UMA GENERALIZAÇÃO
DO TEOREMA DO TORO
DE ALEXANDER

LILIAN AKEMI KATO

Orientador:
PROF. DR. OZIRIDE MANZOLI NETO

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos
USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências
Área: Matemática".*

USP - São Carlos
Março de 1996

“As pessoas entram e saem de nossas vidas.

Mas elas não vão só...

Sempre levam um pouco de nós e deixam um pouco de si.”

À minha família

Agradecimentos ¹

Gostaria de externar meus mais sinceros sentimentos de gratidão à todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, proporcionando-me condições para que conseguisse atingir este objetivo. Em especial agradeço:

Ao Dide (Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto) que além de orientador foi também um grande amigo e conselheiro durante todo o período de mestrado.

Aos meus pais e minhas irmãs que mesmo estando longe estiveram sempre presentes em meu coração dando-me força para continuar.

Ao Ricardo Mercadante, pelo amor, carinho e compreensão durante todo este período e pela confiança em mim depositada.

Ao grande amigo Sadao Massago, companheiro de todas as horas e amigo para sempre.

À minha amiga de sempre, Cris, (Cristina Tomiyoshi) pelo carinho e amizade que jamais esquecerei e também à querida Rose (Rosemeire Shibuya) uma pessoa muito especial.

Aos colegas de curso: Neuza, Ricardo, Vera, Ana Paula, Cláudia, Simone Moraes, Jair e Aninha e Marcelo, estes agora também companheiros de trabalho.

Às amigas Vera, Pérsida, Ieda e Elisa pelo carinho e apoio que tanto me ajudaram.

Aos amigos: Craveiro, Claudinha, Rosana, Marcelo Siqueira, Carlos Aparecido, Maristela, Carlos Lenz, Marcão, Jandira, Josmar, Paulo Missaka e Fernando pelos momentos agradáveis que compartilhamos.

Aos colegas do grupo de topologia: Rui, Mineiro, Silvia, Simone e Sadao pelos excelentes seminários e ao Laércio pelas sugestões valiosas durante todo o trabalho.

Aos colegas de trabalho da UEM pelo apoio e incentivo, em especial ao Valdeni que com seu entusiasmo pela topologia fez com que eu seguisse o mesmo caminho.

Aos amigos mais recentes, pessoas maravilhosas que adorei conhecer: Lú, Ana Cláudia, Simone, Ivan, Lauro, Regina, Adriana e Alexandra.

Aos professores e funcionários do ICMSC pela solicitude com que sempre me atenderam. Enfim, agradeço a todos as pessoas com quem compartilhei esta fase de minha vida e que não foram citadas aqui.

¹Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES.

Abstract

The Alexander Torus Theorem: “Any embedding of $S^1 \times S^1$ in S^3 bounds a $S^1 \times D^2$ ”, was generalized to other dimensions and several papers were published about the subject (see references).

The purpose of this work is to detail one of these papers, namely “A generalization of Alexander’s torus theorem to higher dimensions” published at the Notes of ICMSC-USP number 28.

Resumo

O Teorema do Toro de Alexander, ou seja: "Todo mergulho do toro $S^1 \times S^1$ em S^3 borda um toro sólido $S^1 \times D^2$ " foi generalizado para outras dimensões, e vários artigos foram publicados sobre este assunto (veja bibliografia).

O presente trabalho tem como objetivo reescrever com detalhes um destes artigos, publicado nas Notas do ICMSC-USP número 28: "A generalization of Alexander's torus theorem to higher dimensions".

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Aplicações diferenciáveis	3
1.2 Grupos de Homotopia	4
1.3 Grupos de Homologia e Cohomologia	6
1.4 Seqüência Exata	7
1.5 Fórmula de Künneth	9
1.6 Dualidades em Variedades	10
1.7 Transversalidade	11
1.8 Teorema do h-cobordismo	12
1.9 Fibrados Vetoriais	13
1.10 Classes de Stiefel-Whitney	14
1.11 "Plumbing"	15
2 Os casos $p \geq q \geq 1$ e $p + q \neq 3$	16
2.1 Lemas Básicos	16
2.2 O Caso $p = q = 2$	21

2.3	O Caso $p = q \geq 3$	28
2.4	O caso $p > q \geq 2$	30
2.5	O caso $q = 1$ e $p \geq 3$	32
3	O caso $S^2 \times S^1$ em S^4	38
1	Intersecção	44
1.1	Produto Cup e Cap	44
1.2	Intersecção	45
	Bibliografia	48

Introdução

O teorema do toro de Alexander que pode ser visto em [R], afirma que todo mergulho do toro $S^1 \times S^1$ em S^3 borda um toro sólido $S^1 \times D^2$.

Neste trabalho, apresentaremos uma prova mais geral deste teorema para dimensão qualquer, ou seja, dado um mergulho suave $f : S^p \times S^q \longrightarrow S^{p+q+1}$ e supondo $p \geq q \geq 1$ e $p + q \neq 3$, então o fecho de uma das componentes de $S^{p+q+1} - f(S^p \times S^q)$ é difeomorfa à $S^p \times D^{q+1}$. Além disso, quando $p + q = 3$ então uma destas componentes é homeomorfa à $S^2 \times D^2$.

Este trabalho é um estudo mais detalhado do artigo "A generalization of Alexander's torus theorem to higher dimensions" de Laércio A. Lucas, Oziride M. Neto e Osamu Saeki, publicação número 28 das Notas do ICMSC-USP [LNS].

Iniciaremos demonstrando o caso $p = q = 1$, que é o próprio teorema do toro de Alexander, e em seguida os casos $p = q = 2$, $p = q \geq 3$, $p > q \geq 2$, $q = 1$ e $p \geq 3$ e por último o caso $q = 1$ e $p = 2$.

Apresentaremos este trabalho em três Capítulos e um Apêndice.

No Capítulo 1 faremos uma breve exposição sobre alguns dos conceitos e propriedades mais utilizados no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2 daremos uma prova do teorema proposto para os casos $p \geq q \geq 1$ e $p + q \neq 3$ utilizando para tanto, basicamente o teorema do h-cobordismo.

No Capítulo 3 será feita a prova para o caso $p + q = 3$ ou seja, $p = 2$ e $q = 1$ onde obtém-se apenas um homeomorfismo entre as variedades em questão. Muitos resultados utilizados neste caso foram retirados do artigo "Simply-connected 4-manifold with a given boundary" de Steven Boyer [Bo] e a parte deste artigo necessária para o entendimento da prova foi explicitada neste trabalho.

No apêndice apresentaremos uma breve introdução sobre produto **cup** e **cap**, número de intersecção, e outros resultados importantes para o desenvolvimento deste texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos que serão importantes no texto com o intuito de fixar a nomenclatura e as notações.

Utilizaremos os conceitos de homotopia, homologia e cohomologia como estão em [Mu], [Sp], [Wa] e [L] procurando adotar as notações mais usuais.

Assumiremos no texto, que todas as variedades e aplicações são diferenciáveis de classe C^∞ e todos os grupos de homologia e cohomologia têm coeficientes inteiros a menos que se especifique. O símbolo " $\cong$ " denota um difeomorfismo entre variedades ou um isomorfismo entre objetos algébricos.

O bordo de uma variedade M será denotada por ∂M , e sua definição e propriedades poderão ser vistas em [Mi2].

Denotaremos por I o intervalo fechado $[0, 1]$.

1.1 Aplicações diferenciáveis

Sejam M^m e N^n variedades de classe C^k ($k \geq 1$) e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Denotaremos por TM_p o espaço tangente a M no ponto p e por $f'(p) : TM_p \longrightarrow TN_{f(p)}$ a derivada de f no ponto p .

Definição 1.1 Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ diz-se uma imersão se a derivada $f'(p)$ é injetora para cada $p \in M$.

Definição 1.2 Diz-se que uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é um mergulho se:

- i) f é uma imersão;
- ii) f é um homeomorfismo de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

Pode-se mostrar que se a aplicação diferenciável f é um mergulho, então $f(M)$ é uma subvariedade diferenciável de N [BJ].

Definição 1.3 Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável cuja inversa é também diferenciável.

1.2 Grupos de Homotopia

Sejam X, Y espaços topológicos. Dizemos que duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$ são homotópicas quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se então uma homotopia entre f e g .

Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia quando existe uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ contínua tal que $g \circ f$ é homotópica a id_X e $f \circ g$ é homotópica a id_Y . Dizemos neste caso que X e Y têm o mesmo tipo de homotopia.

Definição 1.4 Uma isotopia é uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que, para todo $t \in I$, a aplicação $h_t : X \longrightarrow Y$ definida por $h_t(x) = H(x, t)$ é um homeomorfismo.

Seja (X, x_0) um par, onde $x_0 \in X$ é chamado de ponto base do espaço topológico X . Denotaremos por $\Pi_1(X, x_0)$ o grupo fundamental do espaço X com ponto base x_0 , cujos elementos são classes de homotopia de aplicações $\alpha : (S^1, p_0) \longrightarrow (X, x_0)$, ou seja, aplicações contínuas $\alpha : S^1 \longrightarrow X$ tais que $\alpha(p_0) = x_0$.

Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$, induz um homomorfismo $f_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ definido por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.

Definição 1.5 Um espaço topológico X diz-se simplesmente conexo ou 1-conexo quando é conexo por caminhos e para todo $x_0 \in X$ tem-se $\Pi_1(X, x_0) = 0$.

Proposição 1.1 Se $n > 1$, a esfera S^n é simplesmente conexa.

Prova: Ver [L] pág. 57. ■

Proposição 1.2 O grupo fundamental do círculo S^1 , é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.

Prova: Ver [L] pág. 73. ■

Corolário 1.1 O grupo fundamental do toro $T = S^1 \times S^1$ é abeliano livre com dois geradores.

Teorema 1.1 [Van Kampen] Sejam U e V subconjuntos de X , abertos e conexos por caminhos tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V \neq \emptyset$ e conexo por caminhos. Consideremos as inclusões $i : U \cap V \rightarrow U$ e $j : U \cap V \rightarrow V$. Temos então que o grupo fundamental de X pode ser obtido a partir das apresentações abaixo:

$$\Pi_1(U) \cong \langle u_1, \dots; r_1, \dots \rangle$$

$$\Pi_1(V) \cong \langle v_1, \dots; s_1, \dots \rangle$$

$$\Pi_1(U \cap V) \cong \langle z_1, \dots; t_1, \dots \rangle \text{ e é dado por:}$$

$$\Pi_1(X) \cong \langle u_1, \dots, v_1, \dots; r_1, \dots, s_1, \dots, i_*(z_1) = j_*(z_1), \dots \rangle$$

Prova: Ver [Ma] pág. 114. ■

Corolário 1.2 *Sob as mesmas condições do teorema anterior, se $U \cap V$ é simplesmente conexo, então $\Pi_1(X)$ é o produto livre dos grupos $\Pi_1(U)$ e $\Pi_1(V)$ com respeito aos homomorfismos $\psi_1 : \Pi_1(U) \rightarrow \Pi_1(X)$ e $\psi_2 : \Pi_1(V) \rightarrow \Pi_1(X)$, induzidos das inclusões.*

Teorema 1.2 [Lema de Dehn e Teorema do Laço] *Se M é uma 3-variedade e o homomorfismo inclusão $\Pi_1(\partial M) \rightarrow \Pi_1(M)$ possui kernel não trivial, então existe um 2-disco $D \subset M$ tal que $\partial D \subset \partial M$ e ∂D representa um elemento não trivial de $\Pi_1(\partial M)$.*

Prova: Ver [R] pág. 374. ■

1.3 Grupos de Homologia e Cohomologia

Um complexo de cadeias $C = (C_q, \partial_q)$ é um par de seqüências: uma seqüência de grupos abelianos $(C_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ e uma seqüência de homomorfismos $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ tal que $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Um complexo de co-cadeias $C^* = (C^q, \partial^q)$ é um par de seqüências: uma seqüência de grupos abelianos $(C^q)_{q \in \mathbb{Z}}$ e uma seqüência de homomorfismos $\partial^q : C^q \rightarrow C^{q+1}$ tal que $\partial^{q+1}\partial^q = 0$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.6 *Seja $\phi : C \rightarrow C'$ uma aplicação entre complexos de cadeias. ϕ induz de modo natural uma família de homomorfismos, denominados homomorfismos induzidos por ϕ , entre os grupos de homologia, definido por: $\phi_{*q} : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$.*

Teorema 1.3 [Hurewicz] *Sejam X um espaço conexo por caminhos e $x_0 \in X$. Assuma que exista $n \geq 1$ tal que $\Pi_q(X, x_0) = 0$ para $q < n$. Então $H_q(X, x_0) = 0$ para $q < n$ e $\varphi' : \Pi'_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X, x_0)$ é um isomorfismo onde φ' é o homomorfismo induzido pelo homomorfismo de Hurewicz φ . Reciprocamente, se X é simplesmente conexo e existe $n \geq 2$ tal que $H_q(X, x_0) = 0$ para $q < n$, então $\Pi_q(X, x_0) = 0$ para $q < n$ e $\varphi : \Pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X, x_0)$ é um isomorfismo.*

Prova: Ver [Sp] pág. 398. ■

Teorema 1.4 [Whitehead] *Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) espaços conexos por caminhos com ponto base, e seja $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação com $f(x_0) = y_0$. Se existe $n \geq 1$ tal que $f_{\#} : \Pi_q(X, x_0) \rightarrow \Pi_q(Y, y_0)$ é um isomorfismo para $q < n$ e um epimorfismo para $q = n$, então $f_* : H_q(X, x_0) \rightarrow H_q(Y, y_0)$ é um isomorfismo para $q < n$ e um epimorfismo para $q = n$. Reciprocamente, se X e Y são simplesmente conexos e f_* é um isomorfismo para $q < n$ e um epimorfismo para $q = n$, então $f_{\#}$ é um isomorfismo para $q < n$ e um epimorfismo para $q = n$.*

Prova: Ver [Sp] pág. 399. ■

Teorema 1.5 [Excisão para homologia] *Se U é um aberto de X tal que $\bar{U}$ está contido no interior de A , então, a aplicação $e : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo de grupo $e_* : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 1.6 [Excisão para cohomologia] *Se U é um aberto de X tal que $\bar{U}$ está contido no interior de A , então, a aplicação $e : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $e^q : H^q(X, A) \rightarrow H^q(X - U, A - U)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.*

1.4 Seqüência Exata

Uma seqüência finita ou infinita de grupos abelianos e homomorfismos:

$$\dots \rightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \rightarrow \dots$$

é dita exata se a imagem do homomorfismo anterior for igual ao kernel do homomorfismo posterior de cada grupo. Por exemplo, na seqüência anterior dizemos que a seqüência é exata em A_2 se $Im(f) = Ker(g)$.

