Espectro de geradores de dinâmica em EDPs estocásticas

Samanta Santos Avelino Silva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Samanta Santos Avelino Silva

Espectro de geradores de dinâmica em EDPs estocásticas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga

USP – São Carlos
Dezembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586e Silva, Samanta Santos Avelino
Espectro de geradores de dinâmica em EDPs
estocásticas / Samanta Santos Avelino Silva;
orientador Paulo Afonso Faria da Veiga. -- São
Carlos, 2015.
106 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Equações diferenciais estocásticas. 2. Teoria
quântica de campos. 3. Análise espectral. I. da
Veiga, Paulo Afonso Faria , orient. II. Título.

Samanta Santos Avelino Silva

Spectrum of dynamic generators in stochastic PDEs

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga

USP – São Carlos
December 2015

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, ao meu orientador, Prof. Paulo Afonso Faria da Veiga. Sua dedicação, aconselhamento e paciência durante meu mestrado foram imprescindíveis para a conclusão desta dissertação.

Minha gratidão os colegas de trabalho, pelo companheirismo e discussões sempre frutíferas, e à minha família, fonte de incentivo e e amparo emocional. Dentre estes, dedico carinho e agradecimento especial ao meu amigo, namorado e colega de trabalho, Felipe Franco, que forneceu apoio incondicional em todas as etapas desse mestrado.

Aos professores Alexsandro Gallo e Daniel Smania, obrigada pela participação como membros da banca e pelas valiosas sugestões e observações fornecidas para a conclusão deste trabalho.

Por fim, agradeço o apoio financeiro concedido pela CAPES e a todos os professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação pelo aprendizado proporcionado.

Resumo

Neste trabalho, analisamos uma equação diferencial estocástica (EDE) do tipo Landau-Ginzburg: $d\varphi = A\varphi + d\eta(t, \vec{x})$, onde A é uma função definida no espaço das variáveis aleatórias $\varphi(x, t)$ com $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$. Toda a dissertação segue de perto as ideias encontradas no artigo [FdVOPS01].

Utilizando a teoria de análise estocástica (mais precisamente, a fórmula de Feynman-Kac) associamos a EDE acima com uma equação de evolução. Desta forma nosso estudo é resumido ao problema de determinação do espectro do gerador de um semigrupo de evolução. Para realizar esta análise utilizamos técnicas desenvolvidas na teoria quântica de campos.

A esquematização do presente texto se dá da seguinte forma: Na introdução formulamos o nosso problema detalhadamente, fornecendo os aspectos da análise estocástica e da teoria de campos envolvidas. Também enunciamos um teorema que resume as propriedades espectrais que pretendemos obter.

Nos Capítulos 2 e 3 fornecemos o aparato conceitual necessário para o desenvolvimento do problema inicial. Ainda no Capítulo 3, fazemos uma revisão rápida sobre um problema bem conhecido da mecânica quântica (modelo φ^4), afim de estabelecer familiaridade com esta teoria.

No Capítulo 4, inicialmente, nos restringimos à determinação de propriedades espectrais para o nosso problema no volume finito, e depois realizamos um procedimento chamado expansão em *cluster* para passar ao estudo do problema no volume infinito.

No Capítulo 5 definimos o operador de Bethe-Salpeter, para então, no Capítulo 6, determinar propriedades do núcleo deste operador. Por fim, estas informações são utilizadas no Capítulo 7 para obtermos a caracterização espectral desejada.

Palavras chave: *Equações diferenciais estocásticas, Teoria quântica de campos, Análise espectral.*

Abstract

Following [FdVOPS01], we study a stochastic Landau-Ginzburg differential equation of the form

$$d\varphi = A\varphi + d\eta(t, \vec{x}),$$

where A is a function defined on the space of random variables $\phi(x, t)$, with $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$.

Using the stochastic analysis theory (more precisely, the Feynman-Kac formula) we are able to associate this stochastic differential equation (EDE) with an evolution equation. In this way, our study is resumed to the problem of determine the spectrum of the generator of an evolution semigroup. To do this, we use techniques developed in the quantum field theory.

This work is organized as follows. In the Introduction we formulate our problem in detail, providing the aspects of the stochastic analysis and field theory that are involved. We also enunciate a theorem that resumes the spectral properties that we want to achieve.

Chapters 2 and 3 are meant to provide the conceptual tools that are needed to the development of the initial problem. Yet in Chapter 3, we do a quick review of a known problem in quantum field (the model φ^4), intending establish familiarity with this theory.

Chapter 4 is restricted initially to the determination of spectral properties of our problem in the finite volume $[-T, T] \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$, and then we perform the cluster expansion in order to formulate the problem in infinite volume $[-T, T] \times \mathbb{Z}^d$.

In Chapter 5 we define the Bethe-Salpeter operator and, in Chapter 6, we determine some properties of the kernel of this operator. This informations are used in Chapter 7 to obtain the desired spectral characterization.

Keywords: *Stochastic differential equations, Quantum field theory, Spectral analysis.*

Conteúdo

1	Introdução	11
2	Preliminares de análise estocástica	17
2.1	Introdução à teoria de probabilidade	17
2.2	Movimento Browniano	24
2.3	Construção da integral de Itô	30
2.4	Equações diferenciais estocásticas	37
2.5	Equações de difusão e fórmula de Feynman-Kac	40
2.6	A fórmula de Feynman-Kac aplicada ao nosso problema	43
3	Aspectos da Teoria Quântica de Campos	45
3.1	Motivação	45
3.2	Integrais Gaussianas e variáveis aleatórias	49
3.3	Teoria de campos na rede	50
3.3.1	Discretização	51
3.3.2	A função de partição e correlações	54
3.4	Campos livres	54
3.5	Propriedades da covariância livre	56
4	Funções de correlação	59
4.1	As funções de correlação no volume finito	59
4.2	O limite termodinâmico das funções de correlação	65
4.2.1	A expansão de Mayer	66
4.2.2	Expansão da medida μ_{C^*}	67
4.2.3	Expansão completa	71

Conteúdo	9
<hr/>	
5 Transformadas de Fourier e equação de Bethe-Salpeter	73
5.1 Equação de Bethe-Salpeter	78
6 Análise dos núcleos de Bethe-Salpeter e da função de dois pontos	81
7 Estados ligados e partículas livres	93
7.1 A função de dois pontos	94
7.2 A aproximação “ladder”	97
8 Considerações finais	101
Bibliografia	103

Introdução

Uma equação diferencial estocástica (EDE) é uma equação diferencial em que uma ou mais variáveis é um processo estocástico, resultando em uma solução que também é um processo estocástico. EDE's são usadas para modelar fenômenos dinâmicos descritos por equações diferenciais que sejam perturbadas por flutuações aleatórias; como por exemplo, preços de ações na bolsa de valores, previsões meteorológicas, estudo das interações entre os componentes de um sistema biológico e sistemas físicos sujeitos a flutuações térmicas.

Geralmente, uma EDE incorpora um termo aleatório chamado de *ruído branco* que pode ser interpretado como uma derivação do Movimento Browniano (ou processo de Wiener), no entanto devemos mencionar que EDE's podem conter outros tipos de flutuações aleatórias, como por exemplo os “processos de salto” (do inglês *jump process*). A construção detalhada do Movimento Browniano, assim como uma definição para equações diferenciais estocásticas podem ser encontradas no segundo capítulo desta dissertação.

Em física, EDE's são usualmente chamadas de “equações de Langevin”. Nesta dissertação estaremos interessados na equação de Landau-Ginzburg que modela o comportamento local de uma dinâmica puramente de relaxação, sem lei de conservação. Tal equação é uma versão para o modelo de Ising em que o spin é invertido a cada instante. Sua expressão, veja [Spo91] e [HH77], é dada por

$$d\varphi(t, \vec{x}) = -\frac{1}{2} \Delta S_{\Lambda}(\varphi(t, \vec{x})) dt + d\eta(t, \vec{x}); \quad \varphi(0, \vec{x}) = \psi(\vec{x}), \quad (1.1)$$

onde $\varphi(t, x)$ são variáveis aleatórias, com $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$; $\Delta S_{\Lambda} = \delta S_{\Lambda} / \delta \varphi$ é a derivada

funcional $S_\Lambda(\varphi)$ na direção da distribuição Delta de Dirac δ_x^1 , sendo

$$S_\Lambda(\varphi(t, \vec{x})) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^d (\varphi(t, \vec{x} + \vec{e}_i) - \varphi(t, \vec{x}))^2 + m^2 \varphi(t, \vec{x})^2 \right] + \lambda \mathcal{P}(\varphi(t, \vec{x})) \right\}, \quad (1.2)$$

onde $\vec{e}_i$ é o vetor unitário ao longo da i -ésima coordenada; $m > 0$; $\lambda \geq 0$ e $\mathcal{P}$ é um polinômio par de grau $2N$, limitado inferiormente e com potência quártica no monômio de menor grau. A família dos processos $\{\eta(t, \vec{x})\}$ possui esperança e variância dadas por

$$E(\eta(t, \vec{x})) = 0; \quad E(\eta(t, \vec{x})\eta(t', \vec{y})) = \delta(t - t')\delta_{\vec{x}, \vec{y}}.$$

Para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, as soluções fracas $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ da equação (1.1) podem ser interpretadas como variáveis de spin contínuas e ilimitadas (são os campos da teoria de mecânica quântica associada à EDP acima), com $\vec{x}$ em uma rede (ou reticulado) toroidal $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. O caso limite $[-T, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$, chamado limite termodinâmico, será considerado posteriormente.

Conforme pode ser visto em [JLS96, Spo91], a equação (1.1) define um processo de Markov associado a uma medida invariante μ que coincide com a distribuição de probabilidade de Gibbs

$$d\mu = e^{-S_\Lambda(\varphi)} d\varphi / Z,$$

onde Z é uma normalização para μ , denominada *função de partição*.

A evolução temporal de uma função f da configuração de spin $\varphi(\vec{x})$ é definida como

$$f_t(\phi) = E(f(\varphi(t))), \quad (1.3)$$

onde $\phi(\vec{x}) = \varphi(t = 0)$ é uma condição inicial e f_t é determinado pelo semigrupo fortemente contínuo de Markov e^{-tH_Λ} ; seu gerador H_Λ é Hermitiano e positivo definido no espaço de Hilbert $L^2(d\mu, \Lambda)$, e é dado por

$$H_\Lambda f = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi(\vec{x})^2} - \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial f}{\partial \varphi(\vec{x})} \right], \quad (1.4)$$

onde $f = f(\{\varphi(\vec{x})\})$.

É fácil notar que zero é um auto-valor deste operador e que $f \equiv 1$ é uma auto-função correspondente. Também veremos adiante que H_Λ é auto-adjunto e unitariamente

¹A **derivada funcional direcional** de um funcional $A(\varphi)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (distribuições em $\mathbb{R}^d$) na direção de ψ é definida por

$$(D_\psi A)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\varphi + \varepsilon \psi) - A(\varphi)}{\varepsilon},$$

onde $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. No caso especial em que $\psi \equiv \delta_x$ usamos a notação $\frac{\delta}{\delta \varphi(x)} A(\varphi) \equiv D_{\delta_x} A(\varphi)$.

equivalente a um operador do tipo Schrödinger com um potencial que cresce para infinito em cada coordenada, portanto podemos concluir que o espectro de H_Λ é discreto (veja [SR81]).

Para determinar o espectro de H_Λ , iremos estabelecer uma representação de quase-partícula para tal operador. Para entender a dinâmica neste contexto, usaremos os geradores do grupo de translações espaciais no toro para definir os operadores auto-adjuntos de momento $\vec{P}_\Lambda$, que comutam com o operador de energia H_Λ . Chamaremos o espectro conjunto de $(H_\Lambda, \vec{P}_\Lambda)$ de *espectro $e - m$ de energia-momento*. Visto que $\vec{P}_\Lambda 1 = 0$, segue que $(0, \vec{0})$ é um ponto do espectro $e - m$, chamado **estado fundamental** (ou vácuo). Um ponto do espectro $e - m$ será denotado por $(E, \vec{p})$, sendo $\vec{p}$ pertencente ao toro d -

dimensional $\mathbf{T}^d := \overbrace{[-\pi, \pi) \times \cdots \times [-\pi, \pi)}^{d\text{-vezes}}$ e $E \geq 0$; além disso se $\vec{p} = \vec{0}$, diremos que $(E, \vec{0})$ é um ponto do **espectro de massa**, em analogia com o encontrado na cinemática de uma partícula relativística (onde temos $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4$). O espectro de energia-momento, de acordo com (1.3), determina o comportamento assintótico no tempo das soluções de (1.1).

Com o intuito de obter os resultados espectrais desejados, utilizaremos a formula de Feynman-Kac para determinar representações integrais do semigrupo de evolução $e^{-H_\Lambda t}$, $t \in [0, \infty)$, e do grupo unitário de translações espaciais $e^{i\vec{P}_\Lambda \cdot \vec{x}}$, $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$. Isto nos permitirá fazer a transição do nosso problema estocástico para um análogo que pode ser tratado no âmbito de uma teoria quântica Euclidiana de campos (com coordenadas espaciais discretas e parte temporal contínua). Vamos nos concentrar na obtenção do espectro $(H, \vec{P})$ acima do estado fundamental e abaixo de um certo limiar de energia (o qual nos referiremos por *limiar de energia de duas partículas livres*).

Para o acoplamento $\lambda = 0$ em (1.2), a interação é ausente e o espectro $e - m$ pode ser determinado explicitamente e consiste em uma curva de dispersão isolada

$$E_0(\vec{p}) = \sum_{j=1}^d 2(1 - \cos p^j) + m^2/2; \quad (1.5)$$

a qual iremos nos referir como sendo o espectro associado ao estado de uma partícula livre (sem interações). Acima deste estado está uma banda espectral finita e eventualmente um espectro contínuo, começando com massa m^2 (chamado **limiar de duas partículas**), que é associado ao espectro de duas ou mais partículas. Para $\lambda > 0$, pode existir um espectro de massa abaixo do limiar de duas partículas, o qual chamaremos de **espectro de estado ligado de duas partículas**. Observamos que para p suficientemente pequeno, $2(1 - \cos p^j)$ tem o mesmo comportamento de $(p^j)^2$ e $m/\sqrt{2}$ pode ser interpretada como massa de repouso.

Determinaremos o espectro $e - m$ através das propriedades analíticas das transformadas de Fourier das funções de correlação da teoria quântica de campos relacionada com o sistema dinâmico original, fazendo uso da expansão em *cluster* (aglomerados), e através da equação de Bethe-Salpeter. Mostraremos a existência de estados isolados de uma partícula. Já o $e - m$ espectro acima do estado de uma partícula é determinado analisando a equação de Bethe-Salpeter, adaptando métodos usualmente empregados na teoria quântica de campos relativística para tratar a natureza discreta do espaço e a não localidade das interações.

Voltando à equação (1.2); consideraremos a interação polinomial $\mathcal{P}$ da seguinte forma

$$\mathcal{P}(\varphi) = \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{(2n)!} : \varphi^{2n} : , \quad (1.6)$$

onde $a_N > 0$ e $:\cdot:$ é a ordem de Wick (definida pela geratriz dos polinômios de Hermite) com respeito a covariância Gaussiana não perturbada, dada por

$$: \varphi^n : = \left. \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{\alpha\varphi - \frac{1}{2}C_0\alpha^2} \right|_{\alpha=0} , \quad (1.7)$$

onde C_0 é a covariância em pontos coincidentes:

$$C_0(x, y) = \left[-\frac{d^2}{dt^2} + \left(-\Delta + \frac{m^2}{2} \right)^2 \right]^{-1} (x, y). \quad (1.8)$$

Aqui, Δ é o Laplaciano na rede $\mathbb{Z}^d$:

$$(\Delta\varphi)(\vec{x}) = 2d\varphi(\vec{x}) - \sum_{|\vec{x}-\vec{y}|=1} \varphi(\vec{y}). \quad (1.9)$$

Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [FdVOPS01]. Nosso objetivo nesta dissertação será fornecer uma releitura detalhada das demonstrações realizadas neste artigo, além de fornecer o embasamento teórico necessário para que se compreenda a utilização das ferramentas matemáticas necessárias.

Os principais resultados que discutiremos podem ser resumidos no teorema a seguir.

Teorema 1.0.1. *Acerca da parte inferior do espectro de energia-momento (espectro abaixo do limiar de duas partículas) do modelo estocástico de Ginzburg-Landau, assumindo $m > 0$ suficientemente grande e $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, temos*

- (i) Para $d = 1, 2, \dots$, existe uma curva de dispersão isolada $E_\lambda(\vec{p})$, $\vec{p} \in \mathbf{T}^d$, que corresponde ao espectro de uma única partícula com massa $M_\lambda \equiv M(\lambda, m, d) =$

$m^2/2 + \mathcal{O}(\lambda^2) > 0$, e $E_\lambda(\vec{p}) > E_\lambda(\vec{0}) = M_\lambda$, $\vec{p} \neq 0$, com $E_\lambda(\vec{p})$ real analítica em cada componente de $\vec{p}$ e

$$\sup_{\vec{p} \in \mathbf{T}^d} \left| E_\lambda(\vec{p}) - E_\lambda(\vec{0}) \right| = 2d + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

(ii) Para $d < 3$ e $a_2 < 0$, existe um único estado de duas partículas ligadas, com massa $M_b \in (0, 2M_\lambda)$ dada por

$$M_b = \begin{cases} 2M_\lambda - \frac{9a_2^2\lambda^2}{4m^4}(1 + \mathcal{O}(\lambda)), & \text{se } d = 1 \\ 2M_\lambda - \exp\left[-\frac{4\pi m^2}{3|a_2|\lambda}(1 + \mathcal{O}(\lambda))\right], & \text{se } d = 2 \end{cases}.$$

Nos outros casos, $a_2 < 0$ e $d \geq 3$ ou $a_2 \geq 0$ e $d \in \mathbb{N}$ qualquer, não existe estado ligado de duas partículas em $(0, 2M_\lambda)$.

Assumiremos m e λ como na hipótese do Teorema 1.0.1 em todos os resultados daqui para frente.

Preliminares de análise estocástica

Neste capítulo iremos fornecer a teoria de análise estocástica necessária para a obtenção da fórmula de Feynman-Kac.

Tal fórmula será uma das principais ferramentas no estabelecimento dos nossos resultados: veremos que ela é capaz de estabelecer uma relação entre equações diferenciais parciais (EDP's) elípticas e processos estocásticos. Ela oferece um método para resolver tais EDP's pela representação em caminhos aleatórios de um processo estocástico. Reciprocamente, uma classe importante de esperanças de processos aleatórios podem ser calculados por métodos determinísticos.

2.1 Introdução à teoria de probabilidade

O campo da teoria de probabilidade possui seu próprio vocabulário, o que é, em parte, devido ao legado do seu desenvolvimento antes que a conexão com teoria da medida fosse explicitada. Sendo assim, assumindo o conhecimento de conceitos e resultados elementares em teoria da medida, começaremos apresentando um breve dicionário do dialeto “probabilista”.

Além dos termos referidos acima, os textos em teoria de probabilidade comumente utilizam uma notação diferente daquela usada em textos de análise. Por exemplo, $\{\omega \in \Lambda : X(\omega) > a\}$ e $P(\{\omega \in \Lambda : X(\omega) > a\})$ são usualmente escritos como $\{X > a\}$ e $P(X > a)$.

Na maior parte deste capítulo iremos adotar a terminologia probabilística.

Termo analítico	Termo “probabilista”
$(\sigma-)$ álgebra	Espaço amostral ou espaço de eventos
Espaço de medida $(\mathbf{X}, \mathcal{M}, \mu)$ com $\mu(\mathbf{X}) = 1$	Espaço de probabilidade $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$
Conjunto mensurável	Evento
Medida do conjunto $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A)$	Probabilidade do evento $A \in \mathcal{F}$, $P(A)$
Função mensurável f a valores reais	Variável aleatória X
Integral de f , $\int f d\mu$	Esperança ou média de X , $E[X]$
Convergência em medida	Convergência em probabilidade
Quase em todo ponto (q.t.p.)	Quase sempre (q.s.)
Medida de probabilidade de Borel em $\mathbb{R}$	Distribuição
Transformada de Fourier de uma medida	Função característica de uma distribuição
Função característica	Função indicadora

A partir de agora, apresentaremos algumas definições que não possuem equivalente na teoria de análise clássica. Também enunciaremos alguns resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [Fol99].

Definição 2.1.1. Se X é uma variável aleatória no espaço de probabilidade $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$, então sua **variância** $\sigma^2(X)$ e **desvio padrão** $\sigma(X)$ são definidos por

$$\sigma^2(X) = \inf_{a \in \mathbb{R}} E[(X - a)^2] \quad \text{e} \quad \sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}.$$

Se $X \notin L^2(P)$, então $\sigma^2(X) = \infty$. Se $X \in L^2$, então $E[(X - a)^2] = E[X^2] - 2aE[X] + a^2$ é uma função quadrática de a ($a \in \mathbb{R}$) cujo mínimo ocorre em $a = E[X]$; logo

$$\sigma^2(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2, \quad \text{para } X \in L^2.$$

Intuitivamente, podemos pensar em $\sigma(X)$ como sendo a medida de quão amplamente X se desvia do seu valor médio $E[X]$.

Definição 2.1.2. Seja $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $(\Lambda', \mathcal{F}')$ um outro espaço mensurável. Se $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ uma função $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -mensurável, então a medida P induz a **medida imagem** P_ϕ em $\mathcal{F}'$ definida por

$$P_\phi(F) = P(\phi^{-1}(F)),$$

onde $F \in \mathcal{F}'$.

Que P_ϕ é realmente uma medida, segue do fato que ϕ^{-1} comuta com uniões e interseções de conjuntos na σ -álgebra $\mathcal{F}'$.

Proposição 2.1.3. Com a notação acima, se $f : \Lambda' \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então

$$\int_{\Lambda'} f dP_\phi = \int_{\Lambda} (f \circ \phi) dP,$$

sempre que as integrais estão bem definidas.

Definição 2.1.4. Se X é uma variável aleatória em Λ , então P_X é uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$, chamada **distribuição** de X , e a função

$$F(t) = P_X((-\infty, t]) = P(X \leq t),$$

que determina P_X , é chamada **função distribuição** de X .

Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de variáveis aleatórias tal que $P_{X_\alpha} \equiv P_{X_\beta}$, para todo $\alpha, \beta \in A$, então dizemos que as variáveis aleatórias X_α 's são **identicamente distribuídas**.

De forma mais geral, dada uma sequência finita $X_1, \dots, X_n$ de variáveis aleatórias, tome a aplicação $(X_1, \dots, X_n)$ de Λ em $\mathbb{R}^n$. Então a medida $P_{(X_1, \dots, X_n)}$ em $\mathbb{R}^n$ é chamada **distribuição conjunta** de $X_1, \dots, X_n$.

Observação. A partir de agora uma função mensurável de $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ em $\mathbb{R}^n$ também será chamada de variável aleatória.

Note que, da proposição anterior, se X e Y são variáveis aleatórias de Λ em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$E[X] = \int_{\Lambda} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} t dP_X(t),$$

$$\sigma^2(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{\Lambda} (X(\omega) - E[X])^2 dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} (t - E[X])^2 dP_X(t)$$

e

$$E[X + Y] = \int_{\Lambda} (X + Y)(\omega) dP(\omega) = \int_{\Lambda} f \circ (X, Y)(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (t + s) dP_{(X, Y)}(t, s);$$

sendo que na última igualdade $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $(t, s) \mapsto t + s$.

Na verdade, dada uma medida de probabilidade de Borel (ou Lebesgue) μ em $\mathbb{R}^n$, podemos simplesmente falar da **média** $\bar{\mu}$ e **variância** σ^2 de μ ,

$$\bar{\mu} = \int t d\mu(t), \quad \sigma^2 = \int (t - \bar{\mu})^2 d\mu(t),$$

que são a média e a variância de qualquer variável aleatória com distribuição μ .

Definição 2.1.5. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória tal que $E[|X|] < \infty$. Se $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ é uma σ -álgebra, então a **esperança condicional** de X dada $\mathcal{H}$, denotada por $E[X|\mathcal{H}]$, é a única função de Ω em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

- (i) $E[X|\mathcal{H}]$ é $\mathcal{H}$ -mensurável.
- (ii) $\int_H E[X|\mathcal{H}] dP = \int_H X dP$, para todo $H \in \mathcal{H}$.

A existência e unicidade de $E[X|\mathcal{H}]$ é consequência do teorema de Radon-Nikodyn. Valem as seguintes propriedades para a esperança condicional:

Proposição 2.1.6. *Suponha que $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ são variáveis aleatórias satisfazendo $E[|X|], E[|Y|] < \infty$ e sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então*

1. $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$
2. $E[E[X|\mathcal{H}]] = E[X]$
3. $E[X|\mathcal{H}] = X$ se X é $\mathcal{H}$ -mensurável.
4. $E[Y \cdot X|\mathcal{H}] = Y \cdot E[X|\mathcal{H}]$ se Y é $\mathcal{H}$ -mensurável, onde $\cdot$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

A seguir, apresentaremos a definição de independência estocástica. A partir deste importante conceito é que a teoria de probabilidade e a teoria da medida se tornam propriamente distinguíveis. Para motivar esta ideia, considere o espaço de probabilidade $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ e um evento F tal que $P(F) > 0$. Então a função $P_F(G) := P(F \cap G)/P(F)$ é uma medida de probabilidade em Λ , chamada **probabilidade condicional** em F ; $P_F(G)$ representa a probabilidade de um evento G dado que F ocorre. Se $P_F(G) = P(G)$, isto é, se a probabilidade de G é a mesma com ou sem a restrição de que F ocorra, então G é dito independente de F . Portanto, G é independente de F se, e somente se, $P(F \cap G) = P(F)P(G)$. Observe que a última condição é claramente simétrica em F e G e faz sentido mesmo que $P(F) = 0$.

Definição 2.1.7. Dizemos que uma coleção $\{E_k\}_{k \in K}$ de **eventos** em Λ é **independente** se

$$P(E_{k_1} \cap \cdots \cap E_{k_n}) = \prod_{i=1}^n P(E_{k_i}), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } k_1, \dots, k_n \in K, \text{ distintos.}$$

Uma **coleção de variáveis aleatórias** $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ em Λ é chamada **independente** se os eventos $\{X_\alpha \in B_\alpha\} = X_\alpha^{-1}(B_\alpha)$ são independentes para todo conjunto de Borel $B_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Esta condição pode ser parafraseada de acordo com o seguinte argumento: Observe que se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ e se $X_j \equiv X_{\alpha_j}$, então

$$\begin{aligned} P(X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n)) &= P((X_1, \dots, X_n)^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n)) \\ &= P_{(X_1, \dots, X_n)}(B_1 \times \cdots \times B_n), \end{aligned}$$

onde $(B_1 \times \cdots \times B_n) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\}$. Agora, se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ são independentes, temos

$$\begin{aligned} P(X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n)) &= \prod_{j=1}^n P(X_j^{-1}(B_j)) \\ &= \prod_{j=1}^n P_{X_j}(B_j) \\ &= \underbrace{\left(\prod_{j=1}^n P_{X_j} \right)}_{\text{medida produto}}((B_1 \times \cdots \times B_n)). \end{aligned}$$

Portanto, podemos definir:

Definição 2.1.8. $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma **coleção de variáveis aleatórias independentes** se a distribuição conjunta de qualquer conjunto finito $\{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n}\} := \{X_1, \dots, X_n\}$ é o produto das distribuições individuais; ou seja

$$P_{(X_1, \dots, X_n)} \equiv \prod_{j=1}^n P_{X_j}.$$

Definição 2.1.9. Dizemos que um **processo estocástico** é uma coleção parametrizada em um conjunto ordenado $A \neq \emptyset$ de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in A}$, onde as variáveis aleatórias X_t 's são definidas em um espaço de probabilidade $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ e assumem valores em $\mathbb{R}^n$.

Note que, para cada $t \in A$ fixado, temos uma variável aleatória

$$\omega \mapsto X_t(\omega) = X(t, \omega).$$

Por outro lado, fixado $\omega \in \Lambda$ podemos considerar a função

$$t \mapsto X_t(\omega),$$

que é chamada **caminho** de X_t .

Nos casos em que a modelagem de um problema físico é feita com o uso de processos estocásticos, geralmente temos $A = [0, \infty)$. Assim, podemos pensar em t como sendo o “tempo” e em cada ω como sendo uma “partícula”. Com esta representação, $X_t(\omega)$ representaria a posição da partícula ω no tempo t . Já a função $t \mapsto X_t(\omega)$ seria o caminho realizado pela partícula ω com a evolução do tempo e a função $\omega \mapsto X_t(\omega)$ seria a configuração das partículas em um dado tempo fixo.

Algumas vezes, é conveniente escrever $X(t, \omega)$ em vez de $X_t(\omega)$, de forma que também podemos considerar o processo como uma função de duas variáveis

$$(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$$

do produto cartesiano $A \times \Lambda$ em $\mathbb{R}^n$. Este é um ponto de vista natural em análise estocástica, porque (como veremos) nesse âmbito é crucial ter $X(t, \omega)$ mensurável, concomitantemente, nas duas variáveis.

Finalmente, observamos que podemos identificar cada ω à função

$$\begin{aligned} \omega &: A \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto X_t(\omega), \end{aligned}$$

de forma que podemos considerar Λ como um subconjunto do espaço $(\mathbb{R}^n)^A$ de todas as funções de A em $\mathbb{R}^n$.

Agora, visto que $\mathcal{F}$ deve conter a σ -álgebra gerada pelas pré-imagens de X_t , $\forall t \in A$, tomando $\mathbb{R}^n$ munido com a σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}$, temos que $\mathcal{F}$ irá conter a σ -álgebra $\mathcal{B}'$ gerada pelos conjuntos da forma

$$\begin{aligned} \{\omega : \omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_k) \in B_k\} &= \{\omega : X_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{t_k}(\omega) \in B_k\} \\ &= X_{t_1}^{-1}(B_1) \cap \dots \cap X_{t_k}^{-1}(B_k), \end{aligned}$$

onde $B_i \in \mathcal{B}$.

A partir deste ponto, vamos introduzir a base necessária para o tratamento do movimento Browniano, tema da nossa próxima seção.

