Ideais de anéis de operadores diferenciais

Napoleón Caro Tuesta

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 28 / 02/ 2011

Assinatura:_____

Ideais de anéis de operadores diferenciais [1]

Napoleón Caro Tuesta

Orientador: ***Prof. Dr. Daniel Levcovitz***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA.*

USP – São Carlos
Fevereiro de 2011

[1] Este trabalho teve suporte financeiro da **CAPES**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C292i

Caro Tuesta, Napoléon
Ideais de anéis de operadores diferenciais / Napoléon Caro Tuesta; orientador Daniel Levcovitz -- São Carlos, 2011.
42 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Ideais à esquerda. 2. Anéis de operadores diferenciais. 3. Séries de potências. 4. Anéis simples. 5. Domínios de Ore. I. Levcovitz, Daniel, orient. II. Título.

Um matemático que não é também um pouco poeta nunca será um matemático completo.
Karl Weierstrass.

Este trabalho está dedicado a minha esposa Elizabeth, meus pais Napoleón e Aleida e minha irmã Sheila com todo meu $\rho = 1 - \sin(\theta)$.

Agradecimentos

Agradeço aos que mais amo, minha família. Aos meus pais Napoleón e Aleida, a minha esposa Elizabeth, minha irmã Sheila e minha sobrinha querida Gabrielita, pelo infinito amor.
Agradeço especialmente ao Professor Daniel Levcovitz, meu orientador, pela amizade e apoio, pelos conhecimentos ensinados e por apresentar-me o fascinante mundo da álgebra não comutativa.
Agradeço aos professores do ICMC-USP, com os quais aprendi muito. De maneira especial agradeço a Marcelo Saia, Víctor Hugo, Maria Aparecida, Raimundo Nonato e Eduardo Tengan. Agradeço também ao professor Roberto Bedregal da UFPB, pela amizade e por nossas longas conversas da matemática e da vida em geral.
Agradeço a meus colegas e amigos do ICMC-USP, de forma especial a Walter Huaraca, Lizandro Sánchez, José Bravo, Nancy Chachapoyas, Manuel Zuloeta, Luis Espinoza , Chistian Surco, Pedro (Ceará) e Renato Dias. Obrigado pelo apoio, pelas longas conversas, pelas horas de estudo, pelos dias de futebol e por todos os momentos inesquecíveis vividos.
Agradeço a CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Muito Obrigado!

Resumo

Em [12] J.T. Stafford demonstrou que todo ideal à esquerda ou à direita da álgebra de Weyl $A_n(K) = K[x_1, ..., x_n]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ (K um corpo de característica zero) é gerado por dois elementos. Consideremos o anel $D_n := K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ de operadores diferenciais sobre o anel de séries de potências formais $K[[x_1, ..., x_n]]$. Uma pergunta natural é se todo ideal à esquerda ou à direita de $D_n(K)$ pode ser gerado por dois elementos.

Neste trabalho provaremos que todo ideal à esquerda ou à direita do anel $E_n(K) := K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ de operadores diferenciais sobre o corpo das séries de Laurent $K((x_1, ..., x_n))$ é gerado por dois elementos. Nós provaremos também que todo ideal à esquerda ou à direita do anel $S_{n-1}(K) := K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ é gerado por dois elementos e como corolário obtemos uma demonstração que todo ideal à esquerda ou à direita do anel $D_1(K)$ é gerado por dois elementos. Isto está de acordo com a conjectura que diz que todo ideal à esquerda ou à direita de um anel (não comutativo) Noetheriano simples é gerado por dois elementos.

Abstract

In [12] J.T. Stafford proved that every left or right ideal of the Weyl algebra $A_n(K) = K[x_1, ..., x_n]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ (K a field of characteristic zero) is generated by two elements. Consider the ring $D_n := K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ of differential operators over the ring of formal power series $K[[x_1, ..., x_n]]$. A natural question is that if every left or right ideal of $D_n(K)$ can be generated by two elements.

In this work we will prove that every left or right ideal of the ring $E_n(K) := K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ of differential operators over the field of formal Laurent series $K((x_1, ..., x_n))$ is generated by two elements. We will prove also that every left or right ideal of the ring $S_{n-1}(K) := K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ is generated by two elements and as a corollary we obtain a proof of that every left or right ideal of the ring $D_1(K)$ is generated by two elements. This is in accordance with the conjecture that says that in a (noncommutative) Noetherian simple ring, every left or right ideal is generated by two elements.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 O anel D_n 3

1.2 Domínios de Ore 10

2 O Caso $n = 1$, $D_1(K) = K[[x]]\langle\partial_x\rangle$ **14**

2.1 Bases de Divisão 14

2.2 Os ideais á esquerda de $D_1(K)$ são dois gerados. 17

3 Módulos Livres sobre $S = T((x))\langle\partial_x\rangle$ e sobre $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$ **19**

3.1 Propriedades dos anéis S e D 19

3.1.1 O anel $S = T((x))\langle\partial_x\rangle$ 19

3.1.2 O anel $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$ 21

3.2 Módulos livres 22

4 Resultados Principais **28**

4.1 Os anéis $B_r(K)$ 28

4.2 O anel $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ 30

4.3 Os anéis $R_r(K)$ 33

4.4 Os anéis $S_r(K)$ 36

Referências Bibliográficas **42**

Introdução

Seja K um corpo de característica zero e seja $A_n(K) = K[x_1, ..., x_n]\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$, ($\partial_i := \partial_{x_i}$), a n-ésima álgebra de Weyl sobre K. Esta K-álgebra é associativa e gerada pelos x's e pelas ∂'s satisfazendo as relações:

$$[x_i, x_j] = 0 = [\partial_i, \partial_j], \quad [\partial_i, x_j] = \delta_{ij}, \quad \text{para todo} \quad i, j = 1, ..., n.$$

Ela pode ser pensada como o anel de operadores diferenciais com coeficientes polinomiais ou ainda como o anel de operadores diferencias da variedade algébrica afim $\mathbb{A}^n_K$.

Sabemos que $A_n(K)$ é uma álgebra não comutativa simples (sem ideais bilaterias não triviais), sem divisores de zero e Noetheriana.

Em 1978, J.T. Stafford demonstrou um importante resultado sobre a estrutura dos ideais de $A_n(K)$. Ele provou que todo ideal à esquerda (ou à direita) de $A_n(K)$ pode ser gerado por dois elementos. Este fato aparece no artigo original de Stafford [12]. Uma simplificação da prova encontra-se no Capítulo 1 do livro de Björk [1].

Uma questão que surge naturalmente é se esse resultado ainda é válido para outros anéis Noetherianos simples. Dizemos que um anel é *n-gerado* se todo ideal à esquerda ou à direita pode ser gerado por n elementos. Assim, a álgebra de Weyl $A_n(K)$ é 2-gerado. Um outro exemplo são os anéis de operadores diferenciais $D(X)$ sobre uma variedade algébrica afim suave. Nesse caso, Coutinho e Holland [4] provaram que $D(X)$ é 3-gerado, embora acredita-se que ele seja de fato 2-gerado. Na verdade, uma conjectura importante nessa área é:

Conjectura: Todo anel Noetheriano simples é 2-gerado.

Essa conjectura está aberta em geral.

Nessa tese vamos discutir o caso do anel $D_n(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$, o anel de operadores diferenciais do anel de séries de potências $K[[x_1, ..., x_n]]$. Mais especificamente nos perguntamos se $D_n(K)$ é 2-gerado. Essa pergunta enquadra-se na conjec-

tura acima, dado que o anel $D_n(K)$ é um domínio Noetheriano simples. O caso $n = 1$ é verdadeiro e está demonstrado em [6]. Assim $D_1(K)$ é 2- gerado.

Embora não demonstramos nessa tese que $D_n(K)$ é 2-gerado, mostraremos que a conjectura é verdadeira para o anel $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$, o anel de operadores diferenciais de $K((x_1, ..., x_n))$, que é o corpo de frações de $K[[x_1, .., x_n]]$ (Teorema 4.8, pág 33). Para isto, seguiremos as técnicas do Stafford e Björk e as adaptaremos ao nosso caso. Também mostraremos que o anel $S_{n-1}(K) = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ é 2-gerado (Teorema 4.13, pág 38). Como consequência obtemos uma nova prova que $D_1(K)$ é 2-gerado.

Este trabalho está divido em quatro capítulos. No primeiro, desenvolvemos os preliminares necessários para a leitura da tese. Introduzimos o anel $D_n(K)$ e mostramos suas propriedades fundamentais. Faremos também uma introdução aos domínios de Ore e seus anéis de frações.

No capítulo 2 mostraremos que $D_1(K)$ é 2-gerado, seguindo [6].

O capítulo 3 destina-se a estudar módulos livres sobre os anéis $S = T((x))\langle\partial_x\rangle$ e $D_1(F) = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$, onde T é um anel de divisão de característica zero e F é um corpo também de característica zero. Neste capítulo desenvolveremos resultados técnicos sobre módulos livres que serão usados no último capítulo.

O capítulo 4 contém os teoremas principais dessa tese: o Teorema 4.8, que mostra que $E_n(K)$ é 2-gerado e o Teorema 4.13 que mostra que $S_{n-1}(K)$ é 2-gerado.

Uma palavra final sobre a diferença entre o caso da álgebra de Weyl $A_n(K)$ e o caso do anel $D_n(K)$. A dificuldade em se estender os métodos da demonstração do caso da álgebra de Weyl (que é o anel de operadores diferenciais do anel de polinômios), para o caso do anel $D_n(K)$ (que é o anel de operadores diferenciais do anel de séries de potências), reside na quebra de simetria entre as variáveis $x's$ e $\partial's$. Enquanto que na álgebra de Weyl elas são simétricas, como mostra as relações de definição, no caso de $D_n(K)$ essa simetria é quebrada. De fato, no anel $D_n(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ admita-se somas infinitas (séries) nas variáveis $x's$ enquanto somente somas finitas aparecem nas variáveis $\partial's$. É essa quebra de simetria que torna o caso $D_n(K)$ interessante.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo estudaremos o anel $D_n(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$, o anel de operadores diferenciais de $K[[x_1, ..., x_n]]$, assim como os domínios de Ore. Na primeira seção definiremos $D_n(K)$ e estudaremos suas principais propriedades. Na segunda parte estudaremos os domínios de Ore, seus anéis de frações e finalmente mostraremos que $D_n(K)$ é um domínio de Ore.

1.1 O anel D_n

Seja K um corpo de característica zero, n um inteiro positivo e $K[[x_1, ..., x_n]]$ o anel de séries de potências formais em n indeterminadas com coeficientes em K. Sobre $K[[x_1, ..., x_n]]$ temos as derivações usuais $\partial_1 = \partial/\partial x_1, ..., \partial_n = \partial/\partial x_n$.
O operador K-linear ∂_i que aplica uma série de potência p em $\partial p/\partial x_i$ é chamada **derivada parcial com respeito a** x_i. É fácil ver que $\partial_1, ..., \partial_n$ são operadores K-lineares que comutam dois a dois.
Se p é um elemento de $K[[x_1, ..., x_n]]$, então p define um K-operador linear sobre $K[[x_1, ..., x_n]]$ que leva uma serie q no produto pq. Tal operador é chamado **operador produto p**. Notemos que os operadores produto comutam dois a dois.

Definição 1.1. *O subanel dos K-operadores lineares de $K[[x_1, ..., x_n]]$ que é gerado pelas derivadas parciais $\partial_1, ..., \partial_n$ e os operadores produto definidos pelas series em $K[[x_1, ..., x_n]]$ é chamado **anel de operadores diferenciais K-lineares sobre** $K[[x_1, ..., x_n]]$, ou simplesmente o **anel de operadores diferenciais de** $K[[x_1, ..., x_n]]$.*
Denotaremos este anel por $D_n(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$. Por definição $D_n(K)$ é uma K-subálgebra de $End_K(K[[x_1, ..., x_n]])$.

Seja p um elemento de $K[[x_1, ..., x_n]]$. Em $D_n(K)$ temos a seguinte regra de comutação entre ∂_i e o operador produto p:

$$[\partial_i, p] = \partial p/\partial_{x_i}.$$

De fato, por definição, $[\partial_i, p] := \partial_i p - p\partial_i$. Portanto, se q é um elemento arbitrário de $K[[x_1, ..., x_n]]$, temos que

$$[\partial_i, p] \cdot q = \partial pq/\partial_{x_i} - p\partial q/\partial_{x_i} = \partial p/\partial_{x_i} \cdot q.$$

Em particular temos as seguintes regras de comutação no anel $D_n(K)$:

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}, \quad [\partial_i, \partial_j] = 0, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Um **multi-índice** α é um elemento de $\mathbb{N}^n$, digamos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. O comprimento de α é definido como $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \in \mathbb{N}$. Usaremos a notação ∂^α para denotar o operador $\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.

Proposição 1.2. *Todo elemento em $D_n(K)$ pode ser escrito de maneira única como uma soma finita da forma $\sum p_\alpha \partial^\alpha$, onde p_α é um elemento de $K[[x_1, ..., x_n]]$.*

Prova: Se $p \in K[[x_1, ..., x_n]]$ é considerado como um elemento de $D_n(K)$, então para cada $1 \leq i \leq n$, $\partial_i p = p\partial_i + \partial_i(p)$, onde $\partial_i(p) = \partial p/\partial x_i$ é novamente considerado como um elemento de $K[[x_1, ..., x_n]]$. Tais equações permitem mover as ∂-variáveis do lado esquerdo para o lado direito e portanto segue-se que todo elemento em $D_n(K)$ pode ser escrito como uma soma finita da forma $\sum p_\alpha \partial^\alpha$.

Agora mostremos que tal escrita é única. Para isto devemos mostrar que se algum $p_\alpha \neq 0$, então $D = \sum p_\alpha \partial^\alpha$ é um elemento diferente de zero em $D_n(K)$; mas D é um operador linear de $K[[x_1, ..., x_n]]$, logo $D \neq 0$ se e somente se existe uma série f tal que $D(f) \neq 0$.

Com efeito, seja $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ um multi-índice tal que $p_\alpha = 0$ para todo multi-índice α com $|\alpha| < |\sigma|$ e seja $f := x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} \in K[[x_1, ..., x_n]]$. Um cálculo simples mostra que $D(f) = \sigma_1! \cdots \sigma_n! p_\sigma \neq 0$ e portanto $D \neq 0$.

■

Corolário 1.3. *O anel $D_n(K)$ é um domínio.*

Prova: Suponhamos que D e E são elementos diferentes de zero de $D_n(K)$. Então, pela proposição anterior, podemos escrever D e E de maneira única como uma soma finita da forma $D = \sum_\alpha p_\alpha \partial^\alpha, E = \sum_\beta p_\beta \partial^\beta$, onde $p_\alpha, p_\beta \in K[[x_1, ..., x_n]]$. Se γ e λ são

multi-índices tais que $|\gamma| = max\{|\alpha|, p_\alpha \neq 0\}$ e $|\lambda| = max\{|\beta|, p_\beta \neq 0\}$, então $|\gamma| > 0$ e $|\lambda| > 0$, pois $D \neq 0$ e $E \neq 0$. Mais ainda, se escrevemos $DE \in D_n(K)$ como uma soma finita da forma $DE = \sum_\theta p_\theta \partial^\theta$, onde $p_\theta \in K[[x_1, ..., x_n]]$, então $|\gamma| + |\lambda| = max\{|\theta|, p_\theta \neq 0\}$. Isto implica que $DE \neq 0$ e portanto, $D_n(K)$ é um domínio.

