S como $S = \frac{p^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{n \tan \frac{\pi}{n}}$.

Para ver como S varia, trocamos $\frac{\pi}{n}$ por x , assim estudaremos a função $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Tomar n grande implica em calcular o limite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\tan x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin(x)} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Usando a regra do produto e o limite fundamental, temos:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x)) = 1$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin(x)} \right) = 1$ (Limite fundamental).

Então, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Além disso f é contínua em $(0, \frac{\pi}{2})$ e calculando a 1ª derivada de $f(x)$ obtemos:

$$f(x) = x \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \rightarrow f'(x) = 1 \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + x \cdot \frac{(-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x))}{\sin^2(x)} \quad (4.13)$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + x \left(\frac{-1}{\sin(x)^2} \right) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{x}{\sin(x)^2}.$$

Conclui-se que $f'(x) < 0$ e a área de S é estritamente crescente, quando n cresce. Portanto se $i < j$ a área do polígono regular de i lados será maior que a área de um polígono regular de j lados. E ainda, como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, temos que a área S de um polígono regular de n lados satisfaz $S < \frac{p^2}{4\pi}$.

Agora se tomarmos um círculo de perímetro p , neste caso o raio será $r = \frac{p}{2\pi}$, e logo sua área será $S = \frac{p^2}{4\pi}$. Portanto, temos que a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

□

De maneira mais geral como pode ser visto em ((LIMBERGER, 2012)), temos:

Teorema 1. (Desigualdade isoperimétrica) Toda curva fechada de comprimento p engloba uma área menor ou igual a $\frac{p^2}{4\pi}$. Além disso, esse valor só é alcançado para círculo de raio $\frac{p}{2\pi}$.

Obs. Sendo mais rigorosos, podemos assumir que a superfície da Terra é aproximadamente esférica e que um problema isoperimétrico real pode ser resolvido sobre essa superfície esférica. E a solução neste caso é a mesma, ou seja, a maior área dado um perímetro fixo será determinada por um círculo. A desigualdade isoperimétrica para curvas fechadas sobre uma esfera foi resolvida em 1905 por (BERNSTEIN, 1905).

4.2 A Desigualdade Isoperimétrica no $\mathbb{R}^3$

A seguir um exemplo de desigualdade isoperimétrica no $\mathbb{R}^3$. A proposta desta seção é provar que entre todos os paralelepípedos com área S fixada o maior volume é encontrado no cubo, ou seja, um paralelepípedo regular.

Figura 9 – Paralelepípedo reto retângulo com lados a , b e c

Demonstração. A área da superfície é $S = 2(ab + bc + ac)$ e o volume deste sólido é $V = abc$, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica $m_g(a_1, a_2, a_3) \leq m_a(a_1, a_2, a_3)$ temos que

$$v^2 = ab \cdot ac \cdot bc \leq \left(\frac{ab + ac + bc}{3} \right)^3 = \left(\frac{S}{6} \right)^3. \quad (4.14)$$

Para que o volume máximo seja atingido, ou seja, para que $V = \sqrt{\left(\frac{S}{6}\right)^3}$ atinja o seu maior valor possível é necessário que $ab = ac = bc$, logo $a = b = c$.

□

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M.; PLANA, G. E. **Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro.

BERNSTEIN, F. Über die isoperimetrische eigenschaft des kreises auf der kugeloberfläche und in der ebene. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 60, n. 1, p. 117–136, 1905.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas, São Paulo: UNICAMP, 2004.

LIMBERGER, R. **Abordagens do problema isoperimétrico, Dissertação de Mestrado**. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, 2012.

ROTEIRO DE AULA

Público Alvo: Alunos da 2^a ou 3^a série do Ensino Médio, mas pode ser aplicado em partes para os anos finais do Ensino Fundamental II ou para a 1^a série do Ensino Médio, desde que seja adaptado. Veja depoimentos das aplicações no site <http://www.gegribeiraopreto.com/> - GEG Ribeirão Preto-SP e obtenha o Geogebra <https://www.geogebra.org>.