Definição 2.1.10. Seja $X : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória com função distribuição F . Seja p uma função mensurável e positiva em $\mathbb{R}$. Dizemos que X tem **densidade de probabilidade** p se

$$F(x) = \int_{(-\infty, y]} p(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que, se

$$p(\Delta t, x, \mu) = (2\pi \Delta t)^{-1} \exp\left(-\frac{|x - \mu|^2}{2\Delta t}\right), \quad \text{com } \mu, x \in \mathbb{R} \text{ e } \Delta t > 0,$$

então

$$\nu_\mu^{\Delta t}(A) := \int_A p(\Delta t, x, \mu) dx$$

é uma medida de probabilidade tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} x d\nu_\mu^{\Delta t}(x) = \mu \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} (x - \mu)^2 d\nu_\mu^{\Delta t}(x) = \Delta t.$$

Ou seja, $\nu_\mu^{\Delta t}$ é uma medida de probabilidade com média μ e variância Δt (para mais detalhes veja cap. 10.3 de [Fol99]).

Definição 2.1.11. Dizemos que $\nu_\mu^{\Delta t}$, como acima, é uma **distribuição Gaussiana** ou **normal** com média μ e variância Δt . No caso em que $\Delta t = 1$ e $\mu = 0$, ν_0^1 é chamada **distribuição normal padrão**. Se $X : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma variável aleatória com densidade de probabilidade $p(\Delta t, x, \mu)$, como acima, dizemos que X tem **distribuição normal** (ou Gaussiana).

O teorema abaixo é um importante resultado que relaciona variáveis aleatórias com distribuições Gaussianas. Ele indica que, se um sistema está sujeito a muitas fontes de flutuações aleatórias, então a distribuição das médias amostrais tende a uma distribuição normal. Para demonstração veja, por exemplo, [Fol99].

Teorema 2.1.12 (Central do Limite). *Seja $\{X_j\}$ uma sequência de n variáveis aleatórias em L^2 independentes e identicamente distribuídas, com média μ e variância σ^2 . Então, quando $n \rightarrow \infty$, a distribuição de $(\sigma\sqrt{n})^{-1} \sum_1^n (X_j - \mu)$ converge à distribuição normal padrão ν_0^1 , e para todo $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_1^n (X_n - \mu) \leq a \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx.$$

No restante desta seção, teremos como objetivo estabelecer a ferramenta que nos garantirá a existência do movimento Browniano: o teorema de extensão de Kolmogorov.

Definição 2.1.13. Seja $X = \{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico. Dizemos que as medidas $\mu_{t_1, \dots, t_k} : \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$ dadas por

$$\begin{aligned} \mu_{t_1, t_2, \dots, t_k}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k) &= P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k] \\ &= P(\{\omega \in \Lambda : X_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, X_{t_k}(\omega) \in F_k\}); \end{aligned}$$

$t_i \in T$, onde $F_1, \dots, F_k$ pertencem à σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, são **distribuições com dimensão finita** de X .

Note que as distribuições de dimensão finita satisfazem as seguintes propriedades:

(P1) **Simetria:**

$$\mu_{t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_{\sigma(1)} \times F_{\sigma(2)} \times \dots \times F_{\sigma(k)}) = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_k}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k)$$

para toda permutação σ em $\{1, \dots, k\}$.

(P2) **Compatibilidade:** Para $m = 1, \dots, k-1$

$$\mu_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_m \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n) = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_k}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k).$$

Dada uma família $\{\nu_{t_1, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ em $\mathbb{R}^{nk}$ será importante estarmos aptos a construir um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in T}$ que tenha $\nu_{t_1, \dots, t_k}$ como suas distribuições com dimensão finita. O teorema a seguir nos garante que isso pode ser feito desde que as medidas $\{\nu_{t_1, \dots, t_k}\}$ satisfaçam as duas propriedades acima.

Teorema 2.1.14 (Extensão de Kolmogorov). *Para todo $t_1, \dots, t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$, sejam $\nu_{t_1, \dots, t_k}$ medidas de probabilidade em $\mathbb{R}^{nk}$ satisfazendo as condições de simetria e compatibilidade acima citadas. Então existem um espaço de probabilidade $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ e um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ em Λ , $X_t : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, tais que*

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k],$$

para todo $t_i \in T$, $k \in \mathbb{N}$ e $F_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Isto é, $\{\nu_{t_1, \dots, t_k}\}$ é distribuição com dimensão finita de $\{X_t\}_{t \in T}$.

Para a demonstração veja, por exemplo, [Bil95].

2.2 Movimento Browniano

Como fenômeno físico, o movimento Browniano foi proposto em 1828 pelo botânico inglês Robert Brown ao observar que grãos de pólen suspensos em um líquido realizavam movimento irregular. Em 1905, Einstein apresentou uma descrição matemática de tal movimento como consequência de leis da física; propôs que este era o resultado de colisões aleatórias do pólen com as moléculas do líquido. Posteriormente, a teoria foi matematicamente formalizada por N. Wiener na década de 1920. Por esse motivo, o movimento Browniano também é chamado de **Processo de Wiener**.

Na descrição matemática desse fenômeno é natural utilizar um processo estocástico $B_t(\omega)$, interpretado como sendo a posição de um grão pólen ω em um tempo t . Iremos generalizar um pouco o problema, considerando o análogo n -dimensional.

Para construir o processo estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ é suficiente, pelo Teorema de Extensão de Kolmogorov 2.1.14, especificar uma família $\{\nu_{t_1, \dots, t_k}\}$ de medidas de probabilidade que satisfaçam as propriedades de simetria (P1) e compatibilidade (P2). Agora, pelo Teorema Central do Limite 2.1.12, é esperado que as variáveis aleatórias do nosso problema possuam distribuição Gaussiana. Isso pode ser justificado pelo fato de, em cada pequeno intervalo de tempo Δt , a partícula sofrer inúmeros choques, cujo efeito acumulado sobre a posição

da partícula é a soma de muitas variáveis aleatórias independentes, de forma que podemos esperar uma distribuição aproximadamente normal.

Então, afim de que nossas medidas gerem processos estocásticos que estejam de acordo com as observações sobre as características do movimento realizado pelo grão de pólen, elas serão definidas a partir de uma **densidade de probabilidade Gaussiana**

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-|x - y|^2}{2t}\right), \text{ com } t > 0 \text{ e } y, x \in \mathbb{R}^n, x \text{ fixado}.$$

Se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$, tome a medida $\nu_{t_1, \dots, t_k}$ em $\mathbb{R}^{nk}$ dada por

$$\begin{aligned} \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \\ \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde usamos a notação $dy = dy_1 \dots dy_k$ para medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{nk}$. E adotamos a convenção $p(0, x, y) = \delta_x(y)$.

Estendemos esta definição para todas as sequências finitas de t_i 's usando (P1). Visto que $\int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, y) dy = 1$ para todo $t \geq 0$, segue que (P2) vale. Logo, pelo teorema de Kolmogorov, existe um espaço de probabilidade $(\Lambda, \mathcal{F}, P^x)$ e um processo estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ em Λ tal que as distribuições de dimensão finita de $B_t := \{B_s\}_{s \leq t}$ são dadas por (2.1). Isto é

$$P^x(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k. \quad (2.2)$$

Observação.

$$\begin{aligned} P^x(B_0 = x) &= P^x(\{\omega \in \Lambda : B_0(\omega) = x\}) \\ &= P^x(\{\omega \in \Lambda : B_0(\omega) \in \{x\}\}) \\ &= P^x[B_0 \in \{x\}] \\ &= \int_{\{x\}} p(0, x, y) dy \\ &= \int_{\{x\}} \delta_x(y) dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

Definição 2.2.1. O processo obtido acima é chamado (uma versão do) **movimento Browniano** começando em x .

O movimento Browniano assim definido não é único pois, variando o $x \in \mathbb{R}^n$ fixado no início, podemos obter várias quádruplas $(B_t, \Lambda, \mathcal{F}, P^x)$ que satisfazem (2.2). No entanto, para o nosso propósito, isso não é importante. Iremos simplesmente escolher qualquer versão para trabalhar.

Uma vez que, na interpretação que demos ao problema, a função $t \mapsto B_t(\omega)$ representa o caminho de um grão de pólen realizado a medida que o tempo evolui, para que a nossa modelagem represente bem o problema físico em questão, devemos ser capazes de obter um processo estocástico de forma que os caminhos $t \mapsto B_t(\omega)$ sejam contínuos. Veremos mais adiante que tal possibilidade será garantida pelo teorema de continuidade de Kolmogorov. Dessa forma, como ressaltado na seção anterior, podemos identificar cada $\omega \in \Lambda$ com uma função contínua $t \mapsto B_t(\omega)$ de $[0, \infty)$ em $\mathbb{R}^n$ e então podemos adotar o ponto de vista em que o espaço $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ está equipado com uma certa medida de probabilidade P^x (dada por (2.1) e (2.2) acima). Esta versão é chamada **movimento Browniano canônico**.

Estabeleceremos agora algumas propriedades básicas do movimento Browniano:

- (i) B_t é um processo Gaussiano, i.e., para qualquer coleção $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ a variável aleatória $Z = (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$ tem **distribuição (multi)normal**. Isso significa que existe um vetor $M \in \mathbb{R}^{nk}$ e uma matriz não-negativa definida¹ $C = (c_{j,m}) \in \mathbb{R}^{nk \times nk}$ (o conjunto das matrizes $nk \times nk$ com entradas reais) tais que

$$E^x \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^{nk} u_j Z_j \right) \right] = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nk} \sum_{m=1}^{nk} u_j c_{j,m} u_m + i \sum_{j=1}^{nk} u_j M_j \right), \quad (2.3)$$

para todo $u = (u_1, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{R}^{nk}$, onde $i = \sqrt{-1}$ e E^x denota a esperança com respeito a P^x .

Observação. É possível verificar que, se (2.3) é válida, então

$$M = E^x[Z] \text{ é o valor médio de } Z \quad (2.4)$$

e

$$c_{j,m} = E^x[(Z_j - M_j)(Z_m - M_m)], \quad (2.5)$$

ou seja, $C = (c_{j,m})$ é a matriz de covariância de Z . A prova destas relações pode ser encontrada no apêndice A de [Øks03].

¹ C é uma **matriz não-negativa definida** se $v^T C v \geq 0$, para qualquer $v \in \mathbb{R}^{nk}$

Demonstração de (i). Para verificar a validade de (2.3), para $Z = (B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$, basta calcular explicitamente o lado esquerdo da equação usando (2.2), de forma a obter o lado direito da equação com

$$M = E^x[Z] = (x, x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{nk} \quad (2.6)$$

e

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \cdots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_k I_n \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Portanto

$$E^x[B_t] = x \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (2.8)$$

e

$$E^x[(B_t - x)^2] = nt, \quad E^x[(B_t - x)(B_s - x)] = n \min(s, t). \quad (2.9)$$

Além disso,

$$E^x[(B_t - B_s)^2] = n(t - s), \quad \text{se } t \geq s, \quad (2.10)$$

pois

$$\begin{aligned} E^x[(B_t - B_s)^2] &= E^x[(B_t - x)^2 - 2(B_t - x)(B_s - x) + (B_s - x)^2] \\ &= nt - 2ns + ns \\ &= n(t - s), \quad \text{se } t \geq s. \end{aligned}$$

□

(ii) B_t tem incrementos independente, i.e., $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ são independentes para quaisquer $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

Demonstração de (ii). Para mostrar isso, usaremos o fato que variáveis aleatórias X e Y com distribuição normal são independentes se, e somente se, elas não são correlacionadas, i.e., $E[XY] = 0$. (A demonstração desta afirmação pode ser encontrada no apêndice A de [Øks03]). Sendo assim, basta mostrarmos que

$$E^x[(B_{t_i} - B_{t_{i_1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = 0, \quad \text{se } t_i < t_j. \quad (2.11)$$

Temos que, por cálculo direto

$$\begin{aligned}
E^x[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] &= \\
&= E^x[B_{t_i}B_{t_j} - B_{t_{i-1}}B_{t_j} - B_{t_i}B_{t_{j-1}} + B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}] \\
&= E^x[(B_{t_i} - x)(B_{t_j} - x) - (B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_j} - x) - (B_{t_i} - x)(B_{t_{j-1}} - x) + \\
&\quad + (B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_{j-1}} - x)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (B_{t_i} - x)(B_{t_j} - x) - (B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_j} - x) - (B_{t_i} - x)(B_{t_{j-1}} - x) + \\
&\quad + (B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_{j-1}} - x) dP^x \\
&= E^x[(B_{t_i} - x)(B_{t_j} - x)] - E^x[(B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_j} - x)] - E^x[(B_{t_i} - x)(B_{t_{j-1}} - x)] + \\
&\quad + E^x[(B_{t_{i-1}} - x)(B_{t_{j-1}} - x)],
\end{aligned}$$

então, por (2.9), segue que

$$E^x[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = n(t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1}) = 0$$

□

A última propriedade do movimento Browniano a ser discutida é a possibilidade de conseguirmos um processo estocástico B_t de forma que as trajetórias $t \rightarrow B_t(\omega)$ sejam contínuas. Antes, vamos ressaltar algumas sutilezas sobre esta questão.

Primeiro, observe que é natural que o teorema de extensão de Kolmogorov não afirme nada sobre a continuidade das trajetórias do processo, uma vez que a continuidade de uma função não é uma característica que possa ser determinada pela especificação de apenas uma quantidade enumerável de coordenadas. Ou, dito de outra forma, as distribuições de dimensão finita não são capazes de determinar se um processo possui ou não trajetórias contínuas. Como ilustração deste fato, exibimos o seguinte exemplo: tome $([0, \infty), \mathcal{B}, \mu)$ onde $\mathcal{B}$ denota a σ -álgebra de Borel em $[0, \infty)$ e μ é uma medida de probabilidade cuja medida de conjuntos de um único ponto é zero. Defina

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = \omega \\ 0 & \text{se } t \neq \omega \end{cases}$$

e

$$Y_t(\omega) = 0, \text{ para todo } (t, \omega) \in [0, \infty) \times [0, \infty).$$

Então, é fácil verificar que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ e $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ têm as mesmas distribuições de dimensão finita. No entanto, temos que os caminhos $t \mapsto Y_t(\omega)$ são contínuos para todo ω , enquanto os caminhos $t \mapsto X_t(\omega)$ são descontínuos para todo ω .

O que faremos é garantir a continuidade a menos de uma *modificação*, através do teorema de continuidade de Kolmogorov.

Definição 2.2.2. Suponha que $\{X_t\}_{t \in T}$ e $\{Y_t\}_{t \in T}$ são processos estocásticos em $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$. Então dizemos que $\{X_t\}_{t \in T}$ é uma **versão** (ou **modificação**) de $\{Y_t\}_{t \in T}$ se

$$P(\{\omega \in \Lambda : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1 \quad \text{para todo } t \in T.$$

Naturalmente, se X_t é uma versão de Y_t , então X_t e Y_t têm as mesmas distribuições de dimensão finita. Portanto, do ponto de vista em que um processo estocástico é uma lei de probabilidades em $(\mathbb{R}^n)^{[0, \infty)}$, duas versões de um processo podem ser consideradas um mesmo objeto. Entretanto, como vimos no exemplo anterior, as propriedades dos seus caminhos podem ser distintas.

Teorema 2.2.3 (de continuidade de Kolmogorov). *Suponha que o processo $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ satisfaz a seguinte condição: Para todo $T > 0$ existem constantes positivas α , β e D tais que*

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq D |t - s|^{1+\beta}; \quad 0 \leq s, t \leq T. \quad (2.12)$$

Então existe uma versão de X com caminhos contínuos q.t.p.

Para demonstração veja, por exemplo, [IK87].

Finalmente, temos as ferramentas para estabelecer a nossa última propriedade básica do movimento Browniano:

- (iii) Existe uma versão do movimento Browniano em que todas as trajetórias $t \mapsto B_t(\omega)$ são contínuas q.t.p..

Demonstração de (iii). Vamos dar uma ideia de como mostrar que

$$E[|B_t - B_s|^4] = n(n+2) |t - s|^2$$

para o caso unidimensional, ou seja, que movimento Browniano satisfaz a condição do teorema acima com $\alpha = 4$, $D = n(n+2)$ e $\beta = 1$.

Tome $B_0 = 0$ e $E = E^0$. Usando (2.3), provamos que

$$E[e^{iuB_t}] = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2t\right), \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Usamos (2.2), para mostrar que

$$E[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

para toda função f , tal que a integral acima converge. Então, apliquemos esse resultado para a função $f(x) = x^2k$ e depois, realizando integração por partes e indução sobre k obtemos que

$$E[B_t^{2k}] = \frac{(2k!)}{2^k k!} t^k; \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da relação acima, é possível obter o resultado desejado. $\square$

De agora em diante, admitiremos que B_t é tal “versão contínua”.

Por fim, notamos que se $B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(n)})$ é um movimento Browniano n -dimensional, então os processos unidimensionais $\{B_t^{(j)}\}_{t \geq 0}$, $1 \leq j \leq n$ são movimentos Brownianos unidimensionais independentes.

2.3 Construção da integral de Itô

Iniciaremos esta seção motivados pelo seguinte problema:

Exemplo 2.3.1. Considere a seguinte modelagem para o crescimento populacional

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0 \text{ (constante)}, \quad (2.13)$$

onde $N(t)$ é o tamanho da população no tempo t , e $a(t)$ é a taxa de crescimento no tempo t . Pode ocorrer que $a(t)$ não seja completamente conhecido, estando sujeito a efeitos aleatórios do ambiente, ie

$$a(t) = r(t) + \text{“ruído”},$$

de forma que não conhecemos exatamente o comportamento do termo de ruído, mas sabemos sua distribuição de probabilidade. Se $r(t)$ é assumidamente uma função não aleatória, como podemos resolver a equação (2.13)?

De agora em diante, nos focaremos em encontrar uma interpretação matemática razoável para o “ruído” mencionado acima. De forma mais geral, estaremos interessados em equações com a forma

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{“ruído”}, \quad (2.14)$$

onde b e σ são funções dadas. Inicialmente, vamos nos concentrar no caso unidimensional.

Nossa estratégia será procurar por algum processo estocástico W_t para representar o termo de ruído, de forma que

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t. \quad (2.15)$$

Baseados em várias situações, na física por exemplo, somos levados a assumir que W_t tenha, ao menos aproximadamente, as seguintes propriedades:

- (i) $t_1 \neq t_2$ implica que W_{t_1} e W_{t_2} são independentes.
- (ii) $\{W_t\}$ é estacionário, i.e., a distribuição de $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$ não depende de t .
- (iii) $E[W_t] = 0$ para todo t .

No entanto, ocorre que não existe nenhum processo estocástico “razoável” satisfazendo (i) e (ii): Tal processo W_t não teria caminhos contínuos. Se exigirmos que $E[W_t^2] = 1$, então a função $(t, \omega) \mapsto W_t(\omega)$ não será sequer mensurável com respeito à σ -álgebra $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$, onde $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra de Borel em $[0, \infty)$.

Apesar disso, ainda é possível representar W_t como um processo estocástico generalizado, chamado *processo de ruído branco*. Ao falarmos “generalizado”, queremos dizer que tal processo pode ser construído como uma medida de probabilidade no espaço $\mathcal{S}'$ das distribuições temperadas em $[0, \infty)$, mas não como uma medida de probabilidade no espaço $\mathbb{R}^{[0, \infty)}$, como ocorre para um processo ordinário. Iremos evitar esta construção e, em vez dela, iremos reescrever a equação (2.15) de uma forma que, nesta nova forma, conseguiremos sugerir um processo estocástico apropriado.

Seja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ e consideramos a versão discreta de (2.15):

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)W_k\Delta t_k, \quad (2.16)$$

onde

$$X_j = X(t_j), \quad W_k = W_{t_k}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Agora, substituímos $W_k\Delta t_k$ por $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$, onde $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é algum processo estocástico conveniente. As premissas (i), (ii) e (iii) sobre W_t sugerem que V_t deve ter incrementos independentes estacionários e com média zero. Ocorre que o único processo com estas condições, que possui caminhos contínuos, é o movimento Browniano (veja [Kni81]). Então colocando $V_t = B_t$, obtemos que

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j. \quad (2.17)$$

A questão agora é: existe (em algum sentido) o limite, quando Δt_j , do lado direito da equação acima? Se sim, intuitivamente, seríamos levados pelo conceito usual de integração à seguinte expressão

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (2.18)$$

e adotariamos a convenção de que (2.15) realmente significa que $X_t = X_t(\omega)$ é um processo estocástico satisfazendo (2.18).

Então, por hora, iremos nos focar em mostrar (em algum sentido) a existência de

$$\left\langle \int_0^t f(t, \omega) dB_t(\omega) \right\rangle,$$

onde $B_t(\omega)$ é o movimento Browniano unidimensional, com início na origem, para uma classe de funções $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Retornaremos posteriormente à solução de (2.18).

Suponha $0 \leq S < T$ e que $f(t, \omega)$ seja dada. Queremos definir

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega). \quad (2.19)$$

Refletindo sobre as teorias de integração usuais, faz sentido começar com a classe das funções simples e então estender a definição por algum procedimento de aproximação. Então, primeiramente, vamos assumir que f é da seguinte forma

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot \chi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)}(t), \quad (2.20)$$

onde χ denota a função característica e n é um natural. Para tais funções, é razoável definir

$$\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega), \quad (2.21)$$

onde

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} 2^{-n}k, & \text{se } S \leq 2^{-n} \leq T \\ S, & \text{se } 2^{-n}k < S \\ T, & \text{se } 2^{-n}k > T \end{cases}.$$

Definição 2.3.2. Seja $B_t(\omega)$ o movimento Browniano n -dimensional. Definimos $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$ como sendo a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $B_s(\cdot)$, com $s \leq t$. Em outras palavras, $\mathcal{F}_t$ é a menor σ -álgebra contendo os conjuntos da forma

$$\{\omega : B_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

onde $t_j \leq t$ e $F_j \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de Borel, $j = 1, 2, \dots$ (Estamos assumindo que todos os conjuntos de medida nula estão contidos em $\mathcal{F}_t$).

Uma função $h(\omega)$ é dita $\mathcal{F}_t$ **mensurável** se pode ser escrita q.t.p. como limite de soma de funções da forma

$$g_1(B_{t_1})g_2(B_{t_2}) \dots g_k(B_{t_k}),$$

onde $g_1, \dots, g_k$ são funções contínuas limitadas e $t_j \leq t$ para $j \leq k$, $k = 1, 2, \dots$. Intuitivamente, dizer que h é $\mathcal{F}_t$ -mensurável significa que o valor de $h(\omega)$ pode ser decidido a partir dos valores de $B_s(\omega)$, para $s \leq t$. Por exemplo, $h_1(\omega) = B_{t/2}(\omega)$ é $\mathcal{F}_t$ mensurável, enquanto $h_2(\omega) = B_{2t}(\omega)$ não é.

Note que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, para todo $s < t$ (i.e., $\{\mathcal{F}_t\}$ é **crescente**) e que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, para qualquer t .

Definição 2.3.3. Seja $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$ uma família crescente de σ -álgebras de subconjuntos de Ω . Um processo $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dito **$\mathcal{N}_t$ -adaptado** se, para cada $t \geq 0$, a função

$$\omega \mapsto g(t, \omega)$$

é $\mathcal{N}_t$ -mensurável.

Observe que $h_1(t, \omega) = B_{t/2}(\omega)$ é $\mathcal{F}_t$ adaptada, enquanto $h_2(t, \omega) = B_{2t}(\omega)$ não é.

Agora, iremos estabelecer a classe de funções para a qual a integral de Itô será definida:

Definição 2.3.4. Definimos $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$ como sendo a classe de funções

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

- (i) $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$ é $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mensurável, onde $\mathcal{B}$ denota a σ -álgebra de Borel em $[0, \infty)$.
- (ii) $f(t, \omega)$ é $\mathcal{F}_t$ -adaptada.
- (iii) $E \left[\int_S^T (f, \omega)^2 dt \right] < \infty$.

Finalmente, vamos mostrar como definir a integral de Itô

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega)$$

para funções $f \in \mathcal{V}$, onde B_t é o movimento Browniano unidimensional. Como já mencionado, a ideia será definir $\mathcal{I}[\varphi]$ para φ na classe das funções simples e então mostrar que cada $f \in \mathcal{V}$ pode ser aproximada por funções simples. Por fim usamos este fato para definir $\int f dB$ como limite de $\int \varphi dB$, quando $\varphi \rightarrow f$.

Vamos aos detalhes deste procedimento: Diremos que uma função $\varphi \in \mathcal{V}$ é **elementar** se ela é da forma

$$\varphi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t). \quad (2.22)$$

Note que, como $\varphi \in \mathcal{V}$, cada função e_j deve ser $\mathcal{F}_{t_j}$ -mensurável. Então no exemplo citado acima h_1 é elementar, enquanto h_2 não é.

Para funções elementares $\varphi(t, \omega)$, definimos a integral de acordo com (2.21):

$$\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega). \quad (2.23)$$

Desta forma, a seguinte propriedade se verifica:

Lema 2.3.5 (Isometria de Itô). *Se $\varphi(t, \omega)$ é uma função elementar e limitada, então*

$$E \left[\left(\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \varphi(t, \omega)^2 dt \right]. \quad (2.24)$$

Demonstração. Seja $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Então

$$E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j), & \text{se } i = j \end{cases},$$

onde usamos que $e_i e_j \Delta B_i$ e ΔB_j são independentes se $i < j$. Portanto,

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_S^T \varphi dB \right)^2 \right] &= \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] \\ &= \sum_j E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j) \\ &= E \left[\int_S^T \varphi^2 dt \right]. \end{aligned}$$

□

A ideia agora é usar (2.24) para estender a definição para funções em $\mathcal{V}$. Isso pode ser feito se considerarmos as três afirmações a seguir (cujas demonstrações não são complicadas e podem ser encontradas em [Øks03]):

Afirmção 1. Seja $g \in \mathcal{V}$ limitada e tal que $g(\cdot, \omega)$ é contínua para cada ω . Então existe uma sequência de funções elementares $\{\varphi\} \subset \mathcal{V}$ tal que

$$E \left[\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Afirmção 2. Seja $h \in \mathcal{V}$ limitada. Então existe uma sequência de funções limitadas $\{g_n\} \subset \mathcal{V}$ tal que, para todo ω e n , $g_n(\cdot, \omega)$ é contínua e

$$E \left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Afirmção 3. Seja $f \in \mathcal{V}$. Então existe uma sequência de funções limitadas $\{h_n\} \subset \mathcal{V}$ tal que

$$E \left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, pelas afirmações anteriores, se $f \in \mathcal{V}$ existem funções elementares $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{V}$ tais que

$$E \left[\int_S^T (f - \varphi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Então definimos

Definição 2.3.6. Seja $f \in \mathcal{V}(S, T)$. A **integral de Itô**, de S à T , é definida como

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega), \quad (2.25)$$

onde $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções elementares tais que

$$E \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

e o limite de (2.25) existe como um elemento de $L^2(P)$, visto que por (2.24),

$$\left\{ \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

forma uma sequência de Cauchy em $L^2(P)$.

Proposição 2.3.7. Sejam $f, g \in \mathcal{V}$ e $0 \leq S < T$. Valem as seguintes propriedades para integral de Itô

1. (Isometria de Itô)

$$E \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dt \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] \quad (2.27)$$

2. Se $E \left[\int_S^T (f_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\int_S^T f_n(t, \omega) dB_t(\omega) \rightarrow \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \text{ em } L^2(P), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

3. Se $f \in \mathcal{V}(0, T)$, existe uma versão t -contínua (veja a definição 2.2.2) de

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega); \quad 0 \leq t \leq T,$$

isto é, existe um processo estocástico t -contínuo J_t em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que

$$P \left(J_t = \int_0^t f dB \right) = 1, \text{ para todo } t \in [0, T]. \quad (2.29)$$

4. Se $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$ e $0 \leq S < U < T$, temos para ω q.t.p.

(a)

$$\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$$

(b)

$$\int_S^T (cf + g) dB_t = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$$

(c)

$$E \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0$$

(d)

$$\int_S^T f dB_t \text{ é } \mathcal{F}_T\text{-mensurável.}$$

As demonstrações dos resultados acima podem ser encontradas em [Øks03].

Definição 2.3.8. Uma **filtração** em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uma família $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ de σ -álgebras $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ tal que

$$0 \leq s < t \implies \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$$

(ou seja, $\{\mathcal{M}_t\}$ é crescente). Um processo estocástico n -dimensional $\{M_t\}_{t \geq 0}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é chamado **martingale** com respeito à filtração $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ (e com respeito à P) se

- (i) M_t é $\mathcal{M}_t$ -mensurável para todo t ,
- (ii) $E[|M_t|] < \infty$ para todo t e
- (iii) $E[M_s | \mathcal{M}_t] = M_t$ para todo $s \geq t$.

A esperança em (ii) e a esperança condicional em (iii) são tomadas com respeito à $P = P^0$ (distribuição tomada com respeito ao movimento Browniano, começando em 0).

A integral de Itô pode ser definida para uma classe maior de funções que $\mathcal{V}$. Primeiro, em vez da condição de mensurabilidade (ii) da Definição 2.3.4, podemos exigir apenas que

(ii') Existe uma família crescente de σ -álgebras $\mathcal{H}_t$; $t \geq 0$, tal que

(a) B_t é um martingale com respeito a $\mathcal{H}_t$ e

(b) f_t é $\mathcal{H}_t$ -adaptada.

Com isso é possível definir a integral de Itô multidimensional:

Definição 2.3.9. Seja $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ um movimento Browniano n -dimensional. Então $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{m \times n}(S, T)$ denota o conjunto das matrizes $m \times n$, $v = [v_{ij}(t, \omega)]$, onde cada entrada $v_{ij}(t, \omega)$ satisfaz (i) e (iii) da Definição 2.3.4 e (ii)' acima, com respeito a alguma filtração $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$. Se $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{m \times n}(S, T)$ definimos, usando notação matricial

$$\int_S^T v DB = \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

onde a matriz $m \times 1$ que é a i -ésima componente é a seguinte soma de integrais de Itô:

$$\sum_{j=1}^n \int_S^T v_{ij}(s, \omega) dB_j(s, \omega).$$

Se $\mathcal{H} = \mathcal{F}(n) = \{\mathcal{F}_t^{(n)}\}_{t \geq 1}$, escrevemos $\mathcal{V}^{m \times n}(S, T)$, e se $m = 1$ escrevemos $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^n(S, T)$ (respectivamente $\mathcal{V}^n(S, T)$) no lugar de $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{n \times 1}(S, T)$ (respectivamente $\mathcal{V}^{n \times 1}(S, T)$). Também definimos

$$\mathcal{V}^{m \times n} = \mathcal{V}^{m \times n}(0, \infty) = \bigcap_{T > 0} \mathcal{V}^{m \times n}(0, T).$$

A a próxima extensão da integral de Itô consiste no enfraquecimento da condição (iii) da Definição 2.3.4 para

$$(iii)' \quad P \left[\int_S^T f(s, \omega)^2 ds < \infty \right] = 1$$

Definição 2.3.10. $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$ denota a classe de processos $f(t, \omega) \in \mathbb{R}$ satisfazendo (i) da Definição 2.3.4 e (ii)', (iii)' acima. Similarmente, para a notação $\mathcal{V}$ definimos $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \bigcap_{T > 0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, T)$ e no caso matricial, escrevemos $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{m \times n}(S, T)$, etc. Se $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{(n)}$, escrevemos $\mathcal{W}(T, S)$ no lugar de $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_n}(S, T)$, etc. Se a dimensão estiver clara no contexto, iremos escrever $\mathcal{F}$ para $\mathcal{F}^{(n)}$, e assim por diante.