■

Proposição 1.4. *O anel $D_n(K)$ é simples. Ou seja, se I é um ideal bilateral de $D_n(K)$, então $I = \{0\}$ ou $I = D_n(K)$.*

Prova: Seja I um ideal bilateral de $D_n(K)$ diferente do ideal zero. Provaremos que $I = D_n(K)$. Com efeito, seja $D \in I$ tal que $D \neq 0$. Escrevemos

$$D = D_0 + D_1\partial_n + \cdots + D_k\partial_n^k,$$

onde k é um inteiro não negativo, $D_0, D_1, ..., D_k \in K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_{n-1}\rangle$ e $D_k \neq 0$. Aqui $K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_{n-1}\rangle$ representa o subanel de D_n gerado pelos operadores produto p de $K[[x_1, ..., x_n]]$ e as derivações $\partial_1, ..., \partial_{n-1}$.
Se $k \geq 1$, usamos as equações $[\partial_n^j, x_n] = \partial_n^j x_n - x_n\partial_n^j = j\partial_n^{j-1}$ e obtemos que

$$[D, x_n] = Dx_n - x_nD = D_1 + 2D_2\partial_n + \cdots kD_k\partial_n^{k-1}.$$

Como I é um ideal bilateral, o elemento $D_1 := Dx_n - x_nD \in I$. Se $k \geq 2$ procedemos como acima e obtemos $D_2 := [D_1, x_n] = D_1x_n - x_nD_1 \in I$ e depois de k etapas vemos que I contém o elemento diferente de zero $k!D_k$ e portanto I contém D_k.
Seja $E = D_k$. Como E é um elemento diferente de zero de $K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_{n-1}\rangle$ podemos escrever:

$$E = E_0 + E_1\partial_{n-1} + \cdots + E_l\partial_{n-1}^l,$$

onde l é um inteiro não negativo, $E_0, E_1, ..., E_l \in K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_{n-2}\rangle$ e $E_l \neq 0$. Então se procedemos como acima temos que I contém E_l, que é um elemento diferente de zero de $K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_{n-2}\rangle$. Continuando assim é claro que I contém alguma série diferente de zero $p \in K[[x_1, ..., x_n]]$. Se p é uma unidade, então $1 = p^{-1}p \in I$ e por tanto $I = D_n(K)$. No caso que p não é uma unidade, e depois de uma mudança linear nas variáveis $x_1, ..., x_n$ que por sua vez induz um isomorfismo sobre $D_n(K)$, podemos supor que $p(0, ..., 0, x_n) \neq 0$. Então, pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, podemos escrever

$$p = u(p_0 + p_1x_n + \cdots + p_{t-1}x_n^{t-1} + x_n^t),$$

onde t é algum inteiro positivo, u é uma unidade de $K[[x_1, ..., x_n]]$ e $p_j \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]]$

para cada $0 \leq j \leq t-1$. Então

$$q = u^{-1}u = p_0 + p_1 x_n + \cdots + p_{t-1}x_n^{t-1} + x_n^t \in I.$$

Como I é um ideal bilateral temos que o elemento

$$q_1 := [\partial_n, q] = \partial q/\partial_{x_n} = p_1 + \cdots + (t-1)p_{t-1}x_n^{t-2} + tx_n^{t-1} \in I.$$

Novamente, o elemento

$$q_2 := [\partial_n, q_1] = \partial q_1/\partial_{x_n} = 2p_2 + \cdots + (t-1)(t-2)x_n^{t-3} + t(t-1)x_n^{t-2} \in I.$$

Continuando neste assim, é claro que depois de t etapas, o elemento

$$q_t := [\partial_n, q_{t-1}] = t! \in I, \text{ o que implica que } I = D_n(K).$$

■

Definição 1.5. *Seja R uma K-álgebra. Uma família $\{F_i\}_{i\geq 0}$ de K-espaços vetoriais é uma* ***filtração ascendente de*** *R se:*

1. $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset R$,
2. $R = \bigsqcup_{i\geq 0} F_i$,
3. $F_iF_j \subset F_{i+j}$, *para todo* $i, j \geq 0$.

Por exemplo, a família $F_i = \left\{Q \in D_n(K) : Q = \sum_{|\alpha|\leq i} q_\alpha \partial^\alpha\right\}, i \geq 0$ dos operadores diferenciais de ordem $\leq i$ é uma filtração ascendente do anel $D_n(K)$.

Suponhamos que $F = \{F_i\}_{i\geq 0}$ é uma filtração de uma K-álgebra R. Vamos construir uma K álgebra graduada associada a esta filtração da seguinte maneira: Para cada $i \geq 0$, seja o K-espaço quociente $F(i) = F_i/F_{i-1}$, onde $F_{-1} := 0$. Consideremos a soma direta de eles:

$$F(0) \oplus F(1) \oplus F(2) \oplus \cdots,$$

este é um K-espaço vetorial que denotaremos por $gr^F(R)$. Sobre $gr^F(R)$ definimos um produto como segue. Consideremos primeiro dois elementos homogêneos em $gr^F(R)$, digamos $f \in F(i)$ e $g \in F(j)$. Escolhemos $D \in F_i$ tal que sua imagem $\bar{D}$ em $F(i)$ é f e escolhemos $E \in F_j$ tal que $\bar{E} = g$. Agora DE está em F_{i+j}. Definimos então o produto fg como a imagem de DE no espaço quociente $F(i+j)$.

De fato, temos que verificar que este produto está bem definido, ou seja que o elemento fg em $F(i+j)$ não depende das escolhas de D e E. Para isto, notemos que se D_1 é outro elemento tal que $\bar{D}_1 = f$ em $F(i)$, então a equação $\bar{D} = \bar{D}_1$ em $F(i)$ implica que $D - D_1 \in F_{i-1}$ e portanto $DE - D_1E \in F_{i+j-1}$, logo $\bar{D}\bar{E} = \bar{D}_1\bar{E}$ em $F(i+j)$. Analogamente podemos provar que fg não depende da escolha de E.

Agora temos definido o produto entre elementos homogêneos em $gr^F(R)$. Usando o fato que todo elemento de $gr^F(R)$ pode ser escrito de maneira única como uma soma finita de elementos homogêneos, podemos definir o produto entre elementos arbitrários de $gr^F(R)$.
A K-álgebra $gr^F(R)$ construída acima é chamada **álgebra graduada associada a filtração ascendente F do anel R**

Agora consideremos a filtração ascendente $F_i = \left\{Q \in D_n(K) : Q = \sum_{|\alpha|\leq i} q_\alpha \partial^\alpha\right\}$ do anel $D_n(K)$. Notemos que $F_0 = K[[x_1, ..., x_n]]$. O anel associado é um anel de polinômios como mostra a seguinte:

Proposição 1.6. *O anel $gr^F(D_n(K))$ é isomorfo a $K[[y_1, ..., y_n]][z_1, ..., z_n]$, o anel de polinômios em n indeterminadas $z_1, ..., z_n$ com coeficientes no anel de séries de potência $K[[y_1, ..., y_n]]$.*

Prova:

Para $i \geq 1$, seja $\sigma_i : F_i \to F(i) = F_i/F_{i-1}$ a aplicação quociente. Notemos que ela é também $K[[x_1, ..., x_n]]$-linear.

Seja agora a um elemento de $grad^F(D_n(K))$, então a pode ser escrito de maneira única como uma soma finita

$$a = a_0 + (a_1 + F_0) + \cdots + (a_k + F_k) = a_0 + \sigma_1(a_1) + \cdots + \sigma_k(a_k)$$

para alguns $a_i \in F_i, 0 \leq i \leq k$.
Logo $a_0 = p(x) \in K[[x_1, ..., x_n]]$ e para $1 \leq i \leq k$, $a_i = \sum_{|\alpha|\leq i} q_{\alpha,i}(x)\partial^\alpha$. Por tanto

$$\sigma_i(a_i) = \sigma_i(\sum_{|\alpha|\leq i} q_{\alpha,i}(x)\partial^\alpha) = \sigma_i(\sum_{|\alpha|=i} q_{\alpha,i}(x)\partial^\alpha) = \sum_{|\alpha|=i} q_{\alpha,i}(x)\sigma_i(\partial^\alpha) = \sum_{|\alpha|=i} q_{\alpha,i}(x)\sigma_1(\partial_1)^{\alpha_1}\cdots\sigma_1(\partial_n)^{\alpha_n},$$

então

$$a = p(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|=i} q_{\alpha,i}(x)\sigma_1(\partial_1)^{\alpha_1}\cdots\sigma_1(\partial_n)^{\alpha_n}.$$

Isto implica que o anel graduado associado $gr^F(D_n(K))$ é gerado sobre $K[[x_1, ..., x_n]]$ pelos elementos $\sigma_1(\partial_1), ..., \sigma_1(\partial_n)$ de $F(1)$
Por outro lado o anel $grad^F(D_n(K))$ é comutativo. Com efeito, se $a \in F_i$ e $b \in F_j$,

então $ab - ba \in F_{i+j-1}$ e por tanto $\sigma_{i+j}(a)\sigma_{i+j}(b) = \sigma_{i+j}(b)\sigma_{i+j}(a)$ para todos os pares de elementos homogêneos em $gr^F(D_n(K))$, o que implica que o anel $gr^F(D_n(K))$ é comutativo.
As etapas anteriores nos permitem definir um homomorfismo sobrejetivo de anéis

$$\phi : K[[y_1, ..., y_n]][z_1, ..., z_n] \to gr(D_n(K))$$

onde

$$\phi(\sum_\alpha q_\alpha(y)\ z^\alpha) = \sum_\alpha q_\alpha(x)\sigma_1(\partial_1)^{\alpha_n} \cdots \sigma_n(\partial_n)^{\alpha_n}.$$

Mais ainda, ele é injetivo. De fato, se $\sum_\alpha q_\alpha(y)\ z^\alpha$ é um elemento de $K[[y_1, ..., y_n]][z_1, ..., z_n]$ tal que $\phi(\sum_\alpha q_\alpha(y)\ z^\alpha) = 0$, então temos que

$$\sum_\alpha q_\alpha(x)\sigma_1(\partial_1)^{\alpha_n} \cdots \sigma_n(\partial_n)^{\alpha_n} = q_0(x) + \sum_{|\alpha|\geq 1} \sigma_{|\alpha|}(q_\alpha(x)\partial^\alpha) = 0 \in gr^F(D_n(K)),$$

portanto $q_0(x) = 0$, além disso $q_\alpha(x)\partial^\alpha \in F_{|\alpha|-1}$ para cada $|\alpha| \geq 1$. Por tanto $q_\alpha(x) = 0$ para $|\alpha| \geq 1$.
Consequentemente o polinômio $\sum_\alpha q_\alpha(y)\ z^\alpha$ é o polinômio zero e portanto a aplicação ϕ é injetiva.
Em resumo, ϕ define um isomorfismo de anéis. Isto prova nossa proposição.

■

Consideremos novamente a filtração ascendente $F_i = \left\{Q \in D_n(K) : Q = \sum_{|\alpha|\leq i} q_\alpha \partial^\alpha\right\}$ do anel $D_n(K)$.

Definição 1.7. *Seja M um $D_n(K)$-módulo à esquerda. Uma família $\{\Gamma_i\}_{i\geq 0}$ de K-espaços vetoriais é uma **filtração ascendente de** M se:*

1. $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots \subset M$,
2. $M = \bigsqcup_{i\geq 0} \Gamma_i$,
3. $F_i\Gamma_j \subset \Gamma_{i+j}$, *para todos os pares* $i, j \geq 0$.

Suponhamos que $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i\geq 0}$ é uma filtração ascendente de um $D_n(K)$-módulo à esquerda M. Agora vamos construir um $gr^F(D_n(K))$ módulo graduado associado a esta filtração da seguinte maneira: Para cada $i \geq 0$, seja o K-espaço quociente $\Gamma(i) := \Gamma_i/\Gamma_{i-1}$, onde $\Gamma_{-1} := 0$. Consideremos a soma direta de eles:

$$gr^\Gamma(M) := \Gamma(0) \oplus \Gamma(1) \oplus \Gamma(2) \oplus \cdots .$$

Então $gr^{\Gamma}(M)$ é um K-espaço vetorial. Sobre $gr^{\Gamma}(M)$ definimos uma estrutura de $gr^F(D_n(K))$-módulo à esquerda como segue. Consideremos primeiro um elemento homogêneo $\sigma \in \Gamma(i)$ em $gr^{\Gamma}(M)$ e seja $f \in F(j)$ um elemento homogêneo em $gr^F(D_n(K))$. Escolhemos $m \in \Gamma_i$ tal que sua imagem $\bar{m}$ no espaço quociente $\Gamma(i)$ é σ e escolhemos $D \in F_j$ tal que $\bar{D} = f$. Agora Dm está em Γ_{i+j}. Definimos então $f\sigma$ como a imagem de Dm no espaço quociente $\Gamma(i+j)$.

De fato, temos que verificar $f\sigma$ está bem definido, ou seja que o elemento $f\sigma$ em $\Gamma(i+j)$ não depende das escolhas de m e D. Para isto, notemos que se $m_1 \in \Gamma_i$ é outro elemento tal que $\bar{m_1} = \sigma$ em $\Gamma(i)$, então a equação $\bar{m} = \bar{m_1}$ em $\Gamma(i)$ implica que $m - m_1 \in \Gamma_{i-1}$ e por tanto $Dm - Dm_1 \in \Gamma_{i+j-1}$, logo $\bar{D}\bar{m} = \bar{D}\bar{m_1}$ em $\Gamma(i+j)$. Analogamente podemos provar que $f\sigma$ não depende da escolha de D.
Finalmente, usando o fato que os elementos em $gr^F(D_n(K))$ e em $gr^{\Gamma}(M)$ são somas finitas únicas de elementos homogêneos, podemos definir a $gr^F(D_n(K))$-estrutura de módulo requerida.

Seja M um $D_n(K)$-módulo à esquerda equipado com uma filtração ascendente Γ. Se $0 \neq m \in M$, então existe um único inteiro não negativo k tal que $m \in \Gamma_k \backslash \Gamma_{k-1}$. Aqui lembremos que $\Gamma_{-1} := 0$. O inteiro não negativo k é chamado de **Γ-ordem** de m e a imagem $\bar{m}$ de m em $\Gamma(k)$ é chamada de **Γ-símbolo** de m e é denotada por $\gamma(m)$.

Proposição 1.8. *Seja Γ uma filtração ascendente sobre um $D_n(K)$-módulo à esquerda M. Suponhamos que $\{m_\lambda\}$ é um subconjunto de M tal que $\{\gamma(m_\lambda)\}$ gera o $gr^F(D_n(K))$-módulo $gr^{\Gamma}(M)$. Então $\{m_\lambda\}$ gera o $D_n(K)$-módulo M.*

Prova: Desde que $\bigcup_{i\geq 0} \Gamma_i = M$ é suficiente provar que para cada $i \geq 0$, Γ_i está contido no $D_n(K)$-submódulo gerado pelo conjunto $\{m_\lambda\}$. Usaremos indução sobre i para provar isso. Suponhamos então que $\Gamma_{i-1} \subset \sum D_n(K)m_\lambda$. Agora seja $m \in \Gamma_i \backslash \Gamma_{i-1}$, então $\gamma(m) \in \Gamma(i)$. Pela hipótese podemos escrever $\gamma(m) = \sum f_\lambda \gamma(m_\lambda)$, onde a soma é finita e os $f_\lambda \in gr^F(D_n(K))$. Se decompomos cada f_λ em suas componentes homogêneas no anel graduado $gr^F(D_n(K))$, obtemos uma soma finita da forma
$f_\lambda = \sum f_\lambda(k)$ onde $f_\lambda(k) \in F(k)$.
Como $F(k)\Gamma(j) \subset \Gamma(k+j)$ para todo j, k, segue-se que $\gamma(m) = \sum f_\lambda(k_\lambda)\gamma(m_\lambda)$ onde $i = k_\lambda + \Gamma -$ ordem de m_λ.
Agora escolhemos $D_\lambda \in F_{k_\lambda}$ tal que $\bar{D_\lambda} = f_\lambda(k_\lambda)$. Então $m - \sum D_\lambda m_\lambda$ está em Γ_{i-1}, e como $\Gamma_{i-1} \subset \sum D_n(K)m_\lambda$ pela hipótese indutiva, concluimos que $m \in \sum D_n(K)m_\lambda$.

■

Definição 1.9. *Uma filtração ascendente Γ sobre um $D_n(K)$-módulo à esquerda M é **uma boa filtração** se $gr^{\Gamma}(M)$ é finitamente gerado como um $gr^F(D_n(K))$-módulo.*

Proposição 1.10. *Se M é um $D_n(K)$-módulo à esquerda que pode ser equipado com uma boa filtração, então M é um $D_n(K)$-módulo finitamente gerado.*

Prova: Seja Γ uma boa filtração do módulo M e seja $\sigma_1, ..., \sigma_t$ um conjunto finito de geradores de $gr^{\Gamma}(M)$ como $gr^F(D_n(K))$-módulo. Decompomos cada σ_j em seus componentes homogêneos, digamos $\sigma_j = \sum \sigma_j(k)$ onde $\sigma_j(k) \in \Gamma(k)$. Para cada par j, k escolhemos $\gamma(m_{jk}) = \sigma_j(k)$. Vemos que $\{\gamma(m_{jk})\}$ gera o $gr^F(D_n(K))$-módulo $gr^{\Gamma}(M)$. A proposição 1.8 implica que o conjunto finito $\{m_{jk}\}$ gera M como $D_n(K)$-módulo. ■

Proposição 1.11. *$D_n(K)$ é um anel Noetheriano à esquerda, ou seja, todo ideal a esquerda é finitamente gerado.*

Prova: Seja I um ideal à esquerda em $D_n(K)$. Para cada $i \geq 0$ seja $\Gamma_i := F_i \cap I$. Então é claro que Γ_i define uma filtração ascendente sobre o $D_n(K)$-módulo I e mais ainda $gr^{\Gamma}(I)$ é um ideal em $gr(D_n(K))$. Mas $gr(D_n(K))$ é um anel Noetheriano, pois pela proposição $gr(D_n(K))$ é isomorfo ao anel $K[[y_1, .., y_n]][z_1, ..., z_n]$. Portanto o ideal $gr^{\Gamma}(I)$ é finitamente gerado, em outras palavras, a filtração Γ é uma boa filtração. A proposição 1.9 implica que I é finitamente gerado. ■

Observação: Um resultado análogo é verdadeiro para ideais à direita. Ou seja, $D_n(K)$ é um anel Noetheriano à direita.

