Um invariante para sistemas com integral
primeira Morse-Bott

Ingrid Sofia Meza Sarmiento

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Um invariante para sistemas com integral primeira Morse-Bott

Ingrid Sofia Meza Sarmiento

***Orientadora:* Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *EXEMPLAR DE DEFESA*

**USP – São Carlos
Julho de 2011**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M617i Meza Sarmiento, Ingrid Sofia
Um invariante para sistemas com integral primeira
Morse-Bott / Ingrid Sofia Meza Sarmiento; orientador
Regilene Delazari dos Santos Oliveira -- São Carlos,
2011.
152 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. funções de Morse-Bott. 2. integral primeira. 3.
sistemas integráveis. 4. invariante completo. 5.
variedades compactas e sem bordo. I. Oliveira,
Regilene Delazari dos Santos, orient. II. Título.

Agradecimentos

À Deus, pela vida, a saúde, força e sabedoria.

À minha orientadora, Prof. Dra. Regilene Delazari Dos Santos Oliveira pelo apoio, esforço, dedicação, amizade, confiança, responsabilidade, competente orientação e ensinamentos. Desde já sou grata a ela.

Ao Prof. Dr. José Martínez Alfaro, pelo apoio e dedicação. Com responsabilidade e simplicidade repassou seus conhecimentos em anos de pesquisa para a contribuição na pesquisa dessa dissertação. Muito obrigada.

Aos professores do ICMC-USP pela orientação e ensinamentos.

Aos funcionários da área administrativa do ICMC-USP. Muito Obrigada Patricia, pela ajuda.

Aos meus professores da Universidad del Atlántico - Barranquilla: Oswaldo Dede, Rafael Ahumada, Miguel Caro, pelo incentivo e ajuda prestada desde a minha vinda ao Brasil.

À minha família, pela espera e confiança.

Aos meus amigos de estudo e pesquisa: Henry Gullo, Alex C. Rezende, Jackson Itikawa e companheiros de turma. Obrigada pelo apoio e amizade incondicional.

Aos minhas novas amigas: Simone Lante, Marilia Silva, Karina Toledo, Simone Pereira. Muito obrigada meninas, pelas novas experiências, amizade recíproca, paciência e puxada de orelhas com o português!

À galera colombiana, pelo companheirismo e conselhos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

Dedicatória

*Ao meu querido Deus, fonte de toda sabedoria,
A minha amada mãe, Geidy.*

Resumo

Nesta dissertação são investigados os sistemas diferenciais com integral primeira do tipo Morse-Bott definidos em superfícies compactas e orientáveis. A cada sistema, nas condições acima descritas, associa-se um grafo de modo que a correspondência entre os grafos e as classes de equivalência topológica orbital dos campos investigados seja bijetiva. Portanto, apresenta-se um invariante completo, chamado aqui de grafo de Bott, para essa classe de sistemas.

Essa abordagem surgiu como uma iniciativa de generalizar o estudo realizado para sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade com integral primeira do tipo Morse definidos em superfícies 2-dimensionais compactas, onde os conceitos de átomos e fluxos gradiente foram aplicados por A.V. Bolsinov em [4].

Palavras-chave: sistemas integráveis, integral primeira, superfícies fechadas, funções de Morse-Bott, grafos de Bott, invariante completo.

Abstract

In this dissertation are studied differential systems with a Morse-Bott first integral defined on compact orientable surfaces. For each system, under the conditions described above, is associated a graph so that the correspondence between graphs and the orbital topological equivalence classes of the systems are bijective. Therefore, we present a complete invariant, called here Bott graph for this class of systems.

This approach has emerged as an initiative to generalize the study to systems Hamiltonian with one degree of freedom having a Morse first integral in 2-dimensional compact surfaces, where the concepts of atoms and gradient flows were applied by A.V. Bolsinov in [4].

Key words: integrable systems, first integral, closed surfaces, Morse-Bott functions, graphs Bott, complete invariant.

Sumário

Introdução	1
1 Funções de Morse	3
1.1 Introdução	3
1.2 Funções com pontos críticos não-degenerados	5
1.3 Existência de Funções de Morse	18
1.4 O fluxo gradiente	32
2 A topologia dos conjuntos de nível	39
2.1 Homotopia fora dos valores críticos.	42
2.2 Passando níveis críticos e anexando alças	45
2.3 Descomposição em alças de uma superfície.	47
2.3.1 Quando o índice de p_0 é zero	47
2.3.2 Quando o índice de p_0 é um	48
2.3.3 Quando o índice de p_0 é dois	50
2.3.4 Descomposição em alças	51
2.4 Aumento e diminuição de pontos críticos	55
3 Discos com alças	59
3.1 Decomposição em alças de uma variedade	59
4 Teoria de Morse-Bott	81
5 Invariantes na teoria de sistemas integráveis	93
5.1 Introdução aos sistemas integráveis	94

5.1.1	Introdução à mecânica Hamiltoniana	95
5.1.2	Sistemas Hamiltonianos Liouville integrável. O Teorema de Liouville	100
5.2	Grafos de Reeb de uma função de Morse	102
5.2.1	Representação de Grafos	102
5.2.2	Átomos e moléculas simples	111
5.3	Grafo de uma função de Morse-Bott	119
5.3.1	Estrutura topológica de uma vizinhança crítica correspondente a uma S^1 crítica	122
5.4	Grafos associados a sistemas Morse-Bott integráveis. Caso simples.	125
5.5	Construção de um invariante para sistemas integráveis sob condições básicas.	130
5.5.1	Complexos orbitais. Invariante de Neumann	134
5.5.2	Grafos de conexões reduzido ou grafos de Bott	138
5.5.3	Conjecturas sobre sistemas com integral primeira Morse-Bott	141
6	Considerações Finais.	147
	Referências Bibliográficas	148

Introdução

Considere um campo de vetores ou sistema de equações diferenciais definidos em uma superfície fechada e orientável M que admite uma integral primeira $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo Morse-Bott. Por uma superfície fechada entenderemos aquelas superfícies 2-dimensionais que são compacta e sem bordo segundo a literatura usada em [17]. Dividimos M em conjuntos de nível definidos pela imagem inversa por meio de f de um ponto $a \in \mathbb{R}$. Estes conjuntos são subvariedades de M e invariantes pelo fluxo definido pelo sistema X ou seja, são conjuntos que satisfazem a seguinte condição, se uma solução começa em um ponto dele então ela permanece no conjunto para todo t . O estudo local destes conjuntos nos leva a um problema local e para obter um problema global é necessário a decomposição de M em estes conjuntos. A técnica usada para alcançar o estudo global é associar um grafo para tal decomposição de maneira que este leve informações tanto do fluxo quanto da topologia da superfície. Uma função de Morse-Bott induz um grafo, o grafo de Bott.

De acordo com Rezende e Franzosa [10] o estudo da relação entre fluxos e topologia remota a Poincaré e, em particular, o teorema que relaciona a característica de Euler de uma superfície M com a soma dos índices das singularidades do fluxo gradiente em M e, segundo com [1] do ponto de vista histórico M.M Peixoto [24] foi o primeiro em relacionar grafos e fluxos.

Desde então esta técnica tem sido estudada por alguns outros pesquisadores na área. Por exemplo em [20] são considerados os grafos de Neumann, o qual é o espaço quociente M/ϕ dotado de uma estrutura simples, obtido pelo colapso de órbitas ϕ de um fluxo contínuo em uma superfície a pontos; em [10] são estudados os grafos de Lyapunov de fluxos suaves em superfícies induzidos por uma função de Lyapunov; consecutivamente em [7] foram consideradas uma classe especial de folheações dadas em uma superfície fechada,

a classe das folheações Morse-Smale e uma classificação topológica completa é proposta. Nessa abordagem os resultados principais visam a generalização dos teoremas de M.M Peixoto [24]. Em [23] também é considerado o problema da classificação topológica dos fluxos Morse-Smale em superfícies fechadas 2-dimensionais na direção de construir um novo invariante completo, os grafos tricolor, mais simples do que os grafos de Peixoto. Nesse trabalho, também foram citados os invariantes de Fleitas e de Wang com o objetivo de compará-los com os grafos tricolor.

Essa dissertação propõe-se generalizar os estudos realizados por A.V. Bolsinov em [4] para o caso de sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade definidos em uma superfície fechada e que admite uma integral primeira do tipo Morse. Nesse trabalho, foram apresentados alguns resultados sobre a topologia de sistemas integráveis Hamiltonianos, baseados em uma nova abordagem proposta por Fomenko e que nessa dissertação serão apresentados no capítulo 5. Portanto, é natural perguntarmos o que sucede quando temos um sistema integrável, não necessariamente Hamiltoniano, e que admita como integral primeira uma função do tipo Morse-Bott. Motivados por estas ideias queremos construir uma versão análoga aos resultados expostos em [4].

Essa dissertação está organizada em duas grandes partes. A primeira consta dos quatro primeiros capítulos e a segunda do capítulo 5. Nessa primeira parte introduzimos os conceitos e terminologias mais importantes sobre a teoria das funções de Morse e Morse-Bott que serão úteis para os resultados expostos na segunda parte. A segunda parte está subdividida em duas partes. A primeira delas inicia ao leitor nos conceitos básicos de campos Hamiltonianos, enunciamos o Teorema de Liouville e descrevemos os grafos de Reeb, associados a sistemas com integral primeira do tipo Morse. A segunda e última parte iniciada na seção 5.3 consta dos resultados principais para essa dissertação. Aqui resultados sobre a topologia de sistemas integráveis definidos em superfícies fechadas com integral primeira do tipo Morse-Bott são apresentados, assim como um estudo sobre o que chamaremos de grafo de Bott. Questões naturais sobre o problema da realização e a invariância de tais grafos são conjecturadas na última subseção desse capítulo.

Encerramos a dissertação com algumas considerações finais e com as referências bibliográficas utilizadas para a preparação da mesma.

Capítulo 1

Funções de Morse

1.1 Introdução

Nesse capítulo mostraremos que a idéia básica da teoria de Morse é analisar da topologia, a forma, de uma variedade a partir da existência de determinadas funções diferenciáveis definidas sobre ela, essa análise é baseado no comportamento local dos pontos críticos da função.

Vale a pena ressaltar que, dada uma função diferenciável definida sobre uma variedade é possível associarmos infinitos campos vetoriais a variedade através dessa função, por exemplo, o campo gradiente, o campo hamiltoniano e combinações entre eles. O que veremos nessa dissertação é que podemos reformular a teoria de Morse através do estudo da relação existente entre os campos vetoriais associados as funções definidas na variedade e a topologia da variedade, em particular para os campos onde a função considerada é uma integral primeira do campo vetorial.

A relação entre topologia da variedade e os campos vetoriais gradientes bastante elaborada e pode ser estudada através do trabalho original de Morse [18] . Vejamos o seguinte exemplo clássico.

Consideremos o toro acima do plano xy como na Figura 1.1. Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a representação funcional da altura acima do plano xy e M^a , o conjunto consistindo de todos aqueles pontos do toro de altura menor ou igual a a .

Figura 1.1: Representação da função altura $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

Os pontos críticos p, q, r, s de f são os pontos onde o plano tangente ao toro é horizontal. Eles são não-degenerados: a matriz Hessiana da função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em cada um deles é não-degenerada. Os pontos p e s são extremos globais e r e q são pontos selas. Seguiremos as mudanças da topologia de M^a quando a varia.

1. Se $a < f(p)$, então $M^a = \emptyset$
2. Se $a = f(p)$, então M^a é um ponto.
3. Se $f(p) < a < f(q)$, então M^a é um disco o qual é do ponto de vista homotópico, o mesmo que um ponto.
4. Se $a = f(q)$, então M^a é, do ponto de vista homotópico, o mesmo que um cilindro, o qual pode ser obtido anexando os pontos finais de um disco 1-dimensional à fronteira do disco do passo anterior.
5. Se $f(q) < a < f(r)$ então M^a ainda é um cilindro.
6. Se $a = f(r)$, então M^a , é do ponto de vista homotópico, um toro com a tampa removida, que pode ser obtido anexando um ponto final de um disco 1-dimensional em um dos círculos fronteira do cilindro do passo anterior e fixar o outro ponto final ao outro círculo fronteira.
7. Se $f(r) \leq a < f(s)$, então M^a ainda é um toro com a tampa removida.
8. Se $a \geq f(s)$, então M^a é o toro, que pode ser obtido anexando a fronteira de um disco 2-dimensional à fronteira do corte do toro no passo anterior.

Na Figura 1.2 apresentamos os conjuntos M^a da função altura no toro.

Figura 1.2: Conjuntos M^a da função altura

Notemos que a topologia de M^a muda quando “ a ” passa através dos valores críticos da f . Além disso, a topologia do conjunto M^a pode ser reconstruída anexando a ele discos de dimensões diferentes.

Veremos que a colagem dos discos é feita ao longo das trajetórias de um fluxo convenientemente escolhido. Os pontos fixos desse fluxo correspondem aos pontos críticos da função f .

1.2 Funções com pontos críticos não-degenerados

Nesta seção, M denotará uma variedade m -dimensional riemanniana sem bordo.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $p \in M$. Como não dispomos de um espaço ambiente, precisaremos de uma propriedade característica do vetor tangente que substitua a noção de velocidade.

Para isto consideremos $p \in M$ e para cada $v \in T_p M$ escolha uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$; faça $\beta = f \circ \alpha$. A aplicação $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ dada por $(df)_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .

Se escolhermos uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ em $p = \alpha(0)$ podemos expressar f e a curva α nesta parametrização por

$$(f \circ \varphi)(q) = f(x_1, \dots, x_m);$$

onde $q = (x_1, \dots, x_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$ e $(\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1, \dots, x_m)$ respectivamente.

Então

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_m(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Definição 1.2.1. Um ponto crítico p de uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é um ponto onde $(df)_p = 0$. Em coordenadas locais

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) = 0.$$

Denotaremos por $\text{Crit}(f)$ ao conjunto de pontos críticos de f .

Um ponto $p \in M$ é dito ponto regular de f se não é um ponto crítico.

Definição 1.2.2. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida em M . O campo vetorial gradiente, $\text{grad}f$, é unicamente definido pela condição

$$\langle (\text{grad}f)_p, V_p \rangle = (df)_p(V_p)$$

para todo campo vetorial diferenciável V em M , onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica riemanniana induzida pelo produto interno sobre a superfície M .

Em coordenadas locais, $\text{grad}f$ é definido por

$$\begin{aligned} \text{grad}f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}(0) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(0). \end{aligned}$$

Segue dessa definição que pontos críticos de f podem ser vistos como os zeros do campo vetorial gradiente de f .

Além disso, a matriz das segundas derivadas parciais de uma função, num ponto crítico p , pode ser definida intrinsicamente como segue.

Definição 1.2.3. A Hessiana de f num ponto crítico p é uma forma bilinear simétrica sobre o espaço tangente

$$\text{Hess}_p(f) : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$\text{Hess}_p(f)(v, w) = V(W(f))(p),$$

onde V e W são extensões dos vetores v e w respectivamente à campos vetoriais diferenciais numa vizinhança de p . (isto é, $V(p) = v$ e $W(p) = w$). A expressão $V(f)$ é a derivada de f na direção do campo V .

Observação 1.2.4. Sejam E e F espaços vetoriais. Uma forma bilinear $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função $b(u, v)$, linear em cada uma das variáveis $u \in E$ e $v \in F$. Mais precisamente, para cada quaisquer $u, u' \in E$, $v, v' \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$b(u + u', v) = b(u, v) + b(u', v) \quad ; \quad b(\alpha u, v) = \alpha b(u, v)$$

$$b(u, v + v') = b(u, v) + b(u, v') \quad ; \quad b(u, \alpha v) = \alpha b(u, v)$$

- Uma forma bilinear $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica quando $b(u, v) = b(v, u)$ para quaisquer u e $v \in E$.
- Um forma bilinear b é simétrica se e somente se sua matriz em relação a qualquer base $U \in E$ é simétrica.

Provemos que a Definição 1.2.3 independe da escolha de extensões de campos vetoriais.

Para isto, consideremos um sistema de coordenadas locais $(x_1, \dots, x_m)$ e assumamos que $V = \sum_{i=1}^m V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $W = \sum_{i=1}^m W_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ com $W_i(p) = w_i$ e $V_i(p) = v_i \forall i$. Então segue da

definição 1.2.3:

$$\begin{aligned}
Hess_p(f)(v, w) &= V(W(f))(p) = V\left(\sum_{j=1}^m W_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p) \\
&= \sum_{i=1}^m \left[V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^m W_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right](p) \\
&= \sum_{i=1}^m \left[V_i \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(W_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right) \right](p) \\
&= \sum_{i=1}^m \left[V_i \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + W_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) \right](p) \\
&= \sum_{i,j=1}^m \left[V_i(p) \frac{\partial W_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) + V_i(p) W_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^m v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \\
\therefore Hess_p(v, w) &= \sum_{i,j=1}^m v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)
\end{aligned}$$

logo a Hessiana depende somente dos vetores tangentes iniciais v e w . Além disso a Hessiana é simétrica em v e w , pois sua matriz em relação à base de $T_p M$ é simétrica. Em coordenadas locais, a Hessiana é representada pela matriz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j}.$$

Definição 1.2.5. Um ponto crítico p de f é chamado não-degenerado se a forma bilinear $Hess_p(f)(v, w) = 0, \forall w \in T_p M$ se, e somente se, $v = 0$.

Em termos de coordenadas locais, p é não-degenerado se, e somente se, a matriz Hessiana tem $\text{rank} = m = \dim M$ ou, equivalentemente, a matriz Hessiana é não-singular, isto é, todos seus autovalores são diferentes de zero ou equivalentemente, os vetores linhas da matriz Hessiana são linearmente independentes.

Observação 1.2.6. Seja Q uma forma quadrática não-degenerada sobre um espaço vetorial E . Diz-se que Q é definida negativa sobre um subespaço $F \subset E$ se $Q(x) < 0, \forall x \in F$ e $x \neq 0$.

A maior dimensão possível de um subespaço sobre o qual Q é definida negativa é chamado de índice de Q . Se Q é simétrica de ordem $n \times n$ temos $Q(x) = \sum a_{ij}x_i x_j$ para quaisquer escolha de coordenadas lineares em E , então o índice de Q é igual ao número de autovalores negativos de Q , contando as suas multiplicidades.

Dessa observação segue a seguinte definição.

Definição 1.2.7. O índice de Morse de f em p é a dimensão máxima do subespaço V de $T_p M$ no qual $Hess_p(f)$ é definida negativa, isto é,

$$Hess_p(f)(u, v) < 0 \quad , \forall v \in V.$$

O índice de Morse de p é igual ao número de autovalores negativos de $Hess_p(f)$ contando as suas multiplicidades.

Como consequência dessa definição temos

Definição 1.2.8. Um ponto crítico p de f é do tipo **centro** se o índice de Morse de f em p é zero ou a dimensão de M . Em outro caso, do tipo **sela**.

Observação 1.2.9. • O fibrado tangente TM , que consiste de todos os espaços tangentes aos pontos de M , tem uma estrutura de uma variedade $2m$ -dimensional.

De fato, para cada parametrização local $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V_\alpha \subset M$, em M , definimos $\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^m (\approx T_p M) \longrightarrow TM$ por

$$\Phi_\alpha(x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_m) = (p, v);$$

onde $p \in M$ e v é o vetor em p que tem por coordenadas locais com respeito a ϕ_α , $(v_1, \dots, v_m)$ e $p = \phi_\alpha(x_1, \dots, x_m)$. Desta forma, $\{\Phi_\alpha, U_\alpha \times \mathbb{R}^m\}$ é uma estrutura diferenciável em TM .

- Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função diferenciável, M e N variedades diferenciáveis e P seja uma subvariedade de N . Dizemos que f é transversal a P e escrevemos $f \pitchfork P$ se

$$(df)_q(T_p M) + T_{f(q)} P = T_{f(q)} N, \quad \forall q \in f^{-1}(p).$$

Esta equação diz que, a imagem da derivada de f em q junto com o espaço tangente de P em $f(q)$ gera todo o espaço tangente de N em $f(q)$.

- *Um campo vetorial suave X é uma seção suave do fibrado tangente TM . A seção zero $X_0 : M \rightarrow TM$, definida por $X_0(x) = 0 \in T_x M$ para todo $x \in M$, representa um mergulho de M em TM . Os zeros de X , o campo vetorial suave sobre M , correspondem às interseções entre a seção X_0 , considerada como uma subvariedade m -dimensional em TM , e a seção X , considerada como uma função suave de M em TM .*

A seguir mostraremos as consequências dessa observação.

Podemos caracterizar os pontos críticos não-degenerados em termos do campo vetorial gradiente.

Um ponto crítico p de f é não-degenerado se, e somente se, $\text{grad} f$ é transversal a seção zero X_0 de TM em p .

De fato, seja p um ponto crítico de f e $d(\text{grad} f)_p : T_p M \rightarrow T_{(p,v)}(TM)$. Sejam $(x_1, \dots, x_m)$ coordenadas locais em torno de p para o qual $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$, com respeito a estas coordenadas e as correspondentes coordenadas locais $(x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_m)$ em torno de $(p, 0)$ em TM . Se $(x_1, \dots, x_m, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m})$ correspondem as coordenadas locais de $(p, (\text{grad} f)_p)$, então a matriz representando $d(\text{grad})_p$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore d(\text{grad} f)_p = \left(id_{m \times m} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

e a matriz da função suave $X_0 : M \rightarrow TM$ em p ,

$$d(X_0)_p : T_p M \rightarrow T_{(p,0)}(TM)$$

é

$$d(X_0)_p = (id \quad 0).$$

Pela observação 1.2.9 concluímos que, $\text{grad} f$ é transversal à seção zero X_0 de TM em p se, e somente se,

$$d(\text{grad} f)_p(T_p M) + d(X_0)_p(T_p M) = T_{(p,0)}(TM),$$

ou

$$\dim(d(\text{grad} f)_p(T_p M) + d(X_0)_p(T_p M)) = \dim(T_{(p,0)}(TM)),$$

ou

$$\dim(d(\text{grad} f)_p(T_p M)) + \dim(d(X_0)_p(T_p M)) = \dim(T_{(p,0)}(TM)).$$

Como TM é uma variedade $2m$ -dimensional, então $T_{(p,0)}(TM)$ é um espaço vetorial $2m$ -dimensional, logo $\dim(d(\text{grad} f)_p(T_p M)) + m = 2m$, donde $\dim(d(\text{grad} f)_p(T_p M)) = m$, ou seja, a matriz $d(\text{grad} f)_p$ tem posto m isto é, a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}^{m \times m}$ é não singular se, e somente se, $Hess_p(f)$ é não-singular.

O seguinte lema afirma que, existe uma carta local $\varphi^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ onde U é uma vizinhança de p em M , tal que $f \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é expressa como

$$f(y_1, \dots, y_m) = -y_1^2 - \dots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \dots + y_m^2 = \text{constante}.$$

Lema 1.2.1 (Lema de Morse [8]). *Seja f uma função suave em M , e p seja um ponto crítico não-degenerado de índice de Morse l . Então existe uma carta local φ^{-1} em p , com $y_i(p) = 0, \quad \forall i$, tal que a função f é expressa como*

$$f(y_1, \dots, y_m) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \dots + y_m^2. \quad (1.1)$$

A carta φ^{-1} que satisfaz as condições do Lema de Morse é chamada de *carta de Morse*.

Demonstração. A ideia principal é imitar o processo da diagonalização de uma forma quadrática. O processo consiste em 2 passos; para simplificar os cálculos, sejam $p = 0$ e $f(0) = 0$.

Passo 1: Mostremos que existem coordenadas locais $(y_1, \dots, y_m)$ próximas de p com $y_i(p) = 0, \forall i$, tais que

$$f(y_1, \dots, y_m) = f(p) \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm \dots \pm y_m^2. \quad (1.2)$$

Procederemos por indução finita. Dada uma vizinhança U de p , suponha que existam coordenadas locais $u_1, \dots, u_m$ sobre U , com $U_i(p) = 0, \forall i$, tal que

$$f(u_1, \dots, u_m) = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{k-1}^2 + \sum_{i,j=k}^m H_{ij}(u_1, \dots, u_m) u_i u_j, \quad (1.3)$$

onde a matriz $(H_{ij}(p))_{i,j}$, é simétrica e invertível. O caso $k = 1$ é dado pela Proposição 4.0.4 demonstrada no capítulo 4.

Queremos verificar o passo de indução. Precisamos assegurar que a matriz $(H_{ij}(p))_{i,j \geq k}$ tem uma entrada não-nula sobre a diagonal. Caso isso não seja observado, escolha $i \neq j$ tal que $H_{ij}(0) = H_{ji}(0) \neq 0$ (lembramos que $\det(H_{ij})_{i,j} \neq 0$). Substituímos u_i por $(u'_i + u'_j)$ e u_j por $(u'_i - u'_j)$. Então os coeficientes de $u_i'^2$ e $u_j'^2$ serão respectivamente $2H_{ij}$ e $-2H_{ij}$. Desta forma, obtemos um novo sistemas de coordenadas locais de tal forma que a matriz Hessiana com respeito às novas coordenadas u'_i e u'_j tenham determinante não nulo e $H_{kk} \neq 0$. Desde que $H_{kk}(0) \neq 0$, e H_{kk} é contínua, vemos que $H_{kk}(u_1, \dots, u_m)$ é não-nula em alguma vizinhança da origem. Além disso, reduzindo U se necessário, escolhemos-o tal que $\sqrt{|H_{kk}|}$ é suave em U . A ideia é imitar a diagonalização de uma forma quadrática:

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_m) &= \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{k-1}^2 + \sum_{i,j=k}^m H_{ij} u_i u_j \\ &= \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{k-1}^2 + H_{kk} u_k^2 + H_{k(k+1)} u_k u_{k+1} + \dots + \\ &\quad + H_{km} u_k u_m + H_{(k+1)k} u_{k+1} u_k + H_{(k+1)(k+1)} u_{k+1}^2 + \\ &\quad + H_{(k+1)(k+2)} u_{k+1} u_{k+2} + \dots + H_{(k+1)m} u_{k+1} u_m + \dots + H_{mm} u_m^2 \\ &= \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{k-1}^2 + H_{kk} u_k^2 + H_{k(k+1)} u_k u_{k+1} + \dots + \\ &\quad + H_{(k+1)k} u_{k+1} u_k + \sum_{i,j \geq k+1}^m H_{ij} u_i u_j \\ &= \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{k-1}^2 \pm \left[|H_{kk}| u_k^2 + 2u_k \sum_{j \geq k+1}^m H_{jk} u_j + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j \geq k+1}^m \frac{H_{jk}}{\sqrt{|H_{kk}|}} u_j \right)^2 - \left(\sum_{j \geq k+1}^m \frac{H_{jk}}{\sqrt{|H_{kk}|}} u_j \right)^2 + \sum_{i,j \geq k+1}^m H_{ij} u_i u_j \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
f(u_1, \dots, u_m) &= \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{k-1}^2 \pm \left(\sqrt{|H_{kk}|} u_k \pm \sum_{j \geq k+1}^m \frac{H_{jk}}{\sqrt{|H_{kk}|}} u_j \right)^2 \mp \\
&\mp \left(\sum_{j \geq k+1}^m \frac{H_{jk}}{\sqrt{|H_{kk}|}} u_j \right)^2 \pm \sum_{i, j \geq k+1}^m H_{ij} u_i u_j.
\end{aligned}$$

Notemos que na última igualdade utilizamos o fato da matriz $(H_{i,j}(p))_{i,j}$ ser simétrica e o sinal $\pm$ antes dos colchetes mudar dependendo se $H_{kk} < 0$ ou $H_{kk} > 0$. Fazendo as substituições:

$$v_i = \begin{cases} u_i & , \text{ se } i \neq j \\ \sqrt{|H_{kk}|} u_k \pm \sum_{j \geq k+1}^m \frac{H_{jk}}{\sqrt{|H_{kk}|}} u_j & , \text{ se } i = k \end{cases} \quad (1.5)$$

obtemos $f(v_1, \dots, v_m) = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_{k-1}^2 \pm v_k^2 + \sum_{i, j \geq k+1}^m H'_{ij}(v_1, \dots, v_m) v_i v_j$ para novos coeficientes H'_{ij} , com $i, j \geq k+1$.

A matriz Jacobiana

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right)_{i,j} (0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{|H_{kk}|} & * & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

é invertível em p pois, $\det \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right)_{i,j} (0) = \sqrt{|H_{kk}|} \neq 0$, logo pelo Teorema da Função Inversa, f é um difeomorfismo local em p , então $v_1, \dots, v_m$ é um sistema de coordenadas locais na vizinhança U de p . Segue também que $v_i(p) = 0, \quad \forall i$. Os novos coeficientes $H'_{ij}(p)$ são simétricos em $i, j \geq k+1$ porque a matriz

$$H'_{ij} = \begin{pmatrix} id & H_{ij} \\ H_{ij} & H_{ij} + C \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

onde a k -ésima linha não muda e C é uma matriz diagonal. Como p é um ponto crítico

não degenerado a matriz $(H'_{ij}(p))_{i,j}$ é invertível. Isto completa o passo de indução.

Passo 2. A forma Hessiana é representada nas coordenadas $(y_1, \dots, y_m)$ pela matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

O número de entradas negativas sobre a diagonal é igual ao número de coeficientes negativos em (1.2) que é igual ao número de autovalores negativos de $\text{Hess}_p(f)$, então l é o número de coeficientes negativos em (1.2) e f assume a forma (1.1). Por outro lado, como p é ponto crítico não-degenerado de f então

$$f'(y_1, \dots, y_m) = f'(p) = 2(-y_1^2 - \dots - y_l^2 + \dots + y_m^2) = 0 \quad (1.9)$$

se, e somente se, $(y_1, \dots, y_m) = 0$. Portanto concluímos que, $y_i(p) = 0, \forall i$. $\square$

Exemplo 1.2.10. *Queremos estudar a posição de uma superfície S (isto é, uma subvariedade 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$) com respeito ao seu plano tangente. Como S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$, S pode ser expressa localmente como o gráfico de uma função $z = f(x, y)$.*

Seja A um ponto $(a, b, f(a, b)) \in S$. O plano tangente $T_A S$ é dado pela equação

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b); \quad (1.10)$$

isto decorre

$$(x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + (z - f(a, b))(-1) = 0. \quad (1.11)$$

Então a altura $p(x, y)$ de um ponto de $T_x S$ com respeito as coordenadas x e y é dada

pela equação

$$(x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + f(a, b). \quad (1.12)$$

Estamos interessados no sinal de

$$h(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b). \quad (1.13)$$

Figura 1.3: Plano tangente à S em A .

Assumamos que

$$rt - s^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2 \neq 0. \quad (1.14)$$

Desde que h e f tem as mesma segunda derivada e

$$Dh(a, b) = \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) = 0, \quad (1.15)$$

então segue do Lema de Morse que existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo (a, b) e coordenadas locais $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ tal que $h|_U = \pm x^2 \pm y^2$.

- Se o índice é 0; temos $h|_U = x^2 + y^2$: S vive acima do plano tangente, e so intercepta-o no ponto A . Vide Figura 1.4.
- Se o índice é 2; temos $h|_U = -x^2 - y^2$: S vive abaixo do plano tangente e somente

o toca em A . Vide Figura 1.5.

- Se o índice é 1; temos $h|_U = x^2 - y^2$: A superfície intercepta seu plano tangente ao longo das curvas $x = y$ e $x = -y$. Elas vivem estritamente acima do plano em duas regiões limitadas por estas curvas, e estritamente abaixo das outras duas curvas. Vide Figura 1.6.

Figura 1.4: O gráfico de $z = x^2 + y^2$.

Figura 1.5: O gráfico de $z = -x^2 - y^2$.

Figura 1.6: O gráfico de $z = x^2 - y^2$.

Corolário 1.2.2 ([8]). *Os pontos críticos não-degenerados de uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ são isolados. Se M é compacta, existe somente um número finito de pontos críticos não-degenerados.*

Demonstração. Seja $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de f . Pelo Lema de Morse, existe uma vizinhança U de p e coordenadas locais $y_1, \dots, y_m$, tal que $y_i(p) = 0$, $\forall i$, logo para quaisquer $q \in U - \{p\}$, $y_i(q) \neq 0$. Portanto p é um ponto crítico isolado. Como p foi escolhido arbitrariamente, segue que todos os pontos críticos não-degenerados de f são isolados.

Sendo M superfície compacta e sabendo que os pontos críticos de f são isolados, defina $\mathfrak{S}$ uma cobertura por conjuntos abertos de M dada por $\mathfrak{S} = \{B(p, \epsilon) : p \in M, \epsilon > 0\}$, onde $B(p, \epsilon)$ contém no máximo um ponto crítico não-degenerado de f .

Sendo M compacta, existe uma subcobertura finita de $\mathfrak{S}$. Disso segue que o número de pontos críticos não-degenerados de f é finito. $\square$

Exemplo 1.2.11. (i) Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Inicialmente procuremos os possíveis pontos críticos de f : (x, y) é um ponto crítico de f , se e só se,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y},$$

logo $x = y = 0$. Portanto a origem é o único ponto crítico de f . Além disso

$$(Hess_{(0,0)}(f)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal e 2 e -2 são seus únicos autovalores. Portanto a matriz $(Hess_{(0,0)}(f))$ é não-degenerada. Logo a origem é o único ponto crítico não-degenerado de f . Vide Figura 1.7 (a).

Figura 1.7: Pontos críticos de funções

(ii) Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$. Vide Figura 1.7 (b).

Os pontos críticos de f são dados por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0,$$

isto é $x = y = 0$. Portanto a origem é o único ponto crítico de f e isolado. A matriz

$$(Hess_{(0,0)}(f)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tem como autovalores 2 e 0. Donde segue que a matriz Hessiana é degenerada. Logo a origem é ponto crítico degenerado de f .

(iii) Seja $f(x, y) = x^2 y^2$. Vide Figura 1.7 (c).

A origem é ponto crítico de f . De fato, $(grad f) = (2xy^2, 2x^2y) = 0$, logo $x = 0$ ou $y = 0$ são retas de pontos críticos de f . Isto decorre que a origem é um ponto crítico

não-isolado de f . Além disso

$$\det(Hess_{(x,y)}f) = \det \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix} = -12x^2y^2,$$

portanto, para $x = 0$ ou $y = 0$, o $\det(Hess_{(x,y)}f) = 0$. Então a origem é ponto crítico degenerado, não-isolado.

Definição 1.2.12. Uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse se, e somente se, todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

1.3 Existência de Funções de Morse

Por uma variedade fechada, entenderemos uma variedade compacta sem bordo.

Teorema 1.3.1 ([17]). Seja M uma variedade m -dimensional fechada e seja $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida em M . Então existe uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrariamente próxima a $g : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Como existem inúmeras funções suaves em M este teorema implica que também existem inúmeras funções de Morse definidas em M . Por exemplo, uma função constante é suave então existe uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ “próxima” dela. Naturalmente f não é uma função constante ($Hess_p f$ seria singular).

Nesse teorema “arbitrariamente próxima a g ” significa “arbitrariamente C^2 -próxima”. Explicaremos o que isso significa.

Precisaremos dos seguintes dois lemas para a prova do Teorema 1.3.1.

Lema 1.3.2 ([17]). Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano, U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, contendo o ponto crítico isolado p_0 de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, função suave em U . Então existem números reais $a_1, a_2, \dots, a_m$ tal que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m) \tag{1.16}$$

é uma função de Morse em U . Além disso, podemos escolher $a_1, a_2, \dots, a_m$ de tal forma que os seus valores absolutos sejam tão pequenos quanto desejamos.