Recursos Pedagógicos:

- Material impresso;
- Giz e lousa (sala convencional);
- Laboratório de Informática;
- Sala de recursos multimídia.

Objetivo Geral: Mostrar a utilização de conceitos geométricos que foram importantes em decisões durante a história e através disso motivar o estudo de Matemática.

Objetivos Específicos:

- Utilizar o software livre Geogebra para modelar situações;
- Incentivar a solução de problemas em grupo;
- Mostrar a importância da Matemática para sociedade.

Conteúdos:

- Geometria Plana;
- Problema Isoperimétrico Clássico.

A.1 Roteiro de aulas

A.1.1 Aula 01 - Aspecto Histórico

(Sala com Recursos Multimídia)

Essa aula pode ser ilustrada com um vídeo "Problema isoperimétrico e Área máxima" disponível no youtube - <https://www.youtube.com/watch?v=FffRJ9LKjgc> .

Após o vídeo aproveitar o tempo para interagir com a turma e recolher as curiosidades que podem ter sido encontradas neste vídeo.

A.1.2 Aula 02 - Relembrando alguns resultados da Geometria Plana

(Sala comum)

Referência é o Capítulo[2].

- Definição de Elipse;
- Área de triângulos;
- Ângulo inscrito na circunferência;
- Polígonos inscritíveis;
- Desigualdade das médias aritmética e geométrica.

A.1.3 Aula 03 - O problema isoperimétrico

(Sala com Recursos Multimídia)

Apresentar o problema clássico. Capítulo [3].

A.1.4 Aula 04 - Usando o Geogebra

(Sala de informática)

Acesse o roteiro e o arquivo do resultado a ser obtido no Geogebra - <https://goo.gl/5x97PR> - Pasta de arquivos. O arquivo poligonos.ggb deve ser aberto com o Geogebra.

Os alunos podem ser organizados em trios para essa atividade. Deve ser entregue impresso o roteiro com as instruções de construção dos polígonos no Geogebra.

O ideal é contar com um monitor assistente para ajudar aos alunos nesta atividade, pois muitos encontram dificuldades em localizar os comandos inicialmente.

Seguindo as instruções do roteiro os alunos devem chegar nas figuras abaixo, lembrando que número máximo de lados testado para o polígono foi de 30 lados, mas pode-se utilizar um

Figura 10 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 4$ lados e circunferência com mesmo perímetro

Figura 11 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 5$ lados e circunferência com mesmo perímetro

número maior de lados, caso se queira, mas nesta quantidade e comparando com o círculo já se tem a ideia intuitiva do objetivo desta aula que é compreender a o problema isoperimétrico no plano.

Figura 12 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 7$ lados e circunferência com mesmo perímetro

Figura 13 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 9$ lados e circunferência com mesmo perímetro

Figura 14 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 11$ lados e circunferência com mesmo perímetro

Figura 15 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 13$ lados e circunferência com mesmo perímetro

Figura 16 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 30$ lados e circunferência com mesmo perímetro

A.2 Considerações

Espera-se que este roteiro ajude ao professor a realizar as atividades para que seus alunos entendam de maneira clara e que se interessem pela Matemática como uma ciência de experimentação, pois precisamos urgentemente de novos talentos que queiram ingressar nos cursos de graduação em Matemática ou Ciências Exatas. Não existe pessoa melhor que o professor em sala de aula para inspirar futuros estudiosos da área. O incentivo a utilização de "laboratório" de Matemática pode ser a melhor maneira de incentivar os alunos a gostarem de Matemática.

ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO DO GEOGEBRA

Usando recursos para analisar o que acontece ao fixar um perímetro de um polígono e varia o número de lados

Aluno1: _____ Aluno2: _____

Aluno3: _____

Passo1: Criar um controle deslizante n que representará o número de lados do polígono.

Clicando neste botão e posteriormente no espaço de trabalho escolha o nome n o período de 3 a 30 com incremento de 1.

Passo2: Criar um controle deslizante p que representará o perímetro do polígono.