1.2 Domínios de Ore

Definição 1.12. *Um domínio R é um **domínio de Ore à esquerda** se $Rx \cap Ry \neq 0$ para todo par de elementos diferentes de zero $x, y \in R$. Analogamente, um domínio R é um **domínio de Ore à direita** se $xR \cap yR \neq 0$ para todo par de elementos diferentes de zero $x, y \in R$. Um domínio R é um **domínio de Ore** se é um domínio de Ore à esquerda e à direita.*

Definição 1.13. *Seja R um domínio de integridade. **Um anel de frações à esquerda para** R é um anel de divisão D com as seguintes propriedades: R é um subanel de D e se $\delta \in D$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = b^{-1}a$.*

Proposição 1.14. *Suponhamos que R é um domínio de Ore à esquerda, então existe um anel de frações à esquerda para R.*

Prova: No conjunto $R \times R^*$ definimos uma relação $\sim$ como segue: $(a, b) \sim (c, d)$ se existem $r, s \in R^*$ tais que $ra = sc$ e $rb = sd \neq 0$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato, a reflexividade e a simetria são claras. Por outro lado, se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então existem $r, s, t, u \in R^*$ tais que $ra = sc$, $rb = sd \neq 0$, $tc = ue$,

$td = uf \neq 0$; por outro lado, como R é um domínio de Ore a esquerda temos que $xs = yt$ para alguns $x, y \in R^*$, logo $(xr)a = (yu)e$ e $(xr)b = (ye)f \neq 0$ e portanto $(a, b) \sim (e, f)$, o que mostra que $\sim$ é transitiva.
Denotemos por $[a, b]$ a classe de equivalência do par $(a, b) \in R \times R^*$ e o conjunto quociente por $D := R \times R^*/\sim$. Agora vamos a definir uma estrutura de anel sobre D:
Dados $[a, b]$ e $[c, d]$ em D, escolhemos $r, s \in R^*$ tais que $rb = sd$ e colocamos $[a, b] + [c, d] = [ra + sc, rb]$. Então $+$ é uma operação bem definida.
Por outro lado, dados $[a, b]$ e $[c, d]$ em D, escolhemos $r \in R^*$ e $s \in R$ tais que $ra = sd$, e colocamos $[a, b] \cdot [c, d] = [sc, rb]$. Então $\cdot$ é uma operação bem definida.
O sistema $(D, +, \cdot)$ é um anel, onde $[0, 1]$ é o elemento zero e $[1, 1]$ é o elemento unitário de D. Mais ainda a aplicação $r \mapsto [r, 1]$ é um homomorfismo injetivo de anéis. Com efeito, o fato de ser homomorfismo segue-se das definições e por outro lado, se $[r, 1] = [0, 1]$ para algum $r \in R$ temos que $(r, 1) \sim (0, 1)$ e por tanto existem $t, u \in R^*$ tais que $tr = s \cdot 0 = 0$ e como R é um domínio, concluímos que $r = 0$. O homomorfismo injetivo anterior permite identificar R com um subanel de D e quando fazemos esta identificação, R torna-se um subanel de D.
Além disso, o anel D é um anel de divisão. De fato, se $[a, b]$ é um elemento diferente de zero em D, então $a, b \in R^*$, logo $[b, a] \in D$, mais ainda $[a, b] \cdot [b, a] = [1, 1]$ e $[b, a] \cdot [a, b] = [1, 1]$. Notemos que se $r \in R^*$, então $[r, 1]^{-1} = [1, r]$. Usaremos a notação r^{-1} para o inverso de $r \in R^*$.
Finalmente, se $\delta \in D$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = [a, b]$, que pode ser escrito como $[a, b] = [b, 1] \cdot [a, 1] = [b, 1]^{-1} \cdot [a, 1]$. Logo, se usamos a identificação de R como um subanel de D e a notação acima, temos que $\delta = b^{-1}a$. ■

Proposição 1.15. *Seja R um domínio de Ore à esquerda e D um anel de frações à esquerda para R. Suponhamos que $\phi : R \to S$ é um homomorfismo de anéis tal que $\phi(x)$ é uma unidade de S para cada $x \in R^*$. Então ϕ estende-se de maneira única a um homomorfismo de anéis $\psi : D \to S$.*

Prova: Seja $\delta \in D$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = b^{-1}a$. Colocamos $\psi(\delta) = \phi(b)^{-1}\phi(a)$; em primeiro lugar temos que ver que ψ é uma aplicação bem definida. Com efeito, suponhamos que δ tem outra representação como $\delta = d^{-1}c$ para alguns $c \in R$ e $d \in R^*$. Então $b^{-1}a = d^{-1}c$ e como R é um domínio de Ore a esquerda, existem $r, s \in R^*$ tais que $ra = sc$ e $rb = sd \neq 0$. Mas $\phi(rb), \phi(r), \phi(sd), \phi(s)$ são unidades em S. Logo $\phi(b)^{-1}\phi(a) = \phi(rb)^{-1}\phi(ra) = \phi(sd)^{-1}\phi(sc) = \phi(d)^{-1}\phi(c)$. Por tanto a regra $\psi(b^{-1}a) = \phi(b)^{-1}\phi(a)$ define uma aplicação $\psi : D \to S$. Notemos que $\phi(r) = \psi(1^{-1}r) = \phi(1)^{-1}\phi(r) = \phi(r)$ para todo $r \in R$, por tanto ψ estende ϕ a D. Em particular $\psi(1) = 1$.

Agora mostremos que de fato ϕ é um homomorfismo de anéis. Com efeito, sejam $a, c \in R$ e $b, d \in R^*$, então existem $r, s \in R^*$ tais que $rb = sd$. Logo
$\psi(b^{-1}a+d^{-1}c) = \psi((rb)^{-1}(ra+sc)) = \phi(rb)^{-1}\phi(ra+sc) = \phi(rb)^{-1}\phi(ra)+\phi(rb)^{-1}\phi(sc) = \phi(b)^{-1}\phi(a) + \phi(d)^{-1}\phi(c) = \psi(b^{-1}a) + \psi(d^{-1}c)$.
Por outro lado, existem $t \in R$ e $u \in R^*$ tais que $ua = td$. Logo
$\psi(b^{-1}ad^{-1}c) = \psi((ub)^{-1}tc) = \phi(ub)^{-1}\phi(tc) = \phi(b)^{-1}\phi(u^{-1}t)\phi(c) = \phi(b)^{-1}\phi(ad^{-1})\phi(c) = (\phi(b)^{-1}\phi(a))(\phi(d)^{-1}\phi(c)) = \psi(b^{-1}a)\psi(d^{-1}c)$.
Por tanto ψ é um homomorfismo de anéis.
Finalmente, si $\varphi : D \to S$ é outro homomorfismo de anéis que estende ϕ, temos que para $a \in R$ e $b \in R^*$, $\varphi(b^{-1}a) = \varphi(b)^{-1}\varphi(a) = \phi(b)^{-1}\phi(a) = \psi(b^{-1}a)$. Por tanto $\varphi = \psi$, o que mostra a unicidade da extensão. ■

Corolário 1.16. *Seja R um domínio de Ore à esquerda e sejam D, D' anéis de frações à esquerda para R. Então a aplicação identidade de R estende-se a um único isomorfismo de D sobre D'.*

No sentido do corolário anterior, um anel de frações à esquerda para um domínio de Ore à esquerda é único.

Definição 1.17. *Seja R um domínio de integridade.* ***Um anel de frações à direita para*** *R é um anel de divisão E com as seguintes propriedades: R é um subanel de E e se $\xi \in E$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\xi = ab^{-1}$.*

É claro que proposições semelhantes são verdadeiras para domínios de Ore à direita.

Proposição 1.18. *Suponhamos que R é um domínio de Ore à direita, então existe um anel de frações à direita para R.*

Proposição 1.19. *Seja R um domínio de Ore à direita e E um anel de frações à direita para R. Suponhamos que $\phi : R \to S$ é um homomorfismo de anéis tal que $\phi(x)$ é uma unidade de S para cada $x \in R^*$. Então ϕ estende-se de maneira única a um homomorfismo de anéis $\psi : E \to S$.*

Corolário 1.20. *Seja R um domínio de Ore à direita e sejam E, E' anéis de frações à direita para R. Então a aplicação identidade de R estende-se a um único isomorfismo de E sobre E'.*

No sentido do corolário anterior, um anel de frações à direita para um domínio de Ore à direita é único.

Proposição 1.21. *Suponhamos que R é um domínio de Ore. Então os anéis de frações à esquerda e à direita são iguais.*

Prova: Seja D o anel de frações à esquerda de R e E o anel de frações à direita de R. Então se $\delta \in D$, existem elementos $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = b^{-1}a$. Desde que R é um domínio de Ore à direita, existem $r \in R$ e $s \in R^*$ tais que $as = br$, logo $\delta = rs^{-1}$ e por tanto $\delta \in E$, o que mostra que $D \subset E$. Analogamente pode-se provar que $E \subset D$ e por tanto $D = S$.

■

Proposição 1.22. *Seja R um domínio. Então ou R é um domínio de Ore à esquerda ou R contém um ideal à esquerda que é livre e de posto infinito como R-módulo. Em particular, todo domínio Noetheriano à esquerda é um domínio de Ore à esquerda.*

Prova: Suponhamos que R não é um domínio de Ore à esquerda. Então existem $a, b \in R^*$ tais que $Ra \cap Rb = 0$.
Afirmação: Os elementos $a, ab, ab^2, ab^3, ...,$ são linearmente independentes à esquerda sobre R, logo o ideal à esquerda gerado por eles é livre de posto infinito. De fato, caso contrário, haveria uma relação $\sum c_i ab^i$, onde os c_i não são todos iguais a zero. Seja c_r o primeiro coeficiente diferente de zero, então podemos cancelar b^r e obter uma relação

$$c_r a + c_{r+1}ab + \cdots + c_n ab^{n-r} = 0.$$

Donde

$$(c_{r+1}a + \cdots + c_n ab^{n-r-1})b = -c_r a.$$

O que contradiz à hipótese inicial sobre a e b. ■

Um resultado análogo é válido para "direita"no lugar de "esquerda".

Proposição 1.23. *Seja R um domínio. Então ou R é um domínio de Ore à direita ou R contém um ideal à direita que é livre e de posto infinito como R-módulo. Em particular, todo domínio Noetheriano à direita é um domínio de Ore à direita.*

Corolário 1.24. *Todo domínio Noetheriano é um domínio de Ore. Em particular $D_n(K)$ é um domínio de Ore.*

Capítulo

2

O Caso $n = 1$, $D_1(K) = K[[x]]\langle\partial_x\rangle$

Neste capítulo estudaremos as bases de divisão do anel $D_1(K)$ e provaremos, usando este conceito, que todo ideal à esquerda de $D_1(K)$ é dois gerado. A principal referência é [6].

2.1 Bases de Divisão

Seja K um corpo de característica zero e seja $P \in D_1(K) = K[[x]]\langle\partial_x\rangle$, $P \neq 0$. Então existem $a_0(x), a_1(x), ..., a_d(x) \in K[[x]]$ com $a_d(x) \neq 0$ tais que

$$P = a_d(x)\partial_x^d + \cdots + a_1(x)\partial_x + a_0(x).$$

O inteiro não negativo d é chamado de **ordem** do operador P e é denotado por $ord(P)$.

Por definição o **expoente de** P é o par de inteiros

$$exp(P) = (v(a_d), d) \in \mathbb{N}^2,$$

onde $d = ord(P)$ é a ordem do operador P e $v(a_d)$ é a valuação da série $a_d(x)$. Tal expoente é aditivo com respeito ao produto, ou seja, se $Q \in D_1(K)$ é outro operador diferente de zero, então

$$exp(PQ) = exp(P)exp(Q) \in \mathbb{N}^2.$$

De fato, se $Q = b_e(x)\partial_x^e + \cdots + b_0(x)$ com $b_e(x) \neq 0$, então podemos escrever

$$PQ = a_d b_e \partial_x^{d+e} + R \text{ com } ord(R) < d + e.$$

Proposição 2.1. *Sejam A e P elementos diferentes de zero de $D_1(K)$ com $exp(P) = (v, d)$. Então existe um único par (Q, R) de elementos de $D_1(K)$ tais que*

1. $A = PQ + R$

2. $R = \sum\sum u_{k,l}(x)x^k\partial_x^l + S$ *onde $u_{k,l}$ são unidades de $K[[x]]$ e $ord(S) < d$.*

Prova: A prova da proposição é feita por indução sobre a ordem do operador A. ■

Definição 2.2. *Seja I um ideal à esquerda de $D_1(K)$. O conjunto $Exp(I)$ é definido como:*

$$Exp := \{exp(P) : P \in D_1(K), P \neq 0\}$$

Desde que I é um ideal à esquerda de $D_1(K)$ temos que

$$Exp(I) = Exp(I) + \mathbb{N}^2.$$

Seja r a ordem mínima dos elementos diferentes de zero do ideal a esquerda I e seja A_r o conjunto dos operadores de $D_1(K)$ com ordem igual a r. Cada $P_r \in A_r$ pode ser escrita de maneira única como $P_r = a_{r,P_r}(x)\partial_x^r +$ (termos de menor ordem). Escolhemos
$\alpha_r := min\{v(a_{r,P_r}(x)) : P_r \in A_r\}$. Então o par $(\alpha_r, r) \in Exp(I)$. Seja agora A_{r+1} o conjunto dos operadores de $D_1(K)$ com ordem igual a $r+1$. De maneira semelhante, escolhemos $\alpha_{r+1} := min\left\{v(a_{r+1,P_{r+1}}(x)) : P_{r+1} \in A_{r+1}\right\}$. Notemos que $\alpha_{r+1} \leq \alpha_r$, pois se P_r é tal que $exp(P_r) = (\alpha_r, r)$, então $P_r = ux^{\alpha_r}\partial_x^r + \cdots \in I$, onde u é uma unidade de $K[[x]]$. Usando o fato que I é um ideal a esquerda temos que $\partial_x u^{-1}P_r \in I$, mas $\partial_x u^{-1}P_r = x^{\alpha_r}\partial_x^{r+1}+$(termos de menor ordem), logo pela definição de α_{r+1}, concluimos que $\alpha_{r+1} \leq \alpha_r$. O par $(\alpha_{r+1}, r+1) \in Exp(I)$. Continuando com este processo obtemos um conjunto $\{(\alpha_r, r), (\alpha_{r+1}, r+1), ..., \}$ tais que em geral α_j é a valuação minimal dos elementos de I que tem ordem j. Como $\alpha_r \geq \alpha_{r+1} \geq \cdots$ em $\mathbb{N}$, é claro que este processo acaba digamos em (α_s, s).

Definição 2.3. *Os pontos $(\alpha_r, r), (\alpha_{r+1}, r+1), ..., (\alpha_s, s)$ são chamados* ***pontos escada*** *e o conjunto formado por eles será denotado por $Es(I)$. Ou seja,*

$$Es(I) = \{(\alpha_r, r), (\alpha_{r+1}, r+1), ..., (\alpha_s, s)\}$$

Usando a divisão acima podemos ver que o conjunto $Es(I)$ é o conjunto de pontos fronteira de $Exp(I)$.