Seja U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^m$ e consideremos a função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ que envia um ponto $(x_1, \dots, x_m)$ de U ao ponto $(y_1, \dots, y_m)$ de $\mathbb{R}^m$ onde cada componente y_i tem a expressão $y_i = h_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, m$ como uma função de $(x_1, \dots, x_m)$. Por conveniência escrevemos a representação coordenada de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ como um vetor coluna

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Então definimos a matriz Jacobiana de h no ponto $p_0 \in U$ como a matriz $m \times m$ dada por

$$J_h(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(p_0) \\ & \ddots & \\ \vdots & \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Definição 1.3.1. Um ponto p_0 de U tal que $\det J_h(p_0) = 0$ é chamado de ponto crítico da função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. A imagem $h(p_0)$ em $\mathbb{R}^m$, de um ponto crítico p_0 de h , é chamado de valor crítico de h .

Note que esta definição faz sentido apenas quando $\dim U = \dim \mathbb{R}^m$. Para funções entre variedades de dimensões diferentes é preciso definir pontos críticos de maneira diferente.

Teorema 1.3.3 (Teorema de Sard,[15]). O conjunto dos valores críticos de uma função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tem medida nula.

Aqui (veja [15] para uma definição precisa de conjunto de medida nula) mencionaremos apenas que ter “medida nula” quando $m = 2$ é basicamente o mesmo que ter área nula, e ter “medida nula” quando $m = 3$ é o mesmo que ter volume nulo. Em poucas palavras, o Teorema de Sard diz que “não existem muitos valores críticos da função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ”.

Em particular, sempre há um ponto o qual não é um valor crítico de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ para toda vizinhança de um ponto de $\mathbb{R}^m$. De fato, suponhamos pelo absurdo, que exista V uma vizinhança de $q \in \mathbb{R}^m$ tal que para todo $p \in V$ com $p \neq q$, p é um valor crítico de h , então existe $\delta > 0$ tal que $B_q(\delta) \subset V$. Logo para todo $r \in B_q(\delta)$, r é um valor crítico de h , portanto $B_q(\delta) \subset C$ onde C é o conjunto dos pontos críticos de h . Como C tem medida nula pelo Teorema de Sard, concluímos que $B_q(\delta)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$, o que é absurdo.

Agora estamos preparados para demonstrar o Lema 1.3.2.

Demonstração do Lema 1.3.2: O nosso objetivo é escolher $a_1, a_2, \dots, a_m$ adequados de modo que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) - (a_1 x_1 + a_2 x_2, \dots, a_m x_m) \quad (1.19)$$

seja uma função de Morse.

Primeiro definimos uma função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

onde a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada. O Jacobiano de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto p_0 é dado por

$$J_h(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p_0) \\ & \ddots & \\ \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p_0) \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

o qual é a matriz Hessiana $Hess_{p_0}(f)$. Logo p_0 é um ponto crítico da função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ se, e somente se, $\det Hess_{p_0}(f) = 0$.

Escolha um ponto de $\mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

o qual não é um valor crítico de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pelo Teorema de Sard, haverão muitos destes pontos, e portanto podemos escolher $a_1, a_2, \dots, a_m$ com valores absolutos suficientemente pequenos. De fato, como p_0 é um ponto crítico da h , $h(p_0)$ é um valor crítico de h . Segue do Teorema de Sard que existe uma vizinhança de $h(p_0)$ em $\mathbb{R}^m$ tal que $h(p) \neq h(p_0)$ e $h(p)$ é não valor crítico de h .

Como h é uma função suave, dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\epsilon > 0$ tal que se $p \in B_{p_0}(\epsilon) \subset U$ então $h(p) \in B_{h(p_0)}(\delta)$. Logo, se $\|p - p_0\| < \epsilon$ então $\|h(p) - h(p_0)\| < \delta$ (como p_0 é ponto crítico de f então $h(p_0) = 0$), portanto $\|h(p)\| < \delta$. Logo se

$$h(p) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (1.23)$$

temos $|a_i| < \delta$, para todo $i = 1, \dots, m$. Tais a_i 's são os desejados.

Agora mostremos que

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m) \quad (1.24)$$

é uma função de Morse em U . Um ponto p_0 é um ponto crítico da função $\tilde{f}$ se e só se,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) - a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.25)$$

Ou seja,

$$h(p_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Como os a'_i s foram escolhidos tal que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

não é um valor crítico de h , p_0 não é um ponto crítico de $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, e portanto, temos $\det \text{Hess}_{p_0}(f) \neq 0$.

Como f e $\tilde{f}$ diferem somente por uma função linear, suas Hessianas coincidem

$$\text{Hess}_{p_0}(f) = \text{Hess}_{p_0}(\tilde{f}), \quad (1.27)$$

logo, $\det \text{Hess}_{p_0}(f) \neq 0$ se, e somente se, $\det \text{Hess}_{p_0}(\tilde{f}) \neq 0$, de modo que p_0 é um ponto crítico não-degenerado de $\tilde{f}$. Isto completa a prova do lema. $\square$

Antes de provarmos o Teorema 1.3.1, esclareceremos o que significa “duas funções estarem próximas” ou mais precisamente, quando duas funções $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são “ C^2 -próximas”.

Dizemos que um conjunto aberto U é uma vizinhança coordenada quando U tem um sistema de coordenadas locais $(x_1, \dots, x_m)$ definido nele. Quando falamos de uma vizinhança coordenada U , assumimos que um sistema de coordenadas foi especificado.

Primeiro definimos quando f e g são C^2 -próximas sobre um conjunto compacto K (por exemplo, um m -disco de um certo raio) contido numa vizinhança coordenada

Definição 1.3.2. *Seja $\epsilon > 0$ um número positivo, f é uma (C^2, ϵ) -aproximação de g em K se as seguintes três desigualdades são dadas para todo p em K :*

$$\begin{cases} |f(p) - g(p)| < \epsilon, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right| < \epsilon, & i = 1, \dots, m \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| < \epsilon, & i, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.28)$$

A fim de definir uma C^2 -aproximação sobre uma variedade M , cobrimos M com um número finito de vizinhanças coordenadas. Para uma variedade em geral podemos não ser

capazes de encontrar cobertura finita porém isto sempre é possível se M for compacta. Agora temos a oportunidade de dar uma definição formal de compacidade.

Definição 1.3.3. *Um espaço topológico X é compacto se dados infinitos abertos $U_\alpha, U_\beta, \dots, U_\gamma, \dots$ tal que*

$$X = U_\alpha \cup U_\beta \cup \dots \cup U_\gamma \cup \dots \quad (1.29)$$

existe um número finito de conjuntos abertos $U_\alpha, U_\beta, \dots, U_\gamma$ os quais também cobrem X :

$$X = U_\alpha \cup U_\beta \cup \dots \cup U_\gamma. \quad (1.30)$$

Em poucas palavras, X é compacto se toda cobertura aberta admite subcobertura finita.

Segue do Teorema de Heine-Borel que todo conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^m$ é compacto. Por exemplo, o m -disco D^m e a $(m-1)$ -esfera S^{m-1} são ambos conjuntos compactos.

Certamente podemos cobrir qualquer variedade M com um número infinito de vizinhanças coordenadas. Se assumimos que M é compacta, então podemos selecionar um número finito de vizinhanças coordenadas $U_1, U_2, \dots, U_k$ dentre elas tal que

$$M = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k. \quad (1.31)$$

Agora voltemos à definição de C^2 -proximidade. Cobrimos M com um número finito de vizinhanças coordenadas $U_1, U_2, \dots, U_k$. Além disso, é possível escolhermos para cada $i = 1, 2, \dots, k$ conjuntos compactos K_i em U_i tal que M é a união dos K_i 's:

$$M = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k. \quad (1.32)$$

Observação 1.3.4. *Escolhemos tais K_i 's como segue. Primeiro consideramos todas as possíveis vizinhanças coordenadas U em M e todos os possíveis pares (U, D) onde D percorre todos os possíveis m -discos contidos em U . Os interiores $\text{int}(D)$ (os quais são abertos) destes discos D cobrem M , isto é, $M = \cup_{i=1}^k \text{int}(D_i)$. De fato, a inclusão $\cup_{i=1}^k \text{int}(D_i) \subset M$ é óbvia pois como $\text{int}(D_i) \subset D_i \subset U_i$, $\forall i = 1, \dots, k$ então segue que*

$$\cup_{i=1}^k \text{int}(D_i) \subset \cup_{i=1}^k U_i \subset M.$$

Para mostrarmos que $M \subset \cup_{i=1}^k \text{int}(D_i)$ prosseguimos como segue.

Seja $x \in M$. Como $M \subset \cup_{i=1}^k U_i$ então existe algum $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in U_i$. Sendo U_i aberto, existe um conjunto aberto B que vamos considerar como uma m -bola, tal que $x \in B \subset U_i$. Ora, se D_i percorre todos os possíveis m -discos contidos em U_i então $B \subset D_i$ pois $B \subset \overline{B} \subset D_i$, onde $\overline{B}$ é o m -disco. Segue da definição do interior de um conjunto que $B \subset \text{int}(D_i)$ e como $x \in B$ então temos que $x \in \text{int}(D_i)$.

Como x foi escolhido arbitrário, concluímos que $M \subset \text{int}(D_i)$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Portanto $M \subset \cup_{i=1}^k \text{int}(D_i)$, e como isto concluímos a igualdade desejada.

Dada M compacta, podemos cobri-la com um número finito de abertos $\text{int}(D_1), \text{int}(D_2), \dots, \text{int}(D_k)$. Então as vizinhanças coordenadas U'_i s junto com o respectivo D_i cobrem M . Tomando $D_l = K_l$, vemos que os conjuntos compactos $K_1, K_2, \dots, K_k$ contidos em $U_1, U_2, \dots, U_k$ também cobrem M .

De agora em diante, sempre que mencionarmos (C^2, ϵ) -aproximação, estaremos assumindo que dada uma cobertura finita $U_1 \cup \dots \cup U_j$ de M existe uma cobertura finita por compactos $K_1 \cup \dots \cup K_j$ com $K_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, j$.

Definição 1.3.5. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma (C^2, ϵ) -aproximação da função $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ se f é uma (C^2, ϵ) -aproximação de g sobre cada K_l , $l = 1, 2, \dots, j$ da cobertura de M por compactos.

O próximo Lema nos mostra que o conjunto das funções de Morse é um conjunto aberto.

Lema 1.3.4. Seja M uma variedade m -dimensional e $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Existe $\epsilon > 0$ tal que se (f, g) são (C^2, ϵ) -próximas então f é de Morse.

Demonstração. Defina o funcional linear contínuo

$$h(g) = \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \dots + \left| \frac{\partial g}{\partial x_m} \right| + \left| \det \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| \quad (1.33)$$

Note que se g é de Morse então $h(g) > 0$, logo existe $\epsilon > 0$ tal que se (f, g) são (C^2, ϵ) -próximas, isto é, as condições da definição (1.3.2) são satisfeitas. Então $h(f) > 0$,

ou seja, f é de Morse. Veja que $h(g) > 0$ implica que existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $f \in B_g(\epsilon)$ então $h(f) > 0$ pois h é um funcional contínuo. $\square$

Lema 1.3.5 ([19]). *Seja U uma vizinhança coordenada e K um conjunto compacto em U . Então existe uma função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida em U e satisfazendo as seguintes propriedades*

- (i.) $0 \leq h \leq 1$;
- (ii.) h assume valor 1 em alguma vizinhança aberta V de K ;
- (iii.) h assume valor 0 fora de algum conjunto compacto L com $K \subset V \subset L \subset U$.

Vide Figura 1.8.

Figura 1.8: A função passo com respeito a (U, K)

Demonstração. Afirmação 1. Existe função C^∞ $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, a qual vale 1 sobre o cubo $C(\frac{1}{2}) = \prod_{i=1}^m \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, é positiva no interior do cubo $C(1) = \prod_{i=1}^m [-1, 1]$ e zero fora dele.

Prova da Afirmação 1: Inicialmente faremos a prova no caso em que $m = 1$, então nas condições da Afirmação 1 temos que mostrar que existe função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a qual é 1 sobre o intervalo fechado $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, é positiva no interior do intervalo fechado $[-1, 1]$ e zero fora de $[-1, 1]$.

Defina

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & , \text{ se } t > 0 \\ 0 & , \text{ se } t \leq 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Então f é uma função C^∞ e positiva para todo t .

Seja

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}. \quad (1.35)$$

Segue que $g(t)$ é função C^∞

$$g(t) = 0, \text{ se } t \leq 0;$$

$$g(t) = 1, \text{ se } t \geq 0;$$

e estritamente crescente para $0 < t < 1$. De fato

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{f'(t)[f(t) + f(1-t)] - [f'(t) + f'(1-t)]f(t)}{[f(t) + f(1-t)]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{t^2}\right)e^{-\frac{1}{t}}\left[e^{-\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{1-t}}\right] - \left[\left(\frac{1}{t^2}\right)e^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)e^{-\frac{1}{1-t}}\right]e^{-\frac{1}{t}}}{\left[e^{-\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{1-t}}\right]^2} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(1-t)^2}\right]e^{-\frac{1}{1-t}} \cdot e^{-\frac{1}{t}}}{\left[e^{-\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{1-t}}\right]^2} > 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Observação 1.3.6. Note que como $0 < t < 1$, $1 - t > 0$, logo $e^{-\frac{1}{1-t}} > 0$ e $e^{-\frac{1}{t}} > 0$, além disso $\left(\frac{1}{1-t}\right)^2 < \left(\frac{1}{t}\right)^2$.

O gráfico da função g é como a Figura 1.9.

Figura 1.9: O gráfico da função g

Seja $h(t) = g(2t+2)g(-2t+2)$. Então h é uma função C^∞ e se $|t| \leq \frac{1}{2}$, temos $h(t) = 1$ pois se $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, então $-1 \leq 2t \leq 1$ e $1 \leq 2t+2 \leq 3$; análogamente, $1 \leq -2t+2 \leq 3$, logo $g(2t+2) = 1 = g(-2t+2)$.

Se $|t| \geq 1$, temos $h(t) = 0$ pois se $1 \leq t$ então $4 \leq 2t+2$ e $-2t+2 \leq 0$, logo $g(2t+2) = 1$ e $g(-2t+2) = 0$; ou se $t \leq -1$ então $2t+2 \leq 0$ logo $g(2t+2) = 0$ e finalmente, se $\frac{1}{2} < t < 1$ $h(t) > 0$ pois $3 < 2t+2 < 4$ e $0 < -2t+2 < 1$ logo $g(2t+2) = 1$

e $g(-2t + 2) > 0$. De maneira analoga vemos que $h(t) > 0$ se $-1 < t < -\frac{1}{2}$. O gráfico da função h é como se mostra na Figura 1.10 e h satisfaz as condições dadas inicialmente.

Figura 1.10: O gráfico da função h

Para considerar o caso geral, tomamos a função $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = h(x_1) \cdots h(x_m) \quad (1.37)$$

e φ satisfaz as condições na *Afirmção 1*.

Afirmção 2. Em $\mathbb{R}^m$, todo cubo $C = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ é difeomorfo ao cubo $\tilde{C} = \prod_{i=1}^m [0, 1]$, onde a_i, b_i são números reais não todos nulos.

Prova da Afirmção 2. Inicialmente provaremos o caso $m = 1$, isto é, o intervalo fechado $[a, b]$ é difeomorfo ao intervalo fechado $[0, 1]$.

De fato, consideremos

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow [a, b] \\ t &\longmapsto (1 - t)a + tb \end{aligned}$$

γ está bem definida e induz um difeomorfismo de $[0, 1]$ em $[a, b]$. Para o caso geral considere a função

$$\begin{aligned} \Gamma : C &\longrightarrow \tilde{C} \\ (t_1, \dots, t_m) &\longmapsto \gamma(t_1) \cdots \gamma(t_m) \end{aligned}$$

Note que Γ induz um difeomorfismo de C em $\tilde{C}$ e com isto completamos a prova da *Afirmção 2*.

Em particular, segue-se que o cubo $\tilde{C}$ é difeomorfo ao cubo $C(\frac{1}{2}) = \prod_{i=1}^m \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ em $\mathbb{R}^m$.

Afirmção 3. [Generalização da Afirmção 1] Seja W um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ e $C \subset W$ um subconjunto compacto de W . Então existe uma função C^∞ , $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que ψ é positiva em C e é zero numa vizinhança do complementar de W . Além disso, podemos encontrar vizinhança aberta B de C na qual ψ assume valor 1 e zero fora de algum conjunto compacto $D \subset W$ contendo B .

Prova da Afirmção 3. Seja C um conjunto compacto. Consideremos em particular uma cobertura de C por cubos abertos de $\mathbb{R}^m$, digamos $\{B_j\}_{j \in \Lambda}$. Como C é compacto podemos extrair uma subcobertura finita tal que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^k B_j. \quad (1.38)$$

Para cada $j = 1, \dots, k$, existe cubo compacto A_j de B_j de modo que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^k A_j. \quad (1.39)$$

Observação 1.3.7. Escolhemos cada A_j como segue. Primeiro consideramos D_j percorrendo todos os possíveis cubos contidos em B_j . Então $\{\text{int}(D_j)\}_j$ cobrem C e como C é compacto existe um número finito deles: $\text{int}(D_1), \dots, \text{int}(D_k)$ que cobrem C .

Considerando $A_j = D_j$ vemos que para cada $j = 1, \dots, k$, $A_j \subset B_j$, A_j é compacto e a união deles cobrem C .

Pela Afirmção 2, podemos supor que para cada $j = 1, \dots, k$ A_j é difeomorfo a $C_j(1)$, e portanto segue da Afirmção 1 que existe uma função $\varphi_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ que vale 1 sobre o cubo $C_j(\frac{1}{2}) = \prod_{i=1}^m \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, é positiva no interior do cubo A_j e vale zero fora de $C_j(1)$. Note que isto é válido para cada $j = 1, \dots, k$.

Agora consideremos $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(a) = \begin{cases} \varphi_j(a) & , \text{ se } a \in A_j \\ 0 & , \text{ caso contrario .} \end{cases}$$

Note que $\varphi_i(a) = \varphi_j(a)$, se $a \in A_i \cap A_j$, logo ψ está bem definida, é positiva em C e é zero numa vizinhança do complementar de W . Tomando $B = \bigcup_{j=1}^k C_j$ ($\frac{1}{2}$) e $D = \bigcup_{j=1}^k A_j$ obtemos o resultado desejado.

Demonstração do Lema 1.3.5: Seja U uma vizinhança coordenada e $\phi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U$ um difeomorfismo definido em W , onde W é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Como $K \subset U$ é um subconjunto compacto e ϕ é um difeomorfismo temos $\phi^{-1}(K) \subset \phi^{-1}(U) = W$, como $\phi^{-1}(K)$ é subconjunto compacto de W (em $\mathbb{R}^m$) segue da *Afirmção 3* que existe função C^∞ , $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tal que ψ é positiva em $\phi^{-1}(W)$ e vale zero numa vizinhança do complementar de $\phi^{-1}(W)$. Além disso, podemos encontrar vizinhança aberta B de $\phi^{-1}(W)$ na qual ψ assume o valor 1 e nula fora de algum conjunto compacto $D \subset \phi^{-1}(W)$ contendo B . Definindo $h = \psi \circ \phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ concluímos a prova do Lema. $\square$

Finalmente estamos prontos para provar o Teorema de Existência para funções de Morse.

Demonstração do Teorema 1.3.1. Desde que necessitamos (C^2, ϵ) -aproximações, escolhemos uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas U_l ($l = 1, \dots, k$) assim como uma cobertura de M por conjuntos compactos K_l em U_l ($l = 1, \dots, k$). Manteremos estas coberturas fixas.

Chame a função dada $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 . A ideia da prova é construir funções f_l indutivamente com respeito a l , começando com f_0 , de tal maneira que f_l não tenha pontos críticos degenerados em $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$, $l = 1, \dots, k$. Quando atingirmos o nível $l = k$, teremos a função de Morse desejada f_k (porque $M = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k$).

Denotaremos por C_l o conjunto $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$ por simplicidade. O conjunto C_l é compacto desde que é a união de um número finito de conjuntos compactos.

Fixamos inicialmente $C_0 = \emptyset$. Então $g = f_0$ não tem pontos críticos degenerados em C_0 . Suponha, como hipótese de indução, que construímos a função $f_{l-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ a qual não tem pontos críticos degenerados em C_{l-1} . Construiremos f_l usando f_{l-1} .

Dada a vizinhança coordenada U_l e seu respectivo conjunto compacto K_l , seja $(x_1, \dots, x_m)$ o sistema de coordenadas escolhido para U_l . Pelo Lema 1.3.2, existem núme-

ros reais $a_1, a_2, \dots, a_m$ com valores absolutos suficientemente pequenos tais que

$$f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) \quad (1.40)$$

é uma função de Morse em U_l . Devemos modificar esta função de tal forma que a expressão $a_1x_1 + \dots + a_mx_m$ faça sentido fora da vizinhança coordenada U_l . Para isso usamos o Lema 1.3.5 à vizinhança coordenada U_l e seu conjunto compacto K_l para construir a função passo $h_l : U_l \rightarrow \mathbb{R}$ com respeito a (U_l, K_l) .

Construimos a função $f_l : M \rightarrow \mathbb{R}$, como segue

$$f_l(x_1, \dots, x_m) = f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m)h_l(x_1, \dots, x_m). \quad (1.41)$$

Note que segue da h_l que $f_l(x_1, \dots, x_m) = f_{l-1}(x_1, \dots, x_m)$, fora de L_l , onde L_l é o conjunto compacto em U_l tal que h_l assume valor zero fora dele.

Na igualdade acima, $h_l(x_1, \dots, x_m) = 0$ na interseção dos dois conjuntos (dentro de U_l e fora de L_l , e este “fora de” é aberto em M), desta forma estas duas definições concordam sobre eles para definir uma função suave em M em alguma vizinhança de algum conjunto compacto K_l , onde nós temos $h_l(x_1, \dots, x_m) = 1$. Então f_l é uma função de Morse em K_l e não tem pontos críticos degenerados nele.

Em seguida conferimos que podemos tomar f_l como uma (C^2, ϵ) -aproximação de f_{l-1} . Começamos nosso cálculo em U_l :

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_{l-1}(p) - f_l(p)| = |(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m)| h_l(p), \\ \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(p) \right| = \left| a_i h_l(p) + (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) \right|, \quad i = 1, \dots, m \\ \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| \\ = \left| a_i \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(p) + a_j \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) + (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial^2 h_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right|; \quad i, j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (1.42)$$

onde $p = (x_1, \dots, x_m)$. Desde que a função h_l satisfaz $0 \leq h_l \leq 1$ e é zero fora do conjunto compacto L_l , o valor absoluto das primeiras e segundas derivadas parciais não podem exceder um certo valor positivo (o Teorema do Valor Máximo, ver [25]); portanto, podemos fazer o lado direito de (1.42) arbitrariamente pequeno para tomar os valores absolutos de $a_1, a_2, \dots, a_m$ suficientemente pequeno. Em particular, f_l será (C^2, ϵ) -próxima a f_{l-1} no

conjunto compacto K_l .

Para aproximar f_l nos outros K_j 's diferentes de K_l , usamos o sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_m)$ da vizinhança coordenada U_j de K_j e calculamos as diferenças entre as respectivas derivadas de primeira e segunda ordem de f_l e f_{l-1} . Calculemos estas diferenças em K_j . Para isso note que $f_l = f_{l-1}$ fora do conjunto compacto L_l , assim tudo o que precisamos é estimar a diferença em $K_j \cap L_l$, o qual está contida na interseção $U_j \cap U_l$ das vizinhanças coordenadas U_j e U_l . A diferença sobre $U_j \cap U_l$ deve ser expressa pelo lado direito de (1.42) com uma transformação de Jacobi apropriada entre $(x_1, \dots, x_m)$ e $(y_1, \dots, y_m)$. Pelo Teorema do Valor Máximo, os valores absolutos de cada componente do Jacobiano sobre o conjunto compacto $K_j \cap L_l$ não pode exceder um certo valor.

Consequentemente, se tomamos os valores absolutos de $a_1, a_2, \dots, a_m$ suficientemente pequenos, então o lado direito de (1.42) sobre $K_j \cap L_l$ pode ser feito tão pequeno como desejamos. Deste modo, lembrando que não existe diferença entre f_{l-1} e f_l fora de L_l , concluímos que f_l é (C^2, ϵ) -próxima a f_{l-1} , para isso basta tomarmos os valores absolutos de $a_1, a_2, \dots, a_m$ suficientemente pequenos.

Ja que podemos repetir o processo acima para cada $j = 1, \dots, k$. Segue da definição (1.3.5) que podemos de fato definir a função f_l (C^2, ϵ) -aproximação de f_{l-1} para algum $\epsilon > 0$.

Pela hipótese indutiva, f_{l-1} não tem pontos críticos degenerados em $C_{l-1} = K_1 \cup \dots \cup K_{l-1}$. Pelo Lema 1.3.4, se f_l é (C^2, ϵ) -próxima de f_{l-1} para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, então f_l não tem pontos crítico degenerados em C_{l-1} . Além disso, desde que certamente fizemos que f_l não tem pontos críticos degenerados em K_l , segue que f_l não tem pontos crítico degenerados em $C_{l-1} \cup K_l = C_l$. Agora procedemos indutivamente o processo para $l = 1, \dots, k$. A última f_k é uma função a qual não possui pontos críticos degenerados em $C_k = M$, isto é, f_k é uma função de Morse em M . Além disso, tomando $\epsilon > 0$ em cada etapa da indução o suficientemente pequeno, f_k será (C^2, ϵ') -próxima à função dada g para algum $\epsilon' > 0$. Isto conclui a prova do Teorema. $\square$

1.4 O fluxo gradiente

Seja f uma função de classe C^1 . Como vimos um ponto $p \in M$ é dito *ponto regular* de f se não é um ponto crítico, logo diremos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *valor regular* de f se a sua imagem inversa $f^{-1}(a)$ não contém pontos críticos. Para todo valor regular a de f , o conjunto de nível $f^{-1}(a)$ é uma subvariedade $(m - 1)$ -dimensional de M [8].

Teorema 1.4.1 ([8],[14]). *Seja M uma variedade suave e X um campo vetorial C^1 em M . Então para cada $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $(-\epsilon, \epsilon)$ de 0 e uma curva suave $\phi_p : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ satisfazendo:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_p(t) = X_{\phi_p(t)} \\ \phi_p(0) = p \end{cases} \quad (1.43)$$

A solução ϕ_p é única no sentido de que se $\psi_p : (-\epsilon', \epsilon') \rightarrow M$ satisfaz (1.43) então $\phi_p(t) = \psi_p(t)$ sobre um intervalo comum de definição. A solução $\phi_p(t)$ depende continuamente da condição inicial p .

Além disso existe um intervalo maximal aberto I_p sobre o qual a solução ϕ_p está definida. A aplicação $\phi : \{(t, p) : p \in M, t \in I_p\} \rightarrow M$ é um fluxo local, isto é, $\phi(0, p) = p$ e $\phi(t_1 + t_2, p) = \phi(t_1, \phi(t_2, p))$, onde $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I_p$ para algum p . Se M é compacta então o fluxo é definido em $\mathbb{R} \times M$.

Segue do Teorema 1.4.1 que o sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_x(t) = -(\text{grad}f)(\phi_x(t)) = X(\phi_x(t)) \\ \phi_x(0) = x \end{cases} \quad (1.44)$$

define um fluxo local, dado por $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$ em alguma vizinhança aberta U de x . Este fluxo é denominado de *fluxo gradiente*.

Nessas condições os pontos críticos da f são os zeros do vetor gradiente e o índice de Morse é $(-1)^l$, onde l é o índice de Morse do ponto crítico. Além disso, todo ponto crítico p do fluxo gradiente é hiperbólico ([8]).

De fato, seja p um ponto crítico do fluxo gradiente, então $\phi_p(t) = p$ para todo t , logo $X(p) = -\text{grad}f\phi_p(0) = 0$, isto é, p é um ponto crítico de f e como f é uma função de

Morse segue que p é ponto crítico não-degenerado. Além disso, a matriz que representa a parte linear do campo vetorial gradiente é dada por

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{pmatrix}$$

isto é,

$$DX(p) = (Hess_p(f)).$$

Se p é ponto crítico não-degenerado de f segue que $\det Hess_p(f) \neq 0$, logo p é um ponto hiperbólico do campo gradiente.

Como f é uma função de Morse, todos os autovalores da matriz $(Hess_p(f))$ são reais e as singularidades de f são do tipo sela ou centro. Por exemplo no caso do plano ($m = 2$), as curvas de nível de f definidas na vizinhança de um ponto crítico não-degenerado se comportam como na Figuras 1.11.

Figura 1.11: (a) Ponto sela. (b) Ponto de máximo ou de mínimo.

Definição 1.4.1 ([8]). *Seja ϕ^t o fluxo sobre uma variedade M . Definimos os conjuntos ω -limite e α -limite de um ponto $x \in M$ por:*

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \{y \in M : \exists \ t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi^{t_n}(x) \rightarrow y\}, \\ \alpha(x) &= \{y \in M : \exists \ t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } \phi^{t_n}(x) \rightarrow y\}. \end{aligned}$$

Dizemos que um conjunto A é invariante pelo fluxo $\phi_t(A)$ se $\phi_t(A) \subset A$, $\forall t$. Em [8] encontramos propriedades topológicas básicas dos conjuntos ω -limite e α -limite.

Teorema 1.4.2. *Seja ϕ^t o fluxo sobre uma variedade M . Então:*

$$(i) \omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} cl \left(\bigcup_{t \geq T} \{\phi^t(x)\} \right) \text{ e } \alpha(x) = \bigcap_{T \leq 0} cl \left(\bigcup_{t \leq T} \{\phi^t(x)\} \right);$$

(ii) *Se M é uma variedade compacta, então $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são não-vazios, compactos, conexos e invariantes sobre o fluxo.*

A partir das hipóteses pode-se demonstrar este teorema como segue.

Demonstração. (i) Seja $x \in M$. Pela definição temos que $y \in \omega(x)$ se, e somente se, $y \in M$ e $\exists t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y$. Como $t_n \rightarrow +\infty$ segue que $\forall T \geq 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m_0$ então $t_n \geq T$. Além disso, como $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y$ segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m_1$, $d(\phi^{t_n}(x), y) < \epsilon$. Portanto, tomando $n_0 = \max\{m_0, m_1\}$ segue que para todo $T \geq 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $t_n \geq T$ e $d(\phi^{t_n}(x), y) < \epsilon$. Ou seja

$$y \in \bigcap_{T \geq 0} cl \left(\bigcup_{t \geq T} \{\phi^t(x)\} \right).$$

Como y é arbitrário, segue que

$$\omega(x) \subseteq \bigcap_{T \geq 0} cl \left(\bigcup_{t \geq T} \{\phi^t(x)\} \right).$$

A inclusão contrária é baseada em argumentos análogos, portanto fica mostrada a primeira igualdade.

Prova semelhante se aplica para $\alpha(x)$ lembrando que se $y \in \alpha(x)$ então $y \in M$ e existe $t_n \rightarrow -\infty$ tal que $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y$.

(ii.) Primeiramente vamos mostrar que se M compacta então $\omega(x) \neq \emptyset$. Seja $t_n = n \in \mathbb{N}$, como M é uma variedade compacta então o fluxo ϕ^t está definido em $\mathbb{R} \times M$, logo $\{\phi^{t_n}(x)\} \subseteq M$ e existe uma subsequência de $\{\phi^{t_n}(x)\}$, digamos $\{\phi^{t_{n_k}}(x)\}$, que converge para $y \in M$. Ou seja

$$t_{n_k} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n_k \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \{\phi^{t_{n_k}}(x)\} \rightarrow y.$$

Portanto, segue da definição de ω -limite que $y \in \omega(x)$ e $\omega(x) \neq \emptyset$.

Além disso, $\omega(x)$ é um conjunto compacto. De fato segue da parte (i), que

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} cl \left(\bigcup_{t \geq T} \{\phi^t(x)\} \right).$$

Logo $\omega(x)$ é a interseção de subconjuntos fechados de M , portanto $\omega(x)$ é um conjunto fechado em M . Como M é compacta, $\omega(x)$ é um conjunto compacto de M .

E ainda, $\omega(x)$ é invariante pelo fluxo, isto é, mostremos que $\phi^t(\omega(x)) = \omega(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $y \in \omega(x)$ e $\phi : \{(t, y) : y \in \omega(x), t \in \mathbb{R}\} \rightarrow M$ o fluxo passando pelo ponto y . Seja $y_1 = \phi(t_0, y) := \phi(t_0)$, mostremos que $y_1 \in \omega(x)$.

Como $y \in \omega(x)$, então existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow +\infty$ e $\phi(t_n, x) = \phi^{t_n}(x) \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Como ϕ é uma função contínua segue que,

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi(t_0, y) = \phi \left(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t_n}(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_0, \phi^{t_n}(x)) \quad (\text{Teor. da Convergência Uniforme}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_0 + t_n, x) \end{aligned}$$

Tomando $\{s_n\} = \{t_0 + t_n\}$ temos que $s_n \rightarrow \infty$ e $\phi(s_n, x) \rightarrow y_1$. Desta forma concluímos que $y_1 \in \omega(x)$ e $\omega(x) \subseteq \phi^t(\omega(x))$. A inclusão contrária é trivial. Logo temos a igualdade desejada.

A prova da conexidade do conjunto $\omega(x)$ (respectivamente $\alpha(x)$) pode ser vista em [12]. □

O próximo teorema descreve propriedades importantes do fluxo gradiente.

Teorema 1.4.3 ([8]). *Seja f uma função de Morse sobre M .*

(i) *A função f é estritamente decrescente ao longo das linhas fluxo, exceto para as linhas fluxos degeneradas correspondentes aos pontos críticos, onde f é constante.*

(ii) *O campo vetorial gradiente é ortogonal ao conjunto de nível $f^{-1}(a)$ correspondente à valores regulares a de f .*

(iii) *Se M é compacta e $x \in M$, então $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_x(t)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_x(t)$ são pontos críticos de f .*

Demonstração. (i) Seja $\phi_x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ o fluxo gradiente avaliado no ponto x . Tomemos a derivada de $(f \circ \phi_x)(t)$ com respeito à t , aplicando a definição de gradiente temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \phi_x)(t) &= (df)_{\phi_x(t)} \left(\frac{d}{dt} \phi_x(t) \right) = \left\langle (\text{grad} f)_{\phi_x(t)}, \frac{d}{dt} \phi_x(t) \right\rangle \\ &= - \left\langle (\text{grad} f)_{\phi_x(t)}, (\text{grad} f)_{\phi_x(t)} \right\rangle = \\ &= - \langle \text{grad} f(\phi_x(t)), \text{grad} f(\phi_x(t)) \rangle \\ &= - |\text{grad} f(\phi_x(t))|^2 \leq 0. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Logo a função real $t \rightarrow f(\phi_x(t))$ possui derivada negativa, o que mostra que f é não-crescente ao longo das linhas fluxo. Se x é ponto regular de f , a desigualdade em (1.45) é estrita.

(ii) Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ curva contida em $f^{-1}(a)$ com $\gamma(0) = x$, então $f(\gamma(t)) = a$, para todo t . Aplicando a derivada com respeito à t temos

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = (df)_{\gamma(0)} \left(\frac{d\gamma}{dt}(0) \right) = \left\langle \text{grad} f(\gamma(0)), \frac{d\gamma}{dt}(0) \right\rangle.$$

Então o vetor gradiente de f é ortogonal ao vetor velocidade $\frac{d\gamma}{dt}$ no ponto $x \in f^{-1}(a)$. Como γ foi escolhida arbitrária, temos $\langle \text{grad} f, \frac{d\gamma}{dt} \rangle = 0$ para qualquer curva suave γ em $t = 0$, com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(t) \in f^{-1}(a)$. Portanto o vetor gradiente é ortogonal aos conjuntos de nível de f .