Seja 0 o grupo trivial então:

i) $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \rightarrow 0$ é exata se e somente se f é um epimorfismo.

ii) $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2$ é exata se e somente se f é um monomorfismo.

iii) Se a seqüência $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ é exata então $A_2/f(A_1) \cong A_3$, onde o isomorfismo é induzido pela g . Tal seqüência é chamada seqüência curta exata.

Definição 1.7 Dizemos que uma seqüência exata $\dots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow \dots$ cinde em A_2 se e só se o subgrupo $A = \text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ do grupo A_2 é somando direto de A_2 , ou seja, se e somente se A_2 pode ser decomposto numa soma direta de A e outro subgrupo de A_2 , que nem sempre é unicamente determinado. Se a seqüência exata cinde em cada um de seus grupos então dizemos que a seqüência cinde.

Teorema 1.7 Seja $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ uma seqüência curta exata. São equivalentes:

- i) A seqüência cinde,
- ii) Existe uma aplicação $p : A_2 \longrightarrow A_1$ tal que $p \circ f = \text{id}_{A_1}$,
- iii) Existe uma aplicação $j : A_3 \longrightarrow A_2$ tal que $g \circ j = \text{id}_{A_3}$.

Prova: Ver [Mu] pág. 132. ■

Corolário 1.3 Seja $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ uma seqüência curta exata. Se A_3 for um grupo abeliano livre, então a seqüência cinde.

Teorema 1.8 Se a seqüência exata $\dots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow \dots$ cinde em A_2 , então A_2 é isomorfo à soma direta $\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

Prova: Ver [Hu] pág. 34. ■

Teorema 1.9 [Seqüência de homologia exata do par] Sejam K um complexo e K_0 um subcomplexo, então existe uma seqüência longa exata:

$$\dots \longrightarrow H_p(K_0) \xrightarrow{i_*} H_p(K) \xrightarrow{\pi_*} H_p(K, K_0) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(K_0) \longrightarrow \dots$$

onde $i : K_0 \longrightarrow K$ e $\pi : (K, \emptyset) \longrightarrow (K, K_0)$ são inclusões, e ∂_* é induzido pelo operador bordo ∂ .

Prova: Ver [Mu] pág. 133. ■

Teorema 1.10 [Seqüência de Mayer-Vietoris] *Sejam K um complexo, K_0 e K_1 sub-complexos tais que $K = K_0 \cup K_1$. Seja $A = K_0 \cap K_1$. Então existe uma seqüência exata:*

$$\dots \longrightarrow H_p(A) \longrightarrow H_p(K_0) \oplus H_p(K_1) \longrightarrow H_p(K) \longrightarrow H_{p-1}(A) \longrightarrow \dots$$

chamada seqüência de Mayer-Vietoris de (K_0, K_1) .

1.5 Fórmula de Künneth

Teorema 1.11 [Teorema do Coeficiente Universal para Homologia] *Sejam C um complexo de cadeia livre e G um grupo abeliano. Para todo inteiro n existe um homomorfismo $k : H_n(C; G) \longrightarrow \text{Tor}[H_{n-1}(C), G]$ tal que:*

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C; G) \xrightarrow{k} \text{Tor}[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow 0$$

é uma seqüência curta exata que cinde, e além disso, $H_n(C; G)$ é isomorfo à soma direta de $H_n(C) \otimes G$ e $\text{Tor}[H_{n-1}(C), G]$.

Prova: Ver [Hu] pág. 165. ■

Teorema 1.12 [Teorema do Coeficiente Universal para Cohomologia] *Dado um complexo de cadeia C e um módulo G tal que $\text{Ext}(C, G)$ é um complexo de co-cadeia acíclico, então para todo inteiro n , a seqüência:*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}[H_n(C), G] \longrightarrow 0$$

é uma seqüência curta exata funtorial que cinde.

Prova: Ver [Sp] pág. 243. ■

Teorema 1.13 [Fórmula de Künneth para Homologia] *Sejam C e D complexos de cadeias livres, então existe um homomorfismo $\theta : H_n(C \otimes D) \longrightarrow \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1}$ para todo inteiro n , tal que:*

$$0 \longrightarrow \{H(C) \otimes H(D)\}_n \xrightarrow{\pi} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\theta} \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0$$

é uma seqüência curta exata que cinde, consequentemente temos:

$$H_n(C \otimes D) \approx \{H(C) \otimes H(D)\}_n \oplus \{Tor[H(C), H(D)]\}_{n-1} \text{ para todo inteiro } n.$$

Prova: Ver [Hu] pág. 184. ■

1.6 Dualidades em Variedades

Teorema 1.14 [Dualidade de Poincaré] *Seja X uma n -variedade compacta, orientável e sem bordo. Então, para todo p existe um isomorfismo: $H^p(X) \cong H_{n-p}(X)$.*

Prova: Ver [Mu] pág. 383. ■

Podemos generalizar o Teorema da Dualidade de Poincaré para homologia relativa de variedades. Esta generalização é devida a Lefschetz. Daremos aqui uma versão deste teorema para variedades com bordo.

Teorema 1.15 [Dualidade de Poincaré-Lefschetz] *Seja X uma n -variedade compacta com bordo, tal que ∂X possui uma vizinhança produto em X . Se $(X, \partial X)$ é orientável então: $H^p(X, \partial X) \cong H_{n-p}(X)$ e $H^p(X) \cong H_{n-p}(X, \partial X)$.*

Prova: Ver [Mu] pág. 420. ■

Teorema 1.16 [Dualidade de Alexander] *Seja A um subconjunto próprio e não vazio da esfera S^n . Suponha que (S^n, A) seja triangulável. Então existe um isomorfismo:*

$$\tilde{H}^k(A) \cong \tilde{H}_{n-k-1}(S^n - A)$$

onde $\tilde{H}^*(A)$ e $\tilde{H}_*(S^n - A)$ são grupos de cohomologia e homologia reduzidos de A e $S^n - A$ respectivamente.

Prova: Ver [Mu] pág. 424. ■

1.7 Transversalidade

O conceito e os resultados sobre transversalidade nos serão úteis principalmente na demonstração do Lema 2.17 do Capítulo 2 e seus detalhes podem ser vistos em [BJ].

Definição 1.8 *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável de variedades diferenciáveis e seja $S \subset N$ uma subvariedade. Dizemos que f é transversal a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ quando $f'(p) \cdot TM_p + TS_{f(p)} = TN_{f(p)}$, ou seja, quando a imagem de $f'(p)$ junto com o espaço tangente a S em $f(p)$ geram $TN_{f(p)}$. Dizemos que f é transversal a S se, para todo ponto $p \in f^{-1}(S)$, f é transversal a S em p .*

1.8 Teorema do h-cobordismo

Um dos teoremas mais utilizados neste trabalho é o Teorema do h-cobordismo, cuja prova é devido a Stephen Smale e pode ser vista em [Mil].

Definição 1.9 *Seja W uma variedade compacta, diferenciável com duas componentes de bordo V_0 e V_1 tais que V_0 e V_1 são ambas retratos por deformação de W . Então, W é dito ser um h-cobordismo entre V_0 e V_1 .*

Definição 1.10 *$(W; V_0, V_1)$ é uma tríada de variedades diferenciáveis se W é uma n -variedade compacta diferenciável e ∂W é a união disjunta de duas subvariedades abertas e fechadas V_0 e V_1 .*

Definição 1.11 *Uma tríada $(W; V_0, V_1) = 0$ é um h-cobordismo se V_0 e V_1 são retratos por deformação de W .*

Teorema 1.17 [Teorema do h-cobordismo] *Suponha que a tríada $(W^n; V_0, V_1)$ tem as seguintes propriedades:*

- i) W , V_0 e V_1 são simplesmente conexos;
- ii) $H_*(W, V_0) = 0$;
- iii) $\dim W = n \geq 6$.

Então W é difeomorfo a $V_0 \times [0, 1]$.

Observação 1.1 *A condição ii) é equivalente a $H_*(W, V_1) = 0$ e neste caso teremos que W é difeomorfo a $V_1 \times [0, 1]$.*

Uma versão equivalente do Teorema 1.17 é obtida substituindo-se a condição ii) pela condição de que a tríada $(W; V_0, V_1)$ é um h-cobordismo.

1.9 Fibrados Vetoriais

Definição 1.12 Um n -fibrado vetorial é uma terna (E, π, X) onde $\pi : E \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e sobre, e todo $E_x := \pi^{-1}(x)$ possui uma estrutura de um espaço vetorial n -dimensional que satisfaz a Propriedade da Trivialidade Local, isto é, todo ponto de X possui uma vizinhança U , para o qual existe um homeomorfismo $f : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in U$, $f_x := f|_{E_x} : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo de espaço vetorial.

Observação 1.2 (E, π, X) é chamado de fibrado vetorial sobre X , E é chamado de espaço total; E_x a fibra; X o espaço base; e π a projeção do fibrado. Usualmente escrevemos E em vez de (E, π, X) .

Definição 1.13 O par (f, U) da Propriedade da Trivialidade Local é chamado de carta. Um fibrado sobre X é chamado trivial se ele possui uma carta (f, X) .

Definição 1.14 Se M é uma variedade diferenciável e $X \subset M$ é uma subvariedade, então o "normal de X " definido por: $\perp X := (TM \setminus X) / TX$ é chamado de fibrado normal de X em M .

Definição 1.15 Dados E e F fibrados vetoriais sobre um mesmo espaço base X , podemos construir um novo fibrado $E \oplus F = \bigcup_{x \in X} E_x \oplus F_x$ que é denominado Soma de Whitney de E e F .

Observação 1.3 Os conceitos e propriedades sobre fibrados utilizados no Capítulo 3, podem ser vistos também em [Se].

1.10 Classes de Stiefel-Whitney

A classe característica de Stiefel-Whitney é uma sequência de elementos da cohomologia da base de um fibrado vetorial, com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, definida axiomáticamente com a seguir:

Seja ξ um fibrado vetorial cujas fibras têm dimensão n . A classe de Stiefel-Whitney de ξ é definida por 4 axiomas:

Axioma 1: $\omega_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, onde $B(\xi)$ é o espaço base do fibrado.

$$\omega_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$$

$$\omega_i(\xi) = 0 \text{ se } i > n.$$

Axioma 2: Naturalidade.

Se $f : B(\xi) \longrightarrow B(\eta)$ pode ser estendido para uma aplicação de fibrado de ξ em η , então $\omega_i(\xi) = f^*\omega_i(\eta)$, onde $f^* : H^*(B(\eta), \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$ é induzida da f .

Axioma 3: Teorema do Produto de Whitney.

Se ξ e η são fibrados sobre um mesmo espaço base, então podemos definir o fibrado $\xi \oplus \eta$, daí $\omega_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k \omega_i(\xi) \smile \omega_{k-i}(\eta)$, onde $\smile$ é o produto cup.

Axioma 4: $\omega_1(\gamma_1^1) \neq 0$, onde $\gamma_1^1 := \{(\{x, -x\}, \mathbb{R}x) : x \in S^1\} \cong$ faixa de Möebius aberta.

1.11 “Plumbing”

Definição 1.16 Consideremos os espaços S^p e S^q e em cada um deles escolhamos um disco D^p e D^q respectivamente, temos então, em $S^p \times D^q$ e $D^p \times S^q$ um $D^p \times D^q$ em comum. Consideremos a união disjunta de $S^p \times D^q$ e $D^p \times S^q$ identificando o $D^p \times D^q$ comuns pela identidade. Obteremos assim uma variedade topológica com “alça” que pode ser suavizada e é denominada o “plumbing” de S^p com S^q .