2.4 Equações diferenciais estocásticas

Com todas as definições anteriores em mente, podemos voltar a tratar o problema (2.15):

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t. \quad (2.31)$$

O objetivo desta seção será apresentar um caminho com as definições e resultados necessários para mostrar a existência de solução de uma equação diferencial estocástica. Desta forma, iremos omitir várias demonstrações. Um leitor interessado pode obter maiores detalhes em [Øks03]; que é o nosso guia para este capítulo.

Iniciemos definindo o processo estocástico de Itô:

Definição 2.4.1. Seja B_t o movimento Browniano unidimensional em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Um **processo de Itô** (de dimensão um) é um processo estocástico X_t em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ da forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s, \quad (2.32)$$

onde $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, é tal que

$$P \left[\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty, \text{ para todo } t \geq 0 \right] = 1. \quad (2.33)$$

Também assumimos que u é $\mathcal{H}_t$ -adaptado (onde $\mathcal{H}_t$ é como em (ii)' da seção anterior) e

$$P \left[\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty, \text{ para todo } t \geq 0 \right] = 1. \quad (2.34)$$

Se X_t é um processo de Itô, a expressão (2.32) também pode ser escrita em uma forma diferencial mais curta

$$dX_t = u dt + v dB_t. \quad (2.35)$$

Se $B(t, \omega) = (B_1(t, \omega), \dots, B_m(t, \omega))$ denota um movimento Browniano n -dimensional e se $u_i(t, \omega), v_{jl}(t, \omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{U}}$ satisfazem (2.33) e (2.34), para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j, l \leq m$, então podemos definir o **processo de Itô n -dimensional**:

$$\begin{cases} dX_1 &= u_1 dt + v_{11} dB_1 + \dots + v_{1m} dB_m \\ \vdots & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ dX_n &= u_n dt + v_{n1} dB_1 + \dots + v_{nm} dB_m \end{cases}. \quad (2.36)$$

Ou, em notação matricial

$$dX(t) = u dt + v dB(t), \quad (2.37)$$

onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix}, \quad dB(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

A seguir, apresentaremos dois resultados importantes para o processo de Itô:

Teorema 2.4.2 (Fórmula de Itô). *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) Seja X_t o processo de Itô unidimensional dado por

$$dX = u dt + v dB_t.$$

Seja $g(t, x) \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$, então

$$Y_t = g(t, X_t)$$

é novamente um processo de Itô e

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2, \quad (2.39)$$

onde $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ é calculado de acordo com a regra a seguir

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt. \quad (2.40)$$

(ii) Seja

$$dX = u dt + v dB_t.$$

um processo de Itô m -dimensional. Se $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ é uma aplicação $\mathcal{C}^2$ de $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$, então o processo

$$Y(t, \omega) = g(t, X(t))$$

é novamente um processo de Itô, cuja k -ésima componente é dada por

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X) dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X) dX_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X) \cdot (dX_i) (dX_j), \quad (2.41)$$

onde $(dB_i dB_j) = \delta_{ij}$ e $(dB_i) dt = dt dB_i = 0$.

Teorema 2.4.3 (Integração por partes). *Suponha que $f(s, \omega) = f(s)$ possua dependência apenas em s e que f é contínua e de variação limitada em $[0, t]$. Então*

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t) B_t - \int_0^t B_s df_s. \quad (2.42)$$

Observamos que a hipótese que f não depende de ω é essencial para a garantia do teorema.

Neste ponto, já temos os pré-requisitos necessários para estabelecer um teorema de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais estocásticas (E.D.E's):

Teorema 2.4.4 (Existência e unicidade para E.D.E's). *Sejam $T > 0$ e $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ funções mensuráveis satisfazendo*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (2.43)$$

para alguma constante C , (onde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) e

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], \quad (2.44)$$

para alguma constante D . Seja ainda Z uma variável aleatória que é independente da σ -álgebra $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ gerada por $B_s(\cdot)$, $s \leq 0$ e tal que

$$E[|Z|^2] < \infty.$$

Então a equação diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = Z \quad (2.45)$$

possui única solução $X_t(\omega)$, satisfazendo as propriedades: $X_t(\omega)$ é adaptado à filtração $\mathcal{Z}_t^Z$ gerada por Z e $B_s(\cdot)$; $s \leq t$ e

$$E \left[\int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty. \quad (2.46)$$

2.5 Equações de difusão e fórmula de Feynman-Kac

Observe que, conforme visto na seção anterior, a interpretação de Itô para equação (2.15) é dada pela expressão

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad (2.47)$$

onde, no caso n -dimensional, $X_t \in \mathbb{R}^n$, $b(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e B_t é o movimento Browniano n -dimensional.

Numa equação com a forma (2.47), chamaremos b de **coeficiente de desvio** e σ (ou às vezes $\frac{1}{2}\sigma\sigma^T$) de **coeficiente de difusão**. Desta forma, uma solução para tal equação diferencial estocástica pode ser pensada como uma descrição matemática para o movimento de uma partícula em um fluido. Visando esta analogia, o processo estocástico (2.47) é chamado **difusão** (de Itô).

Definição 2.5.1. Uma **difusão de itô (homogênea no tempo)** é um processo estocástico $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo a equação diferencial estocástica

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad t \geq s; \quad X_s = x \quad (2.48)$$

onde B_t é o movimento Browniano m -dimensional e $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ satisfazendo as condições do Teorema 2.4.4 que, neste caso, podem ser simplificadas no seguinte:

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.49)$$

onde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$.

Denotaremos a (única) solução de (2.48) por $X_t = X_t^{s,x}$, $t \geq s$. Se $s = 0$, escrevemos $X_t^x = X_t^{0,x}$. Note que estamos assumindo em (2.48) que b e σ dependem apenas de x (não possuem dependência em t). É possível mostrar que o caso geral pode ser reduzido a este (vide [Øks03], cap. 10 e 11).

O processo resultante $X_t(\omega)$ será homogêneo no tempo no seguinte sentido:

$$\begin{aligned} X_{s+h}^{s,x} &= x + \int_s^{s+h} b(X_u^{s,x}) du + \int_s^{s+h} \sigma(X_u^{s,x}) dB_u \\ &= x + \int_0^h b(X_{s+v}^{0,x}) dv + \int_0^h \sigma(X_{s+v}^{s,x}) d\tilde{B}_v, \quad (u = s + v), \end{aligned}$$

onde $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s$; $v \geq 0$. Por outro lado, vale que

$$X_h^{0,x} = x + \int_0^h b(X_v^{0,x}) dv + \int_0^h \sigma(X_v^{0,x}) dB_v.$$

Visto que $\{\tilde{B}_v\}_{v \geq 0}$ e $\{B_v\}_{v \geq 0}$ têm a mesma distribuição P^0 , segue da unicidade da solução da equação diferencial (2.48) que

$$\{X_{s+h}^{s,x}\}_{h \geq 0} \text{ e } \{X_h^{0,x}\}_{h \geq 0}$$

possuem a mesma distribuição P^0 , *i.e.* $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é homogêneo em t .

Para muitas aplicações (inclusive no tratamento da equação do nosso problema (1.1)), é fundamental que sejamos capazes de associar um operador diferencial parcial à difusão de Itô X_t . Essa conexão é estabelecida tendo como inspiração o conceito de geradores infinitesimais da teoria de semigrupos lineares.

Definição 2.5.2. Seja $\{X_t\}$ uma difusão de Itô (homogênea no tempo) em $\mathbb{R}^n$. O **gerador (infinitesimal)** A de X_t é definido por

$$Af(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{E^x[f(X_t)] - f(x)}{t}; \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.50)$$

O conjunto das funções $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, para as quais o limite acima existe, é denotado por $\mathcal{D}_A(x)$; enquanto $\mathcal{D}_A$ denota o conjunto das funções para as quais o limite existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir nos fornece uma relação entre A e os coeficientes d e σ na equação diferencial estocástica (2.48).

Teorema 2.5.3. *Seja X_t a difusão de Itô*

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t. \quad (2.51)$$

Se $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ então $f \in \mathcal{D}_A$ e

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.52)$$

Por fim, concluiremos nossa primeira versão da fórmula de Feynman-Kac

Teorema 2.5.4 (Fórmula de Feynman-Kac). *Seja $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ e $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ limitada inferiormente. Seja*

$$v(t, x) = E^x \left[\exp \left(- \int_0^t q(X_s) ds \right) f(X_t) \right]. \quad (2.53)$$

Então

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv; & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ v(0, x) = f(x); & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (2.54)$$

Demonstração. Seja $Y_t = f(X_t)$, $Z_t = \exp(-\int_0^t q(X_s) ds)$. Então dY_t é dado por

$$dY_t = dY_0 + \int_0^t \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds + \sum_{i,j} \int_0^t v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_k.$$

e

$$dZ_t = -Z_t q(X_t) dt$$

Então

$$d(Y_t Z_t) = U_t dZ_t + Z_t dY_t, \text{ pois } dZ_t \cdot dY_t = 0.$$

Agora, note que, como $Y_t Z_t$ é um processo de Itô, $v(t, x) = E^x[Y_t Z_t]$ é diferenciável com

respeito à t (veja o Lema 7.3.2 de [Øks03]). Portanto $v(t, x)$ é como na hipótese e temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}(E^x[v(t, x)] - v(t, x)) &= \frac{1}{r}E^x[E^{X_r}[Z_t f(X_t)] - E^x[Z_t f(X_t)]] \\
&= \frac{1}{r}E^x[E^x[f(X_{t+r}) \exp\left(-\int_0^t q(X_{s+r}) ds\right) | \mathcal{F}_r] - E^x[Z_t f(X_t) | \mathcal{F}_r]] \\
&= \frac{1}{r}E^x[Z_{t+r} \exp\left(\int_0^r q(X_s) ds\right) f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t)] \\
&= \frac{1}{r}E^x[f(X_{t+r}) Z_{t+r} - f(X_t) Z_t] \\
&\quad + \frac{1}{r}E^x\left[f(X_{t+r}) Z_{t+r} \exp\left(\int_0^r q(X_s) ds\right) - 1\right] \\
&\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}v(t, x) + q(x)v(t, x), \text{ quando } r \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

pois

$$\frac{1}{r}f(X_{t+r}) Z_{t+r} \left(\exp\left(\int_0^r q(X_s) ds\right) - 1\right) \rightarrow f(X_t) Z_t q(X_0)$$

quando $r \rightarrow 0$ pontualmente. O que completa a prova. $\square$

2.6 A fórmula de Feynman-Kac aplicada ao nosso problema

Nesta seção estabeleceremos uma relação com a teoria desenvolvida neste capítulo com a nossa equação particular (1.1):

$$d\varphi(t, \vec{x}) = -\frac{1}{2} \Delta S_\Lambda(\varphi(t, \vec{x})) dt + d\eta(t, \vec{x}); \quad \varphi(0, \vec{x}) = \psi(\vec{x}), \tag{2.56}$$

onde $\Delta S_\Lambda = \delta S_\Lambda / \delta \varphi$. Com isso esperamos justificar a abordagem utilizada para a resolução deste problema.

Inicialmente observamos que, através de um processo análogo ao realizado nas seções anteriores, a fórmula de Feynman-Kac do teorema 2.5.4 pode ser estabelecida para o espaço $[-T, T] \times \Lambda$ no qual nossas variáveis aleatórias estão definidas. Neste contexto, a equação (2.56) pode ser vista como uma difusão de Itô com gerador infinitesimal dado por

$$H_\Lambda f = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi(\vec{x})^2} - \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial f}{\partial \varphi(\vec{x})} \right]. \tag{2.57}$$

Desse modo, podemos tratar nosso problema considerando H_Λ como o gerador de um semigrupo e^{-tH_Λ} de evolução.

De acordo com o extenso trabalho [GRS75], de F. Guerra, L. Rosen e B. Simon, através da fórmula de Feynman-Kac fornecida na seção anterior, é possível mostrar que H_Λ é de fato o gerador de um semigrupo e^{-tH_Λ} , $t > 0$, fortemente contínuo. Além disso, H_Λ é auto-adjunto e inferiormente limitado no espaço de Hilbert $L^2(d\mu_\Lambda)$, onde $d\mu_\Lambda$ é a medida invariante dada pela distribuição de probabilidade de *Gibbs*:

$$d\mu_\Lambda = e^{-S_\Lambda(\varphi)} d\varphi_\Lambda / \text{normalização}, \text{ onde } d\varphi_\Lambda = \prod_{\vec{x} \in V} d\varphi(\vec{x}).$$

A construção realizada para a obtenção do espaço de Hilbert referido acima, também fornece um vetor $\Omega \equiv 1$ (chamado **vetor do vácuo**) tal que $H_\Lambda \Omega = 0$.

Ainda no artigo [GRS75], é provada uma segunda versão para a fórmula de Feynman-Kac: Se $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \in \mathbb{R}$ então vale que

$$(\Omega, \widehat{f}_1 e^{-(t_2-t_1)H_\Lambda} \widehat{f}_2 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})H_\Lambda} \widehat{f}_n \Omega)_{L^2(d\mu_\Lambda)} = \int f_1(\varphi(t_1)) \dots f_n(\varphi(t_n)) d\rho_\Lambda, \quad (2.58)$$

onde a medida $d\rho_\Lambda$ é obtida usando (1.2) em H_Λ (veja a equação (4.8) adiante). A notação $\widehat{}$, usada acima, é empregada para deixar explícita a diferença entre os objetos em questão: $\widehat{f}_i$ é um operador de campo e os f_i é uma variável aleatória. Observamos ainda que a integral do lado direito na equação acima é muitas vezes interpretada como uma integral de caminhos, visto que as variáveis $\varphi(t, x) \equiv \varphi(t)$ podem ser vistas com caminhos para cada $x \in \Lambda$ fixado.

Diante deste contexto, podemos considerar a teoria quântica de campos formulada no espaço de Hilbert $L^2(d\mu_\Lambda)$. Assim fica estabelecida uma correlação entre o problema estocástico inicial e o problema de evolução definido acima.

Aspectos da Teoria Quântica de Campos

Vimos que, a partir da EDP estocástica (1.1), é possível obter um semigrupo fortemente contínuo H_Λ . Interpretando tal operador como o gerador de uma dinâmica e utilizando métodos desenvolvidos na teoria quântica de campos, veremos que é possível realizar sua análise espectral completa.

Antes de iniciarmos a análise espectral do nosso problema, iremos apresentar alguns aspectos da teoria quântica de campos perturbativa, formulada em termos das integrais de caminho de Feynman.

Realizaremos aqui a construção da teoria de campos regularizada num volume finito, para um modelo com interação $\lambda\phi^4$. Tal construção será feita com o objetivo de adquirirmos familiaridade com a teoria. Sendo assim, repetiremos alguns conceitos abordados no capítulo 2, acreditando que isso é importante para ganharmos habilidade para relacionar a teoria quântica de campos com as terminologias utilizadas na análise estocástica.

3.1 Motivação

Heuristicamente, podemos usar Hamiltoniano clássico

$$H_{cl} = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (3.1)$$

para construirmos o Hamiltoniano da mecânica quântica

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x), \quad (3.2)$$

fazendo a troca $p \rightarrow (\hbar/i)\partial/\partial x$. Estados de partículas sem spin em $\mathbb{R}^d$ são descritos por vetores $\varphi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, com a interpretação de que, para qualquer conjunto mensu-

rável $R \subset \mathbb{R}^d$, $\int_R |\varphi(t, x)|^2 d^d x$ é a probabilidade de encontrarmos a partícula no tempo t na região R . Dado um estado inicial φ_0 , em $t = 0$, no domínio $\mathcal{D}(H)$ do Hamiltoniano H , o estado para tempos posteriores $t > 0$ é determinado pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi, \quad (3.3)$$

com condição inicial $\varphi(0, x) = \varphi_0(x)$. Se V é tal que H é auto-adjunto, então a evolução temporal $t \mapsto \exp(itH)$, $t \in \mathbb{R}$, é um semigrupo fortemente contínuo e para $\varphi_0 \in \mathcal{H}$, então um estado no tempo $t > 0$ é dado por

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= (e^{-itH/\hbar} \varphi_0)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dy N(t; x, y) \varphi_0(y). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em termos da notação de Dirac:

$$N(t; x, y) = \langle x | e^{itH/\hbar} | y \rangle \quad (3.5)$$

A fórmula de Feynman-Kac é uma reformulação da equação acima, onde N é escrito como uma integral sobre caminhos. É possível usar a formula de Trotter para obtê-la (veja [Sal99] ou [GJ87])

Lema 3.1.1 (Fórmula de Trotter). *Se A e B são operadores limitados, então*

$$e^{A+B} = \lim_{N \rightarrow \infty} (e^{A/N} e^{B/N})^N, \quad (3.6)$$

onde o limite é realizado na norma dos operadores.

Observamos que o Hamiltoniano H dado em (3.2) é ilimitado, sendo assim, o lema acima não se aplica a ele. No entanto, para os casos de interesse físico, é provado em [SR81], que o limite existe no sentido da convergência forte. Isto é, se aplicarmos os dois lados da equação (3.6) em um vetor $\varphi \in \mathcal{H}$, vale a convergência em $\mathcal{H}$, quando $N \rightarrow \infty$. De forma mais precisa, se $s - \lim$ denota o limite forte, vale que

1. Se A e B são auto-adjuntos e $A+B$ é essencialmente auto-adjunto em $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, então

$$e^{i(A+B)} = s - \lim_{N \rightarrow \infty} (e^{iA/N} e^{iB/N})^N. \quad (3.7)$$

2. Se A e B são limitados inferiormente, então

$$e^{-(A+B)} = s - \lim_{N \rightarrow \infty} (e^{-A/N} e^{-B/N})^N. \quad (3.8)$$

A relevância física destes resultados se encontra no fato de que, tanto a evolução temporal e^{itH} , quanto o núcleo do calor $e^{\beta H}$ são cobertos.

A evolução temporal livre possui o núcleo

$$N_0(t; x, y) = \langle x | e^{-itH_0/\hbar} | y \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{d/2} e^{im|x-y|^2/2\hbar t},$$

e

$$(e^{-itH_0/\hbar} \phi_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dy N_0(t; x, y) \phi(y),$$

onde $\int_{\mathbb{R}}^d dx$ é entendida como o limite $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq M} dx$ na norma de L^2 .

Como

$$\langle x | e^{-i\Delta t \hbar H_0} e^{-i\Delta t \hbar V} | y \rangle = N_0(\Delta t; x, y) e^{-i\Delta t \hbar V(y)},$$

temos que

$$(e^{-i\Delta t \hbar (H_0 + V)} \varphi)(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{Nd/2} \int_{\mathbb{R}^{Nd}} dx_1 \dots dx_N e^{i/\hbar S_N(x_0, \dots, x_N; t)} \varphi(x_N), \quad (3.9)$$

com $\Delta t = t/N$ e

$$S_N(x_0, \dots, x_N; t) = \sum_{k=1}^N \Delta t \left(\frac{m}{2} \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} \right]^2 - V(x_k) \right).$$

Agora, sabemos que, em mecânica clássica, uma partícula em um potencial V movendo-se ao longo de um caminho $X(t)$, possui a ação

$$S(X) = \int_0^t ds \left(\frac{m}{2} \dot{X}(s)^2 - V(X(s)) \right).$$

Para um caminho poligonal $X^{(P)}$, dado por $x_0, \dots, x_N$, podemos obter

$$\begin{aligned} S(X^{(P)}) &= \sum_{k=1}^N \Delta t \left(\frac{m}{2} \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} \right]^2 - \int_0^t ds V(X(s)) \right) \\ &\approx S_N(x_0, \dots, x_N; t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Com isso, podemos interpretar o lado direito da equação (3.9) como uma integral sobre todos os caminhos poligonais, com S_N aproximando a ação clássica associada a cada caminho.

Poderíamos esperar que no limite $N \rightarrow \infty$, o conjunto de todos os caminhos poligonais se tornasse o conjunto de todos os caminhos, que $S_N(X^{(P)}) \rightarrow S(X)$ e que

$$(e^{-it(H_0 + V)/\hbar} \varphi)(x_0) = \int_{\Omega_{x_0}} e^{iS(X)/\hbar} \varphi(X(t)) dX, \quad (3.11)$$

onde Ω_{x_0} é o conjunto de todos os caminhos $X : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$ com $X(0) = x_0$ e dX é uma medida em Ω_{x_0} (veja [Dir78] ou [Sty10], por exemplo). Esta é a **fórmula da integral de caminho de Feynman**. Uma de suas mais belas consequências é a condição variacional para a solução clássica X_{cl} ,

$$\left. \frac{\delta}{\delta X} S(X) \right|_{X=X_{cl}} = 0,$$

que aparece como uma aproximação de fase estacionária para a integral, o que deveria ser válido no limite $\hbar \rightarrow 0$.

O problema é que, infelizmente, a medida dX não existe e, portanto, a integral em (3.11) só faz sentido matemático para N finito.

No entanto, se tomarmos e^{-tH} no lugar de e^{itH} , a exponencial do termo cinético decai exponencialmente e pode ser incluída na medida: trocando it por τ , isto é indo para o tempo imaginário, obtemos no lugar de N_0 o núcleo

$$p(\tau; x, y) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau} \right)^{d/2} e^{-m|x-y|^2/2\hbar\tau}.$$

Visto que

$$\langle x | e^{-\Delta\tau\hbar H_0} e^{-\Delta\tau\hbar V} | y \rangle = p(\Delta\tau; x, y) e^{-\Delta\tau/\hbar V(y)},$$

segue que

$$(e^{-\Delta\tau\hbar(H_0+V)}\varphi)(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t} \right)^{Nd/2} \int_{\mathbb{R}^{Nd}} dx_1 \dots dx_N e^{i/\hbar S_E(x_0, \dots, x_N; t)} \varphi(x_N), \quad (3.12)$$

onde $\Delta\tau = \tau/N$ e

$$S_E(x_0, \dots, x_N; \tau) = \sum_{k=1}^N \Delta\tau \left(\frac{m}{2} \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta\tau} \right]^2 - V(x_k) \right).$$

Visto que

$$\int_{\mathbb{R}^d} dy p(\tau; x, y) = 1,$$

a medida Gaussiana definida por

$$d\mu_{x_0}^{(N)}(X) = \prod_{k=1}^N \exp \left(-\frac{m}{2\hbar} \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{\Delta\tau} \right) dx_1 \dots dx_N \quad (3.13)$$

é normalizada, i.e. $\int d\mu_{x_0}^{(N)}(X) = 1$, independentemente de N . De fato, é possível mostrar que o limite $N \rightarrow \infty$ de $d\mu_{x_0}^{(N)}(X)$ existe como uma medida definida no conjunto de todos os caminhos começando em x_0 . Tal medida é a medida condicional de Wiener $d\mu_{x_0}(X)$ descrita no movimento Browniano, isto é, o análogo para o movimento livre na mecânica

quântica, mas com a equação de Schrödinger trocada pela equação do calor. Para V adequado, e.g. $V \in L^p \cup L^\infty$, onde $p > d/2$, a equação (3.12) converge, quando $N \rightarrow \infty$, para a seguinte integral (convergente)

$$(e^{-\beta H} \varphi)(x_0) = \int_{\Omega_{x_0}} d\mu_{x_0}(X) e^{-\int_0^\beta V(X(\tau)) d\tau} \varphi(X(\beta)). \quad (3.14)$$

A equação acima é a fórmula de Feynman-Kac (como visto no capítulo anterior). Observamos ainda que, para fins de determinação do espectro de H , analisar o semigrupo $e^{-\beta H}$ é tão eficiente quanto analisar o semigrupo e^{-itH} .

3.2 Integrais Gaussianas e variáveis aleatórias

Os campos em teoria quântica de campos podem ser considerados como variáveis aleatórias associadas a uma medida Gaussiana que é perturbada por um termo de interação. A medida Gaussiana determina as propriedades das partículas livres. Nesta seção iremos fornecer definições e propriedades de variáveis aleatórias indexadas por conjuntos finitos. Isto é relevante para a teoria quântica de campos pois, inicialmente, sua construção é definida num reticulado com um número finito de pontos.

De agora em diante, consideraremos $N \in \mathbb{N}$, $A \in M_N(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes $N \times N$ com coeficientes reais), $A = A^t > 0$ (i.e., todos os auto-valores de A são positivos) e denotaremos $C = A^{-1}$. Denotamos o produto escalar em $\mathbb{R}^N$ por

$$(\phi, \varphi) = \sum_{i=1}^N \phi_i \varphi_i$$

e $d^N \phi = d\phi_1 \dots d\phi_N$.

Com esta notação, como podemos ver em [Sal99], é possível mostrar que

$$\int e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi)} d^N \phi = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \det A^{-\frac{1}{2}} = \det(2\pi C)^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

e para todo $J \in \mathbb{C}^N$

$$\int e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi) + (J, \phi)} d^N \phi = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \det A^{-\frac{1}{2}} = \det(2\pi C)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(J, C J)}. \quad (3.16)$$

Definição 3.2.1. Seja $C \in GL_N(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes reais $N \times N$ invertíveis), $C > 0$. A medida

$$d\mu_C(\phi) = (\det 2\pi C)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi)} d^N \phi \quad (3.17)$$

é chamada **medida Gaussiana** em $\mathbb{R}^N$ com média zero e matriz de covariância C .

Pela definição anterior, $\int d\mu_C(\phi) = 1$ e pelas equações (3.15) e (3.16), vale, para todo $J \in \mathbb{C}^N$, que

$$d\mu_C(\phi) e^{i(J,\phi)} = e^{-\frac{1}{2}(J,CJ)}. \quad (3.18)$$

Usando a relação acima podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \int d\mu_C(\phi) \phi_1 \phi_2 &= \left[\frac{\partial^2}{\partial J_1 \partial J_2} e^{\frac{1}{2}(J,CJ)} \right]_{J=0} \\ &= \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21}) = C_{12}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Observamos que o lado direito da equação (3.18) na realidade define uma medida para todo $C \geq 0$. A demonstração deste fato e do teorema seguinte podem ser encontradas em [Sal99].

Teorema 3.2.2. *Sejam $C_1, C_2 \in M_N(\mathbb{R})$, $C_i = C_i^t$, para $i \in \{1, 2\}$ e $C_1, C_2 \geq 0$. Defina $C = C_1 + C_2$. Então para todo $F \in L^1(d\mu_C)$,*

$$\begin{aligned} \int d\mu_C(\phi) F(\phi) &= \int d\mu_{C_1}(\phi_1) \int d\mu_{C_2}(\phi_2) F(\phi_1 + \phi_2) \\ &= \int d\mu_{C_1}(\phi_1) \int d\mu_{C_2}(\phi - \phi_1) F(\phi). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ou em outras palavras, se $C = C_1 + C_2$, a variável Gaussiana aleatória ϕ é a soma de duas variáveis Gaussianas aleatórias independentes, $\phi = \phi_1 + \phi_2$, e a medida Gaussiana se fatora, $d\mu_C(\phi) = d\mu_{C_1}(\phi_1) d\mu_{C_2}(\phi_2)$.

Definição 3.2.3. Seja Γ um conjunto de cardinalidade finita, $|\Gamma| = N$, e seja $F = \{\phi : \phi \text{ é função de } \Gamma \text{ em } \mathbb{R}\}$ (então $F \cong \mathbb{R}^N$). Para $\phi, \varphi \in F$, seja $(\phi, \varphi)_\Gamma = \sum_{x \in \Gamma} \phi(x) \varphi(x)$, e C uma aplicação linear definida em F , tal que $(\phi, C\phi) > 0$ para todo $\phi \neq 0$, e tome $A = C^{-1}$. Definimos a **medida Gaussiana de F** por

$$d\mu_C(\phi) = (\det 2\pi C)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi)} \prod_{i=1}^N d\phi(x). \quad (3.21)$$

3.3 Teoria de campos na rede

Nesta seção, teremos como objetivo, definir uma teoria de campos regularizada que corresponde à ação Euclideana

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \left(\frac{1}{2} \nabla \phi(x)^2 + \frac{m_{\phi^2}}{2} \phi(x)^2 + \lambda \phi^4 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \left[\phi(x) \frac{1}{2} (-\Delta + m_{\phi^2}) \phi(x) + \lambda \phi^4 \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde assumimos que ϕ e suas derivadas possuem decaimento rápido o suficiente, para que no limite infinito tais quantidades se anulem (i.e., não haverá termos de contorno nas integrais acima).

3.3.1 Discretização

Usaremos a regularização da rede (ou reticulado) como um método para definir a teoria de campos. Observamos que, a análise completa teoria de perturbação requer a passagem do limite para o contínuo depois do processo de regularização.

