I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
AUTÔNOMAS DO TIPO RETARDADO.

Wagner Vieira Leite Nunes

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
AUTÔNOMAS DO TIPO RETARDADO

Wagner Vieira Leite Nunes

Orientador: Prof. Dr. Plácido Zoëga Táboas

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para a obten-
ção do Título de Mestre em Matemática.

SAO CARLOS
1985

Dedico ao meu pai (in memoriam)

a minha mãe,

a Grã

e aos meus irmãos

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Plácido Zoêga Táboas pela dedicação, incentivo e pelo exemplo de integridade profissional. Agradeço aos professores do Departamento de Matemática, do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, em particular aos professores Hildebrando Munhoz Rodrigues e José Gaspar Ruas Filho.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática, da Universidade Federal de São Carlos, principalmente ao professor Adalberto Panobianco Bergamasco pela dedicação nos tempos de graduação.

Agradeço a Lene pelo excelente trabalho de datilografia.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios concedidos pela FAPESP, Proc.: 82/2002-0 e CNPq.

A B S T R A C T

This is a work on the existence of periodic solutions of Autonomous Functional Differential Equations of Retarded Type. The Hopf Bifurcation and applications of ejective points are done on basis of Hale's book [7]. A result is obtained for two-dimensional equations for which S^1 is invariant.

I N D I C E

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO 0	1
0.1. O Teorema de Representação de Riesz	1
0.2. Teoremas de Ponto Fixo, Ejetividade	2
0.3. Teorema de Autovetor em Cones	5
CAPÍTULO 1	7
1.1. A Equação Diferencial Funcional com Retardamento .	7
1.2. A Equação Diferencial Funcional Linear com Re- tardamento	13
1.3. A Equação Diferencial Funcional Linear Autônoma com Retardamento	20
1.4. A Equação Linear Autônoma Forçada	42
CAPÍTULO 2	51
2.1. A Bifurcação de Hopf	51
2.2. Teoremas sobre Periodicidade de EDFR Autônomas Envolvendo Ponto Ejetivo	60
2.3. Soluções Periódicas de EDFR Autônomas em C_a ...	64
CAPÍTULO 3	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é estudar o problema de existência de soluções periódicas para Equações Diferenciais Funcionais Autônomas com Retardamento. Não tem pretensões de ineditismo e está fortemente baseado em [7]; no entanto, o resultado relativo a equações em $C([-r,0], S^1(a))$ e o Exemplo 3 têm inspiração em [2] e constituem contribuição original.

É apresentado em quatro capítulos.

No Capítulo zero citamos alguns resultados básicos para o desenvolvimento do trabalho, como o Teorema da Representação de Riesz, Teoremas envolvendo ponto ejetivo e um Teorema de autovetores em cones.

No Capítulo um definimos Equação Diferencial Funcional com Retardamento e apresentamos alguns resultados sobre existência, unicidade e dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais. Além disso, estudamos a Equação Linear, em especial as Equações Lineares Autônomas.

O Capítulo dois é dedicado ao estudo da existência de soluções periódicas para Equações Autônomas. Neste capítulo encontram-se o Teorema da Bifurcação de Hopf, um teorema de periodicidade de soluções envolvendo o conceito de ponto ejetivo e um Teorema sobre existência de soluções periódicas em $C([-r,0], S^1(a))$.

Por último, no Capítulo três, utilizamos os resultados desenvolvidos no Capítulo dois em três exemplos.

CAPÍTULO 0

Apresentamos neste capítulo alguns resultados básicos que serão usados no decorrer do trabalho. As demonstrações podem ser encontradas na bibliografia indicada.

0.1. O Teorema de Representação de Riesz

Seja $C([a,b],\mathbb{R})$ o espaço das funções reais contínuas em $[a,b]$, com a norma da convergência uniforme. Se $\mu \in VL[a,b]$, conjunto das funções de variação limitada em $[a,b]$, então o funcional

$$C([a,b],\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi \longrightarrow \int_a^b d\mu(\theta)\psi(\theta)$$

é linear e contínuo. Vale a recíproca deste fato, para isto temos o:

Teorema 0.1 (Teorema de Representação de Riesz)

Se $L : C([a,b],\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe $\mu \in VL[a,b]$ tal que para toda $\psi \in C([a,b],\mathbb{R})$

$$L(\psi) = \int_a^b d\mu(\theta)\psi(\theta).$$

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [10; pag. 413].

Se $L : C([a,b],\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear e contínua então existe uma matriz função $\eta(\theta)$, $n \times n$, cujos termos são funções de variação limitada em $[a,b]$, tal que:

$$L(\psi) = \int_a^b d\eta(\theta) \psi(\theta)$$

para toda $\psi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

0.2. Teoremas de Ponto Fixo, Ejetividade

Como uma consequência do Teorema de Ponto Fixo de Schauder temos o seguinte resultado: "Se K é um subconjunto convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach X e $A : K \rightarrow K$ completamente contínua então A tem um ponto fixo em K ."

A seguir enunciaremos alguns resultados de Roger D. Nussbaum, que nos levam a conclusões mais precisas com relação ao ponto fixo, isto é, daremos condições para garantir que o ponto fixo de A não seja um ponto prefixado, denominado ejetivo. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [11].

Definição 0.2

Seja K um conjunto convexo. Dizemos que $x_0 \in K$ é um ponto extremo de K , se para todo $x_1, x_2 \in K$ tal que $x_0 \in \{tx_1 + (1-t)x_2 : 0 \leq t \leq 1\}$ tem-se $x_0 = x_1$ ou $x_0 = x_2$.

Exemplo

Consideremos K como sendo um n -cubo em $\mathbb{R}^n$. Então os vértices do n -cubo serão os pontos extremos de K .

Definição 0.3

Seja X um espaço de Banach, $U \subset X$ e $x_0 \in U$. Dada uma aplicação $A : U \setminus \{x_0\} \rightarrow U$, o ponto x_0 é dito um ponto ejetivo de A , se existir uma vizinhança aberta de x_0 , $G = G(x_0) \subset X$, tal que para todo $y \in G \cap U$, $y \neq x_0$, existe um

$m = m(y) \in \mathbb{N}$ tal que $A^m y \notin G \cap U$.

Exemplos

(1.^o) Consideremos $U = X = \mathbb{R}$ e $A : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $A(x) = 1/x$. Então $x_0 = 0$ é um ponto ejetivo de A , pois tomando-se $G = G(0) = (-1, 1)$ segue que para $y \in G \setminus \{0\}$, $Ay \notin G$, logo basta tomar $m = 1$. A vizinhança, G , neste caso, pode ser qualquer intervalo aberto contido em $(-1, 1)$ que contenha $x_0 = 0$.

(2.^o) Seja X um espaço de Banach, $U = X$ e $A : X \setminus \{0\} \rightarrow X$ dada por $Au = u + 1/2(u - u/||u||)$, para $u \in X \setminus \{0\}$. Então $x_0 = 0$ é um ponto ejetivo de A .

Para todo $M > 0$, sejam

$$S_M = \{x \in X : |x| = M\} \quad \text{e} \quad B_M = \{x \in X : |x| \leq M\}.$$

Daremos a seguir dois resultados que darão condições para que um ponto fixo de uma aplicação não ocorra num ponto ejetivo da mesma.

Teorema 0.4

Seja X um espaço de Banach e $K \subset X$, limitado, fechado, convexo e de dimensão infinita. Se $A : K \setminus \{x_0\} \rightarrow K$ é completamente contínua, $x_0 \in K$ é um ponto ejetivo de A então existe um ponto fixo de A em $K \setminus \{x_0\}$. Se K é de dimensão finita e x_0 é um ponto extremo de K , podemos concluir o mesmo.

Observemos que se K é de dimensão finita, basta que a aplicação A seja contínua; x_0 ser um ponto ejetivo é con-

dição essencial nas hipóteses do Teorema 0.4 como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo

Seja $X = \mathbb{R}^2$, K o triângulo com vértices $(1,0)$, $(0,0)$ e $(0,1)$ e $A : K \setminus \{0\} \rightarrow K$ dada por $Au = u/2$.

O conjunto K e a aplicação A satisfazem as hipóteses do Teorema 0.4, porém não existe um ponto fixo em $K \setminus \{0\}$. Isto ocorre porque $x_0 = 0$ não é um ponto ejetivo de A .

Teorema 0.5

Seja X um espaço de Banach e $K \subset X$, convexo e fechado. Se $A : K \setminus \{0\} \rightarrow K$ é completamente contínua, $0 \in K$ é um ponto ejetivo de A e existe $M > 0$ tal que se $Ax = \lambda x$, para $x \in K \cap S_M$ implicar $\lambda < 1$ então A tem um ponto fixo em $K \setminus \{0\}$ se K é de dimensão infinita ou se 0 é um ponto extremo de K e K é de dimensão finita.

Observemos que no caso de K ser de dimensão finita a condição do ponto ejetivo ser extremo é essencial para que as conclusões 0.4 e 0.5 ocorram, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo

Seja $X = \mathbb{R}^2$, $K = B_1(0)$ e $x_0 = 0$. Se

$$R = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Sx = x/|x|; \quad \text{definindo } A: K \setminus \{0\} \rightarrow K$$

por $Ax = RSx$.

A aplicação A , projeta o vetor x sobre a esfera unitária e aplica-lhe uma rotação de um ângulo de $\pi/4$. Todas as

hipóteses do Teorema 0.5 estão satisfeitas, exceto de $x_0 = 0$ ser um ponto extremo de K e a aplicação A não tem um ponto fixo em $K \setminus \{0\}$.

0.3. Teorema de Autovetor em Cones

Nesta secção, daremos um teorema que nos garantirá a existência de um autovetor de uma aplicação completamente contínua em um cone. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6; pag. 144].

Para isto necessitaremos de algumas definições.

Definição 0.6

Seja E um espaço de Banach. Um conjunto $K \subset E$ é denominado um *cone*, se satisfaz:

- (i) K é fechado e convexo.
- (ii) Se $\phi \in K$ então $\lambda\phi \in K$, para todo $\lambda \geq 0$.
- (iii) Para toda $\phi \in E$, $\phi \neq 0$, se $\phi \in K$ então $-\phi \notin K$.

Exemplos

(1.º) Seja $E = \mathbb{R}^2$, $k_1 < k_2$, então o conjunto

$$K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq k_1 x_1 \leq x_2 \leq k_2 x_1\}$$

é um cone em $\mathbb{R}^2$.

(2.º) Seja $E = C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$ onde $r > 0$, e $k_1 < k_2$, então o conjunto,

$$K = \left\{ \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in E : 0 \leq k_1 \phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta) \leq k_2 \phi_1(\theta), \text{ para } -r \leq \theta \leq 0 \right\}$$

é um cone em $C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$.

Definição 0.7

Dizemos que $K \subset E$ é um *cone truncado*, se K é a intersecção de um cone com uma vizinhança conexa de zero.

Definição 0.8

Dizemos que uma aplicação $T : K \rightarrow K$, linear ou não, tem um *autovetor* $\phi \in K$, se existir uma constante μ , tal que $T\phi = \mu\phi$.

Com isto temos o:

Teorema 0.9

Sejam $K \subset E$ um cone ou cone truncado, onde E é um espaço de Banach e ∂G , a fronteira de um conjunto aberto limitado $G \subset E$, com $0 \in G$. Se $T : \partial G \cap K \rightarrow K$ é completamente contínua e

$$\inf\{|T\phi| : \phi \in \partial G \cap K\} > 0$$

então T tem um autovetor em $\partial G \cap K$.

CAPÍTULO 1

1.1. A Equação Diferencial Funcional com Retardamento

Seja $R = (-\infty, \infty)$, R^n o espaço vetorial n -dimensional com uma norma fixada, $|\cdot|$, e $[a, b]$ um intervalo fechado da reta.

Consideremos $C([a, b], R^n)$ o espaço de Banach das funções $\phi : [a, b] \rightarrow R^n$ contínuas, munido da seguinte norma

$$||\phi|| = \sup_{a \leq t \leq b} |\phi(t)|.$$

Seja $r > 0$, um número real fixo. Se $[a, b] = [-r, 0]$, denotaremos por $C = C([-r, 0], R^n)$.

Se $\sigma \in R$, $A \geq 0$ e $x \in C([\sigma-r, \sigma+A], R^n)$ então para todo $t \in [\sigma, \sigma+A]$, seja $x_t \in C$ definida por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{onde} \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Se $D \subset R \times C$, $f : D \rightarrow R^n$ é uma função dada e " $\cdot$ " representa a derivada à direita com relação a t , dizemos que a relação

$$(1.1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

é uma equação diferencial funcional com retardamento em D e se rá denotada por EDFR. Se desejarmos enfatizar que a equação é de finida por f , nós escreveremos EDFR(f).

A equação (1.1) inclui como caso particular as equações diferenciais ordinárias, basta para isto tomar $r = 0$.

Exemplos

(1.º) A equação

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t-1))$$

é uma EDFR. Neste caso $r = 1$ e $f(t, \phi) = g(t, \phi(-1))$, para $(t, \phi) \in R \times C$.