Capítulo 2

Os casos $p \geq q \geq 1$ e $p + q \neq 3$

Teorema 2.1 *Seja $f : S^p \times S^q \longrightarrow S^{p+q+1}$ um mergulho suave. Suponhamos que $p \geq q \geq 1$ e que $p + q \neq 3$. Então o fecho de uma das componentes de $S^{p+q+1} - f(S^p \times S^q)$ é difeomorfo à $S^p \times D^{q+1}$. Além disso, quando $p + q = 3$ (isto é, quando $p = 2$ e $q = 1$) ele é homeomorfo a $S^2 \times D^2$.*

Neste Capítulo, demonstraremos este Teorema nos casos $p \geq q \geq 1$ e $p + q \neq 3$. O caso $p + q = 3$ será feito no Capítulo 3.

2.1 Lemas Básicos

Apresentaremos inicialmente, alguns lemas básicos que serão utilizados para demonstrar o Teorema 2.1 nos casos onde $p \geq q \geq 1$.

Consideremos o mergulho $f : S^p \times S^q \longrightarrow S^{p+q+1}$, onde $p \geq q \geq 1$ e seja $T = f(S^p \times S^q)$ onde $p \geq q \geq 1$.

Lema 2.1 *Seja $f : S^p \times S^q \longrightarrow S^{p+q+1}$ um mergulho diferenciável. Então $S^{p+q+1} - T$ tem duas componentes conexas.*

Prova: Sabemos que $\tilde{H}_0(S^{p+q+1} - T) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(S^{p+q+1} - T)$ (ver [Sp] pág. 168). Daí por Dualidade de Alexander, temos que $\tilde{H}^k(T) \cong \tilde{H}_{p+q+1-k-1}(S^{p+q+1} - T)$ ou seja, $\tilde{H}^{p+q}(T) \cong$

$\tilde{H}_0(S^{p+q+1} - T)$. E segue que $\tilde{H}_0(S^{p+q+1} - T) \cong \mathbb{Z}$ pois $\tilde{H}^{p+q}(T) \cong H^{p+q}(T) \cong \mathbb{Z}$. Então concluímos que $H_0(S^{p+q+1} - T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto $S^{p+q+1} - T$ tem duas componentes conexas. ■

Denotaremos essas duas componentes conexas por C'_1 e C'_2 e seus respectivos fechos em S^{p+q+1} por C_1 e C_2 .

Lema 2.2 *Uma das componentes C_1 ou C_2 tem a mesma homologia da S^p e a outra a mesma homologia da S^q .*

Prova: Seja $E = S^{p+q+1} - T$ então por Dualidade de Alexander temos:

$$\tilde{H}_i(E) \cong H^{p+q+1-i-1}(S^p \times S^q) = H^{p+q-i}(S^p \times S^q) = H_i(S^p \times S^q)$$

onde a última igualdade provém da Dualidade de Poincaré.

Utilizando a Fórmula de Künneth e sabendo que $H_*(S^n)$ é livre de torção obtemos, para $p \neq q$ o seguinte:

$$i = 0$$

$$H_0(S^p \times S^q) \cong H_0(S^p) \otimes H_0(S^q) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$i = p$$

$$H_p(S^p \times S^q) \cong [H_0(S^p) \otimes H_p(S^q)] \oplus [H_p(S^p) \otimes H_0(S^q)] \cong \mathbb{Z} \otimes 0 \oplus \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = 0 \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$i = q$$

$$H_q(S^p \times S^q) \cong [H_0(S^p) \otimes H_q(S^q)] \oplus [H_q(S^p) \otimes H_0(S^q)] \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \oplus 0 \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus 0 = \mathbb{Z}$$

$$i \neq p, q, p + q, 0$$

$$H_i(S^p \times S^q) \cong \bigoplus_{j=0}^i H_j(S^p) \otimes H_{i-j}(S^q) = 0$$

Para $p = q$ temos:

$$i = p$$

$$H_p(S^p \times S^q) \cong [H_0(S^p) \otimes H_p(S^q)] \oplus [H_p(S^p) \otimes H_0(S^q)] \cong [\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}] \oplus [\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Portanto, se $p \neq q$ temos:

$$\tilde{H}_i(E) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = p, q, p + q \text{ ou } 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e se $p = q$

$$\tilde{H}_i(E) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } i = p = q \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \text{ ou } 2p \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para provar este lema é suficiente mostrar que cada uma das componentes, digamos C'_1 , possui $\tilde{H}_i(C'_1) \neq 0$, para algum i . Para mostrar isso, suponha que $\tilde{H}_i(C_1) = 0$ para todo i , $0 < i < p + q$. Então tem-se $\tilde{H}_i(C'_1) = 0$ para todo i , pois C'_1 e C_1 são homotopicamente equivalentes.

Sabendo que C_1 é uma subvariedade de S^{p+q+1} , compacta, de co-dimensão 0 e que $\partial C_1 = T$, sejam $\Sigma_1 = f(S^p \times \{*\})$ e $\Sigma_2 = f(\{*\} \times S^q)$ subvariedades que estão mergulhadas em ∂C_1 e que se interceptam em um ponto.

Como $H_p(C_1) = 0$, temos que $H_p(C_1, \partial C_1) = 0$ e daí existe um $(p+1)$ -ciclo, $(D^{p+1}, \partial D^{p+1})$ pertencente a $(C_1, \partial C_1)$ cujo bordo, ∂D^{p+1} , é homólogo a Σ_1 em ∂C_1 . Logo, o número de intersecção de $[D^{p+1}, \partial D^{p+1}] \in H_{p+1}(C_1, \partial C_1)$ e $[\Sigma_2] \in H_q(C_1)$ é ± 1 , pois ∂D^{p+1} é homólogo a $\Sigma_1 = f(S^p \times \{*\})$ e $\Sigma_2 = f(\{*\} \times S^q)$, onde $[D^{p+1}, \partial D^{p+1}]$ e $[\Sigma_2]$ são as classes de homologia representados por $(D^{p+1}, \partial D^{p+1})$ e Σ_2 respectivamente. Isto implica que $H_i(C_1) \neq 0$ para algum i e portanto, uma das componentes, C_1 ou C_2 , tem homologia de S^p e a outra de S^q . ■

Vamos assumir daqui para frente que C_1 tem a mesma homologia de S^p e C_2 a mesma de S^q .

A prova do Teorema 2.1, neste Capítulo, será dividida em diversos casos e o caso mais simples, $p = q = 1$ é o Teorema do Toro devido a Alexander [R]: “Seja $f : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^3$ um mergulho diferenciável. Então, o fecho de uma das componentes de $S^3 - f(S^1 \times S^1)$ é difeomorfa à $S^1 \times D^2$ ” cuja prova veremos a seguir.

Prova: Sejam C'_1 e C'_2 cada uma das componentes de $S^3 - f(S^1 \times S^1)$ e sejam C_1 o fecho de C'_1 em S^3 e C_2 o fecho de C'_2 em S^3 . Então:

$$S^3 - f(S^1 \times S^1) = C'_1 \cup C'_2$$

$$S^3 = C_1 \cup C_2 \text{ e}$$

$$S^1 \times S^1 = C_1 \cap C_2 = T$$

Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Pi_1(S^1 \times S^1) & \\
 i_{1*} \swarrow & & \searrow i_{2*} \\
 \Pi_1(C_1) & & \Pi_1(C_2) \\
 j_{1*} \searrow & & \swarrow j_{2*} \\
 & \Pi_1(S^3) &
 \end{array}$$

Como $\Pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\Pi_1(S^3) = 0$, o diagrama fica:

Se i_{1*} e i_{2*} forem injetivas, então teremos que j_{1*} e j_{2*} também serão injetivas [MKS], e neste caso, sendo i_{1*} e j_{1*} injetivas, temos que $k_{1*} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0$ onde $k_{1*} = j_{1*} \circ i_{1*}$, também é injetiva, o que é um absurdo. O mesmo vale para i_{2*} e j_{2*} . Assim, uma destas aplicações, i_{1*} ou i_{2*} , não é injetiva. Escolhamos, então, um desses homomorfismos inclusão tal que o kernel seja não trivial. Seja i_{1*} tal homomorfismo.

Neste caso, pelo Lema de Dehn e o Teorema de Laço, existe uma curva essencial, fechada e simples, J , em T tal que J borda um disco diferenciável, D , em C_1 .

Seja N uma vizinhança (colar) de D em C_1 , então $N \cap T$ é uma vizinhança anelar de J em T . Além disso, o bordo de $C_1 - N$ é a união de dois discos em ∂N e o anel $T - N$. Desta forma $C_1 - N$ é bordado por uma 2-esfera diferenciável em S^3 .

Segue pelo Teorema de Schönflies ([R], [Mz]) que $C_1 - N$ é uma 3-bola diferenciável em S^3 .

Temos, então, que $N = D^2 \times [0, 1]$ e que $C_1 - N$ é uma 3-bola em S^3 , daí colamos N com $C_1 - N$, identificando-se $D^2 \times \{0\}$ e $D^2 \times \{1\}$ em discos disjuntos sobre o bordo, mantendo a orientação, e utilizando topologia de identificação, temos que $N \# C_1 - N = C_1$ é difeomorfa (após suavização) à $S^1 \times D^2$. Isto conclui a prova do Teorema do toro de Alexander. ■

2.2 O Caso $p = q = 2$

Neste caso, pelo Lema 2.2, ambas as componentes conexas, C_1 e C_2 , têm a mesma homologia de S^2 . Usaremos o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Seja M uma variedade compacta simplesmente conexa de dimensão $(2p + 1)$ com as seguintes propriedades:*

- (1) ∂M é difeomorfa a $S^p \times S^p$;
- (2) $H_*(M) \cong H_*(S^p)$.

Então, M é difeomorfa à $S^p \times D^{p+1}$.

Antes de provarmos a Proposição 2.1 mostraremos alguns lemas que determinarão condição para que os automorfismos de $H_p(S^p \times S^p, \mathbb{Z})$, $p \geq 2$ sejam induzidos por difeomorfismos de $S^p \times S^p$ nele mesmo.

Seja $i : \partial M \longrightarrow M$ a aplicação de inclusão.

Definição 2.1 *Um elemento β de um grupo abeliano G é denominado primitivo se $\beta = n\alpha$ ($n \in \mathbb{Z}, \alpha \in G$) implica que $n = \pm 1$.*

Lema 2.3 *Existe uma classe de homologia primitiva $\gamma \in H_p(\partial M)$ tal que $i_*(\gamma) = 0$.*

Prova: Consideremos a seguinte seqüência exata na homologia:

$$H_p(\partial M) \xrightarrow{i_*} H_p(M) \longrightarrow H_p(M, \partial M)$$

Usando a Dualidade de Poincaré-Lefschetz, temos que $H_{n-k}(M, \partial M) \cong H^k(M)$ onde n é a dimensão de M , ou seja, $n = 2p + 1$. Fazendo $k = p + 1$ segue que $H_p(M, \partial M) \cong H^{p+1}(M)$. Como M tem a mesma homologia de S^p , então $H^{p+1}(M) \cong \text{Hom}(H_{p+1}(M)) \oplus \text{Ext}(H_p(M)) = 0$. Logo, temos a seguinte seqüência exata:

$$H_{p+1}(M, \partial M) \xrightarrow{j_*} H_p(\partial M) \xrightarrow{i_*} H_p(M) \longrightarrow 0$$

Como $H_p(M) = \mathbb{Z}$ é um grupo livre, segue que a seqüência cinde, logo;

$$H_p(\partial M) \cong \text{Im } j_* \oplus \text{Im } i_*$$

$$\cong \ker i_* \oplus \text{Im } i_*$$

$$\cong \ker i_* \oplus \mathbb{Z}$$

Como ∂M é difeomorfo à $S^p \times S^p$, então $H_p(\partial M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, assim $\ker i_* \cong \mathbb{Z}$ e portanto existe $\gamma \in H_p(\partial M)$, primitiva, tal que $i_*(\gamma) = 0$. ■

Definição 2.2 Dado $\gamma \in H_p(\partial M)$, definimos o número de auto-intersecção, $\gamma \cdot \gamma$, do seguinte modo: sejam C^p uma co-cadeia tal que $[C^p] = \gamma^*$, onde γ^* é o dual de Poincaré de γ , e C_p uma cadeia tal que $[C_p] = \gamma$, então

$$\gamma \cdot \gamma = \langle \gamma^*, \gamma \rangle = C^p(C_p).$$

Uma noção mais geométrica da Definição 2.2 pode ser vista no Apêndice 1.

Lema 2.4 Dado $\gamma \in H_p(\partial M)$ conforme o Lema 2.3, então o número de auto-intersecção $\gamma \cdot \gamma$ é igual a 0.