Discretizaremos o espaço e o tempo e introduzimos um volume finito. Por conveniência na utilização da transformada de Fourier, introduziremos o volume finito como sendo um toro de comprimento L . Considerando um reticulado de espaçamento $\varepsilon > 0$, definimos

$$\Gamma = \Gamma_{\varepsilon,L} = \varepsilon\mathbb{Z}^d / L\mathbb{Z}^d, \quad (3.23)$$

onde $\varepsilon > 0$ é tomado pequeno, $L \gg 1$ e $\frac{L}{2\varepsilon} \in \mathbb{N}$. Quando não houver confusão, denotaremos $\Gamma_{\varepsilon,L}$ simplesmente por Γ . Temos uma escolha particular de coordenadas escrevendo Γ como

$$\left\{ x \in \varepsilon\mathbb{Z}^d \mid -\frac{L}{2} \leq x_k < \frac{L}{2}, \forall k \in \{1, \dots, d\} \right\} \quad (3.24)$$

com condição de bordo periódica. A quantidade de pontos desse reticulado é

$$|\Gamma_{\varepsilon,L}| = \left(\frac{L}{\varepsilon} \right)^d. \quad (3.25)$$

A derivada contínua de um campo $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é discretizada por

$$d_\varepsilon \phi(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon} (\phi(x + \varepsilon e_k) - \phi(x)) \right)_{k \in \{1, \dots, d\}}, \quad (3.26)$$

onde e_k é o vetor unitário na k -ésima direção, e a ação discretizada é dada por

$$S_\Gamma(\phi) = \varepsilon^d \sum_{x \in \Gamma} \left(\frac{1}{2} (d_\varepsilon \phi(x))^2 + \frac{m_\phi^2}{2} \phi(x)^2 + \lambda \phi(x)^4 \right), \quad (3.27)$$

onde $\lambda \geq 0$ e $m \geq 0$, sendo m a massa e λ é o auto-acoplamento. Em detalhes,

$$S_\Gamma(\phi) = \varepsilon^d \sum_{x \in \Gamma} \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^d (\phi(x + \varepsilon e_k) - \phi(x))^2 + \frac{m_\phi^2}{2} \phi(x)^2 + \lambda \phi(x)^4 \right). \quad (3.28)$$

Se $\phi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ é obtido pela restrição $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d / L\mathbb{Z}^d, \mathbb{R})$ ao reticulado Γ (i.e., $\phi_\Gamma = \phi|_\Gamma$), então

$$S_{\Gamma_{\varepsilon,L}}(\phi_{\Gamma_{\varepsilon,L}}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S(\phi). \quad (3.29)$$

Muitas outras escolhas para S possuem a mesma propriedade acima, de forma que a ação definida na rede pode ser univocamente determinada pela ação contínua que desejamos regularizar. No entanto, diferentes ações podem ter o mesmo limite no contínuo para as funções de correlação do sistema mecânico estatístico dado por S (definido na próxima subseção).

Daqui para frente, usaremos a seguinte notação

$$\int_{\Gamma} dx F(x) = \varepsilon^d \sum_{x \in \Gamma} F(x), \quad (3.30)$$

que é sugerida pela convergência

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon, L}} dx F(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d / L\mathbb{Z}^d} dx F(x), \quad (3.31)$$

para qualquer $F \in C^1(\mathbb{R}^d / L\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$, e definimos um produto escalar em $\mathbb{C}^{\Gamma}$ por

$$(\phi, \psi)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} dx \overline{\phi(x)} \psi(x). \quad (3.32)$$

A **derivada regressiva** (do inglês *backward derivative*) d_{ε}^* , definida por

$$(d_{\varepsilon}^*)_k(x) = \frac{1}{\varepsilon}(\phi(x - \varepsilon e_k) - \phi(x)), \quad k \in \{1, \dots, d\} \quad (3.33)$$

o qual é a adjunto da **derivada progressiva** (do inglês *forward derivative*) d_{ε} :

$$(\phi, d_{\varepsilon} \psi)_{\Gamma} = (d_{\varepsilon}^* \phi, \psi)_{\Gamma}. \quad (3.34)$$

Observamos que não há termos de bordo, pois escolhemos o reticulado como um toro. Definindo o Laplaciano

$$\Delta = -d_{\varepsilon}^* d_{\varepsilon} \quad (3.35)$$

podemos fazer o análogo de uma integração por partes nas somas em S_{Γ} , e assim obter

$$\begin{aligned} S_{\Gamma}(\phi) &= \varepsilon^d \sum_{x \in \Gamma} \left[\phi(x) \frac{1}{2} \left((-\Delta + m_{\phi}^2) \phi \right)(x) + \lambda \phi(x)^4 \right] \\ &= \int_{\Gamma} dx \left(\frac{1}{2} \phi(x) ((-\Delta + m_{\phi}^2) \phi)(x) + \lambda \phi(x)^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\phi, (-\Delta + m_{\phi}^2) \phi \right)_{\Gamma} + \lambda \int_{\Gamma} dx \phi(x)^4. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A ação do Laplaciano é, mais explicitamente,

$$(-\Delta \phi)(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^d (2\phi(x) - \phi(x + \varepsilon e_k) - \phi(x - \varepsilon e_k)). \quad (3.37)$$

Visto que para todo ϕ ,

$$(\phi, -\Delta\phi)_\Gamma = (d_\varepsilon\phi, d_\varepsilon\phi)_\Gamma \geq 0, \quad (3.38)$$

$-\Delta$ é um operador não-negativo, assim como sua versão contínua.

Todo operador linear em $\mathbb{C}^\Gamma$ é, quando representado em uma base, uma matriz em $M_{|\Gamma|}(\mathbb{C})$. Escolhendo a base ortonormal $(E_x)_{x \in \Gamma}$ por $E_x(y) = \delta_\Gamma(x, y)$, onde

$$\delta_\Gamma(x, y) = \varepsilon^{-d} \delta_{xy}, \quad (3.39)$$

temos que $\phi(x) = (E_x, \phi)_\Gamma$ e

$$\int_\Gamma dy E_y(x) E_y(x') = \delta_\Gamma(x, x'), \quad (3.40)$$

então

$$(A\phi)(x) = \int_\Gamma dy A(x, y) \phi(y) \quad (3.41)$$

com a representação matricial (ou “núcleo integral”)

$$A(x, y) = (E_x, AE_y) \quad (3.42)$$

de A . Em particular, a matriz unitária tem núcleo $1(x, y) = \delta_\Gamma(x, y)$. O núcleo distribucional corresponde no contínuo é o delta de Dirac $\delta(x - y)$. Se A é invertível, o núcleo da inversa satisfaz

$$\int_\Gamma dz A(x, z) (A^{-1})(z, y) = \delta_\Gamma(x, y). \quad (3.43)$$

Também definimos a derivada

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} = \varepsilon^{-d} \frac{\partial}{\partial J(x)}, \quad (3.44)$$

de forma que,

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta_\Gamma(x, y). \quad (3.45)$$

Isto também coincide com a convensão formal no contínuo

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta(x - y). \quad (3.46)$$

Com isso, temos

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{(J, \phi)r} = J(x) e^{(J, \phi)r} \quad (3.47)$$

O laplaciano tem o núcleo

$$\begin{aligned} -\Delta(x, y) &= \varepsilon^{-d-2} \sum_{k=1}^d (2\delta_{xy} - \delta_{x+\varepsilon e_k, y} - \delta_{x-\varepsilon e_k, y}) \\ &= \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^d (2\delta_\Gamma(x, y) - \delta_\Gamma(x + \varepsilon e_k, y) - \delta_\Gamma(x - \varepsilon e_k, y)) \end{aligned} \quad (3.48)$$

(no contínuo, o núcleo distribucional seria $(-\Delta\delta)(x - y)$).

3.3.2 A função de partição e correlações

Com $D_\Gamma \phi = \prod_{x \in \Gamma} d\phi(x)$, a integral funcional com fontes $J : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$Z_{\Gamma,\lambda}(J) = \int D_\Gamma \phi e^{-S_\Gamma(\phi) + (J,\phi)_\Gamma}. \quad (3.49)$$

Esta integral converge se $\lambda \geq 0$ e $m_\phi > 0$, ou se $\lambda > 0$ e $m_\phi^2 = \mu \in \mathbb{R}$ é arbitrário.

O valor esperado (ou a esperança) de um observável, i.e., as funções do campo ϕ , são definidas por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z_{\Gamma,\lambda}(0)} \int D_\Gamma \phi e^{-S_\Gamma(\phi)} \mathcal{O}(\phi) \quad (3.50)$$

Admitimos apenas os observáveis $\mathcal{O}$ para os quais a integral converge.

Definição 3.3.1. As funções de correlação de Schwinger, também chamadas de funções de Green, são

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z_{\Gamma,\lambda}(0)} \int D_\Gamma \phi e^{-S_\Gamma(\phi)} \prod_{k=1}^n \phi(x_k). \quad (3.51)$$

Tais momentos podem ser calculados como derivadas de $Z_{\Gamma,\lambda}(J)$ com respeito a J , pela formula

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \left[\frac{1}{Z_{\Gamma,\lambda}} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z_{\Gamma,\lambda}(J) \right]_{J=0}. \quad (3.52)$$

Logo, as funções de partição $Z_{\Gamma,\lambda}(J)$ com termos fonte J contém todas a informações sobre as funções de correlações. As derivadas

$$\left[\frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \log Z_{\Gamma,\lambda}(J) \right]_{J=0} \quad (3.53)$$

são definidas como sendo as funções de correlação truncadas.

3.4 Campos livres

Para $\lambda = 0$, a integral é Gaussiana. Isto corresponde ao caso de partículas livres (sem interação). Observamos que a ação deste caso é diagonal no espaço de Fourier. Daremos apenas as definições principais da transformada de Fourier.

O reticulado dual de Γ é $\Gamma^* = \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^d / \frac{2\pi}{\epsilon} \mathbb{Z}^d$. Definimos $p \cdot x = p_1 x_1 + \dots + p_d x_d$, $\int_{\Gamma^*} dp \tilde{F}(p) = L^{-d} \sum_{p \in \Gamma^*} \tilde{F}(p)$, e $\delta_{\Gamma^*}(p, q) = L^d \delta_{pq}$. A transformada de Fourier de $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ é $\tilde{f} : \Gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\tilde{f}(p) = \int_{\Gamma} dx e^{ip \cdot x} f(x). \quad (3.54)$$

A relação inversa é

$$f(x) = \int_{\Gamma} dp e^{ip \cdot x} \tilde{f}(p). \quad (3.55)$$

Denotamos o produto escalar de funções $\tilde{\phi}, \tilde{\psi} \in \mathbb{C}^{\Gamma^*}$ por

$$(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})_{\Gamma^*} = \int_{\Gamma^*} dp \overline{\tilde{\phi}(p)} \tilde{\psi}(p). \quad (3.56)$$

A transformada de Fourier é unitária: $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})_{\Gamma^*} = (\phi, \psi)_{\Gamma}$. O núcleo integral de um operador linear é transformado da seguinte forma:

$$\tilde{A}(p, q) = \int_{\Gamma} dx \int_{\Gamma} dy e^{-ip \cdot x} A(x, y) e^{iq \cdot y}. \quad (3.57)$$

Por (3.48) e (3.57), a transformada de Fourier do núcleo do reticulado do Laplaciano é

$$-\tilde{\Delta}(p, q) = \delta_{\Gamma^*}(p, q) D_{\varepsilon}(p) \quad (3.58)$$

com

$$D_{\varepsilon}(p) = \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^d (1 - \cos(\varepsilon p_k)). \quad (3.59)$$

Ou seja, o laplaciano é diagonal na base de Fourier. Assim

$$(-\tilde{\Delta} + m_{\phi}^2)^{-1}(p, q) = \delta_{\Gamma^*}(p, q) \frac{1}{m_{\phi}^2 + D_{\varepsilon}(p)} = \delta_{\Gamma^*}(p, q) \tilde{C}_{\varepsilon}(p). \quad (3.60)$$

No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, $D_{\varepsilon}(p) \rightarrow p^2$, teremos

$$(-\tilde{\Delta} + m_{\phi}^2)^{-1}(p, q) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} L^d \delta_{pq} \frac{1}{p^2 + m_{\phi}^2} = \delta_{\Gamma^*}(p, q) \tilde{C}(p). \quad (3.61)$$

A forma quadrática definida pela ação é

$$\begin{aligned} (\phi, (-\Delta + m_{\phi}^2)\phi)_{\Gamma} &= \int_{\Gamma^*} dp \overline{\tilde{\phi}(p)} (m_{\phi}^2 + D_{\varepsilon}(p)) \tilde{\phi}(p) \\ &= \int_{\Gamma^*} dp \tilde{\phi}(-p) (m_{\phi}^2 + D_{\varepsilon}(p)) \tilde{\phi}(p), \end{aligned} \quad (3.62)$$

visto que $\phi(x) \in \mathbb{R}$, para todo x , segue que $\tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(-p)$. Logo, a função de partição é

$$Z_{\Gamma, \lambda}(J) = Z_{\Gamma, 0}(0) \int d\mu_{C_{\Gamma}}(\phi) e^{-\lambda \int_{\Gamma} \phi(x)^4 dx + (J, \phi)_{\Gamma}}, \quad (3.63)$$

onde a constante de normalização da medida Gaussiana

$$Z_{\Gamma, 0}(0) = \det(2\pi C_{\Gamma})^{1/2} = \prod_{p \in \Gamma^*} \left(\frac{2\pi}{\varepsilon^d} L^d \frac{1}{m_{\phi}^2 + D_{\varepsilon}(p)} \right)^{1/2} \quad (3.64)$$

é irrelevante pois sai do quociente que define as funções de correlação. Podemos então redefinir $Z_{\Gamma,\lambda}(J)$ de modo que não contenha tal constante, obtendo

$$Z_{\Gamma,\lambda}(J) = \int d\mu_{C_\Gamma}(\phi) e^{-\lambda V(\phi) + (J,\phi)_\Gamma} \quad (3.65)$$

com $V(\phi) = \int_\Gamma \phi(x)^4 dx$. A parte quadrática da ação, que define a covariância C_Γ da medida Gaussiana, descreve partículas livres que se propagam de x para y (gráficamente isto pode ser denotado por uma linha conectando x e y). O termo de interação descreve a influência de uma partícula sobre a outra.

3.5 Propriedades da covariância livre

As propriedades de $C_\Gamma(x, y)$ no limite $L \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$ são centrais para a questão de por que a renormalização é necessária. Para $\varepsilon > 0$ e $L < \infty$,

$$C_\Gamma(x, y) = \int_{\Gamma^*} dp \frac{e^{ip(x-y)}}{m_\phi^2 + D_\varepsilon(p)}. \quad (3.66)$$

Para $m_\phi > 0$, o denominador é sempre não nulo, então o somando é contínuo em p em $\mathbb{R}^d / \frac{2\pi}{\varepsilon} \mathbb{Z}^d$ e pode-se tomar o limite $L \rightarrow \infty$, no qual a soma de Riemann $\int_{\Gamma^*} dp$ se torna a integral $\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{B}} dp$ onde $\mathcal{B} = \mathbb{R}^d / \frac{2\pi}{\varepsilon} \mathbb{Z}^d$. Em outras palavras, a integral é tomada sobre $[-\frac{\pi}{\varepsilon}, \frac{\pi}{\varepsilon})^d$. Assim,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} C(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{B}} d^d p \frac{e^{ip(x-y)}}{m_\phi^2 + D_\varepsilon(p)}. \quad (3.67)$$

O limite $\varepsilon \rightarrow 0$ existe se $x - y \neq 0$, e é dado pela integral

$$C(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d^d p \frac{e^{ip(x-y)}}{m_\phi^2 + D_\varepsilon(p)}. \quad (3.68)$$

Pode-se calcular $C(x, y)$ em termos de uma função de Bessel modificada

$$C(x, y) = (2\pi)^{-d/2} \left(\frac{m_\phi}{|x - y|} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(m|x - y|). \quad (3.69)$$

Em particular, para $d = 3$,

$$C(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} e^{-m_\phi|x - y|}. \quad (3.70)$$

Muitas propriedades de C podem, no entanto, ser encontradas sem nenhuma fórmula explícita. Por exemplo, o decaimento exponencial quando $|x - y| \rightarrow \infty$ segue diretamente da analiticidade de $1/(p^2 + m_\phi^2)$ para $|p| < m$. Da invariância por translação e rotação,

segue que $C(x, y)$ é uma função de $|x - y|$. Fazendo uma análise de escala para o fator m_ϕ , obtemos

$$C(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip(x-y)}}{m_\phi^2 + p^2} = m_\phi^{d-2} \tilde{C}_d(m_\phi |x - y|) \quad (3.71)$$

com

$$\tilde{C}_d(t) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip_1 t}}{1 + p^2}. \quad (3.72)$$

Lema 3.5.1. (i) Para todo $t > 0$, $\tilde{C}_d(t) > 0$;

(ii) Para $t \geq 1$, $\tilde{C}_d(t) \leq \text{const } t^{-\frac{d-1}{2}} e^{-t}$;

(iii) Para $t \leq 1$,

$$\tilde{C}_d(t) = \text{const} \begin{cases} t^{-(d-2)}, & \text{se } d \geq 3 \\ \log t, & \text{se } d = 2 \end{cases}. \quad (3.73)$$

As limitações se tornam precisas quanto $t \rightarrow 0$. A constante depende apenas de d .

Note que $C(x, x)$ não está definida, pois existe uma singularidade no propagador para distâncias pequenas. Este é o comportamento usual de uma função de Green, mas também a razão de porque a normalização é necessária. Para $|x - y|$ grande, $|C(x, y)| \leq \text{const } e^{-m_\phi |x-y|}$. Se m_ϕ fosse zero, isso seria substituído por uma lei polinômial de decaimento. Para $\epsilon > 0$, não existem singularidades, mas o propagador cresce quando $\epsilon \rightarrow \infty$

Observação. O propagador reticulado obedece

$$C_{\Gamma_{\epsilon,L}}(x, x) \sim \text{const} \begin{cases} \log \epsilon, & \text{se } d = 2 \\ \epsilon^{-(d-2)}, & \text{se } d \geq 3 \end{cases} \quad (3.74)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. Para $d = 2$, a constante depende de $m_\phi > 0$.

Demonstração. Como

$$p^2 \geq \frac{2}{\epsilon^2} (1 - \cos(p\epsilon)) \geq \frac{2}{\pi^2} p^2, \quad (3.75)$$

temos que

$$\int_{[-\frac{\pi}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon}]^d} \frac{d^d p}{p^2 + m_\phi^2} \leq \int_{[-\frac{\pi}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon}]^d} \frac{d^d p}{m_\phi^2 + D_\epsilon(p)} \leq \int_{[-\frac{\pi}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon}]^d} \frac{d^d p}{m_\phi^2 + \frac{2}{\pi^2} p^2} \quad (3.76)$$

Visto que

$$\left\{ p : |p| \leq \frac{\pi}{\epsilon} \right\} \subset \left[-\frac{\pi}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon} \right]^d \subset \left\{ p : |p| \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{\epsilon} \right\}, \quad (3.77)$$

temos que

$$\int_{\{p: |p| \leq \frac{\pi}{\varepsilon}\}} \frac{d^d p}{p^2 + m_\phi^2} \leq C_{\Gamma_{\varepsilon, L}}(x, x) \leq \int_{\{p: |p| \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{\varepsilon}\}} \frac{d^d p}{m_\phi^2 + \frac{2}{\pi^2} p^2}. \quad (3.78)$$

Tanto o limitante inferior quanto o superior se comportam da mesma maneira. $\square$

Afim de não nos alongarmos muito neste tópico; a passagem do problema para o contínuo num volume infinito não será feita aqui. No entanto, este é um resultado que pode ser encontrado em vários livros. Boas referências para um estudo mais aprofundado do assunto são [Sal99] e [EdF10].

Funções de correlação

A fórmula de Feynman-Kac, vista no Capítulo 2, permite relacionar valores esperados no vácuo (produtos internos no espaço de Hilbert subjacente) a funções de correlação $S^{(n)}$; que serão definidas como sendo as integrais em (2.58).

Sendo assim, iremos utilizar esta fórmula afim de obter expressões convenientes para as funções de correlação associadas ao nosso problema no volume finito $[-T, T] \times \Lambda$. Depois disso, realizaremos a chamada expansão em conglomerados (do inglês *cluster expansion*) para obter as funções de correlação no limite de volume infinito $[-T, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$. Feito isso, será possível determinar o espectro de H considerando propriedades de analiticidade da representação espectral para a transformada de Fourier das funções de correlação.

4.1 As funções de correlação no volume finito

Iniciaremos a análise do nosso problema nos restringindo ao caso em que as coordenadas espaciais $\vec{x}$ pertencem a um conjunto finito de pontos Λ do reticulado $\mathbb{Z}^d$. A princípio, iremos obter algumas propriedades elementares do espectro do operador

$$H_\Lambda f = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi(\vec{x})^2} - \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial f}{\partial \varphi(\vec{x})} \right], \quad (4.1)$$

que é o gerador do semi-grupo fortemente contínuo que define a evolução temporal de uma função f da configuração de spin $\varphi(\vec{x})$ no nosso problema.

Para $d\varphi_\Lambda = \prod_{\vec{x} \in \Lambda} d\varphi(\vec{x})$, seja

$$d\mu_\Lambda(\varphi) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-S_\Lambda} d\varphi_\Lambda, \quad (4.2)$$

onde S_Λ , definida em Λ com condições periódicas de contorno, é dada por

$$S_\Lambda(\varphi(\vec{x})) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^d (\varphi(\vec{x} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{x}))^2 + m^2 \varphi(\vec{x})^2 \right] + \lambda \mathcal{P}(\varphi(\vec{x})) \right\} \quad (4.3)$$

e Z_Λ é uma normalização para $d\mu_\Lambda$, ie, $\int d\mu_\Lambda/Z_\Lambda = 1$.

Definição 4.1.1. Dizemos que um operador da forma

$$Tf(x) = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} + V(x)f(x)$$

é do **tipo Schrödinger** para uma partícula de massa unitária.

Proposição 4.1.2. O operador H_Λ dado na equação (4.1) é unitariamente equivalente a um operador do tipo Schrödinger.

Demonstração. Seja $U_\Lambda : L^2(d\mu_\Lambda) \rightarrow L^2(d\varphi_\Lambda)$ o operador unitário dado por

$$U_\Lambda f(\varphi) = \frac{1}{Z_\Lambda^{1/2}} e^{-1/2S_\Lambda(\varphi)} f(\varphi).$$

Temos que

$$\begin{aligned} L_\Lambda &= (U_\Lambda H_\Lambda U_\Lambda^{-1})f(\varphi) \\ &= U_\Lambda \left(-\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi(\vec{x})^2} Z_\Lambda^{1/2} e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} f(\varphi) - \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial \varphi(\vec{x})} Z_\Lambda^{1/2} e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} f(\varphi) \right] \right) \\ &= \frac{1}{Z_\Lambda^{1/2}} e^{-1/2S_\Lambda(\varphi)} \left(-\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi(\vec{x})^2} Z_\Lambda^{1/2} e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} f(\varphi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial \varphi(\vec{x})} Z_\Lambda^{1/2} e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} f(\varphi) \right] \right) \\ &= e^{-1/2S_\Lambda(\varphi)} \left(-\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi(\vec{x})} \left\{ e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} + \frac{e^{1/2S_\Lambda(\varphi)}}{2} f(\varphi) \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \right\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left\{ e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} + \frac{e^{1/2S_\Lambda(\varphi)}}{2} f(\varphi) \left(\frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \right)^2 \right\} \right] \right) \\ &= \frac{-e^{-1/2S_\Lambda(\varphi)}}{2} \left(\sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})^2} + \frac{e^{1/2S_\Lambda(\varphi)}}{2} \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e^{1/2S_\Lambda(\varphi)}}{2} \left\{ \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} + f(\varphi) \frac{\partial^2 S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})^2} \right\} + \frac{e^{1/2S_\Lambda(\varphi)}}{4} \left\{ \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \right\}^2 f(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{1/2S_\Lambda(\varphi)} \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} - \frac{e^{1/2S_\Lambda(\varphi)}}{2} \left\{ \frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \right\}^2 f(\varphi) \right] \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})^2} f(\varphi) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \right)^2 f(\varphi) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})^2} + \frac{1}{4} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})} \right)^2 f(\varphi) - \frac{\partial^2 S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi(\vec{x})^2} f(\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_\Lambda = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\partial^2 S_\Lambda(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right], \quad (4.4)$$

como queríamos. $\square$

Sendo assim, uma vez que operadores unitariamente equivalentes possuem o mesmo espectro, iremos obter as propriedades espectrais de H_λ através do espectro do operador L_Λ .

Agora, usando a expressão de $S_\Lambda(\varphi(\vec{x}))$ dada em (4.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\Lambda(\varphi(\vec{y}))}{\partial \varphi(\vec{x})} &= \sum_{\vec{y} \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial \varphi(\vec{x})} [\varphi(\vec{y} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{y})]^2 + m^2 \frac{\partial \varphi^2(\vec{y})}{\partial \varphi(\vec{x})} \right] + \lambda \frac{\partial \mathcal{P}(\varphi(\vec{y}))}{\partial \varphi(\vec{x})} \right\} \\ &= \sum_{\vec{y} \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^d 2 [\varphi(\vec{y} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{y})] \left(\frac{\partial \varphi(\vec{y} + \vec{e}_i)}{\partial \varphi(\vec{x})} - \frac{\partial \varphi(\vec{y})}{\partial \varphi(\vec{x})} \right) + 2m^2 \frac{\partial \varphi(\vec{y})}{\partial \varphi(\vec{x})} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \mathcal{P}'(\varphi(\vec{y})) \frac{\partial \varphi(\vec{y})}{\partial \varphi(\vec{x})} \right\} \\ &= \sum_{\vec{y} \in \Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^d [\varphi(\vec{y} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{y})] [\delta(\vec{y} + \vec{e}_i - \vec{x}) - \delta(\vec{y} - \vec{x})] + m^2 \varphi(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{x}) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \mathcal{P}'(\varphi(\vec{y})) \delta(\vec{y} - \vec{x}) \right\} \\ &= \sum_{\vec{y} \in \Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^d [\varphi(\vec{y} + \vec{e}_i) \delta(\vec{y} + \vec{e}_i - \vec{x}) - \varphi(\vec{y} + \vec{e}_i) \delta(\vec{y} - \vec{x}) - \varphi(\vec{y}) \delta(\vec{y} + \vec{e}_i - \vec{x}) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{x})] + m^2 \varphi(\vec{x}) + \lambda \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^d [\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{x} - \vec{e}_i) + \varphi(\vec{x})] + m^2 \varphi(\vec{x}) + \lambda \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) \\ &= 2d\varphi(\vec{x}) - \sum_{i=1}^d [\varphi(\vec{x} + \vec{e}_i) + \varphi(\vec{x} - \vec{e}_i)] + m^2 \varphi(\vec{x}) + \lambda \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) \\ &= 2d\varphi(\vec{x}) - \sum_{|\vec{x} - \vec{y}|=1} \varphi(\vec{y}) + m^2 \varphi(\vec{x}) + \lambda \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})). \end{aligned}$$

Visto que o Laplaciano no reticulado Λ , com condições periódicas de contorno, satisfaz

$$(\Delta \varphi)(\vec{x}) = 2d\varphi(\vec{x}) - \sum_{|\vec{x} - \vec{y}|=1} \varphi(\vec{y}), \quad (4.5)$$

obtemos que

$$\frac{\partial S_\Lambda(\varphi(\vec{y}))}{\partial \varphi(\vec{x})} = [(-\Delta + m^2)\varphi](\vec{x}) + \lambda \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})),$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_\Lambda(\varphi(\vec{y}))}{\partial \varphi(\vec{x})} \right)^2 &= [(-\Delta + m^2)\varphi]^2(\vec{x}) + 2\lambda [(-\Delta + m^2)\varphi](\vec{x})\mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) + \lambda^2 \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x}))^2 \\ &= \varphi(\vec{x}) [(-\Delta + m^2)^2\varphi](\vec{x}) + 2\lambda [(-\Delta + m^2)\varphi](\vec{x})\mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) + \lambda^2 \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x}))^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_\Lambda(\varphi(\vec{y}))}{\partial \varphi(\vec{x})^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi(\vec{x})} \left[2d\varphi(\vec{x}) - \sum_{|\vec{x}-\vec{y}|=1} \varphi(\vec{y}) + m^2\varphi(\vec{x}) + \lambda\mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) \right] \\ &= 2d \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial \varphi(\vec{x})} - \sum_{|\vec{x}-\vec{y}|=1} \frac{\partial \varphi(\vec{y})}{\partial \varphi(\vec{x})} + m^2 \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial \varphi(\vec{x})} + \lambda \mathcal{P}''(\varphi(\vec{x})) \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial \varphi(\vec{x})} \\ &= 2d - \sum_{|\vec{x}-\vec{y}|=1} \delta(\vec{y} - \vec{x}) + m^2 + \lambda \mathcal{P}''(\varphi(\vec{x})) \\ &= 2d + m^2 + \lambda \mathcal{P}''(\varphi(\vec{x})). \end{aligned}$$

Então, substituindo tais derivadas na equação (4.4) concluímos que podemos tomar

$$\begin{aligned} L_\Lambda &= -\frac{1}{2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \frac{\partial^2}{\partial \varphi(\vec{x})^2} + \frac{1}{8} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \varphi(\vec{x}) [(-\Delta + m^2)^2\varphi](\vec{x}) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} [(-\Delta + m^2)\varphi](\vec{x})\mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) + \\ &\quad + \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\lambda^2}{8} \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x}))^2 - \frac{\lambda}{4} \mathcal{P}''(\varphi(\vec{x})) - \frac{2d + m^2}{4} \right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Proposição 4.1.3. *O operador L_Λ é limitado inferiormente.*

Demonstração. É suficiente provarmos que cada umas das parcelas das somas em L_Λ é um operador limitado inferiormente.

Utilizando a transformada de Fourier, podemos concluir que os operadores $(-\Delta)$ e $\left(-\sum_{\vec{x} \in \Lambda} \frac{\partial^2}{\partial \varphi(\vec{x})^2}\right)$ são unitariamente equivalentes a um operador de multiplicação não-negativo (tipo p^2). Logo o operador

$$\varphi(\vec{x}) [(-\Delta + m^2)^2\varphi](\vec{x}) = [(-\Delta + m^2)\varphi]^2(\vec{x})$$

também é ≥ 0 . Já os termos de interação com o fator de multiplicação λ podem ser controlados, tendo em vista que o Teorema 1.0.1 nos permite tomar este coeficiente suficientemente pequeno. Por fim, observando que o termo $(2d + m^2)/4$ é um operador de multiplicação por uma constante, o resultado segue. $\square$

Observe que, do resultado acima, podemos concluir que o espectro de L_Λ está contido em $[c, \infty)$, onde c é uma constante (possivelmente negativa). Além disso, note que o operador $L_\Lambda + (2d + m^2)/4$ possui o mesmo espectro de L_Λ a menos de uma translação que o torna um operador positivo. Como estamos interessados apenas nas propriedades espectrais de H_Λ , será suficiente estudar o espectro de $L_\Lambda + (2d + m^2)/4$ e, portanto, a partir de agora, passaremos a considerar H_Λ como sendo tal operador positivo.

Consideremos o potencial de interação dos campos φ dados por

$$\begin{aligned} V(\varphi(\vec{x})) = & \sum_{\vec{x} \in \Lambda} [(-\Delta + m^2)\varphi]^2(\vec{x}) + \\ & + \frac{\lambda}{4} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} [(-\Delta + m^2)\varphi](\vec{x}) \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x})) + \\ & + \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\lambda^2}{8} \mathcal{P}'(\varphi(\vec{x}))^2 - \frac{\lambda}{4} \mathcal{P}''(\varphi(\vec{x})) - \frac{2d + m^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) V é auto-adjunto,
- (ii) $V \in L^2_{loc}(d\varphi)$,
- (iii) $V(\varphi(\vec{x})) \rightarrow \infty$ quando $|\varphi(\vec{x})| \rightarrow \infty$,
- (iv) Existe $\beta \in (-\infty, \infty)$ tal que $V(\varphi(x)) > \beta$.