(2.º) A equação

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t-h_1(t)), \dots, x(t-h_m(t)))$$

onde $0 \leq h_j(t) \leq r < \infty$, para $j = 1, \dots, m$, é uma EDFR. Neste caso

$$f(t, \phi) = g(t, \phi(0), \phi(-h_1(t)), \dots, \phi(-h_m(t))),$$

para $(t, \phi) \in R \times C$.

(3.º) A equação

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 g(t, \theta, x(t+\theta)) d\theta$$

é uma EDFR. Neste caso $f(t, \phi) = \int_{-r}^0 g(t, \theta, \phi(\theta)) d\theta$ para $(t, \phi) \in R \times C$.

Os exemplos acima foram extraídos de [12; pag. 4 e 5].

Definição 1.1

Dizemos que uma função x é solução da equação (1.1) em $[\sigma-r, \sigma+A)$ se existem $\sigma \in R$ e $A > 0$ tal que:

- (i) $x \in C([\sigma-r, \sigma+A), R^n)$
- (ii) $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (1.1) para $t \in [\sigma, \sigma+A)$.

Dado $(\sigma, \phi) \in D$, dizemos que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (1.1) passando por (σ, ϕ) , se existir $A > 0$ tal que:

- (i) $x(\sigma, \phi, f)$ é solução da equação (1.1) em $[\sigma-r, \sigma+A)$.
- (ii) $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$.

Exemplo

Consideremos a equação

$$\dot{x}(t) = e^t x(t-r) \quad (\text{onde } r > 0)$$

então uma solução da equação em $[-r, \infty)$ passando por $(0, \phi)$ onde $\phi = 1$ é

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -r \leq t \leq 0 \\ e^t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Definições 1.2

Dizemos que a equação (1.1) é *linear* se $f(t, \phi) = L(t, \phi) + h(t)$ para $(t, \phi) \in D$ onde $L(t, \phi)$ é linear em ϕ para cada $t \in [\sigma, \sigma+A)$.

Dizemos que a equação (1.1) é *autônoma* se $f(t, \phi) = g(\phi)$, onde g não depende de t .

Observemos que encontrar uma solução da equação (1.1) passando por $(\sigma, \phi) \in D$, com $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua é equivalente a resolver a equação integral

$$(1.2) \quad x(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq \sigma.$$

Apresentaremos a seguir alguns resultados sobre existência, unicidade, dependência contínua em relação aos dados iniciais, das soluções da equação (1.1). As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [7; pag. 41, 42].

Se $V \subset \mathbb{R} \times C$, definimos $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas de V em $\mathbb{R}^n$, mu

nido da norma

$$\|f\|_V = \sup_{(t,\phi) \in V} |f(t,\phi)|$$

Teorema 1.3 (Existência)

Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ é aberto e que $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$ então existe uma solução da EDRF(f^0) passando por (σ, ϕ) . Em geral, se $W \subset \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ são dados então existe uma vizinhança de W , $V = V(W) \subset \Omega$ tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, existe uma vizinhança de f^0 , $U = U(f^0) \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$ tal que, para todo $(\sigma, \phi) \in W$ e $f \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \phi, f)$ da EDRF(f) passando por (σ, ϕ) que existe em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.

Teorema 1.4 (Continuidade em relação às condições iniciais)

Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ é aberto, $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e que x^0 é uma solução da EDRF(f^0) passando por (σ^0, ϕ^0) que existe e é única em $[\sigma^0 - r, b]$. Seja $W^0 \subset \Omega$ o conjunto compacto, definido por:

$$W^0 = \{(t, x_t^0) : t \in [\sigma^0, b]\}$$

e seja V^0 uma vizinhança de W^0 tal que $f^0 \in C^0(V^0, \mathbb{R}^n)$. Se (σ^k, ϕ^k, f^k) para $k = 1, 2, \dots$ satisfaz $\sigma^k \rightarrow \sigma^0$, $\phi^k \rightarrow \phi^0$ e $\|f^k - f^0\|_{V^0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então existe um $k^0 \in \mathbb{N}$, onde EDRF(f^k), para $k \geq k^0$, é tal que, cada solução $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ passando por (σ^k, ϕ^k) existe em $[\sigma^k - r, b]$ e $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente em $[\sigma^0 - r, b]$. Como todas as x^k podem não estar definidas em $[\sigma^0 - r, b]$, por $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente em $[\sigma^0 - r, b]$, nós queremos dizer que: para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_1 = k_1(\varepsilon)$ tal que se $k \geq k_1$, $x^k(t)$ está definida em $[\sigma^0 - r - \varepsilon, b]$ e

$x^k \rightarrow x^0$ uniformemente em $[\sigma^0 - r - \epsilon, b]$.

Definição 1.5

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ aberto e $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dizemos que $f(t, \phi)$ é *localmente Lipschitziana com relação a ϕ em Ω* se f é lipschitziana em ϕ para cada subconjunto compacto de Ω , isto é, se $W \subset \Omega$ é compacto, existe $k = k(W) \in \mathbb{R}$ tal que para todo $(t, \phi), (t, \psi) \in W$ temos

$$|f(t, \phi) - f(t, \psi)| \leq K |\phi - \psi|.$$

Teorema 1.6 (Unicidade)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ aberto e $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ localmente lipschitziana com relação a ϕ em Ω . Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$ então existe uma única solução da EDRF(f) passando por (σ, ϕ) .

Definição 1.7

Suponhamos que f da equação (1.1) é contínua. Se x é uma solução da EDRF(f) no intervalo $[\sigma, a)$, $a > \sigma$, dizemos que uma função $\hat{x}$ é uma *continuação (a direita) de x* , se existe $b > a$, tal que $\hat{x}$ está definida em $[\sigma - r, b)$, coincide com x em $[\sigma - r, a)$ e satisfaz a equação (1.1) em $[\sigma, b)$.

Dizemos que x , solução da equação (1.1) em $[\sigma, a)$, é *não continuável (a direita)* se não existe uma continuação dela, neste caso o intervalo $[\sigma, a)$ é dito *intervalo maximal* de existência da solução.

Observações 1.8

- (1) Colocando-se algumas condições sobre a EDRF(f), podemos obter resultados importantes sobre continuação de

soluções e soluções não continuáveis de uma EDRF(f).
Para maiores detalhes indicamos [7; secção 2.3].

- (2) Se a equação (1.1) for T-periódica, isto é, $f(t+T, \phi) = f(t, \phi)$, $t \in \mathbb{R}$, uma solução T-periódica, implicitamente, envolve a consideração do intervalo $J = (-\infty, \infty)$ como seu domínio. Isto segue do fato de $x(t)$ ser solução T-periódica da equação (1.1) implicar $x(t+T)$ também é solução T-periódica da equação (1.1).

Definição 1.9

Suponhamos que $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Para todo $(\sigma, \phi) \in \Omega$ existe um $t_{\sigma, \phi} \in \mathbb{R}$ e uma função x que é uma solução não continuável da EDRF(f) passando por (σ, ϕ) com intervalo maximal de existência $[\sigma - r, t_{\sigma, \phi})$. Seja $\Omega_\sigma \subset \mathbb{C}$ dado por $\Omega_\sigma = \{\phi \in \mathbb{C} : (\sigma, \phi) \in \Omega\}$; definimos a aplicação

$$\begin{aligned} T(t, \sigma) : \Omega_\sigma &\rightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\rightarrow x_t(\sigma, \phi) \end{aligned} \quad \text{para } t \in [\sigma, t_{\sigma, \phi})$$

denominada *aplicação solução associada a EDRF(f)*.

Observações 1.10

- (1) A aplicação solução associada a uma EDRF possui, em alguns casos, propriedades indesejáveis, como, por exemplo: não ser limitada, isto é, não leva conjuntos limitado e fechado em conjuntos limitado; não ser injetora. Para obter mais informações sobre estes fatos ver [7; cap. 3].

- (2) Colocando-se algumas condições sobre a EDFR podemos garantir que a aplicação solução será injetora. Veja [7; secção 2.5].

Definição 1.11

Dada uma EDFR(f), dizemos que um subconjunto $B \subset \Omega_\sigma$ é invariante pela aplicação solução ou B é $T(t, \sigma)$ -invariante se $T(t, \sigma)B \subset B$ para $t \in [\sigma, t_{\sigma, \phi})$.

Exemplo

Consideremos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1)y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t-1)x(t) - z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

As soluções deste sistema satisfazem:

$x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) + z(t)\dot{z}(t) = 0$, isto é, $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = a^2$, $t \geq 0$, para $a > 0$ qualquer. Logo se $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in C([-1, 0], \mathbb{R}^3)$ é tal que $\phi \in C_a = C([-1, 0], S^2(a))$ onde $S^2(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = a\}$ então temos que a solução $X(0, \phi) = (x(0, \phi), y(0, \phi), z(0, \phi))$ do sistema acima permanecerá em $S^2(a)$, logo $T(t, 0)\phi \in C_a$, $t \geq 0$ se $\phi \in C_a$, mostrando que C_a é invariante pela aplicação solução $T(t, 0)$, para $t \geq 0$.

O exemplo acima foi extraído de [8].

1.2. A Equação Diferencial Funcional Linear com Retardamento

Para $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times C$, consideremos o sistema linear não homogêneo,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(t, x_t) + h(t), \quad t \geq 0 \\ x_\sigma &= \phi \end{aligned}$$

e o sistema linear homogêneo,

$$(1.4) \quad \dot{x}(t) = L(t, x_t), \quad t \geq 0$$

onde $L(t, \phi)$ é linear em ϕ , contínua em (t, ϕ) e $h \in C([\sigma, \infty), \mathbb{R}^n)$.

Suponhamos que existe uma função $m \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, o espaço das funções Lebesgue integráveis em cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$, tal que,

$$(1.5) \quad |L(t, \phi)| \leq m(t) |\phi|$$

para $t \in \mathbb{R}$ e $\phi \in C$. De acordo com o Teorema de Riesz, podemos considerar uma matriz $\eta = \eta(t, \theta)$, $n \times n$, de variação limitada em θ , para cada t fixado, com $\eta(t, \theta) = 0$ para $\theta \geq 0$ e $\eta(t, \theta) = \eta(t, -r)$ para $\theta \leq -r$, tal que

$$L(t, \phi) = \int_{-r}^0 d_\theta \eta(t, \theta) \phi(\theta)$$

para $(t, \phi) \in \mathbb{R} \times C$.

Com estas hipóteses, temos que para cada $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times C$, a equação (1.3) tem uma única solução passando por (σ, ϕ) que é contínua em $[\sigma - r, \infty)$, que será denotada por $x(\sigma, \phi, h)$.

Se $x(\sigma, \phi, h)$ é a solução da equação (1.3) passando por (σ, ϕ) então da linearidade de L e da unicidade das soluções, segue que

$$x(\sigma, \phi, h) = x(\sigma, \phi, 0) + x(\sigma, 0, h)$$

$$(1.6.a) \quad |x(\sigma, \phi, 0)(t)| \leq |\phi| \exp \int_{\sigma}^t m(s) ds$$

$$(1.6.b) \quad |x(\sigma, 0, h)(t)| \leq \int_{\sigma}^t |h(s)| ds \exp \int_{\sigma}^t m(s) ds, \quad \text{para } t \geq \sigma.$$

Logo, $x(\sigma, \phi, 0)$ e $x(\sigma, 0, h)$ são lineares e contínuas em ϕ e h , respectivamente.

O resultado que segue, nos dá uma representação da solução $x(\sigma, \phi, h)$ em termos de uma matriz $U(t, s)$.

Teorema 1.12 (Fórmula da Variação das Constantes)

Se $h \in L_1^{loc}([\sigma, \infty), \mathbb{R}^n)$, L satisfaz as condições acima e $x(\sigma, \phi, h)$ é uma solução da equação (1.3) então

$$(1.7) \quad \begin{aligned} x(\sigma, \phi, h)(t) &= x(\sigma, \phi, 0)(t) + \int_{\sigma}^t U(t, s) h(s) ds, \quad t \geq \sigma \\ x_{\sigma} &= \phi \end{aligned}$$

onde $U(t, s)$ é a solução da equação

$$(1.8) \quad U(t, s) = \begin{cases} \int_s^t L(u, U_u(\cdot, s)) du + I & \text{q.s. em } s, \quad t \geq s \\ 0 & \text{se } s-r \leq t \leq s \end{cases}$$

ou

$$(1.9) \quad \frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = L(t, U_t(\cdot, s)), \quad t \geq s, \quad \text{q.s. em } s \text{ e } t$$

e

$$U(t, s) = \begin{cases} 0, & s-r \leq t < s \\ I, & t = s \end{cases}$$

onde $U_t(\cdot, s)(\theta) = U(t+\theta, s)$ para $-r \leq \theta \leq 0$.

A função $U(t, s)$ é chamada *matriz fundamental*.