Prova: Consideremos o seguinte diagrama comutativo de seqüências exatas, onde os isomorfismos verticais são induzidos pela Dualidade de Poincaré-Lefschetz:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^p(M) & \xrightarrow{i^*} & H^p(\partial M) & \xrightarrow{j^*} & H^{p+1}(M, \partial M) \\
 \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
 H_{p+1}(M, \partial M) & \xrightarrow{j_*} & H_p(\partial M) & \xrightarrow{i_*} & H_p(M)
 \end{array}$$

Pelo Lema 2.3, $i_*(\gamma) = 0$, logo $\gamma \in \ker i_* = \text{Im } j_*$, daí existe $\alpha \in H_{p+1}(M, \partial M)$ tal que $j_*(\alpha) = \gamma$. Tomando $\beta = \alpha^* \in H^p(M)$ temos que $i^*(\beta) = \gamma^*$ para algum $\beta \in H^p(M)$.

Então:

$$\begin{aligned}
 \gamma \cdot \gamma &= \langle \gamma^*, \gamma \rangle = \langle i^*(\beta), \gamma \rangle = i^*(\beta)(\gamma) \\
 &= [\beta \circ i](\gamma) = [\beta \circ i \circ \gamma] = \beta \circ i_*(\gamma) = \beta(i_*(\gamma)) \\
 &= \langle \beta, i_*(\gamma) \rangle \\
 &= 0 \blacksquare
 \end{aligned}$$

Lema 2.5 *Existe uma classe de homologia $\delta \in H_p(\partial M)$ tal que $\gamma \cdot \delta = 1$. Além disso, podemos escolher δ tal que $\delta \cdot \delta = 0$.*

Prova: Como γ é uma classe de homologia primitiva, existe uma classe de homologia $\delta' \in H_p(\partial M)$ tal que $\gamma \cdot \delta' = \pm 1$. Mudando a orientação de δ' se necessário, podemos assumir que $\gamma \cdot \delta' = 1$. Como a forma de intersecção de ∂M é do tipo par, temos que $\delta' \cdot \delta' = 2m$ para algum inteiro m . Então, tomando $\delta = \delta' - m\gamma$ temos:

$$\gamma \cdot \delta = \gamma \cdot (\delta' - m\gamma) = \gamma \cdot \delta' - m(\gamma \cdot \gamma) = 1$$

Além disso:

$$\begin{aligned}
 \delta \cdot \delta &= (\delta' - m\gamma) \cdot (\delta' - m\gamma) \\
 &= (\delta' \cdot \delta') - 2m(\delta' \cdot \gamma) + m^2(\gamma \cdot \gamma) \\
 &= 2m - 2m \\
 &= 0 \blacksquare
 \end{aligned}$$

Consideremos, agora, o caso em que p é par. Como ∂M é difeomorfo a $S^p \times S^p$, podemos identificar ∂M com $S^p \times S^p$.

Sejam $\zeta_1 = [S^p \times \{*\}]$ e $\zeta_2 = [\{*\} \times S^p]$ os geradores de $H_p(\partial M) = H_p(S^p \times S^p)$. Podemos assumir que $\zeta_1 \cdot \zeta_1 = \zeta_2 \cdot \zeta_2 = 0$ e $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = 1$ escolhendo orientações convenientes para $S^p \times \{*\}$ e $\{*\} \times S^p$.

Consideremos o endomorfismo, $\eta : H_p(S^p \times S^p) \longrightarrow H_p(S^p \times S^p)$ definido por $\eta(\zeta_1) = \delta$ e $\eta(\zeta_2) = \gamma$. Como $\delta \cdot \delta = \gamma \cdot \gamma = 0$ e $\delta \cdot \gamma = 1$ segue que η é um automorfismo de $H_p(S^p \times S^p)$.

Podemos agora enunciar o seguinte lema:

Lema 2.6 *Todo automorfismo de $H_p(S^p \times S^p)$ é induzido por um difeomorfismo de $S^p \times S^p$, que preserva orientação, desde que p seja par.*

Prova: Seja $\eta : H_p(S^p \times S^p) \longrightarrow H_p(S^p \times S^p)$ um automorfismo e seja A a matriz que representa η com respeito a base $\{\zeta_1, \zeta_2\}$. Como a matriz de intersecção de $S^p \times S^p$ com respeito a base $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pois $\zeta_1 \cdot \zeta_1 = \zeta_2 \cdot \zeta_2 = 0$ e $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = 1$ (ver Apêndice 1), temos:

$$A^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ onde a, b, c e d são iguais a 0 ou ± 1 , com $\det A = \pm 1$, então:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2ac & bc + ad \\ bc + ad & 2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2ac = 0 \\ 2bd = 0 \\ bc + ad = 1 \end{cases}$$

Se $a = 0$ e $c \neq 0$ então $bc = 1$, logo temos $a = d = 0$ e $b = c = \pm 1$.

Se $b = 0$ e $d \neq 0$ então $ad = 1$, logo temos $b = c = 0$ e $a = d = \pm 1$.

Os casos $c = 0$ e $a \neq 0$, e $d = 0$ e $b \neq 0$ são análogos. Com isto temos que existe exatamente quatro automorfismos de $H_p(S^p \times S^p)$ cujas matrizes representadas na base $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ são:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estes automorfismos são induzidos pelos seguintes difeomorfismos de $S^p \times S^p$:

$$\begin{aligned} \eta_1(\zeta_1, \zeta_2) &= (\zeta_1, \zeta_2), & \eta_2(\zeta_1, \zeta_2) &= (-\zeta_1, -\zeta_2), \\ \eta_3(\zeta_1, \zeta_2) &= (\zeta_2, \zeta_1), & \eta_4(\zeta_1, \zeta_2) &= (-\zeta_2, -\zeta_1), \end{aligned}$$

que são difeomorfismos que preservam orientação. ■

Nos próximos lemas assumiremos que $p = 2$ e provaremos a Proposição 2.1.

Seja $\psi : S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2 \times S^2$ um difeomorfismo que preserva orientação tal que $\psi_* = \eta$, cuja existência é garantida pelo lema anterior, e considere o conjunto $X = M \cup_\psi (S^2 \times D^3)$, onde ∂M e $\partial(S^2 \times D^3)$ são colados pela ψ .

Sejam $j_1 : S^2 \times S^2 \longrightarrow M$ e $j_2 : S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2 \times D^3$ inclusões e observe que $j_1 = i \circ \psi$ onde $i : S^2 \times S^2 \longrightarrow M$ é também uma inclusão.

Lema 2.7 $(j_1)_*(\zeta_1)$ é um gerador de $H_2(M)$

Prova: Antes de iniciarmos a prova, vale observar que $H_2(M) \cong H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Temos que $(j_1)_*(\zeta_2) = (i \circ \psi)_*(\zeta_2) = (i_*)(\gamma) = 0$ pois $\psi_* = \eta$; ou seja, $(j_1)_*(\zeta_2) = 0$ e daí existe um 3-ciclo $(D, \partial D)$ em $(M, \partial M)$ tal que ∂D é homólogo a $\{*\} \times S^2 = \zeta_2$ em $S^2 \times S^2$. Segue, então que o número de intersecção $[D, \partial D] \cdot (j_1)_*(\zeta_1)$ em M é igual ao número de intersecção $\zeta_2 \cdot \zeta_1 = 1$ em M a menos de sinal, onde $[D, \partial D] \in H_3(M, \partial M)$ é a classe de homologia representada por $(D, \partial D)$. Podemos concluir então que $(j_1)_*(\zeta_1) \in H_2(M)$ é uma classe de homologia primitiva não nula e portanto, é um gerador de $H_2(M) \in \mathbb{Z}$. ■

Lema 2.8 $X = M \cup_\psi (S^2 \times D^3)$ é uma 5-variedade simplesmente conexa com $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$.

Prova: Como as variedades M e $S^2 \times D^3$ são simplesmente conexas e $M \cap (S^2 \times D^3) = S^2 \times S^2$ também é simplesmente conexo, então X é simplesmente conexo. Provaremos agora que $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$. Considere a seguinte sequência exata de Mayer Vietoris:

$$H_2(S^2 \times S^2) \xrightarrow{\theta} H_2(M) \oplus H_2(S^2 \times D^3) \xrightarrow{\alpha} H_2(X) \longrightarrow H_1(S^2 \times S^2)$$

onde $\theta = ((j_1)_*, -(j_2)_*)$ e $H_1(S^2 \times S^2) = 0$.

Observe que $(j_1)_*(\zeta_1)$ é um gerador de $H_2(M)$ pelo Lema 2.7 e como $S^2 \times S^2 = \partial(S^2 \times D^3)$, então, analogamente a prova do Lema 2.7 podemos concluir que $(j_2)_*(\zeta_1)$ é um gerador de $H_2(S^2 \times D^3)$. Além disso, temos também que $(j_1)_*(\zeta_2) = 0$ e $(j_2)_*(\zeta_2) = 0$. Assim, a imagem de θ é o conjunto $\{(m(j_1)_*(\zeta_1), -m(j_2)_*(\zeta_1)) : m \in \mathbb{Z}\}$. Pelo Teorema do

$$\text{Isomorfismo } \text{Im } \alpha \cong \frac{H_2(M) \oplus H_2(S^2 \times D^3)}{\text{Ker } \alpha} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\text{Im } \theta} \cong \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Utilizando o Lema 2.8 podemos concluir que $(j_3)_* : H_2(M) \longrightarrow H_2(X)$ e $(j_4)_* : H_2(S^2 \times D^3) \longrightarrow H_2(X)$ são isomorfismos, onde $(j_3)_*$ e $(j_4)_*$ são induzidos pelas inclusões $j_3 : M \longrightarrow X$ e $j_4 : S^2 \times D^3 \longrightarrow X$.

Lema 2.9 Sendo $\omega_2(X) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ a segunda classe de Stiefel-Whitney de X , temos que $\omega_2(X) = 0$.

Prova: Como $\omega_2(S^2 \times S^2) = 0$ então $\partial M \cong S^2 \times S^2$ é uma variedade "Spin". Fixemos, então, esta estrutura "Spin" de $S^2 \times S^2$, que é única pois $H^1(S^2 \times S^2; \mathbb{Z}_2) = 0$. Além disso, temos que $H^2(M, \partial M; \mathbb{Z}_2) \cong H_3(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ e $H^2(S^2 \times D^3, \partial(S^2 \times D^3); \mathbb{Z}_2) \cong H_3(S^2 \times D^3; \mathbb{Z}_2) = 0$, onde os dois isomorfismos são induzidos pela Dualidade de Poincaré-Lefschetz. Segue daí que a segunda classe de Stiefel-Whitney relativa, $\omega_2(M, \partial M)$ e $\omega_2(S^2 \times D^3, \partial(S^2 \times D^3))$ são nulas e portanto, a segunda classe de Stiefel-Whitney $\omega_2(X)$ é nula. ■

Assim, X é uma 5-variedade fechada, simplesmente conexa onde se anula a segunda classe de Stiefel-Whitney e com $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$.

Definição 2.3 Para cada inteiro não negativo q , definimos uma 5-variedade fechada M_q^5 tal que $M_0^5 = S^2 \times S^3$, $M_1^5 = S^5$ e para $q > 1$, $H_2(M_q^5) = \mathbb{Z}_q + \mathbb{Z}_q$.

Teorema 2.2 *Toda 5-variedade C^∞ fechada, simplesmente conexa M^5 , onde se anula a segunda classe de Stiefel-Whitney é difeomorfa a soma de M_q^5 , no sentido de Milnor [Mi4]. Esta soma pode ser escrita unicamente na forma:*

$$M^5 = M_0^5 + \dots + M_0^5 + M_{k_1}^5 + \dots + M_{k_p}^5$$

com $k_i \mid k_{i+1}$ e $k_1 > 1$ se $M^5 \neq S^5$. Além disso, estas variedades são simplesmente conexas com $\omega_2 = 0$.

Prova: Ver [Sm2]. ■

Com base no teorema anterior temos que:

$$X = (S^2 \times S^3) + (S^2 \times S^3) + \dots$$

$$\text{Como } H_2(X) \cong \mathbb{Z} \text{ e } H_2(S^2 \times S^3) \cong H_0(S^2) \otimes H_2(S^3) \oplus H_1(S^2) \otimes H_1(S^3) \oplus H_2(S^2) \otimes H_0(S^3) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

temos que X é difeomorfo a $S^2 \times S^3$.

Então existe uma 6-variedade compacta W tal que $\partial W = X$. Tome $W = S^2 \times D^4$.

Seja $k : X \longrightarrow W$ uma inclusão.