Pelo Teorema XIII.16 de [SR78], se V é uma função localmente limitada e positiva, tal que $V(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$ então o operador $[-\Delta + V]$ tem espectro puramente discreto. Portanto, considerando o potencial $V_1 = V - \beta$ podemos concluir o mesmo resultado para H_Λ . Para mais detalhes veja [MS05].

Das considerações feitas acima, concluímos o resultado que segue.

Teorema 4.1.4. *O operador H_Λ é positivo e possui espectro puramente discreto.*

Agora, sejam $f_1, \dots, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_\Lambda)$ funções das configurações de spin em Λ e seja $\Omega(\varphi) = 1$ o estado fundamental de H_Λ . Utilizando a fórmula de Feynman-Kac e a relação entre H_Λ e L_Λ , obtemos para $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned} & (\Omega, f_1 e^{-(t_2-t_1)H_\Lambda} f_2 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})H_\Lambda} f_n \Omega)_{L^2(d\mu_\Lambda)} \\ &= (U_\Lambda^{-1} U_\Lambda \Omega, f_1 e^{-(t_2-t_1)H_\Lambda} f_2 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})H_\Lambda} f_n \Omega)_{L^2(d\mu_\Lambda)} \\ &= (U_\Lambda \Omega, U_\Lambda f_1 e^{-(t_2-t_1)H_\Lambda} f_2 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})H_\Lambda} f_n \Omega)_{L^2(d\varphi_\Lambda)} \\ &= (U_\Lambda \Omega, f_1 U_\Lambda e^{-(t_2-t_1)H_\Lambda} U_\Lambda^{-1} f_2 \dots U_\Lambda e^{-(t_n-t_{n-1})H_\Lambda} U_\Lambda^{-1} f_n U_\Lambda \Omega)_{L^2(d\varphi_\Lambda)} \end{aligned}$$

e como $e^{-\alpha L_\Lambda} \equiv U_\Lambda e^{-\alpha H_\Lambda} U_\Lambda^{-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} (\Omega, f_1 e^{-(t_2-t_1)H_\Lambda} f_2 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})H_\Lambda} f_n \Omega)_{L^2(d\mu_\Lambda)} \\ = (U_\Lambda \Omega, f_1 e^{-(t_2-t_1)L_\Lambda} f_2 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})L_\Lambda} f_n \Omega)_{L^2(d\varphi_\Lambda)} \\ = \int f_1(\varphi_{\vec{x}_1}(t_1)) \dots f_n(\varphi_{\vec{x}_n}(t_n)) d\rho_\Lambda, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde a medida ρ_Λ é dada pelo limite fraco de

$$d\rho_{\Lambda,T} = \frac{e^{-W_{\Lambda,T}} d\nu_\Lambda}{\int e^{-W_{\Lambda,T}} d\nu_\Lambda}, \text{ quando } T \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

sendo que $W_{\Lambda,T} \equiv W_{\Lambda,T}(\varphi)$ é dado por

$$\begin{aligned} W_{\Lambda,T} = \int_{-T}^T \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{\lambda}{4} \mathcal{P}'(\varphi(t, \vec{x}))(-\Delta + m^2) \varphi(t, \vec{x}) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{8} \mathcal{P}'(\varphi(t, \vec{x}))^2 - \frac{\lambda}{4} \mathcal{P}''(\varphi(t, \vec{x})) \right] dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

e $d\nu_\Lambda$ é a medida Gaussiana normalizada com média zero e covariância dada por

$$\begin{aligned} C_\Lambda(t, \vec{x}; t', \vec{y}) &= \int \varphi(t, \vec{x}) \varphi(t', \vec{y}) d\nu_\Lambda \\ &= \frac{1}{2\pi|\Lambda|} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \sum_{\vec{p} \in \tilde{\Lambda}} \frac{e^{ip_0(t-t')} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})}}{(p_0)^2 + \left[\frac{(\vec{p}_l)^2}{2} + \frac{m^2}{2} \right]^2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $(\vec{p}_l)^2 \equiv 2 \sum_{i=1}^d (1 - \cos p^i)$, $|\Lambda|$ é o número de pontos em Λ , $\tilde{\Lambda}$ é o “dual” de Λ pela transformada de Fourier, $\vec{p} = (p^1, \dots, p^d) \in \tilde{\Lambda}$ e $\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \sum_{i=1}^d p^i (x^i - y^i)$. Note que C_Λ é justamente a transformada de Fourier de C_0 dada em (1.8). Também observamos que esta covariância difere da covariância usual para um modelo de campos escalar, como analisado no Capítulo 3, onde C_0 é o operador de Klein-Gordon.

Se tomarmos $f_i(\varphi_{\vec{x}_i}(t_i)) = \varphi_{\vec{x}_i}(t_i) \equiv \varphi(t_i, \vec{x}_i)$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, na relação (4.7), obteremos as funções de correlação (de Schwinger) de n pontos no volume finito Λ :

$$S_{\lambda,\Lambda}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \varphi(t_1, \vec{x}_1) \dots \varphi(t_n, \vec{x}_n) d\rho_\Lambda. \quad (4.11)$$

Conforme pode ser visto em [Dim90]¹ (ou no Capítulo 18 de [GJ87], para o caso $d = 2$), usando métodos de expansão em *cluster*, o limite termodinâmico $[-T, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$ pode ser tomado na equação (4.7) (ao menos para λ suficientemente pequeno e m suficientemente grande). Os métodos estabelecidos por Dimock em [Dim90] para obtenção

¹veja observações (1) e (2) feitas no final deste artigo

de tal convergência em expansão cluster serão, em parte, utilizados no capítulo seguinte na realização de algumas estimativas.

Na seção seguinte, forneceremos um resumo das ideias principais encontradas neste artigo e, no próximo capítulo, utilizaremos as técnicas que serão empregadas para demonstração de alguns resultados.

4.2 O limite termodinâmico das funções de correlação

Para mostrar a existência do limite termodinâmico, basta analisar a existência de integrais funcionais do tipo

$$\int F(\varphi) e^{-W_\Lambda(\varphi)} d\mu_C,$$

com $d\mu_C = (1/\int e^{-W_\Lambda}) d\nu_\Lambda$ (onde $d\nu_\Lambda$ como em (4.8)) e $F(\varphi) = \varphi(t_1, \vec{x}_1) \cdots \varphi(t_n, \vec{x}_n)$, no limite $[-T, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$. Afim de facilitar nossa análise destes objetos, iremos definir uma nova covariância C^* . Ela é obtida a partir da covariância C_Λ omitindo-se o termo não local nas coordenadas espaciais (termos que envolvem o Laplaciano da rede). Este termo será agregado ao nosso potencial W_Λ (já não local nas coordenadas espaciais). Com esse rearranjo, temos que questões relacionadas à não-localidade e ao decaimento da variável temporal estarão associadas a nova covariância, e àquelas ligadas as variáveis espaciais estarão relacionadas ao novo potencial estendido. Explicitamente, a nova covariância C^* é definida por

$$\int \varphi(x)\varphi(y) d\mu_{C^*} = \int \frac{e^{ip^0(x^0-y^0)} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{(p^0)^2 + [(1-\varepsilon)m^2/2]^2} dp, \quad (4.12)$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno. O potencial $W_{\Lambda,T}$ será então substituído por um novo potencial V_T , dado por

$$V_T(\varphi) = W_{\Lambda,T}(\varphi) + \int_{-T}^T (\varphi(t, \vec{x}), \Upsilon \varphi(t, \vec{x}))_{L^2(d\varphi_\Lambda)} dt, \quad (4.13)$$

onde $\Upsilon = \left(\frac{1}{8}\Delta^2 - \frac{m^2}{4}\Delta + \frac{\varepsilon m^4}{8} \right)$. Sendo assim, o problema da determinação das funções de correlação no volume infinito se resume agora à análise de integrais funcionais do tipo

$$\int F(\varphi) e^{-V_T(\varphi)} d\mu_{C^*}. \quad (4.14)$$

Conforme mostrado por Dimock em [Dim90], tais funções possuem decaimento exponencial em $\vec{x}$ e x^0 , uniforme no volume $[-T, T] \times \Lambda$. Para provar isso, as não localidades de V_Λ e $d\mu_{C^*}$ são, *a priori*, tratadas separadamente. Primeiro, realizando a expansão de Mayer, obtém-se uma estimativa uniforme no volume para e^{-V_T} . Depois, através do método de separação de hiperplanos, a medida $\nu_{C_\Lambda^*}$ é expandida em outras medidas cujas

covariâncias desacoplam certas regiões do espaço e do tempo, e assim a integral $\int F d\mu_{C^*}$ pode ser escrita como uma soma de funções que se decompõe em tais regiões. Por último, combinando as expansões de Mayer e da medida ν_{C^*} , o autor obtém uma estimativa para a integral (4.14) que é uniforme no volume $[-T, T] \times \Lambda$ e, a partir daí, conclui a existência das funções de correlação no limite $[-T, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$.

As expressões limite correspondentes para as equações de (4.6) a (4.10) também podem ser obtidas da mesma forma. Na passagem deste limite, a soma normalizada $(1/\Lambda)\Sigma_{\vec{p} \in \tilde{\Lambda}}$ na equação (4.10) dá lugar a integral $[1/(2\pi)^d] \int_{T^d} d\vec{p}$ sobre o toro d -dimensional $T^d = [-\pi, \pi]^d$. Para denotar as quantidades no limite termodinâmico usaremos as mesmas notações anteriores, mas agora sem o sub-índice Λ .

No que segue, explicamos resumidamente a expansão de Mayer. A expansão em hiperplanos será discutida na última seção.

4.2.1 A expansão de Mayer

Inicialmente iremos decompor o intervalo de integração em V_I em intervalos unitários $I = [i, i+1)$ e escrever

$$V_T = \sum_I V_I = \sum_I \left(\sum_{\vec{x}} V_{I,\vec{x}} + \sum_b V_{I,b} \right), \quad (4.15)$$

onde $\vec{x} \in \Lambda$ e $V_{I,\vec{x}}$ é a parte local do potencial V_I ; b são limites para vizinhos mais próximos: $b = (\vec{x}, \vec{y})$, com $|\vec{x} - \vec{y}| = 1$, e $V_{I,b}$ é a parte não local do potencial V_I . Tomando $\mathcal{P}(\varphi) = \varphi^6 - \varphi^4$, por exemplo, teremos

$$V_{I,b} = \int_I [2\lambda\varphi^3(x)\varphi(y) - 3\lambda\varphi^5(x)\varphi(y)] dt.$$

A expansão de Mayer é obtida através de

$$e^{-V_I} = \prod_{\vec{x} \in \Lambda} e^{-V_{I,\vec{x}}} \sum_{\{b_\alpha\}} \prod [e^{-V_{I,b_\alpha}} - 1], \quad (4.16)$$

onde a soma é realizada sobre todas as coleções $\{b_\alpha\}$ de limites para vizinhos mais próximos. Se agruparmos nesta soma os termos que estão em um mesmo “*cluster*” conexo, podemos escrever

$$e^{-V_I} = \sum_{\{Y_\beta\}} \prod \rho(I \times Y_\beta),$$

onde, agora, a soma é realizada sobre as partições $\{Y_\beta\}$ de Λ , $(I \times Y_\beta)$ denota o produto cartesiano do intervalo unitário I com um conjunto Y_β da partição e para cada $Y \subset \Lambda$

$$\rho(I \times Y) = \prod_{\vec{x} \in Y} e^{-V_{I,\vec{x}}} \sum_{\{b_\alpha\} \rightarrow Y} \prod_{\alpha} [e^{-V_{I,b_\alpha}} - 1],$$

sendo que a soma é feita sobre as coleções de $\{b_\alpha\}$ conectados em Y . Como um caso especial, temos $\rho(I \times \{\vec{x}\}) = e^{-V_{I,\vec{x}}}$.

Com essa construção em mente, obtemos que

$$e^{-V_T} = \sum_{\{U_\gamma\}} \prod_{\gamma} \rho(U_\gamma), \quad (4.17)$$

onde $\{U_\gamma\}$ é partição de $[-T, T] \times \Lambda$ formada por conjuntos da forma $U = I \times Y$, com Y conexo em Λ .

Conforme mostrado em [Dim90], para m^2 suficientemente grande, $\lambda \leq 1$ e $|Y| \geq 2$, vale a seguinte estimativa

$$|\rho(I \times Y)| \leq \left(\frac{c}{m^2}\right)^{|Y|-1}, \quad (4.18)$$

onde c é uma constante que depende da dimensão d do espaço e do grau do polinômio $\mathcal{P}$.

4.2.2 Expansão da medida μ_{C^*}

Nosso objetivo nesta seção será decompor a medida μ_{C^*} em medidas com covariâncias que desacoplam em certas regiões do espaço e do tempo. Com isso, usando a decomposição no numerador e no denominador de $d\mu_{C^*}$, obteremos uma expansão para esta medida. Para que isso seja possível precisaremos estabelecer algumas definições.

Definição 4.2.1. Um **conjunto de recobrimento** (do inglês *paved set*) em $[0, T] \times \Lambda$ é um subconjunto de $[0, T] \times \Lambda$ que pode ser expresso como uma união de linhas unitárias $I \times \{\vec{x}\}$.

Afim de não sobrecarregar a notação, passaremos a denotar a covariância C^* apenas por C .

Se S e S' são dois conjuntos de recobrimento, definimos

$$C(S, S')(x, x') := \chi_S(x) C(x, x') \chi_{S'}(x'), \text{ com } x = (t, \vec{x}) \in I \times \Lambda \quad (4.19)$$

e $C(S) := C(S, S)$, sendo que χ_E denota a função característica do conjunto E . Queremos considerar um processo Gaussiano com covariância $C_0 = C(S) + C(\sim S)$ que desacopla o conjunto S do seu complementar $\sim S = (I \times \Lambda) - S$. Isso nos permitirá escrever a

integral $\int F d\mu_{C_0}$ como um produto de integrais realizadas sobre S e $\sim S$, mais um termo remanescente. De forma mais geral, podemos considerar uma combinação convexa de $C(S)$ e $C(\sim S)$

$$C_s = sC + (1-s)[C(S) + C(\sim S)], \quad s \in [0, 1], \quad (4.20)$$

que interpola entre $C_0 = C(S) + C(\sim S)$ e $C_1 = C$, os casos desacoplado e acoplado, respectivamente.

Estas covariâncias não são suaves, a menos que alteremos seu domínio. Se definirmos

$$[-T, T]' = [-T, -T+1) \cup (-T+1, -T+2) \cup \dots \cup (T-1, T]$$

e se $S, \sim S$ são conjuntos de recobrimento em $[-T, T]' \times \Lambda$, então $C_s(x, x')$ é uma função contínua e positiva-definida em $([-T, T]' \times \Lambda) \times ([-T, T]' \times \Lambda)$, pois C_0 o é. Portanto, podemos considerar um processo Gaussiano com essa covariância. Além disso, este processo pode ser realizado como uma função das coordenadas em

$$\Omega' = \mathcal{C}^0([-T, T]' \times \Lambda) \cong \mathcal{C}^0([-T, T]', \mathbb{R}^\Lambda).$$

Denotaremos por μ_{C_s} a medida associada a este espaço. Observamos que, para $s = 1$, temos o processo o processo original de covariância C (com tempos inteiros deletados, exceto por $-T$ e T).

Usando uma versão do teorema fundamental do cálculo e integração por partes, a diferença entre μ_{C_1} e μ_{C_0} é expressa da seguinte forma (veja [Dim90])

$$\begin{aligned} \int F d\mu_{C_1} - \int F d\mu_{C_0} &= \int_0^1 ds \frac{d}{ds} \left(\int F d\mu_{C_s} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 ds \int \left(\frac{dC_s}{ds} \right) \circ \Delta_\varphi F d\mu_{C_s} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 ds \int (C_1 - C_0) \circ \Delta_\varphi F d\mu_{C_s}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde, para qualquer C , $C \circ \Delta_\varphi$ é definido por

$$C \circ \Delta_\varphi = \int dt dt' \sum_{\vec{x}, \vec{x}'} C(x, x') \frac{\partial}{\partial \varphi(x)} \frac{\partial}{\partial \varphi(x')}. \quad (4.22)$$

A expressão (4.21) é válida quando F é uma soma de termos da forma

$$\left[\int p_1(\varphi_{\vec{x}_1}(t_1), \dots, \varphi_{\vec{x}_n}(t_n)) f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \right] p_2(\varphi_{\vec{x}}(0)) p_3(\varphi_{\vec{y}}(T)) e^{-V_T}, \quad (4.23)$$

onde p_1, p_2, p_4 são polinômios e f é uma função limitada. Observamos que, quando C também é limitada, faz sentido o cálculo de $C \circ \Delta_\varphi$ sobre esta classe de funções e, além

disso, temos que tal aplicação preserva essa classe (ou seja, podemos realizar iterações de $C \circ \Delta_\varphi$). Por exemplo, se $G(\varphi) = \sum_{\vec{x}} \varphi(0, \vec{x})^4$, então

$$\partial G / \partial \varphi(x) = 4\varphi(0, \vec{x})^3 \delta(t),$$

$$\partial^2 G / \partial \varphi(x) \partial \varphi(x') = 12\varphi(0, \vec{x})^2 \delta_{\vec{x}, \vec{x}'} \delta(t) \delta(t');$$

ou se $G(\varphi) = \sum_{\vec{x}} \int_0^T \varphi(s, \vec{x})^4 ds$,

$$\partial G / \partial \varphi(x) = 4\varphi(x)^3 \delta(t),$$

$$\partial^2 G / \partial \varphi(x) \partial \varphi(x') = 12\varphi(x)^2 \delta_{\vec{x}, \vec{x}'} \delta(t - t').$$

As funções δ são imediatamente avaliadas na integral que define $C \circ \Delta_\varphi$, e assim podemos ver que $(C \circ \Delta_\varphi)F$ também é do tipo (4.23).

Podemos usar (4.21) para fatorar a integral $\int F d\mu_{C_0}$. Seja $\Omega(S) = \mathcal{C}^0(S)$; visto que S e $\sim S$ são desconexos em $[-T, T]' \times \Lambda$, temos que $\Omega' \cong \Omega(S) \times \Omega(\sim S)$ e, com esta identificação, $d\mu_{[C(S)+C(\sim S)]} = d\mu_{C(S)} \times d\mu_{C(\sim S)}$. Então, se $F \equiv F(S) F(\sim S)$, onde $F(S)$ é função localizada em S (ie, que possui suporte em S) e $F(\sim S)$ é localizada em $\sim S$, segue que

$$\int_{\Omega'} F d\mu_{[C(S)+C(\sim S)]} = \int_{\Omega(S)} F(S) d\mu_{C(S)} \int_{\Omega(\sim S)} F(\sim S) d\mu_{C(\sim S)}. \quad (4.24)$$

Se F é como descrita acima, dizemos que F se fatora sobre os conjuntos S e $\sim S$. Veja [GJS73] para mais detalhes.

Suponha agora que, dada uma partição $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de $[-T, T]' \times \Lambda$ em conjuntos de recobrimento conexos, tenhamos que $F \equiv \prod_{\gamma \in \Gamma} F(U_\gamma)$. Vamos repetir os passos acima para fatorar $\int F d\mu_C$ em partes locais.

Seja U_1 um elemento da partição que contém a primeira linha $I \times \{x\}$ (relativa a alguma ordem fixada para as linhas unitárias). Aplicando (4.21) com $S = U_1$ e

$$C_{s_1} = s_1 C + (1 - s_1)[C(U_1) - C(\sim U_1)],$$

iremos obter

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_{s_1}}{\partial s_1} \right) \circ \Delta_\varphi = C(\sim U_1, U_1) \circ \Delta_\varphi = \sum_{U_2 \neq U_1} C(U_2, U_1) \circ \Delta_\varphi$$

e usando (4.24), concluímos que

$$\int F d\mu_C = \left[\int F(U_1) d\mu_{C(U_1)} \right] \left[\int F(\sim U_1) d\mu_{C(\sim U_1)} \right] + \sum_{U_2 \neq U_1} \int_0^1 ds_1 \int C(U_2, U_1) \circ \Delta_\varphi F d\mu_{C_{s_1}}.$$

Agora, para cada U_2 , consideremos $S_2 = U_1 \cup U_2$ e introduzimos um segundo parâmetro de interpolação, s_2 , na covariância da seguinte forma

$$C_{s_1, s_2} = s_2 C_{s_1} + (1 - s_2)[C_{s_1}(S_2) + C_{s_1}(\sim S_2)].$$

Assim, a expressão com o fator $C(U_2, U_1) \circ \Delta_\varphi F$ pode ser escrita a soma de um termo que se fatora em S_2 mais um termo que envolve a expressão

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_{s_1, s_2}}{\partial s_2} \right) \circ \Delta_\varphi = C_{s_1}(\sim S_2, S_2) \circ \Delta_\varphi = \sum_{U_3 \neq U_1, U_2} [C_{s_1}(U_3, U_1) + C_{s_1}(U_3, U_2)] \circ \Delta_\varphi.$$

Continuando este procedimento, iremos obter uma cadeia de conjuntos $U_1, U_2, \dots, U_n$ cuja união está em S_n e covariâncias

$$C_{s_1, \dots, s_n} = s_n C_{s_1, \dots, s_{n-1}} + (1 - s_n)[C_{s_1, \dots, s_{n-1}}(S_n) + C_{s_1, \dots, s_{n-1}}(\sim S_n)]. \quad (4.25)$$

Dizemos que um subconjunto $X \subset [-T, T]' \times \Lambda$ é um $\{U_\gamma\}$ -**conjunto de recobrimento** se X é uma união de conjuntos em $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Se, para cada $\{U_\gamma\}$ -conjunto de recobrimento X , tal que $U_1 \subset X$, agruparmos os que satisfazem $S_n = X$, então nossa expansão terá a seguinte forma (veja por exemplo [Sén85]):

$$\int F d\mu_C = \sum_X \bar{K}_F(X) \left[\int F(\sim X) d\mu_{C(\sim X)} \right], \quad (4.26)$$

onde $F(X) = \prod_{U_\gamma \subset X} F(U_\gamma)$ e $\bar{K}_F(X)$ é definido por

$$\bar{K}_F(X) := \sum_{(U_1, \dots, U_n)} \sum_{\eta} \int f(\eta, s) \int \prod_{j=2}^n [C(U_j, U_{\eta(j)}) \circ \Delta_\varphi] F(X) d\mu_{C_s(X)} ds. \quad (4.27)$$

Aqui, a primeira soma é realizada sobre a coleção ordenada $(U_1, \dots, U_n)$ de conjuntos em $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ que estão contidos em X ; observamos que o conjunto U_1 com o qual iniciamos a construção da expansão é sempre o primeiro termo desta coleção. Se $X = U_1$, então $\bar{K}_F(X) = \int F(X) d\mu_{C(X)}$. A segunda soma é realizada sobre as funções $\eta : \{2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$ tais que $\eta(j) < j$ (podemos pensar nestas funções como grafos do tipo árvore de n vértices). Finalmente, $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$, $C_s = C_{s_1, \dots, s_{n-1}}$ e

$$f(\eta, s) = \begin{cases} \prod_{j=2}^n s_{j-2} s_{j-3} \cdots s_{\eta(j)} & , \quad \text{se } \eta(j) < j-1 \\ 1 & , \quad \text{se } \eta(j) = j-1. \end{cases}$$

Agora, se repetirmos o procedimento acima considerando $\sim X$, iremos obter que

$$\int F d\mu_C = \sum_{\{X_i\}} \prod_i \bar{K}_F(X_i), \quad (4.28)$$

onde a soma é realizada sobre as partições $\{X_i\}$ de $[-T, T] \times \Lambda$, com cada X_i sendo um $\{U_\gamma\}$ -conjunto de recobrimento.

4.2.3 Expansão completa

Combinando a expansão realizada para a medida μ_C com a expansão Mayer, teremos

$$\begin{aligned} \int F e^{-V_T} d\mu_C &= \sum_{\{U_\gamma\}} \int F \prod_{\gamma} \rho(U_\gamma) d\mu_C \\ &= \sum_{\{U_\gamma\}} \sum_{\{X_i\}} \prod_i \bar{K}_{\rho F}(X_i), \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde, para cada $\{U_\gamma\}$, $\rho = \prod_{\gamma} \rho(U_\gamma)$. Mudando a ordem das somas e observando que a partição $\{U_\gamma\}$ é mais fina ou igual a $\{X_i\}$ (veja que cada X_i se fatora em conjuntos de $\{U_\gamma\}$), somos levados à seguinte expressão

$$\int F e^{-V_T} d\mu_C = \sum_{\{X_i\}} \prod_i K_F(X_i), \quad (4.30)$$

sendo que a soma é realizada sobre todas as partições $\{X_i\}$ de $[-T, T] \times \Lambda$, contendo apenas $\{U_\gamma\}$ -conjuntos de recobrimento. O termo $K_F(X)$ é dado por

$$K_F(X) = \sum_{\{U_\gamma\}} \sum_{(U_1, \dots, U_n)} \sum_{\eta} \int f(\eta, s) \int \prod_{j=2}^n [C(U_j, U_{\eta(j)}) \circ \Delta_\varphi] \prod_{i=1}^n \rho(U_i) F(X) d\mu_{C_s(X)} ds. \quad (4.31)$$

A primeira soma é feita sobre as partições $\{U_\gamma\}$ de X , com $U_\gamma = I_\gamma \times Y_\gamma$, Y_γ conexo, e a segunda soma é feita sobre as n -úplas ordenadas $(U_1, \dots, U_n)$ de conjuntos em $\{U_\gamma\}$ (lembrando que U_1 sempre contém a primeira linha unitária fixada em X). A expressão em (4.30) é a chamada **expansão em aglomerados** (do inglês “cluster expansion”).

O resultado fundamental que garante a convergência desta expansão é o decaimento exponencial de $K_F(X)$ para X grande ou difuso. Iremos enunciar tal resultado de forma mais precisa logo adiante, mas antes precisaremos estabelecer algumas definições.

Dado um conjunto de recobrimento X , seja $|X|$ o número de linhas $I \times \{x\}$ em X . Considerando os intervalos I representados pelos seus pontos intermediários, seja $d(X, X')$ a distância entre dois conjuntos de recobrimento X e X' , e definimos $\mathcal{L}(X)$ como sendo o comprimento da menor árvore² conectando elementos de X .

Teorema 4.2.2. *Dado $a \geq 1$ e F um polinômio que se fatora sobre os conjuntos de recobrimento de $[T, -T]' \times \Lambda$, para m suficientemente grande e λ suficientemente pequeno, temos as seguintes estimativas (uniformes no volume $|\Lambda|$)*

$$|K_F(X)| \leq \mathcal{O}(1) \quad , \quad \text{para qualquer } X; \quad (4.32)$$

$$|K_F(X)| \leq [\mathcal{O}(m^{-2})]^{|X|-1} \exp[-a\mathcal{L}(X)] \quad , \quad \text{para } |X| \geq 2. \quad (4.33)$$

²Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico.

O principal ingrediente utilizado na demonstração deste teorema (veja [Dim90]) é o decaimento exponencial da covariância, que resulta de (4.20) e do rearranjo combinatorial realizado nas somas da expressão (4.29), de forma a se obter uma soma em grafos do tipo árvore. Observe também que, graças às limitações uniformes no volume dadas no teorema acima, concluímos a convergência da *cluster expansion* realizada garante a convergência das correlações normalizadas no limite de volume infinito.

Como consequência do teorema, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.2.3. *Dado $a \geq 1$, se m é suficientemente grande, λ é suficientemente pequeno e $x_k = (t_k, \vec{x}_k) \in \Delta_k = I_k \times \{x\}$, então a função de correlação, de n pontos, truncada possui “decaimento em árvore” (uniforme no volume):*

$$|\langle \varphi(x_1); \dots; \varphi(x_n) \rangle^c| \leq \mathcal{O}(m^{-1}) \exp[-a\mathcal{L}(\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n)]. \quad (4.34)$$

Sendo que a função de correlação, de n pontos, truncada é definida por

$$\langle \varphi(x_1); \dots; \varphi(x_n) \rangle^c := \frac{\partial^n}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_n} \ln \left[\int \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k \varphi(x_k)) e^{-V_T} d\mu_C \right] \Big|_{\alpha=0}. \quad (4.35)$$

Conforme observado em [Dim90], o resultado acima pode ser utilizado para mostrar que as soluções da EDP estocástica se aproximam exponencialmente das soluções de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$.

Para finalizar este capítulo, observamos que a convergência da expansão *cluster* mostrada nesta última seção nos garante, em particular, o decaimento exponencial com o aumento da distância para a função de correlação de dois pontos. Veremos adiante que este fato estabelece uma lacuna espectral entre o vácuo e o estado de uma partícula.

Transformadas de Fourier e equação de Bethe-Salpeter

Utilizando a fórmula de Feynman-Kac no volume $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$ para campos $\varphi(t_1, \vec{x}_1) \cdots \varphi(t_n, \vec{x}_n)$ podemos estabelecer uma relação para as funções de correlação (de Schwinger) de n -pontos no limite $[-T, T]\Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} & (\Omega, \hat{\varphi}(\vec{x}_1) e^{-(t_2-t_1)H} \hat{\varphi}(\vec{x}_2) \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H} \hat{\varphi}(\vec{x}_n) \Omega)_{d\mu} \\ &= \int \varphi(t_1, \vec{x}_1) \cdots \varphi(t_n, \vec{x}_n) d\rho \\ &:= S_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde, $x_i = (t_i, \vec{x}_i)$, com $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ em $\mathbb{R}$, $\vec{x}_i \in \mathbb{Z}^d$ e $\hat{\varphi}(\vec{x}_i) = \varphi(0, \vec{x}_i)$, para qualquer i em $\{1, \dots, n\}$. Observamos que, como consequência da caracterização da medida $d\rho$, $S_\lambda^{(n)} \neq 0$ apenas se $n \in \mathbb{N}$ for par.

Lembramos agora a construção do modelo da teoria de campos, no qual nossas funções de correlação estão definidas, mencionada no final do Capítulo 2. Com a expansão realizada no Capítulo 5 é possível estender esta construção para o volume infinito $\mathbb{Z}^d$. Fazendo isso, novamente teremos um espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(d\mu)$ com produto interno $(\cdot, \cdot)_{d\mu}$; um semigrupo fortemente contínuo e^{-tH} , $t > 0$, com gerador auto-adjunto $H \geq 0$ (lebre-se da translação realizada no Capítulo 4) e um vetor Ω tal que $H\Omega = 0$. Agora, como pode ser visto em [Dim90], este modelo para o volume infinito possui invariância por translações. Sendo assim, é possível introduzir os **operadores de momento** P^i , $i = 1, \dots, d$ que comutam com H e são geradores de um grupo unitário de operadores de translação na rede. Para $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n)$ também temos que $\vec{P}\Omega = 0$.