Corolário 1.13

Se a equação (1.4) é autônoma então $U(t,s) = U(t-s,0) =$
 $\stackrel{\text{def}}{=} U(t-s)$ e

$$(1.10) \quad \begin{aligned} x(\sigma, \phi, h)(t) &= x(t-\sigma, \phi, 0)(0) + \int_{\sigma}^t U(t-s)h(s)ds, \quad t \geq \sigma \\ x_{\sigma} &= \phi \end{aligned}$$

Demonstração

Temos que, $U(t,s) = U(t-s,0)$ para $s-r \leq t \leq s$ e para $t \geq s$, segue de (1.9) que

$$\frac{\partial U(t-s,0)}{\partial t} = L(U_{t-s}(\cdot, 0)).$$

Portanto, $U(t-s,0)$ é solução de (1.9) para $t-s \geq 0$, que coincide com $U(t,s)$ para $s-r \leq t \leq s$, então pela unicidade segue que $U(t-s,0) = U(t,s)$ para $t \geq s$.

Usando a fórmula da variação das constantes e o resultado provado acima, vemos que para provar (1.10) basta mostrar que

$$x(\sigma, \phi, 0)(t) = x(t-\sigma, \phi, 0)(0).$$

Esta igualdade segue do fato da equação ser autônoma.

A aplicação solução associada a equação (1.4) dada por

$$(1.11) \quad T(t, \sigma)\phi = x_t(\sigma, \phi, 0)$$

será um operador linear, contínuo e vale a seguinte relação:

$$U_t(\cdot, s) = T(t, s)X_0$$

(1.12) onde

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } -r \leq \theta < 0 \\ I & \text{se } \theta = 0 \end{cases}$$

Logo teremos,

$$(1.13) \quad x_t(\sigma, \phi, h) = T(t, \sigma)\phi + \int_{\sigma}^t T(t, s)X_0 h(s)ds, \quad t \geq \sigma.$$

O próximo resultado nos dá uma representação de $x(\sigma, \phi, 0)(t)$ em termos da matriz solução da *equação adjunta formal*:

$$y(s) + \int_s^{\infty} y(\alpha)\eta(\alpha, s-\alpha)d\alpha = \text{cte}$$

onde $y \in R^{n^*}$, o espaço n -dimensional dos vetores linha.

Teorema 1.14.

Se x é solução da equação (1.3) em $[\sigma, \infty)$ passando por (σ, x_{σ}) então para todo $t \geq \sigma$,

$$(1.14) \quad x(t) = Y(\sigma, t)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_{\alpha} \left\{ \int_{\sigma}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right\} x(\alpha) + \int_{\sigma}^t Y(s, t)h(s)ds$$

onde a matriz Y , $n \times n$ é definida por

$$(1.15) \quad Y(\sigma, t) = \begin{cases} 0, & t < \sigma \\ I - \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t)\eta(\alpha, \sigma-\alpha)d\alpha, & t \geq \sigma \end{cases}$$

Além disso, $Y(\sigma, t) = U(t, \sigma)$ q.s. em σ .

Demonstração

Temos que

$$(1.16) \quad \dot{x}(t) = L(t, x_t) + h(t) = \int_{-r}^0 d_{\theta} \eta(t, \theta)x(t+\theta) + h(t), \quad t \geq \sigma$$

e fazendo a mudança $t+\theta = s$, obtemos

$$(1.17) \quad \dot{x}(t) = \int_{t-r}^t d_s \eta(t, s-t) x(s) + h(t), \quad t \geq \sigma.$$

Seja $Y(\sigma, t)$ dada por (1.15).

Como

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^t d_s Y(s, t) x(s) &= Y(s, t) x(s) \Big|_{\sigma}^t - \int_{\sigma}^t Y(s, t) \dot{x}(s) ds \\ &= x(t) - Y(\sigma, t) x(\sigma) - \int_{\sigma}^t Y(s, t) \dot{x}(s) ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$x(t) = Y(\sigma, t) x(\sigma) + \int_{\sigma}^t d_s Y(s, t) x(s) + \int_{\sigma}^t Y(s, t) \dot{x}(s) ds.$$

Substituindo-se $\dot{x}(s)$ por (1.17), obtemos:

$$\begin{aligned} (1.18) \quad x(t) &= Y(\sigma, t) x(\sigma) + \int_{\sigma}^t d_s Y(s, t) x(s) + \\ &+ \int_{\sigma}^t Y(s, t) \left[\int_{s-r}^s d_{\alpha} \eta(s, \alpha-s) x(\alpha) \right] ds \end{aligned}$$

Definindo-se $p(t, s) = \eta(t, s-t)$, a última parcela do segundo membro de (1.18), torna-se:

$$\int_{\sigma}^t Y(s, t) \left[\int_{s-r}^s d_{\alpha} p(s, \alpha) x(\alpha) \right] ds$$

Como para $\alpha < s-r$ temos $p(s, \alpha) = \text{cte}$ e para $s < \alpha$ $p(s, \alpha) = 0$, temos que $d_{\alpha} p(s, \alpha) = 0$ para $\sigma-r < \alpha < s-r$ e para $s < \alpha < t$, logo

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma}^t Y(s, t) \left[\int_{s-r}^s d_{\alpha} p(s, \alpha) x(\alpha) \right] ds = \\ &= \int_{\sigma}^t Y(s, t) \left[\int_{\sigma-r}^t d_{\alpha} p(s, \alpha) x(\alpha) \right] ds \end{aligned}$$

Usando [4] temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\sigma}^t Y(s, t) \left[\int_{s-r}^s d_{\alpha} p(s, \alpha) x(\alpha) \right] ds = \\
 & = \int_{\sigma-r}^t d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t) p(s, \alpha) ds \right) x(\alpha) = \\
 & = \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t) p(s, \alpha) ds \right) x(\alpha) + \\
 & + \int_{\sigma}^t d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t) p(s, \alpha) ds \right) x(\alpha)
 \end{aligned}$$

Substituindo em (1.18), teremos

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Y(\sigma, t)x(\sigma) + \int_{\sigma}^t d_{\alpha} Y(\alpha, t)x(\alpha) + \int_{\sigma}^t Y(s, t)h(s)ds + \\
 &+ \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right) x(\alpha) + \\
 &+ \int_{\sigma}^t d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right) x(\alpha) = \\
 &= Y(\sigma, t)x(\sigma) + \int_{\sigma}^t d_{\alpha} Y(\alpha, t)x(\alpha) + \int_{\sigma}^t Y(s, t)h(s)ds + \\
 &+ \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right) x(\alpha) + \\
 &+ \int_{\sigma}^t d_{\alpha} \left(\int_{\alpha}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right) x(\alpha) = \\
 &= Y(\sigma, t)x(\sigma) + \int_{\sigma}^t Y(s, t)h(s)ds + \\
 &+ \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right) x(\alpha) + \\
 &+ \int_{\sigma}^t d_{\alpha} \left(Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right) x(\alpha)
 \end{aligned}$$

Usando (1.15) na quarta parcela, obtemos:

$$x(t) = Y(\sigma, t)x(\sigma) + \int_{\sigma}^t Y(s, t)h(s)ds + \\ + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_{\alpha} \left(\int_{\sigma}^t Y(s, t)\eta(s, \alpha-s)ds \right) x(\alpha).$$

provando-se assim (1.14).

Para o valor inicial $(\sigma, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, temos por (1.14) que

$$x(t) = \int_{\sigma}^t Y(s, t)h(s)ds \quad \text{para } t \geq \sigma$$

e pelo Teorema 1.12 temos

$$x(t) = \int_{\sigma}^t U(t, s)h(s)ds \quad \text{para } t \geq \sigma.$$

Portanto, $U(t, s) = Y(s, t)$ q.s. em s .

Comentários Bibliográficos

Os fatos contidos nesta secção estão contidos em Hale, J.K. [7; secção 6.1-3]. Entretanto, a prova do Teorema 1.14, aqui apresentada, é uma adaptação da de Banks, H.T. [1], essencialmente distinta da prova por Hale, J.K.

1.3. A Equação Diferencial Funcional Linear Autônoma com Retardamento

Consideremos a equação linear autônoma

$$(1.19) \quad \dot{x}(t) = L(x_t)$$

onde $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear e contínua.

Logo pelo Teorema 0.1, existe uma matriz função $\eta(\theta)$, $n \times n$, de variação limitada em $[-r, 0]$ tal que

$$L(\phi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta), \quad \text{para } \phi \in C.$$

Veremos que as soluções da equação (1.19), sobre certo subespaço de C , tem características parecidas com as soluções de uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes.

Para observarmos o fato acima, investigaremos as propriedades abstratas da aplicação solução associada a equação (1.19). Se $\phi \in C$ e $x(\phi)$ é a única solução da equação (1.19) passando por $(0, \phi)$ a aplicação solução, $T(t) : C \rightarrow C$ é definida por

$$(1.20) \quad T(t)\phi = x_t(\phi), \quad \text{para } t \geq 0.$$

Com isto temos o:

Lema 1.15

O operador $T(t)$, $t \geq 0$ definido acima satisfaz as seguintes relações:

- (i) $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares, isto é, $T(0) = I$ e $T(t)T(s) = T(t+s)$ para $t, s \geq 0$.
- (ii) $T(t)$ é limitada para cada $t \geq 0$ e $T(t)$ é fortemente contínua em $[0, \infty)$, isto é,

$$\lim_{s \rightarrow t} |T(t)\phi - T(s)\phi| = 0, \quad \text{para } t \geq 0 \text{ e } \phi \in C.$$
- (iii) $T(t)$ é completamente contínua para $t \geq r$, isto é, $T(t)$ é contínua e leva conjunto limitado e fechado em conjunto relativamente compacto.

Demonstração

De (i)

Temos que $T(t) : C \rightarrow C$ dada por $T(t)\phi = x_t(\phi)$ é um

operador linear em vista da linearidade da equação (1.19) e pela unicidade temos que $x_{t+s}(\phi) = x_t(x_s(\phi))$, portanto $T(t+s)\phi = T(t)T(s)\phi$, para $t, s \geq 0$ e $T(0)\phi = \phi$.

De (ii)

$T(t)$ é limitada para cada $t \geq 0$, pois como $L(\phi)$ é linear e contínua em C , segue que existe $\ell \geq 0$ tal que

$$|L(\phi)| \leq \ell |\phi|$$

para toda $\phi \in C$ e por (1.2) temos que

$$T(t)\phi(\theta) = \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s))ds, \text{ para } t+\theta \geq 0 \text{ e } -r \leq \theta \leq 0.$$

Logo,

$$|T(t)\phi(\theta)| \leq |\phi(0)| + \int_0^{t+\theta} |L(T(s))|ds.$$

Concluindo-se que,

$$|T(t)\phi| \leq |\phi| + \int_0^t \ell |T(s)\phi|ds \quad \text{para } t \geq 0.$$

Usando a Desigualdade de Gronwall, segue que

$$|T(t)\phi| \leq |\phi| \exp(\ell t).$$

Portanto, $T(t)$ é limitada para cada $t \geq 0$.

Mostremos que $T(t)$, é fortemente contínua em $[0, \infty)$.

Para isto é suficiente mostrar que,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |T(t)\phi - \phi| = 0.$$

Como,

$$T(t)\phi(\theta) = \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s))ds \quad \text{para } t+\theta \geq 0$$

e

$$T(t)\phi(\theta) = \phi(t+\theta) \quad \text{para } -r \leq t+\theta \leq 0$$

segue o limite acima.

De (iii)

$T(t)$ é contínua para $t \geq 0$ e leva conjunto limitado e fechado em conjunto relativamente compacto para $t \geq r$, pois se $S = \{\phi \in C : |\phi| \leq R\}$ que é limitado e fechado, então:

$T(t)S$ é uniformemente limitado pois,

$|T(t)\phi| \leq |\phi|\exp(\ell t) \leq R\exp(\ell t)$ e além disso $|\dot{\psi}| = |L(\psi)| \leq \ell|\psi| \leq \ell R\exp(\ell t)$, implicando que $T(t)S$ é equicontínuo, logo pelo Teorema de Ascoli-Arzelà segue que $T(t)S$ é relativamente compacto.

Observações

(1) As propriedades (i) e (ii) do Lema 1.5 nos diz que a família $T(t)$, $t \geq 0$ é um semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuos, isto é, um C_0 -semigrupo.

(2) A Desigualdade de Gronwall pode ser encontrada em [5, pag. 36] e o Teorema de Ascoli-Arzelà em [14, pag. 276].

Definição 1.16

Se $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuos, definimos o *gerador infinitesimal*, A , de $\{T(t), t \geq 0\}$ como sendo

$$(1.21) \quad A\phi = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(T(t)\phi - \phi)$$

para $\phi \in C$, quando este limite existe.

O domínio de A será indicado por $\mathcal{D}(A) \subset C$ e a imagem de A por $R(A) \subset C$.