(iii) Como M é uma variedade compacta e $x \in M$, o fluxo gradiente está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, a função $t \rightarrow (f \circ \phi_x)(t) \in \mathbb{R}$ é limitada (se M é compacta e f é função contínua então $f(M) \subset \mathbb{R}$ é compacto, logo fechado e limitado).

De (1.45) temos que $\frac{d}{dt}(f(\phi_x(t))) \leq 0$, portanto $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dt}(f(\phi_x(t))) = 0$.

Como M é compacta, os conjuntos ω -limite e α -limite são não-vazio, compactos e invariantes sobre o fluxo. Sendo f função contínua segue do Teorema da Convergência Uniform que

$$0 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dt}(f(\phi_x(t))) = \frac{d}{dt} f \left(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi_x(t) \right),$$

então, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_x(t)$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_x(t)$ são pontos críticos de f , ou seja todo ponto de $\omega(x)$, $\alpha(x)$ é ponto crítico de f . Como conjuntos α e ω limites são compactos segue do Corolário 1.2.2 que eles possuem finitos pontos críticos. $\square$

Pelo teorema anterior, cada ponto da variedade compacta M flue em direção à algum ponto fixo em tempo positivo ou negativo. Portanto, cada ponto fixo pode ser visto como o cruzamento de duas estradas: aquela que consiste dos pontos que fluem para o ponto (tempo positivo) e a outra, constituída dos pontos que fluem para longe do ponto (tempo negativo). Estas estradas são a variedade estáveis e instáveis de p , cuja existência segue do Teorema da Variedade Estável.

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{x \in M : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_x(t) = p\}, \\ W^u(p) &= \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_x(t) = p\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.2. No exemplo apresentado na Seção 1.1, $W^s(p)$ é o toro com os dois círculos paralelos através de q e r e do círculo meridiano com r e s removidos, enquanto $W^u(p) = \{p\}$. Para o ponto crítico q , $W^s(q)$ é o círculo paralelo através de q e r com o ponto r removido, enquanto $W^u(q)$ é o círculo meridiano através de q e p com o ponto p removido. Vide Figuras 1.12 e 1.13.

Figura 1.12: Variedades estável e instável do ponto crítico p .

Figura 1.13: Variedades estável e instável do ponto crítico q .

Observação 1.4.3. O Teorema 1.4.3 nos fornece uma decomposição topológica da variedade em termos do fluxo gradiente. As duas estruturas básicas de M são: os pontos

críticos, os quais são levados por f num subconjunto de medida nula de números reais (os valores críticos de f) e os pontos regulares, cujas trajetórias sempre ficam presas pelos pontos críticos. A função f é estritamente decrescente ao longo de cada uma destas trajetórias. Este tipo de decomposição é válida para sistemas dinâmicos em geral.

Capítulo 2

A topologia dos conjuntos de nível

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave sobre uma variedade sem bordo e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de f . Segue do Teorema da Imagem Inversa que $f^{-1}(-\infty, a]$ é uma variedade suave com bordo, onde o bordo é $f^{-1}(a)$ [8]. Na Figura 2.1, vemos que $f^{-1}(-\infty, a]$ é homeomorfo à um cilindro.

Figura 2.1: A imagem inversa do intervalo semi-fechado $(-\infty, a]$ é uma variedade com bordo.

Dado um número real a , considere o conjunto

$$M^a = \{x \in M : f(x) \leq a\}. \quad (2.1)$$

Se a é valor regular de f , M^a é uma subvariedade de M com fronteira

$$\partial M^a = f^{-1}(a) = \{x \in M : f(x) = a\}. \quad (2.2)$$

Veremos que a topologia de M^a apresenta mudanças quando a atravessa um valor

crítico de f . Aqui iremos comparar a topologia das superfícies M^a do ponto de vista homotópico.

Definição 2.0.4. *Dois espaços topológicos M e N são ditos homotopicamente equivalentes se existem funções contínuas $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow M$ tais que $g \circ f \simeq Id_M$ e $f \circ g \simeq Id_N$.*

Dizer que $g \circ f \simeq Id_M$ implica que existe uma função contínua $H : M \times I \rightarrow M$ tal que $H(x, 0) = (g \circ f)(x)$ e $H(x, 1) = Id_M(x) = x$, para todo $x \in M$. Analogamente $f \circ g \simeq Id_N$ implica que existe uma função contínua $F : N \times I \rightarrow N$ tal que $F(x, 0) = (f \circ g)(x)$ e $F(x, 1) = Id_N(x) = x$, para todo $x \in N$. As funções H e F são ditas de homotopias e $I = [0, 1]$.

Dada a homotopia $H : (g \circ f) \simeq Id_M$, consideremos para cada $t \in I$ a aplicação contínua $H_t : M \rightarrow M$, definida por $H_t(x) = H(x, t)$ (respectivamente $F_t(x) : N \rightarrow N$, por $F_t(x) = F(x, t)$). Construir homotopia H equivale a definir uma família contínua à um parâmetro $(H_t)_{t \in I}$ de funções de M em M tal que $(x, t) \mapsto H_t(x)$ é uma função contínua e $H_0 = g \circ f$ e $H_1 = Id_M$.

Intuitivamente, dois espaços são homotopicamente equivalentes quando um espaço pode ser deformado ao outro sem rasgar ou saltar furos.

Espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes. De fato, se M e N são homeomorfos existe um homeomorfismo $f : M \rightarrow N$, então $Id_M = f^{-1} \circ f : M \rightarrow M$, portanto $Id_M \simeq Id_M$ e $Id_N = f \circ f^{-1} : N \rightarrow N$, logo $Id_N \simeq Id_N$. Segue da definição que M e N são homotopicamente equivalentes. A recíproca não se observa, um disco D^n e um ponto $\{y\} \subseteq D^n$ são homotopicamente equivalentes mas não são homeomorfos.

Para provar essa afirmação considere a função inclusão $f : \{y\} \rightarrow D^n$ tal que $y \mapsto f(y) = y$ e a função constante $g : D^n \rightarrow \{y\}$ tal que $x \mapsto g(x) = y$ ambas funções são contínuas. A função $g \circ f : \{y\} \rightarrow \{y\}$ é a identidade, $Id_{\{y\}}$, que é homotópica a si mesma e além disso, consideremos $f \circ g : D^n \rightarrow D^n$ definida por $x \mapsto (f \circ g)(x) = y$.

Afirmção: $(f \circ g) \simeq Id_{D^n}$. Defina

$$\begin{aligned} F & : D^n \times I \rightarrow D^n \\ (x, t) & \rightarrow F(x, t) = tx + (1 - t)y \end{aligned}$$

Notemos que F está bem definida porque D^n é um conjunto convexo e F é uma função

contínua, além disso verifica-se que:

$$F(x, 0) = y = (f \circ g)(x);$$

$$F(x, 1) = x = Id_{D^n}(x);$$

para todo $x \in D^n$, portanto F é uma homotopia entre $f \circ g$ e Id_{D^n} . Portanto D^n e $\{y\} \subseteq D^n$ são homotopicamente equivalentes porém não homeomorfos pois não tem a mesma cardinalidade.

Uma classe natural de espaços homotopicamente equivalentes são obtidos através de retrações por deformação.

Definição 2.0.5. *Um subespaço $N \in M$ é uma retração por deformação de M se existe uma homotopia $r_t : M \rightarrow M$ com $r_0 = id \Big|_M$, $r_t = id \Big|_N$, $\forall t \in [0, 1]$ e $r_1(M) \subseteq N$.*

Unir um disco D^l (l -dimensional) a uma variedade com bordo M^a é construir um espaço topológico, denotado por $M^a \cup D^l$, através da colagem do bordo de um disco l -dimensional, D^l , à fronteira, ∂M^a , de M^a mantendo o interior do disco disjunto da variedade. A topologia do espaço topológico resultante depende da colagem. Na Figura 2.2, o disco 1-dimensional ganhou largura e teve seus extremos colados ao bordo de um cilindro. De acordo com a maneira como o bordo é colado temos um espaço resultante diferente (topologicamente não equivalentes).

Figura 2.2: Uniões de um disco 1-dimensional a um cilindro.

Na figura a esquerda a colagem resultou em um toro com a tampa superior removida enquanto que, na figura a direita, temos um cilindro colado a um toro menos um disco.

2.1 Homotopia fora dos valores críticos.

Segue do Teorema do Valor Máximo, que toda função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida numa variedade compacta, assume valor máximo e valor mínimo em pontos p_0 e q_0 respectivamente, de M . Os pontos p_0 e q_0 são pontos críticos não degenerados de f .

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, seja $[a, b]$ um intervalo real e denote por $M^{[a,b]}$ o conjunto

$$M^{[a,b]} = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1.1 ([17]). *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, M é variedade compacta e f não possui valores críticos no intervalo $[a, b]$, então $M^{[a,b]}$ é difeomorfo ao produto $f^{-1}(a) \times [0, 1]$*

Figura 2.3: $f^{-1}(a) \times [0, 1]$.

Demonstração. Seja $X = -\text{grad}f$, o campo vetorial gradiente definido pela expressão em (1.44). Como $X(f) < 0$ fora dos pontos críticos de f podemos definir um novo campo vetorial Y no complementar do conjunto dos pontos críticos de f em M , por

$$Y = \frac{1}{X(f)}(X) \quad (2.4)$$

Desde que $M^{[a,b]}$ não contém pontos críticos de f , os pontos de $M^{[a,b]}$ pertencem ao domínio do campo vetorial Y .

Considere a linha fluxo $\phi_p(t)$ de Y a qual começa um ponto p de $f^{-1}(a)$. Usando a

definição do vetor velocidade, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\phi_p(t)) &= \frac{d\phi_p(t)}{dt} \cdot f = Y_{\phi_p(t)}(f) \\ &= \frac{1}{X(f)} (X(f)) = 1 \end{aligned}$$

Assim, as linhas fluxo tem velocidade constante, igual a 1, com respeito a “altura” definida por f . Portanto se o fluxo parte do nível $f = a$, no tempo $t = 0$ alcançará o nível $f = b$ no tempo $t = b - a$.

Defina a função $h : f^{-1}(a) \times [0, b - a] \rightarrow M_{[a,b]}$ por

$$h(p, t) = \phi_p(t).$$

Note que h é um difeomorfismo uma vez que $\phi_p(t)$ é um difeomorfismo (nas variáveis p e t). Além disso, como duas curvas integrais não se interceptam (pela unicidade das curvas integrais passando por um ponto fixado), provamos que $M^{[a,b]} \cong f^{-1}(a) \times [0, b - a]$. Segue do fato que $f^{-1}(a) \times [0, b - a] \cong f^{-1}(a) \times [0, 1]$ a prova do teorema. $\square$

Teorema 2.1.2. *[[17, 2]] Sejam f uma função de Morse definida na variedade compacta M e $b < c$ números reais. Considere o conjunto $f^{-1}[b, c]$. Se $f^{-1}[b, c]$ não contém pontos críticos de f então M^b e M^c são difeomorfos. Além disso, M^b é um retrato de deformação de M^c , de maneira que a função inclusão $M^b \rightarrow M^c$ é uma equivalência homotópica.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que M^b e M^c são difeomorfos. Sejam A o valor máximo de f e a o valor mínimo em M . Se $[b, c]$ não tem valores críticos de f então $[b, c]$ não contém a nem A . Então devemos provar o resultado sobre a hipótese que $a < b < c < A$. Denotamos por $M^{[b,c]}$ o conjunto dado por

$$M^{[b,c]} = \{p \in M \mid b \leq f(p) \leq c\}. \quad (2.5)$$

Claramente temos $M^b \cup M^{[b,c]} = M^c$. Segue do corolário 1.2.2 que se f é função de Morse então existem finitos de pontos críticos de f e estes são isolados. Portanto existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que f não tem pontos críticos em $M^{[b-\epsilon, c]}$.

Como $M^{[b-\epsilon, c]}$ não contém pontos críticos, segue do Teorema 2.1.1 que, $M^{[b-\epsilon, c]}$ é

difeomorfo a $f^{-1}(b - \epsilon) \times [0, 1]$. Notemos que $M^{[b-\epsilon, b]} \subset M^{[b-\epsilon, c]}$, então f não tem pontos críticos em $M^{[b-\epsilon, b]}$ e daí que $M^{[b-\epsilon, b]}$ é difeomorfo a $f^{-1}(b - \epsilon) \times [0, 1]$.

Portanto existem difeomorfismos g e κ tal que

$$M^{[b-\epsilon, b]} \xrightarrow{g} f^{-1}(b - \epsilon) \times [0, 1] \xrightarrow{\kappa^{-1}} M^{[b-\epsilon, c]} .$$

Basta definir $h(p) = (\kappa^{-1} \circ g)(p)$.

Assumindo que a restrição de h a $f^{-1}(b - \epsilon)$ é a função identidade definida por $id : M^{b-\epsilon} \longrightarrow M^{b-\epsilon}$ definimos o difeomorfismo

$$H = id \cup h : M^{b-\epsilon} \cup M^{[b-\epsilon, b]} \longrightarrow M^{b-\epsilon} \cup M^{[b-\epsilon, c]},$$

de modo natural. Observando que $M^{b-\epsilon} \cup M^{[b-\epsilon, b]} = M^b$ e $M^{b-\epsilon} \cup M^{[b-\epsilon, c]} = M^c$, concluímos que $H : M^b \longrightarrow M^c$ é o difeomorfismo desejado e completamos a primeira parte do teorema.

Como f é uma função de Morse sobre a variedade compacta M , considere o campo vetorial gradiente X com respeito a f . Pelo Teorema de Existência e Unicidade, sabemos que existe um fluxo gradiente globalmente definido. Então a ideia é caminhar de M^c para M^b ao longo das linhas fluxo.

Definimos a família a 1-parâmetro de funções $\pi_t : M^c \longrightarrow M^c$ por

$$\pi_t(q) = \begin{cases} q & , \text{ se } f(q) \leq b \\ \varphi_{t(b-f(q))}(q) & , \text{ se } b \leq f(q) \leq c. \end{cases}$$

Note que π_0 é a função identidade em M^b , $\pi_1(f^{-1}(c)) \subset f^{-1}(b)$ e $\pi_1(M^c) \subset M^b$. Desta forma, tem-se que M^b é um retrato de deformação de M^c , logo a função inclusão $M^b \longrightarrow M^c$ é uma equivalência homotópica e portanto M^b e M^c são homotopicamente equivalentes. $\square$

2.2 Passando níveis críticos e anexando alças

Na seção anterior mostramos que se f , função de Morse definida numa variedade compacta, não tem pontos críticos em $M^{[a,b]}$ então $M^{[a,b]} \cong f^{-1}(a) \times [0, 1]$. No seguinte teorema estudamos o comportamento de $M^{[a,b]}$ na presença de um único ponto crítico.

Por uma k -célula ou k -alça em M , entendemos a imagem de um mergulho $D^k \hookrightarrow M$, onde D^k é um k -disco ou simplesmente um disco k -dimensional.

Teorema 2.2.1. [15] *Seja M uma variedade compacta m -dimensional e $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse tal que $f^{-1}[a, b]$ tem um único ponto crítico de índice k , $0 < k \leq m$. Então existe uma k -célula $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \subset M - f^{-1}(b)$ e tal que $\mathcal{H} \cap f^{-1}(a) = \partial\mathcal{H}$.*

Demonstração. Seja z o ponto crítico da função f em $f^{-1}[a, b]$ com $f(z) = c$ e $a < c < b$. Assuma que $c = 0$, sem perda de generalidade. Tome (φ^{-1}, U) uma carta de Morse em z , onde $U = \varphi(V)$ é uma vizinhança de z em M . Decomponha $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$. Então φ leva $V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ difeomorficamente em U e

$$f \circ \varphi(x, y) = -|x|^2 + |y|^2, \text{ para } (x, y) \in V. \quad (2.6)$$

Note que $\varphi^{-1}(z) = (0, 0)$. Denotemos $g(x, y) = -|x|^2 + |y|^2$, para todo $(x, y) \in V$.

Seja $0 < \delta < 1$ tal que V contém $\Gamma = B^k(\delta) \times B^{m-k}(\delta)$, onde $B^i(\delta) \subset \mathbb{R}^i$ é a bola fechada centrada em 0 e raio δ .

Seja ϵ suficientemente menor que δ , por exemplo $\epsilon < \frac{\delta^2}{100}$. Defina

$$\begin{aligned} B^k &= B^k(\sqrt{\epsilon}) \times 0 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \\ &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} : |x|^2 \leq \epsilon\} \end{aligned}$$

e $\mathcal{H} = \varphi(B^k)$. Como φ é uma parametrização de V em U , necessariamente é um homeomorfismo e uma imersão e portanto um mergulho de B^k em $\varphi(B^k) = \mathcal{H}$. Então $\mathcal{H}$ é uma k -alça. Note também que $\mathcal{H}$ é uma subvariedade de M (imagem de um mergulho).

Afirmamos que $\mathcal{H} = \varphi(B^k)$ é uma variedade com bordo. De fato, como $B^k(\sqrt{\epsilon})$ é uma variedade com bordo em $\mathbb{R}^k$, existem parametrizações $h_i : U_i \rightarrow B^k(\sqrt{\epsilon})$, $i \in \Lambda$, tais que U_i são abertos relativos ao semi-plano superior $\mathbb{H}^k$; além disso $B^k(\sqrt{\epsilon}) \times 0 \cong B^k(\sqrt{\epsilon})$,

então existe difeomorfismo tal que

$$U_i \subset \mathbb{H}^k \xrightarrow{h_i} B^k(\sqrt{\epsilon}) \xrightarrow{\eta} B^k(\sqrt{\epsilon}) \times 0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}$$

logo $\phi_i = \varphi \circ \eta \circ h_i(U_i)$ é uma parametrização para $\mathcal{H}$ com $i \in \Lambda$. Segue que $\{\phi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ é um atlas maximal para $\mathcal{H}$. Como U_i é aberto relativo a $\mathbb{H}^k$, para cada $i \in \lambda$, então $\mathcal{H}$ é uma subvariedade com bordo em M .

Afirmção 1. $\mathcal{H} \subset M - f^{-1}(b)$.

De fato, notemos que $\mathcal{H} \neq \emptyset$ ($(0, 0) \in B^k$). Seja $p \in \mathcal{H}$ então $p \in M - f^{-1}(b)$. De fato se $p \in f^{-1}(b)$, segue que existe $(x, 0) \in B^k$ tal que $p = \varphi(x, 0)$ e $f(p) = b$, consequentemente $f(\varphi(x, 0)) = -|x|^2 = b < 0$, absurdo. Logo $\mathcal{H} \subset M - f^{-1}(b)$.

Afirmção 2. $\mathcal{H} \cap f^{-1}(-\epsilon) = \partial\mathcal{H}$.

Para exibir a prova desta afirmação é preciso verificar os seguintes fatos:

(i.) $\mathcal{H} \cap f^{-1}(-\epsilon) \subset \partial\mathcal{H}$.

Seja $p \in \mathcal{H} \cap f^{-1}(-\epsilon)$, então $p \in \varphi(B^k)$ e $f(p) = -\epsilon$, logo existe $(x, 0) \in B^k$ tal que $p = \varphi(x, 0)$ e $f(\varphi(x, 0)) = -\epsilon$. Portanto, da equação (2.6) temos $-|x|^2 = -\epsilon$, o qual implica que $x \in \partial B^k$. Desta forma, $(\sqrt{\epsilon}, 0)$ e $(-\sqrt{\epsilon}, 0)$ pertencem a B^k e notemos que estes pontos correspondem à fronteira de B^k e como $\varphi : B^k \rightarrow \varphi(B^k)$ é um mergulho, então o leva os pontos fronteira de B^k naqueles de $\varphi(B^k)$ de onde obtem-se que $p \in \partial\mathcal{H}$.

(ii.) $\partial\mathcal{H} \subset \mathcal{H} \cap f^{-1}(-\epsilon)$.

Seja $p \in \partial\mathcal{H}$, como $\varphi : B^k \rightarrow \varphi(B^k)$ é um mergulho então p é enviado à fronteira de B^k através de φ , isto é, se $\tilde{x} \in S^k(\sqrt{\epsilon}) \times 0$, então $\tilde{x} = (\sqrt{\epsilon}, 0)$ ou $\tilde{x} = (-\sqrt{\epsilon}, 0)$, ambos que pertencem a B^k então $p \in \mathcal{H}$. Por outro lado, se $\tilde{x} = (\sqrt{\epsilon}, 0)$, então $f(p) = f(\varphi(\sqrt{\epsilon}, 0)) = -\epsilon$. Análogamente se $\tilde{x} = (-\sqrt{\epsilon}, 0)$, então $f(p) = f(\varphi(-\sqrt{\epsilon}, 0)) = -\epsilon$. Donde $p \in f^{-1}(-\epsilon)$. Como p foi escolhido arbitrariamente, obtemos o resultado.

Como f não contém pontos críticos em $[a, -\epsilon]$ segue-se que $M^{-\epsilon}$ é um retrato de deformação de M^a e, junto com a *Afirmção 2* segue-se que $\partial\mathcal{H} = \mathcal{H} \cap f^{-1}(a)$. $\square$

2.3 Descomposição em alças de uma superfície.

De acordo como Teorema 2.1.2, sabemos que o tipo topológico de uma superfície M permanece inalterada quando o parâmetro t percorre valores não-críticos de f e, portanto, se faz importante estudar o que acontece com M^t quando t atravessa um valor crítico c_0 de f . Seja c_0 é um valor crítico de f tal que o um ponto crítico p_0 satisfaça $f(p_0) = c_0$.

Por simplicidade, assumiremos que existe único ponto crítico p_0 com valor crítico c_0 . Então para algum $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, o único ponto crítico de f em $M^{[c_0-\epsilon, c_0+\epsilon]}$ é p_0 (como f é uma função de Morse, seus pontos críticos são isolados) onde $M^{[c_0-\epsilon, c_0+\epsilon]}$ é a região entre $\partial M^{c_0-\epsilon}$ e $\partial M^{c_0+\epsilon}$.

Investigaremos a relação entre $M^{c_0-\epsilon}$ e $M^{c_0+\epsilon}$ quando t atravessa o valor crítico c_0 , quando M é uma superfície compacta.

2.3.1 Quando o índice de p_0 é zero

Escolhamos um sistema de coordenadas (x, y) sobre p_0 onde escrevemos f localmente na forma de Morse

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + c_0. \quad (2.7)$$

Se c_0 é valor mínimo global de f , então $M^{c_0-\epsilon} = \emptyset$ e ainda

$$\begin{aligned} M^{c_0+\epsilon} &= \{p \in M / f(p) \leq c_0 + \epsilon\} \\ &= \{p \in M / x^2 + y^2 \leq \epsilon\}, \end{aligned}$$

isto é, $M^{c_0+\epsilon}$ é difeomorfo ao 2-disco, D^2 . Podemos descrever a mudança como segue. O conjunto M^t é o conjunto vazio para $t < c_0$ e para $t > c_0$ temos M^t difeomorfo ao disco D^2 . Se o valor crítico c_0 é mínimo local de f , então $M^{c_0-\epsilon}$ não seria vazio. Neste caso, quando t passa por c_0 teríamos um disco e $M^{c_0+\epsilon}$ passa ser difeomorfo à união disjunta de $M^{c_0-\epsilon}$ e um 2-disco, D^2 :

$$M^{c_0+\epsilon} \cong M^{c_0-\epsilon} \sqcup D^2. \quad (2.8)$$

De fato, $M^{c_0+\epsilon} = M^{c_0-\epsilon} \cup M^{[c_0-\epsilon, c_0+\epsilon]}$; mas,

$$\begin{aligned}
 M^{[c_0-\epsilon, c_0+\epsilon]} &= \{p \in M / \quad c_0 - \epsilon \leq f(p) \leq c_0 + \epsilon\} \\
 &= \{p \in M / \quad c_0 - \epsilon \leq x^2 + y^2 + c_0 \leq c_0 + \epsilon\} \quad (\text{por (2.7)}) \\
 &= \{p \in M / \quad -\epsilon \leq x^2 + y^2 \leq \epsilon\} \\
 &= \{p \in M / \quad |x^2 + y^2| \leq \epsilon\} \\
 &\cong D^2
 \end{aligned}$$

e conseqüentemente temos (2.8), onde o símbolo $\cong$ significa difeomorfos. Também usamos $\sqcup$ para denotar a união disjunta.

Figura 2.4: O caso quando o índice de p_0 é zero.

2.3.2 Quando o índice de p_0 é um

Do Lema de Morse sabemos que existe um sistema de coordenadas apropriado (x, y) tal que f tem a forma $f(x, y) = -x^2 + y^2 + c_0$, quando o índice de p_0 é um. Logo o gráfico próximo do ponto crítico p_0 assemelha-se a uma passagem de montanha, tal como mostra a Figura 2.5.

Figura 2.5: O gráfico de f próximo a um ponto crítico de índice um.

A curva correspondente a $y = 0$ sobre o gráfico desce a partir de p_0 e a curva $x = 0$,

ortogonal ao ponto p_0 , sobe a partir de p_0 . A afirmação de que o ponto p_0 tem índice um, portanto, é equivalente a dizer que a variedade inestável de p_0 do campo gradiente é 1-dimensional.

Consideremos que adicionamos uma pequena largura a curva decrescente no gráfico de f em p_0 fazendo um caminho que passa sobre a montanha em p_0 , esta também pode ser vista como uma parte ligando as arestas em $\partial M^{c_0-\epsilon}$ de $M^{c_0-\epsilon}$. Na Figura 2.6 apresentamos a visão de cima do gráfico da figura anterior.

Figura 2.6: Uma visão de cima do gráfico da Figura 2.5.

Na Figura 2.6, a área hachurada (mais escura) corresponde aos pontos (x, y) tais que

$$-x^2 + y^2 \leq -\epsilon, \quad (2.9)$$

ou seja, pertencem a $M^{c_0-\epsilon}$ e a área mais clara representa a ponte ligando as partes de $M^{c_0-\epsilon}$.

Note que esta parte é quase retangular (difeomorfa a um retângulo) embora as margens direitas e esquerda sejam ligeiramente curvadas. Chamamos o intervalo $[0, 1]$ um disco 1-dimensional, ou simplesmente um 1-disco, frequentemente denotado por D^1 . Os pontos finais de D^1 , denotados por ∂D^1 , formam seu bordo. Então ∂D^1 consiste de dois pontos. A parte mais clara (um retângulo) na Figura 2.6 é difeomorfa ao produto $D^1 \times D^1$, e a intersecção dela com $M^{c_0-\epsilon}$ (representada por linhas grossas na figura) correspondem ao par de bordas paralelas $\partial D^1 \times D^1$ (vide Figura 2.7).

Diremos que o retângulo $D^1 \times D^1$ é uma 1-alça conectada a $M^{c_0-\epsilon}$. O nome 1-alça vem do fato que corresponde a um ponto crítico de índice um. Uma explicação melhor para o nome “alça” é dada no caso 3-dimensional discutido no capítulo 3. A variedade $M^{c_0+\epsilon}$, logo após o parâmetro t passar através do valor crítico c_0 , corresponde em coordenadas

Figura 2.7: Uma 1-alça $D^1 \times D^1$ e as bordas ao longo da qual foi colada $M^{c_0-\epsilon}$.

locais à porção

$$-x^2 + y^2 + c_0 \leq -\epsilon. \quad (2.10)$$

Comparemos $M^{c_0+\epsilon}$ e $M^{c_0-\epsilon}$ com a 1-alça conectada (Figura 2.6), através do Teorema 2.3.2 demonstrado na próxima seção, temos que é possível “colar” $M^{c_0+\epsilon}$ ao longo das setas, como o indica a figura, até que elas coincidam com $M^{c_0-\epsilon} \cup D^1 \times D^1$. Logo

$$M^{c_0+\epsilon} \cong M^{c_0-\epsilon} \cup D^1 \times D^1. \quad (2.11)$$

Então para um ponto crítico p_0 de índice um, a mudança em M^t , quando o parâmetro t passa por um valor crítico c_0 , é descrito pela colagem de uma 1-alça a $M^{c_0-\epsilon}$.

A superfície $M^{c_0-\epsilon} \cup D^1 \times D^1$ no lado direito de (2.11) dificilmente será uma superfície suave. No entanto, podemos suavizar os bordos por uma técnica bem conhecida de suavização e assumir que, o lado direito da equivalência em (2.11) é um superfície suave.

Alguma vezes pensamos de $\cong$ em (2.11) como um homeomorfismo, e sempre queremos que o lado direito seja uma superfície suave que simplesmente considerar $M^{c_0+\epsilon}$ no lado esquerdo invés disso.

2.3.3 Quando o índice de p_0 é dois

Do Lema de Morse segue que existe uma vizinhança U de p_0 tal que, em coordenadas locais adequadas (x, y) , f se escreve como $f(x, y) = -x^2 - y^2 + c_0$. Logo

$$\begin{aligned} M^{c_0-\epsilon} &= \{p \in M / f(p) \leq c_0 - \epsilon\} \\ &= \{(x, y) / x^2 + y^2 \geq \epsilon\} \end{aligned}$$

e portanto, $M^{c_0-\epsilon}$ está fora do disco de raio $\sqrt{\epsilon}$ (o círculo fronteira está incluído). Na Figura 2.8 desenhamos este disco D^2 de raio $\sqrt{\epsilon}$ como uma bacia invertida, e em seguida, obtemos $M^{c_0+\epsilon}$ pela união de $M^{c_0-\epsilon}$ com D^2 ao longo da sua fronteira:

$$M^{c_0+\epsilon} = M^{c_0-\epsilon} \cup D^2. \quad (2.12)$$

Figura 2.8: Um ponto crítico de índice dois.

A união de D^2 com $M^{c_0-\epsilon}$ acima é chamada de uma 2-alça. A relação (2.12) diz que quando t percorre o intervalo $[c_0 - \epsilon, c_0 + \epsilon]$, uma 2-alça é anexada a $M^{c_0-\epsilon}$ para obter $M^{c_0+\epsilon}$.

O conjunto obtido após a colagem de uma 2-alça tem apenas uma componente conexa.

2.3.4 Descomposição em alças

Dada uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e denotando por $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, seus pontos críticos (finitos porque M é superfície compacta), mostraremos no Teorema 2.4.1, que podemos perturbar a função f de modo que $f(p_i) \neq f(p_j)$, se $i \neq j$.

Então vamos assumir aqui que f satisfaz esta propriedade. Mudamos os subíndices dos p_i 's se necessário e supomos que $f(p_1) < f(p_2) < \dots < f(p_n)$.

Chame $c_i = f(p_i)$, obtemos uma sequência de números $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. É evidente que c_1 é o valor mínimo e c_n é o valor máximo de f . Registramos como muda o tipo topológico de M^t , quando o parâmetro t percorre um intervalo contendo $[c_1, c_n]$.

Antes de descrevermos M^t lembremos que, uma 0-alça e uma 2-alça são 2-discos, mas numa 2-alça o número de direções de decrescimento de f num ponto crítico é dois,

enquanto que numa 0-alça é zero. Analogamente para uma 1-alça, a linha central da ponte de declive do ponto crítico é 1-dimensional.

Para $t < c_1$, temos $M^t = \emptyset$. Quando t passa por c_1 , um disco estoura e temos $M^t = D^2$ (lembrando que c_1 é o valor mínimo de f). Este 2-disco corresponde ao ponto crítico de índice zero, chamado de 0-alça.

Para cada tempo t , onde t passa por um valor crítico c_i , temos uma 0-, 1-, ou 2-alça adicionada a $M^{c_i-\epsilon}$ dependendo do índice do ponto crítico p_i (“unir” uma 0-alça significa tomar a união disjunta da alça e $M^{c_i-\epsilon}$).

Ao último valor crítico c_n (máximo de f) corresponde uma 2-alça colada a $M^{c_n-\epsilon}$, ela completa a superfície compacta M .

Assim temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3.1 ([17]). *Se M for uma superfície fechada que admite uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, então M pode ser descrita como a união de um número finito de 0-, 1-, e 2-alças.*

O seguinte teorema é uma reprodução do Teorema 3.1, pp.157-159 em [15] para o caso $k = 1$.

Teorema 2.3.2. *Seja M uma superfície compacta e $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse. Suponhamos que f tem um único ponto crítico p_0 , de índice $k = 1$. Então existe uma retração por deformação de M em $f^{-1}(a) \cup \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = \varphi(B^1)$, como na notação do Teorema 2.2.1.*

Demonstração. Seja p_0 um ponto crítico de f de índice um. Pelo Lema de Morse, existe uma carta de Morse em p_0 , (φ^{-1}, U) , com $\varphi^{-1}(U) = V$ tal que $V \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e U é uma vizinhança de p_0 em M e assumindo que $f(p_0) = c_0 = 0$ temos

$$f \circ \varphi(x, y) = -x^2 + y^2, \quad \text{para todo } (x, y) \in V \quad (2.13)$$

Note que as coordenadas locais de c_0 são $x = 0 = y$. Denote por $f \circ \varphi(x, y) = g(x, y)$, para todo $(x, y) \in V \subset \mathbb{R}^2$.

Seja $0 < \delta < 1$ tal que V contém $\Gamma = [-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Consideramos M com a métrica riemanniana de tal forma que esta coincida, por meio de φ , com o produto

interno usual de $\mathbb{R}^2$. Sendo assim temos que se $\varphi^{-1}(u) = v \in \Gamma$ então $u = \varphi(v) \in U$ e $v = (x, y) \in V$, logo $f(u) = g(v)$.

e

$$D\varphi^{-1}(u) (\text{grad} f(u)) = \text{grad} g(v).$$

Seja $\epsilon > 0$, suficientemente menor que δ , digamos $\epsilon < \frac{\delta^2}{100}$ e defina

$$B^1 = B^1(\sqrt{\epsilon}) \times 0 \subset \mathbb{R}^2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / |x|^2 \leq \epsilon\}. \quad (2.14)$$

Do Teorema 2.2.1 sabemos que $\mathcal{H} = \varphi(B^1)$ é uma 1-alça em M tal que $\mathcal{H} \cap f^{-1}(-\epsilon) = \partial\mathcal{H}$, a qual é representada pelos pontos $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ para os quais $|x|^2 = \epsilon$.

Descreveremos a seguir a deformação de $f^{-1}[-\epsilon, \epsilon] = M^{[-\epsilon, \epsilon]}$ a $f^{-1}(-\epsilon) \cup \mathcal{H}$. Primeiramente consideramos o conjunto

$$\Gamma_1 = D^1(\sqrt{2\epsilon}) \times D^1(\sqrt{2\epsilon}). \quad (2.15)$$

Figura 2.9: O caso em que $k = 1$.

Sabemos que as trajetórias do fluxo gradiente são ortogonais aos conjuntos de nível $f^{-1}(a)$, correspondentes a valores regulares a de f . Então em $\Gamma_1 \cap g^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$, construímos uma deformação que leva cada ponto (x, y) desse conjunto, caminhando ao longo das trajetórias do fluxo gradiente, ϕ_t (em unidade de tempo t) e com velocidade constante,

isto é,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(x)) = cte, \quad \forall t \in [0, 1],$$

a um ponto de $g^{-1}(-\epsilon) \cup B^1$.