Das definições anteriores temos a igualdade:

$$Exp(I) = \bigcup_{p \leq j \leq q} \{(\alpha_j, j) + \mathbb{N} \times \{0\}\} \cup \left\{(\alpha_q, q) + \mathbb{N}^2\right\}$$

Definição 2.4. *Seja I um ideal a esquerda de $D_1(K)$. Uma* ***base de divisão de*** *I consiste de todos os elementos $P_j \in I$ tais que $exp(P_j) = (\alpha_j, j)$ para algum $(\alpha_j, j) \in Es(I)$.*

A terminologia anterior provem da seguinte :

Proposição 2.5. *Seja I um ideal a esquerda próprio de $D_1(K)$ e sejam $P_r, ..., P_s$ uma base de divisão para I*

1. *Para todo $A \in D_1(K)$ existem únicos elementos $Q_r, Q_{r+1}, ..., Q_{s-1} \in K[[x]]$, $Q_s \in D_1(K)$ e $R \in D_1(K)$ tais que*

$$A = Q_r P_r + \cdots + Q_s P_s + R$$

com

$$R = \sum_{l=r}^{ord(A)} \sum_{k=0}^{\alpha_l - 1} u_{k,l} x^k \partial_x^l + S$$

e $ord(S) < r$.

2. *Com essas notações temos que $A \in I$ se e somente se $R = 0$*

Prova: A existência de tal divisão provém da divisão estabelecida na proposição 2.1. Primeiro dividimos A por P_s, em seguida dividimos o resíduo que é de ordem menor que s por P_{s-1}, e assim por diante.

Mais ainda tem-se que $A \in I$ se e somente se $R \in I$. Mas se $R \neq 0$ temos que $exp(R) \notin Exp(I)$, logo $R \in I$ se e somente se $R = 0$. Isto dá a segunda parte da proposição e também a unicidade de R.

A fim de provar a unicidade dos $Q_r, ..., Q_s$ é suficiente provar que se

$$Q_r P_r + \cdots + Q_s P_s = 0$$

com $Q_r, ..., Q_{s-1} \in K[[x]]$ e $Q_s \in D_1(K)$, então todos esses operadores são zero. Isto pode ser mostrado considerando o termo de maior ordem de dita soma. ■

Corolário 2.6. *Sejam I e I' ideais de $D_1(K)$ tais que $I' \subset I$ com $Es(I') = Es(I)$. Então $I' = I$.*

Prova: Neste caso uma base de divisão $P'_r, ..., P'_s$ para I' é também uma base de divisão para . O critério para que um operador pertencer a I' é o mesmo que para I, em virtude da proposição anterior. ■

2.2 Os ideais á esquerda de $D_1(K)$ são dois gerados.

A continuação mostraremos que todo ideal à esquerda I é dois gerado. Antes precisaremos de dois lemas

Lema 2.7. *Seja I um ideal à esquerda de $D_1(K)$ e seja $P_r, ..., P_s$ uma base de divisão para I. Então para todo $A \in I$ existe k tal que $x^k A \in D_1(K)$. Ou seja o $D_1(K)$-módulo à esquerda $I/D_1(K)P_r$ é um módulo de torção.*

Prova: A fim de provar o lema, observemos que na divisão elementar de A por P_r, se temos que $exp(A) \in exp(P) + \mathbb{N}^2$, então o resíduo R tem ordem menor que a $ord(A)$. Escolhemos n_1 tal que $exp(x^{n_1}A) \in exp(P_r) + \mathbb{N}^2$. Então temos que

$$x^{n_1}A = B_1P_r + R_1, \quad ord(R_1) < ord(A)$$

e por indução achamos n tal que

$$x^n A = BP_r + R$$

com $ord(R) < ord(P_r) = r$. Mas $R \in I$ e assim $R = 0$. ■

Lema 2.8. *Seja M um $D_1(K)$-módulo à esquerda finitamente gerado que é também finitamente gerado como $K[[x]]$-módulo. Então M é um $K[[x]]$-módulo livre.*

Prova: Como M é finitamente gerado como $K[[x]]$-módulo, então o K-espaço vetorial M/xM tem dimensão finita. Seja $m_1 + xM, ..., m_n + xM$ uma base deste espaço vetorial. Então se N é o $K[[x]]$-submódulo de M gerado pelos elementos $m_1, .., m_n \in M$, temos a igualdade $M = N + xM$. Usando o lema de Nakayama temos que $N = M$, ou seja $m_1, ..., m_n$ é um conjunto de geradores de M sobre $K[[x]]$. Portanto obtém-se uma aplicação sobrejetiva $K[[x]]$-linear $\phi : K[[x]]^n \to M$. Seja L o núcleo de ϕ. Mostraremos que $L = 0$ e por tanto ϕ será um isomorfismo, o que provará nosso lema. Com efeito, suponhamos que $L \neq 0$. Seja $v \in L, v \neq 0$, então existem séries $p_1(x), ..., p_n(x) \in K[[x]]$ não todas iguais a zero tais que $v = \sum_{i=1}^n p_i(x)\varepsilon_i$, onde $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ é a base canônica de $K[[x]]^n$, mais ainda $\phi(v) = \sum_{i=1}^n p_i(x)m_i = 0$ em M.

Como M é também um $D_1(K)$-módulo, temos que $\partial_x(\sum_{i=1}^n p_i(x)m_i) = 0$ em M. Então

$$\sum_{i=1}^n(\partial_i p_i(x))m_i = \sum_{i=1}^n(\partial p_i(x)/\partial x + p_i\partial_i)m_i = \sum_{i=1}^n(\partial p_i(x)/\partial x)m_i + \sum_{j=1}^n p_j(x)(\partial_x m_j)) = 0,$$

por outro lado $\partial_x m_j = \sum_{i=1}^n b_{ji}(x)m_i$ para algumas $b_{ji}(x) \in K[[x]]$. Então temos $\sum_i \partial p_i(x)/\partial_x m_i + \sum_{j=1}^n p_j(x)(\sum_{i=1}^n bji)m_i) = \sum_i \partial p_i(x)/\partial_x m_i + \sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n p_j(x)b_{ij}(x))m_i$ $= \sum_{i=1}^n(\partial p_i(x)/\partial_x + \sum p_j(x)b_{ji}(x))m_i = 0$ e por tanto temos que $\sum_i^n(\partial p_i(x)/\partial_x + \sum_j p_j(x)bji(x))\varepsilon_i \in L$. Sem perda de generalidade suponhamos que $p_1(x) \neq 0$ é que $r = val(p_1(x))$ é a menor valuação. Então continuando com o processo anterior e depois de r etapas obtemos uma igualdade da forma $(\partial^r p_1(x)/\partial x^r)\varepsilon_1 + \sum_{j=2}^n q_j(x)\varepsilon_j \in L$. Logo se trabalhamos no K-espaço quociente M/xM, obtemos uma igualdade do tipo

$$(\partial^r p_1(x)/\partial x^r) + \sum_{j=2}^n p_j(x)q_j(x) = 0.$$

Mas $val(\partial^r p_1(x)/\partial x^r) = 0$, logo $0 = val(\partial^r p_1(x)/\partial x^r) = val(\sum_{j=2}^n p_j(x)q_j(x)) \geq min\,\{val(p_j(x)q_j(x))\}$, o que é uma contradição, pois por nossa escolha $val(p_1(x)) \geq val(p_j(x))$ para todo $j \neq 1$. Concluímos então que $L = Ker(\phi) = 0$.

■

Agora podemos provar que todo ideal à esquerda de $D_1(K)$ é 2-gerado.

Teorema 2.9. *Seja I um ideal a esquerda de $D_1(K)$ e seja $P_r, ..., P_s$ uma base de divisão para I. Então I é gerado por apenas P_r e P_s.*

Prova: Seja $J := D_1(K)P_r + D_1(K)P_s \subset I$, o ideal à esquerda gerado por P_r e P_s. Consideremos o $D_1(K)$-módulo à esquerda I/J. Como o D_1-módulo $I/D_1(K)P_r$ é de torção segundo o lema 2.7 , então I/J é também de torção. Por outro lado I/J é um módulo finitamente gerado sobre $D_1(K)$, mais ainda é finitamente gerado como $K[[x]]$-módulo, na verdade é gerado pelas classes de $P_{r+1}, ..., P_{s-1}$ devido à proposição 2.5. Então pelo lema 2.8 , I/J é um $K[[x]]$-módulo livre. Assim, I/J é de torção e livre como $K[[x]]$-módulo. Então $I/J = 0$, logo $I = J$.

■

Capítulo

3

Módulos Livres sobre $S = T((x))\langle\partial_x\rangle$ e sobre $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$

Neste capítulo estudamos algumas proposições referentes a módulos livres sobre os anéis $S = T((x))\langle\partial_x\rangle$ e $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$. Na primeira seção definimos e exploramos algumas propriedades desses anéis. As proposições sobre módulos livres que precisaremos no capítulo seguinte são estudadas na segunda seção. A proposição 3.10 é a que será realmente utilizada adiante, mas o resultado técnico mais importante é a proposição 3.6.

3.1 Propriedades dos anéis S e D

3.1.1 O anel $S = T((x))\langle\partial_x\rangle$

Seja T um anel de divisão de característica zero. Por $T[[x]]$ denotamos o anel de séries de potências em uma indeterminada com coeficientes em T, onde $xt = tx$ para todo $t \in T$. Como T é um domínio Noetheriano à esquerda e à direita, então $T[[x]]$ é também um domínio Noetheriano à esquerda e à direita (veja por exemplo [11], theorem 4.5, chapter 1, página 22). Logo, pelo corolário 1. 23, $T[[x]]$ é um domínio de Ore à esquerda e à direita. Por tanto, $T[[x]]$ possui um anel de frações que denotamos por $T((x))$.

Sobre $T[[x]]$ temos a derivação T-linear usual $\partial_x : T[[x]] \to T[[x]]$. Vamos estender esta derivação a uma derivação T-linear sobre o anel de frações $T((x))$ da seguinte maneira: Seja $\delta \in T((x))$, então existem $a, b \in T[[x]]$ com $b \neq 0$ tais que $\delta = b^{-1}a$. Consideremos

a aplicação:

$$D_x : T((x)) \to T((x)), \text{ onde } D_x(\delta) = b^{-1}\partial_x(a) - b^{-1}\partial_x(b)\delta.$$

Não é difícil ver que tal aplicação está bem definida, ou seja, não depende dos representantes a, b da fração δ. Mais ainda, D é uma derivação T-linear que estende ∂_x; é por isso que usaremos a notação ∂_x em lugar de D_x.
Por outro lado, se $\delta \in T((x))$, então δ define um operador T-linear sobre $T((x))$ que leva um elemento $\gamma \in T((x))$ no produto $\delta\gamma$.

Definição 3.1. *O subanel dos T-operadores lineares de $T((x))$ que é gerado pelos elementos de $T((x))$ e a derivação ∂_x é chamado* ***anel de operadores diferenciais T-lineares de*** *$T((x))$, ou simplesmente o* ***anel de operadores diferenciais de*** *$T((x))$. Denotamos este anel por $S = T((x))\langle\partial_x\rangle$.*

Seja δ um elemento de $T((x))$, então em S temos a seguinte regra de comutação entre ∂_x e operador produto definido por δ :

$$[\partial_x, \delta] = \partial_x(\delta).$$

Em virtude desta última relação podemos mostrar, como no caso de $D_1(K)$, que todo elemento diferente de zero $\alpha \in S$ pode ser escrita de maneira única como:

$$\alpha = p_0 + p_1\partial_x + \cdots + p_k\partial^k,$$

onde k é um inteiro não negativo, $p_0, p_1, ..., p_k \in T((x))$ e $p_k \neq 0$. O inteiro k é chamado de **ordem** de α de α e é denotado por $ord(\alpha)$.
Notemos que se β é outro elemento de S diferente de zero de ordem l, então $ord(\alpha\beta) = k + l$. Portanto S é um domínio de integridade. Do mesmo modo que $D_1(K)$, S é um anel simples.

Proposição 3.2. ***(Algoritmo da Divisão em S).*** *Sejam $\alpha, \beta \in S$ com $\beta \neq 0$ então existem $\gamma, \theta \in S$ tais que*

$$\alpha = \gamma\beta + \theta, \ \ com \ \ \theta = 0 \ \ ou \ \ ord(\theta) < ord(\beta).$$

Prova: Se $\alpha = 0$, basta tomar $\gamma = \theta = 0$. Suponhamos então que $\alpha \neq 0$ e que

$$\alpha = p_0 + p_1\partial_x + \cdots + p_k\partial^k, \ \ \beta = q_0 + q_1\partial_x + \cdots + q_n\partial^n, \ \ \text{com} \ \ p_k \neq 0 \ \ \text{e} \ \ q_n \neq 0.$$

Fazemos indução sobre $k = ord(\alpha)$. Se $k = 0$ e $n > 0$, escolhemos $\gamma = 0$ e $\theta = \alpha$. Se $k = n = 0$, escolhemos $\gamma = p_0q_0^{-1}$ e $\theta = 0$.

Suponhamos que a proposição é verdadeira para operadores de ordem menor que k. Sem perda de generalidade podemos supor que $n \leq k$, pois caso contrário basta tomar $\gamma = 0$ e $\theta = \alpha$. Consideremos o operador $\alpha_1 = \alpha - p_k q_n^{-1} \partial_x^{k-n}$, então $ord(\alpha_1) < k$. Logo pela hipótese indutiva, existem γ_1 e θ em S tais que

$$\alpha_1 = \gamma_1 \beta + \theta, \text{ onde } \theta = 0 \text{ ou } ord(\theta) < ord(\beta).$$

Logo $\alpha = \gamma\beta + \theta$, onde $\gamma = \gamma_1 + p_k q_n^{-1} \partial_x^{k-n}$ e $\theta = 0$ ou $ord(\theta) < ord(\beta)$.

■

Corolário 3.3. *Todo ideal à esquerda de S é principal.*

Prova: Seja I um ideal a esquerda diferente de zero de S. Escolhemos em I um operador $\beta \neq 0$ com a menor ordem. Afirmamos que o ideal I é gerado por β. Com efeito, seja α um elemento qualquer de I. Então pela proposição anterior, existem $\gamma, \theta \in S$ tais que $\alpha = \gamma\beta + \theta$ onde $\theta = 0$ ou $ord(\theta) < ord(\beta)$. Como I é um ideal a esquerda e $\alpha, \beta \in I$ temos que θ. Então pela escolha de β concluímos que $\theta = 0$ e por tanto $\alpha = \gamma\beta$.

■

Proposição 3.4. *Seja $0 \neq \alpha \in S$. Então o S-módulo $S/S\alpha$ tem comprimento finito.*

Prova: Seja k a ordem de α. Então podemos escrever $\alpha = p_0 + \cdots + p_k \partial^k$, $p_i \in T((x))$ e $p_k \neq 0$. Como $T((x))$ é um anel de divisão segue-se que $S\alpha$ contém $p_k^{-1}\alpha = q_0 + \cdots + q_{k-1}\partial^{k-1} + \partial^k$. Pelo algoritmo da divisão em S, dado $\beta \in S$, existem $\gamma, \theta \in S$ tais que $\beta = \gamma\alpha + \theta$ onde $\theta = 0$ ou $ord(\theta) < k$, ou seja, $\theta = r_0 + \cdots + r_{k-1}\partial^{k-1}$, para alguns $r_i \in T((x))$. Então $S/S\alpha$ é um espaço vetorial sobre $T((x))$ de dimensão k. Por outro lado cada $S-$submódulo de $S/S\alpha$ induz um $T((x))-$subespaço de $S/S\alpha$. Por tanto o $S-$módulo $S/S\alpha$ tem comprimento no máximo k. ■

3.1.2 O anel $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$

Seja F um corpo de característica zero e $D = D_1(F)$.

Proposição 3.5. *Seja α um elemento diferente de zero de D. Então o D-módulo quociente $D/D\alpha$ tem comprimento finito.*

Prova: Como α é um elemento diferente de zero de D, o D-módulo quociente $D/D\alpha$ é um D-módulo holonômico. Portanto $D/D\alpha$ tem comprimento finito. (Veja [6], página 14.) ■

3.2 Módulos livres

Suponhamos que F é um corpo de característica zero contido em T.

Proposição 3.6. *(i) Sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero de $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle \subset S$. Seja $\alpha \in S, \alpha \neq 0$ um elemento de S e $S^m = S\varepsilon_1 + \cdots + S\varepsilon_m$ um S-módulo livre de posto m com base $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$. Seja M o S-submódulo de S^m gerado pelo conjunto $\{\alpha\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \alpha\delta_m f\varepsilon_m / f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle\}$. Então $M = S^m$.*

(ii) Sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero de $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$. Seja $0 \neq \alpha$ um elemento de D e $D^m = D\varepsilon_1 + \cdots + D\varepsilon_m$ um D-módulo livre de posto m com base $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$. Seja M o D-submódulo de D^m gerado pelo conjunto $\{\alpha\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \alpha\delta_m f\varepsilon_m / f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle\}$. Então $M = D^m$.