Com isto temos o:

Lema 1.17

O gerador infinitesimal, A , do C_0 -semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, definido pela equação (1.19) pode ser dado por

$$(1.22) \quad A\phi(\theta) = \begin{cases} d\phi(\theta)/d\theta & \text{se } -r \leq \theta < 0 \\ L(\phi) & \text{se } \theta = 0 \end{cases}$$

Além disso, A é um operador fechado, com $\mathcal{D}(A)$ denso em C e para $\phi \in \mathcal{D}(A)$ temos

$$(1.23) \quad \frac{d}{dt}T(t)\phi = T(t)(A\phi) = A(T(t)\phi)$$

$$T(t)\phi - \phi = \int_0^t T(u)(A\phi) du$$

Demonstração

Para $-r \leq \theta < 0$, (1.21), implica que

$$\begin{aligned} A\phi(\theta) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} [T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta)] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} [\phi(t+\theta) - \phi(\theta)] = \frac{d^+}{d\theta} \phi(\theta) \end{aligned}$$

onde $\frac{d^+}{d\theta} \phi(\theta)$ indica a derivada a direita de ϕ em θ .

Para $\theta = 0$, temos

$$\begin{aligned} A\phi(0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} [T(t)\phi(0) - \phi(0)] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} \int_0^t L(T(s)\phi) ds = L(T(0)\phi) = L(\phi). \end{aligned}$$

Como $R(A) \subset C$, segue de (1.22) que $\phi \in \mathcal{D}(A)$ se e somente se ϕ é contínua, $\frac{d}{d\theta}\phi(\theta)$ é contínua e $\dot{\phi}(0) = L(\phi)$. Logo segue (1.22).

Se $\phi \in \mathcal{D}(A)$ então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t)\phi(\theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [T(t+s)\phi(\theta) - T(t)\phi(\theta)] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [T(t)T(s)\phi(\theta) - T(t)\phi(\theta)] = \\ &= T(t) \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (T(s)\phi(\theta) - \phi(\theta)) \right] = T(t)A\phi(\theta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t)\phi(\theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [T(s)T(t)\phi(\theta) - T(t)\phi(\theta)] = \\ &= AT(t)\phi(\theta) \end{aligned}$$

Logo segue (1.23).

Como $\frac{d}{dt}T(t)\phi(\theta) = T(t)A\phi(\theta)$ então

$$T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta) = \int_0^t T(u)A\phi(\theta)du, \text{ isto é, } T(t)\phi - \phi = \int_0^t T(u)(A\phi)du.$$

Mostremos que $\mathcal{D}(A)$ é denso em C .

Para cada $\phi \in C$ e $t, s > 0$, definimos

$$A_s = \frac{1}{s}(T(s) - I), \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} A_s \int_0^t T(u)\phi du &= \frac{1}{s} \int_0^t (T(s) - I)T(u)\phi du = \\ &= \frac{1}{s} \int_s^{t+s} T(u)\phi du - \frac{1}{s} \int_0^t T(u)\phi du = \frac{1}{s} \int_0^s T(u)(T(t) - I)\phi du. \end{aligned}$$

Logo,

$$A_s \int_0^t T(u)\phi du = \frac{1}{s} \int_0^s T(u)(T(t) - I)\phi du.$$

Fazendo $s \rightarrow 0^+$, temos que o lado direito da equação acima tende a $(T(t)-I)\phi$ em norma.

Logo, $\int_0^t T(u)\phi du \in \mathcal{D}(A)$. Usando o fato que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(u)\phi du = \phi,$$

segue que $\mathcal{D}(A)$ é denso em C .

Mostremos, por último, que A é fechado.

Seja (ϕ_n) uma seqüência em $\mathcal{D}(A)$ convergindo para ϕ_0 com $A\phi_n$ convergindo para ψ_0 . Devemos mostrar que $\phi_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $A\phi_0 = \psi_0$.

Temos que

$$|T(u)(A\phi_n) - T(u)\psi_0| \leq |A\phi_n - \psi_0| \exp(\ell u)$$

e portanto converge uniformemente para zero com respeito a $u \in [0, t]$.

Para cada n temos:

$$T(t)\phi_n - \phi_n = \int_0^t T(u)A\phi_n du$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ em norma, obtemos

$$T(t)\phi_0 - \phi_0 = \int_0^t T(u)\psi_0 du.$$

Logo $A_s \phi_0 = \frac{1}{s} \int_0^s T(u)\psi_0 du \rightarrow \psi_0$, em norma, quando $s \rightarrow 0^+$,

portanto, $\phi_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $A\phi_0 = \psi_0$.

Observações

- (1) A demonstração do Lema 1.17 é uma adaptação da de Butzer, P.L. e Berens, H. em [3, pag. 9].

- (2) Os fatos demonstrados no Lema 1.17 são fatos gerais da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, como referência citamos Pazy, A. [13; Cap. 1].

Para continuarmos, precisaremos de algumas definições.

Definições 1.18

Seja B um espaço de Banach e $A : B \rightarrow B$ um operador linear. Definimos o *conjunto resolvente* de A , denotado por $\rho(A)$, como:

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{existe } (\lambda - A)^{-1} \text{ e é limitada num subconjunto denso de } B\}.$$

O complementar de $\rho(A)$ em $\mathbb{C}$ será denominado *espectro* de A , denotado por $\sigma(A)$.

O espectro de A , $\sigma(A)$, pode conter três tipos diferentes de elementos, que são:

Os $\lambda \in \sigma(A)$ tal que existe $(\lambda - A)^{-1}$, mas seu domínio não é denso em B , denominado *espectro residual* de A , denotado por $R\sigma(A)$; os $\lambda \in \sigma(A)$ tal que existe $(\lambda - A)^{-1}$ com domínio denso em B , mas não é limitada, denominado *espectro contínuo* de A , denotado por $C\sigma(A)$; e os $\lambda \in \sigma(A)$ tal que não existe $(\lambda - A)^{-1}$, denominado *espectro pontual* de A , denotado por $P\sigma(A)$.

O *espaço nulo* ou *núcleo* de A , denotado por $N(A)$, é o conjunto formado pelas $\phi \in B$ tal que $A\phi = 0$.

Se $\lambda \in P\sigma(A)$ então λ é dito *autovalor* de A , e neste caso $N(\lambda - A) \neq \{0\}$ e $\phi \in N(\lambda - A)$, $\phi \neq 0$ é dito *autovetor* de A associado a λ .

Para $\lambda \in \sigma(A)$, o *auto-espço generalizado* por λ , de notado por $M_\lambda(A)$, é definido como sendo o menor subespaço de B que contém todos os elementos de $N(\lambda - A)^k$, $k = 1, 2, \dots$

Nosso objetivo é determinar a natureza do $\sigma(T(t))$ e $\sigma(A)$ para os operadores dados pelas equações (1.20) e (1.22) e analisar em que sentido o operador $T(t)$ é aproximado por e^{At} , contanto que este último faça sentido. Para o caso em que a equação (1.19) é uma equação diferencial ordinária, isto é, $r = 0$, então $L(\phi) = A\phi(0)$, onde A é uma matriz constante. Além disso, o gerador infinitesimal de $T(t)$ é A e temos precisamente, $T(t) = e^{At}$.

Como, em geral, $T(t)$ não é conhecido, nós esperamos poder discutir propriedades de $T(t)$ usando o gerador infinitesimal A , dado por (1.22).

Os resultados abaixo nos darão algumas propriedades de A .

Lema 1.19

Se A é dado pela equação (1.22) então $\sigma(A) = P\sigma(A)$ e $\lambda \in \sigma(A)$ se e somente se λ satisfaz a equação característica

$$(1.23) \quad \det \Delta(\lambda) = 0$$

onde $\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) e^{\lambda\theta}$, onde I é a matriz identidade.

Além disso, as raízes da equação (1.23) têm parte real

limitada superiormente; para cada $\lambda \in \sigma(A)$ $\dim M_\lambda(A) < \infty$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_\lambda(A) = N(\lambda - A)^k$ e $C = M_\lambda(A) \oplus R(\lambda - A)^k$.

Demonstração

Para mostrar que $\sigma(A) = P\sigma(A)$, mostraremos que $\rho(A)$ é formado por todos os $\lambda \in C$ exceto os que satisfazem (1.23) e então mostraremos que se λ satisfaz (1.23) então $\lambda \in P\sigma(A)$. Temos que: $\lambda \in \rho(A)$ se e somente se a equação

$$(1.24) \quad (A - \lambda I)\phi = \psi$$

tem uma solução $\phi \in \mathcal{D}(A)$ para cada ψ num subconjunto denso de C e ϕ depende continuamente de ψ .

Como $\phi \in \mathcal{D}(A)$ segue que ϕ é continuamente diferenciável e $\dot{\phi}(\theta) = A\phi(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, logo se ϕ é uma solução de (1.24) ela satisfaz:

$$\dot{\phi}(\theta) - \lambda\phi(\theta) = \psi(\theta), \quad \text{para } -r \leq \theta \leq 0.$$

Logo, $\dot{\phi}(\theta) = \lambda\phi(\theta) + \psi(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, cuja solução, dada pela fórmula da variação das constantes é

$$(1.25) \quad \phi(\theta) = e^{\lambda\theta}b + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi, \quad -r \leq \theta \leq 0, \quad \text{com } b = \phi(0).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lambda\phi(0) + \psi(0) &= \dot{\phi}(0) = L(\phi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta) = \\ &= \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \left[e^{\lambda\theta}b + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi \right] \end{aligned}$$

Donde segue

$$[\lambda I - \int_{-r}^0 d\eta(\theta)e^{\lambda\theta}]b = -\psi(0) + \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \left[\int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi \right]$$

isto é,

$$(1.26) \quad \Delta(\lambda)b = -\psi(0) + \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \left[\int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)} \psi(\xi) d\xi \right] \stackrel{\text{def}}{=} -(\alpha, \psi)$$

onde α é definida por $\alpha(s) = e^{-\lambda s} I$, $0 \leq s \leq r$
e

$$(1.27) \quad (\alpha, \psi) = \alpha(0)\psi(0) - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \left[\int_0^\theta \alpha(\xi-\theta)\psi(\xi) d\xi \right].$$

De (1.25) e (1.26) segue que (1.24) tem uma solução $\phi \in \mathcal{D}(A)$ para $\psi \in C$ se e somente se $\det \Delta(\lambda) \neq 0$, pois $(\alpha, \cdot)$ cobre o R^n . Portanto, $\rho(A) = \{\lambda \in C : \det \Delta(\lambda) \neq 0\}$.

Se $\det \Delta(\lambda) = 0$ então de (1.25) e (1.26), existe uma solução, não nula, de (1.24) para $\psi \equiv 0$, logo não existe $(A-\lambda I)^{-1}$ e portanto $\lambda \in P\sigma(A)$, concluindo-se que $P\sigma(A) = \sigma(A)$.

A função característica $\det \Delta(\lambda)$ é uma função inteira em λ e portanto os zeros tem ordem finita, logo o operador $(A-\lambda I)^{-1}$ tem um polo de ordem k em λ se $\det \Delta(\lambda) = 0$. Como A é fechado, usando um resultado de [14, pag. 306] segue que $N(A-\lambda I)^k = M_\lambda(A)$ e $C = M_\lambda(A) \oplus R(A-\lambda I)^k$.

Para mostrar que $\dim M_\lambda(A)$ é finita usamos um resultado de [9, pag. 187].

Por último, como a equação característica é um polinômio de grau n em λ , com coeficiente líder um e o termo de menor grau tem coeficiente que depende de λ através de integrais sobre $[-r, 0]$ de termos da forma $e^{\lambda\theta}$, segue que existe $\gamma > 0$, tal que, não existem raízes de (1.23) com $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$, concluindo assim a demonstração do Lema.

Do Lema 1.19, sabemos que se $\lambda \in \sigma(A)$ então $\dim M_\lambda(A) < \infty$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_\lambda(A) = N(A-\lambda I)^k$. O subespaço $M_\lambda(A)$

é A-invariante, isto é, $AM_\lambda(A) \subset M_\lambda(A)$.

Seja $\{\phi_1^\lambda, \dots, \phi_d^\lambda\}$ uma base para $M_\lambda(A)$ e tomemos $\Phi_\lambda = (\phi_1^\lambda, \dots, \phi_d^\lambda)$; como $M_\lambda(A)$ é A-invariante, existe uma matriz, B_λ , $d \times d$ tal que $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$. O autovalor de B_λ é λ .

Da definição de A em (1.22), a relação $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$, implica que $\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}$, $-r \leq \theta \leq 0$. Logo pelo Lema 1.17 obtemos $T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t}$, para $t \geq 0$.

Portanto, no auto-espço generalizado por um autovalor $\lambda \in \sigma(A)$, a equação (1.19) tem a mesma estrutura de uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes. Além disso, segue também do Lema 1.17 que $R(A-\lambda I)^k$ é T(t)-invariante.