Consideremos a função $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s = s(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x|^2 < \epsilon \\ \frac{\sqrt{|x|^2 - \epsilon}}{|y|} & \text{se } |x|^2 \geq \epsilon. \end{cases}$$

Então para $(x, y) \in \Gamma_1 \cap g^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$, juntamos-o ao ponto $(x, sy) \in g^{-1}(-\epsilon) \cup B^1$. De fato, se $|x|^2 < \epsilon$ então $(x, 0) \in B^1$ e se $|x|^2 \geq \epsilon$ então $\left(x, \frac{\sqrt{|x|^2 - \epsilon}}{|y|}\right) \in g^{-1}(-\epsilon)$, pois $g\left(x, \frac{\sqrt{|x|^2 - \epsilon}}{|y|}\right) = -|x|^2 + \left(\frac{|x|^2 - \epsilon}{|y|^2}\right) \cdot |y|^2 = -\epsilon$.

Agora definimos um campo vetorial em M , $X(x, y) = -s(x, y) \cdot \text{grad } g(x, y)$. Então $X(x, y) = (0, -2y)$, para todo $(x, y) \in (\Gamma_1 \cap g^{-1}[-\epsilon, \epsilon]) \cup B^1$. Esta deformação é transportada à $\varphi(\Gamma_1)$ via conjugação, pela φ^{-1} . Vide Figura 2.9.

Fora do conjunto

$$\Gamma_2 = D^1(\sqrt{3\epsilon}) \times D^1(\sqrt{3\epsilon}), \quad (2.16)$$

a deformação leva cada ponto, a velocidade constante, ao longo da linha fluxo do campo vetorial, $-\text{grad } g$, a $g^{-1}(-\epsilon) \cup B^1$. Vide Figura 2.10.

Figura 2.10: Descrição da deformação fora de Γ_2

Esta deformação é transportada a $U - \varphi(\Gamma_2)$ pela φ^{-1} . Para estender esta deformação

aos pontos de $\Gamma_2 - \Gamma_1$ é suficiente definirmos um campo vetorial em Γ que concorde com X em Γ_1 e com $-\text{grad}g$ em $\Gamma - \Gamma_2$ tal como é o campo Y dado por

$$Y(x, y) = 2(h(x, y)x, -y), \quad (2.17)$$

onde a função C^∞ , $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ é nula em Γ_1 e igual a 1 fora de Γ_2 (Vide Lema 1.3.5).

É fácil ver que as linhas fluxo de Y que começam num ponto de $(\Gamma_2 - \Gamma_1) \cap g^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$, atingem $g^{-1}(-\epsilon)$ ($|x|$ é crescente ao longo das linhas fluxos). A deformação global de $f^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$ em $f^{-1}(-\epsilon) \cup \mathcal{H}$ é obtida movimentando cada ponto de Γ , a velocidade constante, ao longo das linhas fluxo de Y , até atingir $g^{-1}(-\epsilon) \cup B^1$. Este movimento é transportado a M via φ . Enquanto que cada ponto de $M^{[-\epsilon, \epsilon]} - \varphi^{-1}(\Gamma)$ é movido, a velocidade constante, ao longo das linhas fluxo de $-\text{grad}f$, até atingir $f^{-1}(-\epsilon)$. Com isso os pontos em $f^{-1}(-\epsilon) \cup \mathcal{H}$ ficam fixos. $\square$

2.4 Aumento e diminuição de pontos críticos

Nessa seção mostraremos que dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, função de Morse definida na variedade M , não há perda de generalidade em supor que $f^{-1}(p)$ contém apenas um ponto crítico para cada valor crítico p fixado.

Teorema 2.4.1 ([17]). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse sobre M , e sejam $p_1, p_2, \dots, p_r$ seus pontos críticos. Então existe uma função de Morse $\tilde{f}$ cujos pontos críticos são $p_1, p_2, \dots, p_r$, tal que*

$$\tilde{f}(p_i) \neq \tilde{f}(p_j) \quad \text{se } i, j = 1, 2, \dots, r \quad (2.18)$$

Além disso, podemos $\tilde{f}$ está (C^2, ϵ) -próxima de f .

Motivados pelo teorema anterior apresentamos a seguinte definição. Uma função de Morse é dita *função de Morse simples* se em cada nível crítico $f^{-1}(c)$ existe exatamente um ponto crítico de f .

Demonstração. Assuma que $f(p_1) = f(p_2) = c$. Pelo Lema de Morse, existe carta local

numa vizinhança de p_1 de modo que f se expresse como

$$f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c. \quad (2.19)$$

Seja X_f o campo vetorial gradiente de f com relação a carta local e calcule $X_f \cdot f$:

$$\begin{aligned} X_f \cdot f &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot f = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 \\ &= 4(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 + \dots + x_m^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dado $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, consideramos os m -discos D_ϵ e $D_{2\epsilon}$ de raios ϵ e 2ϵ respectivamente, ambos centrados em p_1 . Denote por U a vizinhança de p_1 , dada pelo Lema de Morse e, φ a carta local em U , isto é, $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U$ difeomorfismo tal que

$$\begin{aligned} D_\epsilon &= \{p \in M / \quad d(p, p_1) \leq \epsilon\} \subseteq U \\ &= \{x \in V \subset \mathbb{R}^m / \quad \|x\| \leq \epsilon\} \\ &= \{x \in V / \quad x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 + \dots + x_m^2 \leq \epsilon^2\}. \end{aligned}$$

Note que na segunda igualdade da expressão anterior vem do fato que as coordenadas locais em $\mathbb{R}^m$ por meio de φ de p_1 são $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Além disso, para $p \in D_{2\epsilon} - \text{int}(D_\epsilon) \subseteq U$ temos

$$\epsilon^2 \leq x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 + \dots + x_m^2 \leq (2\epsilon)^2. \quad (2.21)$$

Portanto em $D_{2\epsilon}(p_1) - \text{int}(D_\epsilon)$, $4\epsilon^2 \leq X_f \cdot f \leq 4(2\epsilon)^2$.

Denotamos por K o conjunto compacto D_ϵ e, U o interior $\text{int}(D_{2\epsilon})$ de $D_{2\epsilon}$. Desse modo U é um conjunto aberto contendo o compacto K . Consideremos a função passo $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ com relação a (U, K) como no Lema 1.3.5. Estendemos h a uma função suave sobre toda variedade M definida como $h = 0$ fora de U . Defina uma função $\tilde{f}$ por $\tilde{f} = f + ah$, onde a é um número real não-zero, suficientemente pequeno. Como $f = \tilde{f}$ fora de U , f e $\tilde{f}$ tem o mesmo conjunto de pontos críticos. Desde que $h = 1$ em $\text{int}(D_\epsilon)$, o

ponto p_1 é o único ponto crítico de f e de $\tilde{f}$ nesta região. Portanto, a região compreendida entre D_ϵ e $D_{2\epsilon}$ é a única região onde o conjunto de pontos críticos de f e de $\tilde{f}$ podem ser diferentes. Denotaremos essa região por Σ . Mas observemos que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right| = \left| a \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.22)$$

Portanto se o valor absoluto de a for suficientemente pequeno, podemos fazer a diferença entre $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$ e $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right)^2$ arbitrariamente pequena. Além disso, como observamos anteriormente $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = X_f \cdot f$ e assume seu valor mínimo $4\epsilon^2 > 0$ em Σ (note que $(X_f \cdot f)(p) > 0$ salvo se p for um ponto crítico de f) e portanto, se a for suficientemente pequeno, então $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right)^2$ também assume um valor mínimo em Σ . Então f e $\tilde{f}$ tem o mesmo conjunto de pontos críticos. Além disso, os pontos críticos não-degenerados de f são também pontos críticos não-degenerados de $\tilde{f}$, logo $\tilde{f}$ é uma função de Morse. Além disso, como $p_2 \in U^c$ então $h = 0$ e $\tilde{f}(p_2) = f(p_2)$, enquanto que para $p_1 \in U$ $h = 1$ logo

$$\tilde{f}(p_1) = f(p_1) + a, \quad \tilde{f}(p_2) = f(p_2), \quad (2.23)$$

assim, embora $f(p_1) = f(p_2)$ temos $\tilde{f}(p_1) \neq \tilde{f}(p_2)$.

Continuamos o argumento acima para definir uma função cujos valores críticos são distintos para pontos críticos distintos. Se f possui três pontos críticos tais que $f(p_1) = f(p_2) = c_1$ e $f(p_3) = c_2$ com $c_1 \neq c_2$, então sob os mesmos argumentos temos que $\tilde{f}(p_1) \neq \tilde{f}(p_2)$ e como $p_3 \in U^c$, então $\tilde{f}(p_3) = f(p_3)$ e como $f(p_3) \neq f(p_2) = f(p_1)$ obtemos $\tilde{f}(p_1) \neq \tilde{f}(p_2) \neq \tilde{f}(p_3)$ embora $f(p_1) = f(p_2)$ e $f(p_3) \neq f(p_1), f(p_2)$. Resta mostrarmos que $\tilde{f}$ é (C^2, ϵ) -próxima a f .

Escolha $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $U_1 = \text{int}(D_{2\epsilon}(p_1))$ não contém outro ponto crítico senão p_1 e, analogamente para p_2 , temos $U_2 = \text{int}(D_{2\epsilon}(p_2))$ não contém outro ponto crítico senão p_2 (observe que p_1 e p_2 são isolados).

Consideremos os m -discos $K_1 = D_\epsilon(p_1)$ e $K_2 = D_\epsilon(p_2)$. Denotemos por $(x_1, \dots, x_m)$ as coordenadas locais de um ponto $p \in U_1$ e por $(y_1, \dots, y_m)$ as coordenadas locais do

ponto $q \in U_2$. Além disso, definimos

$$\tilde{f} = f + ah; \quad (2.24)$$

onde $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, se comporta como descrita anteriormente.

Sabemos que $f = \tilde{f}$ fora de U_1 . Em U_1 temos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} |f(p) - \tilde{f}(p)| = |a|h & , \text{ onde } p = (x_1, \dots, x_m) \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p) \right| = \left| a \frac{\partial h}{\partial x_i} \right| & , i = 1, \dots, m \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| = \left| a \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \right| & , i, j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Como $0 \leq h \leq 1$ e $h = 0$ fora de algum compacto $K_1 \subset L \subset U_1$ enquanto que o valor absoluto de a é pequeno suficiente, as diferenças em (2.25) são suficientemente pequenas. Em particular, f é (C^2, ϵ) -próxima a $\tilde{f}$ em K_1 .

Para aproximar $\tilde{f}$ a f em K_2 , usamos o sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_m)$ em U_2 . Em $[D_{2\epsilon} - \text{int}(D_\epsilon)] \cap K_2$, o qual está contido em $U_1 \cap U_2$, usamos uma transformação de Jacobi adequada entre $(x_1, \dots, x_m)$ e $(y_1, \dots, y_m)$ (notemos que como M é uma variedade m -dimensional essa transformação necessariamente existe para $p \in U_1 \cap U_2 \subset M$). Pelo Teorema do Valor Máximo, o valor absoluto de cada componente do Jacobiano sobre o conjunto compacto $[D_{2\epsilon} - \text{int}(D_\epsilon)] \cap K_2$ não pode exceder ao seu máximo.

Consequentemente, se tomamos o valor absoluto de a suficientemente pequeno, o lado direito de (2.25) pode ser feito o suficientemente pequeno. Então f é (C^2, ϵ) -próxima a $\tilde{f}$.

Como este processo pode ser repetido para cada $j = 1, \dots, k$ segue que $\tilde{f}$ é (C^2, ϵ) -próxima a f para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. $\square$

Capítulo 3

Discos com alças

No capítulo 2 mostramos como decompor superfícies compactas como a união de uma coleção de alças de índices 0, 1 e 2. Neste capítulo, generalizamos os resultados do capítulo anterior com a decomposição em alças de variedades compactas m -dimensionais.

Com as ferramentas discutidas nesse capítulo teremos como exibir exemplos concretos de variedades que admitem decomposição em alças.

3.1 Decomposição em alças de uma variedade

Seja M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse definida em M . Considere M^t como definido anteriormente,

$$M^t = \{p \in M : f(p) \leq t\}. \quad (3.1)$$

Nosso objetivo é investigar o tipo topológico de M^t quando o parâmetro t muda, como fizemos para superfícies compactas no capítulo anterior.

Assumindo que f assume distintos valores críticos em distintos pontos críticos, sendo estes finitos, denote os pontos críticos por $p_0, p_1, \dots, p_n$. Defina $c_i = f(p_i)$, e organize-os em ordem crescente, renomeando-os se necessário, de modo que $c_0 < c_1 < \dots < c_n$. É evidente aqui que não existe um ponto $p \in M$ tal que $f(p) < c_0$ (pois c_0 é o valor mínimo de f), então para $t < c_0$, $M^t = \emptyset$. Similarmente, $M^t = M$, se $c_n \leq t$, desde que $f(p) \leq c_n$

para todo $p \in M$.

Agora iniciamos a análise das mudanças de M^t em torno dos valores máximo e mínimo de f começando com o valor mínimo. Em nosso caso, estamos assumindo que p_0 é o único ponto crítico no qual se dá o valor mínimo.

Seja $p \in V_{p_0}$, carta de Morse em p_0 , ponto crítico de f (isolado e único para esse nível crítico). Suponha que $f(p_0) = c_0$ é valor mínimo de f de índice λ , então segue que

$$c_0 < -x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 + c_0, \quad (3.2)$$

logo

$$0 < -x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2. \quad (3.3)$$

Além disso, todos os sinais da forma quadrática anterior não podem ser negativos, portanto, o índice de p_0 é zero e

$$f(x_1, \dots, x_m) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 + c_0. \quad (3.4)$$

Seja $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno. Se c_0 é mínimo então $M^{c_0-\epsilon} = \emptyset$ e

$$M^{c_0+\epsilon} = \{(x_1, \dots, x_m) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \leq \epsilon\}, \quad (3.5)$$

isto é, $M^{c_0+\epsilon}$ é difeomorfo ao disco m -dimensional, D^m .

O estudo acima mostra que f assume o valor mínimo c_0 no centro do disco e assume valores cada vez maiores quando $(x_1, \dots, x_m)$ se aproxima da fronteira do disco. A Figura 3.1 mostra $M^{c_0+\epsilon}$ o caso 3-dimensional ($m = 3$).

Figura 3.1: Uma m -dimensional 0-alça, onde $m = 3$

No caso em que $c_i = f(p_i)$, p_i ponto crítico, e c_i não é valor mínimo, a variedade M^t , cada vez que t passa através de um valor crítico c_i de índice zero, juntamos um disco m -dimensional, e $M^{c_i+\epsilon}$ será difeomorfo a $M^{c_i-\epsilon} \sqcup D^m$. Ao disco m -dimensional, o qual aparece num ponto crítico de índice zero, chamamos de 0-alça.

Agora consideremos a situação em torno do valor máximo c_n . Assumimos que existe somente um único ponto p_n onde f atinge o valor máximo. Desde que c_n é o valor máximo, f não pode tomar valores maiores que c_n , então $f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2 + c_n$ e o índice de p_n é necessariamente m .

Quando $c_n < t$, temos $M^t = M$. Logo temos que podemos escrever $M^{c_n-\epsilon} = \{(x_1, \dots, x_m) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \geq \epsilon\}$. Esta variedade corresponde ao complementar do disco m -dimensional D^m de raio $\sqrt{\epsilon}$. A fronteira $\partial M^{c_n-\epsilon}$ é a fronteira S^{m-1} . Quando t aumenta de $c_n - \epsilon$ e passa a c_n , a fronteira de $M^{c_n-\epsilon}$ é colada ao disco m -dimensional D^m . A função f assume seu valor máximo no centro do disco e chamamos este m -disco de m -alça. Em geral, quando t passa por algum valor crítico c_i com índice m , a m -alça é colada a componente ligada da fronteira de $M^{c_i-\epsilon}$. Esta fronteira é uma $(m-1)$ -esfera S^{m-1} .

Figura 3.2: Uma λ -alça

Agora resta-nos considerar os pontos críticos de índices $0 < \lambda < m$.

Tomamos um sistema de coordenadas locais em volta do ponto crítico p_i de índice λ temos

$$f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c_i. \quad (3.6)$$

A situação em torno de p_i será descrita no Teorema 3.1.1. Na figura 3.2, a região sombreada representa $M^{c_i-\epsilon}$, o qual obtivemos através da desigualdade $f \leq c_i - \epsilon$ em

(3.6):

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_m^2 \geq \epsilon. \quad (3.7)$$

A área levemente sombreada corresponde as desigualdades

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_m^2 \leq \epsilon, \\ x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \leq \delta \end{cases} \quad (3.8)$$

onde δ é um número positivo menor do que ϵ , é chamada de **alça m -dimensional de índice λ** . Esta alça é difeomorfa ao produto direto de um λ -disco e a $(m - \lambda)$ -disco $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$, onde o λ -disco

$$D^\lambda \times 0 = \{(x_1, \dots, x_\lambda, 0, \dots, 0) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\lambda^2 \leq \epsilon\}, \quad (3.9)$$

é o *núcleo* da λ -alça, e o $(m - \lambda)$ -disco

$$0 \times D^{m-\lambda} = \{(0, \dots, 0, x_{\lambda+1}, \dots, x_m) : x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \leq \delta\} \quad (3.10)$$

intersectado ao núcleo é o *co-núcleo*. O nome co-núcleo significa que é o dual ao núcleo e indica a espessura da λ -alça. O núcleo e o co-núcleo se interceptam transversalmente na origem $(0, 0)$, o qual é exatamente o ponto crítico p_i .

Colamos essa λ -alça $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ a $M^{c_i-\epsilon}$ como na Figura 3.2

$$M^{c_i-\epsilon} \cup D^\lambda \times D^{m-\lambda}. \quad (3.11)$$

O próximo teorema descreve a mudança de M^t quando o parâmetro t passa através do valor crítico c_i de índice λ .

Teorema 3.1.1. *O conjunto $M^{c_i+\epsilon}$ é difeomorfo a variedade obtida pela colagem de uma λ -alça a $M^{c_i-\epsilon}$:*

$$M^{c_i+\epsilon} \cong M^{c_i-\epsilon} \cup D^\lambda \times D^{m-\lambda}. \quad (3.12)$$

Para ver mais detalhes da prova ver [15].

O espaço $M^{c_i-\epsilon}$ com uma λ -alça colada não é suave nas fronteiras onde a alça encontra a variedade $M^{c_i-\epsilon}$. Devemos suavizar estas fronteiras. Após a suavização temos a variedade

$C^\infty M'$, como mostra a Figura 3.3.

Figura 3.3: A variedade suavizada M' depois da colagem da λ -alça a $M^{c_i - \epsilon}$

Note que na Figura 3.3, $M^{c_i + \epsilon}$ corresponde à peça definida por:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_m^2 \geq -\epsilon. \quad (3.13)$$

Regressemos à forma em (3.6) e estudemos a mudança dos valores de f sobre o núcleo D^λ de uma λ -alça. No centro do núcleo, f assume o valor crítico c_i , é decrescente a medida que se aproxima da fronteira do disco, onde assume o valor $c_i + \lambda$. Podemos pensar que o co-núcleo é um disco vertical (em posição vertical) e que o núcleo está virado para baixo enquanto que o co-núcleo, para cima, como uma sela do cavalo.

O núcleo de uma 0-alça é 0-dimensional e o co-núcleo é m -dimensional, de modo que nele todas as direções apontam para cima. De outro lado, o núcleo de uma m -alça é m -dimensional de modo que qualquer m -alça é voltada para baixo.

A colagem de uma λ -alça $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ a $M^{c_i - \epsilon}$ é feita através da colagem de $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ ao longo da fronteira $\partial M^{c_i - \epsilon}$ de $M^{c_i - \epsilon}$ (vide Figura 3.2). Para descrever a alça colada com precisão, devemos especificar a função

$$\varphi : \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \longrightarrow \partial M^{c_i - \epsilon}. \quad (3.14)$$

indicando a cada ponto de $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ seu correspondente na fronteira $\partial M^{c_i - \epsilon}$. Identificamos cada ponto $p \in \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ com o ponto $\varphi(p) \in \partial M^{c_i - \epsilon}$, onde a função φ é um mergulho suave e, é chamada de função conexão de uma λ -alça. A fronteira ∂D^λ do disco do núcleo é uma esfera $(\lambda - 1)$ -dimensional $S^{\lambda-1}$, e é chamada de esfera anexada.

Uma função conexão é um mergulho

$$\varphi : S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \longrightarrow \partial M^{c_i-\epsilon} \quad (3.15)$$

de uma espessura $(\lambda - 1)$ -esfera $S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda}$ (com a espessura $(m - \lambda)$ -dimensional).

Figura 3.4: Uma 1-alça

Figura 3.5: Uma 2-alça

Na Figura 3.4 e 3.5 uma 3-dimensional 1-alça e uma 2-alça são desenhadas, respectivamente. O desenho de uma 1-alça justifica o nome “alça”. A 2-alça é desenhada como uma meia esfera de cabeça para baixo.

Definição 3.1.1. *Uma variedade (com fronteira em geral) obtida de D^m pela colagem de alças de índices distintos, uma depois da outra*

$$D^m \cup (D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1}) \cup \dots \cup (D^{\lambda_n} \times D^{m-\lambda_n}) \quad (3.16)$$

é chamado um disco com alças m -dimensional.

Mais precisamente, um disco com alças é obtido através de três passos:

- (i) Um disco D^m é um m -dimensional.
- (ii) A variedade $D^m \cup_{\varphi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1}$ obtida de D^m pela colagem de uma λ_1 -alça com uma função conexão de classe C^∞ ,

$$\varphi_1 : \partial D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \longrightarrow \partial D^m, \quad (3.17)$$

é um m -dimensional disco com alças, denotado por $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1)$.

(iii) Se $N = \mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ é um m -dimensional disco com alças, então a variedade:

$$N \cup_{\varphi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}, \quad (3.18)$$

obtida a partir de N anexando uma λ_i -alça $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ com uma função conexão de classe C^∞ ,

$$\varphi_i : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \longrightarrow \partial N, \quad (3.19)$$

é um m -dimensional disco com alças, denotado por $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$.

Lembramos que a variedade é suavizada cada vez que uma alça é conectada, de modo que os discos com alças resultantes sejam sempre considerados variedades suaves.

Segundo a descrição acima na colagem de uma 0-alça é nula, esse corresponde ao caso de índice $\lambda_i = 0$ e a função conexão φ_i na notação $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$ não tem sentido, mas a notação φ_i é mantida formalmente. Também, na definição acima embora seja logicamente suficiente para ter apenas as condições (i) e (iii), a condição (ii) é adicionada para ajudar na visualização da imagem geométrica de um disco com alças.

Teorema 3.1.2 ([17]). *Quando uma função de Morse $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada sobre uma variedade compacta M , uma estrutura de discos com alças sobre M é determinada por f . As alças deste disco com alças correspondem aos pontos críticos de f e os índices das alças coincidem com os índices dos correspondentes pontos críticos. Em outras palavras, M pode ser expressa como um disco com alças. Quando uma variedade é expressa como um disco com alças, dizemos que ela admite uma decomposição em alças.*

Demonstração. Suponha que todos os pontos críticos de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tenham valores críticos distintos. Organize os pontos críticos de tal forma que os seus valores críticos estejam em ordem crescente e denotemos-os por $p_0, p_1, \dots, p_n$. Seja λ_i o índice do ponto crítico p_i . Fixemos o campo vetorial gradiente X sobre M definido pela f . O teorema será provado por indução sobre os sub-índices i dos pontos críticos p_i .

Seja c_i o valor crítico de f em p_i e mostremos que $M^{c_i+\epsilon}$ é um disco com alças.

Primeiro, para $i = 0$, o índice do ponto crítico p_0 é zero e p_0 é valor mínimo de f . Portanto, $M^{c_0+\epsilon}$ é difeomorfo ao disco D^m m -dimensional. Do passo (i) da definição de

disco com alças, D^m é de fato um m -dimensional disco com alças, e a hipótese de indução é provado para o caso $i = 0$. Neste caso $M^{c_0+\epsilon}$ é uma 0-alça.

Agora, suponha por indução que $M^{c_{i-1}+\epsilon}$ é um disco com alças $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ e provemos que $M^{c_i+\epsilon}$ é um disco com alças $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$.

Recordemos que $M^{c_i+\epsilon}$ é difeomorfo a uma variedade obtida de $M^{c_{i-1}+\epsilon}$ anexando uma λ_i -alça. A função conexão

$$\varphi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \longrightarrow \partial M^{c_i-\epsilon} \quad (3.20)$$

desta alça é, como mostra a Figura 3.2, determinada naturalmente sem ambiguidade. O intervalo $[c_{i-1} + \epsilon, c_i - \epsilon]$ não possui outros valores críticos, de modo que $M^{c_{i-1}+\epsilon}$ é difeomorfo a $M^{c_i-\epsilon}$ (pelo Teorema 2.1.2). Este difeomorfismo é dado deixando $M^{c_{i-1}+\epsilon}$ fluir ao longo do campo vetorial gradiente X até que ele corresponda a $M^{c_i-\epsilon}$. Seja $\phi : M^{c_{i-1}+\epsilon} \longrightarrow M^{c_i-\epsilon}$ tal difeomorfismo.

Segue da hipótese de indução que $M^{c_{i-1}+\epsilon}$ é um disco com alças $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ e $M^{c_i-\epsilon}$ é difeomorfo a esse mesmo disco com alças. Portanto, a variedade $M^{c_i+\epsilon}$, a qual foi obtida de $M^{c_i-\epsilon}$ anexando uma λ_i -alça, é também difeomorfa a um disco com alças (passo (iii) da definição de disco com alças), isto completa a prova. Vamos investigar a função conexão da nova λ_i -alça com detalhes.

Da hipótese de indução, $M^{c_{i-1}+\epsilon}$ é um disco com alças $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$, de tal forma que o difeomorfismo ϕ acima definido pode ser considerado como um difeomorfismo do disco com alças $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ para $M^{c_i-\epsilon}$.

A λ_i -alça não é colada diretamente ao disco com alças $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ mas sim é colada a $M^{c_i-\epsilon}$ e a sua função conexão, φ em (3.20) é naturalmente determinada. Portanto, quando $M^{c_i-\epsilon}$ é identificada com o disco com alça $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ pelo difeomorfismo ϕ , a λ_i -alça é colado o disco com alças $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ pela composição

$$\phi^{-1} \circ \varphi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \longrightarrow \partial \{\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})\} \quad (3.21)$$

onde ϕ^{-1} é a inversa de ϕ . Se denotamos esta função conexão $\phi^{-1} \circ \varphi$ por φ_i , então $M^{c_i+\epsilon}$

é um disco com alças

$$\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}) \cup_{\varphi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} = \mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i) \quad (3.22)$$

o que completa a prova do teorema. $\square$

Observação 3.1.2. *Segue da prova acima que, quando uma decomposição em alças de uma variedade M é obtida a partir de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$,*

- (i) *A ordem das alças e os seus índices são determinadas pelos pontos críticos de f , e*
- (ii) *as funções conexão $\varphi_i (= \phi^{-1} \circ \varphi)$ das alças são determinadas pelo campo vetorial gradiente X de f (desde que ϕ é determinada por X).*

Portanto, para a mesma f , a estrutura da decomposição em alças deve variar se mudamos a escolha do campo vetorial.

Exemplo 3.1.3 (O Espaço Projetivo Real $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, [17]). *Seja $X = \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$, em X definimos a seguinte relação de equivalência:*

Dados $x, y \in X$, $x \sim y$ se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $y = \alpha x$; isto é, $x \sim y$ se, e somente se, existe uma reta passando por $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ tal que x e y pertencem a ela.

Denotamos por $[x]$ a classe de equivalência de $x \in X$, e o quociente de X por $\sim$ é

$$\frac{X}{\sim} = \{[x] : x \in X\}.$$

A função,

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow \frac{X}{\sim} \\ x &\mapsto \pi(p) = [x] \end{aligned}$$

é sobrejetora e ainda $x \sim y$ se, e somente se, $\pi(x) = \pi(y)$.

Definimos em $\frac{X}{\sim}$ a seguinte topologia:

$$\tau = \left\{ B \subset \frac{X}{\sim} : \pi^{-1}(B) \text{ é aberto em } X \right\}$$

e τ é a topologia mais fina de modo que a função π é contínua.

Chamamos de Espaço Projetivo Real ao conjunto $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) := \frac{X}{\sim}$, isto é, $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ é o

conjunto das retas de $\mathbb{R}^{m+1}$ que passam pela origem $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Vamos introduzir em $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ uma estrutura diferenciável.

Observe que, se $x_i \neq 0$, então:

$$[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right]. \quad (3.23)$$

Consideremos os subconjuntos $V_1, \dots, V_{m+1}$ dados por:

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}] : x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, m+1. \quad (3.24)$$

Geometricamente, V_i é o conjunto das retas do $\mathbb{R}^{m+1}$ que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x_i = 0$.

Defina $\phi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow V_i$ por:

$$\phi_i(y_1, \dots, y_m) = [y_i, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_m], \quad (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m; \quad (3.25)$$

e considere a família $\{(\mathbb{R}^m, \phi_i)\}$. Esta é uma estrutura diferenciável em $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$.

Em resumo, $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ é uma variedade m -dimensional coberta por $(m+1)$ vizinhanças coordenadas V_i , onde V_i é constituído pelas retas de $\mathbb{R}^{m+1}$ que não estão no hiperplano $x_i = 0$. Além disso, em cada V_i temos coordenadas

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right), \quad (3.26)$$

onde $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$ são as coordenadas de $\mathbb{R}^{m+1}$.

A condição suficiente e necessária para que dois pontos correspondentes em $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ coincidam é dada por

$$[y_1, \dots, y_m, y_{m+1}] = [x_1, \dots, x_m, x_{m+1}] \quad (3.27)$$

ou seja

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) \sim (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}), \quad (3.28)$$

portanto, existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = \alpha(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}). \quad (3.29)$$

Usando esta condição, provemos que $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ é compacto como segue:

Para algum ponto $[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]$ de $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, podemos escolher α em (3.29) tal que $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}$ satisfaz:

$$y_1^2 + \dots + y_m^2 + y_{m+1}^2 = 1 \quad (3.30)$$

De fato, para algum ponto $[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]$ de $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ que coincida com $[y_1, \dots, y_m, y_{m+1}]$, segue de (3.29) que existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $y_i = \alpha x_i$, para todo $i = 1, \dots, m+1$ então segue que

$$y_i^2 = \alpha^2 x_i^2 \quad (3.31)$$

para todo $i = 1, \dots, m+1$. Portanto, $y_1^2 + \dots + y_m^2 + y_{m+1}^2 = 1$, se e só se, $\alpha^2(x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2) = 1$. Como $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ basta escolher

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2}} = \frac{1}{\|x\|}, \quad (3.32)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclideana e temos (3.30).

Segue ainda da condição (3.30), que $(y_1, \dots, y_m, y_{m+1})$ é um ponto da esfera unitária S^m em $\mathbb{R}^{m+1}$, e além disso, em $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, $[y_1, \dots, y_m, y_{m+1}]$ e $[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]$ representam o mesmo conjunto. Portanto considere a função

$$\begin{aligned} \Pi : \quad S^m &\longrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \\ [y_1, \dots, y_m, y_{m+1}] &\mapsto (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) \end{aligned}$$

Afirmção 1: Π é uma função bem definida.

De fato, dado $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in S^m$, existe $\alpha = \frac{1}{\|x\|} \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $y = \alpha x \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, então existe a reta que passa pela origem e por $x \in S^m$, além disso $x \in S^m$ é único ponto em $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ com essa propriedade, logo concluímos que Π está bem definida.

Afirmção 2: Π é uma função sobrejetora, isto é, $\Pi(S^m) = \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$.

De fato, sejam $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}), (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) \in S^m$ tais que,

$$\Pi(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = \Pi(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}), \quad (3.33)$$

então $[y_1, \dots, y_m, y_{m+1}] = [x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]$ e existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que as igualdades em (3.31) são satisfeitas, além disso,

$$\begin{aligned} y_1^2 + \dots + y_{m+1}^2 &= 1 \\ x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

logo $\alpha = \pm 1$ e

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = \pm(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}). \quad (3.34)$$

Como cada reta que passa pela origem intersecta à esfera S^m em exatamente dois pontos antípodos considere a seguinte relação de equivalência em S^m

$$x, y \in S^m, \quad x \sim y \quad \text{se, e somente se,} \quad y = \pm x.$$

Observe que $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) = \frac{S^m}{\sim}$, isto é, $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) = \Pi(S^m)$, e segue a afirmação.

Como Π é uma função contínua e S^m é um conjunto compacto, temos que $\Pi(S^m) = \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, é um conjunto compacto. Portanto é um espaço topológico compacto.

Defina a função $f : \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f([x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]) = \frac{a_1 x_1^2 + \dots + a_m x_m^2 + a_{m+1} x_{m+1}^2}{x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2}, \quad (3.35)$$

onde $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}$ são constantes reais arbitrárias e fixadas satisfazendo $a_1 < a_2 < \dots < a_m < a_{m+1}$. Mostremos que f está bem definida. Se $[y_1, \dots, y_m, y_{m+1}] = [x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]$,

então existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = \alpha(x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$, logo

$$\begin{aligned}
 f([y_1, \dots, y_m, y_{m+1}]) &= f([\alpha x_1, \dots, \alpha x_m, \alpha x_{m+1}]) \\
 &= \frac{a_1 \alpha^2 x_1^2 + \dots + a_m \alpha^2 x_m^2 + a_{m+1} \alpha^2 x_{m+1}^2}{\alpha^2 x_1^2 + \dots + \alpha^2 x_{m+1}^2} \quad (\text{pela definição de } f) \\
 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2} \left(\frac{a_1 x_1^2 + \dots + a_m x_m^2 + a_{m+1} x_{m+1}^2}{x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2} \right) \\
 &= f([x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]).
 \end{aligned}$$

Fixe um subíndice i e considere o conjunto aberto de $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}] : x_i \neq 0\}. \quad (3.36)$$

Existe um sistema de coordenadas m -dimensional definido por $(X_1, \dots, X_m)$ sobre V_i dado por

$$X_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, X_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, X_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, X_m = \frac{x_m}{x_i} \quad (3.37)$$

Observe que o subíndice de X e x muda na i -ésima coordenada.

Dividindo o numerador e o denominador do lado direito de (3.35) por x_i^2 , temos f em coordenadas locais $(X_1, \dots, X_m)$:

$$f(X_1, \dots, X_m) = \frac{a_1 X_1^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_{m+1} X_m^2}{X_1^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \dots + X_m^2}. \quad (3.38)$$

Para encontrar os valores críticos de f , derivemos inicialmente f com respeito a X_m .