Portanto, se $\hat{\varphi}(\vec{0}) = \hat{\varphi}$ segue de (5.1) que

$$\begin{aligned} S_{\lambda}^{(n)}(t_1, \vec{x}_1; \dots; t_n, \vec{x}_n) \\ = (\Omega, \hat{\varphi}(\vec{x}_1) e^{-(t_2-t_1)H} \hat{\varphi}(\vec{x}_2) \dots e^{-(t_n-t_{n-1})H} \hat{\varphi}(\vec{x}_n) \Omega)_{d\mu} \\ = \left(\Omega, \hat{\varphi} e^{-(t_2-t_1)H+i\vec{P}\cdot(\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \hat{\varphi} \dots e^{-(t_n-t_{n-1})H+i\vec{P}\cdot(\vec{x}_n-\vec{x}_{n-1})} \hat{\varphi} \Omega \right)_{d\mu}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para determinar a curva de dispersão correspondente ao espectro de uma única partícula do Teorema 1.0.1, iremos calcular a transformada de Fourier (denotada por $\sim$) da função de dois pontos ($S^{(2)}$). Observe que pela invariância por translações do nosso modelo, é suficiente considerarmos o caso $S_{\lambda}^{(2)}(0, \vec{0}; t, \vec{x})$, ressaltando a diferença entre os casos $t > 0$ e $t < 0$:

$$S_{\lambda}^{(2)}(0, \vec{0}; t, \vec{x}) = \begin{cases} (\Omega, \hat{\varphi} e^{-tH+i\vec{P}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi} \Omega) & \text{se } t > 0, \\ (\Omega, \hat{\varphi} e^{+tH+i\vec{P}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi} \Omega) & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Então, para $p = (p_0, \vec{p})$, $p_0 \in \mathbb{R}$ e $\vec{p} \in T^d$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\lambda}^{(2)}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} S_{\lambda}^{(2)}(0, \vec{0}; t, \vec{x}) e^{-i(p_0 t + \vec{p} \cdot \vec{x})} \\ &= \int_0^{\infty} dt \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (\Omega, \hat{\varphi} e^{-tH+i\vec{P}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi} \Omega) e^{-i(p_0 t + \vec{p} \cdot \vec{x})} + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 dt \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (\Omega, \hat{\varphi} e^{+tH+i\vec{P}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi} \Omega) e^{-i(p_0 t + \vec{p} \cdot \vec{x})}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Agora, pelo Teorema Espectral (veja [Tak08] por exemplo), sabemos que existe uma família espectral $\mathcal{E}(E, \vec{q})$ para a família de operadores (auto-adjuntos) comutativos $(H, \vec{P})$ tal que

$$(\Omega, \hat{\varphi} e^{tH+i\vec{P}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi} \Omega) = \int_{\sigma(H)} \int_{\sigma(\vec{P})} e^{tE+i\vec{q}\cdot\vec{x}} d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega), \quad (5.5)$$

sendo que a integral sobre E tem suporte no espectro $\sigma(H)$ de H , e a integral sobre $\vec{q}$ tem suporte no espectro $\sigma(\vec{P})$ de $\vec{P}$. Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\lambda}^{(2)}(p) &= \int_0^{\infty} dt \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left[\int_{\sigma(H)} \int_{\sigma(\vec{P})} e^{-tE+i\vec{q}\cdot\vec{x}} d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega) \right] e^{-i(p_0 t + \vec{p} \cdot \vec{x})} + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 dt \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left[\int_{\sigma(H)} \int_{\sigma(\vec{P})} e^{+tE+i\vec{q}\cdot\vec{x}} d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega) \right] e^{-i(p_0 t + \vec{p} \cdot \vec{x})}. \end{aligned}$$

Uma vez que as funções $e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ e $e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$ são limitadas, podemos trocar a ordem da soma com as integrais. Além disso, como $H \geq 0$, $\sigma(H) \subset [0, \infty)$ e como $\sigma(\vec{P}) \subset T^d$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty \int_{T^d} e^{-(E+ip_0)t} \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} \right] d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega) + \\ &+ \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty \int_{T^d} e^{(E-ip_0)t} \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} \right] d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega). \end{aligned}$$

Como $E \pm ip_0 > 0$, a função $e^{-(E-ip_0)t}$ é limitada em $[0, \infty)$, assim como $e^{(E-ip_0)t}$ é limitada em $(-\infty, 0]$. Logo, podemos trocar a ordem da integração, calculando primeiro a integral na variável t . Usando este fato e que $\sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d} e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} = (2\pi)^d \delta(\vec{q}-\vec{p})$, concluímos que

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) &= \int_0^\infty \int_{T^d} (2\pi)^d \delta(\vec{q}-\vec{p}) \left[\int_0^\infty dt e^{-(E+ip_0)t} \right] d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega) + \\ &+ \int_0^\infty \int_{T^d} (2\pi)^d \delta(\vec{q}-\vec{p}) \left[\int_{-\infty}^0 dt e^{(E-ip_0)t} \right] d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega). \end{aligned}$$

Por fim, tendo em vista que

$$\int_0^\infty e^{-(E+ip_0)t} dt = \frac{1}{E+ip_0} \text{ e } \int_{-\infty}^0 e^{(E-ip_0)t} dt = \frac{1}{E-ip_0},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) &= \int_0^\infty \int_{T^d} \left[\frac{1}{E+ip_0} + \frac{1}{E-ip_0} \right] (2\pi)^d \delta(\vec{q}-\vec{p}) d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega) \\ &= \int_0^\infty \int_{T^d} \frac{2E}{E^2 + p_0^2} (2\pi)^d \delta(\vec{q}-\vec{p}) d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega), \end{aligned} \quad (5.6)$$

sendo que a integral sobre E é efetuada de 0 à ∞ e a integral sobre $\vec{q}$ em T^d .

Agora, definindo

$$d\eta_\lambda(E, \vec{p}) = \int_0^\infty \int_{T^d} (2\pi)^d \delta(\vec{q}-\vec{p}) d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega),$$

podemos escrever

$$\tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) = \int_0^\infty \int_{T^d} \frac{2E}{E^2 + p_0^2} d\eta_\lambda(E, \vec{p}), \quad (5.7)$$

onde observamos que a medida $d\eta_\lambda(E, \vec{p})$ tem suporte no espectro de H restrito aos estados com momento $\vec{p}$ e número ímpar de partículas. As singularidades de $\tilde{S}_\lambda(p)$ na parte positiva do eixo imaginário p_0 são pontos do espectro $e-m$.

Quando $\lambda = 0$, segue da equação (4.10) que

$$\tilde{S}_{\lambda=0}^{(2)}(p) = \frac{1}{p_0^2 + E_0(\vec{p})^2}; \quad \text{onde } E_0(\vec{p}) = \frac{(\vec{p}_l)^2}{2} + \frac{m^2}{2}. \quad (5.8)$$

$E_0(\vec{p})$ é identificado como sendo a energia da excitação elementar (*quasipartícula*) com momento $\vec{p}$ e massa $E_0(\vec{0}) = M_0 = m^2/2$ no caso livre, i.e., quando $\lambda = 0$.

Conforme veremos adiante, $\tilde{S}_\lambda^{(2)}$ possui a seguinte representação

$$\tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) = \frac{c_\lambda(\vec{p})}{p_0^2 + E_\lambda(\vec{p})^2} + \int_{2M_0}^\infty \int_{T^d} \frac{2E}{E^2 + (p_0)^2} d\eta'(E, \vec{p}),$$

sendo que λ pequeno garante que o segundo termo do lado direito da equação acima é pequeno em norma.

$E_\lambda(\vec{p})$ é a curva de dispersão de uma partícula no modelo interagente ($\lambda \neq 0$), que resulta da determinação dos zeros de $\tilde{\Gamma}(p)$, sendo Γ o inverso por convolução de S_λ . Por definição, uma quasi-partícula é uma curva de dispersão isolada. Ressaltamos que do decaimento exponencial da função de dois pontos determinado no capítulo 4, segue que a $\tilde{S}_\lambda^{(2)}$ é analítica numa polifaixa. Isto implica que $\tilde{\Gamma}(p)$ não possui zeros nessa faixa, o que, por sua vez, isso garante uma lacuna espectral no espectro de energia e momento.

Veremos que $E_\lambda(\vec{p})$ difere de $E_0(\vec{p})$ por $\mathcal{O}(\lambda^2)$ e, então, se m for suficientemente grande, $E_\lambda(\vec{p})$ é isolado do resto do espectro. Além disso, a massa da quasi-partícula no modelo interagente é $M_\lambda = E_\lambda(\vec{0}) = M_0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$.

Para determinar o espectro de massa adicional em $(0, 2M_\lambda)$, i.e. estados ligados, consideramos a função de quatro pontos trucada (associada ao estado de duas partículas). Esta é definida por:

$$D_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4) = S_\lambda^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) - S_\lambda^{(2)}(x_1, x_2)S_\lambda^{(2)}(x_3, x_4), \quad (5.9)$$

onde $x_i = (t_i, \vec{x}_i) = (x_i^0, \vec{x}_i)$ e $S_\lambda^{(2)}$ é como definida em (5.1). Observamos que o segundo termo em (5.9) exclui a contribuição associada a duas partículas livres do espectro. Na análise da função de dois pontos o tratamento era automático, pois $S^{(1)} = 0$, excluindo o vácuo. Pela invariância por translações, sabemos que D_λ depende apenas da diferença das variáveis.

Sendo assim, introduzimos as coordenadas relativas

$$\xi = (x_2^0 - x_1^0, \vec{x}_2 - \vec{x}_1); \quad (5.10)$$

$$\eta = (x_4^0 - x_3^0, \vec{x}_4 - \vec{x}_3); \quad (5.11)$$

$$\tau = \left(\frac{1}{2} [x_3^0 + x_4^0 - x_1^0 - x_2^0], \vec{x}_3 - \vec{x}_2 \right). \quad (5.12)$$

onde também adotamos a notação $\xi = (\xi^0, \vec{\xi})$, *etc.* Tais coordenadas implementam, no reticulado, a decomposição em centros de massa e no coordenadas relativas na variável contínua (em $\mathbb{R}$).

Afim de obter uma expressão para D_λ em termos de tais coordenadas, consideramos

$$\theta(\cdot) = \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\cdot)\Omega - (\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\cdot)\Omega)\Omega.$$

Lembrando que estamos trabalhando com o produto interno de $L^2(d\mu)$, que o vetor Ω é invariante sob a ação de e^{tH} e $e^{\pm i\vec{P}\cdot\vec{x}}$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$, e que $\hat{\varphi}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$, para qualquer $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$; segue que

$$\begin{aligned} & \left(\theta(-\vec{\xi}), e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \theta(\vec{\eta}) \right) = \\ & = \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega - (\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega)\Omega, e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \left[\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega - (\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega)\Omega \right] \right) \\ & = \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega, e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) - \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega, e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \Omega \right) + \\ & \quad - \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega \right) \left(\Omega, e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) + \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega \right) \times \\ & \quad \times \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) \left(\Omega, e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \Omega \right) \\ & = \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega, e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) - \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega, \Omega \right) + \\ & \quad - \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega \right) \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega, \Omega \right) + \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega \right) \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) \\ & = \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega, e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) - \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(\vec{\eta})\Omega \right) \left(\hat{\varphi}(\vec{0})\hat{\varphi}(-\vec{\xi})\Omega, \Omega \right). \end{aligned}$$

Agora, se $\eta^0 = \xi^0 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \xi^0 &= t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = 0, & \tau^0 &= t_3 - t_2 = t_4 - t_1, \\ \hat{\varphi}(-\vec{\xi}) &= e^{-i\vec{P}\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{i\vec{P}\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}, & \hat{\varphi}(\vec{\eta}) &= e^{i\vec{P}\cdot(\vec{x}_4 - \vec{x}_3)} \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{-i\vec{P}\cdot(\vec{x}_4 - \vec{x}_3)}. \end{aligned}$$

Logo, da equação (5.9) segue que,

$$\begin{aligned} D_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4) &= \\ &= \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{i\vec{P}\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot(\vec{x}_3 - \vec{x}_2)} \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{i\vec{P}\cdot(\vec{x}_4 - \vec{x}_2)} \hat{\varphi}(\vec{0}) \Omega \right) + \\ & \quad - \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{i\vec{P}\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \hat{\varphi}(\vec{0}) \Omega \right) \left(\Omega, \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{i\vec{P}\cdot(\vec{x}_4 - \vec{x}_3)} \hat{\varphi}(\vec{0}) \Omega \right) \\ &= \left(\Omega, \hat{\varphi}(-\vec{\xi}) \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \hat{\varphi}(\vec{0}) \hat{\varphi}(\vec{\eta}) \Omega \right) - \left(\Omega, \hat{\varphi}(-\vec{\xi}) \hat{\varphi}(\vec{0}) \Omega \right) \left(\hat{\varphi}(\vec{0}) \hat{\varphi}(\vec{\eta}) \Omega, \Omega \right) \\ &= \left(\Omega, \hat{\varphi}(-\vec{\xi}) \hat{\varphi}(\vec{0}) e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \hat{\varphi}(\vec{0}) \hat{\varphi}(\vec{\eta}) \Omega \right) - \left(\hat{\varphi}(\vec{0}) \hat{\varphi}(-\vec{\xi}) \Omega, \Omega \right) \left(\hat{\varphi}(\vec{0}) \hat{\varphi}(\vec{\eta}) \Omega, \Omega \right). \end{aligned}$$

Então, concluímos que

$$D_\lambda(\xi, \eta, \tau) = \left(\theta(-\vec{\xi}), e^{-|\tau|H} e^{i\vec{P}\cdot\vec{\tau}} \theta(\vec{\eta}) \right). \quad (5.13)$$

Seja $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ uma função arbitrária que se anula fora de um conjunto finito e sejam $\tilde{f}(\vec{p})$ e $\tilde{D}_\lambda(p, q, k)$ as transformadas de Fourier de $f(\vec{x})$ e $D_\lambda(\xi, \eta, \tau)$ respectivamente.

Através de um cálculo análogo ao utilizado para a obtenção da equação (5.6), segue a representação espectral

$$\begin{aligned} \left(\tilde{f}(\vec{p}), (\tilde{D}_\lambda \tilde{f})(\vec{q}) \right) (k) &= \int dp \int dq \tilde{\tilde{f}}(\vec{p}) \tilde{D}_\lambda(p, q, k) \tilde{f}(\vec{q}) \\ &= \int_0^\infty \int_{T^d} \frac{2E}{(k^0)^2 + E^2} (2\pi)^{3d+2} \delta(\vec{q} - \vec{k}) d(\theta(f), \mathcal{E}(E, \vec{q})\theta(f)), \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $\theta(f) = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{x})\theta(-\vec{x})$ e $\tilde{D}_\lambda$ é o operador integral definido por

$$(\tilde{D}_\lambda(k)(f))(p) = \int \tilde{D}_\lambda(p, q, k) f(q) dq, \quad (5.15)$$

sendo que a transformada de Fourier foi tomada em ξ, η, τ e temos

$$\tilde{D}_\lambda(p, q, k) = \int_{-\infty}^\infty d\xi^0 \int_{-\infty}^\infty d\eta^0 \int_{-\infty}^\infty d\tau^0 \sum_{\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\tau} \in \mathbb{Z}^d} D_\lambda(\xi, \eta, \tau) e^{-i(p^0 \xi^0 + q^0 \eta^0 + k^0 \tau^0)} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{\xi} + \vec{q} \cdot \vec{\eta} + \vec{k} \cdot \vec{\tau})} \quad (5.16)$$

A expressão (5.14) é similar à (5.6). Para $\vec{k}$ fixado, a singularidade em k^0 na última equação nos fornece informação direta sobre o espectro de H no subespaço dos estados com número par de partículas com momento $\vec{k}$. Para verificar a presença de estados ligados é suficiente estudar o espectro no subespaço dos estados com momento $\vec{k} = \vec{0}$. $\tilde{D}_\lambda(p, q, k)$ será analisada através da equação de Bethe-Salpeter (B.S.) adaptada ao reticulado.

5.1 Equação de Bethe-Salpeter

Na Teoria Quântica de Campos (QFT, do inglês *quantum field theory*), a equação de Bethe-Salpeter é usualmente utilizada no estudo do espectro correspondente a partículas e a estados ligados. Este método é a contrapartida na QFT dos métodos independentes do tempo na teoria de espalhamento na Mecânica Quântica.

Observe que se H e H_0 são operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert com resolventes R e R_0 , ie,

$$R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1} \quad (5.17)$$

$$R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda I)^{-1}, \quad (5.18)$$

então vale a segunda identidade do resolvente

$$R - R_0 = -R_0(H - H_0)R.$$

Portanto, denotando $K := H - H_0$, tem-se

$$R = R_0 - R_0 K R. \quad (5.19)$$

Agora, um problema típico em Mecânica Quântica é o descrito pelo Hamiltoniano $H = H_0 + V$, que possui a seguinte equação resolvente de Schrödinger

$$(H - \lambda I)^{-1} = (H_0 - \lambda I)^{-1} - (H_0 - \lambda I)^{-1} V (H - \lambda I)^{-1};$$

assim nesta analogia o denominado operador de Bethe-Salpeter K corresponderia ao potencial V .

Veja ainda que se iterarmos a equação (5.19) repetidas vezes, iremos obter

$$\begin{aligned} R &= R_0 - R_0 K R \\ &= R_0(I - K R_0) + (R_0 K)^2 R \\ &= R_0(I - K R_0 + (K R_0)^2) - (R_0 K)^3 R \\ &= \dots \\ &= R_0 \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (K R_0)^i \right) + R_n, \end{aligned}$$

onde $R_n = (-1)^{n+1} (R_0 K)^{n+1} R$. No caso em que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, a relação acima fornece uma expressão para R como série de Neumann:

$$R = R_0(I + K R_0)^{-1} = R_0 \sum_{i=0}^n (-1)^i (K R_0)^i, \quad (5.20)$$

o que na verdade já era sugerido pela seguinte resolução “formal”:

$$\begin{aligned} R = R_0 - R_0 K R &\implies R_0^{-1} R = I - K R \implies R_0^{-1} R - K R_0 R_0^{-1} R = I \\ &\implies (I + K R_0) R_0^{-1} R = I \implies R = R_0(I + K R_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Observe também que, uma condição suficiente para a existência de $(I + K R_0)^{-1}$ é que a norma de $K R_0$ seja pequena. Isso será verificado como consequência de termos λ tão pequeno quanto se queira e usando o decaimento exponencial do núcleo de K .

Tomando os inversos na última igualdade, segue que

$$K = R^{-1} - R_0^{-1}. \quad (5.21)$$

Finalmente se $D_\lambda(x_1, x_2; x_4, x_3)$ é como na equação (5.9), $D_\lambda^0(x_1, x_2; x_3, x_4)$ é definida por

$$D_\lambda^0(x_1, x_2; x_3, x_4) = S_\lambda^{(2)}(x_1, x_3) S_\lambda^{(2)}(x_2, x_4) + S_\lambda^{(2)}(x_1, x_4) S_\lambda^{(2)}(x_2, x_3) \quad (5.22)$$

e D_λ , D_λ^0 são os operadores integrais definidos respectivamente pelos núcleos $D_\lambda(x_1, x_2; x_4, x_3)$ e $D_\lambda^0(x_1, x_2; x_3, x_4)$, a **equação de Bethe-Salpeter** é dada por

$$D_\lambda = D_\lambda^0 + D_\lambda^0 K_\lambda D_\lambda, \quad (5.23)$$

Note que a equação (5.23) define o núcleo de Bethe-Salpeter K_λ .

Considerando a equação de Bethe-Salpeter, o problema de determinação dos estados ligados de duas partículas massivas é reduzido a encontrar a solução de um problema de autovalores não-linear. Substituindo o núcleo $K_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4)$ pelo seu termo de ordem mais baixa em λ (o que nos dá a chamada “*ladder approximation*”), este problema pode ser resolvido explicitamente. Depois, adaptando técnicas da teoria de perturbação analítica para o caso não linear em mãos, é possível mostrar que os autovalores encontrados na “aproximação *ladder*” irão persistir quando os termos de maior ordem em λ forem adicionados na equação de Bethe-Salpeter.

Usando as relações (5.10), (5.11) e (5.12) podemos escrever D_λ^0 em termos das coordenadas relativas da seguinte forma

$$\begin{aligned} D_\lambda^0(\xi, \eta, \tau) = & S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 - \frac{\eta^0}{2} + \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau} + \vec{\xi}\right) S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 + \frac{\eta^0}{2} - \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau} + \vec{\eta}\right) + \\ & + S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 - \frac{\eta^0}{2} - \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau}\right) S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 + \frac{\eta^0}{2} + \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau} + \vec{\xi} + \vec{\eta}\right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Agora usando as simetrias

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow x_2, & x_1, x_2 &\leftrightarrow x_2, x_4, \\ x_3 &\leftrightarrow x_4, & x_1, x_2, x_3, x_4 &\leftrightarrow -x_1, -x_2, -x_3, -x_4 \end{aligned} \quad (5.25)$$

de D_λ , D_λ^0 e, portanto, de K_λ concluímos que os núcleos de tais operadores satisfazem uma equação similar a (5.23):

$$\tilde{D}_\lambda(k) = \tilde{D}_\lambda^0(k) + (2\pi)^{-2(d+1)} \tilde{D}_\lambda^0(k) \tilde{K}_\lambda(k) \tilde{D}_\lambda(k), \quad (5.26)$$

onde, os operadores $\tilde{D}_\lambda^0(k)$ e $\tilde{K}_\lambda(k)$ são definidos da mesma forma que $\tilde{D}_\lambda(k)$ na equação (5.15).

A definição de K_λ e as propriedades analíticas de $\tilde{K}(p, q, k)$, necessárias para mostrar a existência ou ausência dos estados ligados, seguirão das propriedades de decaimento exponencial de K_λ a serem obtidos no próximo capítulo.

Análise dos núcleos de Bethe-Salpeter e da função de dois pontos

Para determinar as propriedades de analiticidade e limites de decaimento de K_λ (e $\mathfrak{K}_\lambda$, que será definido adiante como o núcleo da função de dois pontos) iremos adaptar os métodos desenvolvidos em [Spe75], o qual pode ser consultado para maiores detalhes.

O decaimento de K_λ na variável temporal será obtido seguindo estratégias utilizadas na análise de modelos quânticos do tipo $P(\varphi)_2$ [Spe75], empregando agora a expansão em *cluster* desenvolvida em [Dim90] para sistemas estocásticos na rede. O decaimento na variável espacial discreta é obtido como realizado em [Spe75] dentro do método de desacoplamento de hiperplanos da parte temporal, mas agora seguindo a abordagem realizada em [Sim93] no estudo de sistemas estatísticos na rede.

Nesta dissertação, vamos nos limitar à análise dos estados ligados de duas partículas na aproximação *ladder*. Como, no nosso caso, tal aproximação é feita através de um termo linear em λ , passaremos a chamá-la de aproximação linear. Um passo posterior, que não será feito aqui (mas pode ser encontrado em [FdVOPS01]), seria validar estes resultados espectrais para o modelo completo, controlando perturbações em torno da aproximação linear. A estrutura de analiticidade das transformadas de Fourier das correlações é de fundamental importância nesta etapa.

Antes de estabelecer nossos resultados, iremos escrever os núcleos K_λ e $\mathfrak{K}_\lambda$ de forma conveniente. Desta maneira seremos capazes de expressá-los como uma série de Neumann das funções de Schwinger, e então teremos nosso problema reduzido a realizar estimativas para tais funções.

Nas expressões a seguir, considere

$$w(\varphi(x)) = \frac{1}{4}\mathcal{P}'(\varphi(t, \vec{x}))(-\Delta + m^2)\varphi(t, \vec{x}) + \frac{\lambda}{8}\mathcal{P}'(\varphi(t, \vec{x}))^2 - \frac{1}{4}\mathcal{P}''(\varphi(t, \vec{x})), \quad (6.1)$$

onde $x = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$.

Função de dois pontos: Podemos escrever a função de dois pontos como uma perturbação de $S_0^{(2)} = C$ da seguinte forma

$$S_\lambda^{(2)} = C - C\mathfrak{K}S_\lambda^{(2)}. \quad (6.2)$$

Considerando Γ tal que

$$\int \Gamma(x, y') S_\lambda^{(2)}(y', y) dy' = \delta(x - y), \quad (6.3)$$

temos que

$$\mathfrak{K}(x, y) = (\Gamma - C^{-1})(x, y). \quad (6.4)$$

Agora, conforme se vê em [Spe75], usando a fórmula de integração por partes ¹

$$\int \varphi(x) A(\varphi(x)) e^{-W} d\mu = \int \int C(x, y) \left[\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} A e^{-W} \right] dy d\mu, \quad (6.5)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} (C^{-1}S_\lambda^{(2)})(x, y) &= \delta(x - y) - \lambda \langle w'(\varphi(x)); \varphi(y) \rangle^c \\ &\equiv (1 - \lambda A_1)(x, y) \end{aligned} \quad (6.6)$$

e

$$\begin{aligned} (A_1 C^{-1})(x, y) &= \langle w''(\varphi(x)) \rangle \delta(x - y) - \lambda \langle w'(\varphi(x)); w'(\varphi(y)) \rangle^c \\ &\equiv B_1(x, y), \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde w' e w'' denotam respectivamente a primeira e a segunda derivada do polinômio w , $\langle \cdot \rangle$ é dado por

$$\langle Q \rangle = \int Q d\rho \quad (6.8)$$

sendo $d\rho$ obtido pelo limite $[-T, T] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$ de $d\rho_\Lambda$ em (4.8) e $\langle \cdot; \cdot \rangle^c$ é a chamada **esperança truncada**, que é definida por

$$\langle Q_1; \dots; Q_n \rangle^c = \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}} (-1)^{|\mathcal{A}|+1} (|\mathcal{A}| - 1)! \prod_{\sigma \in \mathcal{A}} \langle \prod_{i \in \sigma} Q_i \rangle, \quad (6.9)$$

¹Para mais detalhes veja [GJS73] ou [GJ87]. Na expressão, $d\mu$ é a medida gaussiana com média zero e covariância C , dada pelo limite $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ de $d\mu_\Lambda$ na equação (4.10), W é obtido depois da passagem dos limites $T \rightarrow \infty$ e $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ na equação (4.9) e $A(\varphi)$ é uma função “bem comportada” (as propriedades exigidas sobre A são especificadas no cap. 21.3 de [GJ87]). Por simplicidade, podemos considerar $A(\varphi)$ como sendo uma função polinômial.

sendo Q_i um polinômio de φ , $\mathcal{P}$ o conjunto das partições de $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{A}$ uma das partições em $\mathcal{P}$ e $\sigma = \{i_1, \dots, i_{|\sigma|}\}$ é um conjunto de $\mathcal{A}$.

Quando $Q_i = \prod_{x \in X_i} \varphi(x)$, onde $X_i = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{|X_i|}}\}$ é o conjunto das variáveis de Q_i , denotamos (6.9) por $S^c(X_1; X_2; \dots; X_n)$, usando as semicolunas X_i para indicar como o truncamento é realizado. Note que, se A é um conjunto, estamos usando $|A|$ para indicar a cardinalidade de A . Observamos ainda que é possível mostrar que a definição dada acima coincide com a dada em (4.35).

Observações.

- (i) Em (6.6) e em (6.7), as últimas igualdades identificam os operadores com seus respectivos núcleos.
- (ii) Afim de realizar uma comparação com o que foi discutido em [Spe75] e entender melhor a expressão (6.9), notamos que

$$\begin{aligned} S^c(x_1; x_2) &= \langle \varphi(x_1); \varphi(x_2) \rangle^c \\ &= (-1)^{2+1} (2-1)! \langle \varphi(x_1) \rangle \langle \varphi(x_2) \rangle + (-1)^{1+1} (1-1)! \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle \\ &= \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle \\ &= S_\lambda^{(2)}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

onde, por abuso de notação, escrevemos $S^c(x_1; x_2)$ em vez de $S^c(X_1; X_2)$, com $X_1 = \{x_1\}$ e $X_2 = \{x_2\}$. Da mesma forma, para $X_1 = \{x_1, x_2\}$ e $X_2 = \{x_3, x_4\}$,

$$\begin{aligned} S^c(x_1, x_2; x_3, x_4) &= S_\lambda^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) - S_\lambda^{(2)}(x_1, x_2) S_\lambda^{(2)}(x_3, x_4) \\ &= D_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4). \end{aligned} \tag{6.10}$$

- (iii) No caso de acoplamento fraco (λ suficientemente pequeno e m suficientemente grande) segue do Corolário 4.2.3 que $S^c(X_1; \dots; X_n)$ decai exponencialmente com a distância X_i e X_j . Da mesma forma A_1 é um operador limitado em L^2 , visto que seu núcleo decai exponencialmente para $|x - y|$ suficientemente grande e que as funções de correlação de Schwinger do nosso modelo não possuem singularidades em pontos coincidentes. Sendo assim, a inversa $(1 - \lambda A_1)^{-1}$ existe e é definida pela série de Neumann

$$(1 - \lambda A_1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_1^n \tag{6.11}$$

que é convergente para λ suficientemente pequeno. Logo, segue da equação (6.6) que

$$\begin{aligned}\Gamma &= (1 - \lambda A_1)^{-1} C^{-1} \\ &= (1 - \lambda A_1)^{-1} [C^{-1} - \lambda A_1 C^{-1} + \lambda A_1 C^{-1}] \\ &= (1 - \lambda A_1)^{-1} [(1 - \lambda A_1) C^{-1} + \lambda A_1 C^{-1}] \\ &= C^{-1} + \lambda (1 - \lambda A_1)^{-1} B_1.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Finalmente, a partir das relações (6.4), (6.6), (6.7) e (6.12) podemos concluir que

$$\mathfrak{K} = \lambda (1 - \lambda A_1)^{-1} B_1\tag{6.13}$$

Notamos que cada termo da série de Neumann é um produto de esperanças $\langle \cdot \rangle$ de polinômios na variável φ .