Lema 2.10 *As inclusões $k \circ j_3 : M \longrightarrow W$ e $k \circ j_4 : S^2 \times D^3 \longrightarrow W$ são equivalências de homotopias.*

Prova: Sabemos que $(j_3)_* : H_2(M) \longrightarrow H_2(X)$ e $(j_4)_* : H_2(S^2 \times D^3) \longrightarrow H_2(X)$ são isomorfismos e como $k_* : H_2(X) \longrightarrow H_2(W)$ é também um isomorfismo, temos que $(k \circ j_3)_* : H_2(M) \longrightarrow H_2(W)$ e $(k \circ j_4)_* : H_2(S^2 \times D^3) \longrightarrow H_2(W)$ são isomorfismos. Como $H_*(M) \cong H_*(S^2 \times D^3) \cong H_*(W)$, $k \circ j_3$ e $k \circ j_4$ induzem isomorfismos na homologia, e como M , $S^2 \times D^3$ e W são variedades simplesmente conexas, segue que $k \circ j_3$ e $k \circ j_4$ são equivalências de homotopia pelo Teorema de Whitehead ■

Para concluirmos a Proposição 2.1, consideremos $c : \partial(S^2 \times D^3) \times [0, 1] \longrightarrow S^2 \times D^3$ uma vizinhança “colar” de $\partial(S^2 \times D^3)$ em $S^2 \times D^3$ onde $\partial(S^2 \times D^3) \times \{0\}$ corresponde a $\partial(S^2 \times D^3)$. Seja $Y = c\left(\partial(S^2 \times D^3) \times \left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$. Então, a triada $(W; M, (S^2 \times D^3) - Y)$ é

um h-cobordismo relativo ao bordo. Como W é simplesmente conexo e $\dim W = 6$, então pelo Teorema do h-cobordismo segue que W é difeomorfo a $M \times [0, 1]$. Mas, $\partial W \cong S^2 \times S^3 = S^2 \times D^3 \bigcup_{S^2 \times S^2} S^2 \times D^3$ e $\partial M \cong S^2 \times S^2$. Logo concluímos que M é difeomorfo a $S^2 \times D^3$, completando assim a prova da Proposição 2.1. ■

2.3 O Caso $p = q \geq 3$

Assumiremos aqui, que ambas as componentes conexas, C_1 e C_2 , têm a mesma homologia de S^p , e provaremos a Proposição 2.1 para o caso $p \geq 3$.

Seja $\delta \in H_p(\partial M)$ uma classe de homologia como no Lema 2.5.

Como $\Pi_1(\partial M) = \Pi_1(S^p \times S^p) = 0$ e $H_i(\partial M) = 0$ para $0 < i < p$, então pelo Teorema de Hurewicz, $\Pi_p(\partial M)$ é isomorfo a $H_p(\partial M)$. Em particular existe uma aplicação contínua $\varphi : S^p \rightarrow \partial M$ tal que $\varphi_*[S^p] = \delta$, onde $[S^p] \in H_p(S^p)$ é uma classe fundamental.

Teorema 2.3 *Sejam V^n e M^m duas variedades diferenciáveis que são $(k-1)$ -conexa e k -conexa respectivamente, então:*

- a) *Qualquer aplicação contínua de V em M é homotópica a um mergulho diferenciável se $m \geq 2n - k + 1$ e $2k < n$;*
- b) *Dois mergulhos diferenciáveis de V em M que sejam homotópicos a uma aplicação contínua são diferenciavelmente isotópicos se $m \geq 2n - k + 2$ e $2k < n + 1$.*

Prova: Ver [H] ■

Considerando a aplicação contínua $\varphi : S^p \rightarrow \partial M$ e escolhendo k igual ao maior inteiro menor que $\frac{p}{2}$ temos que S^p é $(k-1)$ -conexo e ∂M é k -conexo, além disso k satisfaz as duas desigualdades da parte a) do teorema anterior. Com isso obtemos um mergulho diferenciável $\varphi' : S^p \rightarrow \partial M$ tal que φ é homotópica a φ' .

Seja S uma subvariedade de M obtida puxando-se $\varphi'(S^p)$ para o interior de M , usando um campo de vetores normais de ∂M apontando para o interior de M .

Lema 2.11 *O fibrado normal de S em M é trivial.*

Prova: Seja $c' : \partial M \times [0, 1] \rightarrow M$ uma vizinhança “colar” de ∂M em M , então podemos assumir que S está contido no interior de $c'(\partial M \times [0, 1])$. Além disso, $\partial M \cong S^p \times S^p$ pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^{2p+1}$. Em particular, ele está mergulhado como o bordo de uma vizinhança tubular fechada de uma p -esfera mergulhada em $\mathbb{R}^{2p+1}$. Então, $\partial M \times [0, 1]$ também pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^{2p+1}$. Isto implica que o fibrado normal de S em M é equivalente ao fibrado normal da p -esfera mergulhada de forma *standart* em $\mathbb{R}^{2p+1}$. Por outro lado, vemos facilmente que o fibrado normal ν de uma p -esfera mergulhada de forma *standart* em $\mathbb{R}^r$ é trivial. Então, o fibrado normal de S em M é trivial. ■

Seja G uma vizinhança tubular fechada de S em $\text{Int } M$ e consideremos a inclusão $l : G \rightarrow M$. Pelo lema anterior G é difeomorfo a $S^p \times D^{p+1}$.

Lema 2.12 $l_* : H_i(G) \rightarrow H_i(M)$ é um isomorfismo para todo i .

Prova: Como $H_i(G) = H_i(M) = 0$ para $i \neq 0, p$, então basta mostrarmos o lema para o caso $i = p$. Seja $\zeta = \{*\} \times D^{p+1}$ um gerador de $H_p(G)$, então ζ é isotópico a $\varphi'(S^p)$ em M , logo a imagem de l_* é gerado por $i_*(\delta)$ onde $i : \partial M \rightarrow M$ é a inclusão. Por outro lado, como $i_*(\gamma) = 0$ em $H_p(M)$ existe um $(p+1)$ -ciclo $(D, \partial D)$ em $(M, \partial M)$ tal que ∂D é homólogo a γ em ∂M , desse modo o número de intersecção $[D, \partial D] \cdot i_*(\delta)$ em M é igual ao número de intersecção $\gamma \cdot \delta$ em ∂M , a menos de sinal. Como $\gamma \cdot \delta = \pm 1$ temos que $i_*(\delta)$ é uma classe primitiva não nula de $H_p(M) \cong \mathbb{Z}$. Portanto l_* é um isomorfismo. ■

Consideremos $V = M - \text{Int } G$ e seja $S' = \varphi'(S^p)$, cuja codimensão é $p+1 \geq 4$, então $\Pi_1(V) \cong \Pi_1(M - S') = 0$. Além disso, pelo Teorema da Excisão temos:

$H_*(M - \text{Int } G, G - \text{Int } G) \cong H_*(M, G)$. Construindo a seqüência exata do par (M, G) e usando o Lema 2.12 concluímos que $H_*(M, G) = 0$.

Como $H_*(M - \text{Int } G, G - \text{Int } G) \cong H_*(V, \partial G)$, então $H_*(V, \partial G) = 0$. Assim a tríada $(V; \partial M, \partial G)$ é um h-cobordismo e portanto V é difeomorfo à $\partial G \times [0, 1]$. Logo, $M = G \cup V$ é difeomorfo à $(S^p \times D^{p+1}) \cup (\partial(S^p \times D^{p+1}) \times [0, 1]) \cong S^p \times D^{p+1}$, concluindo assim a Proposição 2.1 para o caso $p = q \geq 3$.

2.4 O caso $p > q \geq 2$

Neste caso, a prova do Teorema 2.1 segue da demonstração da seguinte proposição:

Proposição 2.2 *Seja M uma variedade compacta, simplesmente conexa, de dimensão $p + q + 1$, $p > q \geq 2$ com as seguintes propriedades:*

1) ∂M é difeomorfo a $S^p \times S^q$ e

2.a) $H_*(M) \cong H_*(S^p)$ ou

2.b) $H_*(M) \cong H_*(S^q)$.

Então, M é difeomorfo a: $S^p \times D^{q+1}$ no caso (2.a), ou $D^{p+1} \times S^q$ no caso (2.b).

A prova desta proposição será feita utilizando-se alguns lemas que provaremos a seguir.

Seja $\Sigma_1 = f(S^p \times \{*\}) \subset \partial M$ e consideremos uma subvariedade, no interior de M , obtida do seguinte modo: “empurramos” Σ_1 para o interior de M , utilizando um campo de vetores normais sobre $f(S^p \times S^q)$ em S^{p+q+1} , apontando na direção de $\text{Int } M$. Denotaremos por G uma vizinhança tubular suficientemente pequena desta subvariedade “puxada” para o interior de M .

Lema 2.13 *A variedade G é sempre difeomorfa à $S^p \times D^{q+1}$.*

Prova: Primeiramente, temos que o fibrado normal ν , de Σ_1 em $f(S^p \times S^q)$ é isomorfo ao fibrado normal de $S^p \times \{*\}$ em $S^p \times S^q$, que sabemos que é trivial. Daí, o fibrado normal de Σ_1 em S^{p+q+1} é isomorfo à soma de Whitney de ν e do fibrado normal ν_1 , de $f(S^p \times S^q)$ em S^{p+q+1} restrito à Σ_1 . Como $f(S^p \times S^q)$ é uma subvariedade orientável de co-dimensão 1, mergulhada na variedade orientável S^{p+q+1} , então ν_1 é trivial. Assim $\nu_1|_{\Sigma_1}$ é também trivial e daí o fibrado normal de Σ_1 em S^{p+q+1} é trivial. Como a subvariedade “puxada” é isotópica à Σ_1 em S^{p+q+1} , seu fibrado normal é isomorfo ao fibrado normal de Σ_1 em S^{p+q+1} . Segue daí que a vizinhança tubular G , da subvariedade “puxada” é difeomorfa à $S^p \times D^{q+1}$. ■

No próximo lema, usaremos a aplicação de inclusão $i : \partial M \longrightarrow M$.

Lema 2.14 Quando $p > q$, $H_p(M)$ é gerado por $i_*[\Sigma_1]$, onde $[\Sigma_1] \in H_p(\partial M)$ é a classe de homologia representada por Σ_1 .

Prova: Como M tem a mesma homologia de S^p e $p > q$, então $H_q(M) = 0$, e portanto, existe um $(q+1)$ -ciclo $(D, \partial D)$ em $(M, \partial M)$ cujo bordo é homólogo a Σ_1 em ∂M . Então, o número de intersecção de $(D, \partial D)$ e o ciclo obtido “puxando-se” Σ_1 para o interior de M é igual ao número de intersecção de ∂D e Σ_1 em ∂M que, a menos de sinal, é ± 1 . Daí, temos que $i_*[\Sigma_1] \in H_p(M) \cong \mathbb{Z}$ é uma classe primitiva não nula, e portanto é um gerador de $H_p(M)$. ■

Consideremos, agora, a seguinte variedade: $V = \overline{M - G}$.

Lema 2.15 Quando $p > q \geq 2$, ∂M , ∂G e V são simplesmente conexos e V é um h-cobordismo entre ∂G e $f(S^p \times S^q) = \partial M$.

Prova: Seja Σ'_1 a subvariedade de M , obtida “puxando-se” Σ_1 para o interior de M . Como a co-dimensão de Σ'_1 em M é igual a $q+1 \geq 3$, vemos que $\Pi_1(M - \Sigma'_1) \cong \Pi_1(M)$. Então, $\Pi_1(V) \cong \Pi_1(M - \Sigma'_1) \cong \Pi_1(M) = 0$, logo V é simplesmente conexo. Agora, ∂M e ∂G são simplesmente conexos pelo fato de serem ambos difeomorfos à $S^p \times S^q$. Finalmente, pelo Teorema da Excisão, temos $H_*(M - \text{Int } G, G - \text{Int } G) \cong H_*(M, G)$. Construindo a sequência exata do par (M, G) e usando o Lema 2.14, temos que $H_*(M, G) = 0$ e como $H_*(M - \text{Int } G, G - \text{Int } G) \cong H_*(V, \partial G)$, segue que $H_*(V, \partial G) = 0$. Portanto V é um h-cobordismo entre ∂G e ∂M . ■

Como $\dim V = p + q + 1 \geq 6$, e usando o lema anterior, temos que V é difeomorfo a $\partial G \times [0, 1]$ pelo teorema do h-cobordismo. Assim, $M = G \cup V \cong G \cup \partial G \times [0, 1] \cong G$. Como G é difeomorfo à $S^p \times D^{q+1}$, temos a prova da Proposição 2.2.

Observação 2.1 A prova da Proposição 2.2 para o caso 2.b) é feita de maneira análoga.

2.5 O caso $q = 1$ e $p \geq 3$

Para iniciarmos a prova do Teorema 2.1, para este caso, precisamos mostrar primeiro que a componente C_1 , de $S^{p+q+1} \setminus T$, que tem a mesma homologia de S^p , é simplesmente conexa também quando $q = 1$.

Lema 2.16 Quando $q = 1$ e $p \geq 2$, C_1 é simplesmente conexa.