Denotando por

$$A = A(X_1, \dots, X_m) : = a_1 X_1^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_{m+1} X_m^2.$$

$$B = B(X_1, \dots, X_m) : = X_1^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \dots + X_m^2.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = \frac{\frac{\partial A}{\partial X_m} B - \frac{\partial B}{\partial X_m} A}{B^2}.$$

onde

$$\frac{\partial A}{\partial X_m} = 2a_{m+1}X_m \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial B}{\partial X_m} = 2X_m \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X_m} B &= 2a_{m+1}X_m \cdot (X_1^2 + \cdots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \cdots + X_m^2) \\ &= 2a_{m+1}X_m X_1^2 + \cdots + 2a_m X_m X_{i-1}^2 + 2a_{m+1}X_m + \\ &\quad + 2a_{m+1}X_m X_i^2 + \cdots + 2a_{m+1}X_m^3 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial X_m} A &= 2X_m (a_1 X_1^2 + \cdots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \cdots + a_{m+1} X_m^2) \\ &= 2a_1 X_1^2 X_m + \cdots + 2a_{i-1} X_m X_{i-1}^2 + 2a_i X_m + 2a_{i+1} X_m X_i^2 + \cdots + \\ &\quad + 2a_m X_m^2 + 2a_{m+1} X_m^3. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X_m} B - \frac{\partial B}{\partial X_m} A &= 2a_{m+1}X_m X_1^2 + \cdots + 2a_m X_m X_{i-1}^2 + 2a_{m+1}X_m + \\ &\quad + 2a_{m+1}X_m X_i^2 + \cdots + 2a_{m+1}X_m^3 - 2a_1 X_1^2 X_m - \cdots \\ &\quad - 2a_{i-1} X_m X_{i-1}^2 - 2a_i X_m - 2a_{i+1} X_m X_i^2 - \cdots \\ &\quad - 2a_m X_m^2 - 2a_{m+1} X_m^3. \end{aligned}$$

Então cancelando e agrupando termos do lado direito da equação anterior obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X_m} B - \frac{\partial B}{\partial X_m} A &= 2X_m \{ (a_{m+1} - a_1)X_i^2 + \cdots + (a_m - a_{i-1})X_{i-1}^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{m+1} - a_m)X_{m-1}^2 + (a_{m+1} - a_i) \}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = \frac{2X_m \{ (a_{m+1} - a_1)X_i^2 + \cdots + (a_m - a_{i-1})X_{i-1}^2 + \cdots + (a_{m+1} - a_m)X_{m-1}^2 + (a_{m+1} - a_i) \}}{(X_1^2 + \cdots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \cdots + X_m^2)^2} \quad (3.44)$$

Como a_{m+1} é o menor de todos os a'_j s, $j = 1, \dots, m$, então o lado direito da expressão

acima é zero se, e somente se, $X_m = 0$.

Agora consideramos a restrição $f|_{X_m=0}$ de f sobre $X_m = 0$.

$$\begin{aligned} & f|_{X_m=0}(X_1, \dots, X_{m-1}) \\ &= \frac{a_1 X_1^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_m X_{m-1}^2}{X_1^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \dots + X_{m-1}^2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Derivando $f|_{X_m=0}$ com respeito a X_{m-1} , temos que a derivada de $f|_{X_m=0}$ é zero se, e somente se, $X_{m-1} = 0$, pelo mesmo argumento usado acima. Continuando este processo, vemos que o único ponto crítico de f na vizinhança coordenada V_i deve satisfazer

$$X_i = \dots = X_{m-1} = X_m = 0.$$

Agora derivamos (3.38) com relação a X_1 e usando o fato que a_1 é menor que $a_2, \dots, a_{m+1}$ vemos que $\frac{\partial f}{\partial X_1}$ é zero se, e somente se, $X_1 = 0$. Além disso, derivando $f|_{X_1=0}$ com respeito a X_2 vemos que a derivada é zero se, e somente se, $X_2 = 0$. Repetindo este mesmo argumento, concluímos que os pontos críticos de f em V_i devem satisfazer

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{i-1} = 0.$$

Em resumo, o único ponto crítico de f em V_i é a origem $(0, \dots, 0)$ do sistema de coordenadas locais $(X_1, \dots, X_m)$. Na notação $[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}]$, o ponto $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ é o único ponto crítico em V_i , onde a entrada 1 está na i -ésima coordenada.

Calculemos a matriz Hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k}(0)\right)_{j,k=1}^m$, onde $0 = (0, \dots, 0)$.

Suponha que $j < i < k$, então

$$\begin{aligned} & f(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k, \dots, X_m) \\ &= \frac{a_1 X_1^2 + \dots + a_j X_j^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots + a_k X_k^2 + \dots + a_{m+1} X_m^2}{X_1^2 + \dots + X_j^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \dots + X_k^2 + \dots + X_m^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Denote por P e Q o numerador e o denominador da equação (3.46). Então pela regra do

quociente segue que

$$\frac{\partial f}{\partial X_j} = \frac{\frac{\partial P}{\partial X_j} Q - \frac{\partial Q}{\partial X_j} P}{Q^2}. \quad (3.47)$$

onde $\frac{\partial P}{\partial X_j} = 2a_j X_j$, e $\frac{\partial Q}{\partial X_j} = 2X_j$. Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial X_j} Q(X_1, \dots, X_m) \\ &= 2a_j X_j (X_1^2 + \dots + X_j^2 + \dots + X_{i-1}^2 + 1 + X_i^2 + \dots + X_k^2 + \dots + X_m^2) \\ &= 2a_j X_j X_1^2 + \dots + 2a_j X_j^3 + \dots + 2a_j X_j X_{i-1}^2 + 2a_j X_j + 2a_j X_j X_i^2 + \dots \\ & \quad \dots + 2a_j X_j X_k^2 + \dots + 2a_j X_j X_m^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial X_j} P(X_1, \dots, X_m) \\ &= 2X_j (a_1 X_1^2 + \dots + a_j X_j^2 + \dots + a_{i-1} X_{i-1}^2 + a_i + a_{i+1} X_i^2 + \dots \\ & \quad \dots + a_k X_k^2 + \dots + a_{m+1} X_m^2) \\ &= 2a_1 X_j X_1^2 + \dots + 2a_j X_j^3 + \dots + 2a_{i-1} X_j X_{i-1}^2 + 2a_i X_j + \\ & \quad + 2a_{i+1} X_j X_i^2 + \dots + 2a_k X_j X_k^2 + \dots + 2a_{m+1} X_j X_m^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial X_j} Q - \frac{\partial Q}{\partial X_j} P \\ &= 2a_j X_j X_1^2 + \dots + 2a_j X_j^3 + \dots + 2a_j X_j X_{i-1}^2 + 2a_j X_j + 2a_j X_j X_i^2 + \dots \\ & \quad \dots + 2a_j X_j X_k^2 + \dots + 2a_j X_j X_m^2 - 2a_1 X_j X_1^2 + \dots - 2a_j X_j^3 - \dots \\ & \quad \dots - 2a_{i-1} X_j X_{i-1}^2 - 2a_i X_j - 2a_{i+1} X_j X_i^2 - \dots - 2a_k X_j X_k^2 - \dots - 2a_{m+1} X_j X_m^2 \\ &= 2X_j(a_j - a_1)X_1^2 + \dots + 2X_j(a_j - a_{i-1})X_{i-1}^2 + 2X_j(a_j - a_i) + \\ & \quad + 2X_j(a_j - a_{i+1})X_i^2 + \dots + 2X_j(a_j - a_k)X_k^2 + \dots + 2X_j(a_j - a_{m+1})X_m^2 \\ &= 2X_j \{ (a_j - a_1)X_1^2 + \dots + (a_j - a_{i-1})X_{i-1}^2 + (a_j - a_{i+1})X_i^2 + \dots \\ & \quad \dots + (a_j - a_k)X_k^2 + \dots + (a_j - a_{m+1})X_m^2 + (a_j - a_i) \}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Chame $K = \frac{\partial P}{\partial X_j} Q - \frac{\partial Q}{\partial X_j} P$, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_j^2} = \frac{\frac{\partial K}{\partial X_j} Q^2 - 2Q \frac{\partial Q}{\partial X_j} K}{Q^4}. \quad (3.51)$$

Como anteriormente temos que $\frac{\partial K}{\partial X_j}$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial X_j} &= 2 \{ (a_j - a_1) X_1^2 + \cdots + (a_j - a_{i-1}) X_{i-1}^2 + (a_j - a_{i+1}) X_i^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_j - a_k) X_k^2 + \cdots + (a_j - a_{m+1}) X_m^2 + (a_j - a_i) \}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_j^2}(0) = 2(a_j - a_i), \quad \text{para todo } j = 1, \dots, m+1. \quad (3.53)$$

De maneira análoga temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_j} = \frac{\frac{\partial K}{\partial X_k} Q^2 - 2Q \frac{\partial Q}{\partial X_k} K}{Q^4}. \quad (3.54)$$

com

$$\frac{\partial K}{\partial X_k} = 4(a_j - a_k) X_j X_k; \quad (3.55)$$

logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_j}(0) = 0 \quad \text{para todo } k, j = 1, \dots, m+1. \quad (3.56)$$

Desta forma se $j = k$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_j^2} = 2(a_j - a_i) = 2(a_k - a_i), \quad (3.57)$$

e se $j \neq k$ então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_j}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k}(0) = 0. \quad (3.58)$$

Portanto, a matriz Hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k}\right)$ de f na origem é

$$\begin{pmatrix} 2(a_1 - a_i) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 2(a_{i-1} - a_i) & & \\ & & & 2(a_{i+1} - a_i) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2(a_{m+1} - a_i) \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

onde todas as outras entradas diferentes à diagonal são iguais a 0. Como $a_1 < \dots < a_i < \dots < a_{m+1}$ então temos que

$$\begin{aligned} (a_1 - a_i) &< 0, \dots, (a_{i-1} - a_i) < 0; \\ (a_{i+1} - a_i) &> 0, \dots, (a_{m+1} - a_i) > 0; \end{aligned} \quad (3.60)$$

logo esta matriz tem as primeiras $(i-1)$ -entradas negativas e as demais entradas positivas, portanto, $\det \text{Hess}_0 f \neq 0$ e $0 \in V_i$ é um ponto crítico não-degenerado com índice $(i-1)$. O valor de f neste ponto é a_i .

Desde que $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ está coberto por $(m+1)$ vizinhanças coordenadas V_i , $i = 1, \dots, m+1$, temos que, a função $f : \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ construída tem $(m+1)$ pontos críticos cujos índices são $0, 1, \dots, m$ (em ordem crescente). Portanto, $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ tem uma decomposição em alças

$$\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) = D^m \cup (D^1 \times D^{m-1}) \cup (D^2 \times D^{m-2}) \dots (\cup D^{m-1} \times D^1) \cup D^m. \quad (3.61)$$

Em particular, o 1-dimensional espaço projetivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = D^1 \cup D^1$ é difeomorfo ao círculo S^1 .

Exemplo 3.1.4 (O Toro $\mathbb{T}^2$). A seguinte equação paramétrica:

$$\phi(x_1, x_2) = (r \sin x_1, (R + r \cos x_1) \sin x_2, (R + r \cos x_1) \cos x_2); \quad (3.62)$$

com $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, representa um Toro 2-dimensional mergulhado em $\mathbb{R}^3$ obtido pela revolução de um círculo de raio r no plano xy com seu centro a uma distância de $R > 0$

do eixo x , em torno do eixo x . A função ϕ não é injetora. Então temos que considerar restrições de ϕ a subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$.

Seja ϕ_1 a restrição de ϕ ao conjunto aberto

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 2\pi \text{ e } 0 < x_2 < 2\pi\}; \quad (3.63)$$

ϕ_2 a restrição de ϕ ao conjunto aberto

$$U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 2\pi \text{ e } -\pi < x_2 < \pi\}; \quad (3.64)$$

ϕ_3 a restrição de ϕ ao conjunto aberto

$$U_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x_1 < \pi \text{ e } 0 < x_2 < 2\pi\}; \quad (3.65)$$

ϕ_4 a restrição de ϕ ao conjunto aberto

$$U_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x_1 < \pi \text{ e } -\pi < x_2 < \pi\}; \quad (3.66)$$

respectivamente. A família $\{\phi_i, U_i\}_{i=1}^4$ é um atlas para $\mathbb{T}^2$. Como $\mathbb{T}^2$ é homeomorfo ao produto $S^1 \times S^1$ então $\mathbb{T}^2$ é uma variedade compacta.

Consideremos $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(r \sin x_1, (R + r \cos x_1) \sin x_2, (R + r \cos x_1) \cos x_2) = (R + r \cos x_1) \cos x_2. \quad (3.67)$$

Vista em coordenadas locais, $f(x_1, x_2) = (R + r \cos x_1) \cos x_2$, então os pontos críticos de f são dados pelo $\text{grad} f = 0$, onde $0 = (0, 0)$; assim $\text{grad} f \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Portanto segue que

$$-r \sin x_1 \cos x_2 = 0 \quad \text{e} \quad -(R + r \cos x_1) \sin x_2 = 0; \quad (3.68)$$

Como $r > 0$ temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sin x_1 = 0 & \text{ou} & \cos x_2 = 0 \\ -(R + r \cos x_1) = 0 & \text{ou} & \sin x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Desde que $R + r \cos x_1 \neq 0$, $\sin x_2 = 0$ e $x_1 = 0$ ou π e $x_2 = 0$ ou π . Desta forma fornecemos os seguintes pontos: $(x_1, x_2) = (0, 0); (0, \pi); (\pi, 0);$ e (π, π) que correspondem por meio de ϕ aos seguintes pontos críticos de f :

$$\begin{aligned} p_0 &= \phi(0, 0) = (r \sin 0, (R + r \cos 0) \sin 0, (R + r \cos 0) \cos 0) = (0, 0, (R + r)) \\ p_1 &= \phi(0, \pi) = (r \sin 0, (R + r \cos 0) \sin \pi, (R + r \cos 0) \cos \pi) = (0, 0, -(R + r)) \\ p_2 &= \phi(\pi, 0) = (r \sin \pi, (R + r \cos \pi) \sin 0, (R + r \cos \pi) \cos 0) = (0, 0, (R - r)) \\ p_3 &= \phi(\pi, \pi) = (r \sin \pi, (R + r \cos \pi) \sin \pi, (R + r \cos \pi) \cos \pi) = (0, 0, -(R - r)). \end{aligned}$$

Estes pontos são todos não-degenerados. De fato,

$$\begin{aligned} \text{Hess}_p(f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r \cos x_1 \cos x_2 & r \sin x_1 \sin x_2 \\ r \sin x_1 \sin x_2 & -(R + r \cos x_1) \cos x_2 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.70)$$

Assim, em coordenadas locais (x_1, x_2) , podemos deduzir os seguintes fatos:

(i.)

$$\text{Hess}_{p_0}(f) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -(R + r) \end{pmatrix}; \quad (3.71)$$

com $\det \text{Hess}_{p_0}(f) = r(R + r) > 0$, logo p_0 é um ponto crítico não-degenerado de f com índice de Morse igual a 2.

(ii.)

$$\text{Hess}_{p_1}(f) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r) \end{pmatrix}; \quad (3.72)$$

com $\det \text{Hess}_{p_1}(f) = r(R + r) > 0$, logo p_1 é um ponto crítico não-degenerado de f com índice de Morse igual a 0.

(iii)

$$Hess_{p_2}(f) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -(R-r) \end{pmatrix}; \quad (3.73)$$

com $\det Hess_{p_2}(f) = -r(R+r) < 0$, logo p_2 é um ponto crítico não-degenerado de f com índice de Morse igual a 1.

(iv.)

$$Hess_{p_3}(f) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & (R-r) \end{pmatrix}; \quad (3.74)$$

com $\det Hess_{p_3}(f) = -r(R-r) > 0$ (note que $r > R$) logo p_0 é um ponto crítico não-degenerado de f com índice de Morse igual a 1.

Portanto, $\mathbb{T}^2$ tem quatro pontos críticos não-degenerados a saber, p_1, p_2, p_3, p_0 cujos índices de Morse são 0,1,1,2 respectivamente e admite uma decomposição em alças:

$$\mathbb{T}^2 = D^2 \cup (D^1 \times D^1) \cup (D^1 \times D^1) \cup D^2. \quad (3.75)$$

Esse exemplo corresponde ao exemplo do toro que iniciamos essa dissertação.

Capítulo 4

Teoria de Morse-Bott

No conjunto das funções diferenciáveis encontrarmos muitas funções que admitem algum tipo de simetria. Da simetria segue que o conjunto de pontos críticos da função não será um conjunto de pontos isolados e, portanto, tais funções são degeneradas no sentido de Morse. Por outro lado, se passamos das funções aos sistemas dinâmicos integráveis, é natural considerarmos conjuntos singulares não isolados como por exemplo, das órbitas periódicas. Tal fato sugere uma generalização da teoria de Morse, como realizada por Rauol Bott em [6]. Nesse capítulo iremos apresentar a generalização do lema de Morse para as funções de Morse-Bott.

Definição 4.0.5. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $S \subset M$ uma subvariedade Riemanniana. Defina para um dado $p \in S$, o vetor $\eta \in T_p M$ chamado vetor normal a S , como o vetor que satisfaz $g(\eta, v) = 0$, para todo $v \in T_p S$, isto é, η é ortogonal a $T_p S$. O conjunto $N_p S$ de todos os η que são ortogonais a $T_p S$ é chamado de **espaço normal** à S em p .*

Assim como o espaço do fibrado tangente de uma variedade é definido a partir de todos os espaços tangentes à variedade, o espaço do fibrado normal vS de S é definido como

$$vS := \bigcup_{p \in S} N_p S. \quad (4.1)$$

Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 4.0.6. O fibrado normal a S em M , denotado por vS é o fibrado quociente $T_S M / TS$, onde

$$T_S M := TM|_S = \bigcup_{p \in S} \{p\} \times T_p M. \quad (4.2)$$

Note que esta definição não envolve uma estrutura Riemanniana sobre M ou S . No entanto, queremos representar vS como um subfibrado de $T_S M$ e para isso precisaremos a estrutura Riemanniana. Portanto, assumiremos que M tem uma métrica riemanniana e representamos vS como o fibrado complementar de TS em $T_S M$, isto é,

$$TM|_S := T_S M = TS \oplus vS. \quad (4.3)$$

vS é um subespaço vetorial de dimensão $m - s$ (=codimensão de M), portanto uma variedade s -dimensional.

Definição 4.0.7. Uma subvariedade compacta $S \subset M$ é chamada de subvariedade crítica não-degenerada de $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ se $S \subset \text{Crit}(f)$ e $\ker \text{Hess}_p(f) = T_p S$ para todo ponto $p \in S$.

Dada M variedade m -dimensional e $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ então os pontos críticos não-degenerados de f são isolados (ver Lema 1.2.2). Portanto, se f é uma função de Morse, o conjunto $\text{Crit}(f)$ é uma variedade 0-dimensional.

Consideremos uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cujo conjunto crítico $\text{Crit}(f)$ é uma união disjunta $\bigsqcup_i C_i$ de subvariedades suaves conexas de dimensão $d_i \geq 0$, chamadas de subvariedades críticas.

Escolhemos uma métrica riemanniana sobre M para decompor $TM|_{C_i}$ como

$$TM|_{C_i} = TC_i \oplus vC_i, \quad \forall i. \quad (4.4)$$

onde TC_i é o fibrado tangente de C_i e vC_i é o fibrado normal de C_i .

Dado $p \in C_i$, $v \in T_p C_i$, $w \in T_p M$ e $\text{Hess}_p(f)$ temos:

$$\text{Hess}_p(f)(v, w) = V(W(f))(p) = \sum_{i=1}^m v_i df(W) |_{C_i} = 0 \quad (4.5)$$

pois $df(W)|_{C_i} = 0$ se C_i é uma subvariedade crítica. Logo $Hess_p(f)$ é nulo quando restrito a $T_p C_i$. Portanto, o Hessiano $Hess_p(f)$ induz uma forma bilinear simétrica $\mathcal{H}ess_p(f)$ sobre $v_p C_i \approx T_p M / T_p C_i$.

Definição 4.0.8. *Uma função $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ é dita uma função de Morse-Bott quando $Crit(f)$ é a união de subvariedades críticas não-degeneradas, isto é, para cada C_i e $p \in C_i$, a Hessiana $\mathcal{H}ess_p(f)$ é não-degenerada, ou seja,*

$$\mathcal{H}ess_p(f)(v, w) = 0, \quad \forall w \in T_p C_i \quad \Leftrightarrow v = 0; \quad (4.6)$$

ou seja, $\ker \mathcal{H}ess_p(f) = T_p C_i$ para todo i .

Neste caso dizemos que a Hessiana é não-degenerada na direção normal às subvariedades críticas.

Exemplo 4.0.9. (a) *Toda função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre uma m -variedade é uma função de Morse-Bott. Cada subvariedade crítica é um conjunto unitário, a saber, os pontos críticos de f . Se M é compacta, então temos um número finito de subvariedades críticas.*

(b) *Uma função ciclo é uma função escalar sobre uma variedade M cujos pontos críticos de uma ou várias componentes conexas são homeomorfas à S^1 , também chamadas de laços críticos. Vale observar que em geral não se supõe que as subvariedades críticas sejam não-degeneradas no sentido de Morse-Bott mas quando estamos sob essa hipótese a função ciclo é chamada de **função de Morse ciclo**, ela é uma extensão da noção de função Morse ciclo introduzida [26]. Então as funções de Morse ciclo são casos especiais de funções de Morse-Bott onde os conjuntos críticos são uniões disjuntas de círculos [16].*

Como consequência da Definição 4.0.8, dado um ponto $p \in C$, com C subvariedade crítica não-degenerada de M dada pelas $(m - k)$ equações $x_{k+1} = 0, \dots, x_m = 0$ e, se $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ é um sistema de coordenadas locais em M em torno de p , então

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \bigg|_p \neq 0, \quad \text{para } i, j = k + 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Além disso, dado $p \in C$, considere uma vizinhança tubular V de C com raio ϵ . Segue da caracterização dada pela expressão em (4.7) que, se η é a direção normal a C por p

então a função f restrita a η é função de Morse e p é ponto crítico não degenerado.

Note que esta estrutura automaticamente nos dá uma maneira de decompor o fibrado normal vC , em parte negativa e positiva

$$vC = v^+C \oplus v^-C, \quad (4.8)$$

onde v^+C e v^-C são respectivamente os subespaços positivo e negativo da Hessiana de f .

Definição 4.0.10. *Seja C uma subvariedade crítica n -dimensional, dizemos que k é o índice de Morse-Bott de f em p , com $p \in C$, quando k é a dimensão do subespaço v^-C de vC para o qual $\mathcal{H}ess_p(f)$ é definida negativa, isto é, $k = \dim v^-C$ e $\mathcal{H}ess_p(f)(v, v) < 0$, $\forall v \in v^-C$.*

Vejamos dois exemplos simples que ilustram a definição acima.

Exemplo 4.0.11. (a) **(O toro)** A seguinte equação paramétrica

$$\phi(x_1, x_2) = ((R + r \cos x_1) \cos x_2, (R + r \cos x_1) \sin x_2, r \sin x_1), \quad (4.9)$$

com $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, representa o toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{R}^3$, obtido pela revolução de um círculo de raio r no plano yz com seu centro a uma distância $R > r$ do eixo y , em torno do eixo x . Veja a Figura 4.1. A função $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

Figura 4.1: O toro $\mathbb{T}^2$ mergulhado em $\mathbb{R}^3$

$$f((R + r \cos x_1) \cos x_2, (R + r \cos x_1) \sin x_2, r \sin x_1) = r \sin x_1, \quad (4.10)$$

é uma função de Morse-Bott. As subvariedades críticas não degeneradas de f em $\mathbb{T}^2$, são dois círculos, de índices 0 e 1 respectivamente.

De fato, seja $p \in \mathbb{T}^2$. Então p é um ponto crítico de f se, e somente se, $\text{grad } f = 0$, onde $0 = (0, 0)$; assim $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = r \cos x_1 = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Portanto segue que

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x_1 = -\frac{\pi}{2}, \text{ e } x_2 = \text{cte.} \quad (4.11)$$

Portanto, fornecemos os seguintes pontos: $(\frac{\pi}{2}, x_2)$ e $(-\frac{\pi}{2}, x_2)$, que por meio de ϕ aos seguintes pontos críticos de f :

$$\begin{aligned} C_{\frac{\pi}{2}} &= \left(\left(R + r \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \cos x_2, \left(R + r \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \sin x_2, r \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= (R \cos x_2, R \sin x_2, r) \\ C_{-\frac{\pi}{2}} &= \left(\left(R + r \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \cos x_2, \left(R + r \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \sin x_2, r \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= (R \cos x_2, R \sin x_2, -r). \end{aligned}$$

Notemos que $C_{\frac{\pi}{2}}$ e $C_{-\frac{\pi}{2}}$ são círculos de raio $R > 0$, localizados em $z = \pm r$. Vejamos que estes círculos são não-degenerados. Desde que a matriz Hessiana de f em um ponto p é dada por

$$\text{Hess}_p(f) = \begin{pmatrix} -r \sin x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, em coordenadas locais (x_1, x_2) , podemos deduzir que

$$\text{Hess}_{C_{\frac{\pi}{2}}}(f) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

e

$$\text{Hess}_{C_{-\frac{\pi}{2}}}(f) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $p \in C_{\frac{\pi}{2}}$, então $p = (R \cos x_2, R \sin x_2, r)$, com $R > r$ e para algum x_2 . Sem perda de generalidade podemos escolher $x_2 = 0$.

Parametrizando a curva por p , $(\alpha(x_2), \beta(x_2), r) = (R \cos x_2, R \sin x_2, r)$, temos que $v \in T_p C_{\frac{\pi}{2}}$ se, e somente se, $v = \frac{d\alpha}{dx_2} \Big|_{x_2=0} = (0, R, 0)$. Note que $v \in \ker \text{Hess}_p(f)$. De fato, se $w = (w_1, w_2) \in \ker \text{Hess}_p(f)$ então $w_1 = 0$; portanto $w \in T_p C_{\frac{\pi}{2}}$. Logo

$\ker \text{Hess}_p(f) = T_p C_{\frac{\pi}{2}}$. Isto mostra que $C_{\frac{\pi}{2}}$ é não-degenerado

Ainda, o índice de $C_{\frac{\pi}{2}}$ é um, pois a direção normal a $C_{\frac{\pi}{2}}$ é a direção $\eta = (1, 0)$ e a $\text{Hess}_p \left(f \Big|_{\eta} \right) < 0$. Analogamente, é mostrado que $C_{-\frac{\pi}{2}}$ é não-degenerado de índice zero.

(b)(**A esfera S^2 .**) Considere a esfera $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Defina $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y, z) = -z^2$. Os pontos críticos são (1) o polo norte $(0, 0, 1)$, (2) todo ponto do equador $z = 0$, e (3) o polo sul $(0, 0, -1)$. Ainda podemos verificar que (1) e (3) são pontos críticos não-degenerados de índices zero e (2) são pontos críticos de índice um.

Como uma generalização do Lema de Morse enunciamos o seguinte lema conhecido como *Lema de Morse-Bott*.

Lema 4.0.3 ([3]). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Bott, C uma componente conexa de $\text{Crit}(f)$ de dimensão n , e $p \in C$. Então existe uma vizinhança aberta U de p e uma carta suave $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde $m = \dim(M)$, tal que:*

- (i) $\phi(p) = 0$;
- (ii) $\phi(U \cap C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} : y = 0\}$ e
- (iii) $(f \circ \phi^{-1})(x, y) = f(C) - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \cdots + y_{m-n}^2$, onde $k \leq m - n$ é o índice de $\text{Hess}_p(f)$ e $f(C)$ é o valor comum de f em C .

Este lema implica que o índice k de $\text{Hess}_p(f)$ é localmente constante, ou seja ele é o mesmo para todo ponto $p \in C$. Dizemos que C é uma variedade crítica de índice k . Vejamos alguns resultados preparatórios para a prova da Lemma de Morse-Bott.

Proposição 4.0.4 ([3]). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida sobre uma vizinhança conexa U de $0 \in \mathbb{R}^m$. Se $f(0) = 0$, então existe funções g_i , C^∞ , com $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ tal que:*

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m). \quad (4.12)$$

Se $f(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$, para $i = 1, \dots, m$ então existem funções h_{ij} , C^∞ , com $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ tal que

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m) = {}^t x S_x x \quad (4.13)$$

onde x é o vetor coluna transposto de ${}^t x = (x_1, \dots, x_m)$, e $S_m = (S_{ij}(x))$ é a matriz simétrica com entradas

$$S_{ij}(x) = \frac{1}{2} (h_{ij}(x) + h_{ji}(x)) \quad (4.14)$$

Demonstração. Temos $\frac{d}{dt}f(tx) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_i)$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Defina $g_i(x_1, \dots, x_m) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$. Observamos que $g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ e obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}f(tx) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Se $f(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, para $i = 1, \dots, m$, então repetindo os mesmos argumentos a $g_i(x_1, \dots, x_m)$, e como $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ temos: $g_i(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m)$, onde as h_{ij} são funções C^∞ com

$$h_{ij}(x_1, \dots, x_m) = \int_0^1 \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(sx) ds; \quad (4.15)$$

$$h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0). \quad (4.16)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m) \\ &= \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m) = {}^t x S_x x. \end{aligned} \quad (4.17)$$

□

Lema 4.0.5 ([3]). *Seja $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ a matriz diagonal com entradas $a_{jj} = \pm 1$, para todo $j = 1, \dots, m$. Então existe uma vizinhança U , de A , no espaço vetorial das matrizes simétricas $\left(\approx \mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}\right)$ e uma função C^∞ , $P : U \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ tal que $P(A) = I_{m \times m}$ e para toda $S \in U$, se $P(S) = Q$ então ${}^t Q S Q = A$.*

Demonstração. Procederemos por indução sobre m . Primeiro, supomos $m = 1$ e $A = (a)$ com $a = \pm 1$. Se $S = (s)$ é alguma matriz suficientemente próxima a A , então s será não-zero com o mesmo sinal de a , e definimos $P(S) = Q = \left(\frac{1}{\sqrt{|s|}}\right)$. Então P é C^∞ tal que

$$P(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}\right) = (1), \quad (4.18)$$

e

$$\begin{aligned} {}^tQSQ &= \left(\frac{1}{\sqrt{|s|}}\right)(s)\left(\frac{1}{\sqrt{|s|}}\right) \\ &= \left(\frac{s}{\sqrt{|s|^2}}\right) = (\pm 1) = (a) = A. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora seja $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$, onde $a_{jj} = \pm 1$, para todo $j = 1, \dots, m$, e assumamos que pela hipótese de indução que existe uma vizinhança U_1 de $A_1 = \text{diag}(a_2, \dots, a_m)$ no espaço vetorial das matrizes simétricas $(m-1) \times (m-1)$ tal que, para toda $S_1 \in U_1$, existe uma função $P_1 : U_1 \rightarrow GL_{m-1}(\mathbb{R})$ tal que $P_1(A_1) = I_{(m-1) \times (m-1)}$ e ${}^tQ_1S_1Q_1 = A_1$, onde $Q_1 = P_1(S_1) \in GL_{m-1}(\mathbb{R})$.

Seja $S = (s_{ij})$ uma matriz simétrica $m \times m$ suficientemente próxima a $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ de modo que s_{11} é não-zero e tem o mesmo sinal que a_1 . A matriz simétrica S determina uma forma bilinear $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $B(x, y) = {}^txSy$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Agora daremos o primeiro passo no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, mudamos a base padrão de $\mathbb{R}^m$, $e_1, \dots, e_m$, para uma base $w_1, \dots, w_m$ onde $w_1 = \frac{e_1}{\sqrt{|s_{11}|}}$, com

$$\begin{aligned} w_j &= e_j - B(w_1, w_1)B(w_1, e_j)w_1 = e_j - ({}^tw_1Sw_1)({}^tw_1Se_j)w_1 \\ &= e_j - \frac{s_{1j}e_1}{\sqrt{|s_{11}|}}, \end{aligned}$$

para todo $j = 2, \dots, m$.

A matriz mudança de base correspondente $C \in GL_m(\mathbb{R})$, é dada por

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{\sqrt{|s_{11}|}} & -\frac{s_{12}}{s_{11}} & \dots & -\frac{s_{1m}}{s_{11}} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad (4.20)$$

onde $I = (id)_{(m-1) \times (m-1)}$.

A nova base satisfaz $B(w_1, w_j) = 0$, para todo $j = 2, \dots, m$. De fato, pela definição segue que, para $j = 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} B(w_1, w_j) &= {}^t w_1 S w_j \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{|s_{11}|}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -s_{2j} \frac{s_{1j}}{s_{11}} + s_{2j} \\ \vdots \\ -s_{mj} \frac{s_{1j}}{s_{11}} + s_{mj} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Então segue que

$$\begin{aligned} {}^t CSC &= \begin{pmatrix} {}^t w_1 S w_1 & \dots & {}^t w_1 S w_m \\ {}^t w_2 S w_1 & \dots & {}^t w_2 S w_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t w_m S w_1 & \dots & {}^t w_m S w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(w_1, w_1) & \dots & B(w_1, w_m) \\ B(w_2, w_1) & \dots & B(w_2, w_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(w_m, w_1) & \dots & B(w_m, w_m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s_{11}}{|s_{11}|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B(w_2, w_m) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B(w_m, w_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & S_1 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Note que para cada $i, j = 1, \dots, m$, ${}^t w_i S w_j$ representa um bloco da matriz ${}^t CSC$ e $\frac{s_{11}}{|s_{11}|} = \pm 1 = a_1$, pois, pela hipótese de indução, $s_{11} \neq 0$ tem o mesmo sinal que a_1 . A matriz S_1 é uma matriz $(m-1) \times (m-1)$, simétrica, dependendo suavemente de S .

Se S é suficientemente próxima à A , então $S_1 \in U_1$, e podemos aplicar a hipótese de

indução para concluir que existe $Q_1 \in GL_{m-1}(\mathbb{R})$, dependendo suavemente de S_1 , tal que

$${}^tQ_1 S_1 Q_1 = A_1 = \text{diag}(a_2, \dots, a_m). \quad (4.23)$$

Defina $P(S) = Q = CR$, onde

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right). \quad (4.24)$$

Segue que

$$\begin{aligned} {}^tQSQ &= (CR)^t S (CR) = R^t (C^t S C) R \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {}^tQ_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & S_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {}^tQ_1 S_1 Q_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\ &= \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m) = A, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde $P(S) = Q \in GL_m(\mathbb{R})$ depende suavemente em S e $P(A) = I_{m \times m}$. $\square$

Agora temos todas as ferramentas para a prova do Lema de Morse-Bott.

Demonstração do Lema 4.0.3: Seja $C \subseteq M$ uma subvariedade n -dimensional crítica não-degenerada de f . Denote f por $f - c$, se for necessário, onde c é o valor de f sobre a subvariedade crítica C . Assim podemos assumir que $f(p) = 0$, para todo $p \in C$. Escolhemos uma carta coordenada $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ definida sobre uma vizinhança aberta U de p tal que $\phi(p) = (0, 0)$ e $\phi(U \cap C) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Componha essa carta com

um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ o qual é constante na primeira componente. Nessas condições dado p é ponto crítico não-degenerado de f e v direção normal a $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ em $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, a função f é expressa localmente por $h(x, y) = (f \circ \phi^{-1})(x, y)$ e, sua matriz Hessiana é dada por

$$M_0^v(f) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{(0,0)} \right)_{(m-n) \times (m-n)}. \quad (4.26)$$

Logo $\det M_0^v(f) \neq 0$. Considerando uma troca de coordenadas adequadas e lembrando que a Hessiana de f com respeito a essas novas coordenadas é a mesma, podemos supor que $M_0^v(f)$ é uma matriz diagonal com as primeiras k entradas nas diagonais iguais a -1 e as outras restantes iguais a 1.

Como f é função de Morse-Bott para cada $x \in \mathbb{R}^n$ a forma quadrática

$$q_x(y) = {}^t y \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{(x,0)} \right) y$$

é non-degenerada. Logo fixado $x \in \mathbb{R}^n$ e aplicando a Proposição anterior para a forma quadrática q_x , temos que existe uma família de difeomorfismos φ_x dependendo suavemente de x definidos em vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ tal que

$$h(x, \varphi_x(y)) = q_x(y).$$

Defina $\tilde{\phi}^{-1}(x, y) = \phi^{-1}(x, \varphi_x(y)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow M$. Temos das considerações acima que

$$f \circ \tilde{\phi}^{-1}(x, y) = q_x(y).$$

Como M_0^v é uma matriz diagonal com entradas $a_{jj} = \pm 1$, para todo $j = 1, \dots, (m-n)$, segue do Lema 4.0.5 que, existe uma vizinhança V de M_0^v , no espaço vetorial das matrizes simétricas e, uma função C^∞ , $P : V \longrightarrow GL_{m-n}(\mathbb{R})$, tal que $P(M_0^v(f)) = I_{(m-n) \times (m-n)}$ tal que para todo $S \in V$, e em particular para $S_x = M_x^v$ temos $P(S_x) = Q_x$. Então ${}^t Q_x S_x Q_x = M_0^v$, onde S_x depende suavemente de $x \in \mathbb{R}^n$ para x suficientemente próximo de 0.