Função de quatro pontos: Podemos considerar D_0 e D_λ como operadores em $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d) \otimes_s L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d)$ escrevendo $D_0 = 2S_\lambda^{(n)} \otimes_s S_\lambda^{(n)}$ e $D_0^{-1} = \frac{1}{2}\Gamma \otimes_s \Gamma$, onde $\otimes_s$ é um produto tensorial simétrico (veja detalhes em [Aui02]), e então usar a relação (5.23) para obter que

$$K = (D_\lambda^0)^{-1} - D_\lambda^{-1} = \frac{1}{2}\Gamma\Gamma - D_\lambda^{-1},\tag{6.14}$$

caso D^{-1} exista. Aqui, utilizamos a notação $\Gamma\Gamma \equiv \Gamma \otimes_s \Gamma$.

Agora, observamos que escrevendo $D_\lambda = D_\lambda^0 + G$, onde G é o operador cujo núcleo é dado por $G(x_1, x_2, x_3, x_4) = S^c(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \langle \varphi(x_1); \varphi(x_2); \varphi(x_3); \varphi(x_4) \rangle^c$, que possui decaimento exponencial em árvore, e lembrando que o operador D_λ^0 possui inversa (visto que é determinado em termos de $S_\lambda^{(2)}$), temos, pela equação (6.12), que

$$D_\lambda^{-1} = (D_\lambda^0 + G)^{-1} = [1 + (D_\lambda^0)^{-1}G]^{-1}(D_\lambda^0)^{-1}\tag{6.15}$$

está bem definido (basta utilizar a série de Neumann) e portanto

$$\begin{aligned}K &= \{1 - [1 + (D_\lambda^0)^{-1}G]^{-1}\} (D_\lambda^0)^{-1} \\ &= \{[1 + (D_\lambda^0)^{-1}G]^{-1}[1 + (D_\lambda^0)^{-1}G] - [1 + (D_\lambda^0)^{-1}G]^{-1}\} (D_\lambda^0)^{-1} \\ &= [1 + (D_\lambda^0)^{-1}G]^{-1} \{1 + (D_\lambda^0)^{-1} - 1\} (D_\lambda^0)^{-1} \\ &= [1 + (D_\lambda^0)^{-1}G]^{-1} (D_\lambda^0)^{-1} G (D_\lambda^0)^{-1}.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Usando que $\mathfrak{K} = \Gamma - C^{-1}$, obtemos

$$(D_\lambda^0)^{-1}G = \frac{1}{2}\Gamma\Gamma G = \frac{1}{2}[(\mathfrak{K} + C^{-1})(\mathfrak{K} + C^{-1})] G\tag{6.17}$$

e, novamente, pela fórmula de integração por partes, segue que

$$\begin{aligned} ((C^{-1}G)(\cdot, x_2, x_3, x_4))(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\lambda \langle w'(\varphi(x_1)); \varphi(x_2); \varphi(x_3); \varphi(x_4) \rangle^c, \\ ((C^{-1}C^{-1}G)(\cdot, \cdot, x_3, x_4))(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \lambda^2 \langle w'(\varphi(x_1)); w'(\varphi(x_2)); \varphi(x_3); \varphi(x_4) \rangle^c + \\ &\quad -\lambda \delta(x_1 - x_2) \langle w''(\varphi(x_1)); \varphi(x_3); \varphi(x_4) \rangle^c. \end{aligned}$$

Então, usando as expressões acima na equação (6.17), podemos concluir que

$$(D_\lambda^0)^{-1}G = \lambda A_2 \quad (6.18)$$

e

$$(D_\lambda^0)^{-1}G(D_\lambda^0)^{-1} = \frac{1}{2}\lambda A_2 [(\mathfrak{K} + C^{-1})(\mathfrak{K} + C^{-1})] \equiv \lambda B_2, \quad (6.19)$$

onde A_2 é um operador limitado (para mais detalhes, veja [Spe75]). Sendo assim,

$$K = \lambda(1 + \lambda A_2)^{-1}B_2, \quad (6.20)$$

sendo $(1 + \lambda A_2)^{-1}$ definido por uma série de Neumann, como em (6.11), absolutamente convergente para λ suficientemente pequeno.

Lembrando que estamos sempre considerando $\lambda \ll 1$, a fim de obteremos uma limitação para K , devemos nos concentrar nos termos de menor potência de λ . Sendo assim, definimos a **aproximação linear** λL como sendo o termo de K com menor ordem em λ .

Logo, observando que $G|_{\lambda=0} = 0$, vemos que L é dado por

$$L = \left. \frac{\partial K}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = (D_{\lambda=0}^0)^{-1} \left. \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} (D_{\lambda=0}^0)^{-1} = B_2|_{\lambda=0}. \quad (6.21)$$

Então, utilizando as expressões obtidas através da integração por partes nas equações (6.18) e (6.19), obtemos que o núcleo do operador L é dado por

$$\begin{aligned} L(x_1 x_2; x_3 x_4) &= \frac{3}{8} a_2 \delta(x_2^0 - x_1^0) \delta(x_3^0 - x_2^0) \delta(x_4^0 - x_3^0) \times \\ &\quad \times \sum_{i=1}^4 \sum_{\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}^d} \left(-\Delta + \frac{m^2}{2} \right) (\vec{u}, \vec{v}) \prod_{j \neq i} \delta(\vec{x}_j - \vec{u}) \delta(\vec{x}_i - \vec{v}), \end{aligned} \quad (6.22)$$

que é local na variável temporal. Por abuso de notação os deltas de Kronecker nas variáveis espaciais são denotados da mesma forma que os deltas de Dirac nas variáveis temporais. Assim, podemos escrever

$$K = \lambda L + \lambda^2 \mathcal{K} \quad (6.23)$$

Finalmente, estamos aptos para obter limitações para os núcleos de $\mathfrak{K}$ e $\mathcal{K}$:

Teorema 6.0.1. *Dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in (0, 1)$ suficientemente pequenos, os núcleos de $\mathfrak{K}_\lambda$ e $\mathcal{K}_\lambda \equiv \mathcal{K}$ possuem as seguintes limitações:*

$$|\mathfrak{K}_\lambda(x_1, x_2)| \leq \lambda^2 \mathcal{O}(1) \exp \left[-(1 - \varepsilon_1) \frac{3m^2}{2} |x_1^0 - x_2^0| - \ln(\varepsilon_2 m^2) \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| \right], \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4)| &\leq \mathcal{O}(1) \exp \left\{ -\ln(\varepsilon_4 m^2) [2\|(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) - (\vec{x}_3 + \vec{x}_4)\| + \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| + \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{x}_4 - \vec{x}_3\|] \right\} \exp \left\{ -(1 - \varepsilon_3) \frac{m^2}{2} [2|(x_1^0 + x_2^0) - (x_3^0 + x_4^0)| + |x_2^0 - x_1^0| + |x_4^0 - x_3^0|] \right\}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Antes de demonstrar tal resultado, enunciaremos um corolário que é consequência do teorema acima e do Teorema de Paley-Wiener ² (para demonstração, veja a Seção V.9 de [Sim93]).

Corolário 6.0.2. *Dado $\varepsilon \in (0, 1)$ suficientemente pequeno, se u, p, q, k são os momentos conjugados das variáveis $(x_1 - x_2), \xi, \eta, \tau$ respectivamente, então os núcleos $\tilde{\mathfrak{K}}_\lambda(u)$ e $\tilde{K}_\lambda(p, q, \kappa)$ são analíticos e limitados por uma constante (dependente de m) na região*

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}m u^0| &\leq (1 - \varepsilon) 3m^2/2, & |\mathcal{I}m u^j| &\leq (1 - \varepsilon) \ln(\varepsilon m^2), \\ |\mathcal{I}m k^0| &\leq (1 - \varepsilon) 4m^2/2, & |\mathcal{I}m p^0, \mathcal{I}m q^0| &\leq (1 - \varepsilon) 2m^2/2, \\ |\mathcal{I}m k^j| &\leq 4(1 - \varepsilon) \ln(\varepsilon m^2), & |\mathcal{I}m p^j, \mathcal{I}m q^j| &\leq (1 - \varepsilon) \ln(\varepsilon m^2), \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.1. Lembrando que os núcleos de $\mathfrak{K}_\lambda$ e K_λ são escritos em termos das funções de correlação truncadas, vemos que, para obter os limites estipulados no teorema, devemos ser capazes de estimar integrais do tipo

$$\int F(\varphi) e^{-V_T(\varphi)} d\mu_{C_\Lambda^*},$$

onde $d\mu_{C_\Lambda^*}$ e $V_T(\varphi)$ são definidos conforme em (4.14).

Para obter o decaimento na variável temporal ($x_i^0 \in \mathbb{R}$) iremos utilizar o “método de desacoplamento de hiperplanos” como desenvolvido por Thomas Spencer em [Spe75]. Assim como feito para obter o limite termodinâmico das funções de correlação, iremos introduzir novas variáveis t_i , $i \in \mathbb{Z} \cup (-T, T)$ para testar o acoplamento entre pontos acima e abaixo de cada hiperplano $x^0 = i$. Fazer $t_i = 0$ tem como efeito o desacoplamento das interações com suporte “atravessando” este hiperplano.

²**Teorema de Paley-Wiener.** *A transformada de Fourier de uma função f , $\tilde{f}(p)$, é analítica na faixa $|\mathcal{I}m(p)| < a - \varepsilon$ se, e somente se, para todo $1 \gg \varepsilon > 0$*

$$|f(x)| \leq C(\varepsilon) e^{-a|x|},$$

onde $C(\varepsilon)$ é uma constante positiva.

Definimos

$$C_{t_1} = t_1 C_s + (1 - t_1)[C_s(\Delta T_1) + C_s(\sim \Delta T_1)], \quad (6.26)$$

onde $C_s = C_{s_1, \dots, s_n}$ é como em (4.25), $t_1 \in [0, 1]$ e ΔT_1 é a região $\{x^0 \in \mathbb{R} : x^0 \in (-T, -T+1)\}$. Notamos que fazer $t_1 = 1$ desacopla C_{t_1} através do hiperplano $x^0 = -T+1$, além disso, conforme mostrado em [Spe75], vale que $0 \leq C_{s,t}(x, y) \leq C^*(x, y)$, onde C^* é a covariância definida em (4.12). De agora em diante, iremos omitir o índice s .

Acrescentando um novo parâmetro $t_2 \in [0, 1]$ (para o hiperplano $x^0 = -T + 2$), definimos

$$C_{t_1, t_2} = t_2 C_{t_1} + (1 - t_2)[C_{t_1}(\Delta T_2) + C_{t_1}(\sim \Delta T_2)],$$

onde $\Delta T_2 = \{x^0 \in \mathbb{R} : -T < x^0 < -T + 2\}$. Seguindo com este procedimento, definimos $C_{t_1, t_2, t_3, \dots}$ e então passamos a denotar tal covariância por C_t .

Retornando ao núcleo $\mathfrak{K}$, do estado de uma partícula e ao núcleo de Bethe-Salpeter K temos os seguintes resultados auxiliares:

Lema 6.0.3. *Se o hiperplano i separa x de y (i.e., $x^0 < i < y^0$, ou vice-versa) então*

$$\left. \frac{d^r}{dt_i^r} \mathfrak{K}_{\lambda, t}(x, y) \right|_{t_i=0} = 0, \text{ se } r = 0, 1, 2. \quad (6.27)$$

Demonstração. Inicialmente, observe que a partir da covariância C_t podemos definir $S_t^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, como em (5.1), e $S_t^c(X_1; \dots; X_n)$, como em (4.20), trocando a covariância original na medida $d\rho$ pela covariância C_t . Assim, conforme se vê em [Spe75], podemos calcular a derivada de $S_t^c(X_1; \dots; X_n)$ com respeito a t_i através da seguinte fórmula

$$\dot{S}_t^c(X_1; \dots; X_n) = -\frac{1}{2} \int S_t^c(X_1; \dots; X_n; z_1, z_2) \dot{C}^{-1}(z_1, z_2) dz. \quad (6.28)$$

Lembre-se que as semi-colunas em S_t^c indicam como o truncamento é realizado em (6.9). O lado direito da equação acima está bem definido se usarmos a identidade

$$\dot{C}_t^{-1} = -C_t^{-1} \dot{C}_t C_t^{-1}, \quad (6.29)$$

veja [GJS73], e integração por partes como em (6.7). Como feito em (6.3), também definimos Γ_t como o inverso de $S_t^c(x; y) \equiv S_t^{(2)}(x, y)$:

$$\int \Gamma_t(x, y') S_t^c(y', y) dy' = \int \Gamma(x, y') S_t^{(2)}(y', y) dy' = \delta(x - y).$$

Agora, considere $x^0 \in \mathbb{R}$ fixo e os conjuntos

$$\Xi_+ = \{(y^0, \vec{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d : y^0 = x^0 + i, \text{ onde } i \in \mathbb{Z}^+\}$$

e

$$\Xi_- = \{(y^0, \vec{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d : y^0 = x^0 - i, \text{ onde } i \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Se P_+ é a projeção de $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d)$ em $L^2(\Xi_+)$, P_- é a projeção de $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d)$ em $L^2(\Xi_-)$, notamos que, como $S_t^c(x, y) = 0$ quando $t_i = 0$, S_t^c comuta com P_+ . Portanto, Γ_t comuta com P_+ e, assim, (6.27) vale para $r = 0$.

Da equação (6.28), segue que

$$\dot{S}_t^c(x_1; x_2) = -\frac{1}{2} \int S_t^c(x_1; x_2; z_1, z_2) \dot{C}^{-1}(z_1, z_2) dz.$$

Quando $t_i = 0$ e $x_1^0, z_1^0 \leq i \leq x_2^0, z_2^0$, vale que

$$S_t^c(x_1; x_2; z_1, z_2) = S_t^c(x_1, z_1) S_t^c(x_2; z_2). \quad (6.30)$$

Então, combinando as identidades acima e (6.29), obtemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt_i} \mathfrak{K}_{\lambda, t}(x, y) \right|_{t_i=0} &= \left. \frac{d}{dt_i} (\Gamma_t - C_t^{-1}) \right|_{t_i=0} \\ &= (\Gamma_t \dot{S}_t^c \Gamma_t - \dot{C}_t^{-1})|_{t_i=0} \\ &= (\Gamma_t S_t^c \dot{C}_t^{-1} S_t^c \Gamma_t - \dot{C}_t^{-1})|_{t_i=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

O fator $1/2$ em (6.28) é eliminado alternando entre z_1 e z_2 acima. Agora, visto que nossa interação polinomial $\mathcal{P}$ é uma função par, segue que o polinômio w em (6.6) e em (6.7) também é par. Então,

$$\begin{aligned} \ddot{S}_t^c(x_1; x_2) &= -\frac{1}{2} \int S_t^c(x_1; x_2; z_1, z_2) \ddot{C}_t^{-1}(z_1, z_2) dz + \\ &\quad + \frac{1}{4} \int S_t^c(x_1, x_2; z_1, z_2; z_3, z_4) \dot{C}_t^{-1}(z_1, z_2) \dot{C}_t^{-1}(z_3, z_4) dz. \end{aligned}$$

Quando $t_i = 0$ e $x_1^0, z_1^0 \leq i \leq x_2^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0$

$$S_t^c(x_1, x_2; z_1, z_2; z_3, z_4) = S_t^c(x_1, z_1) S_t^c(z_2, x_2; z_3, z_4).$$

Existem oito termos com esta forma, que podem ser obtidos variando-se a ordem das posições de cada z_i . Então, usando as equações acima

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt_i^2} \mathfrak{K}_{\lambda, t} \right|_{t_i=0} &= \left(-\Gamma_t \ddot{S}_t^c \Gamma_t + 2\Gamma_t \dot{S}_t^c \Gamma_t \dot{S}_t^c \Gamma_t - \ddot{C}_t^{-1} \right) \Big|_{t_i=0} \\ &= \ddot{C}_t^{-1} - \frac{8}{4} \int \dot{C}_t^{-1}(x, z_2) S_t^c(z_2, x_2; z_3, z_4) \Gamma_t(x_2 - y) \dot{C}_t^{-1}(z_3, z_4) dz dx_2 \\ &\quad + 2 \int \dot{C}_t^{-1}(x, z_2) S_t^c(z_2, x_2; z_3, z_4) \Gamma_t(x_2 - y) \dot{C}_t^{-1}(z_3, z_4) dz dx_2 - \ddot{C}_t^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Lema 6.0.4. *Se o hiperplano i separa x_1, x_2 de x_3, x_4 então*

$$\left. \frac{d^r}{dt_i^r} K_{\lambda,t}(x_1, x_2; x_3, x_4) \right|_{t_i=0} = 0, \text{ se } 0 \leq r \leq 3. \quad (6.31)$$

E se o hiperplano i separa x_1 de x_2, x_3, x_4 , então o resultado vale para $0 \leq r \leq 2$.

Demonstração. Definindo

$$D_t(x_1, x_2; x_3, x_4) = S_t^c(x_1, x_2; x_3, x_4)$$

e

$$D_t^0(x_1, x_2; x_3, x_4) = S_t^{(2)}(x_1, x_3)S_t^{(2)}(x_2, x_4) + S_t^{(2)}(x_1, x_4)S_t^{(2)}(x_2, x_3).$$

teremos que $K = (D_t^0)^{-1} - D_t^{-1}$ e, além disso, se P^+ é a projeção de $L^2([\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d] \times [\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d])$ em $L^2(\Xi_+ \times \Xi_+)$ e P^- é a projeção de $L^2([\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d] \times [\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d])$ em $L^2(\Xi_- \times \Xi_-)$, não é difícil mostrar que D_t e D_t^{-1} comutam com P^+ , P^- e $P^0 = 1 - P^+ - P^-$ quando $t_i = 0$.

Com isso em mente, a demonstração segue de forma análoga ao lema anterior. Veja [Spe75] para mais detalhes. $\square$

Expandindo os núcleos K e $\mathfrak{K}$ numa série de Taylor em t_i e usando os resultados acima, observamos que tal expansão consiste apenas no termo remanescente

$$f_{(t=1)} = \int_0^1 \prod_i \left[\frac{(1-t_i)^{r_i}}{r_i!} \partial_{t_i}^{r_i+1} \right] f_t dt,$$

onde $f_t = \mathfrak{K}_t$ ou $f_t = K_t$. Se $f_t = \mathfrak{K}_t(x, y)$, então i é tal que $x^0 \leq i \leq y^0$ e $r_i = 2$. Se $f_t = K_t(x_1, x_2; x_3, x_4)$ e supondo que $x_1^0 \leq x_2^0 \leq x_3^0 \leq x_4^0$, então i satisfaz $x_1^0 \leq i \leq x_4^0$. Neste caso, $r_i = 3$ para $x_2^0 \leq i \leq x_3^0$ e $r_i = 2$ nos demais casos.

Para estimar a integral acima, lembramos que os núcleos $\mathfrak{K}$ e K podem ser expressos em termos das funções de correlação truncadas. Por exemplo, para $\mathcal{P}(\varphi) = \lambda(\varphi^6 - \varphi^4)$, temos que ([DEm76]) $K = \lambda L + \lambda^2 \mathcal{K}$, com $L(x_1, x_2; x_3, x_4) = c_0 \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \delta(x_3 - x_4)$ e $\mathcal{K}$ expresso em termos das funções de Schwinger. Sendo assim, devemos realizar estimativas para expressões do tipo

$$\partial_t^\beta \int Q e^{\lambda V} d\mu_C,$$

onde $\partial_t^\beta = \prod_i d^{n_i}/dt_i^{n_i}$ (detalhes abaixo), $C = C_{s,t}$ e Q é um polinômio em φ . A seguir faremos um esboço com as principais ideias necessárias para a obtenção de tal estimativa; os detalhes podem ser encontrados em [Spe75].

Introduziremos agora algumas notações necessárias. Dado $I \subset \mathbb{Z}$, seja β uma função definida em I e assumindo valores em $\{1, 2, \dots, n\}$, ou seja, β também pode ser visto como

o conjunto $\{n_i\}_{i \in I}$, com $n_i \leq n$. Então usando integração por partes e a regra de Leibniz, temos

$$\partial_t^\beta \int Q e^{\lambda V} d\mu_C = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(\beta)} \int \prod_{\alpha \in \pi} \left[\frac{1}{2} \partial_t^\beta C \circ \Delta_\varphi \right] e^{-\lambda V} Q d\mu_C,$$

onde $\mathcal{P}(\beta)$ é o conjunto das partições de β . Para cada α acima introduzimos uma variável complexa $h(\alpha)$. Então, considerando o índice de localização $j = (j_1, j_2)$, definimos $C_j(x_1, x_2) = \chi_{I_{j_1}} C(x_1, x_2) \chi_{I_{j_2}}(x_2)$, onde I_{j_1} é alguma linha unitária $I \times \{x\}$. Finalmente, definimos a estrutura chave

$$\langle Q \rangle_\pi(t, h) := \frac{\int \prod_{\alpha \in \pi} \prod_j \left[1 + h(\alpha) \frac{1}{2} \partial_t^\beta C_j \circ \Delta_\varphi \right] e^{-\lambda V} Q d\mu_{C_j}}{\int \prod_{\alpha \in \pi} \prod_j \left[1 + h(\alpha) \frac{1}{2} \partial_t^\beta C_j^* \circ \Delta_\varphi \right] e^{-\lambda V} d\mu_{C_j}} \quad (6.32)$$

que é relacionada com as derivadas em t por

$$\partial_t^\beta \langle Q \rangle(t) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(\beta)} \prod_{\alpha \in \pi} \frac{\partial}{\partial h(\alpha)} \langle Q \rangle_\pi(t, h) \Big|_{h=0}.$$

Então, podemos controlar as derivadas em t usando a analiticidade de $\langle Q \rangle_\pi(t, h)$ na variável h (com h escolhido em um domínio apropriado) e, por sua vez, as derivadas em h podem ser limitadas usando a fórmula integral de Cauchy.

A analiticidade em h de $\langle Q \rangle_\pi(t, h)$ (e portanto de $\mathfrak{K}(t, h)$ e $K(t, h)$) é mostrada através de uma expansão *cluster* (envolvendo o parâmetro s introduzido anteriormente), que nos permite estabelecer limites convenientes para $|\langle Q \rangle_\pi(t, h)|$ e relacionar expressões para h escolhido adequadamente. A convergência desta expressão é assegurada pela expansão realizada na Seção 4.2 e pelo fato de que (para h num domínio apropriado) $h(\alpha) \partial_t^\beta C_j \circ \Delta_\varphi$ pode ser tratado como um termo pequeno. De forma mais precisa:

Lema 6.0.5. *Para $\alpha = \{n_i\}_{i \in I} \subset I^{(n)}$, temos*

$$\left| \int \partial_t^\beta C_j(x, y) dy \right| \leq \mathcal{O}(1) \exp \left[-\frac{m^2}{2} d(\alpha) (1 - \varepsilon) \right], \quad (6.33)$$

onde $\varepsilon \ll 1$ e

$$d(\alpha) = \begin{cases} \infty, & \text{se } n_i > 1 \\ 0, & \text{se } |\alpha| = 1 \\ \max_{i, j \in I} |i - j|, & \text{nos demais casos} \end{cases}.$$

Este limite segue do decaimento exponencial da covariância inicial C e do efeito causado pelo parâmetro interpolante t : recorde que $C_{t_1} = t_1 C + (1 - t_1)[C(\Delta T_1) + C(\sim \Delta T_1)]$, e portanto $\partial C_{t_1} / \partial t_i = C - [C(\Delta T_1) + C(\sim \Delta T_1)]$, isto é, $\partial_{t_1} C_{t_1}(x, y) \neq 0$ se, e somente se, x está em ΔT_1 e y em $\sim \Delta T_1$ (ou vice-versa). Observamos ainda que quando $|\alpha| = 1$ o

termo de decaimento exponencial não aparece na desigualdade acima, no entanto a ação de Δ_φ (na equação (6.32)) em $e^{-\lambda V}$ nos fornece potências de λ , as quais nos asseguram um bom decaimento em (6.33).

Usando o lema anterior e a definição de $d(\alpha)$, é possível obter que:

Teorema 6.0.6. $\mathcal{K}_\lambda(t, h)$ é analítico na variável h , para $|h(\alpha)| \leq \exp \left[-\frac{m^2}{2}(1 - \varepsilon)(d(\alpha) + 1) \right]$ e então

$$|\mathcal{K}_\lambda| \leq \mathcal{O}(1) \exp \left(-\frac{m^2}{2}(1 - \varepsilon') \bar{d} \right),$$

com

$$\bar{d} := \min_{\pi} \sum_{\alpha \in \pi} (d(\alpha) + 1) < [2|(x_1^0 + x_2^0) - (x_3^0 + x_4^0)| + |x_1^0 + x_4^0| + |x_1^0 - x_2^0| + |x_3^0 - x_4^0|]$$

e $\varepsilon' = \varepsilon'(\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$.

De forma análoga, pode se chegar a um resultado para o núcleo irredutível $\mathfrak{K}_\lambda$, mas agora com $\bar{d}$ limitado por $|x_1^0 - x_2^0|$.

Finalmente, para obter o decaimento nas variáveis espaciais, devemos novamente aplicar o método de desacoplamento por hiperplanos (mas, agora, o procedimento é mais simples).

Escrevemos $V = \sum_{\vec{x}} V_{\vec{x}} + \sum_b V_b$, onde $\vec{x}$ são pontos em Λ , os $V_{\vec{x}}$'s são as partes locais do potencial V , $b = (\vec{x}, \vec{y})$, com $|\vec{x} - \vec{y}| = 1$ ou 2 (para termos envolvendo Δ^2), e os V_b 's são as partes não locais. Então introduzimos parâmetros de interpolação z para cada contorno b nos termos de potencial não local. Por exemplo, para $\mathcal{P}(\varphi) = (\varphi^6 - \varphi^4)$, um dos termos em V_b é $\varphi^3(x)\varphi(y)$ (com $|\vec{x} - \vec{y}| = 1$); ao introduzirmos os parâmetros interpolantes ele é substituído por $z_{\vec{x}\vec{y}}\varphi^3(x)\varphi(y)$. O potencial inicial pode ser recuperado fazendo $z_{\vec{x}\vec{y}} = 1$; já fazer $z_{\vec{x}\vec{y}} = 0$ tem o efeito de desacoplar os hiperplanos $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Depois deste procedimento, devemos mais uma vez expandir nossos núcleos em uma série de Taylor em z_i (onde i identifica o parâmetro de desacoplamento com o contorno para o qual ele foi tomado) para obter

$$f_{(z=1)} = \int_0^1 \prod_i (1 - z_i) \partial_{t_i} f_t dz.$$

O ponto agora é que f_z é analítica para z em um disco de raio dado por uma fração de m^2 . Para z nesta região, mostra-se que os termos quadráticos não locais (que envolvem os parâmetros de interpolação) podem ser controlados por $\frac{\varepsilon m^4}{8}(\varphi, \varphi)$ e as partes não locais com origem em $\mathcal{P}(\varphi)$ podem ser controladas pelas partes locais. Por fim, usando estimativas de Cauchy na expressão acima e a convergência da expansão *cluster* se obtém a estimativa do Teorema 6.0.1. $\square$

Estados ligados e partículas livres

No Capítulo 4, provamos a existência de uma lacuna espectral ao mostrarmos que a função de correlação de dois pontos possui decaimento exponencial com o aumento da distância. Nesta seção, os limites e a analiticidade estabelecidos no capítulo anterior para os núcleos $\mathfrak{K}$ e K serão utilizados, em conjunto com o teorema de analiticidade de Fredholm, para estudar a função de correlação de quatro pontos parcialmente truncada e provar quando há existência (ou ausência) de estados ligados.

Depois de analisarmos rapidamente a função de correlação de dois pontos truncada (o que irá nos permitir fazer um estudo mais preciso da taxa de decaimento da massa de uma partícula livre), iremos seguir para a análise da função de quatro pontos parcialmente truncada $D_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4)$. Ela será feita através da equação de Bethe-Salpeter, levando em conta a seguinte relação

$$D_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4) = D_\lambda^0(x_1, x_2; x_3, x_4) + [D_\lambda^0 K_\lambda D_\lambda](x_1, x_2; x_3, x_4), \quad (7.1)$$

sendo que o produto do último termo é dado pela convolução dos núcleos:

$$[D_\lambda^0 K_\lambda D_\lambda](x_1, x_2; x_3, x_4) = \int dy_1 \cdots dy_4 D_\lambda^0(x_1, x_2; y_1, y_2) K_\lambda(y_1, y_2; y_3, y_4) D_\lambda(y_3, y_4; x_3, x_4). \quad (7.2)$$

Nos concentrando na região espectral de energia no intervalo $(0, 2M_\lambda)$ (M_λ será determinada adiante), a ideia principal é mostrar que (7.1) pode ser resolvida para D_λ usando uma série de Neumann para $[1 - D_\lambda^0 K_\lambda]^{-1}$. Sob as condições da primeira parte do Teorema 1.0.1, a ausência de estados ligados será dada por uma série de Neumann bem definida se considerarmos todo o domínio $(0, 2M_\lambda)$. Por sua vez, a afirmação sobre os estados ligados na segunda parte do Teorema 1.0.1, será provada mostrando-se que a existência da série de Neumann mencionada acima ainda pode ser garantida se levarmos em conta um domínio menor (M_λ, M_b) , com $M_\lambda < M_b < 2M_\lambda$. A unicidade deste estado

ligado será verificada mostrando que $[1 - D_\lambda^0 K_\lambda]$ se anula apenas uma vez para funções com suporte em $(0, 2M_\lambda)$.

A análise dos estados ligados é realizada em dois passos: escrevemos

$$K_\lambda = \lambda L + \lambda^2 \mathcal{K}_\lambda, \quad (7.3)$$

afim de separar os termos em K_λ com dependência $\mathcal{O}(\lambda)$ (aqueles que dependem de λ na potência 1), dos demais termos (que dependem de λ com potência maior que um). Chamamos L de contribuição linear. Então, na primeira etapa, nos concentramos na aproximação linear (que consiste na análise de $D_\lambda(x_1, x_2; x_3, x_4)$ levando em conta apenas o termo λL em K_λ). O próximo passo seria retornar para o problema original, com K_λ , e mostrar que o comportamento da função de quatro pontos truncada é comandado pela aproximação linear. Por falta de tempo, este último passo não será realizado aqui, mas pode ser encontrado em [FdVOPS01].

Observamos que o truncamento em D garante que $K_{\lambda=0} = 0$, pois aí temos que $D_{\lambda=0} = D_0$ se x_1 e x_2 são separados temporalmente de x_3 e x_4 .

7.1 A função de dois pontos

Nesta seção, iremos utilizar a função de dois pontos para realizar a caracterização do espectro do estado de uma partícula. Nosso objetivo será mostrar a existência de uma curva de dispersão isolada $E_\lambda(\vec{p})$ para o estado de uma partícula sujeito à interação $\mathcal{P}(\varphi)$, o que provará a primeira parte do Teorema 1.0.1.