Pela aplicação repetida do processo acima nós obtemos:

Teorema 1.20

Suponhamos que $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ é um conjunto finito de autovalores da equação (1.19), que $\Phi_\Lambda = (\phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_p})$, onde ϕ_{λ_j} é uma base para o auto-espço generalizado por λ_j e $B_\Lambda = \text{diag}(B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_p})$, onde B_{λ_j} é a matriz definida por $A\phi_{\lambda_j} = \phi_{\lambda_j} B_{\lambda_j}$, com $j = 1, \dots, p$. Então o único autovalor de B_{λ_j} é λ_j e para cada vetor a , de mesma dimensão de Φ_Λ , a solução $T(t)\Phi_\Lambda a$, com condição inicial $\Phi_\Lambda a$ em $t = 0$ pode ser definida em R pela relação

$$(1.28) \quad T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} a$$

com $\Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\Lambda \theta}$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Além disso, existe um subespaço $Q_\Lambda \subset C$ tal que $T(t)Q_\Lambda \subset Q_\Lambda$, para $t \geq 0$ e $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$ onde $P_\Lambda = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\Lambda b \text{ para algum vetor } b\}$.

Daremos, a seguir, um resultado sobre o comportamento dos autovalores simples de uma equação linear autônoma que depende de um parâmetro real.

Definição 1.21

Dizemos que λ é um *autovalor simples* de uma $EDFR(L)$, onde L é linear, se λ é uma raiz simples da equação característica associada a $EDFR(L)$.

Lema 1.22

Suponhamos que $\{L(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é uma família de operadores lineares limitados de C em $\mathbb{R}^n$, contínuos juntamente com suas primeiras derivadas em α . Se λ_0 é um autovalor simples da $EDFR(L(0))$, então existe $\alpha_0 > 0$ e um autovalor simples, $\lambda(\alpha)$, da $EDFR(L(\alpha))$ que é contínuo juntamente com sua primeira derivada para $|\alpha| < \alpha_0$ e $\lambda(0) = \lambda_0$.

Demonstração

Consideremos a equação

$$(1.29) \quad \Delta(\alpha, \lambda)b = 0,$$

onde $\Delta(\alpha, \lambda) = \lambda(\alpha)I - L(\alpha)(e^{\lambda(\alpha) \cdot} I)$.

Como λ_0 é um autovalor simples da $EDFR(L(0))$, então $\dim N(\Delta(0, \lambda_0)) = 1$ e $C^n = N(\Delta(0, \lambda_0)) \oplus R(\Delta(0, \lambda_0))$. Sejam p e $(I-p)$ as projeções definidas por esta decomposição.

Reescrevendo (1.29) temos,

$$\Delta(\alpha, \lambda)b = 0 = \Delta(0, \lambda_0)b - \Delta(0, \lambda_0)b.$$

Logo,

$$(1.30) \quad \Delta(0, \lambda_0)b = [\Delta(0, \lambda_0) - \Delta(\alpha, \lambda)]b.$$

Fizemos $b_0 \in N(\Delta(0, \lambda_0))$. Se $b = b_0 + d$, com $d \in (I-p)C^n$ então a equação (1.30) é equivalente às equações,

$$(1.31.a) \quad \Delta(0, \lambda_0)d = (I-p)[\Delta(0, \lambda_0) - \Delta(\alpha, \lambda)](b_0 + d)$$

$$(1.31.b) \quad p[\Delta(0, \lambda_0) - \Delta(\alpha, \lambda)](b_0 + d) = 0$$

Como $\Delta(0, \lambda_0)$ é um isomorfismo de $(I-p)C^n$ em $(I-p)C^n$ e é contínua juntamente com sua primeira derivada, do teorema da função implícita segue que existe $\delta > 0$ e uma única solução $d^* = d^*(\alpha, \lambda, b_0)$ de (1.31.a) para $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $|\alpha| < \delta$, continuamente diferenciável em α, λ, b_0 e $d^*(0, \lambda_0, b_0) = 0$. Podemos escrever, $d^*(\alpha, \lambda, b_0) = D^*(\alpha, \lambda)b_0$, onde $D^*(\alpha, \lambda)$ é uma matriz $n \times n$. Logo se b satisfaz $\Delta(\alpha, \lambda)b = 0$, com $b = b_0$ para $\alpha = \alpha_0$ e $\lambda = \lambda_0$, então $b = b_0 + D^*(\alpha, \lambda)b_0$, para $|\alpha| < \delta$ e $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ e

$$(1.32) \quad f(\alpha, \lambda)b_0 \stackrel{\text{def}}{=} p[\Delta(0, \lambda_0) - \Delta(\alpha, \lambda)][I + D^*(\alpha, \lambda)]b_0 = 0.$$

Logo, a existência de um autovalor λ próximo a λ_0 , para α próximo de zero é equivalente a existir uma solução de (1.32).

Como,

$$\Delta(0, \lambda_0) \frac{\partial D^*(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = -(I-p) \frac{\partial \Delta(0, \lambda_0)}{\partial \lambda}$$

então,

$$\frac{\partial f(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} b_0 = -p \frac{\partial \Delta(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} b_0.$$

Escolhendo-se uma base tal que $\Delta(0, \lambda_0) = \text{diag}(0, B)$, onde B é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$, não singular, podemos tomar $b_0 = (1, 0, \dots, 0)$ e a projeção p pode ser identificada por $(1, 0, \dots, 0)$. Então $p\Delta(0, \lambda)b_0 = a(\lambda)$ onde $a(\lambda)$ é o elemento da primeira linha e da primeira coluna de $\Delta(0, \lambda)$. Com isto temos que

$$p \left[\frac{\partial \Delta(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right] b_0 = (\det B)^{-1} \frac{\partial \det \Delta(0, \lambda_0)}{\partial \lambda}.$$

Logo,

$$\frac{\partial f(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} b_0 = -(\det B)^{-1} \frac{\partial \det \Delta(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \neq 0,$$

pois λ_0 é autovalor simples da $\text{EDFR}(L(0))$.

$$\text{Portanto, } \frac{\partial f(0, \lambda_0)}{\partial \lambda} b_0 \neq 0 \text{ e por (1.32) } f(0, \lambda_0) = 0,$$

logo pelo teorema da função implícita segue que existe $\bar{\delta} > 0$ e uma função continuamente diferenciável, $\lambda(\alpha)$, com $\lambda(0) = \lambda_0$ tal que $f(\alpha, \lambda(\alpha)) = 0$ para $|\alpha| < \bar{\delta}$. Para completar o resultado basta tomar $\alpha_0 = \min\{\delta, \bar{\delta}\}$.

Os resultados que seguem nos darão uma decomposição de C pela equação adjunta formal associada à equação (1.19), isto é, à equação linear autônoma.

Para isto, seja $C^* = C([0, r], \mathbb{R}^{n*})$ e para $\alpha \in C^*$ e $\phi \in C$ definamos

$$(1.33) \quad (\alpha, \phi) = \alpha(0)\phi(0) - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \left[\int_0^\theta \alpha(\xi - \theta)\phi(\theta) d\xi \right]$$

que é uma forma bilinear.

Definamos $A^* : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow C^*$ tal que se $\alpha \in \mathcal{D}(A^*)$

$$(1.34) \quad (A^*\alpha)(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds} & \text{se } 0 < s \leq r \\ \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\alpha(-\theta) & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

onde $\mathcal{D}(A^*)$, consiste de todas as $\alpha \in C^*$ que tem primeira derivada contínua e que satisfazem

$$-\frac{d\alpha(0)}{ds} = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\alpha(-\theta).$$

Observemos que $\mathcal{D}(A^*)$ é denso em C^* e que se $\alpha \in \mathcal{D}(A^*)$ e $\phi \in \mathcal{D}(A)$ então

$$(1.35) \quad (\alpha, A\phi) = (A^*\alpha, \phi).$$

Definição 1.23

Diremos que A^* , dada pela expressão (1.34) é a adjunta formal de A relativo a (1.35).

A equação adjunta formal, para a equação (1.19) é

$$(1.36) \quad \dot{y}(s) = -\int_{-r}^0 d\eta(\theta)y(s-\theta).$$

De fato, pois se $y(s) + \int_s^\infty y(\alpha)\eta(s-\alpha)d\alpha = \text{cte}$, então

$$\dot{y}(s) = -\frac{d}{ds} \int_s^\infty y(\alpha)\eta(s-\alpha)d\alpha.$$

Como, $\int_s^n y(\alpha)\eta(s-\alpha)d\alpha \rightarrow \int_s^\infty y(\alpha)\eta(s-\alpha)d\alpha$ quando $n \rightarrow \infty$,

temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_s^n y(\alpha) \eta(s-\alpha) d\alpha &= \int_s^n y(\alpha) \eta'(s-\alpha) d\alpha = \\ &= - \int_0^{s-n} y(s-\tau) \eta'(\tau) d\tau = \int_{s-n}^0 d\eta(\tau) y(s-\tau). \end{aligned}$$

Além disso, $\frac{d}{ds} \int_s^n y(\alpha) \eta(s-\alpha) d\alpha \rightarrow \int_{-\infty}^0 d\eta(\theta) y(s-\theta)$ uniformemente quando $n \rightarrow \infty$, pois

$$\frac{d}{ds} \int_s^n y(\alpha) \eta(s-\alpha) d\alpha = \int_s^n y(\alpha) \eta'(s-\alpha) d\alpha$$

e a integral do segundo membro da igualdade é feito no intervalo $[s, s+r]$, para $n \geq s+r$, pois se $n \geq \alpha \geq s+r$ então $s-\alpha \leq -r$ concluindo-se que $\eta(s-\alpha) = \eta(-r)$, logo $\eta'(s-\alpha) = 0$ se $\alpha \geq s+r$. Logo quando $n \geq s+r$ temos que

$$\frac{d}{ds} \int_s^n y(\alpha) \eta(s-\alpha) d\alpha = \int_s^{s+r} y(\alpha) \eta'(s-\alpha) d\alpha.$$

Portanto, $\frac{d}{ds} \int_s^n y(\alpha) \eta(s-\alpha) d\alpha$ converge uniformemente para $\int_{-\infty}^s d\eta(\theta) y(s-\theta)$.

Se $y(s)$ é uma solução da equação (1.36) em $(-\infty, r]$ tal que $y(\tau) = \alpha(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq r$ e $\alpha \in C^*$, definimos, para $s \leq 0$ a aplicação, $T^*(s) : C^* \rightarrow C^*$ dada por $T^*(s)\alpha = y^s(\alpha)$, $\alpha \in C^*$, onde $y^s(\alpha)(\tau) = y(\tau+s)$ para $0 \leq \tau \leq r$. Neste caso $T^*(s)$, $s \leq 0$, tem as mesmas propriedades do semigrupo associado a equação (1.19) e

$$(1.37) \quad \frac{d}{ds} T^*(s)\alpha = -A^* T^*(s)\alpha = -T^*(s)A^*\alpha$$

para $\alpha \in \mathcal{D}(A^*)$, $s \leq 0$.

Se x é uma solução da equação (1.19) e y é solução da equação (1.36), um simples cálculo, nos mostra que $(y^t, x_t) = \text{cte}$, $\forall t$.

Daremos a seguir um lema que nos dará informações importantes com respeito a $\sigma(A^*)$.

Lema 1.24

$\lambda \in \sigma(A)$ se e somente se $\lambda \in \sigma(A^*)$; $\sigma(A^*) = P\sigma(A^*)$ e para todo $\lambda \in \sigma(A^*)$ o auto-espaço generalizado por λ , $M_\lambda(A^*)$ tem dimensão finita.

Demonstração

A última parte do Lema é provada como no Lema 1.19.

Temos que $\lambda \in \sigma(A^*)$ se e somente se $\alpha(s) = e^{-\lambda s} b$, com $0 \leq s \leq r$, onde $b \in R^{n^*}$, não nulo, satisfazendo

$$b[\lambda I - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) e^{\lambda\theta}] = b\Delta(\lambda) = 0,$$

isto é, $\det\Delta(\lambda) = 0$, ou ainda $\lambda \in \sigma(A)$.

O próximo resultado fornece uma relação entre $R(A-\lambda I)^k$ e $N(A-\lambda I)^k$, cuja demonstração pode ser encontrada em [7; pag. 175].

Lema 1.25

Uma condição necessária e suficiente para a equação

$$(1.38) \quad (A-\lambda I)^k \phi = \psi, \quad \psi \in C$$

ter uma solução $\phi \in C$, isto é, $\psi \in R(A-\lambda I)^k$ é que $(\alpha, \psi) = 0$ para todo $\alpha \in N(A^*-\lambda I)^k$.

Como consequência dos resultados anteriores temos:

Lema 1.26

Para $\lambda \in \sigma(A)$, seja $\Psi = \text{col}(\psi_1, \dots, \psi_p)$ e $\Phi_\lambda = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ bases para $M_\lambda(A^*)$ e $M_\lambda(A)$ respectivamente e seja a matriz $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = ((\psi_i, \phi_j))$, $i, j = 1, \dots, p$. Então $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)$ é não singular e portanto pode ser tomada como a identidade. A decomposição de C dada pelo Lema 1.19 pode ser escrita explicitamente como

$$\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda} \quad \text{onde} \quad \phi^{P_\lambda} \in P_\lambda \quad \text{e} \quad \phi^{Q_\lambda} \in Q_\lambda,$$

$$P_\lambda = M_\lambda(A) = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\lambda b \text{ para algum } p\text{-vetor } b\}$$

$$P_\lambda = \{\phi \in C : (\Psi_\lambda, \phi) = 0\}$$

$$\phi^{P_\lambda} = \Phi_\lambda b \quad \text{onde} \quad b = (\Psi_\lambda, \phi)$$

É interessante notar que se $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = I$ e B_λ^* é uma matriz tal que $A^* \Psi_\lambda = B_\lambda^* \Psi_\lambda$ então $B_\lambda^* = B_\lambda$.