Prova: Sabendo que $S^{p+2} = C_1 \cup C_2$ e $f(S^p \times S^1) = C_1 \cap C_2$, consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Pi_1(f(S^p \times S^1)) & & \\
 & \swarrow i_{1*} & \downarrow i_* & \searrow i_{2*} & \\
 \Pi_1(C_1) & & & & \Pi_1(C_2) \\
 & \searrow j_{1*} & \downarrow & \swarrow j_{2*} & \\
 & & \Pi_1(S^{p+2}) & &
 \end{array}$$

onde i_1 , i_2 , j_1 , j_2 e i são inclusões. Usando um argumento similar ao da prova do Lema 2.14, é possível provarmos que $i_{2*} : H_1(f(S^p \times S^1)) \rightarrow H_1(C_2)$ é um isomorfismo. Então, $i_{2*} : \Pi_1(f(S^p \times S^1)) \rightarrow \Pi_1(C_2)$ é injetora. Suponhamos que $\Pi_1(C_1) \neq 0$. Então se i_{1*} for injetora, como i_{2*} já é injetora, temos que j_{1*} e j_{2*} também são injetoras [ver [MKS], Teorema 4.3]. Mas isso é uma contradição, pois $\Pi_1(f(S^p \times S^1)) \cong \mathbb{Z}$ e $\Pi_1(S^{p+2}) = 0$. Assim, temos que i_{1*} não é injetora. Além disso, temos também que i_{1*} não é aplicação identicamente nula, pois caso contrário, tomando representações para os grupos:

$$\Pi_1(C_1) = (a_1, a_2, \dots; r_1, r_2, \dots)$$

$$\Pi_1(C_2) = (b_1, b_2, \dots; s_1, s_2, \dots)$$

$$\Pi_1(f(S^p \times S^1)) = \mathbb{Z} = (z)$$

temos que $\Pi_1(S^{p+2}) = (a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; r_1, \dots, s_1, \dots, i_{1*}(z) = i_{2*}(z))$ mas $i_{1*} \equiv 0$ implica que $i_{2*}(z) = 0$ e daí na representação de $\Pi_1(S^{p+2})$ a relação $i_{2*}(z)$ envolve somente os

elementos $b_1, b_2, \dots$, e não aparece nenhuma nova relação envolvendo os elementos $a_1, a_2, \dots$, logo $\Pi_1(S^{p+2}) \neq 0$ o que é um absurdo. Portanto i_{1*} não é injetora nem nula. Seja r o menor inteiro positivo tal que $i_{1*}(z^r) = 0$ onde z é um gerador de $\Pi_1(f(S^p \times S^1))$ representado por $f(\{*\} \times S^1)$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Pi_1(f(S^p \times S^1))/L & & \\
 & \alpha \swarrow & \downarrow & \searrow \beta & \\
 \Pi_1(C_1) & & \varpi & & \Pi_1(C_2)/N \\
 & \searrow \bar{\alpha} & \downarrow & \swarrow \bar{\beta} & \\
 & & \Pi_1(S^{p+2}) & &
 \end{array}$$

onde L é o subgrupo normal de $\Pi_1(f(S^p \times S^1))$ gerado por z^r , N é o subgrupo normal de $\Pi_1(C_2)$ gerado por $i_{2*}(z^r)$ e $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ e ϖ são aplicações induzidas por $i_{1*}, i_{2*}, j_{1*}, j_{2*}$ e i_* respectivamente. Pela própria definição de r , temos que α é injetora. Suponhamos que β não seja injetora, então existe algum inteiro s , $0 < s < r$ tal que $i_{2*}(z^s) \in N$, daí pela definição de N teremos:

$i_{2*}(z^s) = m_1(i_{2*}(z^r))^{\pm 1} m_1^{-1} \dots m_n(i_{2*}(z^r))^{\pm 1} m_n^{-1}$ para algum $m_1, \dots, m_n \in \Pi_1(C_2)$. Então, no grupo abelianizado H , de $\Pi_1(C_2)$, teremos:

$$i_{2*}(z^s) = (i_{2*}(z^r))^e$$

para algum inteiro e . Temos também que H é isomorfo a $H_1(C_2) \cong \mathbb{Z}$, que podemos mostrar usando uma prova similar ao do Lema 2.14, que é gerado por $i_{2*}(z)$. Então, a equação $i_{2*}(z^s) = (i_{2*}(z^r))^e$ implica que $s - re = 0$, pois $(i_{2*}(z))^{s-re} = 0$ em H , o que contradiz o fato de $0 < s < r$. Logo, β é injetora. Segue daí que $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ também são injetoras [ver [MKS], Teorema 4.3]. Assim, como $\Pi_1(S^{p+2}) = 0$ e $\bar{\alpha}$ é injetora temos que $\Pi_1(C_1) = 0$ o que contradiz a hipótese de que $\Pi_1(C_1) \neq 0$. Portanto no primeiro diagrama teremos que $\Pi_1(C_1) = 0$, e portanto C_1 é simplesmente conexo. ■

Pelo Lema 2.16, temos que C_1 é uma variedade simplesmente conexa de dimensão $(p+2)$ que tem a mesma homologia de S^p e cujo bordo é difeomorfo a $S^p \times S^1$. Assim, provaremos o Teorema 2.1 para o caso $q = 1$ e $p \geq 3$ mostrando a seguinte proposição:

Proposição 2.3 *Seja M uma variedade compacta, simplesmente conexa de dimensão $(p + 2)$, $p \geq 3$, com as seguintes propriedades:*

- 1) ∂M é difeomorfo à $S^p \times S^1$, e
- 2) $H_*(M) \cong H_*(S^p)$.

Então, M é difeomorfo à $S^p \times D^2$.

Para iniciarmos a prova da Proposição 2.3, consideremos o difeomorfismo $\psi : S^p \times S^1 \longrightarrow \partial M$. Usando o mesmo argumento da prova do Lema 2.14, podemos concluir que a inclusão $\psi(S^p \times \{*\}) \longrightarrow M$ induz uma equivalência de homotopia.

Seja X a união de M e $S^p \times D^2$ colados pelo difeomorfismo ψ ao longo de seus bordos. Então, X é uma variedade fechada, simplesmente conexa de dimensão $(p + 2)$.

Lema 2.17 $H_*(X) \cong H_*(S^p \times S^2)$

Prova: Este lema pode ser visto usando o fato que a inclusão $\psi(S^p \times \{*\}) \longrightarrow M$ é uma equivalência de homotopia e também a seqüência exata de Mayer-Vietoris:

$$\dots \longrightarrow H_i(S^p \times S^1) \longrightarrow H_i(M) \oplus H_i(S^p \times D^2) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_{i-1}(S^p \times S^1) \longrightarrow \dots$$

$$H_i(S^p \times S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, 1, p, p + 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H_i(S^p \times S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, 2, p, p + 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Usando a seqüência exata de Mayer-Vietoris para $i = 0$ e $p \geq 3$ temos:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_0(S^p \times S^1) \longrightarrow H_0(M) \oplus H_0(S^p \times D^2) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0 \text{ ou ainda,} \\ \dots &\longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde $j_* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que $j_*(1) = (1, -1)$

Pelo Teorema do Isomorfismo temos que $H_0(X) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, -1) \rangle} \cong \mathbb{Z}$

Portanto, $H_0(X) \cong H_0(S^p \times S^2)$ e sendo X simplesmente conexo temos que $\Pi_1(X) = 0$, e portanto $H_1(X) = 0$, o que implica que $H_1(X) = H_1(S^p \times S^2)$.

Para $i = 2$ temos:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_2(S^p \times S^1) \longrightarrow H_2(M) \oplus H_2(S^p \times D^2) \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_1(S^p \times S^1) \longrightarrow 0 \\ &\text{ou ainda,} \\ \dots &\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Portanto, $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$ e assim, $H_2(X) \cong H_2(S^p \times S^2)$

Para $i = p$ temos:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_p(S^p \times S^1) \longrightarrow H_p(M) \oplus H_p(S^p \times D^2) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(S^p \times S^1) \longrightarrow \dots \\ &\text{ou equivalentemente} \\ \dots &\longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento do caso $i = 0$ temos que $H_p(X) \cong \mathbb{Z}$.

Para $i = p + 2$ temos:

$$\begin{aligned} H_{p+2}(S^p \times S^1) &\longrightarrow H_{p+2}(M) \oplus H_{p+2}(S^p \times D^2) \longrightarrow H_{p+2}(X) \longrightarrow H_{p+1}(S^p \times S^1) \longrightarrow 0 \\ \text{ou ainda } \dots &\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{p+2}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Portanto, $H_{p+2}(X) \cong \mathbb{Z}$ e daí $H_{p+2}(X) \cong H_{p+2}(S^p \times S^2)$.

Utilizando um argumento similar ao do caso $i = 0$ podemos concluir que $H_{p+1}(X) \cong 0$ para $p \geq 3$ e para $i \neq 0, 2, p$ e $p + 2$ é fácil verificarmos que $H_i(X) \cong 0$. ■

Consideremos, agora, os conjuntos: $S_1 = \Sigma_1 = S^p \times \{*\}$ e $S' = \Sigma_2 = \{*\}' \times S^1$, onde $S_1, S' \subset S^p \times S^1 = \partial(S^p \times D^2)$. Observemos que S' borda um 2-disco $D_1 = \{*\}' \times D^2$ mergulhado suavemente em $S^p \times D^2$. Por outro lado, como M é simplesmente conexo, segue que $\psi(S') \subset \partial M$ borda um 2-disco imerso em M . Como M tem dimensão maior ou igual a 5, podemos trocar esse 2-disco imerso em M por um 2-disco mergulhado em M , utilizando transversalidade (ver também [H]). Denotamos por D_2 esse 2-disco mergulhado em M e bordado por $\psi(S')$. Com isso, podemos assumir que $D_2 \cap \partial M = \partial D_2$ e também que D_2 é transversal à ∂M . Então vemos que $S_2 = D_2 \cup D_1$ forma uma 2-esfera mergulhada em X , que intercepta S_1 transversalmente em um ponto $(*, *) \in \partial(S^p \times D^2)$.

Lema 2.18 *Seja $j : S_1 \cup S_2 \longrightarrow X$ a inclusão, então a aplicação induzida $j_* : H_i(S_1 \cup S_2) \longrightarrow H_i(X)$ é um isomorfismo para $i \neq p + 2$.*

Prova: A prova deste lema segue do Lema 2.17 ■

Seja v_k o fibrado normal de S_k em X , ($k = 1, 2$); então usando uma prova similar à do Lema 2.13 podemos ver que v_1 é trivial. Por outro lado, v_2 pode não ser trivial.

Se não for trivial consideremos o difeomorfismo $\tau : S^p \times S^1 \longrightarrow S^p \times S^1$ que corresponde ao gerador de $\Pi_1(SO(p+1)) \cong \mathbb{Z}_2$ (ver [L]) tal que $\tau(\{*\}' \times S^1) = \{*\}' \times S^1$ e faça $\psi' = \psi \circ \tau$. Temos que ψ' satisfaz as mesmas hipóteses de ψ e além disso, usando-se ψ' na construção de X ao invés de ψ , obtemos que o fibrado normal v_2 de S_2 fica trivial. Desta forma podemos assumir que v_2 também é trivial como v_1 .

Seja N_k uma vizinhança tubular de S_k em X , ($k = 1, 2$), então $N_1 \cong S^p \times D^2$ e $N_2 \cong D^p \times S^2$. Logo temos que $N_1 \cup N_2$ é o “plumbing” de S^p e S^2 , como S^p e S^2 podem ser considerados mergulhados em S^{p+2} temos que $N_1 \cup N_2 \cong (S^p \times S^2) - \text{Int } D^{p+2}$.

Lema 2.19 *Seja $\Delta = X - \text{Int}(N_1 \cup N_2)$, então Δ é difeomorfo a um disco de dimensão $p + 2$.*

Prova: Primeiramente, observemos que $(S^p \times D^2) - S_1$ e $M - S_1$ são simplesmente conexos, pois S_1 pertence aos bordos de $S^p \times D^2$ e M , que são simplesmente conexos. Conseqüentemente, $(S^p \times D^2) - (S_1 \cup D_1)$ e $M - (S_1 \cup D_2)$ também são simplesmente conexos, pois D_1 e D_2 têm co-dimensão maior ou igual a 3. Portanto, $M - \text{Int}(N_1 \cup N_2)$ e $(S^p \times D^2) - \text{Int}(N_1 \cup N_2)$ são simplesmente conexos. Isto implica que Δ também é simplesmente conexo, pois $(M \cap S^p \times D^2) - \text{Int}(N_1 \cup N_2)$ é simplesmente conexo. Usando a Dualidade de Poincaré-Lefschetz temos:

$H_i(\Delta) \cong H^{p+2-i}(\Delta, \partial\Delta)$ e pelo Teorema da Excisão:

$$\begin{aligned} H^{p+2-i}(\Delta, \partial\Delta) &\cong H^{p+2-i}(X - \text{Int}(N_1 \cup N_2), (N_1 \cup N_2) - \text{Int}(N_1 \cup N_2)) \cong \\ &H^{p+2-i}(X, N_1 \cup N_2) \cong H^{p+2-i}(X, S_1 \cup S_2). \end{aligned}$$

Ou seja, $H_i(\Delta) \cong H^{p+2-i}(X, S_1 \cup S_2)$, e usando o dual do Lema 2.18 podemos concluir que Δ é acíclico. Como Δ é simplesmente conexo, isto implica que Δ é contrátil. Além disso, $\partial\Delta$ é difeomorfo a uma $(p+1)$ -esfera. Então, pela Conjectura de Poincaré generalizada provada por Smale (Teorema 5.1 de [Sm1]), temos que Δ é difeomorfo a um $(p+2)$ -disco. ■

Como $N_1 \cup N_2 \cong (S^p \times S^2) - \text{Int } D^{p+2}$, e usando o Lema 2.19, podemos concluir que X é difeomorfo a soma conexa $S^p \times S^2 \# \Sigma$, para algum Σ homotópico a uma $(p+2)$ -esfera. Então, mudando ψ sobre um $(p+1)$ -disco em $\partial(S^p \times D^2)$, podemos assumir que X é difeomorfo a $S^p \times S^2$. Assim, X borda uma variedade compacta W de dimensão $(p+3)$, que é difeomorfa a $S^p \times D^3 \cong (S^p \times D^2) \times I$.