Logo

$$\begin{aligned}
 f \circ \tilde{\phi}^{-1}(x, Q_x(y)) = q_x(Q_x(y)) &= {}^t_y Q_x \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{(x,0)} \right) Q_x y \\
 &= {}^t_y Q_x \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{(0,0)} \right) y \\
 &= {}^t_y M_0^v(f) y = \sum_{j=1}^{m-n} \sigma_j y_j^2; \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

onde $\sigma_j = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}((0,0)) = -1$, para todo $j = 1, \dots, k$ e $\sigma_j = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}((0,0)) = +1$, para todo $j = k+1, \dots, (m-n)$. $\square$

Como um resultado análogo na teoria das funções de Morse, apresentamos o seguinte resultado e a sua prova é feita usando as mesmas ferramentas como no caso Morse.

Teorema 4.0.6 ([22]). *Suponhamos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse-Bott e $a \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de f . Se para algum $\epsilon > 0$, os conjuntos sub-níveis*

$$\begin{aligned}
 M^{a-\epsilon} &= \{p \in M : f(p) \leq a - \epsilon\} \quad e \\
 M^{a+\epsilon} &= \{p \in M : f(p) \leq a + \epsilon\}
 \end{aligned}$$

são compactos e $\text{Crit}(f) \cap f^{-1}(a)$ consiste de um número finito de subvariedades críticas não-degeneradas $C_1, \dots, C_k$ e para $i = 1, \dots, k$, denotamos por $D(C_i)$ o disco unitário fibrado em vC_i (com respeito a alguma métrica Riemanniana em vC_i). Então $M^{a+\epsilon}$ é homotópico ao espaço obtido de $M^{a-\epsilon}$ colando os discos $D(C_i)$ a $M^{a-\epsilon}$ ao longo das fronteiras $\partial D(C_i)$.

Capítulo 5

Invariantes na teoria de sistemas integráveis

Nesse capítulo definimos um invariante para sistemas integráveis definidos em uma variedade M compacta, sem bordo e orientável, com integral primeira do tipo Morse-Bott.

Comparamos o invariante definido com o invariante de Neumann [21] com o objetivo de mostrar que todas as informações do invariante de Neumann estão representadas em nosso invariante. Assim concluímos que temos um invariante completo para os sistemas integráveis com integral primeira Morse-Bott em M .

Vale observar que nosso invariante permite-nos distinguir sistemas não distinguidos pelo invariante de Neumann, nesse capítulo exibimos um exemplo. Nesse capítulo também levantamos conjecturas sobre a integrabilidade de uma classe de sistemas e assim como condições necessárias para que um sistema tenha uma integral primeira Morse-Bott.

Para descrever os dois resultados acima, iniciamos o capítulo com alguns conceitos básicos sobre campos hamiltonianos, enunciamos o Teorema de Liouville e descrevemos os grafos de Reeb associados funções de Morse e finalmente generalizamos esse último conceito para as funções Morse-Bott, através dos grafos de conexões. Em seguida, observamos que esse grafo munido de informações adicionais sobre as singularidades do sistema integrável, nos define o invariante completo acima mencionado.

5.1 Introdução aos sistemas integráveis

Seja M variedade 2-dimesional, diremos que um sistema dinâmico X é integrável em M , se existe uma função C^1 não constante $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, chamada integral primeira de f , o qual é constante sobre curvas soluções $(x(t), y(t))$ do sistema em M .

Em outras palavras, $f(x(t), y(t)) = k$, k é constante, para todo t para as quais $(x(t), y(t))$ é solução e esta definida em M .

Claramente, f é integral primeira de X em M se, e somente se, $X \cdot f = 0$, isto é, se $X : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ representa o campo vetorial definido em M representado pelo operador diferencial

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (5.1)$$

operando sobre o conjunto das funções que são pelo menos C^1 . Então para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integral primeira temos

$$X \cdot f = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad (5.2)$$

Além disso, em dimensão dois, a integral primeira nos fornece a decomposição de M em folheações, onde cada folha é uma órbita ou a união de órbitas do sistema. Esse fato é essencial na descrição do retrato de fase do sistema X .

Dentro da literatura encontramos os sistemas Hamiltonianos que são sistemas integráveis bastantes conhecidos e que tiveram origem na formulação analítica da mecânica clássica. Originalmente tais sistemas foram definidos como explicaremos a seguir.

Definição 5.1.1. *Um sistema Hamiltoniano é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma*

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p, \\ \dot{p} = -H_q, \end{cases} \quad (5.3)$$

onde a função $H = H(q, p, t)$, chamada Hamiltoniana, é uma função diferenciável a valores reais definida para $(q, p, t) \in W$, onde $W = U \times I$ é um aberto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Os valores $q = (q_1, \dots, q_n)$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$ são tradicionalmente chamados de vetor posição e momento respectivamente e t é chamado tempo. As variáveis q e p são ditas variáveis conjugadas. O inteiro n é o número de graus de liberdade do sistema.

O conjunto onde as variáveis posição estão definidas é chamado de *espaço de configurações* e o espaço $W = U \times I$ é chamado de *espaço de fase*. O conjunto formado por todas as trajetórias de (5.3) é chamado de *retrato de fase*.

Dada uma função Hamiltoniana H independente de t , isto é, H tal que o sistema (5.3) seja autônomo, a função H será dita *integral primeira do sistema*. Note que

$$\begin{aligned} \dot{H}(q(t), p(t)) &= \sum_{i=1}^n (H_{q_i} \dot{q}_i + H_{p_i} \dot{p}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (H_{q_i} \dot{q}_i - H_{q_i} \dot{q}_i) = 0. \quad (\text{por (5.3)}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

para todo t . Assim, H é uma quantidade conservada ou uma constante do movimento. Neste caso dizemos que o sistema Hamiltoniano (5.3) é conservativo e que H representa a energia do sistema. O conjunto definido por $\Sigma_h = \{(q, p) \in U : H(q, p) = h\}$ para um valor arbitrário de $h \in \mathbb{R}$, denota a superfície (ou variedade) de energia. Observe que o fato de H ser uma integral primeira implica que as soluções estão contidas em alguma superfície, isto é, se $(q(t), p(t))$ denota uma solução de (5.3) então $H(q(t), p(t)) = h$, onde este valor de h pode ser negativo, nulo ou positivo dependendo da solução. Assim Σ_h é um conjunto invariante.

O espaço de fase, dado pela superfície de energia, muitas vezes pode ser um espaço Euclidiano ou um subconjunto dele, mas ele também pode ter uma estrutura não-Euclidiana tal como um círculo, uma esfera, um toro ou alguma outra variedade diferenciável, é por isto que Σ_h é chamado de superfície de energia.

5.1.1 Introdução à mecânica Hamiltoniana

Introduziremos a mecânica Hamiltoniana sob dois pontos de vista distintos. No primeiro procederemos de maneira análoga ao tratamento moderno de gradientes usando o conceito de produto interno que será substituído pelo conceito de forma simplética. O segundo trata-se de uma generalização do primeiro caso, para variedades mais gerais, munidas de uma 2-forma bilinear anti-simétrica.

Definição 5.1.2. *Seja E um espaço vetorial. Uma forma simplética ω sobre E é uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:*

- (a) $\omega(q, p) = -\omega(p, q) \quad \forall p, q \in E$,
- (b) $\omega(q, p) = 0, \quad \forall p \in E$, implica $q = 0$.

Um espaço vetorial (real ou complexo) simplético é um espaço munido de uma forma simplética ω . Suponhamos que E é um espaço vetorial m -dimensional e fixemos uma base $e_1, \dots, e_m$ em E . Então para $q = \sum_{i=1}^m q_i e_i$, $p = \sum_{j=1}^m p_j e_j$, em E e $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ temos

$$\omega(q, p) = \omega\left(\sum_{i=1}^m q_i e_i, \sum_{j=1}^m p_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij} q_i p_j. \quad (5.5)$$

Então ω é unicamente determinada pela matriz $\Omega = (\omega_{ij})$ a qual é simétrica e não-degenerada. Isto implica que a dimensão de E é par, já que $\det \Omega = \det \Omega^t = \det(-\Omega) = (-1)^m \det \Omega$, onde m é a dimensão de E .

Seja $U \subset E$, aberto, onde (E, ω) é um espaço simplético.

Dada uma aplicação de classe C^2 , $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos o campo vetorial X_H , de classe C^1 sobre U , chamado campo vetorial Hamiltoniano de H , da seguinte maneira.

Considere a derivada da função H no ponto x , $DH(x) : E \longrightarrow \mathbb{R}$, logo $DH(x) \in E^*$, E^* é o espaço dual de E . Do isomorfismo entre E e E^* , via ω temos que existe um único $X_H(x) \in E$ satisfazendo a seguinte igualdade:

$$X_H(x) = \phi^{-1} DH(x) \iff \phi(X_H(x)) = DH(x), \quad \forall x \in U, \quad (5.6)$$

onde ϕ^{-1} é a função inversa do isomorfismo $\phi_\omega : E \longrightarrow E^*$ induzido por ω e definido por

$$\phi(q)(p) = \omega(q, p), \quad q, p \in E.$$

Então (5.6) é equivalente a dizer que

$$\omega(X_H(x), y) = \phi(X_H(x)) \cdot y = DH(x) \cdot y, \quad \forall y \in E.$$

Assim, $X_H : U \longrightarrow E$ é um campo vetorial de classe C^1 sobre U e as equações diferenciais definidas por este campo vetorial são chamadas *equações de Hamilton*.

Seja V um espaço vetorial e defina $E = V \times V^*$. Um elemento x de E é da forma (q, p) , onde $q \in V$ e $p \in V^*$. Se $x = (q, p)$ e $y = (q^0, p^0)$ são dois vetores de E , defina

$$\omega(x, y) = \omega((q, p), (q^0, p^0)) = p^0(q) - p(q^0) \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

É fácil verificar que ω é uma forma simplética sobre E . Além disso ω é não-degenerada, basta observar que se $e \neq 0$, então podemos encontrar e^0 tal que $\omega(e, e^0) \neq 0$. É bom notar que ω não depende da escolha das coordenadas sobre E , assim que ela está bem definida sobre $V \times V^*$. De fato fixada uma base para V , usamos a base induzida sobre V^* e ω é dada em coordenadas por

$$\omega((q, p), (q^0, p^0)) = \sum_{i=1}^n [p_i^0 q_i, p_i q_i^0]. \quad (5.8)$$

Pode-se mostrar que toda forma simplética é desde tipo para alguma representação de E como $V \times V^*$, V espaço vetorial.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in V^*$ as coordenadas de V e V^* respectivamente. Seja $\phi : E \rightarrow E^*$ o isomorfismo induzido. Para qualquer função de classe C^2 , $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se

$$DH(x, y) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i \right].$$

Desta relação, temos que $\phi^{-1}DH(x, y)$ é o vetor cujas componentes são

$$X_H(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

De fato, é suficiente verificar que

$$\omega(X_H(x, y), (u, v)) = DH(x, y) \cdot (u, v),$$

o qual, da definição de ω em (5.8), o lado esquerdo da igualdade acima é equivalente a

$$\sum_{i=1}^n [H_{y_i} v_i + H_{x_i} u_i],$$

de onde concluímos a afirmação.

No caso particular em que $V = \mathbb{R}^n$, e usando a base canônica de $E = \mathbb{R}^{2n}$ (identificando V^* com V), segue-se que as equações diferenciais associadas ao campo vetorial X_H são:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \text{para } i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

as quais correspondem as expressões usuais das equações de Hamilton.

Teorema 5.1.1 ([27]). *Seja $U \subset E$ aberto, $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^2 e ω uma forma simplética em E . Então H é constante sobre as curvas solução definidas pelo campo X_H .*

Demonstração. Se $\phi_t(x)$ denota uma curva solução do campo vetorial X_H , isto é,

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_H(\phi_t(x)),$$

então devemos mostrar que, para todo x e t temos,

$$\frac{d}{dt}H(\phi_t(x)) = 0.$$

Note que, como ω é antisimétrica temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(\phi_t(x)) &= DH(\phi_t(x)) \cdot \left(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\right) = DH(\phi_t(x)) \cdot X_H(\phi_t(x)) \\ &= \omega(X_H(\phi_t(x)), X_H(\phi_t(x))) = 0.\end{aligned}$$

□

Os conceitos acima descritos podem ser generalizados para uma variedade M , desde que M seja munida de uma 2-forma fechada e não degenerada. Procederemos a seguir com a descrição dessa generalização e suas consequências.

Definição 5.1.3. *Seja M uma variedade e $p \in M$. Uma 2-forma em p é uma forma bilinear antisimétrica*

$$\omega : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

Definição 5.1.4. *Uma estrutura simplética sobre M é uma 2-forma ω satisfazendo as seguintes propriedades:*

- ω é fechada, isto é, $d\omega = 0$,
- ω é não-degenerada em cada ponto da variedade, isto é, em coordenadas locais $\det\Omega(x) \neq 0$, onde $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ é a matriz associada a forma ω .

A variedade munida de uma estrutura simplética é chamada *variedade simplética*. Denotamos-a por (M, ω) .

Proposição 5.1.2 ([5]). *Uma variedade simplética tem dimensão par.*

Demonstração. Seja M uma variedade m -dimensional e ω uma estrutura simplética definida nela. Como ω é não-degenerada segue que cada plano tangente à variedade é um espaço vetorial de dimensão par, logo M é uma variedade de dimensão par. $\square$

Seja H uma função suave sobre uma variedade simplética M . Definimos o vetor gradiente anti-simétrico $sgrad H$ para esta função usando a seguinte identidade; para cada v vetor tangente temos

$$\omega(v, sgrad H) = v(H). \quad (5.9)$$

Em coordenadas locais $x_1, \dots, x_{2n}$, obtemos a seguinte expressão:

$$(sgrad H)^i = \sum_{i,j} \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (5.10)$$

onde ω^{ij} são componentes da matriz inversa à matriz Ω .

Definição 5.1.5. *O campo vetorial $sgrad H$ é chamado de campo vetorial Hamiltoniano. A função H é chamada de Hamiltoniana do campo vetorial $sgrad H$.*

Definição 5.1.6. *Sejam f, g duas funções suaves sobre uma variedade simplética. Seja $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty \times C^\infty \longrightarrow C^\infty$ a operação definida por*

$$\{f, g\} = \omega(sgrad f, sgrad g) = (sgrad f)(g). \quad (5.11)$$

*Esta operação, sobre o espaço das funções suaves em M , é chamada de **colchete de Poisson**.*

O seguinte teorema sintetiza as propriedades do colchete de Poisson.

Proposição 5.1.3 ([5]). *O colchete de Poisson satisfaz as seguintes condições:*

- (1) *é bilinear sobre $\mathbb{R}$;*
- (2) *é anti-simétrica $\{f, g\} = -\{g, f\}$;*
- (3) *identidade de Jacobi: $\{g, \{f, h\}\} + \{h, \{g, f\}\} + \{f, \{h, g\}\} = 0$;*
- (4) *a regra de Leibniz: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$;*
- (5) *o operador sgrad define um homeomorfismo entre a Álgebra de Lie das funções suaves sobre uma variedade M e os campos vetoriais suaves, em outras palavras, a seguinte identidade é satisfeita:*

$$\text{sgrad}\{f, h\} = [\text{sgrad } f, \text{sgrad } g].$$

- (6) *uma função f é uma integral primeira do campo vetorial Hamiltoniano $v = \text{sgrad } H$ se, e somente se, $\{f, H\} = 0$ (em particular, a Hamiltoniana H é sempre uma integral primeira do campo $\text{sgrad } H$).*

5.1.2 Sistemas Hamiltonianos Liouville integrável. O Teorema de Liouville

Veremos as propriedades topológicas de um sistema Hamiltoniano são descritas pelo Teorema de Liouville.

Seja M^{2n} uma variedade simplética, $v = \text{sgrad } H$ um sistema dinâmico Hamiltoniano com uma Hamiltoniana suave H .

Definição 5.1.7. *O sistema Hamiltoniano é chamado Liouville integrável se existe um conjunto de funções suaves $f_1, \dots, f_n$ tal que:*

- (1) *$f_1, \dots, f_n$ são integrais primeiras do sistema v ;*
- (2) *tais funções são funcionalmente independentes sobre M , isto é, seus gradientes são linearmente independentes sobre M quase sempre;*
- (3) *$\{f_i, f_j\} = 0$, para todo i, j ;*
- (4) *os campos vetoriais $\text{sgrad } f_i$ são completos, isto é, o parâmetro natural sobre suas trajetórias integrais está definido para todos os números reais.*

Definição 5.1.8. *A decomposição da variedade M^{2n} em componentes conexas formadas pelas superfícies de nível comum as integrais $f_1, \dots, f_n$ é chamada de folheação de Liouville*

correspondente ao sistema integrável $v = \text{sgrad } H$.

Desde que $f_1, \dots, f_n$ são integrais primeiras de v , então pela propriedade (6) do Colchete de Poisson concluímos que $\text{sgrad } H(f_i) = 0$ se, e somente se, f_i é constante ao longo das linhas fluxos, para todo $i = 1 \dots, n$. Portanto, cada folha da folheação de Liouville é uma superfície invariante.

A folheação de Liouville consiste em folhas regulares (em quase todo M) e algumas singulares (completando M com um conjunto de medida nula). O Teorema de Liouville formulado a seguir descreve a estrutura da folheação de Liouville próximo às folhas regulares.

Consideremos um nível comum regular T_ξ para as funções $f_1, \dots, f_n$, isto é,

$$T_\xi = \{x \in M : f_i(x) = \xi_i, i = 1, \dots, n\}; \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Teorema 5.1.4 ([5]). *Seja $v = \text{sgrad } H$ um sistema Hamiltoniano Liouville integrável sobre M^{2n} , e seja T_ξ a superfície de nível regular das integrais $f_1, \dots, f_n$. Então*

(1) T_ξ é uma subvariedade Lagrangiana suave que é invariante com respeito ao fluxo $v = \text{sgrad } H$ e $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$;

(2) se T_ξ é conexo e compacto, então T_ξ é difeomorfo ao toro n -dimensional $\mathbb{T}^n$ (este toro é chamado **Toro de Liouville**);

(3) A folheação de Liouville é trivial em alguma vizinhança do Toro de Liouville, isto é, uma vizinhança U do toro T_ξ é o produto direto de $\mathbb{T}^n$ e o disco D^n ;

(4) Numa vizinhança $U = \mathbb{T}^n \times D^n$ existe um sistema de coordenadas $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ (as quais são chamadas de variáveis ação-ângulo), onde $s_1, \dots, s_n$ são coordenadas sobre o disco D^n e $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são ângulos coordenados padrão sobre o toro, tal que:

(a) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i,$

(b) as variáveis ação s_i são funções das integrais $f_1, \dots, f_n$,

(c) nas variáveis ação-ângulo $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, o fluxo Hamiltoniano v satisfaz $\dot{s}_i = 0, \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n)$ para $i = 1, \dots, n$ isto significa que o fluxo v determina condicionalmente o movimento periódico que gera uma rotação racional ou irracional em cada um dos Torus.

5.2 Grafos de Reeb de uma função de Morse

Vamos inicialmente introduzir algumas noções básicas sobre a teoria de grafos topológicos. Essas noções serão essenciais para a discussão dos grafos de Reeb.

Optamos por não apresentar as provas dos teoremas e proposições enunciados nessa seção. Elas visam introduzir o leitor a teoria dos grafos que será uma ferramenta importante na discussão sobre integrabilidade e equivalência de sistemas com integral primeira. As provas das afirmações dessa seção podem ser encontradas em referências clássicas sobre o tema, como por exemplo [13].

5.2.1 Representação de Grafos

Um *grafo* G consiste de um conjunto V_G de vértices e um conjunto E_G de arestas. Cada aresta $e \in E_G$ tem um conjunto de pontos finais, $V_G(e)$, contendo um ou dois elementos do conjunto de vértices V_G .

Ao conjunto $I_G = \{V_G(e) : e \in E_G\}$, chamamos de *estrutura incidente*. Por simplicidade, quando G é o único grafo, omitimos os subíndices e escrevemos V e E , ao invés de V_G e E_G .

Se ambos dos conjuntos de vértices e arestas são finitos, então o grafo G é dito *finito*. Nesta dissertação os grafos discutidos serão finitos.

Um grafo é chamado de *simplicial* se não tiver laços ou arestas múltiplas.

Um grafo finito pode ser representado geometricamente por um desenho obtido da seguinte maneira. Primeiro, desenhamos um ponto para cada vértice. Então a cada aresta $e \in E$ com dois pontos finais, desenhamos uma linha entre os pontos representantes dos vértices e, a toda aresta com somente um vértice, desenhamos uma linha do ponto representante do vértice a ele mesmo, o que chamamos de *laço*.

Exemplo 5.2.1. *Seja $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Seja $V(e_1) = \{v_1\}$, $V(e_2) = \{v_1, v_2\}$, $V(e_3) = \{v_2, v_3\}$, e $V(e_4) = \{v_2, v_3\}$. A Figura 5.1 mostra dois desenhos diferentes para esse grafo. Observamos que certos grafos não podem ser desenhados sobre uma superfície planar sem linhas de cruzamentos. Além disso, para fins de ilustração ou conveniência, o desenho de um grafo, pode conter mais de uma linha de cruzamento. No*

desenho de um grafo, os vértices são representados somente por pontos e não por linhas de cruzamentos.

Figura 5.1: Exemplo 5.2.1: um grafo com linhas de cruzamento e o outro, sem linhas de cruzamentos.

Denote por $\#S$ a cardinalidade do conjunto S , por V o conjunto de vértices e E , o conjunto de arestas. A *matriz incidente* de um grafo G é a matriz (a_{ij}) com $\#V$ linhas e $\#E$ colunas, sendo que a entrada a_{ij} é:

$$\begin{cases} 1, & \text{se } v_i \in V(e_j) \text{ e } \#V(e_j) = 2; \\ 2, & \text{se } \{v_i\} = V(e_j); \\ 0, & \text{se } v_i \notin V(e_j). \end{cases}$$

Por exemplo, o grafo do Exemplo 5.2.1 tem a seguinte matriz incidente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Do ponto de vista geométrico, a *valência* ou grau de um vértice v é o número mínimo de cruzamentos que ocorrem enquanto percorremos um pequeno círculo ao redor do ponto representando v no desenho do grafo. No grafo do exemplo 5.2.1 as valências de v_1 , v_2 e v_3 são 3, 3, e 2 respectivamente. A grosso modo, a valência de v é o número de arestas incidentes em v , porém para obter o número correto devemos ter cuidado de contar uma aresta duas vezes se v é somente o seu ponto final. Alternativamente podemos dar uma definição estritamente combinatória da valência de v como a soma das entradas da linha correspondente na matriz incidente.

No caso do exemplo anterior, se somamos as entradas da matriz incidente correspondente à linha que representa v_1 vemos que a valência de v_1 é 3, que é a mesma que para

v_2 e, para v_3 é 2.

Teorema 5.2.1 (Euler). *A soma das valências dos vértices do grafo é igual a duas vezes o número de arestas.*

Dada uma aresta e com vértices v_1, v_2 , uma *direção* em e é uma função sobrejetora $\{v_1, v_2\} \rightarrow V(e)$. As imagens de v_1 e v_2 são chamadas de ponto inicial e ponto final, respectivamente. Além disso, dizemos que a aresta “vai” de seu ponto inicial “ao” seu ponto final.

Na teoria dos grafos topológicos, cada aresta e (mesmo se um laço) tem duas direções, a direção positiva, denotada por e^+ e a direção negativa, denotada por e^- . No desenho do grafo, uma seta é usada para mostrar a direção positiva, com o ponto inicial atrás da seta e o ponto final na frente dela. A Figura 5.2 mostra as direções de um dos grafos apresentados na Figura 5.1. Note que a direção e_2^+ é de v_2 a v_1 e as direções e_3^+ e e_4^+ são ambas de v_3 a v_2 .

Figura 5.2: Usando setas para indicar direções sobre arestas no grafo do Exemplo 5.2.1.

Uma aresta e junto com uma direção positiva (respectivamente negativa) é chamada de *aresta dirigida* e é denotada por e^+ (respectivamente e^-).

Sejam G e G' grafos. Uma função de grafos $f : G \rightarrow G'$ consiste de uma função vértice $V_G \rightarrow V_{G'}$ e uma função aresta $E_G \rightarrow E_{G'}$ tal que a incidência é preservada. Ou seja, para toda aresta $e \in E_{G'}$ a função vértice envia os pontos finais de e nos pontos finais da imagem de e . É costume denotar a função vértice e a função aresta pelo mesmo símbolo da função de grafo.

A função grafo $G \rightarrow G'$ é chamada um *isomorfismo* se a função vértice e a função aresta são injetivas e sobrejetoras. Nesse caso dizemos que G e G' são isomorfos.

Dados dois vértices u e v de um grafo G uma *trajetória de comprimento n de u à v* é uma sequência alternada de vértices e arestas dirigidas, $v_0, e_1^{\sigma_1}, v_1, e_2^{\sigma_2}, \dots, e_n^{\sigma_n}, v_n$, onde $\sigma_i = +$ ou $-$, cujo vértice inicial v_0 é u , o vértice final v_n é v , e para $i = 1 \dots, n$, a aresta

dirigida $e_i^{\sigma_i}$ parte do vértice v_{i-1} para o vértice v_i . Se $u \neq v$ então a trajetória é chamada de *trajetória aberta ou caminho*, caso contrário ($u = v$), *trajetória fechada*.

Um caminho com n vértices é chamado de n -caminho e é denotado por P_n . Um caminho fechado é chamado *ciclo* se todo par de vértices, exceto pelos vértices inicial e final, são diferentes. O ciclo com n vértices é chamado de n -ciclo e é denotado por C_n .

Um grafo é chamado *conexo* se para todo par de vértices u e v , existe um caminho de u a v . Dado um grafo dirigido o conceito de conexão independe das direções adotadas para as arestas. Se necessário consideramos a direção oposta à dada pelo grafo para percorrer o caminho entre dois vértices fixados.

Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos, veja um exemplo na Figura 5.3.

Figura 5.3: Quatro árvores.

Teorema 5.2.2. *Sejam u e v vértices de uma árvore T . Então existe um único caminho em T de u a v .*

Teorema 5.2.3. *Seja T uma árvore. Então $\#V_T = \#E_T + 1$.*

Uma árvore é chamada não trivial se o conjunto dos vértices é não unitário.

Teorema 5.2.4. *Toda árvore não trivial T tem pelo menos dois vértices de valência 1.*

A prova deste teorema segue do Teorema 5.2.1.

Uma das principais preocupações da teoria de grafos topológicos é a inserção do grafo em uma superfície. Em geral, tais superfícies são fechadas, isto é, compactas e sem bordo.

Existem dois tipos de superfícies fechadas, orientável e não-orientável. A Esfera, o Toro, o Bitoro, Tritoro, e assim por diante, como é mostrado na Figura 5.4, são orientáveis. Elas serão denotadas por $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$. Segue da classificação das superfícies orientáveis que toda superfície conexa, fechada e orientável é homeomorfa a S_i , para algum

Figura 5.4: As superfícies orientáveis fechadas.

i inteiro positivo. A Faixa de Möbius é uma superfície que não é fechada e é não-orientável. A Garrafa de Klein é uma superfície fechada não-orientável.

Segue do estudo das superfícies não-orientáveis que uma superfície fechada é não-orientável se, e somente se, tem um subespaço homeomorfo à faixa de Möbius. Vide [13]. Um *mergulho* de um grafo G numa superfície S é uma função contínua um-a-um

Figura 5.5: Construção de uma faixa de Möbius.

$\iota : G \longrightarrow S$. Em geral, o grafo G é um subconjunto da superfície S e a função $\iota : G \longrightarrow S$ é a função inclusão, então denotamos simplesmente $G \longrightarrow S$.

Dado um mergulho $G \longrightarrow S$, as componentes do complementar $S - G$ são chamadas de regiões. Se cada região é homeomorfa a um disco aberto, o mergulho é chamado de mergulho 2-celular e as regiões são chamadas de faces do mergulho. Denotaremos por F_G o conjunto das regiões de um mergulho de grafo $\iota : G \longrightarrow S$. Se não houver dúvidas quanto ao grafo em estudo denotaremos esse conjunto por F apenas.

Dado um grafo G e uma superfície fechada e conexa S , definimos a característica de Euler do mergulho celular $G \longrightarrow S$, denotada por $\mathcal{X}(G \longrightarrow S)$, como $\#V - \#E + \#F$.

Os teoremas a seguir visam mostrar que este valor independe da escolha do grafo e do mergulho, dependendo apenas do tipo topológico da superfície.

Teorema 5.2.5. *Para cada superfície orientável S_g ($g = 0, 1, 2, \dots$) existe um grafo conexo G e um mergulho celular $G \longrightarrow S_g$ cuja característica de Euler satisfaz a equação $\mathcal{X}(G \longrightarrow S_g) = 2 - 2g$.*

Teorema 5.2.6. *Para cada superfície não-orientável N_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) existe um grafo G e um mergulho celular de G sobre a superfície N_k tal que $\mathcal{X}(G \longrightarrow N_k) = 2 - k$.*

Teorema 5.2.7 (Invariância da característica de Euler de superfícies orientáveis.). *Seja $G \rightarrow S_g$ um mergulho celular, para algum $g = 0, 1, 2, \dots$. Então $\chi(G \rightarrow S_g) = 2 - 2g$.*

Corolário 5.2.8. *Sejam i e j dois inteiros não-negativos distintos. Então as superfícies S_i e S_j não são homeomorfas.*

Teorema 5.2.9 (Invariância da característica de Euler de superfícies não-orientáveis.). *Seja $G \rightarrow N_k$ um mergulho celular, para algum $k = 0, 1, 2, \dots$. Então $\chi(G \rightarrow N_k) = 2 - k$.*

Corolário 5.2.10. *Sejam i e j dois inteiros não-negativos distintos. Então as superfícies N_i e N_j não são homeomorfas.*

Conhecidas as definições e propriedades básicas sobre grafos vamos utilizá-las para definir um invariante as funções de Morse conhecido como *grafos de Reeb*.

Dada uma função de classe C^1 f sobre uma variedade compacta M^n . Para cada $a \in \mathbb{R}$ considere a superfície de nível $L_a = f^{-1}(a)$ e suas componentes conexas, as quais são chamadas **fibras**.

As superfícies L_a definem na variedade M^n uma estrutura de folheação com singularidades. Além disso, podemos definir uma relação de equivalência em L_a , como discutiremos na próxima definição.

Definição 5.2.2. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dois pontos $x, y \in M^n$ são equivalentes se, e somente se, eles pertencem à mesma fibra $f^{-1}(a)$, com $a = f(x) = f(y)$.*

O grafo de Reeb da função f , denotado por Γ é o espaço quociente $\frac{M^n}{\sim}$, onde $\sim$ é a relação de equivalência definida acima. No caso em que f é uma função de Morse, o grafo de Reeb de f tem propriedades que tornam sua investigação interessante. Por construção o grafo de Reeb para uma função de Morse f tem um ponto em cada fibra e é finito. Vamos enfocar o nosso estudo nos grafos de Reeb associados a uma função de Morse f .

Definição 5.2.3. *Um vértice de um grafo de Reeb é o ponto correspondente à fibra singular da função f , isto é, a componente de nível conexa que contém o valor crítico de f . Um vértice é chamado de **vértice final**, se ele é o final de uma única aresta. Outro caso, o vértice é chamado de **interior**.*

Consideremos, por exemplo, o toro 2-dimensional mergulhado em $\mathbb{R}^3$, como na Figura 5.6. Considere a função altura f como sendo a função de Morse sobre o toro. O grafo de

Figura 5.6: Grafo de Reeb da função altura sobre o toro 2-dimensional em $\mathbb{R}^3$.

Reeb de f tem a forma como mostrada na Figura 5.6(a).

Na Figura 5.6(b) apresentamos outro exemplo de uma função de Morse (função altura) sobre a esfera com duas alças.

Lema 5.2.11 ([5]). *Os vértices finais do grafo de Reeb correspondem de uma maneira um-a-um aos máximos e mínimos locais da função. Os vértices interiores correspondem de uma maneira um-a-um às fibras críticas que contém pontos críticos selas.*

Mostraremos que o grafo de Reeb de uma função de Morse permite reconstruir a topologia da superfície desde que saibamos se a superfície M é orientável ou não.

Teorema 5.2.12 ([5]). *Seja f uma função de Morse simples sobre uma superfície M , 2-dimensional, fechada e orientável (respectivamente, não-orientável). Então o grafo de Reeb determina esta superfície unicamente, exceto por difeomorfismos.*

Demonstração. Seja f uma função de Morse simples sobre M .

Afirmção: Existe uma correspondência um-a-um entre os pontos críticos da função f e os vértices do grafo de Reeb.

De fato, a cada vértice do grafo de Reeb corresponde uma fibra crítica. Desde que cada nível crítico de f , $f^{-1}(c)$, contém exatamente um ponto crítico, suas fibras críticas contém exatamente um ponto crítico.

De acordo ao lema anterior, podemos dividir os vértices do grafo de Reeb em duas classes: a classe dos vértices finais e os vértices interiores. Como a característica de Euler

de uma variedade 2-dimensional fechada é igual à diferença entre o número de mínimos locais e máximos locais (isto é, o número de vértices finais) e o número de selas (isto é, o número de vértices interiores), usando somente o grafo de Reeb, podemos calcular a característica de Euler da superfície. Sendo a característica de Euler um invariante completo para uma dada superfície fica provado o teorema. $\square$

Vale lembrar que uma função de Morse é dita simples se em cada nível crítico $f^{-1}(c)$ existe exatamente um ponto crítico de f e que dada uma função de Morse existe uma perturbação, arbitrariamente pequena, de modo que cada nível crítico tenha apenas um ponto crítico, isto é, existe $\tilde{f}$ suficientemente próxima de f , tal que $\tilde{f}$ é simples (Teorema 2.4.1).

Se a função f não é simples então um teorema análogo ao anterior não é válido. Neste caso, podem existir vários pontos críticos na fibra singular e, ao contrário do caso de uma função de Morse simples, a informação sobre o número de vértices do grafo de Reeb não permite calcular a característica de Euler da superfície.

Do mesmo modo que o grafo de Reeb de uma função de Morse f simples determina, salvo difeomorfismos, a superfície M , a superfície M também determina algumas propriedades do grafo de Reeb. Em particular, em [9] temos a seguinte proposição.

Proposição 5.2.13. *O grafo de Reeb de uma função de Morse f simples sobre uma superfície fechada de genus g , tem g laços se a superfície é orientável e entre 0 e $\frac{g}{2}$ caso contrário.*

Com as considerações feitas até aqui, podemos levantar a seguinte questão: Dadas $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : N^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse sobre variedades 2-dimensionais (orientáveis ou não), quando essas funções podem ser consideradas equivalentes ?