Proposição 7.1.1. *Para m suficientemente grande e λ suficientemente pequeno, temos*

$$M_\lambda = M_0 + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (7.4)$$

onde $M_0 = \frac{m^2}{2}$.

Demonstração. Conforme vimos no Capítulo 5, usando a fórmula de Feynman-Kac e o Teorema Espectral, se mostra que a transformada de Fourier $\tilde{S}_\lambda^{(2)}(p)$ da função de dois pontos $S^{(2)}(0, x)$, onde $x = (x^0, \vec{x})$ e $0 = (0, \vec{0})$, é dada por

$$\tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) = \int_0^\infty \int_{T^d} \frac{2E}{E + p_0^2} (2\pi)^d \delta(\vec{q} - \vec{p}) d(\Omega, \hat{\varphi} \mathcal{E}(E, \vec{q}) \hat{\varphi} \Omega), \quad (7.5)$$

sendo que $\mathcal{E}(E, \vec{q})$ denota o produto das famílias espectrais associadas aos operadores de energia e momento $(H, \vec{P})$. Podemos ainda expressar $\tilde{S}_\lambda^{(2)}(p)$ em termos da medida espectral $d\eta_\lambda(E, \vec{p})$ como

$$\tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) = \int_0^\infty \int_{T^d} \frac{2E}{E + p_0^2} d\eta_\lambda(E, \vec{p}), \quad (7.6)$$

sendo que tal medida possui suporte no espectro de H restrito a um número ímpar de quasi-partículas.

Agora, para Γ_λ sendo o inverso por convolução de S_λ , a relação de dispersão $E_\lambda(\vec{p})$ é dada como solução da equação implícita

$$\tilde{\Gamma}_\lambda(p^0 = iE_\lambda, \vec{p}) = 0.$$

Que esta equação possui solução, decorre da analiticidade de $\tilde{\Gamma}$ e do Teorema da Função Implícita. Agora, devido existência da lacuna espectral, obtida do decaimento exponencial de $S^{(2)}$ e ao fato de que Γ possui decaimento mais rápido que $S^{(2)}$ (o que não será provado aqui), segue que $E_\lambda(\vec{p})$ é uma curva isolada.

Conforme se vê no Capítulo 17 em [GJ87], separando a contribuição do estado de uma partícula do restante dos estados com número ímpar de partículas, a medida espectral acima pode ser decomposta da seguinte forma

$$d\eta_\lambda(E, \vec{p}) = \frac{1}{2(2\pi)^d} \frac{c_\lambda(\vec{q})}{E_\lambda(\vec{q})} \delta(E - E_\lambda(\vec{q})) dE (2\pi)^d \delta(\vec{q} - \vec{p}) d\vec{q} + d\eta'(E, \vec{p}), \quad (7.7)$$

onde $d\eta'(E, \vec{p})$ se anula para $p^0 \notin [2M_0 - \varepsilon, \infty)$, para algum $\varepsilon > 0$ que tende a zero quando $\lambda \rightarrow 0$, e $c_\lambda(\vec{q})$ é uma constante de normalização que será determinada adiante.

Observamos que aplicando (7.7) em (7.6), e descartando o termo $d\eta'(E, \vec{p})$ teremos, para $\lambda = 0$, que

$$\tilde{S}_0^{(2)}(p) = \frac{c_0(\vec{p})}{(p^0)^2 + E_0(\vec{p})^2}. \quad (7.8)$$

Agora, lembrando que $\tilde{S}_0^{(2)}(0, x) = \tilde{C}(0, x)$ onde $\tilde{C}$ é a transformada de Fourier da covariância livre (dada na equação (4.10)), podemos obter por comparação que

$$E_0(\vec{p}) = \sum_{j=1}^d (1 - \cos p_j) + \frac{m^2}{2} \quad \text{e} \quad c_0(\vec{p}) = 1. \quad (7.9)$$

A massa de uma única partícula é definida como sendo o valor de $E_\lambda(\vec{p})$ com momento valendo zero, isto é, quando $\lambda = 0$, temos

$$M_0 = E_0(\vec{p} = \vec{0}) = \frac{m^2}{2}. \quad (7.10)$$

Voltando à equação (7.5) para considerar o regime de acoplamento fraco ($\lambda > 0$ e $\lambda \ll 1$), obtemos ao aplicar (7.7) que

$$\tilde{S}_\lambda^{(2)}(p) = \frac{c_\lambda(\vec{p})}{p_0^2 + E_\lambda(\vec{p})^2} + \int_{2M_0}^\infty \int_{T^d} \frac{2E}{E^2 + (p_0)^2} d\eta'(E, \vec{p}). \quad (7.11)$$

Usando as informações anteriores podemos concluir através de um cálculo explícito que

$$\tilde{S}_\lambda^{(2)} = \tilde{S}_0^{(2)} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (7.12)$$

Então usando expansão em série de Neumann para $\tilde{\Gamma}_\lambda = [\tilde{S}_0^{(2)} + \mathcal{O}(\lambda^2)]^{-1}$ é possível concluir que $\tilde{\Gamma}_\lambda = \tilde{\Gamma}_0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Desta forma, segue das observações anteriores que $c_\lambda(\vec{p}) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$, pois $c_0(\vec{p}) = 1$ e para $p^0 \in [0, 2M_0 - \varepsilon]$, temos da equação (7.11) que $\tilde{\Gamma}_\lambda(ip^0, \vec{p}) = [-(p^0)^2 + E_\lambda(\vec{p})^2]/c_\lambda(\vec{p})$, então

$$c_\lambda(\vec{p}) = - \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_\lambda}{\partial(\kappa^2)}(i\kappa, \vec{p}) \right]^{-1} \bigg|_{\kappa^2 = E_\lambda(\vec{p})^2}. \quad (7.13)$$

Agora, conforme visto no Corolário 6.0.2, $\tilde{\mathfrak{K}}_\lambda$ (e portanto $\tilde{\Gamma}_\lambda$) é analítico para $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$ e $|\operatorname{Im} p^0| < \kappa$, com $\kappa \leq 2M_0 - \varepsilon$. Além disso, visto que numa vizinhança dos zeros $(\pm iE_0(\vec{p}), \vec{p})$ de $\tilde{\Gamma}_0(p)$, $\tilde{\mathfrak{K}}_\lambda$ é $\mathcal{O}(\lambda^2)$, segue do teorema de Rouché (lembre-se da relação $\tilde{\mathfrak{K}}(p) = \tilde{\Gamma}_0(p) - \tilde{\Gamma}_\lambda(p)$) que $\tilde{\Gamma}_\lambda(p)$ também tem dois zeros nesta vizinhança, os quais chamaremos de $(\pm iE_\lambda(\vec{p}), \vec{p})$. Notamos que, da equação (7.5), podemos concluir que estes zeros são localizados apenas para p_0 no eixo imaginário. Além disso, como $\tilde{\Gamma}_\lambda(ip^0, \vec{p})$ é monótona para $p^0 \in [0, 2M_0 - \varepsilon]$, para cada $\vec{p}$ fixo, o valor $E_\lambda(\vec{p})$ para o qual $\tilde{\Gamma}_\lambda(\pm iE_\lambda(\vec{p}), \vec{p}) = 0$ é único.

A diferença $[E_\lambda(\vec{p}) - E_0(\vec{p})]$ é $\mathcal{O}(\lambda^2)$, como consequência do fato que a medida $d\eta'(E, \vec{p})$ poder ser controlada por um termo com potência em λ de ordem dois. Isso será mostrado na proposição que segue.

Assim, de (7.11) e do argumento acima, concluímos que a curva espectral $E_\lambda(\vec{p})$ é isolada do restante do espectro de H e sua massa correspondente M_λ satisfaz (7.4). $\square$

Observamos que a proposição acima é exatamente o que estabelece a primeira parte do nosso teorema 1.0.1.

Com respeito à medida $\eta'_\lambda(E, \vec{p})$, vale o seguinte:

Proposição 7.1.2. *Para cada $\vec{p}$ fixo, realizando a integração sobre E , temos que*

$$\int_0^\infty d\eta'_\lambda(E, \vec{p}) = \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (7.14)$$

Demonstração. A transformada de Fourier espacial para a função de dois pontos é dada por

$$S_\lambda(p^0 = 0, \vec{p}) = \frac{c_\lambda(\vec{p})}{E_\lambda(\vec{p})^2} + (2\pi)^d \int_0^\infty d\eta'_\lambda(E, \vec{p}). \quad (7.15)$$

Por outro lado, $\tilde{S}_\lambda(p^0 = 0, \vec{p}) = \tilde{S}_0(p^0 = 0, \vec{p}) + \mathcal{O}(\lambda^2)$, com $\tilde{S}_0(p^0 = 0, \vec{p}) = [E_\lambda(\vec{p})^2]^{-1}$ e então $\tilde{S}_\lambda(p^0 = 0, \vec{p}) = [E_\lambda(\vec{p})^2]^{-1} + \mathcal{O}(\lambda^2)$.

Usando o fato acima na equação (7.15) e também que

$$c_\lambda(\vec{p}) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2); \quad E_\lambda(\vec{p}) = E_0(\vec{p}) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

obtemos o desejado. $\square$

A propriedade a seguir garante a convexidade da curva de dispersão.

Proposição 7.1.3. *Se $\vec{p} \in T^d \setminus \{0\}$, a seguinte limitação é satisfeita*

$$M_\lambda := E_\lambda(\vec{0}) < E_\lambda(\vec{p}).$$

Demonstração. Para concluir o desejado, basta provarmos que $E_0(\vec{p}) - E_0(\vec{0}) > 0$, $\forall \vec{p} \in T^d \setminus \{0\}$ e depois usarmos que $E_\lambda(\vec{p}) = E_0(\vec{p}) + \mathcal{O}(\lambda^2)$ e que podemos tomar λ suficientemente pequeno.

Por simplicidade faremos o caso $d = 1$, os demais seguirão de forma análoga. Neste caso, temos que $E_0(p) = 2(1 - \cos p)$ e portanto $E_0(p)$ é não negativo em $[-\pi, \pi]$, é decrescente para $p \in [-\pi, 0]$ e crescente para $p \in [0, \pi]$. Sendo assim, vale a extimativa do enunciado.

Observamos também que $\sup_{\vec{p} \in T^d} |E_0(\vec{p}) - E_0(\vec{0})| = 2d$, e isso implica que $\sup_{\vec{p} \in T^d} |E_\lambda(\vec{p}) - E_\lambda(\vec{0})| = 2d + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Além disso, temos que $E_\lambda(\vec{p})$ tem concavidade voltada para cima quando $|p_j| \leq \pi/2$, $\forall 1 \leq j \leq d$. $\square$

7.2 A aproximação “ladder”

Nesta seção, iremos nos dedicar a mostrar a existência ou ausência de estados ligados na aproximação linear.

Usaremos as coordenadas relativas em (5.10), (5.11) e (5.12) para analisar os núcleos em (7.1). Voltando à equação (5.26), temos que o núcleo de $\tilde{D}_\lambda^0$ é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\lambda^0(p, q, k) &= \int D_\lambda^0(\xi, \eta, \tau) e^{-ip\xi - iq\eta - ik\tau} d\xi d\eta d\tau \\ &= \int S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 - \frac{\eta^0}{2} + \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau} + \vec{\xi}\right) S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 + \frac{\eta^0}{2} - \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau} + \vec{\eta}\right) e^{-ip\xi - iq\eta - ik\tau} d\xi d\eta d\tau \\ &\quad + \int S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 - \frac{\eta^0}{2} - \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau}\right) S_\lambda^{(2)}\left(\tau^0 + \frac{\eta^0}{2} + \frac{\xi^0}{2}, \vec{\tau} + \vec{\xi} + \vec{\eta}\right) e^{-ip\xi - iq\eta - ik\tau} d\xi d\eta d\tau. \end{aligned}$$

Calculando as integrais acima,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\lambda^0(p, q, k) &= \delta(p^0 + q^0) \left[\tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} - p^0, \vec{p}\right) \tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} + p^0, \vec{q}\right) \delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} + p^0, \vec{p}\right) \tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} - p^0, \vec{k} - \vec{p}\right) \delta(\vec{p} - \vec{q}) \right]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Observamos que em $\tilde{D}_\lambda^0(k^0)$ estamos tomando $\vec{k} = \vec{0}$, ou seja, $\tilde{D}_\lambda^0(k^0) = \tilde{D}_\lambda^0(p, q, k^0) = \tilde{D}_\lambda^0(p, q, (k^0, \vec{0}))$. Não é difícil mostrar que a ação de $\tilde{D}_\lambda^0(k^0)$ em funções $f(p)$ que independem da energia (isto é, dependem apenas de $\vec{p}$) é dada por

$$(\tilde{D}_\lambda^0(k^0)f)(p) = (2\pi)^{d+1} \tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} + p^0, \vec{p}\right) \tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} - p^0, \vec{p}\right) [f(\vec{p}) + f(-\vec{p})]. \quad (7.17)$$

Conforme mencionado no início do capítulo, a aproximação linear é feita substituindo $\tilde{K}_\lambda$ por seu termo de primeira ordem $\lambda\tilde{L}$. Fazendo a mudança para as coordenadas relativas na equação (6.22), segue que

$$\tilde{L}(p, q, k) = -\frac{3}{4}a_2[E_0(\vec{p}) + E_0(\vec{q}) + E_0(\vec{p}\vec{q}) + E_0(\vec{q} - \vec{k})],$$

onde notamos que a transformada de Fourier não possui dependência em p^0 , q^0 , ou k^0 . Daí vemos que, para $\vec{k} = \vec{0}$,

$$L(p, q, (k^0, \vec{0})) = -\frac{3}{4}a_2[E_0(\vec{p}) + E_0(\vec{q})], \quad (7.18)$$

mostrando que o operador $\tilde{L}(k^0, \vec{0})$ possui posto dois.

Resolvendo a equação de Bethe-Salpeter (5.26) na aproximação linear, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\lambda(k^0) &= \left[1 - (2\pi)^{-2(d+1)} \lambda \tilde{D}_\lambda^0(k^0) \tilde{L}(k^0)\right]^{-1} \tilde{D}_\lambda^0(k^0) \\ &= \tilde{D}_\lambda^0(k^0) \left[1 - (2\pi)^{-2(d+1)} \lambda \tilde{L}_\lambda(k^0) \tilde{D}_\lambda^0(k^0)\right]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Usando (7.16) e (7.18), segue que a ação de $\tilde{L}_\lambda(k^0) \tilde{D}_\lambda^0(k^0)$ em uma função f é dada por

$$\begin{aligned} \left(\tilde{L}_\lambda(k^0) \tilde{D}_\lambda^0(k^0) f\right)(p) &= -\frac{3}{4}a_2(2\pi)^{d+1} \int [E_0(\vec{p}) + E_0(\vec{q})] \\ &\quad \times \tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} - q^0, \vec{q}\right) \tilde{S}_\lambda^{(2)}\left(\frac{k^0}{2} - q^0, \vec{q}\right) [f(-q) + f(-q^0, \vec{q})] dq. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Agora, se f depende apenas de $\vec{p}$, então $f(-q^0, \vec{q}) = f(q)$ e portanto

$$\left(\tilde{L}_\lambda(k^0) \tilde{D}_\lambda^0(k^0) f\right)(p) = -\frac{3}{4}a_2(2\pi)^{d+1} [\rho_0(f) + \rho_1(f) E_0(\vec{p})], \quad (7.21)$$

onde

$$\rho_n(f) = \frac{1}{2} \int_{T^d} G(\vec{q}, k^0) E_0(\vec{q})^{\delta_{0n}} [f(\vec{q}) + f(-\vec{q})] d\vec{q}, \quad n = 0, 1 \quad (7.22)$$

e

$$G(\vec{q}, k^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_\lambda^{(2)}(q) \tilde{S}_\lambda^{(2)}(k^0 - q_0, \vec{q}) dq_0. \quad (7.23)$$

Por um argumento de continuação analítica, segue de (7.11) que $G(\vec{q}, k^0)$ em (7.23) é analítica em $|\operatorname{Im} k^0| < 2E_\lambda(\vec{0})$. Este resultado depende da validade da desigualdade $E_\lambda(\vec{0}) \leq E_\lambda(\vec{p})$, para qualquer $\vec{p} \in \mathbf{T}^d$; o que foi mostrado na Proposição 7.1.3.

Lembramos que de (5.14), o objeto básico que desejamos analisar é $(f, \tilde{D}_\lambda(k^0)f)$, e tem a forma

$$(f, \tilde{D}_\lambda(k^0)f) = 2(2\pi)^{d+1} \int_{T^d} \bar{f}(\vec{p}) G(\vec{p}, k^0) g(\vec{p}, k^0) d\vec{p}, \quad (7.24)$$

onde

$$g(\cdot, k^0) = \left[1 - (2\pi)^{-2(d+1)} \lambda \tilde{L}(k^0) \tilde{D}_\lambda^0(k^0) \right]^{-1} f(\cdot). \quad (7.25)$$

Sendo $G(\vec{p}, k^0)$ analítica na região $|\operatorname{Im} k^0| < 2E_\lambda(\vec{0})$, concluímos que as únicas singularidades de (7.24) devem vir de $g(\cdot, k^0)$. Por sua vez, as singularidades desta função são provenientes dos zeros de $1 - \mu_\pm(k^0)$, onde $\mu_\pm(k^0)$ são os auto-valores de $(2\pi)^{-2(d+1)} \lambda \tilde{L}(k^0) \tilde{D}_\lambda^0(k^0)$ no espaço gerado pelas funções 1 e $E_0(\vec{p})$.

Usando a paridade de $E_0(\vec{p})$ e fazendo mudanças de variáveis nas integrais, encontramos que

$$\mu_\pm(k^0) = -3a_2(2\pi)^{-(d+1)} \lambda \left[\alpha(k^0) \pm (\beta(k^0)\gamma(k^0))^{1/2} \right] \quad (7.26)$$

com autofunção correspondente ao autovalor μ_+

$$\psi_+(p) = 1 + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} E_0(\vec{p}), \quad (7.27)$$

onde

$$\alpha(k^0) = \int_{T^d} E_0(\vec{q}) G(\vec{q}, k^0) d\vec{q}, \quad (7.28)$$

$$\beta(k^0) = \int_{T^d} G(\vec{q}, k^0) d\vec{q}, \quad (7.29)$$

$$\gamma(k^0) = \int_{T^d} E_0(\vec{q})^2 G(\vec{q}, k^0) d\vec{q}. \quad (7.30)$$

Por fim, de (7.23) e de (7.11), vemos que $G(\vec{q}, k^0)$ pode ser decomposta como

$$G(\vec{q}, k^0) = \frac{\pi}{2} \frac{c_\lambda(\vec{q})^2}{E_\lambda(\vec{q}) [E_\lambda(\vec{q})^2 + \frac{1}{4}(k^0)^2]} + G_1(\vec{q}, k^0), \quad (7.31)$$

sendo que $G_1(\vec{q}, k^0)$ é analítica em $|\operatorname{Im} k^0| < E_\lambda(\vec{0}) + 2M_0$.

Fazendo o uso de (7.6) na equação (7.23), é possível concluir que as singularidades de (7.24) só podem estar localizadas no eixo k^0 imaginário. Então escrevendo $k^0 = i\kappa$, com $\kappa > 0$ e usando (7.11), obtemos que $G(\vec{q}, i\kappa) > 0$, para $0 \leq \kappa < 2E_\lambda(\vec{0})$. Segue daí que $\alpha(i\kappa)$, $\beta(i\kappa)$ e $\gamma(i\kappa)$ são positivos e então, da desigualdade de Cauchy-Schwartz, $\alpha(i\kappa) \leq [\beta(i\kappa)\gamma(i\kappa)]^{1/2}$, para $\kappa \in (0, 2E_\lambda(\vec{0}))$.

Para espaços de dimensão $d \geq 3$, as singularidades geradas por $G(\vec{q}, i\kappa)$ são quadráticas e portanto integráveis. Sendo assim, $\alpha(i\kappa)$, $\beta(i\kappa)$ e $\gamma(i\kappa)$ crescem para um limite finito quando $\kappa \rightarrow 2E_0(\vec{0})$. Portanto, se λ é pequeno suficiente, $[1 - \mu_{\pm}(i\kappa)]$ não se anula para $\kappa \in (0, 2E_{\lambda}(\vec{0}))$ e então não pode haver estados ligados na aproximação linear.

Se $d < 3$, $\alpha(i\kappa)$, $\beta(i\kappa)$ e $\gamma(i\kappa)$ divergem quando $\kappa \rightarrow 2E_{\lambda}(\vec{0})$, mas $\alpha(i\kappa) - [\beta(i\kappa)\gamma(i\kappa)]^{1/2}$ continua finito. Isso implica que $[1 - \mu_{-}(i\kappa)]$ não se anula. No entanto $[1 - \mu_{+}(i\kappa)]$ é não nulo para $a_2 > 0$, mas possui um único zero no intervalo $\kappa \in (0, 2E_{\lambda}(\vec{0}))$, se $a_2 < 0$. Isso implica na existência de um único estado para o caso linear, se $a_2 < 0$.

Seja $M_{\lambda} = E_{\lambda}(\vec{0})$ a massa para uma única partícula (vista na seção anterior). Então se M_L é a massa do estado ligado na aproximação linear, caso $a_2 < 0$ mencionado no parágrafo acima, ela é a solução de

$$F(\lambda, iM_L) = -\frac{(2\pi)^{d+1}}{3a_2\lambda}, \quad (7.32)$$

onde $F(\lambda, k^0) = \alpha(\lambda, k^0) + [\beta(\lambda, k^0)\gamma(\lambda, k^0)]^{1/2}$, deixado explícita a dependência de α , β e γ com respeito a λ . Fazendo $\mathcal{E}(\lambda) = 2M_{\lambda} - M_L$ e realizando a análise assintótica de α , β e γ , encontramos que

$$\mathcal{E}(\lambda) = \begin{cases} \frac{9}{4} \frac{\lambda^2}{m^4} a_2^1 [1 + \mathcal{O}(\lambda)], & \text{se } d = 1 \\ \exp\left(-\frac{4\pi m^2}{3|a_2|\lambda} [1 + \mathcal{O}(\lambda)]\right), & \text{se } d = 2 \end{cases}, \quad (7.33)$$

Conforme estabelecido no Teorema 1.0.1.

Considerações finais

No decorrer dessa dissertação, analisamos o a relaxação ao estado de equilíbrio da soluções de equações estocásticas do tipo Landau Ginzburg estocásticas, com ruído branco, em dimensão espacial d (discreta) e uma dimensão temporal contínua. O problema foi analisado através da construção de uma modelagem análoga no âmbito da teoria quântica de campos com interação polinomial $\mathcal{P}(\varphi)$ dada em (1.6). Neste modelo, a relaxação ao equilíbrio é exponencial, devido a existência de uma lacuna espectral no espectro do operador de energia.

Subindo no espectro, determinamos, na aproximação linear, o espectro de duas partículas ligadas, quando $d \leq 2$ e o coeficiente do termo quártico a_2 da interação polinomial é menor que zero. Este estado ligado, quando existe, determina uma correção à relaxação exponencial ao equilíbrio das soluções da EDP estocástica. Para tornar esse último resultado rigoroso, conforme foi feito em [FdVOPS01] (inspirado no trabalho desenvolvido em [DEm76]), é necessário controlar as perturbações da aproximação linear e considerar o modelo completo. Para isso, as propriedades exploradas aqui, de analiticidade em faixas das transformadas de Fourier de certas correlações são ingredientes essenciais. Com isso, para efetuar o controle das perturbações em torno da aproximação linear, é natural considerar tais transformadas de Fourier definidas num espaço de Hardy, que é definido como sendo justamente o espaço das funções analíticas numa faixa. Este será tema de trabalho que realizaremos em muito breve.

Também é digno de menção que há o interesse em tomar o limite de espaçamento nulo da rede espacial considerada aqui (no nosso caso este espaçamento foi considerado contante igual a 1). Este é o limite do contínuo do modelo. A dificuldade na realização deste limite (chamado usualmente como “limite ultravioleta” da teoria quântica de campos) se encontra do aparecimento de singularidades a curtas distâncias. Esta questão também surge em outros problemas mais simples da mecânica de campos (conforme visto no Capítulo 3) e,

usualmente, o método empregado para contornar esta dificuldade é a realização de um processo de renormalização que subtrai estas singularidades. Esta é a ideia de fundo do trabalho recente de M. Hairer [Hai14], o qual é um dos recebedores da medalha Fields da última edição, e também do minicurso ministrado por ele durante a XVII Escola Brasileira de Probabilidade [Hai15].

Seus trabalhos deram, é claro, uma luz inicial para a questão, mas o projeto como um todo ainda está longe de ser acabado: até o momento, não existe ainda um processo geral de renormalização e uma associação direta com as soluções renormalizadas e a equação original.

Mantendo em mente o mapeamento do problema estocástico em termos da teoria quântica de campos (QFT), pode-se pensar em usar os métodos não-perturbativos de renormalização (veja por exemplo os livros [Riv91] e [GB95]). Essa questão ainda não foi abordada dessa forma.

Esses temas de pesquisa estão no coração dos grandes problema em aberto na Matemática.

Bibliografia

- [Ash71] Robert B. Ash. *Complex variables*. Academic Press, New York, 1971. <http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV/CV7.pdf>.
- [Aui02] F. Aul. Four-particle decay of the Bethe-Salpeter kernel in the high-temperature Ising model. *J. Math. Phys.*, 43(12):6209–6223, 2002.
- [Bil95] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, third edition, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [Bra05] Carlos Braumann. *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Edições SPE, Lisboa, 2005. <http://www.ime.unicamp.br/~hyunyang/curso/cursoBraumann.pdf>.
- [DEm76] J. Dimock and J.-P. Ec mann. On the bound state in weakly coupled $\lambda(\varphi^6 - \varphi^4)_2$. *Comm. Math. Phys.*, 51(1):41–54, 1976.
- [Dim90] J. Dimock. A cluster expansion for stochastic lattice fields. *J. Statist. Phys.*, 58(5-6):1181–1207, 1990.
- [Dir78] P. A. M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics, The*. International series of monographs on physics. Oxford University Press, 4th revised edition, 1978.
- [EdF10] Welington de Melo Edson de Faria. *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. CUP, draft edition, 2010.

- [FdVOPS01] P. A. Faria da Veiga, M. O'Carroll, E. Pereira, and R. Schor. Spectral analysis of weakly coupled stochastic lattice Ginzburg-Landau models. *Comm. Math. Phys.*, 220(2):377–402, 2001.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. PAM. Wiley, 2 edition, 1999.
- [GB95] Giovanni Gallavotti Giuseppe Benfatto. *Renormalization Group*. Princeton Physics Notes. Princeton Univ Pr, 2 edition, 1995.
- [GJ75] James Glimm and Arthur Jaffe. Two and three body equations in quantum field models. *Comm. Math. Phys.*, 44(3):293–320, 1975.
- [GJ87] James Glimm and Arthur Jaffe. *Quantum physics: a functional integral point of view*. Springer, 2 edition, 1987.
- [GJS73] James Glimm, Arthur Jaffe, and Thomas Spencer. The particle structure of the weakly coupled $p(\phi)_2$ model and other applications of high temperature expansions. In G. Velo and A. Wightman, editors, *Constructive Quantum Field Theory*, volume 25 of *Lecture Notes in Physics*, pages 132–198. Springer Berlin Heidelberg, 1973.
- [GRS75] F. Guerra, L. Rosen, and B. Simon. The $\mathbf{P}(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 101:111–189; *ibid.* (2) 101 (1975), 191–259, 1975.
- [Hai14] M. Hairer. Solving the KPZ equation. In *XVIIth International Congress on Mathematical Physics*, page 419. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2014.
- [Hai15] Martin Hairer. Introduction to regularity structures. *Braz. J. Probab. Stat.*, 29(2):175–210, 05 2015.
- [Hal74] Paul R. Halmos. *Measure theory*. Graduate texts in mathematics 18. Springer-Verlag, 1974.
- [HH77] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin. Theory of dynamic critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 49:435–479, Jul 1977.
- [IK87] Steven E. Shreve Ioannis Karatzas. *Brownian Motion and Stochastic Calculus (Graduate Texts in Mathematics)*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1 edition, 1987.

- [JLM85] G. Jona-Lasinio and P. K. Mitter. On the stochastic quantization of field theory. *Comm. Math. Phys.*, 101(3):409–436, 1985.
- [JLS96] G. Jona-Lasinio and R. Sénéor. Study of stochastic differential equations by constructive methods. I. *J. Statist. Phys.*, 83(5-6):1109–1148, 1996.
- [Kni81] Frank B. Knight. *Essentials of Brownian motion and diffusion*, volume 18 of *Mathematical Surveys*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1981.
- [LHB11] Jozsef Lorincz, Fumio Hiroshima, and Volker Betz. *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space: With Applications to Rigorous Quantum Field Theory*. De Gruyter Studies in Mathematics 34. De Gruyter, 1 edition, 2011.
- [MS05] Vladimir Maz'ya and Mikhail Shubin. Discreteness of spectrum and positivity criteria for Schrödinger operators. *Ann. of Math. (2)*, 162(2):919–942, 2005.
- [Øks03] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003.
- [Riv91] Vincent Rivasseau. *From perturbative to constructive renormalization*. Princeton Series in Physics. Princeton Univ Pr, 2 edition, 1991.
- [Sal99] Manfred Salmhofer. *Renormalization: an introduction*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, 2 edition, 1999.
- [Sén85] R. Sénéor. Critical phenomena in 3 dimensions. 11:110–135, 1985.
- [Sim93] Barry Simon. *The statistical mechanics of lattice gases*. Princeton series in physics. Princeton University Press, 1993.
- [Spe75] Thomas Spencer. The decay of the Bethe-Salpeter kernel in $P(\phi)_2$ quantum field models. *Comm. Math. Phys.*, 44(2):143–164, 1975.
- [Spo91] Herbert Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Texts and monographs in physics. Springer, 1 edition, 1991.
- [SR78] B. Simon and M. Reed. *Methods of Modern Mathematical Physics - Volume 4: Analysis of Operators*. Academic Press, 1978.

- [SR81] B. Simon and M. Reed. *Methods of Modern Mathematical Physics - Volume 1: Functional Analysis*. Academic Press, 1981.
- [SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis, II. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [Sty10] Richard P Feynman; Albert R Hibbs; Daniel F Styer. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover books on physics. Dover Publications, emended ed edition, 2010.
- [Tak08] Leon A. Takhtajan. *Quantum Mechanics for Mathematicians (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society, 2008.