Prova: Vamos mostrar (i). A prova de (ii) é análoga.

Para simplificar a notação colocamos $\partial := \partial_x$.

Primeiro observemos que a hipótese e a tese não mudam se a $m-$upla $\delta_1, ..., \delta_m$ for substituída por uma $m-$upla $\beta_1, ..., \beta_m$, onde $\beta_i = \Sigma a_{ij}\delta_j$ e (a_{ij}) é uma matriz $m \times m$ invertível com $a_{ij} \in F$. De fato, se substituirmos $\delta_1, ..., \delta_m$ por $\beta_1, ..., \beta_m$ usando uma transformação F-linear (a_{ij}), podemos também substituir os geradores livres $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ de S^m por $\zeta_1, ..., \zeta_m$ onde $\zeta_i = \Sigma b_{ij}\varepsilon_j$, $(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$.

Seja $ord(\delta_i)$ a ordem de δ_i. Podemos supor que as ordens são decrescentes, ou seja, $ord(\delta_1) \geqq ord(\delta_2) \geqq \cdots \geqq ord(\delta_m)$. Então, existe um inteiro positivo ω e algum inteiro l, $1 \leq l \leq m$ tal que $\omega = ord(\delta_1) = \cdots = ord(\delta_l)$ e $ord(\delta_i) < \omega$ se $i > l$.

Se $1 \leq i \leq l$ podemos escrever $\delta_i = r_i + p_i(x)\partial^\omega$, onde $ord(r_i) < \omega$ e $p_i(x) \in F[[x]]$. Podemos supor que $val(p_1) \leq val(p_2) \leq ... \leq val(p_l)$, onde $val(p_i)$ é a valorização usual da série de potências p_i. Se $val(p_1) = val(p_2) = \mu$, então existe algum $t \in F$ tal que $val(p_2 - tp_1) > \mu$. Substituímos δ_2 por $\delta_2 - t\delta_1$ enquanto $\delta_1, \delta_3, ..., \delta_m$ não mudam. Então, depois de algumas transformações $F-$lineares, podemos assumir que $val(p_1) < val(p_2) < \cdots < val(p_l)$. Com essas normalizações em mão começamos a provar que $\varepsilon_1 \in M$.

Seja $k = ord(\alpha)$. Como $S = T((x))\langle\partial\rangle$ podemos supor que $\alpha = \alpha_0 + \partial^k$ onde $ord(\alpha_0) < k$. Se $1 \leq i \leq l$ temos que $\alpha\delta_i = p_i(x)\partial^{k+\omega} + \psi_i$ onde $ord(\psi_i) < k + \omega$. Se $l < i \leq m$ então $ord(\alpha\delta_i) < k + \omega$.

Dado $g \in S$ ponhamos $g_1 = [x, g] = xg - gx$ o comutador de x e g. Indutivamente, seja $g_{\nu+1} = [x, g_\nu]$. O elemento g_ν é chamado o $\nu-$ *comutador de x e g.* O $\nu-$ comutador de x e ∂^ν é $(-1)^\nu\nu!$ para todos os inteiros positivos ν, enquanto o $\nu-$ comutador de x e ∂^s é zero se $s < \nu$.

Se aplicarmos isto aos elementos $\alpha\delta_1, ..., \alpha\delta_m$ vemos que o $(k+\omega)-$ comutador de x e $\alpha\delta_i$ é $(-1)^{k+\omega}(k+\omega)!p_i(x)$ para todo $1 \leq i \leq l$, enquanto eles são zero se $l < i \leq m$.

A definição de M implica que M é estável sob o $\nu-$comutador com x, ou seja se $m \in M$, então o $\nu-$comutador de x e m permanece em M, para todos os inteiros positivos ν. De fato, note que se $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial\rangle$, então $[x, \alpha\delta f] = x(\alpha\delta f) - \alpha\delta(fx)$.

Para $f = 1 \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial\rangle$ temos que $a = \alpha\delta_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha\delta_m\varepsilon_m \in M$. Se v_1 é o $(k+\omega)-$ comutador de a e x, dividido por $(-1)^{k+\omega}(k+\omega)!$, então $v_1 \in M$ e

$$v_1 = p_1(x)\varepsilon_1 + \cdots + p_l(x)\varepsilon_l.$$

Agora, se $h \in S$, seja $h_1 = [\partial, h] = \partial h - h\partial$ o comutador ∂ com h. Indutivamente definimos $h_{\nu+1}$ por $h_{\nu+1} = [\partial, h_\nu]$. O elemento h_ν é chamado o $\nu-$ *comutador de* ∂ e h. Observemos que M é estável sob o $\nu-$ comutador com ∂ para todos os inteiros positivos ν. De fato, note que se $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial\rangle$, então $[\partial, \alpha\delta f] = \partial(\alpha\delta f) - \alpha\delta(f\partial)$.

Como $v_1 \in M$ temos que se $v_1^{(\mu)}$ é o $\mu-$ comutador de ∂ e v_1 , onde $\mu = val(p_1(x)) < \cdots < val(p_l(x))$, então $v_1^{(\mu)} \in M$ e

$$v_1^{(\mu)} = p_1^{(\mu)}(x)\varepsilon_1 + p_2^{(\mu)}(x)\varepsilon_2 + \cdots + p_l^{(\mu)}(x)\varepsilon_l \in M,$$

onde $p^{(\mu)}(x)$ denota a μ-derivada usual da série de potências $p(x)$. Note que $u(x) := p_1^{(\mu)}(x)$ é uma unidade de $F[[x]]$ e $val(p_j^{(\mu)}(x)) = val(p_j(x)) - \mu > 0$, $j = 2, \cdots, l$.

Definimos agora $v_2 := v_1 - p_1(x)(u(x))^{-1}v_1^{(\mu)}$. Então $v_2 \in M$ e

$$v_2 = q_2(x)\varepsilon_2 + \cdots + q_l(x)\varepsilon_l,$$

onde $q_j(x) = p_j(x) - p_1(x)(u(x))^{-1}p_j^{(\mu)}(x)$, $j = 2, ..., l$. Se para cada $2 \leq j \leq l$ escrevemos $p_j(x) = x^{v_j}u_j(x)$, onde $v_j = val(p_j(x))$ e $u_j(x)$ é uma unidade de $F[[x]]$, então $q_j(x) = a_j x^{val(p_j(x))} + \cdots$, onde $a_j := (1 - \frac{(v_j)(v_j-1)\cdots(v_j-(\mu-1))}{\mu!})u_j(0)$ é diferente de zero, pois $v_j > \mu$ e $u_j(0) \neq 0$. Então $q_j(x)$ é diferente de zero e mais ainda $val(q_j(x)) = val(p_j(x))$, para todo $j = 2, ..., l$. Portanto $val(q_2) < val(q_3) < \cdots < val(q_l)$.

Agora, repetimos o argumento anterior usando o comutador de ∂ e v_2 e então temos que $v_3 = r_3(x)\varepsilon_3 + \cdots + r_l(x)\varepsilon_l \in M$. Procedendo desta maneira, finalmente temos que $v_l(x) = \widetilde{u}(x)\varepsilon_l \in M$, onde $\widetilde{u}(x)$ é uma unidade de $F[[x]]$. Consequentemente $\varepsilon_l \in M$.

Se $l = 1$, mostramos que $\varepsilon_1 \in M$. Se $l > 1$, como $v_{l-1} \in M$, temos que $\varepsilon_{l-1} \in M$. Seguindo para trás temos que $\varepsilon_1 \in M$.

Se agora restringimos nossa atenção à $(m-1)$-upla $\delta_2, ..., \delta_m$ e ao S-módulo $S^{m-1} = S\varepsilon_2 + \cdots + S\varepsilon_m$, a proposição segue-se por indução sobre m.

■

Antes da próxima proposição faremos um resultado técnico.

Lema 3.7. *Seja S um domínio de Ore que não é Artiniano. Seja $S^m = S\varepsilon_1 + \cdots + S\varepsilon_m$ um S-módulo livre de posto m com base $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$. Seja $M \subset S^m$ um sobmódulo de co-comprimento finito. Então existe $\beta \in S$, $\beta \neq 0$, tal que $\beta\varepsilon_i \in M$, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Prova: Seja $\overline{\lambda} \in S^m/M$, $\overline{\lambda} \neq \overline{0}$, $\lambda \in S^m$. Temos $S/ann(\overline{\lambda}) \simeq S\overline{\lambda} \subset S^m/M$.
Se $ann(\overline{\lambda}) = (0)$, então $S \simeq S\overline{\lambda}$ que é um S-módulo Artiniano pois M tem co-comprimento finito em S^m. Logo S seria Artiniano. Assim $ann(\overline{\lambda}) \neq (0)$.

Como $S^{(m)}/M = S\overline{\varepsilon_1} + \cdots + S\overline{\varepsilon_m}$ com $ann(\overline{\varepsilon_i}) \neq 0$, existe $q_j \in S$, $q_j \neq 0$ tal que $q_j\varepsilon_j \in M$. Já que S é um domínio de Ore, existe $\beta = \lambda_j q_j \in Sq_j$, $\beta \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$. Logo $\beta\varepsilon_j = (\lambda_j q_j)\varepsilon_j = \lambda_j(q_j\varepsilon_j) \in M$. ■

Proposição 3.8. *(i) Sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero de $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle \subset S$ e seja M um S-submódulo de S^m de co-comprimento finito. Se $\alpha \in S, \alpha \neq 0$, então existe algum $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle$ tal que*

$$S^m = M + S(\alpha\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \alpha\delta_m f\varepsilon_m).$$

(ii) Sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero de $D = F[[x]]\langle\partial_x\rangle$ e seja M um D-submódulo de D^m de co-comprimento finito. Se $\alpha \in D, \alpha \neq 0$, então existe algum $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle$ tal que

$$D^m = M + D(\alpha\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \alpha\delta_m f\varepsilon_m).$$

Prova: Vamos mostrar (i). A prova de (ii) é análoga.

Usaremos indução sobre o comprimento do S-módulo $S^{(m)}/M$.

Podemos assumir que $M \neq S^{(m)}$. Segue-se da proposição 2.5 que existe $f_0 \in \mathbb{Z}[[x]]$ tal que

$$\alpha\delta_1 f_0\varepsilon_1 + \cdots + \alpha\delta_m f_0\varepsilon_m \notin M.$$

Consideremos agora um S-submódulo M' de S^m tal que $M \subset M' \subset M + S(\sum_j \alpha\delta_j f_0\varepsilon_j)$ e tal que M/M' seja irredutível. Note que M' existe pois o comprimento de S^m/M é finito.

Pelo lema anterior, existe $\beta \in S, \beta \neq 0$ tal que $\beta\varepsilon_i \in M, i = 1, \ldots, m$. Logo $S^m\beta \subset M$. Como S é um domínio de Ore, existe $t \in S, t \neq 0$ tal que $t\alpha\delta_j f_0 \in S\beta, j = 1, \ldots, m$.

A hipótese de indução aplicada a M' e $\alpha' = t\alpha$ garante a existência de $f_1 \in \mathbb{Z}[[x]]$ tal que $S^m = M' + S(\sum_j t\alpha\delta_j f_1\varepsilon_j)$.

Seja $N := M + S(\sum_j \alpha\delta_j f_1\varepsilon_j)$. Se $N = S^m$, a prova acabou pois f_1 cumpre as condições requeridas. Suponhamos então que $N \neq S^m$. Neste caso provaremos que $S^m = M + (\sum_j \alpha\delta_j(f_0 + f_1)\varepsilon_j)$ e por tanto $f := f_0 + f_1$ é o elemento procurado.

Afirmação: Se $N \neq S^m$ então $N = N_0$, onde $N_0 := M + S(\sum_j t\alpha\delta_j f_1\varepsilon_j)$. Com efeito, desde que $S^m = M' + P$, onde $P = S(\sum_j t\alpha\delta_j f_1\varepsilon_j)$, temos que

$$S^m/N_0 = (M' + P)/(M + P) \simeq M'/(M + M' \cap P) \subset M'/M.$$

Como M'/M é irredutível, S^m/N_0 é zero ou irredutível. Mas $N_0 \subset N$ pois $M \subset N$ e $\sum_j t\alpha\delta_j f_1\varepsilon_j = t(\sum_j \alpha\delta_j f_1\varepsilon_j) \in N$. Logo $N_0 \neq S^m$ e portanto S^m/N_0 é irredutível. Como $N_0 \subset N \subset S^m$ e $N \neq S^m$, então $N = N_0$, o que prova a afirmação.

Seja agora $N_1 := M + S(\sum_j \alpha\delta_j(f_0 + f_1)\varepsilon_j)$. Vamos mostrar que $N_1 = S^m$. Pela escolha de t, $t\alpha\delta_j f_0\varepsilon_j \in S\beta, j = 1, \ldots, m$ e como $S^m\beta \subset M$, então $\sum_j t\alpha\delta_j f_0\varepsilon_j \in M$. Mas $M \subset N_1$ e $\sum_j \alpha\delta_j(f_0 + f_1)\varepsilon_j \in N_1$. Logo $\sum_j \alpha\delta_j f_1\varepsilon_j \in N_1$. Além disso, pela escolha de M', $M' \subset M + S(\sum_j \alpha\delta_j f_0\varepsilon_j)) \subset N_1$.

Finalmente, $t(\sum_j \alpha\delta_j f_1\varepsilon_j) \in S(\sum_j \alpha\delta_j f_1\varepsilon_j) \subset N_1$. Consequentemente,

$$S^m = M' + S(\sum_j t\alpha\delta_j f_1\varepsilon_j) \subset N_1.$$

■

Corolário 3.9. *(i) Seja $\rho \in S, \rho \neq 0$ e sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero em $F[[x]]\langle\partial_x\rangle \subset S$. Então existe algum $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle$ tal que*

$$S^m = S^m\rho + S(\rho\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \rho\delta_m f\varepsilon_m),$$

onde $S^m\rho$ é o S-submódulo de S^m gerado por $\rho\varepsilon_1, ..., \rho\varepsilon_m$.

(ii) Seja $\rho \in D, \rho \neq 0$ e sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero de D. Então existe algum $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle$ tal que

$$D^m = D^m\rho + D(\rho\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \rho\delta_m f\varepsilon_m),$$

onde $D^m\rho$ é o D-submódulo de D^m gerado por $\rho\varepsilon_1, ..., \rho\varepsilon_m$.

Prova: (i): Pela proposição 3.4, o comprimento do S-módulo $S/S\rho$ é finito e portanto $S^m\rho$ tem co-comprimento finito em S^m. O resultado segue-se então se aplicarmos a proposição $3.8(i)$ com $\alpha = \rho$ e $M = S^m\rho$.

(ii): Pela proposição 3.5, o comprimento do D-módulo $D/D\rho$ é finito e portanto $D^m\rho$ tem co-comprimento finito em D^m. O resultado segue-se se aplicarmos a proposição $3.8(ii)$ com $\alpha = \rho$ e $M = D^m\rho$.

■

Proposição 3.10. *(i) Sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero de $F[[x]]\langle\partial_x\rangle \subset S$ e seja $\rho \in S, \rho \neq 0$. Consideremos o S-módulo livre $S^{m+1} = S\varepsilon_0 + S\varepsilon_1 + \cdots + S\varepsilon_m$ com base $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. Então existe algum $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle$ tal que*

$$S^{m+1} = S^{m+1}\rho + S(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_1 f\varepsilon_m),$$

onde $S^{m+1}\rho$ é o S-submódulo de S^{m+1} gerado por $\rho\varepsilon_0, ..., \rho\varepsilon_m$.

(ii) Sejam $\delta_1, ..., \delta_m$ elementos diferentes de zero de $D =$ e seja $\rho \in D, \rho \neq 0$. Consideremos o D-módulo livre $D^{m+1} = D\varepsilon_0 + D\varepsilon_1 + \cdots + D\varepsilon_m$ com base $\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_m$. Então existe algum $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle$ tal que

$$D^{m+1} = D^{m+1}\rho + D(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_1 f\varepsilon_m),$$

onde $D^{m+1}\rho$ é o D-submódulo de D^{m+1} gerado por $\rho\varepsilon_0, ..., \rho\varepsilon_m$.

Prova: Vamos mostrar (i). A prova de (ii) é análoga.