Considere os pares (M^2, f) e (N^2, g) . Toda função de Morse determina uma folheação sobre a superfície. Por definição, suas fibras são as componentes conexas das curvas de nível da função. Numa vizinhança de cada fibra regular, esta folheação é trivial, sendo apenas o produto direto de um círculo por um intervalo, esse fato segue do Teorema 2.1.1. Ao contrário, na vizinhança de uma fibra singular, a folheação pode ter uma estrutura bastante complicada.

Definição 5.2.4. *Duas funções de Morse f, g sobre as superfícies M^2 e N^2 respectivamente são chamadas de “**fiber**” **equivalentes** ou **equivalentes por fibras**, se existir um difeomorfismo*

$$\lambda : M^2 \longrightarrow N^2,$$

o qual leva as componentes conexas das curvas de nível da função f as componentes conexas das curvas de nível da função g .

Observação 5.2.5. *Segue da definição anterior que componentes conexas que inicialmente pertenciam ao mesmo nível de uma função pode mover-se em diferentes níveis da outra função.*

Esse fato dificulta a classificação de funções de Morse sobre superfícies 2-dimensionais através da equivalência por fibras.

Para contornar esse problema precisaremos estudar a questão local, ou seja descrever a estrutura topológica local das fibras singulares.

Definição 5.2.6. *Dada $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ função de Morse, considere a folheação de M^2 definida pelas superfícies de nível de f . Denote por L , a fibra conexa de f que contém uma ou várias singularidades tal que $f(L) = c$. Considere a vizinhança da fibra L , definida por $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) = P^2$, para ϵ suficientemente pequeno de modo que, P^2 não contenha outras singularidades. Um átomo de f é uma vizinhança P^2 de uma fibra singular L , considerando a equivalência por fibras.*

O átomo P^2 é chamado *simples* se a função de Morse f do par (P^2, f) é simples. Os outros átomos são chamados *átomos não simples*. O átomo é chamado *orientável* (*orientado*) ou *não-orientável* dependendo se a superfície é orientável (orientada) ou não-orientável.

Observação 5.2.7. *Na definição acima não foi levada em consideração a orientação da superfície nem a direção de crescimento da função f .*

Antes de apresentarmos alguns átomos precisamos introduzir uma noção importante, de um **f-átomo** ou **átomo estruturado**, que são átomos que levam em consideração a direção de crescimento da função f .

Seja c um valor crítico de f sobre M^2 e seja $\tilde{c}$ um valor crítico de g sobre N^2 . Consideremos as suas fibras singulares $L = f^{-1}(c)$ e $\tilde{L} = g^{-1}(\tilde{c})$ e suponha que elas são conexas.

Definição 5.2.8. *As funções de Morse f e g são chamadas equivalentes por fibras preservando a orientação nas vizinhanças das fibras singulares $f^{-1}(c)$ e $g^{-1}(\tilde{c})$ se existem números positivos ϵ e $\tilde{\epsilon}$ e um difeomorfismo*

$$\lambda : f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon) \longrightarrow g^{-1}(\tilde{c} - \tilde{\epsilon}, \tilde{c} + \tilde{\epsilon})$$

que leva curvas de nível de f as curvas de nível de g e que preserva a direção de crescimento das funções, isto é, λ leva $\{f > c\}$ em $\{g > \tilde{c}\}$.

Definição 5.2.9. *Consideremos o par (P^2, f) , onde P^2 é uma vizinhança conexa compacta com bordo ∂P^2 e f é uma função de Morse sobre P^2 com um único valor singular crítico c tal que*

$$f^{-1}(c - \epsilon) \cup f^{-1}(c + \epsilon) = \partial P^2.$$

Um f -átomo (ou átomo estruturado) do par (P^2, f) é a vizinhança P^2 considerando a equivalência por fibras e orientada segundo o sentido de crescimento da função f , isto é, segundo a equivalência por fibras preservando a orientação.

Observação 5.2.10. *Cada átomo corresponde a dois f -átomos. Estes são obtidos um do outro mudando o sinal da função dada sobre o mesmo átomo.*

5.2.2 Átomos e moléculas simples

Átomos simples

Nosso objetivo agora é investigar quantos tipos distintos de átomos e f -átomos temos para uma dada função de Morse f .

Note que se a é um valor regular da função f , então as correspondentes curvas de nível de f consistem de vários círculos suaves que não se interceptam. Vamos agora olhar o que ocorre com esses círculos quando eles cruzam um nível singular.

Vamos começar pelo caso de uma superfície orientável.

- *Máximos e mínimos de f . O átomo $\mathbf{A}$.*

Dada uma curva de nível não-singular próxima de um ponto de máximo local de f , função de Morse simples, sabemos que esta linha é um círculo. Quando o valor regular se aproxima do ponto de máximo o círculo se reduz em um ponto (Fig. 5.7).

Figura 5.7: O átomo $\mathbf{A}$.

Podemos representar esta evolução e sua bifurcação de forma convencional e bastante visual. As curva de nível regulares representamos como um ponto o qual é localizado sobre o nível “ a ” (Fig. 5.7). Quando “ a ” varia, este ponto se move na direção de um segmento. No momento, em que o valor da função alcança o valor crítico (igual a c), o círculo se reduz a um ponto. Denotamos esse evento pela letra $\mathbf{A}$ com um segmento vertical que se aproxima de $\mathbf{A}$.

No caso de um mínimo local, procedemos de forma similar (Fig. 5.7), com o segmento vertical partindo da letra $\mathbf{A}$. Outra representação do átomo $\mathbf{A}$ é dada pelo disco folheado por discos concêntricos. Obtivemos assim o átomo simples $\mathbf{A}$.

Há dois diferentes f -átomos correspondentes ao átomo $\mathbf{A}$. Um deles corresponde ao máximo da função e o outro corresponde ao mínimo. Por convenção, vamos distingui-los colocando uma seta que aponta para a direção de crescimento da função (Fig. 5.7).

- *Pontos de sela orientáveis. O átomo $\mathbf{B}$.*

Se c é um valor crítico do tipo sela da função de Morse f então a curva de nível singular, $f^{-1}(c)$, pode ser representada pela figura oito. Existe um valor regular a próximo ao valor c , cuja curva de nível é formada por dois círculos. Quando a se aproxima de c esses círculos estão se aproximando e, finalmente, interceptam-se em um ponto.

Depois disso, a bifurcação da curva de nível acontece e, em vez de dois círculos temos

apenas um círculo. Este processo é mostrado na Figura 5.8

Figura 5.8: Processo de bifurcação. Figura Oito

Mudando o sentido, temos a divisão de um círculo em dois círculos. O círculo inicial contrai-se até pontos opostos se tocam, então os dois pontos do círculo se colapsam e, na sequência, a figura oito obtida se divide em dois círculos. Procedendo da mesma forma como no caso anterior, isto é, representando cada círculo por um ponto e preservando a evolução, obtemos o grafo mostrado na Figura 5.9. Denotamos este átomo por **B**.

Figura 5.9: Grafo do átomo **B**.

Assim como no caso anterior, existem dois f -átomos diferentes correspondentes ao átomo **B**. Vamos distingui-los, colocando setas sobre as três arestas incidentes de **B** (Vide Fig. 5.9). O grafo correspondente com setas orientadas descreve a divisão de um círculo ou a bifurcação inversa de dois círculos em um.

O átomo **B** também pode ser representado de outra maneira (Fig. 5.8), como um disco plano com dois furos folheados em curvas de nível da função de Morse, donde segue que o átomo **B** é topologicamente equivalente a $S^1 \times I - D^2$.

- Pontos de sela não-orientáveis. O átomo $\tilde{\mathbf{B}}$.

Suponha que a variedade M^2 é não-orientável. As bifurcações dos pontos de tipo **A** são similares ao caso orientável. A diferença acontece nos pontos de sela. Primeiramente vamos descrever a bifurcação da sela no caso orientável de maneira diferente da acima realizada (Fig. 5.10).

Figura 5.10: Bifurcação em um ponto sela. Caso orientável

Num círculo de fronteira (bordo da variedade $\{f(x) \leq c - \epsilon\}$, para ϵ é suficientemente pequeno) colamos uma faixa estreita. Além disso, fazemos esta colagem de tal forma que a superfície obtida permaneça orientável. Como resultado, o bordo passa a ser homeomorfo a dois círculos. Quando consideramos em vez de f , $-f$, a direção da bifurcação muda e os dois círculos fronteira se transformam em um só.

Considere agora o caso em que a bifurcação acontece dentro de uma superfície não-orientável. Algumas bifurcações podem ser similares ao caso orientável. No entanto, existe ao menos uma bifurcação, a qual é arranjada essencialmente de uma maneira diferente. Isto é mostrado na Figura 5.11. Aqui uma faixa rotacionada 180° é colada ao mesmo círculo fronteira da superfície $\{f \leq c - \epsilon\}$.

Figura 5.11: Bifurcação em um ponto sela. Caso não-orientável.

Como resultado, uma nova faixa de Möbius aparece dentro da superfície $\{f \leq c + \epsilon\}$. É claro que, neste caso, depois de atravessar o nível crítico c um círculo $\{f = c - \epsilon\}$

Figura 5.12: A superfície $P^2 = f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon)$.

se transforma em um outro círculo $\{f = c + \epsilon\}$. Usando a simbologia anterior, onde representamos cada curva de nível regular por um ponto temos a evolução descrita pela Figura 5.11. Portanto, o átomo $\tilde{\mathbf{B}}$ é topologicamente equivalente a um variedade definida pela faixa de Möbius- D^2 . A letra $\tilde{\mathbf{B}}$ a qual é colocada na metade do segmento, denota a bifurcação não-orientável mais simples.

A superfície $P^2 = f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon)$ para um átomo não-orientável $\tilde{\mathbf{B}}$ é apresentada na Figura 5.12. Esta também é obtida ao colar duas faixas de Möbius.

- *Classificação dos átomos simples.*

Segue da classificação dos pontos críticos de uma função de Morse que qualquer átomo simples coincide com um dos átomos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ou $\tilde{\mathbf{B}}$ descritos acima.

Teorema 5.2.14 ([5]). *Um átomo simples coincide com um átomo do tipo $\mathbf{A}$, do tipo $\mathbf{B}$ ou do tipo $\tilde{\mathbf{B}}$. Estes átomos correspondem a cinco fátomos (dois para o átomo $\mathbf{A}$, dois para o átomo $\mathbf{B}$ e um para o átomo $\tilde{\mathbf{B}}$).*

Demonstração. Dada uma função de Morse simples f , segue do Lema de Morse que qualquer bifurcação da superfície $\{f \leq c - \epsilon\}$, em transição através do nível crítico c , é reduzida a colagem de um 2-disco ou de um retângulo à fronteira do conjunto $\{f \leq c - \epsilon\}$. Colando-se um 2-disco obtemos o átomo $\mathbf{A}$. Colando-se um retângulo obtemos o átomo $\mathbf{B}$ ou o átomo $\tilde{\mathbf{B}}$. □

Outra prova deste teorema, usada para entender a topologia dos átomos, está apresentada em [5].

A seguir consideramos o caso em que f , função de Morse definida em M , superfície compacta, não é necessariamente simples.

Definição 5.2.11. *Dada f uma função de Morse sobre uma superfície compacta M , defina N o conjunto formado por todas as superfícies de nível de f que contém pontos de sela. A todo subconjunto de uma das componente conexa de $M - N$ que contém um ponto crítico p do tipo centro (formado por todas as superfícies nível regulares que cercam p) chamaremos esse subconjunto de **bacia** do ponto crítico p e a denotaremos por $C(p)$.*

Segue da definição anterior e do fato que f é uma função de Morse que $C(p)$ é um conjunto não vazio para todo ponto do tipo centro p .

Proposição 5.2.15. *$C(p)$ é homeomorfo a um disco 2-dimensional aberto.*

Demonstração. Por definição, $C(p)$ é formada por circunferências que se colapsam no ponto p . Portanto homeomorfo a um disco. Vejamos que é um conjunto aberto.

Todo ponto $q \in C(p)$, com $q \neq p$ é ponto regular de f . Além disso, para $f(q) = c$, a fibra $f^{-1}(c) = L$ que contém q , é uma variedade 1-dimensional de M (Teorema da Imagem Inversa de um Valor Regular). Como M é superfície compacta a fibra L é homeomorfa a S^1 . Da compacidade da fibra, da continuidade da aplicação df , e como S^1 é formada por pontos regulares segue que existe $m > 0$, mínimo (positivo) do conjunto imagem $|df(S^1)|$. Por outro lado, como df é uma aplicação contínua, existe uma vizinhança $U(L)$ de L tal que $|df(U(L))| > 0$. Como consequência segue que, $q \in U(L) \subset C(p)$. Logo $C(p)$ é um conjunto aberto. $\square$

Proposição 5.2.16. *Seja f uma função de Morse sobre uma superfície compacta M e p_1 , um ponto crítico do tipo centro. Se existe outro ponto crítico do tipo centro p_2 , tal que $C(p_1) \cap C(p_2) \neq \emptyset$, então $M = S^2$ e $\text{Crit}(f) = \{p_1, p_2\}$. Caso contrário, $\partial C(p_1)$ está contido em uma fibra singular correspondente a um ponto de sela.*

Demonstração. Como a bacia de um ponto do tipo centro é formada por circunferências, se duas bacias, de pontos do tipo centro distintos, se interceptam o fazem em uma fibra regular comum. A colagem de duas bacias ao longo de uma fibra regular comum resulta em uma S^2 .

Por outro lado, se $\partial C(p_1)$ fosse uma fibra regular, como a bacia $C(p_1)$ é aberta poderíamos estendê-la ao redor dessa fibra, contradizendo o fato da fibra ser o bordo da bacia. Logo $\partial C(p_1)$ é uma fibra singular. Se o ponto singular fosse do tipo centro estaríamos no caso já consideramos anteriormente.

Logo a única possibilidade é que $\partial C(p_1)$ esteja contido numa fibra singular correspondente a um ponto de sela. $\square$

Moléculas simples

- *Noção de uma molécula simples.*

Seja f uma função de Morse simples sobre uma superfície compacta M^2 (orientável ou não-orientável). Consideremos o grafo de Reeb Γ a ela associado. Aos vértices de Γ correspondem a fibras críticas de f . Vamos substituir estes vértices pelos átomos correspondentes (**A**, ou **B** ou $\tilde{\mathbf{B}}$). Assumimos aqui que, para cada átomo, temos fixado o seu modelo canônico descrito acima. Cada aresta do grafo de Reeb Γ correspondente a um certo vértice é atribuída a um círculo da fronteira deste modelo e essa correspondência é atribuída de maneira fixa. Esta observação é importante somente para o átomo **B** (no caso de átomos simples) onde os seus círculos da fronteira não são equivalentes.

Definição 5.2.12. *O grafo obtido é chamado de uma molécula simples **W**.*

De fato, a noção de molécula simples não difere ainda daquela do grafo de Reeb. No entanto, para funções de Morse não simples a molécula **W** terá mais informação do que o grafo de Reeb.

Dotamos as arestas de **W** com a correspondente orientação dada pela direção de crescimento de f .

Definição 5.2.13. *O grafo direcionado obtido é chamado de uma f -molécula simples.*

Finalmente temos todas as ferramentas para enunciarmos o teorema da realização para os grafos descritos anteriormente. Parece natural perguntarmos quais condições um dado grafo deve satisfazer para que ele represente um grafo de Reeb de um dada função de Morse f definida numa variedade compacta sem bordo M ?

Consideremos um grafo finito com vértices de grau 1, 2 ou 3. Lembrando que um vértice de grau n é um vértice onde número de arestas incidentes em n . Em cada vértice de grau

Figura 5.13: Molécula simples para a função altura sobre o toro 2-dimensional.

1 colocamos o átomo **A**. Nos vértices de grau 2 colocamos o átomo $\tilde{\mathbf{B}}$ e, nos vértices de grau 3 colocamos o átomo **B**. Suponha que cada aresta do grafo tem uma orientação de forma que todo átomo tipo sela obtido tem pelo menos uma aresta que entra e pelo menos um arestas que sai. Assuma também tal grafo admite uma imersão numa variedade 2-dimensional tal que todas suas arestas serão orientada no mesmo sentido.

Teorema 5.2.17 ([5]). *Qualquer grafo nas condições acima é uma molécula simples, isto é, existe uma superfície 2-dimensional M e uma função de Morse simples em M tal que a sua molécula coincide com o grafo.*

Note que, se a superfície M^2 é orientável, a molécula **W** não tem átomo do tipo $\tilde{\mathbf{B}}$.

Teorema 5.2.18 ([5]). *Sejam $\mathbf{W}(M^2, f)$ e $\mathbf{W}(N^2, g)$ moléculas simples correspondentes a funções de Morse $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : N^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre superfícies orientáveis M e N . Se as moléculas coincidem, então M e N são difeomorfas e, as funções f e g são equivalentes por fibras.*

As provas dos teoremas acima não serão apresentadas nessa dissertação por fugirem de nosso objetivo.

Exemplo 5.2.14. *Consideremos a função altura sobre o toro mergulhado em $\mathbb{R}^3$, como mostrado na Figura 5.13. Esta função é função de Morse simples e as suas moléculas tem a forma ilustrada na Figura 5.13. É fácil ver que esta função de Morse sobre o toro é minimal, isto é, tem um número mínimo possível de pontos críticos não-degenerados.*

Alguns outros exemplos de moléculas simples podem ser encontrados em [5].

Um átomo é chamado de não simples se sobre um dos níveis críticos conexos da função f existirem mais de um ponto crítico. Tais objetos são de muita importância e surgem em muitos problemas em Geometria e Física. Para uma visão mais completa sobre o assunto em vide [5].

5.3 Grafo de uma função de Morse-Bott

Seja f função de Morse-Bott em M , superfície 2-dimensional fechada. Pelo Lema de Morse-Bott, dada uma subvariedade crítica C , n -dimensional não-degenerada de f em M com $0 \leq n < 2$ e $p \in C$, existe uma vizinhança aberta U de p e uma carta suave $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2-n}$, tal que:

- (i.) $\phi(p) = 0$;
- (ii.) $\phi(U \cap C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2-n} \mid y = 0\}$;
- (iii.) $(f \circ \phi^{-1})(x, y) = f(C) \pm y_1^2 \pm y_2^2$, onde $f(C)$ é a imagem de C pela f e o índice de Morse k de $\mathcal{H}ess_p(f)$ é 0 ou 1 e o mesmo para todo $p \in C$.

Sendo assim, vamos estudar com mais detalhes cada subvariedade crítica não-degenerada de f em M .

Proposição 5.3.1. *As subvariedades críticas conexas não-degeneradas da função f em M , M superfície fechada, são difeomorfas ou a um ponto, ou a uma S^1 .*

Demonstração. Sendo M uma variedade 2-dimensional, então as subvariedades críticas de f em M podem ser 0-dimensional, 1-dimensional, ou 2-dimensional. Salvo por difeomorfismos, no caso 0-dimensional, as subvariedades críticas são conjuntos unitários, a saber, os pontos críticos de f ; no caso 1-dimensional, cada subvariedade crítica será ou um círculo ou uma reta de pontos críticos. Sendo M compacta a única possibilidade que cabe aqui é que seja uma circunferência e portanto difeomorfa a uma S^1 . O Caso 2-dimensional, não é possível (não teríamos o subespaço normal em cada ponto). $\square$

Segue da proposição anterior que se a dimensão de uma subvariedade crítica C é zero, então, a menos de difeomorfismo, C é um ponto, digamos $p \in M$, portanto f seria uma função de Morse localmente e o comportamento local já foi estudado em [4].

Consideremos agora o caso em que a dimensão de C é um, então salvo por difeomorfismos, C é uma circunferência crítica S^1 . Seja $p \in C$ e η o vetor normal a C em p . Segue do Lema de Morse-Bott que em coordenadas apropriadas, a função f restrita a direção normal pode ser escrita como

$$f|_{\eta}(y) = f(C) \pm y^2 \quad (5.12)$$

e o índice de $\mathcal{H}ess_p(f)$ é 0 ou 1, e o mesmo para todo $p \in C$. Logo se o índice de $\mathcal{H}ess_p(f)$ é 0, segue da equação anterior que

$$f(y) = f(C) + y^2 \quad (5.13)$$

e portanto f é uma função crescente na direção normal η . Se o índice de $\mathcal{H}ess_p(f)$ é 1 então

$$f(y) = f(C) - y^2 \quad (5.14)$$

e portanto f é uma função decrescente na direção normal η . Como consequência temos $f(y) = f(C) + y^2$ e $f(y) = f(C) - y^2$ correspondem aos mínimos e máximos de f respectivamente.

Seja $b \in \mathbb{R}$. Se b é valor regular de f então o conjunto

$$L_b = \{p \in M : f(p) = b\} \quad (5.15)$$

é uma subvariedade compacta 1-dimensional de M e portanto homeomorfa a S^1 .

Definição 5.3.1. Entenderemos por uma folheação de M à divisão de M em componentes conexas de conjuntos de nível, L_b , de f em M , para $b \in \mathbb{R}$, de maneira análoga a definida para funções de Morse. Nesta linguagem chamaremos de fibra a cada um dos conjuntos de nível de f . A fibra de f que contém uma ou várias subvariedades críticas de f em M é chamada de fibra singular.

Seja $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, e L uma fibra singular de f em M . Por uma vizinhança de L em M , entendemos o conjunto

$$U(L) = f^{-1}(a - \epsilon, a + \epsilon),$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é valor singular de f .

Pelo Teorema 4.0.6 segue que se L é uma fibra singular de f em M , então L é um retrato de deformação de $U(L)$.

Definição 5.3.2. *O conjunto $U(L)$ com a correspondente folheação chamaremos de **vizinhança crítica**. O número de subvariedades críticas em uma vizinhança crítica chamaremos de **complexidade**.*

Seja f uma função de Morse-Bott não necessariamente estável, isto é, para uma dada vizinhança V de f no conjunto das funções diferenciáveis de M em $\mathbb{R}$, pode existir função g tal que as folheações definidas por $\{f^{-1}(a), a \in \mathbb{R}\}$ e $\{g^{-1}(a), a \in \mathbb{R}\}$, não são equivalentes por fibras.

O grafo de Reeb de f não é suficiente para determinar as propriedades de f uma vez que não distingue por exemplo, entre um ponto crítico e uma circunferência crítica. Esse fato motiva as definições a seguir.

Definição 5.3.3. *Chamamos de laço de separatrizes ao conjunto formado pelas componentes conexas de uma fibra crítica de f , correspondente a um ponto crítico do tipo sela. Vide Figura 5.14*

Figura 5.14: Laço de Separatrizes correspondente a um ponto do tipo sela.

Definição 5.3.4. *Um grafo de conexões de uma função de Morse-Bott é o grafo de Reeb no qual cada vértice correspondente a uma fibra crítica de f que contém a S^1 crítica é uma S^1 e, os vértices correspondentes a uma fibra crítica de f que contém mais de um ponto crítico do tipo sela é um laço de separatrizes. Vide Figura 5.15*

(a) Folheação da esfera e do toro mediante a função altura como no Exemplo 4.0.11

(b) Grafos de conexões

Figura 5.15: Grafos de conexões com dois e três vértices.

5.3.1 Estrutura topológica de uma vizinhança crítica correspondente a uma S^1 crítica

A estrutura topológica de uma vizinhança crítica correspondente a um ponto crítico p de f , isto é, a estrutura topológica em uma vizinhança das subvariedades críticas 0-dimensionais de M , é dada pelo estudo local das folheações de f em uma vizinhança de p em M , donde vimos os átomos **A**, **B** e $\tilde{\mathbf{B}}$.

O nosso objetivo aqui é estudar uma vizinhança de uma fibra crítica que contém como subvariedade crítica uma S^1 , isto é, vamos estudar a folheação definida por f na vizinhança crítica correspondente a uma circunferência crítica e sua forma normal local.

Sendo $f|_{\eta}$ uma função de Morse sobre η temos uma folheação de M em conjuntos de nível de f com um ponto crítico. Sob a ação do fluxo X , o ponto p se move ao longo de C , e sempre na direção normal a C , até retornar à posição inicial.

Seja C uma subvariedade crítica de f em M e $p \in C$. Dada η direção normal de C em p , $f|_{\eta}$ é Morse. Suponha que $f(C) = a$ é o valor crítico de f . Escolha $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que o intervalo aberto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ contém um único ponto

crítico ($p \in C$) de $f|_\eta$ (o qual é possível pois $f|_\eta$ é Morse). Então os conjuntos de níveis $L_{a-\epsilon}$ e $L_{a+\epsilon}$ são definidos como

$$\begin{aligned} L_{a-\epsilon} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(x, y) = a - \epsilon\}, \\ L_{a+\epsilon} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(x, y) = a + \epsilon\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para o caso em que o índice de $\mathcal{H}ess_p(f)$ é 0, o conjunto $L_{a-\epsilon} = \emptyset$. Para o caso em que é 1 $L_{a+\epsilon} = \emptyset$.

Considere $U(L) = f^{-1}(a - \epsilon, a + \epsilon)$, com $L = f^{-1}(a)$, vizinhança da fibra crítica L que não contém outra subvariedade crítica não-degenerada além de C . Sem perda de generalidade vamos supor que $f(C) = a = 0$.

Então para cada $b \in (-\epsilon, \epsilon)$, b é um valor regular de f e portanto obtemos uma família a 1-parâmetro $\{L_b \subset f^{-1}(\epsilon)\}$ (resp. $\{L_b \subset f^{-1}(-\epsilon)\}$), com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de círculos concêntricos. Quando o índice de $\mathcal{H}ess_p(f)$ é zero (resp. é um) os raios dos círculo acima descritos crescem (resp. decrescem) quando ϵ cresce (resp. decresce) e para $\epsilon = 0$ temos a fibra crítica C . Por isso dizemos que C é uma S^1 -crítica máxima (resp. mínima).

Observe que para o caso de $p \in C$ ter índice de Morse igual a zero na direção normal η , o conjunto

$$\begin{aligned} M^\epsilon &= \{q \in M : f|_\eta(q) \leq \epsilon\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq \epsilon\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \sqrt{\epsilon} \text{ ou } y \leq -\sqrt{\epsilon}\} \end{aligned}$$

é constituído de uma família de retas horizontais paralelas ao eixo x que afastam-se ao longo do eixo y depois de atingir o valor mínimo. Analogamente para o caso em que o índice de $\mathcal{H}ess_p(f)$ é 1, com a diferença que as retas horizontais paralelas ao eixo x aproximam-se ao longo do eixo y até atingir o valor máximo. Logo para cada $b \in (-\epsilon, \epsilon)$, $f^{-1}(b)$ restrita à direção normal η , corresponde a duas circunferências, ambas nas proximidades da S^1 -crítica. Veja Figura 5.16.

Definição 5.3.5. Considere o complementar de M com respeito ao conjunto formado por

Figura 5.16: Coordenadas locais de f numa vizinhança de C .

todas as fibras críticas que contém pontos de sela e centro. Chamaremos de *bacia* de Γ , onde Γ é uma S^1 -crítica, a qualquer subconjunto de uma das componentes conexas que contém a S^1 -crítica (formado por todas as superfícies de nível regulares de f próximas de Γ). Denotaremos esse conjunto por $C(\Gamma)$.

O seguinte lema é uma consequência imediata do Lema de Morse-Bott e descreve a expressão normalizada local de uma vizinhança de uma S^1 -crítica.

Lema 5.3.2. *Numa vizinhança de uma S^1 -crítica, Γ , podemos escolher coordenadas locais tal que a função f se escreva nestas coordenadas como segue:*

- (i.) $f(y) = f(\Gamma) + y^2$, no caso de Γ ser uma S^1 -crítica mínima;
- (ii.) $f(y) = f(\Gamma) - y^2$, no caso de Γ ser uma S^1 -crítica máxima.

A seguinte proposição descreve a topologia da bacia $C(\Gamma)$, onde Γ é uma S^1 -crítica.

Proposição 5.3.3. *A bacia $C(\Gamma)$, com Γ S^1 -crítica, é homeomorfa ao produto de S^1 por um intervalo aberto I , isto é, um cilindro aberto, ou uma faixa de Möbius aberta.*

Demonstração. Seja Γ uma S^1 -crítica como representada na Figura 5.17. Dado um ponto p numa vizinhança de Γ , considere uma seção normal N que passa por p , intercepta Γ

num ponto q e corta transversalmente todos os demais conjuntos de níveis suficientemente próximos de Γ .

Figura 5.17: Bacia de uma S^1 -crítica. Caso orientável e não-orientável.

Seja $p \in N$ e considere o vetor normal $\vec{v}$ a Γ cujo representante é o segmento orientado de extremos por p e q , com origem em Γ . Façamos o vetor $\vec{v}$ percorrer a curva Γ até retornar ao ponto de origem q . Ao retornar, o vetor $\vec{v}$ pode ter o mesmo sentido ou o sentido oposto, dependendo da orientabilidade de M . Se ao retornar $\vec{v}$ tiver o mesmo sentido, terá sua extremidade coincidindo com p e a bacia $C(\Gamma)$ será homeomorfa a S^1 por um intervalo aberto I . Caso contrário, $C(\Gamma)$ será homeomorfa à uma faixa de Möbius. $\square$

Observe que, existe uma diferença entre $\partial C(p)$ de um ponto do tipo centro e $\partial C(\Gamma)$ de uma S^1 -crítica. Enquanto que, os pontos de $\partial C(p)$ pertencem a um mesmo conjunto de nível, $\partial C(\Gamma)$ é formado por pontos de dois conjuntos de nível distintos como mostra-se na Figura 5.18

5.4 Grafos associados a sistemas Morse-Bott integráveis. Caso simples.

Assim como Bolsinov e Fomenko em [5] (capítulo 2-11) classificaram os fluxos Morse-Smale sem órbitas periódicas em superfícies 2-dimensionais usando os conceitos de átomos e moléculas para funções de Morse, introduziremos nessa seção da dissertação um invariante para o estudo de sistemas com integral primeira do tipo Morse-Bott em superfícies 2-dimensional fechadas e orientáveis.

Lembramos que, um campo de vetores v sobre uma superfície 2-dimensional M é dito campo de Morse-Smale se

Figura 5.18: Folheação de uma vizinhança de C . Para cada valor regular de f próximo de zero existem duas órbitas fechadas em torno de C .

1. v tem um número finito de pontos singulares e órbitas periódicas, e todas elas são hiperbólicas.
2. não existem trajetórias unindo dois pontos de sela.
3. dada trajetórias de v , seu α e ω -limites são pontos singulares ou órbitas periódicas, isto é, ciclos limites.

M. M. Peixoto, G. Freitas e X. Wang usaram diferentes abordagens na investigação dos fluxos Morse-Smale.

Em [5] encontramos o estudo dos fluxos de Morse-Smale sem órbitas periódicas através da relação existente entre folheação definida pelas superfícies de nível de f (f função de Morse) e o fluxo gradiente, como já discutimos nessa dissertação. Veremos que podemos generalizar esse estudo para os fluxos Morse-Smale, ou seja, podemos relacionar o estudo das superfícies de nível de f função de Morse-Bott em M , superfície fechada e orientável, com o fluxo de um sistema adequado para obter conclusões sobre os fluxos Morse-Smale definidos em M .

Vale ressaltar que, tanto sistemas com integral primeira do tipo Morse quanto do tipo Morse-Bott tem todas suas soluções contidas nas curvas de nível da integral primeira f . No entanto os sistemas com integral primeira do tipo Morse tem suas singularidades coincidindo com os pontos críticos da f enquanto que o mesmo não ocorre para os sistemas

com integral primeira Morse-Bott. Os pontos críticos isolados da integral primeira f , do tipo Morse Bott, serão pontos singulares do sistema, no entanto, podem existir pontos singulares do sistema que não são pontos críticos da integral primeira f . Para isso basta considerarmos a esfera folheada por órbitas periódicas paralelas ao Equador com um ponto crítico isolado e semi-estável no ponto $P = (\sqrt{3}/2, 0, 1/2)$. Esse campo tem a função $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ como integral primeira Morse Bott, o pólos norte e sul e a linha do Equador são pontos críticos da f e o Equador é uma órbita periódica do sistema. O ponto P não é ponto crítico de f mas é ponto singular do sistema.

Vimos em seções anteriores que para todo campo de vetores com integral primeira f do tipo Morse-Bott as fibras de uma vizinhança crítica $U(L)$ de f são órbitas periódicas do campo, exceto possivelmente pela própria fibra L . Portanto, o grafo de conexões correspondente a $U(L)$ representa a evolução das órbitas periódicas até atingir o nível crítico L .

Portanto se $U(L)$ não contém pontos singulares do campo X , se não aqueles que correspondam aos pontos críticos de f , o grafo de conexão de f descreve a evolução das órbitas periódicas através da fibra singular L . Aqui vale observar que essa fibra crítica pode conter um ou infinitos pontos críticos, o que nos motiva a generalizar o conceito de função de Morse simples para as funções de Morse-Bott.

Diremos que uma função de Morse-Bott é simples se em cada nível crítico $f^{-1}(c)$ existe um único ponto crítico isolado, do tipo centro ou sela, de f .

Por outro lado, é possível encontrarmos situações onde o conjunto $U(L) - L$ contém pontos singulares do campo X . Por isso vamos restringir nossas considerações ao caso em que temos a presença de um número *finito de pontos singulares* do campo X em $U(L) - L$.

Resta ainda analisarmos a fibra crítica L com relação aos pontos críticos de f . A fibra L pode ser formada por um ponto extremo (centro), um laço de separatrizes (ponto de sela), por uma órbita periódica ou por uma curva de pontos críticos não isolados do sistema.

Nessa dissertação, vamos investigar sistemas com integral primeira Morse-Bott simples com finitos pontos singulares, definidos em superfícies compactas, sem bordo e orientáveis.

Fixadas as hipóteses de trabalho, vamos voltar a análise do conjunto $U(L)$ com a correspondente folheação definida pelos conjuntos de nível de f em M . O conjunto $U(L)$

é um conjunto invariante sobre o fluxo definido por X então para cada q , ponto singular do campo e ponto regular de f , existe uma curva passando por q homeomorfa a S^1 , componente conexa do conjunto $f^{-1}(q)$. Notemos que a órbita por q é semi-estável no seguinte sentido: q é α -limite e ω -limite de órbitas regulares contidas na mesma superfície de nível. Esse fato segue da continuidade do fluxo (todas as órbitas próximas dela são periódicas). Representaremos essa fibra regular (que contem o ponto p , ponto singular de X e regular de f) por uma estrela, desenhada sobre o ponto que o representa na aresta correspondente. Como podemos encontrar mais de um ponto singular de X sobre a mesma fibra regular, usaremos a notação (n) ao lado da estrela, para indicar o número de pontos singulares na mesma fibra regular. Veja Figura 5.19.

Figura 5.19: O átomo estrela com relação à evolução de uma vizinhança de um ponto mínimo e um ponto singular do campo.

Consideremos agora o caso em que a fibra singular L contém um ponto do tipo sela p e sobre essa fibra singular temos dois pontos singulares para um campo X , diferentes de p . A Figura 5.20 mostra uma possível configuração das fibras numa vizinhança da fibra singular L definidas pelas superfícies de nível da integral primeira f . 5.20.

Figura 5.20: O ponto em vermelho representa o ponto crítico do tipo sela e as estrelas representam a presença dos pontos singulares.

Se representarmos essa vizinhança pelo grafo de conexão de f , definido através do

grafo de Reeb e descrito nessa dissertação, a fibra singular L irá se colapsar ao ponto p . Ainda que representemos essa fibra no grafo de conexões por uma estrela com o número (2), para indicar o número de pontos singulares do sistema sobre essa fibra, não teremos como distinguir em quais componentes conexas se encontram os tais pontos singulares. E essa informação é fundamental para distinguir sistemas. Afinal um sistema com dois pontos singulares na mesma componente conexa da fibra singular não é topologicamente equivalente a um sistema com um ponto singular em cada componente conexa da fibra singular (como na Figura 5.20).