Clicando neste botão e posteriormente no espaço de trabalho, logo abaixo do controle deslizante n , escolha o nome p o período de 10 a 50 com incremento de 10.

Passo3: Criar uma variável c , digitando na caixa de entrada $\Rightarrow c=p/n$

Passo4: Criar um ponto fixo A e na sequência criar um segmento de valor fixo, sendo o valor escolhido a medida c .

Os botões utilizados serão respectivamente: _____ e _____, quando for solicitado o tamanho digite c . Esse passo é importante, pois definirá a medida do lado do polígono.

Passo5: Criar um polígono regular com tamanho do segmento criado no passo anterior e com número de lados n .

Passo6: Use _____ para determinar o perímetro e _____ para determinar a área do polígono criado.

Arraste o controle deslizante para alterar o número de lados do polígono e ver o que acontece com a área.

Passo7: Utilize o passo 3 para criar a variável $d: d=p/(2*\pi)$, este será o raio do círculo com comprimento p . Utilize agora o passo 4 para criar um segmento de tamanho fixo com medida d . Usando a ferramenta

compasso _____ e o segmento criado determinaremos um círculo de raio d e perímetro p . Repita o passo 6 para esse círculo e agora faça suas comparações e cheque a suas conclusões.

Bom trabalho!

Prof. Fernando H Lomas

DEMONSTRAÇÕES ADICIONAIS

Fórmula de Heron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Demonstração. Inicialmente calculamos o valor de $\cos(\hat{a})$. Para tal precisamos do valor de $\overline{AH}$. Por Pitágoras determina-se que $\overline{AH} = \sqrt{c^2 - h^2}$ e $\cos(\hat{a}) = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c}$. Aplicando a lei do Cossenos relativa ao ângulo $\hat{a}$ encontramos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{a})$.

Substituindo o valor de $\cos(\hat{a})$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{c^2 - h^2}.$$

Figura 17 – Triângulo qualquer

Agora isolando o valor de h^2 ,

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right). \quad (\text{C.1})$$

Conhecida a fórmula básica de cálculo de área do triângulo $S = \frac{b \cdot h}{2}$. Elevando ao quadrado ambos lados, obtém-se:

$S^2 = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$. Substituindo o valor de (C.1) chega-se em:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{b^2 \cdot \left[c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2 \right]}{4}, \\ S^2 &= \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}. \end{aligned}$$

Fatorando pela diferença entre quadrados por duas vezes reduzimos S^2 a:

$S^2 = \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{b+c+a}{2}$. Sendo $p = \frac{a+b+c}{2}$, conclui-se que:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

□

Fórmula Bretschneider

Para determinar área S de um quadrilátero convexo $ABCD$ de lados $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ e $d = \overline{DA}$ e ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd \left[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}) \right]}$, na qual $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Demonstração. Inicialmente dividiremos o quadrilátero em dois triângulos, a partir da diagonal BD . Portanto a área S será $S = \frac{ad \cdot \sin(\hat{A})}{2} + \frac{cb \cdot \sin(\hat{C})}{2}$. Podemos reescrever fazendo S^2 :

$$4S^2 = a^2 d^2 \cdot \sin^2(\hat{A}) + b^2 c^2 \cdot \sin^2(\hat{C}) + 2abcd \cdot \sin(\hat{A}) \cdot \sin(\hat{C}). \quad (\text{C.2})$$

Pela lei dos Cossenos para o cálculo da diagonal BD , verifica-se que $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\hat{A}) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{C})$. Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, temos:

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2 d^2 \cdot \cos^2(\hat{A}) + b^2 c^2 \cdot \cos^2(\hat{C}) - 2abcd \cdot \cos(\hat{A}) \cdot \cos(\hat{C}). \quad (\text{C.3})$$

Somando os dois lados das equações (C.2) e (C.3):

$$4S^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}). \quad (\text{C.4})$$

Isolando S , fatorando e substituindo p podemos escrever:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd \left[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}) \right]}, \text{ na qual } p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

□