O corolário anterior garante a existência de $f \in \mathbb{Z}[[x]]\langle\partial_x\rangle$ tal que

$$S^m = S^m\rho + S(\rho\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \rho\delta_m f\varepsilon_m). \qquad (*)$$

Logo, se $v \in S^{m+1}$, então existem $\alpha_0 \in S$ e $w \in S^m$ tais que $v = \alpha_0\varepsilon_0 + w$. Pela igualdade anterior, $w = \beta_1\rho\varepsilon_1 + \cdots + \beta_m\rho\varepsilon_m + \lambda(\rho\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \rho\delta_m f\varepsilon_m)$, para alguns $\beta_1, ..., \beta_m, \lambda \in S$. Por outro lado, pelo algoritmo da divisão em S, podemos escrever $\alpha_0 = \beta_0\rho + \theta$, para alguns $\beta_0, \theta \in S$. Então
$v = (\beta_0\rho\varepsilon_0 + \beta_1\rho\varepsilon_1 + \cdots + \beta_m\rho\varepsilon_m) + \lambda\rho(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) + (\theta - \lambda\rho)\varepsilon_0$. Logo

$$S^{m+1} = S^{m+1}\rho + S(\varepsilon_0 + \rho\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \rho\delta_m f\varepsilon_m) + S\varepsilon_0. \qquad (**)$$

Seja $J := S^{m+1}\rho + S(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m)$. Então

$$J \supset S^{m+1}\rho + S\rho(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) \supset S^{m+1}\rho + S\rho(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m).$$

De fato, a primeira inclusão é clara. Para mostrar a segunda inclusão notemos que se $v \in S\rho(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m)$, então $v = \lambda\rho(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m)$, para algum $\lambda \in S$. Logo

$v = (-\lambda\rho)\varepsilon_0 + \lambda\rho(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) \in S^{m+1}\rho + S\rho(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m)$.

Por outro lado,

$$S^{m+1}\rho + S\rho(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) \supset S\rho\varepsilon_0 + S^m.$$

Com efeito, seja $v \in S\rho\varepsilon_0 + S^m$, então $v = \lambda_0\rho\varepsilon_0 + w$, onde $\lambda_0 \in S$ e $w \in S^m$. Logo, por $(*)$, existem $\lambda_1, ..., \lambda_m, \beta \in S$ tais que $w = \lambda_1\rho\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_m\rho\varepsilon_m + \beta(\rho\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \rho\delta_m f\varepsilon_m)$. Então $v = (\lambda_0\rho\varepsilon_0 + \lambda_1\rho\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_m\rho\varepsilon_m) + \beta\rho(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) \in S^{m+1}\rho + S\rho(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) \in S^{m+1}\rho + S\rho(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m)$.
Mas, $(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) \in S\rho\varepsilon_0 + S^m$. Então das inclusões anteriores temos que $(\delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_m f\varepsilon_m) \in J$. Isto implica que $\varepsilon_0 \in J$.
Usando agora $(**)$, concluímos que $J = S^{m+1}$, o que demonstra a proposição.

■

Capítulo

4

Resultados Principais

Seja K um corpo de característica zero. Neste capítulo provaremos que todo ideal à esquerda do anel $E_n(K) := K((x_1, ..., x_n))\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$ é dois gerado. Mostraremos também que todo ideal à esquerda do anel $S_{n-1} = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$ é dois gerado. Como corolário, para $n = 1$, obtemos outra prova do fato que todo ideal à esquerda do anel $D_1(K) = S_0(K)$ é dois gerado. Os resultados mais importantes são os teoremas 4.8 e 4.13.

Para cada $0 \leq r \leq n$, os anéis $D_r(K) = K[[x_1, ..., x_r]]\langle \partial_1, ..., \partial_r \rangle$ serão denotados simplesmente por D_r.

4.1 Os anéis $B_r(K)$

Definição 4.1. *Seja r um inteiro positivo tal que $1 \leq r \leq n-1$ e seja q um elemento diferente de zero do anel $D_r[[x_{r+1}, ..., x_n]]$. Um tal q se escreve unicamente na forma $q = \sum_\nu q_\nu x^\nu$, onde $\nu = (\nu_{r+1}, ..., \nu_n) \in \mathbb{N}^{n-r}$, $x = (x_{r+1}, ..., x_n)$ e $q_\nu \in D_r$. Dado $i = 1, ..., r$, dizemos que q* ***tem ordem finita em*** *∂_i, se existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $ord_{\partial_i} q_\nu \leq m$, para todo ν.*

O conjunto dos elementos do anel $D_r[[x_{r+1}, ..., x_n]]$ que têm ordem finita em ∂_i, para todo $1 \leq i \leq r$, será denotado por $B_r(K)$ ou simplesmente B_r. Em outras palavras, para $1 \leq r \leq n-1$,

$$B_r(K) := \{q \in D_r[[x_{r+1}, ..., x_n]] \text{ tal que } q \text{ têm ordem finita } \partial_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq r\}.$$

Por definição $B_0(K) := K[[x_1, ..., x_n]]$.

Proposição 4.2. *Seja r um inteiro positivo tal que $1 \leq r \leq n-1$. Então $B_r(K) =$*

$K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle$ e portanto $B_r(K)$ é um subanel do anel $D_n(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$. Mas ainda, $B_r(K)$ é um domínio de Ore.

Prova: Seja $q = \sum_\nu q_\nu x^\nu \in B_r(K)$ onde $\nu = (\nu_{r+1}, ..., \nu_n) \in \mathbb{N}^{n-r}, x = (x_{r+1}, ..., x_n)$ e $q_\nu \in D_r$, para todo ν. Por definição, existe um natural $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada ν nos podemos escrever $q_\nu = \sum_\beta q_{\nu,\beta}\partial^\beta$ como uma soma finita, onde $\beta = (\beta_1, ..., \beta_r)$, $q_{\nu,\beta} \in K[[x_1, ..., x_r]]$, $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_r^{\beta_r}$ e $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_r \leq m$. Então, para cada ν, temos $q_\nu x^\nu = (\sum_\beta q_{\nu,\beta}\partial^\beta)x^\nu = \sum_\beta q_{\nu,\beta}x^\nu\partial^\beta$, pois os x^ν comutam com os ∂^β. Agora notemos que para cada β com $\mid \beta \mid\leq m$, a soma $p_\beta := \sum_\nu q_{\nu,\beta}x^\nu$ é um elemento de $K[[x_1, ..., x_r]][[x_{r+1}, ..., x_n]] = K[[x_1, ..., x_n]]$. Logo,

$$q = \sum_\nu q_\nu x^\nu = \sum_\nu \sum_\beta q_{\nu,\beta}x^\nu\partial^\beta = \sum_\beta (\sum_\nu q_{\nu,\beta}x^\nu)\partial^\beta = \sum_\beta p_\beta\partial^\beta \in K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle.$$

Por outro lado, é claro que $K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle$ está contido em $B_r(K)$. Portanto $B_r(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle$ que é um subanel de $D_n(K)$.

O anel $K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle$ possui uma filtração canônica pela ordem dada por $\Sigma_m := \left\{\sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta, |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_r \leq m\right\}, m \geq 0$. O anel graduado associado à esta filtração é isomorfo ao anel de polinômios $K[[y_1, ..., y_n]][z_1, ..., z_r]$. Como o último anel é Noetheriano , concluimos que $K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle$ é um anel Noetheriano. Logo $B_r(K)$ é um domínio Noetheriano e em consequência é um domínio de Ore.

■

Proposição 4.3. *Seja r um inteiro não negativo tal que $0 \leq r \leq n-1$, $q \in B_r(K), q \neq 0$. Sejam $a_1, ..., a_l$ elementos de D_n. Então existe $\rho \in B_r(K), \rho \neq 0$, tal que $\rho a_j \in D_n q$, para cada $j = 1, ..., l$.*

Prova: Cada a_j pode ser escrito como uma soma finita $\sum_\alpha p_{j\alpha}\partial^\alpha$ onde cada $p_{j\alpha}$ é um elemento de $B_r(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle$ e $\partial^\alpha = \partial_{r+1}^{\alpha_{r+1}} ... \partial_n^{\alpha_n}$. Escolhemos um inteiro positivo w suficientemente grande tal que $p_{j\alpha} = 0$ para todo α tal que $|\alpha| \geq w$ e para todo $j = 1, ..., l$.

Como $B_r(K)$ é um domínio de Ore e $q^w \neq 0$ $B_r(K)$, existe $\rho' \in B_r, \rho_1 \neq 0$, tal que $\rho' p_{j\alpha} \in B_r q^w$ para todo j e todo α.

Logo $\rho' p_{j\alpha} = s_{j\alpha}q^w$ para algum $s_{j\alpha} \in B_r$. Temos que $\rho' a_j = \sum_{|\alpha<w} p_{j\alpha}\partial^\alpha = \sum_{|\alpha|<w} s_{j\alpha}q^w\partial^\alpha$. Por outro lado, para cada $|\alpha| < w$, podemos escrever $q^w\partial^\alpha = t_\alpha q + qq_\alpha$, para alguns $t_\alpha \in D_n$ e $q_\alpha \in B_r$. Para cada $q_\alpha \neq 0$, existem $0 \neq r_\alpha, s_\alpha \in B_r$ tais que $r_\alpha q_\alpha = s_\alpha q$, pois $B_r(K)$ é um domínio de Ore.

Se $C_r(K)$ denota o anel de frações de $B_r(K)$, então em $C_r(K)$ temos a relação $q_\alpha =$

$r_\alpha^-1 s_\alpha q$. Logo em $C_n(K)$, o anel de frações de $B_n(K) = D_n(K)$, temos

$$\rho' a_j = \sum_{|\alpha|<w} (s_{j\alpha} t_\alpha) q + \sum_{|\alpha|<w, q_\alpha \neq 0} (q r_\alpha^{-1} s_\alpha) q = (\sum_{|\alpha|<w} s_{j\alpha} t_\alpha) q + (\sum_{|\alpha|<w, q_\alpha \neq 0} q r_\alpha^{-1} s_\alpha) q = \beta_j q + \gamma_j q,$$

onde $\beta_j := (\sum_{|\alpha|<w} s_{j\alpha} t_\alpha) \in D_n$ e $\gamma_j := (\sum_{|\alpha|<w, q_\alpha \neq 0} q r_\alpha^{-1} s_\alpha) \in C_r$.
Desde que $C_r(K)$ é o anel de frações de B_r, existem $\lambda_j, \mu_j \in B_r(K), \lambda_j \neq 0$ tais que $\gamma_j = \lambda_j^{-1} \mu_j$. Então $\rho' a_j = \beta_j q + \lambda_j^{-1} \mu_j q$, para todo $j = 1, ..., l$. Como $B_r(K)$ é um domínio de Ore, os λ_j têm um múltiplo comum, ou seja, existe $\theta \in B_r, \theta \neq 0$ tal que $\theta \in B_r(K)\lambda_j$. Por tanto $\theta = \eta_j \lambda_j$, para alguns $\eta_j \in B_r(K)$. Logo $\theta \rho' a_j = \theta \beta_j q + \eta_j \mu_j \in D_n q$ para todo $j = 1, ..., l$. Então, se $\rho := \theta \rho'$, temos que $\rho \in B_r(K)$ e mais ainda $\rho a_j \in D_n q$ para todo $j = 1, ..., l$.

■

4.2 O anel $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$

Seja K um corpo de característica zero e $K((x_1, .., x_n))$ o corpo de frações do anel de séries de potências $K[[x_1, ..., x_n]]$. Sobre $K((x_1, .., x_n))$ temos as derivações usuais $\partial_1, ..., \partial_n$ que são operadores K-lineares.
Se p é um elemento de $K((x_1, .., x_n))$, então p define un operador K-linear sobre $K((x_1, .., x_n))$ que leva um elemento $q \in K((x_1, .., x_n))$ no produto pq. Tal operador é chamado **operador produto** p.

Definição 4.4. *O subanel dos K-operadores lineares de $K((x_1, .., x_n))$ que é gerado pelas derivações usuais $\partial_1, ..., \partial_n$ e os operadores produto definidos por os elementos de $K((x_1, .., x_n))$ é chamado **anel de operadores diferenciais de** $K((x_1, .., x_n))$ e será denotado por $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$.*

Queremos mostrar que todo ideal à esquerda do anel $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$ é dois gerado. Isso será consequência da seguinte proposição:

Proposição 4.5. *Sejam a, b e c elementos diferentes de zero de D_n. Para cada inteiro não negativo r tal que $0 \leq r \leq n$, existem $q_r \in B_r$, $q_r \neq 0$ e $d_r, e_r \in D_n$ tais que*

$$q_r c \in D_n(a + d_r c) + D_n(b + e_r c).$$

Em particular, quando $r = 0$, existem $q_0 \in K[[x_1, \ldots, x_n]]$, $q_0 \neq 0$ e $d_0, e_0 \in D_n$ tais que

$$q_0 c \in D_n(a + d_0 c) + D_n(b + e_0 c).$$

Para demonstrar a proposição acima necessitamos do seguinte resultado, cuja prova será adiada até a próxima seção (**4.3**).

Proposição 4.6. *Seja r um inteiro não negativo tal que $0 \leq r \leq n-1$ e seja q um elemento diferente de zero em B_{r+1}. Se u e v são dois elementos de D_n com $v \neq 0$, então existem f em D_n e q_r em B_r tal que*

$$q_r \in D_n q + D_n(u + vf).$$

Observação 4.7. *Note que na proposição acima $q \in B_{r+1}$, enquanto $q_r \in B_r$. Assim, passando de q_{r+1} a q_r ´´eliminamos´´ a variável ∂_{r+1}. Eliminando cada variável ∂_i por vez, chegamos a uma série $q_0 \in K[[x_1, \ldots, x_n]]$.*

Prova da Proposição 4.5.

Prova: *Como D_n é um domínio de Ore à esquerda, $D_n a \cap D_n c \neq 0$. Portanto existe $q_n \in D_n, q_n \neq 0$ tal que $q_n c \in D_n a$. Como $D_n a \subset D_n a + D_n b$, tomando $d_n = e_n = 0$ vemos que a afirmação é verdadeira para $r = n$.*

Para $0 \leq r \leq (n-1)$ a prova será feita por indução "para trás"em r. Suponhamos então que podemos achar $q_{r+1} \in B_{r+1}, q_{r+1} \neq 0$ e $d_{r+1}, e_{r+1} \in D_n$ tais que

$$q_{r+1}c \in D_n(a + d_{r+1}c) + D_n(b + e_{r+1}c).$$

Podemos supor que $a + d_{r+1}c \neq 0$ e $b + e_{r+1}c \neq 0$, pois se por exemplo, $a + d_{r+1}c = 0$, então $q_{r+1}c \in D_n(b + d_{r+1}c)$. Isto implica que $b + d_{r+1}c \neq 0$. Logo

$$q_{r+1}c \in D_n(b + d_{r+1}c) \subset D_n(a + (d_{r+1} + 1)c) + D_n(b + d_{r+1}c),$$

onde $a + (d_{r+1} + 1)c = c \neq 0$ e $b + d_{r+1}c \neq 0$.

Ponhamos $a' = a + d_{r+1}c \neq 0$ e $b' = b + e_{r+1}c \neq 0$. Se encontramos $q_r \in B_r$, $q_r \neq 0$ e $d'_r, e'_r \in D_n$ tais que

$$q_r c \in D_n(a' + d'_r c) + D_n(b' + e'_r c),$$

então, tomando $d_r = d_{r+1} + d'_r$ e $e_r = e_{r+1} + e'_r$, temos que

$$q_r c \in D_n(a + d_r c) + D_n(b + e_r c).$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $a' = a$ e que $b' = b$ desde o início.

Portanto podemos escrever

$$q_{r+1}c = h_1 a + h_2 b,$$

para alguns $h_1, h_2 \in D_n$. Podemos supor que $h_1 h_2 \neq 0$. De fato, se por exemplo, $h_1 = 0$,

então $q_{r+1}c = h_2b$ *e como* $D_na \cap D_nb \neq 0$, *existem* $s, t \in D_n, st \neq 0$ *tais que* $sa = tb$. *Logo* $q_{r+1}c = (-s)a + (h_2 + t)b$. *Se* $(h_2 + t) \neq 0$, *então podemos tomar* $(-s)$ *em lugar de* h_1 *e* $(h_2 + t)$ *no lugar de* h_2. *Se* $h_2 + t = 0$, *podemos escrever* $q_{r+1}c = sa + (h_2 - t)b$ *e neste caso,* s *pode substituir* h_1 *e* $(h_2 - t)$ *pode substituir* h_2.