Lema 2.20 *As inclusões $M \longrightarrow W$ e $S^p \times D^2 \longrightarrow W$ são equivalências de homotopia.*

Prova: Este lema pode ser provado usando os mesmos argumentos homológicos da prova do Lema 2.10. ■

Usando o Lema 2.20, temos que W é simplesmente conexo e é um h-cobordismo relativo ao bordo entre M e $(S^p \times D^2) - Y$, onde Y é uma pequena vizinhança "colar" aberta de $S^p \times D^2$. Então, pelo Teorema do h-cobordismo, temos que M é difeomorfo a $S^p \times D^2$ como queríamos; provando assim a Proposição 2.3 e o Teorema 2.1 para o caso $q = 1$ e $p \geq 3$.

Capítulo 3

O caso $S^2 \times S^1$ em S^4

Neste capítulo, estaremos interessados em provar o Teorema 2.1 para o caso $p = 2$ e $q = 1$.

As técnicas utilizadas para esta prova são diferentes daquelas usadas nos casos em que $p \geq q \geq 1$ e $p + q \neq 3$, isto porque, nesta dimensão, não podemos usar o Teorema do h-cobordismo e, além disso, por esse processo é possível obtermos apenas um homeomorfismo entre duas variedades de dimensão 4, que surgem no contexto.

Usaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Seja M uma 4-variedade compacta, simplesmente conexa com as seguintes propriedades:*

1) ∂M é difeomorfo à $S^2 \times S^1$ e

2) $H_*(M) \cong H_*(S^2)$.

Então, M é homeomorfo à $S^2 \times D^2$.

Para demonstrarmos esta proposição, usaremos conceitos e resultados do artigo “Simply-connected 4-manifolds with a given boundary” de Steven Boyer [Bo].

Apresentaremos aqui, apenas os resultados principais que serão necessários para a conclusão da Proposição 3.1, seus detalhes e demonstrações podem ser encontrados em [Bo].

Sempre que possível utilizaremos os resultados obtidos por Boyer aplicando-os às nossas hipóteses e usando a nossa notação.

Sejam N uma 3-variedade fechada e conexa e $T_1(N)$ o subgrupo de torção de $H_1(N)$. Qualquer endomorfismo de $H_1(N)$, por exemplo ϕ , induz um endomorfismo de $T_1(N)$ por restrição, representado por $\phi^t : T_1(N) \rightarrow T_1(N)$. O “link pairing” sobre $T_1(N)$ será denotado por $l_N : T_1(N) \times T_1(N) \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$.

Um espaço de formas bilineares é um par $(\mathbb{Z}^n, L)$, onde $L : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma aplicação bilinear simétrica. Por exemplo, se V é uma 4-variedade, então $(H_2(V), \cdot)$ é tal “link pairing”, onde $\cdot$ é a aplicação de “intersection pairing”.

Uma forma $(\mathbb{Z}^n, L)$ é dita ser par se $L(\xi, \xi) \equiv 0 \pmod{2}$ para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$ caso contrário é chamada ímpar.

Uma isometria entre espaços de formas bilineares é um isomorfismo de grupos que preservam as formas.

Se A é um grupo abeliano, A^* denotará o grupo dual $\text{Hom}(A, \mathbb{Z})$.

Definição 3.1 *Um espaço de formas bilineares $(\mathbb{Z}^n, L)$ apresenta $H_*(N)$ se existe uma seqüência exata:*

$$0 \rightarrow H_2(N) \xrightarrow{h} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{ad(L)} [\mathbb{Z}^n]^* \xrightarrow{\partial} H_1(N) \rightarrow 0 \text{ tal que:}$$

- i) Se $ad(L)(\xi_i) = m_i \eta_i$ ($i = 1, 2$) onde $m_1 m_2 \neq 0$ então $l_N(\partial \eta_1, \partial \eta_2) \equiv -\frac{1}{m_1 m_2} L(\zeta_1, \zeta_2)$,
- ii) Se $\beta \in H_2(N)$ e $\eta \in [\mathbb{Z}^n]^*$, então $\partial(\eta) \cdot \beta = \eta(h(\beta))$.

Nas condições da Proposição 3.1, como M é uma 4-variedade e $H_2(M) \cong \mathbb{Z}$, temos que o espaço das formas bilineares é o par $(\mathbb{Z}, L)$, onde $L : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma forma bilinear simétrica. Como $H_1(\partial M) \cong \mathbb{Z}$ não tem torção, então o “link pairing” sobre $T_1(\partial M)$, denotado por $l_{\partial M}$, é identicamente nulo.

Por [GL], como M é uma 4-variedade, cujo bordo é uma 3-variedade conexa e fechada, segue que $(\mathbb{Z}, L)$ apresenta $H_*(\partial M)$. Portanto, usando a Definição 3.1 ítem i) temos que:

$0 = l_{\partial M}(\partial \eta_1, \partial \eta_2) \equiv -\frac{1}{m_1 m_2} L(\zeta_1, \zeta_2)$, ou seja, $L(\zeta_1, \zeta_2) = 0$, para todo $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Logo, $L(\xi, \xi) \equiv 0 \pmod{2}$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, mostrando assim que a forma $(\mathbb{Z}, L)$ é par.

Seja $v_L(N)$ o conjunto de todos os homeomorfismos orientados de uma 4-variedade compacta, 1-conexa e orientada com bordo N e cujo “intersection pairing” é isomorfo a $(\mathbb{Z}^n, L)$. Em geral, $v_L(N)$ é vazio a menos que $(\mathbb{Z}^n, L)$ apresente $H_*(N)$. Temos ainda em [Bo] um resultado que garante que para cada forma bilinear simétrica $(\mathbb{Z}^n, L)$, o conjunto $v_L(N)$ é finito.

Denotaremos por $\mathcal{H}_+(N)$ o grupo dos homeomorfismos de N que preservam orientação.

Sabemos, pela Proposição 3.1, que M é uma 4-variedade compacta, 1-conexa e orientada, cujo bordo é difeomorfo a $S^2 \times S^1$, e como $l_{\partial M}$ é identicamente nulo, temos que o “intersection pairing” de M é isomorfo à $(\mathbb{Z}, L)$.

Por outro lado, a variedade $S^2 \times D^2$ também é uma 4-variedade compacta, 1-conexa, orientada cujo bordo também é $S^2 \times S^1$. Além disso, dados $\xi_1 = S^2 \times \{a\}$ e $\xi_2 = S^2 \times \{b\} \in S^2 \times D^2$ onde $a \neq b$, temos que o “intersection pairing”, $\zeta_1 \cdot \zeta_2$, é sempre igual a zero para qualquer $\zeta_1, \zeta_2 \in S^2 \times D^2$. Ou seja, o “intersection pairing” de $S^2 \times D^2$ também é isomorfo à $(\mathbb{Z}, L)$.

Assim, temos duas variedades de dimensão 4 com mesmo bordo, $S^2 \times S^1$, e cujos “intersection pairing” são isomorfos à $(\mathbb{Z}, L)$.

Podemos, então, considerar o conjunto $v_L(S^2 \times S^1)$ e concluir, a partir de alguns resultados, que sua cardinalidade é exatamente 1.

Para obtermos este resultado, consideraremos as estruturas “Spin” entre variedades.

Seja ζ um $\text{STop}(n)$ -fibrado principal ($n \geq 3$) sobre um complexo conexo X , e denotaremos $\zeta : \text{STop}(n) \xrightarrow{i} E(\zeta) \xrightarrow{\pi} X$.

Definição 3.2 Uma estrutura “Spin” sobre ζ é uma classe $\sigma \in H^1(E(\zeta); \mathbb{Z}_2)$ que é a restrição a um gerador de $H^1(\text{STop}(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. O conjunto de todas as estruturas “Spin” sobre ζ será denotado por $\text{Spin}(\zeta)$.

Observação 3.1 Boyer observa que da seqüência espectral de Serre segue que ζ admite uma estrutura “Spin” se, e somente se, a seqüência:

$$0 \longrightarrow H^1(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(E(\zeta); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(\text{STop}(n); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

é exata.

Observação 3.2 Boyer observa também que uma estrutura “Spin” sobre ζ é exatamente uma decomposição desta seqüência, ou seja, um homomorfismo $\varphi : H^1(STop(n); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(E(\zeta); \mathbb{Z}_2)$ tal que $i^* \circ \varphi = Id$.

Definição 3.3 Seja $\sigma \in Spin(\xi)$ e $x \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$. A fórmula: $x \cdot \sigma = \sigma + \pi^*(x)$, define uma ação transitiva de $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ sobre $Spin(\zeta)$, se para $\sigma_1, \sigma_2 \in Spin(\zeta)$, $d(\sigma_1, \sigma_2) = x \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ se $x \cdot \sigma_1 = \sigma_2$.

Observação 3.3 Boyer cita que existe uma teoria análoga de estruturas “Spin” sobre $SO(n)$ -fibrados principais [Mi3]. Se ξ é tal fibrado com ζ_0 seu respectivo $STop(n)$ -fibrado principal, a inclusão $E(\xi) \longrightarrow E(\zeta_0)$ induz uma equivalência dos $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ -conjuntos, $Spin(\zeta)$ e $Spin(\zeta_0)$. Estas duas notações de estruturas “Spin” sobre ξ coincidem e podem ser identificadas.

Suponhamos que X seja uma variedade com τ_x , o $STop(n)$ -fibrado principal associado ao fibrado tangente topológico estável de X .

Definição 3.4 Uma estrutura “Spin” sobre X é uma estrutura “Spin” sobre τ_x . O conjunto $Spin(\tau_x)$ será denotado por $Spin(X)$.

Existe uma ação à esquerda de $\mathcal{H}_+(X)$ sobre $Spin(X)$, onde cada $f \in \mathcal{H}_+(X)$ determina uma aplicação fibrada a menos de isotopia de fibrados, e podemos definir: $f_{\#} = (f^*)^{-1} : Spin(X) \longrightarrow Spin(X)$.

Proposição 3.2 Para quaisquer $f \in \mathcal{H}_+(X)$, $\sigma \in Spin(X)$ e $x \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ temos:

$$x \cdot f_{\#}(\sigma) = f_{\#}(f^*(x) \cdot \sigma).$$

Observação 3.4 Boyer menciona que homeomorfismos isotópicos induzem a mesma permutação de $Spin(X)$. Esta observação permite-nos calcular a ação de $f \in \mathcal{H}_+(N)$ sobre $Spin(N)$ através da ação de algum difeomorfismo isotópico à f sobre o $SO(n)$ das estruturas “Spin” de N estável.

Usando a fórmula de Wu (ver [K] e [Wu]), podemos mostrar que uma 4-variedade simplesmente conexa V admite uma estrutura “Spin” se, e somente se, $(H_2(V), \cdot)$ é uma aplicação bilinear par. Se existe uma estrutura “Spin” sobre V , ela é necessariamente única.

Definição 3.5 *Seja V uma 4-variedade, simplesmente conexa com bordo N e forma bilinear de intersecção par. A estrutura "Spin" $\sigma_V \in \text{Spin}(N)$ é definida como sendo a restrição à N da única estrutura "Spin" σ_V sobre V .*

Pela Proposição 3.1, temos que M é uma 4-variedade compacta, 1-conexa e, além disso, já mostramos que $(H_2(M), L) = (\mathbb{Z}, L)$ é par, portanto, pela fórmula de Wu, existe uma única estrutura "Spin" sobre M . Pela Definição 3.5, $\partial M = S^2 \times S^1$ também admite uma estrutura "Spin". Daí, pela seqüência espectral de Serre, temos a seguinte seqüência exata:

$$0 \longrightarrow H^1(S^2 \times S^1; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(E(\zeta); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(\text{STop}(n); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

Como $H^1(S^2 \times S^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $H^1(E(\zeta); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ e a seqüência é exata, pela Definição 3.2, temos que $H^1(E(\zeta); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e a seqüência fica:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Além disso, esta seqüência se decompõe (existem duas decomposições possíveis para elas).

Para mostrarmos que a fórmula $x \cdot \sigma = \sigma + \pi^*(x)$, onde $\sigma \in \text{Spin}(S^2 \times S^1)$ e $x \in H^1(S^2 \times S^1; \mathbb{Z}_2)$, define uma ação transitiva de $H^1(S^2 \times S^1; \mathbb{Z}_2)$ sobre $\text{Spin}(S^2 \times S^1)$, basta verificarmos que $d(\sigma_1, \sigma_2) = x \in H^1(S^2 \times S^1; \mathbb{Z}_2)$ se $x \cdot \sigma_1 = \sigma_2$, para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Spin}(S^2 \times S^1)$.