Sendo assim, o grafo de conexões não é o suficiente para distinguir a localização dos pontos singulares sobre as fibras singulares L se queremos estabelecer uma equivalência por fibras.

Das considerações feitas nessa seção, notamos que se faz necessário estendermos o conceito de grafo de conexões. Abaixo definimos o conceito de *grafo de conexões estendido de um sistema integrável* onde podemos distinguir o número de singularidades do sistema e sua localização nas fibras e manter a estrutura topológica da fibra singular.

Definição 5.4.1. *Chamaremos de grafo de conexões estendido do sistema X com integral primeira f do tipo Morse-Bott ao grafo de conexões de f no qual uma fibra crítica que contém um ponto do tipo sela é representado por seu laço de separatriz e estrelas indicam pontos singulares de X distintos de pontos críticos de f ao longo das fibras de f .*

Em casos como o da Figura 5.20, onde temos um ponto de sela p de f e pontos singulares de X sobre as componentes conexas do laço de separatrizes distintos do ponto p , representaremos esses pontos singulares por uma estrela etiquetada com um número entre parênteses (n), que indica o número de pontos singulares presentes naquela componente conexa, como mostram as Figuras 5.21 e 5.22.

Na definição de grafo de conexões estendido não consideramos a orientação, no entanto isso se faz de maneira natural, uma vez que os átomos da integral primeira f podem ser orientados, como discutimos em seções anteriores e através da continuidade do campo e da integral primeira temos que, a presença das estrelas e do laço de separatrizes no grafo não muda a orientação das arestas.

As figuras 5.21 e 5.22 representam grafos de conexões estendidos diferentes onde o

ponto em vermelho é o ponto singular para uma determinada função de Morse-Bott f e as estrelas são pontos singulares do campo definidos sobre uma certa 2-variedade compacta e sem bordo M^2 .

Figura 5.21: O átomo estrela com relação à evolução de uma vizinhança de um ponto sela e dois pontos singulares do campo.

Figura 5.22: O átomo estrela com relação à evolução de uma vizinhança de um ponto sela e um ponto singular do campo.

5.5 Construção de um invariante para sistemas integráveis sob condições básicas.

Seja M uma superfície fechada e orientável e seja $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ o espaço de todos os fluxos de classe C^1 sobre M com a topologia C^1 . Tais fluxos são conhecidos com campos vetoriais ou sistemas dinâmicos sobre M . Diremos que dois fluxos X_t e Y_t (ou sistemas) são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ levando as trajetórias de X em trajetórias de Y preservando as orientação do fluxo (ou revertendo a orientação de todas as trajetórias).

Um problema clássico da teoria dos fluxos é encontrar invariantes que os caracterize via equivalência topológica. Esse tema foi investigado por muitos pesquisadores, veja por

exemplo, [4], [23], [24], entre outros.

Nosso objetivo nessa seção é definir um invariante para uma classe de sistemas com integral primeira Morse-Bott em superfícies fechadas e orientáveis utilizando as ferramentas descritas na seção anterior dessa dissertação. Lembrando que se f é a integral primeira Morse-Bott então f é simples e o sistema possui finitos pontos singulares.

Lembrando que dada f função de Morse-Bott sobre uma superfície fechada M , segue do estudo até aqui descrito que podemos identificar cada fibra correspondente aos conjuntos de nível de f com um ponto, uma S^1 ou um laço de separatrizes. A relação de equivalência usada é definida por: dois pontos x e y em M^2 são equivalentes se, e somente se, eles pertencem à mesma fibra, exceto se na fibra existir um ponto crítico de f do tipo sela ou os pontos pertencerem a uma variedade invariante não degenerada, no sentido de Morse-Bott. A partir dessa relação de equivalência e considerando a topologia quociente, definimos o grafo de conexões de uma função de Morse-Bott e o generalizamos para o estudo de sistemas com integral primeira Morse-Bott. O grafo de conexões estendido do sistema X com integral primeira de Morse-Bott f , definido na seção anterior, será denotado a partir desse momento por $\Theta(X, f)$.

Sendo M superfície fechada temos que $\Theta(X, f)$ é grafo finito, isto é, constituído por um número finito de vértices e de arestas. Aos pontos correspondentes às fibras singulares da função f serão chamaremos *vértices*. Logo um vértice pode ser um ponto, uma S^1 ou um laço de separatriz. Cada aresta corresponderá à componente da imagem inversa de f de um intervalo aberto.

Diremos que o par (X, f) , onde X é um sistema definido sobre a superfície M com integral primeira f do tipo Morse-Bott, satisfaz as *condições básicas CB* se, e somente se,

1. M é superfície fechada e orientável.
2. f é simples.
3. X tem finitos pontos singulares (que correspondem aos pontos críticos isolados de f).

Nas condições básicas as órbitas que definem as subvariedades críticas de f representam as **separatrizes do sistema** X , isto é, as fibras críticas L , que são círculos críticos ou

pontos críticos isolados de f ou as componentes conexas dos laços de separatrizes exceto pelo próprio ponto do tipo sela, formam as separatrizes do sistema.

Nosso objetivo é mostrar que a partir do grafo de conexões estendido $\Theta(X, f)$ podemos construir um invariante completo para os fluxos com integral primeira do tipo Morse-Bott nas condições básicas. Lembramos que, um invariante para os sistemas $S \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, de modo geral, é um objeto $I(S)$ que pode ser um número, um grupo, um anel, etc., atribuído, neste caso ao sistema S , de tal forma que se dois sistemas S e $\tilde{S}$ são homeomorfos então $I(S)$ e $I(\tilde{S})$ são isomorfos.

Do estudo realizado anteriormente temos o seguinte lema.

Lema 5.5.1. *Considere os pares (X, f) e (Y, g) nas superfícies M e N satisfazendo as condições básicas e seus respectivos grafos, $\Theta(X, f)$ e $\Theta(Y, g)$. Se $\Theta(X, f)$ e $\Theta(Y, g)$ são isomorfos, então os pares (X, f) e (Y, g) são topologicamente equivalentes.*

Demonstração. Por hipótese existe um isomorfismo j , entre $\Theta(X, f)$ e $\Theta(Y, g)$. Defina a aplicação h que leva a fibra correspondente a $\bar{p} \in \Theta(X, f)$ na fibra correspondente a $j(\bar{p}) \in \Theta(Y, g)$. A aplicação h será o homeomorfismo desejado. $\square$

Esse lema nos garante que o grafo de conexões estendido é um invariante topológico para os pares (X, f) em M nas condições básicas.

Por outro lado o grafo de conexões estendido traz consigo informações sobre a integral primeira f que não afeta à classificação do campo X , por exemplo, considere as folheações definidas sobre a parte superior do toro pelas funções de Morse-Bott resultantes de girar as curvas n e m como na Figura 5.23 sobre o próprio toro. A folheação e o fluxo são os mesmos em cada caso: uma folheação por órbitas periódicas, embora as funções e os grafos de Bott das folheações não sejam equivalentes.

Essas observações nos motivam a seguinte definição.

Definição 5.5.1. *Sob as condições básicas chamaremos de grafo de conexões reduzido ou grafo de Bott do par (X, f) em M ao grafo de conexões estendido onde eliminamos os vértices correspondentes a S^1 -críticas que não sejam vértices finais, ou seja, eliminamos as S^1 -críticas que representam máximos e mínimos locais de f em M .*

Figura 5.23: Sistemas equivalentes com integrais primeiras não equivalentes.

Na Figura 5.24 apresentamos dois sistemas topologicamente equivalentes com grafos de conexões reduzidos distintos. A integral primeira nos dois casos é a função altura. A figura à esquerda tem três singularidades e a figura à direita duas.

Figura 5.24: Grafo de conexões reduzido.

Proposição 5.5.2. *O grafo de conexões reduzido e o grafo de conexões estendido definem sistemas equivalentes.*

Demonstração. As operações realizadas no grafo de conexões estendido eliminaram apenas S^1 -críticas que representavam subpartições dentro de regiões anulares. Portanto tais operações não alteram as informações topológicas sobre as fibras do sistema. $\square$

Nosso próximo passo é mostrar que o grafo de Bott é um invariante completo para os pares (X, f) em M nas condições básicas. Para isso vamos compará-lo com o invariante de Neumann [21] e verificar que a cada informação de nosso grafo temos uma informação correspondente no invariante de Neuman e viceversa. Uma vez que o invariante de Neumann é um invariante completo para fluxos contínuos definidos em superfícies fechadas e orientáveis, com um número finito de separatrizes, o invariante que definimos também será um invariante completo para os sistemas com integral primeira do tipo Morse Bott nas condições básicas.

Descreveremos na próxima seção definições e propriedades do invariante de Neumann com o objetivo de relacioná-lo com o grafo de conexões estendido $\Theta(X, f)$. Todos os detalhes estão em [21].

5.5.1 Complexos orbitais. Invariante de Neumann

Dado um fluxo contínuo ϕ sobre uma 2-variedade M^2 arbitrária (espaço métrico, não necessariamente compacto, nem orientável e possivelmente sem bordo) considere a seguinte relação de equivalência $\sim$ sobre M^2 dada por $x \sim y$ se, e somente se, existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi^t(x) = y$.

As classes de equivalências dessa relação $\sim$ são as órbitas do fluxo ϕ . Sendo essa uma relação de equivalência temos que duas órbitas coincidem ou são disjuntas. Considere o espaço quociente $M^2/\sim$ por M^2/ϕ , chamado de *espaço orbital* de ϕ . A função quociente, a qual leva x a sua classe correspondente, é denotada por $\gamma_\phi : M^2 \longrightarrow M^2/\sim$. Como é usual, em $M^2/\sim$ considera-se a topologia mais fina como respeito a qual γ_ϕ é contínua (isto é, um subconjunto U de $M^2/\sim$ é aberto se, e somente se, $\phi^{-1}(U)$ é aberto em M^2).

Seja ϕ um fluxo contínuo sobre uma 2-variedade M com um número finito de separatrizes e denote por $\tilde{M}$ a subvariedade de M , dada por $\tilde{M} = M - S$, onde S é o conjunto formado por todas as separatrizes do fluxo. Neumann em [21] classificou tais fluxos em termos de uma estrutura simples, por ele chamada de complexo orbital. Descreveremos a seguir como o espaço quociente M/ϕ , onde órbitas de ϕ são identificadas a pontos com a topologia quociente usual, somado a alguns elementos deram origem ao complexo orbital. Observamos ainda que o tipo topológico de M/ϕ não distingue completamente (M, ϕ) .

Denotaremos por $K(\phi)$ o complexo orbital, que é uma estrutura formada pela estrutura celular, tipo de fibra, estrutura de ordem e orientabilidade de espirais como descreveremos a seguir.

Separatrizes e Regiões Canônicas: Um par (M, ϕ) , formado pela 2-variedade M e um fluxo ϕ , é chamado de *paralelo* se é equivalente a um dos seguintes pares

1. $\mathbb{R}^2$ com o fluxo definido por $\dot{x} = 1, \dot{y} = 0$;
2. $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ com fluxo definido (em coordenadas polares) por $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 1$;
3. $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ com fluxo definido por $\dot{r} = r, \dot{\theta} = 0$;
4. $S^1 \times S^1$ com fluxo racional (por exemplo, o fluxo induzido por 1. (acima) induzido pela função recobrimento; note em particular que todos os fluxos racionais sobre o toro são equivalentes).

Tais pares são conhecidos como *faixa, anel, espiral e toroidal*, respectivamente.

Uma curva $\gamma(x)$ que não está contida em uma vizinhança paralela N satisfazendo

1. para algum $y \in N$, $\alpha(y) = \alpha(x)$ e $\omega(y) = \omega(x)$, e
2. $cl(N) - N$ consiste de $\alpha(x)$, $\omega(x)$ e exatamente duas órbitas $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ de ϕ , com $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(x)$ e $\omega(a) = \omega(b) = \omega(x)$ (cl denota clausura).

é dita separatriz. Além disso Neumann denotou por Σ a união de todas as separatrizes de ϕ . Uma componente do complementar de Σ , com o fluxo correspondente, é chamada de *região canônica* de ϕ . Uma separatriz $\gamma(x)$ é uma *separatriz limite* se x não é um ponto crítico e $\gamma(x) \subseteq cl(\Sigma - \gamma(x))$.

Vale observar que para o estudo realizado nessa dissertação o conceito de separatriz foi descrito anteriormente.

Em [20] Neumann mostra que toda região canônica de (M, ϕ) é paralela. Segue desse fato que toda região canônica admite uma seção transversal a qual é um segmento aberto no caso da região faixa ou anular e uma curva fechada simples caso contrário.

Vejamos agora como descrever a estrutura adicionada a espaço quociente M/ϕ para definir o complexo orbital $K(\phi)$.

Estrutura celular: Seja $\pi : M \longrightarrow M/\phi$ a projeção natural. A imagem de cada região canônica $\mathcal{R}$ de ϕ é conhecida como uma 1-célula do complexo orbital $K(\phi)$. Esta será um arco aberto no caso em que $\mathcal{R}$ é uma faixa ou anel e uma curva fechada simples quando $\mathcal{R}$ é radial ou toroidal. É usual distingui-las como 1-células aberta e fechada, respectivamente. A imagem de cada separatriz de ϕ é conhecida como uma 0-célula.

Tipo de fibra: Cada i -célula de $K(\phi)$, $i = 0, 1$, foi distinguida por Neumann como uma *linha*, *círculo* ou *ponto* i -célula de acordo ao tipo topológico do fibra sobre o ponto dessa célula.

Estrutura de ordem: Começamos pelas 0-células de $K(\phi)$ correspondentes a separatrizes de pontos não-críticos da fronteira de uma região canônica de ϕ . Para tais células impomos a ordenação a qual corresponde à ordenação natural das separatrizes induzidas pelo fluxo. Em seguida estendemos essa ordenação para os demais pontos 0-células como segue: suponhamos que $\bar{p} = \pi(p)$ é um ponto 0-célula e $\bar{q} = \pi(q)$ é uma linha 0-célula; então

$$\begin{aligned}\bar{p} < \bar{q} & \quad \text{se, e somente se } p \in \alpha(q), \\ \bar{p} > \bar{q} & \quad \text{se, e somente se } p \in \omega(q);\end{aligned}$$

nos demais casos $\bar{p}$ e $\bar{q}$ não estão relacionados. Finalmente, seja $\bar{C} = \pi(\mathcal{R})$ uma 1-célula fechada de $K(\phi)$ o qual é a imagem de uma região espiral $\mathcal{R}$ e seja C uma curva fechada simples, seção de $\mathcal{R}$, e $c \in C$; para cada $p \in \partial\mathcal{R}$ diremos que

$$\begin{aligned}\bar{p} < \bar{C} & \quad \text{se, e somente se } p \in \alpha(c), \\ \bar{p} > \bar{C} & \quad \text{se, e somente se } p \in \omega(c).\end{aligned}$$

Orientabilidade de espirais: Uma 1-célula fechada de $K(\phi)$ correspondente a uma região canônica espiral $\mathcal{R}$ é dita *orientável* (respectivamente *não-orientável*) se $\mathcal{R}$ é orientável (respectivamente *não-orientável*).

Dois complexos orbitais $K(\phi_1)$ e $K(\phi_2)$ são *isomorfos* se existe um homeomorfismo $\kappa : K(\phi_1) \longrightarrow K(\phi_2)$ o qual leva células de $K(\phi_1)$ em células de $K(\phi_2)$, preservando o tipo e a orientabilidade (ou não-orientabilidade) de células, e o qual preserva a estrutura de ordem.

Em [21], os autores demonstram que esta estrutura sobre $K(\phi)$ é suficiente para ca-

racterizar fluxos em M .

Teorema 5.5.3. *Sejam ϕ, ϕ' são fluxos contínuos sobre as 2-variedades M, M' respectivamente, com número finito de separatrizes. Então ϕ e ϕ' são equivalentes se, e somente se, seus complexos orbitais $K(\phi_1)$ e $K(\phi_2)$ são equivalentes.*

Vejamos alguns exemplos que ajudam a esclarecer a importância da estrutura de complexo orbital definida por Neumann in [21].

Exemplo 5.5.2. 1. Em [24] Peixoto apresenta exemplo de dois fluxos não equivalentes sobre S^2 que tem o mesmo grafo de Peixoto. Não é difícil verificar que estes fluxos são distinguidos por seus complexos orbitais.

2. Seja M o plano e ϕ_1 e ϕ_2 os fluxos cujos retratos de fases estão ilustrados na Figura 5.25. Na mesma figura, seus complexo orbital $K(\phi_1)$ e $K(\phi_2)$ são ilustrados abaixo de seus respectivos retratos de fase. Observe que a ordenação das 0-células correspondentes a separatrizes na fronteira de cada região canônica, indicada pelos subíndices, é que distingue os dois fluxos.

Figura 5.25: Complexos orbitais correspondentes aos fluxos ϕ_1 e ϕ_2 .

5.5.2 Grafos de conexões reduzido ou grafos de Bott

Nosso próximo passo é mostrar o grafo de conexões reduzido é um invariante completo para os pares (X, f) em M nas condições básicas.

Teorema 5.5.4. *Considere os pares (X, f) e (Y, g) nas superfícies M e N satisfazendo as condições básicas e seus respectivos grafos, $\Theta(X, f)$ e $\Theta(Y, g)$. Os grafos reduzidos $\Theta(X, f)$ e $\Theta(Y, g)$ são isomorfos se, e somente se, os pares (X, f) e (Y, g) são topologicamente equivalentes.*

Demonstração. Uma das implicações desse teorema já foi demonstrada no Lema 5.5.1. Suponha que os pares (X, f) e (Y, g) nas superfícies M e N satisfazendo as condições básicas são topologicamente equivalentes. Sejam $\Theta(X, f)$ e $\Theta(Y, g)$ os grafos de Bott correspondentes e considere os complexos orbitais $K(X)$ de X e $K(Y)$ de Y definido por Neumann. Mostraremos que todas as informações sobre a estrutura orbital presentes nos complexos orbitais estão representadas nos grafos de Bott. Do fato do complexo orbital ser um invariante completo para os fluxos contínuos definidos em superfícies com um número finito de separatrizes, concluiremos que o grafo de Bott é um invariante completo para os pares (X, f) em M nas condições básicas.

Para mostrarmos que todas as informações do complexo orbital estão representadas no grafo de Bott precisamos reconhecer os modelos de fluxo em cada região canônica. Para o estudo de tais regiões recorreremos ao estudos das bacias de pontos do tipo centro e de uma S^1 -crítica. Denotando por $U(L)$ a vizinhança de uma fibra crítica L , a cada componente conexa do complementar $U(L) - L$, com a correspondente folheação definida pelos conjuntos de nível de f (analogamente para g) na qual a estrutura da folheação permanece inalterada, chamamos de região de anéis $\mathcal{R}$. Em outras palavras, o tipo topológico da folheação em $U(L) - L$ é homeomorfo a união disjunta de anéis. Essas serão as regiões canônicas de nossos pares (X, f) e (Y, g) segundo a linguagem introduzida em [21].

Quando traçamos uma seção transversal Σ para cada região de anéis $\mathcal{R}$, para cada ponto de Σ existe exatamente um anel passando por ele donde concluímos que a linha 1-célula será a seção transversal em $\mathcal{R}$. No complexo orbital de Neumann, essa linha 1-célula será representada por um segmento aberto. Enquanto que o mesmo segmento

aberto representa a bacia de um ponto do tipo centro ou de uma S^1 crítica no grafo de Bott.

Vale observar que para os pares (X, f) e (Y, g) não teremos os círculos 1-célula uma vez que os nossos sistemas não admitem regiões canônicas do tipo espiral.

Neumann chamou de 0-célula à imagem de uma separatriz pela projeção natural, onde as separatrizes são bordos de regiões canônicas. Para os nossos pares os bordos das regiões canônicas serão pontos, círculos (S^1 -críticas) e laços de separatrizes.

Os pontos serão pontos do tipo sela ou centro denominados por Neumann de pontos 0-células. Os círculos corresponderão aos círculos 0-células e as componentes conexas do laço de separatriz distintas do ponto de sela serão as linhas 0-células. Os pontos, círculos e linhas 0-células serão representados por pontos nos complexos orbitais. No grafo de Bott, as 0-células serão representadas por pontos, linhas e círculos de acordo com o tipo topológico da fibra.

Os complexos orbitais de Neumann são dotados de uma estrutura de ordem sobre as 0-células. Como definido por Neumann, a ordem de dois pontos não críticos numa mesma 0-células é a ordem induzida pelas trajetórias de X e Y . Como nossas vizinhanças $U(L) - L$, são formadas por regiões de anéis, a ordem nas separatrizes (linha ou círculos 0-células) determinam completamente a ordem (fluxo) nas demais trajetórias de X e Y pela continuidade do campos. Logo a estrutura de ordem no complexo orbital de Neumann não se faz necessária na classificação dos pares (X, f) em M nas condições básicas, ou seja, para nossa classe de fluxos, diferentemente de fluxos arbitrários, a orientação das separatrizes determinam completamente a orientação das regiões canônicas.

Das considerações anteriores concluímos que, ainda que a relação de equivalência considerada por Neumann, para definir os complexos orbitais, e a relação de equivalência utilizada na definição do grafo de Bott não sejam as mesmas e os elementos presentes no complexo orbital e no grafo de Bott a princípio pareçam distintos, todas as informações estruturais presentes nos complexos orbitais estão representadas no grafo de Bott para nossa classe de fluxos.

Sendo assim, se (X, f) em M e (Y, g) em N topologicamente equivalentes os complexos orbitais $K(X)$ e $K(Y)$ são isomorfos. Logo existe um isomorfismo que leva arestas de $K(X)$ em arestas de $K(Y)$ e vértices de $K(X)$ em vértices de $K(Y)$ preservando a

estrutura das fibras. Portanto, segue a prova dessa proposição. $\square$

Vejamos os exemplos representados na Figuras 5.26, 5.27 e 5.28 para esclarecer a estrutura de $K(X)$, onde temos considerado que o par (X, f) satisfaz as condições básicas numa superfície fechada M .

As subvariedades críticas não-degenerado da função f (em vermelho) serão pontos 0-célula e as órbitas nas componentes conexas da fibra de um ponto do tipo sela correspondem as linhas 0-células. Traçando uma seção transversal Σ na vizinhança de cada uma das subvariedades críticas, Σ representa uma linha 1-célula (em azul) homeomorfas a um segmento de reta.

Figura 5.26: À esquerda, a bacia de um ponto do tipo centro e à direita o complexo orbital correspondente.

Figura 5.27: À esquerda, uma vizinhança de uma fibra singular de um ponto do tipo sela e à direita o complexo orbital correspondente.

Outro ponto a ser observado é que, o grafo de Bott é um grafo conexo, conhecida a função f o construímos de maneira bastante simples e além disso, possibilita adicionarmos outras estruturas, como os pontos singulares do sistemas X distintos dos pontos criticos de f , como já descritos anteriormente. Essas são algumas das vantagens do grafo de Bott sobre o complexo orbital de Neumann para os pares (X, f) em M , onde f é integral primeira do tipo Morse-Bott do campo X definido em M , superfície fechada.

Figura 5.28: À esquerda, a bacia de uma S^1 -crítica e à direita o complexo orbital correspondente.

Não podemos deixar de mencionar o trabalho de Dufour e at. all [11] onde o grafo de Reeb munido de informações adicionais definiu um invariante para as folheações em uma variedade M 2-dimensional compacta e conexa munida de uma 2-forma simplética. Esse invariante foi usado na classificação das folheações com integral primeira Morse-Bott. No entanto, a equivalência considerada exigia que o volume fosse preservado. Esse fato motivou a adição de estruturas distintas das utilizadas nessa dissertação para a classificação das folheações. Portanto não faz sentido buscarmos uma comparação entre os grafos definidos em [11] e nessa dissertação.

5.5.3 Conjecturas sobre sistemas com integral primeira Morse-Bott

Ao considerar a classe dos pares (X, f) em M nas condições básicas **CB** obtivemos uma caracterização de $U(L)$ para cada L fibra crítica de f , logo temos um estudo local de tais sistemas. Uma das maneiras de alcançarmos o estudo global a partir do local é associar um grafo reduzido ou grafo de Bott a esta decomposição. A abordagem proposta é como segue: uma vez que o comportamento local e multi-local das fibras críticas foi descrito, a informação topológica global relevante é codificada no grafo de Bott, possivelmente com etiquetas nos vértices ou nas arestas ou em ambos. Então para pensar numa classificação topológica para tais sistemas exige respondermos as questões seguintes:

1. Determinar todos os grafos abstratos (etiquetados) que podem ser associados aos objetos em estudo (Problema da realização).
2. O grafo obtido é um invariante completo para o problema dado? Em caso negativo,

quais são as classes topológicas associadas a um grafo dado? Determine possíveis invariantes em ordem de distingui-los.

O Teorema 5.5.4 responde a pergunta do segundo item no caso dos pares (X, f) em M nas condições básicas.

Para a abordagem do primeiro item iniciaremos como segue. Cada nível da folheação definida pelos conjuntos de nível de f , sendo f uma função de Morse- Bott, divide a superfícies em regiões. O invariante associado será o grafo de Bott, denotado por Θ , o qual será uma árvore distinguida. Tais árvores não são árvores no sentido usual da definição da teoria dos grafos topológicos embora sejam localmente.

Como M é uma superfície compacta o grafo de Bott é um conjunto finito. Para obter mais informação sobre a função podemos considerar que este grafo é orientado pelos valores de f na direção de seu crescimento. Os vértices de Θ são as subvariedades críticas de f . Esses vértices podem ser pontos extremos (máximos e mínimos), laços de separatrizes (fibra crítica de um ponto do tipo sela) ou círculos (uma subvariedade crítica 1-dimensional).

Considere a seguinte relação de ordem imposta pelo conjunto de vértices do nosso grafo:

$$v_1 < v_2 \iff f(v_1) < f(v_2).$$

Notemos que esta relação de ordem está bem definida se f é uma função simples.

Além disso, lembremos que o sentido de uma aresta do grafo fica definida pelo sentido de crescimento da função e que se e_v^+ denota (respectivamente e_v^-) o número de arestas na direção positiva (respectivamente negativa) no vértice v , temos uma condição local necessária para que um grafo seja o grafo correspondente a um par (X, f) em M nas condições básicas podem ser expressas em função do número de arestas de um vértice v do grafo.

Condições locais: Se um vértice v é denotado por Λ e

(a) Λ é um ponto extremo então o número de arestas $e_v^-(e_v^+)$ é igual a um.

(b) Λ é um laço de separatriz então $1 \leq e_v^+ \leq 2$, $1 \leq e_v^- \leq 2$ e $e_v^+ + e_v^- = 3$.

(c) Λ é uma S^1 crítica extremo então o número de arestas de v é igual a 1 ou igual a dois.

Se igual a dois ambas tem a mesma orientação, ou seja, $e_v^+ = 2$ e $e_v^- = 0$ ou $e_v^- = 2$ e $e_v^+ = 0$

Para sistemas com integral primeira do tipo Morse sobre uma superfície de genus g , o grafo de Reeb tem g ciclos independentes, esse fato foi explorado em diversos trabalhos, como exemplo podemos citar [9] entre outros trabalhos, para a investigação de condições globais para um dado grafo ser grafo de um sistema com integral primeira do tipo Morse.

Para o caso de sistemas Morse-Smale o grafo associado em [10] foi o grafo de Lyapunov abstrato e a condição local para esse grafo estar associado a um par fluxo-função, onde o fluxo é o fluxo Morse Smale e a função é a função de Lyapunov definidos em M (ver todos os detalhes em [10]) está relacionado ao número de genus da variedade M .

Para os grafo de Bott não podemos esperar um resultado análogo, relacionado ao genus da superfície M uma vez que se consideramos o grafo de Bott associado ao par (X, f) em M nas condições básicas, estaremos eliminando S^1 -críticas que não estejam adicionando nenhuma informação importante para a classificação topológica de tais sistemas. Na Figura 5.29 temos a folheação do bitoro pela função altura. As conexões entre pontos de sela, onde estão todas representadas por um laço de separatrizes. Aqui a informação topológica da superfície não está bem representada no grafo.

Figura 5.29: Bitoro acima do plano xy

Sendo assim, passamos a considerar todas as possíveis conexões das arestas, considerando a suas correspondentes orientações, com dois vértices de um grafo associado ao par (X, f) em M nas condições básicas. Na Figura 5.30 encontramos todas as possíveis conexões de dois vértices. Vale observar que para todos os casos abaixo considerados temos

como exibir uma superfície M e um par (X, f) em M de modo que o grafo seja realizável.

Figura 5.30: Grafos de Bott com dois vértices.

Essa maneira é natural questionarmos-nos sobre a conexão de um número maior de vértices, casos em que tenhamos três ou mais subvariedades críticas e ainda, na extensão desse estudo para as superfícies não-orientáveis.

Das considerações feitas acima, parece natural conjecturarmos sobre a realização dos grafos de Bott.

Conjectura 5.5.5. *Dado um grafo Γ com número finito de vértices do tipo ponto, laço*

de separatrizes e círculos, com o comportamento das arestas nas condições locais acima descritas, que possa ser imerso numa variedade M de modo que todas as arestas estejam orientadas para cima ou para baixo. Então o grafo Γ é realizável como grafo de Bott de um par (X, f) na variedade M .

Capítulo 6

Considerações Finais.

O último capítulo desta dissertação visa estabelecer conclusões a respeito do trabalho e sugerir algumas recomendações para futuros trabalhos relacionados ao tema principal.

Esta dissertação tinha como objetivo central apresentar o estudo dos sistemas com integral primeira do tipo Morse-Bott definidos em superfícies fechadas e orientáveis, generalizando os estudos realizados por A.V. Bolsinov em [4] para o caso de sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade definidos em uma superfície fechada e que admite uma integral primeira do tipo Morse, associando um invariante completo para tais sistemas, a saber, o grafo de Bott.

Para cumprir este objetivo, inicialmente generalizou-se o estudo da teoria das funções de Morse definidas em superfícies fechadas para a teoria das funções de Morse-Bott.

Uma vez que foram estudados os sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade definidos em superfícies fechadas com integral primeira Morse, a classificação topológica para tais sistemas foi descrita pela estrutura das folheações de Liouville definidas pelos conjuntos de nível $f^{-1}(a)$, onde a é valor regular de f , assim como também a classificação de tais folheações por meio de uma relação de equivalência para logo após isto apresentar o grafo de Reeb como invariante completo para estes sistemas.

Consequentemente, uma descrição semelhante foi feita para sistemas com integral primeira Morse-Bott em superfícies fechadas. Associamos um invariante topológico para esses sistemas, o qual chamamos grafo de Bott, que carrega todas as informações tanto do fluxo definido pelo sistema quanto a topologia da superfície, e o fato de ser completo

foi mostrado usando uma comparação com o complexo orbital de Neumann.

Ressaltamos também que muitas foram as bibliografias usadas no recorrer desta pesquisa e algumas das demonstrações de teoremas e lemas foram modificadas com o objetivo de esclarecer-las. Além disso, alguns dos resultados expostos na última seção do capítulo 5 foram produtos de seminários em colaboração com o professor José A. Martínez Alfaro (Universitat de València/ Espanha) que visitou o ICMC/USP durante o desenvolvimento desse trabalho.

Do estudo realizado ficam abertas questões referentes as considerações globais dos grafos investigados, a existência de um teorema que relacione a característica de Euler da variedade com o número de vértices do grafo, condições sobre integrabilidade e realização dos grafos investigados e, a possibilidade de generalizarmos o estudo para funções de Morse generalizadas, funções com pontos críticos hiperbólicos.

Referências Bibliográficas

- [1] J.A Martínez Alfaro, C. Mendez de Jesus, and M.C. Romero Fuster, *Global classification and graphs.*, American Mathematical society (2009).
- [2] V. I. Arnold, *Morse theory*, Princeton, N.J . Princeton University Press, 1963.
- [3] A. Banyaga and D. Hurtubise, *A proof of the Morse-Bott Lemma*, Expo. Math **22** (2004), 365–373.
- [4] A.V Bolsinov, *Fomenko invariants in the theory of integrable hamiltonian systems*, Russian Math. Surveys **52** (1997), 997–1015.
- [5] ———, *Integrable hamiltonian systems*, Boca Raton, Fla. : Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [6] Raoul Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math.(2) **60** (1954), 248–261.
- [7] Idel Bronstein and Igor. Nicolaev, *Peixoto graphs of Morse-Smale foliations on surfaces*, Topology Appl. **77** (1997), 19–36.
- [8] Keith Burns and Marian Gidea, *Differential geometry and topology. with a view to dynamical systems*, Boca Raton : CRC Press, 2005.
- [9] Kree Cole-McLaughlin, Herbert Edelsbrunner, Jhon Harer, Vijay Natarajan, and Valerio Pascucci, *Loops in Reeb Graphs of 2-manifolds*, Discrete Comput. Geom. **32** (2004), 231–244.
- [10] K.A De Rezende and R.D Frangoza, *Lyapunov graphs and flows on surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society **340** (1993), 767–784.

- [11] Jean-Paul Dufour, Pierre Molino, and Anne Toulet, *Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de fomenko*, C. R Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **318** (1994), 949–952.
- [12] F. Dumortier, J. Llibre, and J. C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer Universitext, 2006.
- [13] Jonathan L. Gross and Thomas W. Tucker, *Topological graph theory*, New York : Wiley, 1987.
- [14] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley and Sons, Inc., 1964.
- [15] Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [16] Georgi Khimshiashvili and Dirk Siersma, *Remarks on minimal round funtions*, Banach center publications **62** (2004), 159–172.
- [17] Yukio Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, American Mathematical Society, 2002.
- [18] Marston Morse, *The calculus of variations in the large*, Tech. report, American Mathematical Society Colloquium Publications, 18, 1934.
- [19] James R. Munkres, *Elementary differential topology*, Princeton, N.J : Princeton University Press, 1966.
- [20] D. A Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society **48** (1975), 73–81.
- [21] Dean Neumann and Thomas O’Brien, *Global structure of continuous flows on 2-manifolds*, Journal of differential equations **22** (1976), 89–110.
- [22] Liviu. I Nicolaescu, *An invitation to Morse theory*, New York : Springer, London., 2007.
- [23] A.A. Oshemkov and V.V Sharko, *Classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds*, Shornik Mathematics **189** (1998), 1205–1250.

- [24] M.M Peixoto, *Dynamical systems: Salvador symposium on dynamical systems, salvador, bahia, brasil*, Imprenta New York: Academic Press, 1993.
- [25] W Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [26] W Thurston, *Existence of codimension-one foliations*, Ann. of Math. **2** (1976), 249–268.
- [27] Claudio. Vidal, *Notas sobre sistemas Hamiltonianos e aplicações a mecânica celeste.*, Tech. report, Universidad del Bío Bío - Chile, Outubro 2009.

Índice Remissivo

$Crit(f)$, 6

α -limite, 33

ω -limite, 33

k -alça, 45

campo gradiente, 33

carta de Morse, 11

centro, 9

condições básicas, 131

disco com alças, 64

esfera anexada, 63

função conexão, 64

função de Morse, 18

função de Morse simples, 55

grafo de Bott, 132

grafo de conexões estendido, 132

grafo de Reeb, 107

invariante de Neumann, 134

Lema de Morse, 11

Lema de Morse-Bott, 86

ponto crítico, 6

ponto regular, 6

sela, 9

Teorema de Sard, 19

teoria de Morse, 3

variedade estável e instável, 37