Nós já definimos o auto-espço generalizado por um autovalor para a equação (1.19), que é $M_\lambda(A)$. Daremos agora a definição de auto-espço generalizado para um conjunto finito de autovalores para a equação (1.19). Se $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ é um conjunto finito de autovalores para a equação (1.19) então seja P_Λ a extensão linear de $M_{\lambda_j}(A)$, $j = 1, \dots, p$, e nos referiremos a este subespço como o *auto-espço generalizado para a equação (1.19) associado a Λ* . Do mesmo modo obtemos P_Λ^* que será o *auto-espço generalizado para a equação adjunta (1.36) associado a Λ* . Se Φ, Ψ são bases para P_Λ e P_Λ^* , respectivamente, com $(\Psi, \Phi) = I$ então

$$C = P_{\Lambda} \oplus Q_{\Lambda}$$

$$P_{\Lambda} = \{\phi \in C : \phi = \phi b, \text{ para algum vetor } b\}$$

$$Q_{\Lambda} = \{\phi \in C : (\Psi, \phi) = 0\}$$

$$\phi = \phi^{P_{\Lambda}} + \phi^{Q_{\Lambda}}$$

onde $\phi^{P_{\Lambda}} = \phi(\Psi, \phi).$

Os resultados que seguem nos darão, de maneira explícita, a derivada do autovalor $\lambda(\alpha)$ dado no Lema 1.22. Para isto precisaremos do:

Lema 1.27

Se λ_o é um autovalor simples da EDFR(L(0)) e $\phi_o(\theta) = be^{\lambda_o \theta}$, $-r \leq \theta \leq 0$, $\psi_o(s) = ae^{-\lambda_o s}$, $0 \leq s \leq r$, são bases para $N(A - \lambda I)$ e $N(A^* - \lambda I)$, respectivamente, então

$$(\psi_o, \phi_o) = a \frac{\partial \Delta(\lambda_o)}{\partial \lambda} b.$$

Demonstração

Da definição da forma bilinear temos

$$\begin{aligned} (\psi_o, \phi_o) &= \psi_o(0)\phi_o(0) - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \int_0^{\theta} \psi_o(\xi - \theta)\phi_o(\xi) d\xi = \\ &= ab - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \int_0^{\theta} ae^{\lambda_o \theta} b d\xi = ab - a \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \theta e^{\lambda_o \theta} b = \\ &= a \left[I - \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \theta e^{\lambda_o \theta} \right] b = a \frac{\partial \Delta(\lambda_o)}{\partial \lambda} b \end{aligned}$$

Lema 1.28

Suponhamos que as condições do Lema 1.22 estão satisfeitas e sejam $\phi_\alpha(\theta) = b(\alpha)e^{\lambda(\alpha)\theta}$, $-r \leq \theta \leq 0$ e $\psi_\alpha(s) = a(\alpha)e^{-\lambda(\alpha)s}$, para $0 \leq s \leq r$, bases para $N(A - \lambda(\alpha)I)$ e $N(A^* - \lambda(\alpha)I)$, respectivamente, para o autovalor simples $\lambda(\alpha)$ da $\text{EDFR}(L(\alpha))$.

Se $(\psi_\alpha, \phi_\alpha) = 1$ então

$$\lambda'(\alpha) = +a(\alpha)L'(\alpha)(e^{\lambda(\alpha) \cdot I})b(\alpha)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, onde " ' " denota a derivada com relação a α .

Demonstração

Da definição de $a(\alpha)$ e $b(\alpha)$, temos

$$a(\alpha)\Delta(\alpha, \lambda(\alpha)) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta(\alpha, \lambda(\alpha))b(\alpha) = 0$$

Logo, $a(\alpha)\Delta(\alpha, \lambda(\alpha))b(\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Derivando esta expressão com respeito a α e usando o Lema 1.27 obtemos,

$$\lambda'(\alpha) = a(\alpha) \frac{\partial \Delta(\alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \alpha} b(\alpha), \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(\alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \alpha} &= \lambda'(\alpha) [I - L(\alpha)(e^{\lambda(\alpha) \cdot I})] - \\ &- L'(\alpha)(e^{\lambda(\alpha) \cdot I}) = \lambda'(\alpha) \frac{\partial \Delta(\alpha, \lambda(\alpha))}{\partial \lambda(\alpha)} - L'(\alpha)(e^{\lambda(\alpha) \cdot I}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda'(\alpha) = +a(\alpha)L'(\alpha)(e^{\lambda(\alpha) \cdot I})b(\alpha), \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lema 1.29

Suponhamos que as hipóteses do Lema 1.22 estão satisfeitas e que $\Lambda(\alpha) = \{\lambda_1(\alpha), \dots, \lambda_p(\alpha)\}$ é um conjunto finito de autovalores simples da $\text{EDFR}(L(\alpha))$ com $\lambda_{2j-1}(\alpha) = \bar{\lambda}_{2j}(\alpha)$, $j = 1, \dots, k$ e $\lambda_j(\alpha)$ é real para $j = 2k+1, \dots, p$. Sejam ϕ_α , ψ_α bases reais para $M_{\Lambda(\alpha)}(A)$ e $M_{\Lambda(\alpha)}(A^*)$, respectivamente, com $(\psi_\alpha, \phi_\alpha) = I$ e $B(\alpha)$ uma matriz tal que $A\phi_\alpha = \phi_\alpha B(\alpha)$. Então

$$B'(\alpha) = +\psi_\alpha(0)L'(\alpha)(\phi_\alpha(0)e^{B(\alpha)}), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

A demonstração do Lema 1.29, pode ser encontrada em [7; pag. 179].

Para as aplicações da teoria de sistemas lineares autônomos nós precisaremos ter uma estimativa para as soluções da equação (1.19) no subespaço complementar de P_Λ , Q_Λ . Para isto temos o resultado a seguir, cuja prova pode ser encontrada em [7; pag. 181].

Teorema 1.30

Para todo $\beta \in \mathbb{R}$, seja $\Lambda = \Lambda(\beta) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re} \lambda \geq \beta\}$ e suponhamos que C é decomposto por Λ como $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$. Então existem constantes $K, \gamma > 0$ tal que

$$\|T(t)\phi^{P_\Lambda}\| \leq Ke^{(\beta+\gamma)t} \|\phi^{P_\Lambda}\| \text{ para } t \leq 0$$

e

$$\|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| \leq Ke^{(\beta-\gamma)t} \|\phi^{P_\Lambda}\| \text{ para } t \geq 0.$$

1.4. A Equação Linear Autônoma Forçada

Nesta secção, nós consideraremos propriedades da equação linear homogênea

$$(1.39) \quad \dot{x}(t) = L(x_t) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)x(t+\theta)$$

que assegurarão que a equação não homogênea

$$(1.40) \quad \dot{x}(t) = L(x_t) + f(t)$$

tenha, pelo menos, uma solução numa classe B se $f \in B$. A classe B pode ser o conjunto das funções definidas em R , R^+ ou R^- e tomando valores em R^n , contínuas e limitadas, ou contínuas e periódicas, como veremos a seguir.

Para $\sigma \in R$, já mostramos, pela fórmula da variação das constantes na secção 1.2, que a solução x da equação (1.40) com condição inicial x_σ em σ pode ser escrita como

$$(1.41) \quad x_t = T(t-\sigma)x_\sigma + \int_{\sigma}^t T(t-s)X_0 f(s)ds, \quad t \geq \sigma.$$

Suponhamos que $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$ onde,

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda = 0\} \quad \text{e} \quad \Lambda_1 = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0\},$$

onde A é o gerador infinitesimal gerado pela equação (1.39).

Se P_0 e P_1 são os auto-espacos generalizados da equação (1.39) associados com Λ_0 e Λ_1 , respectivamente, e $C = P_0 \oplus P_1 \oplus Q$ então a decomposição da solução

$$x_t = x_t^{P_0} + x_t^{P_1} + x_t^Q$$

torna a equação (1.41) equivalente às equações:

$$(1.42.a) \quad x_t^{P_0} = T(t-\sigma)x_t^{P_0} + \int_{\sigma}^t T(t-s)X_0^{P_0}f(s)ds$$

$$(1.42.b) \quad x_t^{P_1} = T(t-\sigma)x_t^{P_1} + \int_{\sigma}^t T(t-s)X_0^{P_1}f(s)ds$$

$$(1.42.c) \quad x_t^Q = T(t-\sigma)x_t^Q + \int_{\sigma}^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds$$

Seja $B(R^+) = \{f : R^+ \rightarrow R^n : f \text{ é contínua e limitada em } R^+\}$ com a norma

$$\|f\|_{B(R^+)} = \sup_{t \in R^+} |f(t)|.$$

Definindo $B(R^-)$, $B(R)$ de maneira similar e $P_{\omega} = \{f : R \rightarrow R^n : f \text{ é contínua e } \omega\text{-periódica}\}$ com a norma

$$\|f\|_{P_{\omega}} = \sup_{0 \leq t \leq \omega} |f(t)|,$$

temos que estes espaços são espaços de Banach com as respectivas normas.

Daremos a seguir uma condição necessária para que a equação (1.40) tenha uma solução em B para $f \in B$, onde B é um dos espaços acima.

Lema 1.31

Se B é um dos espaços acima e a equação (1.40) tem uma solução em B para cada $f \in B$ então não existem autovalores da equação característica associada a equação (1.39) sobre o eixo imaginário, isto é, $\Lambda_0 = \emptyset$ e portanto $P_0 = \{0\}$.

Demonstração

Suponhamos que a equação (1.40) tem uma solução em B para cada $f \in B$ e que $\Lambda_0 \neq \emptyset$, isto é, existe $\lambda_0 \in \Lambda_0$. Mostre

mos que isto nos leva a uma contradição. Para isto, seja C de composto por Λ como anteriormente, isto é, $C = P_0 \oplus P_1 \oplus Q$ e ϕ_0 base para P_0 , ψ_0 base para o auto-espaço generalizado da equação adjunta associada com Λ_0 , tal que $(\psi_0, \phi_0) = I$ e seja B uma matriz tal que $A\phi_0 = \phi_0 B$, onde A é o gerador infinitesimal associado com a equação (1.39). Observemos que os autovalores de B coincidem com os elementos de Λ_0 , logo têm parte real igual a zero. Mostraremos que existe $f \in B$ tal que toda solução da equação (1.42.a) é não limitada, contradizendo a hipótese do Lema.

Se $x_t^P = \phi_0 z(t)$, temos que $z(t)$ satisfaz

$$(1.43) \quad \dot{z}(t) = Bz(t) + \psi_0(0)f(t).$$

Seja $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $aB = \lambda_0 a$. Temos que $a\psi_0(0) \neq 0$, pois, do contrário, $ae^{-B(t+s)}\psi_0(0) = ae^{-Bt}\psi(s)$, $0 \leq s \leq r$ seria uma solução, não nula, da equação adjunta com condição inicial nula. Logo,

$$a\dot{z}(t) = \lambda_0 az(t) + a\psi_0(0)f(t).$$

Tomando-se, $f(t) = [a\psi_0(0)]'$, onde $'$ representa a transposta, temos que $f \in B$ e teremos

$$(1.44) \quad a\dot{z}(t) = \lambda_0 az(t) + (a\psi_0(0))(a\psi_0(0))'$$

Se $\omega(t) = az(t)$ então $\omega(t)$ satisfaz (1.44), isto é, $\dot{\omega}(t) = \lambda_0 \omega(t) + c$, onde $c = (a\psi_0(0))(a\psi_0(0))' \neq 0$ e portanto $\omega(t) = ce^{\lambda_0 t} + ct$, onde λ_0 é imaginário puro. Logo, $|az(t)| = |\omega(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, isto é, $|az(t)|$ é não limitada, conseqüentemente cada solução da equação (1.43) é não limitada para a particular f tomada. Logo concluímos que

x_t^P é não limitada, o que é um absurdo, portanto $\Lambda_0 = \emptyset$ e $P_0 = \{0\}$.

Lema 1.32

Suponhamos que $\Lambda_0 = \emptyset$, B é um dos espaços definidos anteriormente e $\pi : B \rightarrow B$ uma projeção contínua de B sobre as soluções da equação (1.39) que estão em B . Então

$$(1.45.a) \quad \pi B(R^-) = \{g : R^- \rightarrow R^n : \text{existe } \phi \in P_1 \text{ com } g(t) = T(t)\phi(0), t \leq 0\}$$

$$(1.45.b) \quad \pi B(R^+) = \{g : R^+ \rightarrow R^n : \text{existe } \phi \in Q \text{ com } g(t) = T(t)\phi(0), t > 0\}$$

$$(1.45.c) \quad \pi B(R) = \{0\}$$

Além disso, para toda $f \in B$, existe uma única solução Kf da equação (1.40) tal que $\pi Kf = 0$ e $K : B \rightarrow B$ é um operador linear contínuo.