Além disso, como D_n *é um domínio de Ore à direita,* $h_1D_n \cap h_2D_n \neq 0$ *e portanto existem* g_1, g_2 *em* D_n, *ambos diferentes de zero, tais que*

$$h_1g_1 = -h_2g_2.$$

Por outro lado, usando o fato que D_n *é um domínio de Ore à esquerda, existem* s, t *ambos diferentes de zero em* D_n *tais que*

$$sq_{r+1}c = tb.$$

Pela proposição 4.6 acima com $q = q_{r+1} \in B_{r+1}, u = 0$ *e* $v = tg_2$, *implica que existem* $f \in D_n$ *e* $q_r \in B_r, q_r \neq 0$ *tais que* $q_r \in D_nq_{r+1} + D_n(tg_2f)$. *Digamos*

$$q_r = p_1q_{r+1} + p_2tg_2f,$$

para alguns p_1, p_2 *de* D_n. *Assim,*

$$q_rc = (p_1q_{r+1} + p_2tg_2f)c = p_1q_{r+1}c + p_2tg_2fc.$$

Seja $\xi = p_2sq_{r+1}c = p_2tb$. *Somando e subtraindo* ξ *obtemos:*

$$q_rc = (p_1q_{r+1}c - \xi) + (p_2tg_2fc + \xi) = (p_1q_{r+1}c - p_2sq_{r+1}c) + (p_2tg_2fc + p_2tb) =$$

$$(p_1 - p_2s)q_{r+1}c + p_2t(b + g_2fc) = (p_1 - p_2s)(h_1a + h_2b) + p_2t(b + g_2fc),$$

pois $q_{r+1}c = h_1a + h_2b$.

Seja $\eta = (p_1 - p_2s)h_1g_1fc = -(p_1 - p_2s)h_2g_2fc$. *Somando e subtraindo* η *temos:*

$$q_rc = (p_1 - p_2s)h_1a + \eta + (p_1 - p_2s)h_2b - \eta + p_2t(b + g_2fc) =$$

$$(p_1 - p_2s)h_1a + (p_1 - p_2s)h_1g_1fc + (p_1 - p_2s)h_2b + (p_1 - p_2s)h_2g_2fc + p_2t(b + g_2fc).$$

Finalmente,

$$q_rc = (p_1 - p_2s)h_1(a + g_1fc) + ((p_1 - p_2s)h_2 + p_2t)(b + g_2fc).$$

Tomando $d_r = g_1f$ *e* $e_r = g_2f$, *temos que* $q_rc \in D_n(a + d_rc) + D_n(b + e_rc)$. ■

Agora podemos demonstrar nosso primeiro resultado principal:

Teorema 4.8. *Todo ideal à esquerda de $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ pode ser gerado por dois elementos.*

Prova: *Como o anel $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ é um anel Noetheriano, é suficiente provar que dados $a, b, c \in E_n$ existem $d, e \in E_n$ tais que $c \in E_n(a + dc) + E_n(b + ec)$.*
Como $a, b, c \in E_n$, podemos escrever como somas finitas

$$a = \sum_\alpha \frac{p_\alpha}{q}\partial^\alpha, b = \sum_\beta \frac{p_\beta}{q}\partial^\beta, c = \sum_\gamma \frac{p_\gamma}{q}\partial^\gamma, \text{ onde } p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, q \in K[[x_1, \ldots, x_n]], q \neq 0.$$

Sejam $a' = qa, b' = qb, c' = qc \in D_n$. Logo, para $r = 0$ na proposição anterior, existem $q_0 \in K[[x_1, ..., x_n]], q_0 \neq 0$ e $d', e' \in D_n$ tais que

$$q_0c' \in D_n(a' + d'c') + D_n(b' + e'c'), \text{ isto é, } (q_0q)c \in D_n(qa + d'qc) + D_n(qb + e'qc).$$

Então existem $u', v' \in D_n$ tais que

$$(q_0q)c = u'(qa+d'qc)+v'(qb+e'qc) = u'q(a+dc)+v'q(b+ec), \text{ onde } d = q^{-1}d'q, e = q^{-1}e'q \in E_n.$$

Logo

$$c = u(a + dc) + v(b + ec), \text{ onde } u = (q_0q)^{-1}u', v = (q_0q)^{-1}v' \in E_n.$$

Em outras palavras $c \in E_n(a + dc) + E_n(b + ec)$, para alguns $d, e \in E_n$.

■

OBS: *O mesmo é válido para ideais a direita de $E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$.*

4.3 Os anéis $R_r(K)$

Para cada $0 \leq r \leq n - 1$, denotemos com C_r o anel de frações do anel $B_r(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_r\rangle$. Tal anel de frações existe pois $B_r(K)$ é um domínio de Ore. Mais ainda $C_r(K)$ está contido em $F_r((x_{r+1}, ..., x_n))$ o anel de frações de $D_r[[x_{r+1}, ..., x_n]]$ pois $B_r(K) \subset D_r[[x_{r+1}, ..., x_n]]$. Ambos $C_r(K)$ e $F_r((x_{r+1}, ..., x_n))$ são anéis de característica zero.

Cada elemento a do anel $F_r((x_{r+1}, ..., x_n))\langle\partial_{r+1}, ..., \partial_n\rangle$ pode ser escrito como uma soma finita $a = \sum_\alpha p_\alpha(x_{r+1}, ..., x_n)\partial^\alpha$, onde $p_\alpha(x_{r+1}, ..., x_n) \in F_r((x_{r+1}, ..., x_n))$ e $\partial^\alpha = \partial_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$. Agora consideremos o seguinte conjunto

$$R_r(K) := \{a \in F_r((x_{r+1}, ..., x_n))\langle\partial_{r+1}, ..., \partial_n\rangle, p_\alpha(x_{r+1}, ..., x_n) \in C_r(K) \text{ para todo } \alpha\}.$$

Não é difícil ver que $R_r(K)$ é um subanel de $F_r((x_{r+1},...,x_n))\langle\partial_{r+1},...,\partial_n\rangle$. Notemos que $D_n = K[[x_1,...,x_n]]\langle\partial_1,...,\partial_n\rangle$ está contido em $R_r(K)$ e que por definição $R_0(K) = E_n(K) = K((x_1,...,x_n))\langle\partial_1,...,\partial_n\rangle$.
Nas seguintes proposições, para simplificar a notação, escreveremos R_r, B_r e C_r no lugar de $R_r(K), B_r(K)$ e $C_r(K)$, respectivamente.

Proposição 4.9. *Seja r um inteiro não negativo tal que $0 \leq r \leq n-1$ e seja q um elemento diferente de zero de $B_{r+1} = K[[x_1,...,x_n]]\langle\partial_1,...,\partial_{r+1}\rangle$ e sejam u e v elementos de D_n tal que $v \neq 0$. Então existe algum f em D_n tal que*

$$R_r = R_r q + R_r(u + vf).$$

Prova: *Fixemos r tal que $0 \leq r \leq n-1$. Desde que $v \neq 0$, podemos escrever*

$$v = \delta_1 G_1 + \cdots + \delta_m G_m,$$

onde $\delta_1,...,\delta_m$ são elementos de $K[[x_1,...,x_n]]\langle\partial_{r+1}\rangle$ e $G_1,...,G_m$ são elementos de $D(r+1) := K[[x_1,...\hat{x_{r+1}}...,x_n]]\langle\partial_1,...,\hat{\partial_{r+1}},...,\partial_n\rangle$. De fato, v é uma soma finita da forma $v = \sum p_\alpha \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$, o que pode ser escrita como $v = \sum(p_\alpha\partial_{r+1}^{\alpha_{r+1}})(\partial_1^{\alpha_1}\cdots\hat{\partial_{r+1}^{\alpha_{r+1}}}\cdots\partial_n^{\alpha_n})$ com $p_\alpha\partial_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \in K[[x_1,...,x_n]]\langle\partial_{r+1}\rangle$ e $\partial_1^{\alpha_1}\cdots\hat{\partial_{r+1}^{\alpha_{r+1}}}\cdots\partial_n^{\alpha_n} \in D(r+1)$.

Agora observemos que $K[[x_1,...,x_n]] = (K[[x_1,...\hat{x_{r+1}},...,x_n]])[[x_{r+1}]]$ está contido em $F[[x_{r+1}]]$, onde F é o corpo de frações de $K[[x_1,...,\hat{x_{r+1}},...,x_n]]$. Logo, a característica de F é zero e δ_i é um elemento de $F[[x_{r+1}]]\langle\partial_{r+1}\rangle$, para todo $i = 1,...,m$.
Seja T o anel de frações do domínio de Ore $K[[x_1,...,\hat{x_{r+1}},...,x_n]]\langle\partial_1,...,\partial_r\rangle = \{q \in D_r[[x_{r+2},...,x_n]], q$ tém ordem finita em x_i para todo $1 \leq i \leq r\}$. Então T é um anel de divisão e F está contido em T.

Desde que v é diferente de zero, temos que G_i é diferente de zero 0 para algum $1 \leq i \leq m$. Como $D(r+1)$ é um anel simples, então o ideal bilateral gerado por $G_1,...,G_m$ é o todo o anel $D(r+1)$. Por tanto existem elementos $a_1,...,a_l$ e $b_1,...,b_l$ em $D(r+1)$ tal que $1 = \Sigma_{j=1}^m\Sigma_{\nu=1}^l b_\nu G_j a_\nu$ e por tanto $D(r+1) = \Sigma\Sigma D(r+1)G_j a_\nu$. Identificando $D(r+1)$ com um subanel de R_r concluimos que $R_r = \Sigma\Sigma R_r G_j a_\nu$.

Neste momento precisamos da seguinte

Afirmação: *Para cada $m-$upla $B_1,...,B_m$ em $D(r+1)$ existe algum $f \in Z[[x_{r+1}]]\langle\partial_{r+1}\rangle$ tal que*

$$R_r q + R_r u + R_r B_1 + \cdots + R_r B_m = R_r q + R_r(u + \delta_1 f B_1 + \cdots + \delta_m f B_m).$$

Com efeito, desde que q é um elemento diferente de zero em B_{r+1}, segue-se da proposição 4.3

que existe algum ρ diferente de zero em B_{r+1} tal que $\rho B_j \in D_n q$ para todo $j = 1, ..., m$ e também $\rho u \in D_n q$.

Seja $S = T((x_{r+1}))\langle \partial_{r+1} \rangle$, então $0 \neq \rho \in S$. Usando a proposição $3.10(i)$, temos que existe algum $f \in \mathbb{Z}[[x_{r+1}]]\langle \partial_{r+1} \rangle$ tal que $S^{(m+1)} = S^{(m+1)}\rho + S(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_1 f\varepsilon_m)$. Desde S é um subanel de R_r, temos que $R_r^{(m+1)} = R_r^{(m+1)}\rho + R_r(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_1 f\varepsilon_m)$.

Consideremos a R_r- aplicação linear $\pi : R_r^{(m+1)} \to R_r$ definida por $\pi(\varepsilon_0) = u$ e $\pi(\varepsilon_j) = B_j$ para cada $1 \leq j \leq m$. Então a imagem de π é $R_r u + R_r B_1 + ... + R_r B_m \subseteq R_r$; mas ρu, $\rho B_j \in D_n q$. Então temos que $\pi(\rho\varepsilon_0) = \rho\pi(\varepsilon_0) = \rho u \in R_r q$ e $\pi(\rho\varepsilon_j) = \rho\pi(\varepsilon_j) = \rho B_j \in R_r q$ para cada $1 \leq j \leq m$. Por tanto $\pi(R_r^{(m+1)}\rho) \subseteq R_r q$. Então

$$R_r q + R_r u + R_r B_1 + \cdots + R_r B_m = R_r q + \pi(R_r^{(m+1)})$$

$$\subseteq R_r q + \pi(R_r^{(m+1)}\rho + R_r(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_0 + \delta_m f\varepsilon_m))$$

$$\subseteq R_r q + \pi(R_r^{(m+1)}\rho) + R_r(u + \delta_1 f B_1 + \cdots + \delta_m f B_m)$$

$$\subseteq R_r q + R_r(u + \delta_1 f B_1 + \cdots + \delta_m f B_m)$$

e isto prova a afirmação pois a inclusão oposta é clara.

Se agora aplicamos a afirmação a $B_j = G_j a_1, j = 1, ..., m$. Então, existe algum $f_1 \in \mathbb{Z}[[x_{r+1}]]\langle \partial_{r+1} \rangle$ tal que

$$R_r q + R_r u + R_r G_1 a_1 + \cdots + R_r G_m a_1 = R_r q + R_r(u + \delta_1 f_1 G_1 a_1 + \cdots + \delta_m f_1 G_m a_1).$$

Desde que $f_1 \in \mathbb{Z}[[x_{r+1}]]\langle \partial_{r+1} \rangle$ e $G_j \in D(r+1)$ comutam, temos que

$$\delta_1 f_1 G_1 a_1 + \cdots + \delta_m f_1 G_m a_1 = \delta_1 G_1 f_1 a_1 + \cdots + \delta_m G_m f_1 a_1 = (\delta_1 G_1 a_1 + \cdots + \delta_m G_m) f_1 a_1 = v f_1 a_1,$$

pois $v = \delta_1 G_1 + \cdots + \delta_m G_m$. Por tanto,

$$R_r q + R_r u + R_r G_1 a_1 + \cdots + R_r G_m a_1 = R_r q + R_r(u + v f_1 a_1).$$

Agora aplicamos a afirmação, mas substituímos u por $u + v f_1 a_1$ and $B_j = G_j a_2, j = 1, ..., m$. Então existe $f_2 \in \mathbb{Z}[[x_{r+1}]]\langle \partial_{r+1} \rangle$ tal que $R_r q + R_r(u + v f_1 a_1) + \sum R_r G_j a_2 = R_r q + R_r(u + v f_1 a_1 + v f_2 a_2)$. Usando a equação previa temos que

$$R_r q + R_r u + \sum R_r G_j a_1 + \sum R_r G_j a_2 = R_r q + R_r(u + v f_1 a_1 + v f_2 a_2).$$

No seguinte passo aplicamos a afirmação com $B_j = G_j a_3, j = 1, ..., m$ e u substituído por

$u + vf_1a_1 + vf_2a_2$. Depois de l passos temos que

$$R_rq + R_r(u + vf_1a_1 + \cdots + vf_la_l) = R_rq + R_ru + \sum\sum R_rG_ja_\nu = R_r.$$

Por tanto a proposição segue-se com $f = f_1a_1 + \cdots + f_la_l$. ■

Agora podemos demonstrar a Proposição 4.6.

Prova da Proposição 4.6

Prova:

A proposição 4.9 implica a existência de algum $f \in D_n$ tal que $1 = sq + t(u + vf)$ para alguns elementos $s, t \in R_r$. Então s, t podem ser escritos como uma soma finita $s = \sum_\alpha p_\alpha(x_{r+1}, ..., x_n)\partial^\alpha, t = \sum_\beta p_\beta(x_{r+1}, ..., x_n)\partial^\beta$, onde cada $p_\alpha(x_{r+1}, ..., x_n)$ e cada $p_\beta(x_{r+1}, ..., x_n)$ são elementos de C_r, o anel de frações de B_r. Então $p_\alpha = b_\alpha^{-1}a_\alpha$ e $p_\beta = b_\beta^{-1}a_\beta$, para alguns $a_\alpha, b_\alpha, a_\beta, b_\beta \in B_r, b_\alpha \neq 0, b_\beta \neq 0$. Logo $s = \sum_\alpha b_\alpha^{-1}a_\alpha\partial^\alpha$ e $t = \sum_\beta b_\beta^{-1}a_\beta\partial^\beta$. Desde que B_r é um domínio de Ore, existe um múltiplo comum $q_r \in B_r$ dos b_α e dos b_β, ou seja, para todo α, β temos que $q_r \in B_ra_\beta$ e $q_r \in B_rb_\beta$. Logo $s = \sum_\alpha q_r^{-1}c_\alpha\partial^\alpha = q_r^{-1}(\sum_\alpha c_\alpha\partial^\alpha)$ e $t = \sum_\beta q_r^{-1}c_\beta\partial^\beta = q_r^{-1}(\sum_\beta c_\beta\partial^\beta)$, para alguns $c_\alpha, c_\beta \in B_r$. Portanto $s = q^{-1}s_1$ e $t = q^{-1}t_1$, onde $s_1 := \sum_\alpha c_\alpha\partial^\alpha \in D_n$ e $t_1 := \sum_\beta c_\beta\partial^\beta \in D_n$. Logo $1 = q_r^{-1}s_1q + q_r^{-1}t_1(u + vf)$. Em consequência temos que $q_r = s_1q + t_1(u + vf) \in D_nq + D_n(u + vf)$. ■

4.4 Os anéis $S_r(K)$

Seja K um corpo de característica zero e seja r um inteiro não negativo tal que $0 \leq r \leq n$. Introduzimos o anel $S_r(K) = K((x_1, ..., x_r))[[x_{r+1}, ..., x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$, que é um quociente parcial de $D_n(K) = K[[x_1, ..., x_n]]\langle\partial_1, ...\partial_n\rangle$. Se $v \in S_r$, então $v = q^{-1}a$, para algum $a \in D_n(K)$ e algum $q \in K[[x_1, ..., x_r]]$. Por definição $S_0(K) = D_n(K)$ e $S_n(K) = E_n(K) = K((x_1, ..., x_n))\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$. Quando o corpo K está fixado, usaremos a notação S_r no lugar de $S_r(K)$.