Da seqüência exata anterior, podemos caracterizar os elementos de $\text{Spin}(S^2 \times S^1)$. Se considerarmos a possibilidade: $\pi^*(\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$ e $\pi^*(\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{0})$ e usarmos o fato de que esta seqüência cinde, então podemos considerar as aplicações $g, h: \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ tal que $g(\bar{0}) = h(\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$, $g(\bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$ e $h(\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1})$. Temos então que $\sigma_1 = (\bar{0}, \bar{1})$ e $\sigma_2 = (\bar{1}, \bar{1})$ são os elementos de $\text{Spin}(S^2 \times S^1)$. Além disso,

$$\bar{1} \cdot \sigma_1 = \bar{1} \cdot (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) + \pi^*(\bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{1}, \bar{1}) = \sigma_2 \text{ ou seja, } d(\sigma_1, \sigma_2) = \bar{1} \text{ e}$$

$$\bar{1} \cdot \sigma_2 = \bar{1} \cdot (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1}) + \pi^*(\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{1}) = \sigma_1 \text{ ou seja, } d(\sigma_1, \sigma_2) = \bar{1}.$$

Se considerarmos as outras possibilidades que são: $\pi^*(\bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$ e $\pi^*(\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1})$, então, procedendo analogamente, teremos o mesmo resultado.

Portanto, concluímos que $H^1(S^2 \times S^1; \mathbb{Z}_2)$ atua transitivamente sobre $\text{Spin}(S^2 \times S^1)$ e daí, pela Observação 3.4, temos que um homeomorfismo $f \in \mathcal{H}_+(S^2 \times S^1)$ atua transitivamente sobre $\text{Spin}(S^2 \times S^1)$.

Observação 3.5 *Seja $N = S^2 \times S^1$ e conhecendo-se que $\mathcal{H}_+(S^2 \times S^1)$ atua transitivamente sobre $\text{Spin}(S^2 \times S^1)$ temos pela Proposição 05 de [Bo]:*

$$|v_L(S^2 \times S^1)| = \begin{cases} 2 & \text{se } L \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } L \text{ é par} \end{cases}$$

Podemos, agora, usando a observação anterior, concluir a Proposição 3.1, pois, como neste caso, L é par, então $|v_L(S^2 \times S^1)| = 1$. Portanto, existe apenas um homeomorfismo de 4-variedades compactas, simplesmente conexas, orientadas, com bordo $S^2 \times S^1$ e cujo “intersection pairing” é isomorfo à $(\mathbb{Z}, L)$. Daí, como M e $S^2 \times D^2$ são 4-variedades com estas propriedades, temos que M é homeomorfo à $S^2 \times D^2$.

Com esta prova e juntamente com os resultados do Capítulo 2 concluímos então a demonstração do Teorema 2.1 para todas as dimensões.

Apêndice 1

Intersecção

Neste apêndice, daremos uma breve introdução sobre teoria de intersecção de subvariedades de uma variedade, que foram utilizadas nos Capítulos 2 e 3.

Este texto foi baseado no livro "Surgery on Simply-Connected Manifolds" [Br]; onde poderão ser encontrados maiores detalhes sobre o assunto.

Iniciaremos com alguns conceitos que serão utilizados neste apêndice e também nos capítulos anteriores.

1.1 Produto Cup e Cap

Seja C_i um complexo de cadeia aumentado com a aplicação diagonal $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ tal que $(\varepsilon \otimes 1) \Delta(C) = (1 \otimes \varepsilon) \Delta(C)$ onde $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{Z}$ é a aumentação, e identifiquemos $C = C \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \otimes C$. Então Δ induz sobre C^* uma estrutura de anel com unidade pela $C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$, onde $C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^*$ é a inclusão. Isto é chamado de produto cup, e a nível de cohomologia induz uma aplicação $H^*(C) \otimes H^*(C) \longrightarrow H^*(C)$, também chamada produto cup, $x \otimes y \longmapsto x \smile y$.

Usando Δ podemos definir o produto cap: $\frown : C_n \otimes C^k \longrightarrow C_{n-k}$ pela fórmula $a \frown b = (\Delta(a)) \mid b$. Como $\frown$ é a composição das aplicações de cadeia Δ e $\mid$, segue que $\frown$ é também uma aplicação de cadeia e induz: $\frown : H_n(C) \otimes H^k(C) \longrightarrow H_{n-k}(C)$.

Mais geralmente, suponha A, B e C complexos de cadeias aumentados e seja $\Delta :$

$A \longrightarrow B \otimes C$ uma aplicação de cadeia. Então, obtemos as seguintes aplicações na cohomologia:

$$\begin{aligned} \smile: H^p(B) \otimes H^q(C) &\longrightarrow H^{p+q}(A) \text{ e} \\ \frown: H_n(A) \otimes H^k(C) &\longrightarrow H_{n-k}(B) \end{aligned}$$

Enunciaremos a próxima proposição sem demonstração por envolver resultados não desenvolvidos neste apêndice; porém ela é de grande importância pois caracteriza o elemento γ^* que é o dual de Poincaré de $\gamma \in H_p(\partial M)$ utilizado na definição 2.2.

Proposição 1.1 *Seja (B, A) um par de cadeia geométrico tal que $H_m(B, A) = \mathbb{Z}$ com gerador v . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- a) $v \smile: H^q(B) \longrightarrow H_{m-q}(B, A)$ é um isomorfismo para todo q .
- b) $v \frown: H^q(B, A) \longrightarrow H_{m-q}(B)$ é um isomorfismo para todo q .
- c) O “pairing” $\psi: H^q(B; \mathbb{Z}_p) \otimes H^{m-q}(B, A; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ dado por $\psi(x, y) = (x \smile y)(v)$ é não singular para todo primo p e todo q .

Usando a proposição anterior temos que $\gamma^* \in H^q(B, A)$ é uma única classe tal que $v \frown (\gamma^*) = \gamma \in H_{m-q}(B)$.

1.2 Intersecção

Sejam N_1^p e N_2^q subvariedades suaves de uma variedade suave M^m , onde $m = p + q$. Um ponto $x \in N_1 \cap N_2$ será chamado de ponto discreto se x possui uma vizinhança aberta V em M tal que $V \cap N_1 \cap N_2 = \{x\}$. Se todo ponto de $N_1 \cap N_2$ é discreto, então $N_1 \cap N_2$ é um subconjunto discreto de M .

Se $x \in N_1 \cap N_2$ é ponto discreto e V é aberto em M tal que $V \cap N_1 \cap N_2 = \{x\}$, então $(V \setminus N_1) \cup (V \setminus N_2) = (V \setminus \{x\})$. Então temos a aplicação dada pelo produto cup relativo:

$$H^q(V, V \setminus N_1) \otimes H^p(V, V \setminus N_2) \longrightarrow H^{p+q}(V, V \setminus \{x\})$$

Suponhamos agora, que M, N_1 e N_2 são orientáveis, neste caso:

- Para cada ponto $x \in M$, temos um gerador $[M]_x \in H_m(M, M \setminus \{x\})$,
- Para cada ponto $y \in N_1$, temos um gerador $[N_1]_y \in H_p(N_1, N_1 \setminus \{y\})$,
- Para cada ponto $z \in N_2$, temos um gerador $[N_2]_z \in H_q(N_2, N_2 \setminus \{z\})$,

onde cada gerador é compatível para todos os pontos $x \in M, y \in N_1$ e $z \in N_2$.

Seja $E_i, i = 1, 2$, uma vizinhança tubular de N_i em M , onde E_i^0 é o complementar da secção nula. Então a inclusão $(E_i, E_i^0) \subset (M, M \setminus N_i)$ é uma excisão, logo $H^*(M, M \setminus N_i) \cong H^*(E_i, E_i^0)$. Pelo Teorema do Isomorfismo de Thom, se cada E_i é orientável, existem elementos $U_1 \in H^q(E_1, E_1^0), U_2 \in H^q(E_2, E_2^0)$ tal que r^*U_i é um gerador de $H^*(V, V \setminus N_i)$, para qualquer vizinhança pequena tal que $V = A \times B$, onde B é uma bola em $N_i, V \cap N_i = 0 \times B$, r denota a inclusão e tal que $\smile U_i$ e $\frown U_i$ induz isomorfismos. Assuma que todas as orientações são escolhidas compativelmente tal que $[M]_x \frown r^*U_i = [N_i]_x$ para $x \in N_i$

Então podemos definir o sinal ou orientação de um ponto isolado $x \in N_1 \cap N_2$ por:

$$Sgn(x) = (r^*U_1 \smile r^*U_2) [M]_x$$

Dizemos que x é um ponto transversal (homologicamente) da intersecção se $Sgn(x) = \pm 1$.

Em relação à intersecção de classes de homologia temos: Seja M^m uma variedade compacta orientável com bordo, e sejam $x \in H_p(M), y \in H_q(M, \partial M)$, onde $p + q = m$. Definimos $x \cdot y = (x' \cdot y') = (x' \smile y') [M]$ onde $x' \in H^{m-p}(M, \partial M), y' \in H^{m-q}(M)$, tal que $[M] \frown x' = x, [M] \frown y' = y$. A mesma definição também pode ser obtida para $x \cdot y \in H_*(M)$, neste caso, $x \cdot y = x \cdot j_*y$.

Suponhamos N_1^p, N_2^q subvariedades compactas e orientáveis de M^m , que também é uma variedade compacta e orientável com bordo, onde $m = p + q$. Suponhamos também que a variedade N_i é fechada e $\partial N_2 \subset \partial M$, e ainda $\partial M \cap N_1 = \emptyset, \partial M \cap N_2 = \partial N_2$. Sejam N_1, N_2 e M variedades orientáveis, e suponhamos que N_1 intercepta N_2 transversalmente (homologicamente), e sejam $i_j : N_j \rightarrow M$ inclusões, $j = 1, 2$.

Teorema 1.1 $(i_{1*}[N_1]) \cdot (i_{2*}[N_2]) = \sum_{x \in N_1 \cap N_2} \text{Sgn}(x)$. Ou seja, a intersecção das classes de homologia conta algebricamente o número de pontos de intersecção.

Prova: Ver referência [Br] ■

Bibliografia

- [BJ] T. H. Bröcher and K. Jänich, "Introduction to differential topology", Cambridge University Press, 1982.
- [Bo] S. Boyer, *Simply-connected 4-manifolds with a given boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986), 331-357.
- [Br] W. Browder, "Surgery on simply-connected manifolds", Springer-Verlag, New York, 1972.
- [G] R. Z. Goldstein, *Piecewise linear unknotting of $S^p \times S^q$ in S^{p+q+1}* , Michigan Math. J. 14 (1967), 405-415.
- [GL] C. Gordon and R. Litherland, *On the signature of a link*, Invent. Math. 47 (1978), 53-69.
- [H] A. Haefliger, *Differentiable imbeddings*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 109-112.
- [Hu] S. Hu, "Introduction to homological algebra", Holden-Day, California, 1968.
- [L] E. L. Lima, "Grupo fundamental e espaços de recobrimento", IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1993.
- [LNS] L. A. Lucas, O. M. Neto, O. Saeki, *A generalization of Alexander's torus theorem to higher dimensions*, ICMSC-USP número 28 (1995).
- [K] M. Kervaire, *Relative characteristic classes*, Amer. J. Math. 79 (1957), 517-558.
- [Ma] W. S. Massey, "Algebraic topology", Cambridge University Press, 1982.

- [Mi1] J. Milnor, "Lectures on the h-cobordism theorem", Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1965.
- [Mi2] J. W. Milnor, "Topology from the differentiable viewpoint", The University Press of Virginia, 1976.
- [Mi3] J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, Enseign. Math. 9 (1963), 198-203.
- [Mi4] J. Milnor, *Some de variétés différentiables de sphères*, Bull. Soc. Math., France, 87 (1959) 439-444.
- [MKS] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, "Combinatorial group theory: presentation of groups in terms of generators and relations", second revised edition, Dover Publications Inc., New York, 1976.
- [Mu] J. R. Munkres, "Elements of algebraic topology", The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Menlo Park, 1984.
- [Mz] B. Mazur, *On embeddings of spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959), 59-65.
- [R] D. Rolfsen, "Knots and links", Math. Lect. Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976.
- [Se] N. Steenrod, "The topology of fiber bundles", Princeton University Press, New Jersey, 1951.
- [Sh] J. L. Shaneson, *Embeddings with codimension two of spheres in spheres and h-cobordisms of $S^1 \times S^3$* , Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 972-974.
- [Sm1] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. 84 (1962), 387-399.
- [Sm2] S. Smale, *On the structure of 5-manifolds*, Ann. of Math. 75 (1962), 38-46.
- [Sp] E. H. Spanier, "Algebraic topology", MacGraw - Hill Book Company, 1966.
- [St] R. Stong, *Simply-connected 4-manifolds with a given boundary*, Topology Appl. 52 (1993), 161-167.
- [Wa] A. H. Wallace, "Algebraic topology", W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.
- [Wu] W. T. Wu, *Classes caractéristiques et i-carrés dans une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique, 230 (1950), 508-511.