Demonstração

Consideremos o caso em que $B = B(R^-)$. Logo $\pi B(R^-)$ contém o conjunto dado pela expressão (1.45.a), pois $g(t) = T(t)\phi(0) = x(\phi)(t)$, portanto segue do Teorema 1.30 que é uma solução limitada em R^- . Para mostrar que o conjunto dado pela expressão (1.45.a) contém $\pi B(R^-)$ basta supor, por absurdo, que existe $\phi \in Q$, $\phi \neq 0$, tal que $x_t(\phi)$ é uma solução da equação (1.39), em Q , limitada em R^- e verificar que $x_t(\phi) = 0$ para $t \leq 0$. De maneira análoga mostra-se (1.45.b) e (1.45.c).

Suponhamos que $f \in B$ e $x = x(\phi, f)$ uma solução da equação (1.40) em B , com condição inicial ϕ em zero, isto é, $x_0(\phi, f) = \phi$. Além disso, seja $\pi_{P_1} : C \rightarrow P_1$ uma projeção de C sobre P_1 , definida pela decomposição $C = P_1 \oplus Q$, isto é,

se $\phi \in C$ então $\phi = \phi^{P_1} + \phi^Q$, logo $\pi_{P_1} \phi = \phi^{P_1}$. Temos que

$$(1.46) \quad x_t^{P_1} = T(t)\phi^{P_1} + \int_0^t T(t-s)X_0^{P_1}f(s)ds$$

$$(1.47) \quad x_t^Q = T(t-\sigma)x_\sigma^Q + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds \quad \text{para } \sigma \leq t \leq 0$$

Sejam k, α , números reais positivos dados pelo Teorema 1.30, tal que

$$(1.48.a) \quad |T(t)\phi^{P_1}| \leq Ke^{\alpha t}|\phi^{P_1}|, \quad |T(t)X_0^{P_1}| \leq Ke^{\alpha t}, \quad t \leq 0$$

$$(1.48.b) \quad |T(t)\phi^Q| \leq Ke^{-\alpha t}|\phi^Q|, \quad |T(t)X_0^Q| \leq Ke^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

Logo pelas expressões (1.47) e (1.48.b) obtemos,

$$|x_t^Q - \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds| \leq Ke^{-\alpha(t-\sigma)}|x_\sigma^Q| \quad \text{para } \sigma \leq t \leq 0$$

Como $|x_\sigma^Q|$ é limitada para $\sigma \leq 0$, podemos tomar o limite quando $\sigma \rightarrow -\infty$ na expressão acima e obter

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} |x_t^Q - \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds| = 0, \quad t \leq 0.$$

Portanto,

$$(1.49) \quad x_t^Q = \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds$$

$$|x_t^Q| \leq \frac{K}{\alpha} \sup_{u \leq 0} |f(u)|$$

Logo

$$(1.50) \quad x_t(\phi, f) = T(t)\phi^{P_1} + \int_0^t T(t-s)X_0^{P_1}f(s)ds + \\ + \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds, \quad t \leq 0.$$

Usando (1.48.a), obtemos

$$(1.51) \quad \left| T(t)\phi^{P_1} + \int_0^t T(t-s)X_0^{P_1}f(s)ds \right| \leq \\ \leq Ke^{\alpha t}|\phi^{P_1}| + \frac{K}{\alpha} \sup_{u < 0} |f(u)|$$

para $t \leq 0$ e $\phi^{P_1} \in P_1$, logo $x(\phi, f) \in B$.

Reciprocamente, a expressão (1.50) é uma solução da equação (1.40) em B satisfazendo as estimativas (1.49) e (1.51).

Seja $x = x(\phi^{P_1}, f)$ definida pela expressão (1.50) e seja $Kf = (I - \pi)x$ onde $\pi : B \rightarrow B$ é uma projeção de B sobre as soluções da equação (1.39) que estão em B . Então $K: B \rightarrow B$ e pode ser dada por $Kf = (I - \pi)x(0, f)$. Portanto, linear contínua e satisfaz a equação (1.40).

O operador K pode ser dado explicitamente por

$$(Kf)_t = \int_0^t T(t-s)X_0^{P_1}f(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds, \quad t \leq 0.$$

De maneira semelhante mostra-se que o resultado é verdadeiro para o caso em que $f \in B(R^+)$ ou $B(R)$.

Para o caso de $f \in B(R^+)$, obtemos a seguinte expressão para K :

$$(Kf)_t = \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^{P_1}f(s)ds + \int_0^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds, \quad t \geq 0$$

e para o caso de $f \in B(R)$, obtemos:

$$(Kf)_t = \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^{P_1}f(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Qf(s)ds, \quad t \in R.$$

O próximo resultado nos dará uma condição necessária e suficiente para que a equação (1.40) tenha uma solução ω -periódica sendo o termo forçante, f , ω -periódico.

Para isso, consideremos $\tilde{\pi} : P_\omega \rightarrow P_\omega$ uma projeção contínua de P_ω sobre as soluções ω -periódicas da equação (1.39). Por exemplo, podemos definir $\tilde{\pi}$ da seguinte maneira. Seja $U = (\phi_1, \dots, \phi_d)$ base para as soluções ω -periódicas da equação (1.39), seja U' a transposta de U e definamos

$$(1.52) \quad \tilde{\pi}f = U \left[\int_0^\omega U'(s)U(s)ds \right]^{-1} \int_0^\omega U'(s)f(s)ds$$

é fácil verificar que $\tilde{\pi}$ satisfaz as condições acima.

Teorema 1.33 (Alternativa de Fredholm)

Se $f \in P_\omega$ então a equação (1.40) tem uma solução em P_ω se e somente se

$$(1.53) \quad \int_0^\omega y(t)f(t)dt = 0$$

para toda y solução ω -periódica da equação adjunta

$$(1.54) \quad \dot{y}(s) = - \int_{-r}^0 d\eta(\theta)y(s-\theta).$$

Além disso, existe uma projeção contínua, $J : P_\omega \rightarrow P_\omega$ tal que o conjunto das $f \in P_\omega$ que satisfazem a relação (1.53) é exatamente $(I-J)P_\omega$ e existe uma transformação linear contínua $K : (I-J)P_\omega \rightarrow (I-\tilde{\pi})P_\omega$ tal que Kf é uma solução da equação (1.40) para cada $f \in (I-J)P_\omega$.

Demonstração

Consideremos a decomposição de C como $C = P_0 \oplus P_1 \oplus Q$,

como no início desta secção. Em virtude do Lema 1.32, as equações (1.42.b) e (1.42.c) tem uma única solução ω -periódica para $f \in P_\omega$ e são dadas explicitamente por

$$(1.55) \quad \begin{aligned} x_t^P &= \int_{-\infty}^t T(t-s) X_0^P f(s) ds \\ x_t^Q &= \int_{-\infty}^t T(t-s) X_0^Q f(s) ds \end{aligned}$$

Logo, basta considerarmos somente a equação (1.42.a). Mantendo as notações da prova do Lema 1.31, se ϕ_0 é uma base para P_0 e B é definida pela relação $A\phi_0 = \phi_0 B$, onde A é o gerador infinitesimal associado a equação (1.39), então se $x_t^P = \phi_0 z(t)$, teremos que $z(t)$ será solução da equação (1.43).

É um fato conhecido da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias que a equação (1.43) tem uma solução ω -periódica se e somente se

$$\int_0^\omega u(t) \psi_0(0) f(t) dt = 0$$

para toda solução, u , ω -periódica da equação adjunta $\dot{u}(t) = -u(t)B$. Como referência para este resultado veja [5; pag. 146].

Isto é,

$$\int_0^\omega u_0 e^{-Bt} \psi_0(0) f(t) dt = 0$$

para toda u_0 , para o qual $u_0 e^{-Bt}$ é ω -periódica. Mas $u_0 e^{-Bt} \psi_0(0)$, para estes u_0 's, coincide com as soluções ω -periódicas da equação adjunta (1.54), pois $u_0 e^{-Bt} \psi_0(0) = u_0 \psi_0(t)$, e isto completa a primeira parte da prova do Teorema 1.33.

Para a segunda parte, seja $V = \text{col}(\psi_1, \dots, \psi_d)$ base para as soluções ω -periódicas da equação (1.54) e definamos

$J : P_\omega \rightarrow P_\omega$ como

$$(1.56) \quad Jf = V' \left[\int_0^\omega V(s) V'(s) ds \right]^{-1} \int_0^\omega V(s) f(s) ds$$

onde V' é a transposta de V .

É simples mostrar que J satisfaz as condições requeridas pelo Teorema 1.33. Definindo $K : (I-J)P_\omega \rightarrow (I-\tilde{\pi})P_\omega$ por $Kf = (I-\tilde{\pi})x(f)$, com base na prova do Lema 1.32, concluímos a prova do Teorema 1.33.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo nós daremos um procedimento para determinar a existência de soluções periódicas de algumas classes de equações diferenciais funcionais autônomas. Para isto, falaremos na Bifurcação de Hopf e aplicaremos os teoremas de ponto fixo ejetivo, dados no Capítulo 0. Finalmente, aplicando um teorema sobre existência de autovetores de aplicações não lineares, em um cone obteremos um resultado sobre existência de soluções periódicas para equações diferenciais com retardamento, que deixam uma esfera invariante em R^2 . Este resultado tem inspiração em [2; pag. 27], entretanto, é distinto deste último.

2.1. A Bifurcação de Hopf

Consideremos uma família de EDFR dependendo de um parâmetro real, da forma

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = F(\alpha, x_t)$$

onde $F(\alpha, \phi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas em α, ϕ , para $\alpha \in R, \phi \in C$ e $F(\alpha, 0) = 0$ para todo $\alpha \in R$.

Definamos $L : R \times C \rightarrow R^n$ por

$$(2.2) \quad L(\alpha)\psi = F_\phi(\alpha, 0)$$

onde $F_\phi(\alpha, 0)$ é a derivada de $F(\alpha, \phi)$ com relação a ϕ , calculada em $\phi = 0$, e consideremos $f : R \times C \rightarrow R^n$ dada por

$$(2.3) \quad f(\alpha, \phi) = F(\alpha, \phi) - L(\alpha)\phi$$

para $(\alpha, \phi) \in R \times C$.

Suponhamos que:

- (H1) A $\text{EDFR}(L(0))$ tem uma raiz característica simples, imaginária pura, $\lambda_0 = i\nu_0 \neq 0$ e todas as raízes características $\lambda_j \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$, satisfazem $\lambda_j \neq m\lambda_0, m \in \mathbb{Z}$.

Como $L(\alpha)$ é continuamente diferenciável em α , o Lema 1.22, implica que existe $\alpha_0 > 0$ e uma raiz característica simples, $\lambda(\alpha)$, da $\text{EDFR}(L(\alpha))$ que tem derivada contínua em α para $|\alpha| < \alpha_0$ e $\lambda(0) = \lambda_0$.

Suponhamos que:

- (H2) $\text{Re}\lambda'(0) \neq 0$.

Tomando-se α_0 , suficientemente pequeno, podemos supor que $\text{Im}\lambda(\alpha) \neq 0$ para $|\alpha| < \alpha_0$. Seja $\phi_\alpha \in \mathbb{C}$ base para o auto-espaço generalizado, $P(\alpha)$, associado a $\lambda(\alpha)$, da $\text{EDFR}(L(\alpha))$. Observemos que

$$(\text{Re}\phi_\alpha, \text{Im}\phi_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_\alpha$$

forma uma base para o auto-espaço generalizado da $\text{EDFR}(L(\alpha))$ associado a $\lambda(\alpha)$, $\bar{\lambda}(\alpha)$. Da mesma maneira, obtemos ψ_α , base para o auto-espaço da equação ajunta formal, com $(\psi_\alpha, \phi_\alpha) = I = \text{id}$ entidade.

De acordo com o Teorema 1.20 e o Lema 1.29, existe uma matriz $B(\alpha)$, 2×2 , continuamente diferenciável, tal que

$$(2.4) \quad \phi_\alpha(\theta) = \phi_\alpha(0) e^{B(\alpha)\theta}, \quad -r \leq \theta \leq 0,$$

onde os únicos autovalores de $B(\alpha)$ são $\lambda(\alpha)$ e $\bar{\lambda}(\alpha)$.

Por uma mudança de coordenadas e redefinindo o parâmetro α , se necessário, podemos assumir que

$$(2.5) \quad B(\alpha) = v_0 B_0 + \alpha B_1(\alpha)$$

$$\text{onde } B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma(\alpha) \\ -\gamma(\alpha) & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \gamma(\alpha)$$

continuamente diferenciável para $|\alpha| < \alpha_0$. De fato, como a igualdade (2.5) deve ser verificada, a menos de mudança de variáveis, basta demonstrarmos que existe $\gamma(\alpha)$, de modo que as matrizes do primeiro e do segundo membro de (2.5) tenham mesmo polinômio característico. Ou seja,

$$\lambda(\alpha) \bar{\lambda}(\alpha) = \alpha^2 + [v_0 + \alpha \gamma(\alpha)]^2$$

que define uma possível escolha para $\gamma(\alpha)$.