Proposição 4.10. *Seja $0 \leq r \leq n - 1$ e seja $q \in K[[x_1, ..., x_{r+1}]], q \neq 0$. Se $a_1, ..., a_t$ são elementos de $D_n(K)$. Então existe algum $\rho \in K[[x_1, ..., x_n]], \rho \neq 0$ tal que $\rho a_j \in D_nq$ para todo $1 \leq j \leq t$.*

Prova: *Cada a_j pode ser escrito como uma soma finita $\sum_\alpha p_{j\alpha}\partial^\alpha$, onde $p_{j\alpha} \in K[[x_1, ..., x_n]]$ e $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$. Escolhemos um inteiro positivo w suficientemente grande tal que $p_{j\alpha} = 0$, para todo $|\alpha| \geq w$.*

Como $K[[x_1, ..., x_n]]$ é um domínio de Ore e $q^w \in K[[x_1, ..., x_n]], q^w \neq 0$, então existe algum $\rho \in K[[x_1, ..., x_n]], \rho \neq 0$ tal que $\rho p_{j\alpha} \in K[[x_1, ..., x_n]]q^w$, para todo j e α.

Logo $\rho p_{j\alpha} = s_{j\alpha} q^w$ *para algum* $s_{j\alpha} \in K[[x_1, ..., x_n]]$. *Então temos que*

$$\rho a_j = \sum_{|\alpha|<w} (\rho p_{j\alpha})\partial^\alpha = \sum_{|\alpha|<w} (s_{j\alpha} q^w)\partial^\alpha = \sum_{|\alpha|<w} s_{j\alpha}(q^w \partial^\alpha).$$

Por outro lado, $q^w \partial^\alpha \in D_n q$ *se* $\mid \alpha \mid< w$. *De fato,* $q^w \partial_1^{\alpha_1} = \lambda_1 q^{w-\alpha_1}$, *para algum* $\lambda_1 \in D_n$. *Logo* $q^w \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} = \lambda_1 (q^{w-\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}) = \lambda_1 \lambda_2 q^{w-(\alpha_1+\alpha_2)}$, *para algum* $\lambda_2 \in D_n$. *Continuando assim temos que* $q^w \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) q^{w-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}$ *e como* $|\alpha| < w$, *temos que* $q^w \partial^\alpha \in D_n q$. *Isto completa a prova.*

■

Agora provaremos que todo ideal à esquerda do anel $S_{n-1} = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle \partial_1, ..., \partial_n \rangle$ *é 2-gerado. Isso será consequência da seguinte proposição:*

Proposição 4.11. *Sejam* a, b *e* c *elementos diferentes de zero de* D_n. *Então existem* $q_1 \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]], q_1 \neq 0$, $d, e \in D_n$ *tais que*

$$q_1 c \in D_n(a + dc) + D_n(b + ec).$$

Para demonstrar a proposição acima precisamos do seguinte resultado, cuja prova será adiada até aparte final da seção.

Proposição 4.12. *Seja* $q \in K[[x_1, ..., x_n]], q \neq 0$ *e sejam* $u, v \in D_n$ *tais que* $v \neq 0$. *Então existem* $q_1 \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]]$ *e* $f \in D_n$ *tais que*

$$q_1 \in D_n q + D_n(u + vf).$$

Prova da Proposição 4.11

Prova: *Pela Proposição 4.5, para* $r = 0$, *existem* $q_0 \in B_0(K) = K[[x_1, ..., x_n]], q_0 \neq 0$ *e* $d_0, e_0 \in D_n$ *tais que*

$$q_0 c \in D_n(a + d_0 c) + D_n(b + e_0 c).$$

Se repetirmos o argumento da prova da proposição 4.5 e fazemos uso da proposição 4.12 no lugar da proposição 4.6, obtemos $q_1 \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]]$ *e* $d, e \in D_n$ *tais que*

$$q_1 c \in D_n(a + dc) + D_n(b + ec).$$

■

Agora podemos demonstrar nosso segundo resultado principal :

Teorema 4.13. *Todo ideal à esquerda de* $S_{n-1} = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ *pode ser gerado por dois elementos.*

Prova: *Como o anel* $S_{n-1} = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ *é Noetheriano, é suficiente provar que dados* $a, b, c \in S_{n-1}$ *distintos de zero, existem* $d, e \in S_{n-1}$ *tais que*

$$c \in S_{n-1}(a + dc) + S_{n-1}(b + ec).$$

Como $a, b, c \in S_{n-1}$*, existe* $q' \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]]$ *tais que* $a' = q'a, b' = q'b, c' = q'c \in D_n$ *e* $a'b'c' \neq 0$*. Logo, pela proposição 4.11, existem* $q_1 \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]], q_1 \neq 0, d_1, e_1 \in D_n$ *tais que*

$$q_1c' \in D_n(a' + d_1c') + D_n(b' + e_1c').$$

Logo, como no teorema 4.8,

$$c \in S_{n-1}(a + dc) + S_{n-1}(b + ec),$$

para alguns $d, c \in D_n$*.*

■

Corolário 4.14. *Todo ideal à esquerda do anel* $D_1(K) = K[[x]]\langle\partial_x\rangle$ *pode ser gerado por dois elementos.*

Prova: *Tome* $n = 1$ *no Teorema anterior e observe que* $S_0(K) = K[[x_1]]\langle\partial_1\rangle = D_1(K)$*.*

■

Antes de demonstrar a Proposição 4.12, mostraremos o seguinte:

Proposição 4.15. *Seja* $q \in K[[x_1, ..., x_{n-1}], q \neq 0$ *e sejam* $u, v \in D_n$ *tal que* $v \neq 0$*. Então existe algum* $f \in D_n$ *tal que* $S_{n-1} = S_{n-1}q + S_{n-1}(u + vf)$*.*

Prova: *Desde que* $0 \neq v \in D_n$*, podemos escrever*

$$v = \delta_1G_1 + \cdots + \delta_mG_m,$$

onde $\delta_1, ..., \delta_m \in K[[x_1, .., x_n]]\langle\partial_n\rangle$ *e* $G_1, ..., G_m \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]]\langle\partial_1, ..., \partial_{n-1}\rangle$*.*

Se $F := K((x_1, ..., x_{n-1}))$ *é o corpo de frações de* $K[[x_1, ..., x_{n-1}]]$*, então* F *é um corpo de característica zero e* $\delta_i \in F[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$ *para todo* $i = 1, ..., m$*.*

Desde que $v \neq 0$*, temos que* $G_i \neq 0$*, para algum* $i = 1, ..., m$*. Como o anel* $D_{n-1}(K) = K[[x_1, ..., x_{n-1}]]\langle\partial_1, ..., \partial_{n-1}\rangle$ *é simples, então o ideal bilateral gerado por* $G_1, ..., G_m$ *é todo o anel* $D_{n-1}(K)$*. Portanto existem elementos* $a_1, ..., a_l$ *e* $b_1, ..., b_l$ *in* $D_{n-1}(K)$ *tais que* $1 =$

$\Sigma_{j=1}^{m}\Sigma_{\nu=1}^{l} b_\nu G_j a_\nu$ *e portanto* $D_{n-1}(K) = \Sigma\Sigma K[[x_1, ..., x_{n-1}]]D_{n-1}(K)G_j a_\nu$. *Identificando* $D_{n-1}(K)$ *com um subanel de* $S_{n-1} = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_1, ..., \partial_n\rangle$ *concluímos que* $S_{n-1} = \Sigma\Sigma S_{n-1}G_j a_\nu$.

Neste momento precisamos da seguinte

Afirmação: *Para cada* $m-$*upla* $B_1, ..., B_m$ *em* $D_{n-1}(K)$ *existe algum* $f \in Z[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$ *tal que*

$$S_{n-1}q + S_{n-1}u + S_{n-1}B_1 + \cdots + S_{n-1}B_m = S_{n-1}q + S_{n-1}(u + \delta_1 f B_1 + \cdots + \delta_m f B_m).$$

Com efeito, desde que q *é um elemento diferente de zero de* $K[[x_1, ..., x_{n-1}]]$, *segue-se da proposição 4.10 que existe algum* $\rho \in K[[x_1, ..., x_n]], \rho \neq 0$, *tal que* $\rho B_j \in D_n q$ *para todo* $j = 1, ..., m$ *e também* $\rho u \in D_n q$

Seja $D = F[[x_n]]\langle\partial_n\rangle = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$, *então* $0 \neq \rho \in D$. *Usando a proposição* $3.10(ii)$ *temos que existe algum* $f \in \mathbb{Z}[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$ *tal que*

$$D^{m+1} = D^{m+1}\rho + D(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_1 f\varepsilon_m).$$

Desde que D *é um subanel de* S_{n-1}, *temos que*

$$S_{n-1}^{m+1} = S_{n-1}^{m+1}\rho + S_{n-1}(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \delta_1 f\varepsilon_m).$$

Consideremos a $S_{n-1}-$ *aplicação linear* $\pi : S_{n-1}^{(m+1)} \to S_{n-1}$ *definida por* $\pi(\varepsilon_0) = u$ *e* $\pi(\varepsilon_j) = B_j$ *para cada* $1 \leq j \leq m$. *Então a imagem de* π *é* $S_{n-1}u + S_{n-1}B_1 + ... + S_{n-1}B_m \subseteq S_{n-1}$; *mas* ρu, $\rho B_j \in D_n q$. *Então temos que* $\pi(\rho\varepsilon_0) = \rho\pi(\varepsilon_0) = \rho u \in S_{n-1}q$ *e* $\pi(\rho\varepsilon_j) = \rho\pi(\varepsilon_j) = \rho B_j \in S_{n-1}q$ *para cada* $1 \leq j \leq m$. *Portanto* $\pi(R_r^{(m+1)}\rho) \subseteq S_{n-1}q$. *Logo*

$$S_{n-1}q + S_{n-1}u + S_{n-1}B_1 + \cdots + S_{n-1}B_m = S_{n-1}q + \pi(S_{n-1}^{(m+1)})$$

$$\subseteq S_{n-1}q + \pi(S_{n-1}^{(m+1)}\rho + S_{n-1}(\varepsilon_0 + \delta_1 f\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_0 + \delta_m f\varepsilon_m))$$

$$\subseteq S_{n-1}q + \pi(S_{n-1}^{(m+1)}\rho) + S_{n-1}(u + \delta_1 f B_1 + \cdots + \delta_m f B_m)$$

$$\subseteq S_{n-1}q + S_{n-1}(u + \delta_1 f B_1 + \cdots + \delta_m f B_m)$$

e isto prova a afirmação pois a inclusão oposta é clara.

Se agora aplicamos a afirmação a $B_j = G_j a_1, j = 1, ..., m$. *Então, existe algum* $f_1 \in \mathbb{Z}[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$ *tal que*

$$S_{n-1}q + S_{n-1}u + S_{n-1}G_1 a_1 + \cdots + S_1 G_m a_1 = S_{n-1}q + S_{n-1}(u + \delta_1 f_1 G_1 a_1 + \cdots + \delta_m f_1 G_m a_1).$$

Desde que $f_1 \in \mathbb{Z}[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$ *e* $G_j \in D_{n-1}$ *comutam, temos que*

$$\delta_1 f_1 G_1 a_1 + \cdots + \delta_m f_1 G_m a_1 = \delta_1 G_1 f_1 a_1 + \cdots + \delta_m G_m f_1 a_1 = (\delta_1 G_1 + \cdots + \delta_m G_m) f_1 = v f_1 a_1,$$

pois $v = \delta_1 G_1 + \cdots + \delta_m G_m$. *Portanto*

$$S_{n-1}q + S_{n-1}u + S_{n-1}G_1 a_1 + \cdots + S_1 G_m a_1 = S_1 q + S_1(u + v f_1 a_1).$$

Agora aplicamos a afirmação, mas substituímos u *por* $u + v f_1 a_1$ *e* $B_j = G_j a_2, j = 1, ..., m$. *Então existe* $f_2 \in \mathbb{Z}[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$ *tal que*

$$S_{n-1}q + S_{n-1}(u + v f_1 a_1) + \sum S_{n-1} G_j a_2 = S_{n-1}q + S_{n-1}(u + v f_1 a_1 + v f_2 a_2).$$

Usando a equação previa temos que

$$S_{n-1}q + S_{n-1}u + \sum S_{n-1} G_j a_1 + \sum S_{n-1} G_j a_2 = S_{n-1}q + S_{n-1}(u + v f_1 a_1 + v f_2 a_2).$$

No seguinte passo aplicamos a afirmação com $B_j = G_j a_3, j = 1, ..., m$ *e* u *substituído por* $u + v f_1 a_1 + v f_2 a_2$. *Depois de* l *passos temos que*

$$S_{n-1}q + S_{n-1}(u + v f_1 a_1 + \cdots + v f_l a_l) = S_{n-1}q + S_{n-1}u + \sum\sum S_{n-1} G_j a_\nu = S_{n-1}.$$

Portanto a proposição segue-se com $f = f_1 a_1 + \cdots + f_l a_l$.

■

Agora provemos a proposição 4.12

Prova da Proposição 4.12

Prova: *A proposição 4.15 implica que existe algum* $f \in D_n$ *tal que* $1 = sq + t(u + vf)$, *para alguns* $s, t \in S_{n_1} = K((x_1, ..., x_{n-1}))[[x_n]]\langle\partial_n\rangle$. *Como* S_{n-1} *é um quociente parcial de* D_n, *existe* $q \in K[[x_1, ..., x_{n-1}]], q \neq 0$ *tal que* $q_1 s = a_1 \in D_n$ *e* $q_1 t = a_2 \in D_n$. *Portanto* $q_1 = a_1 q + a_2(u + vf) \in D_n q + D_n(u + vf)$.

■

Referências Bibliográficas

[1] *J.-E. Björk.* Rings of differential operators, *volume 21 of* North-Holland Mathematical Library. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.*

[2] *P. M. Cohn.* Skew fields, *volume 57 of* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. *Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Theory of general division rings.*

[3] *S. C. Coutinho.* A primer of algebraic D-modules, *volume 33 of* London Mathematical Society Student Texts. *Cambridge University Press, Cambridge, 1995.*

[4] *S. C. Coutinho and M. P. Holland. Module structure of rings of differential operators.* Proc. London Math. Soc. (3), *57(3):417–432, 1988.*

[5] *K. R. Goodearl and R. B. Warfield, Jr.* An introduction to noncommutative Noetherian rings, *volume 61 of* London Mathematical Society Student Texts. *Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004.*

[6] *M. Granger and P. Maisonobe. A basic course on differential modules. In* Éléments de la théorie des systèmes différentiels. D-modules cohérents et holonomes (Nice, 1990), *volume 45 of* Travaux en Cours, *pages 103–168. Hermann, Paris, 1993.*

[7] *A. Hillebrand and W. Schmale. Towards an effective version of a theorem of Stafford.* J. Symbolic Comput., *32(6):699–716, 2001. Effective methods in rings of differential operators.*

[8] *T. Y. Lam.* Lectures on modules and rings, *volume 189 of* Graduate Texts in Mathematics. *Springer-Verlag, New York, 1999.*

[9] *S. Lang.* Algebra, *volume 211 of* Graduate Texts in Mathematics. *Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.*

[10] *A. Leykin. Algorithmic proofs of two theorems of Stafford.* J. Symbolic Comput., *38(6):1535–1550, 2004.*

[11] *J. C. McConnell and J. C. Robson.* Noncommutative Noetherian rings, *volume 30 of* Graduate Studies in Mathematics. *American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001. With the cooperation of L. W. Small.*

[12] *J. T. Stafford. Module structure of Weyl algebras.* J. London Math. Soc. (2), *18(3):429–442, 1978.*