Mostraremos a seguir que as hipóteses (H1) e (H2) implicam que a equação (2.1) tenha soluções periódicas, não nulas, para α pequeno, com período próximo a $2\pi/v_0$.

Teorema 2.1 (Bifurcação de Hopf)

Suponhamos que $F(\alpha, \phi)$ tenha primeira e segunda derivadas contínuas com respeito a α, ϕ , $F(\alpha, 0) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e que (H1) e (H2) estão satisfeitas. Então existem constantes $a_0, \alpha_0, \delta_0 > 0$; funções $\alpha(a) \in \mathbb{R}$, $\omega(a) \in \mathbb{R}$ e uma função $x^*(a)$, $\omega(a)$ -periódica, todas continuamente diferenciáveis para $|a| < a_0$, tal que $x^*(a)$ é solução da equação (2.1) satisfazendo

$$(2.6) \quad x_0^*(a) \begin{matrix} P \\ \alpha(a) \end{matrix} = \phi_{\alpha(a)} y_0^*(a) \quad \text{e} \quad x_0^*(a) \begin{matrix} Q \\ \alpha(a) \end{matrix} = z_0^*(a)$$

onde $y_0^*(a) = \text{col}(a, 0) + o(|a|)$, $z_0^*(a) = o(|a|)$, quando $|a| \rightarrow 0$. Além disso, para $|\alpha| < \alpha_0$, $|\omega - 2\pi/v_0| < \delta_0$, cada solução x , ω -periódica, da equação (2.1), com $|x_t| < \delta_0$, deve ser do tipo

acima, exceto por defasagem.

Demonstração

Seja $\beta \in (-1, 1]$, $\omega_0 = 2\pi/\nu_0$ e definamos $u(\tau) = x((1+\beta)\tau)$, $\tau \geq 0$, onde x é uma solução da equação (2.1), e seja $u_{\tau, \beta}(\theta) = u(\tau + \theta/(1+\beta))$ para $-r \leq \theta \leq 0$. Com isto, temos que a equação (2.1) é equivalente a equação

$$(2.7) \quad \frac{du(\tau)}{d\tau} = (1+\beta)F(\alpha, u_{\tau, \beta}).$$

Se esta equação tiver uma solução ω_0 -periódica, então a equação (2.1) terá uma solução $(1+\beta)\omega_0$ -periódica e reciprocamente.

Reescrevendo a equação (2.7), obtemos:

$$(2.8) \quad \frac{du(\tau)}{d\tau} = L(0)u_{\tau} + N(\beta, \alpha, u_{\tau}, u_{\tau, \beta})$$

onde $N(\beta, \alpha, u_{\tau}, u_{\tau, \beta}) = (1+\beta)L(\alpha)u_{\tau, \beta} - L(0)u_{\tau} + (1+\beta)f(\alpha, u_{\tau, \beta})$.

Isto significa que podemos considerar a equação (2.8) como uma perturbação da equação linear autônoma

$$(2.9) \quad \frac{du(\tau)}{d\tau} = L(0)u_{\tau}.$$

Sabemos que as colunas $U(\tau) = \phi_0(0)e^{B(0)\tau}$, $u\tau \in \mathbb{R}$, formam uma base para as soluções ω_0 -periódicas da equação (2.9) e as linhas de $V(\tau) = e^{-B(0)\tau}\psi_0(0)$, $\tau \in \mathbb{R}$, formam uma base para as soluções ω_0 -periódicas da equação adjunta formal associada à equação (2.9).

Podemos aplicar o Teorema 1.33, para obter condições necessárias e suficientes para a existência de soluções ω_0 -periódicas da equação (2.8). Antes porém, é conveniente observar que se $u(\tau)$ é solução da equação (2.9) então $u^h(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} u(\tau+h)$

também será uma solução da equação (2.9). A solução geral de (2.9) é

$$u(\tau) = U(\tau) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{onde } x, y \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que existem $a, h \in \mathbb{R}$ tal que

$$U(\tau+h) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U(\tau) \text{col}(a, 0), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$U(\tau+h) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U(\tau) e^{B(0)h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

logo, basta mostrar que existem $a, h \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{B(0)h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{col}(a, 0).$$

Temos que

$$e^{B(0)h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{iv_0 h} & 0 \\ 0 & e^{-iv_0 h} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e como queremos soluções reais teremos

$$e^{B(0)h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos v_0 h & \text{sen } v_0 h \\ -\text{sen } v_0 h & \cos v_0 h \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (x \cos v_0 h + y \text{sen } v_0 h, -x \text{sen } v_0 h + y \cos v_0 h).$$

Assim o problema se resume em mostrar a existência de soluções h de $-x \text{sen } v_0 h + y \cos v_0 h = 0$, que é um fato óbvio. Portanto, uma aplicação direta do Teorema 1.33, nos mostra que cada solução ω_0 -periódica da equação (2.8), exceto por uma defasagem, é

solução das equações:

$$(2.10.a) \quad u(\tau) = U(\tau) \text{col}(a, 0) + K(I-J)N(\beta, \alpha, u_{\cdot}, u_{\cdot, \beta})(\tau)$$

$$(2.10.b) \quad JN(\beta, \alpha, u_{\cdot}, u_{\cdot, \beta}) = 0$$

e reciprocamente, onde K, J são dadas no Teorema 1.33.

Aplicando-se o teorema da função implícita a equação (2.10.a) obtemos $u^* = u^*(a, \beta, \alpha)$, para a, β, α numa vizinhança suficientemente pequena de zero, continuamente diferenciável em a, β, α e satisfazendo

$$(2.11) \quad u^*(a, 0, 0) - U(\cdot) \text{col}(a, 0) = o(|a|) \text{ quando } |a| \rightarrow 0.$$

Como $u^*(\tau) = u^*(a, \beta, \alpha)(\tau)$ satisfaz a equação (2.10.a) ela também satisfaz a equação integral associada a (2.7) e portanto é continuamente diferenciável em τ .

Logo, toda solução ω_0 -periódica da equação (2.8), pode ser obtida encontrando-se a, β, α , solução da equação de bifurcação

$$(2.12) \quad JN(\beta, \alpha, u^*(a, \beta, \alpha), u^*_{\cdot, \beta}(a, \beta, \alpha)) = 0.$$

Do Teorema 1.33, J pode ser tomada como

$$J(h) = V \left[\int_0^{\omega_0} V(s) V'(s) ds \right]^{-1} \int_0^{\omega_0} V(s) h(s) ds, \text{ onde } h \in P_{\omega_0}.$$

Logo, (2.12) é equivalente a equação:

$$(2.13) \quad G(a, \beta, \alpha) = \int_0^{\omega_0} e^{-B(0)s} \psi_0(0) N(\beta, \alpha, u^*_s(a, \beta, \alpha), u^*_{s, \beta}(a, \beta, \alpha)) ds = 0$$

Portanto, basta resolver a equação $G(a, \beta, \alpha) = 0$. Observemos que $G(0, \beta, \alpha) = 0$ para todo β, α .

Seja $H(a, \beta, \alpha) = G(a, \beta, \alpha)/a$ se $a \neq 0$ e $H(0, \beta, \alpha) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{G(a, \beta, \alpha)}{a}$. Com isto temos que

$$H(0, 0, \alpha) = \int_0^{\omega_0} e^{-B(0)s} \psi_0(0) [L(\alpha) - L(0)] U_s e_1 ds \quad \text{onde } e_1 = \text{col}(1, 0).$$

Calculando a derivada com relação a α no ponto $(0, 0, 0)$ e usando o Lema 1.29, obtemos:

$$\frac{\partial H(0, 0, 0)}{\partial \alpha} = \omega_0 \begin{bmatrix} +1 \\ -\gamma(0) \end{bmatrix}.$$

Além disso, um simples cálculo, nos mostra que:

$$H(0, \beta, 0) = \int_0^{\omega_0} e^{-B(0)s} \psi_0(0) [(1+\beta)L(0)U_{s, \beta} e_1 - L(0)U_s e_1] ds$$

Escrevendo-se esta integral como a diferença de duas integrais, fazendo uma mudança da variável s para $s/(1+\beta)$ na primeira integral e notando que

$$\frac{\partial U(s/(1+\beta))}{\partial (s/(1+\beta))} = L(0)U_{s/(1+\beta), \beta}$$

teremos,

$$H(0, \beta, 0) = \beta \int_0^{\omega_0} e^{-B(0)s} \psi_0(0) \phi_0(0) e^{B(0)s} B(0) e_1 ds.$$

Se x é uma solução de (2.9) e y é uma solução da equação adjunta de (2.9) então vimos que $(y^t, x_t) = \text{cte}$ para todo t , portanto

$$\begin{aligned}
I &= (e^{-B(0)(s+\cdot)} \psi_0(0), \phi_0(0) e^{B(0)(s+\cdot)}) = \\
&= e^{-B(0)s} \psi_0(0) \phi_0(0) e^{B(0)s} - \\
&- \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \int_0^\theta e^{-B(0)(s+\xi-\theta)} \psi_0(0) \phi_0(0) e^{B(0)(s+\xi)} d\xi
\end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Integrando ambos os membros de 0 a ω_0 e usando o fato que a segunda integral do segundo membro da igualdade é zero, obtemos:

$$\omega_0 I = \int_0^{\omega_0} e^{-B(0)s} \psi_0(0) \phi_0(0) e^{B(0)s} ds.$$

Multiplicando-se ambos os membros desta igualdade por $\beta B(0)e_1$ a direita, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\beta \omega_0 B(0)e_1 &= \\
&= \beta \int_0^{\omega_0} e^{-B(0)s} \psi_0(0) \phi_0(0) e^{B(0)s} B(0)e_1 ds = H(0, \beta, 0)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$H(0, \beta, 0) = \beta \omega_0 B(0)e_1.$$

Logo temos:

$$H(0, 0, 0) = 0$$

$$e \quad \frac{\partial H}{\partial(\beta, \alpha)}(0, 0, 0) = (\omega_0 B(0)e_1 + \omega_0 B_1(0)e_1) =$$

$$= \omega_0 \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -v_0 & -\gamma(0) \end{bmatrix},$$

donde segue que $\det\left(\frac{\partial H}{\partial(\beta, \alpha)}(0,0,0)\right) = +v_0 \neq 0$.

Portanto pelo teorema da função implícita segue que e existem funções $\beta(a)$ e $\alpha(a)$, continuamente diferenciáveis com $\beta(0) = \alpha(0) = 0$, com $H(a, \alpha(a), \beta(a)) = 0$, e esta solução é única para a numa vizinhança de zero, $|a| < a_0$. Logo te mos que $G(a, \beta(a), \alpha(a)) = 0$ e portanto $u^*(a) = u^*(a, \beta(a), \alpha(a))$ é solução ω_0 -periódica da equação (2.8).

Observemos que $x^*(a)$, correspondente a $u^*(a)$, será uma solução da equação (2.1), $\omega(a)$ -periódica, onde $\omega(a) = (1 + \beta(a))\omega_0$.

Se $x_0^*(a)^{P_{\alpha(a)}} = \phi_{\alpha(a)} y^*(a)$, como $x_0^*(a)(\theta) = u_{0, \beta(a)}^*(a, \beta(a), \alpha(a))(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{x_0^*(a)}{|a|} &= \lim_{|a| \rightarrow 0} \phi_{\alpha(a)} \lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{y^*(a)}{|a|} = \\ &= \phi_{\alpha(0)} \lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{y^*(a)}{|a|} = U \lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{y^*(a)}{|a|} \end{aligned}$$

e

$$\lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{x_0^*(a)}{|a|} = \lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{u_{0, \beta(a)}^*(a, \beta(a), \alpha(a))^{P_{\alpha(a)}}}{|a|} = U e_1$$

então temos que $y^*(a) = col(a, 0) + o(|a|)$ quando $|a| \rightarrow 0$.

Além disso, se $x_0^*(a)^{Q_{\alpha(a)}} = z_0^*(a)$ então

$$\lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{x_0^*(a)^{Q_{\alpha(a)}}}{|a|} = \lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{u_{0, \beta(a)}^*(a, \beta(a), \alpha(a))^{Q_{\alpha(a)}}}{|a|} = 0$$

Logo $z_0^*(a) = o(|a|)$ quando $|a| \rightarrow 0$.

Por último, se x é uma solução ω -periódica da equação (2.1) com $|\omega - \omega_0| < \delta_0$, $|\alpha| < \alpha_0$ e $|x_t| < \delta_0$ temos da

unicidade das funções $\alpha(a)$, $\beta(a)$ para $|a| < a_0$ e dos autovalores da $\text{EDFR}(L(0))$ não serem múltiplos inteiros de λ_0 implicam que a solução x será do tipo mencionado acima, exceto por uma defasagem.

2.2. Teoremas sobre Periodicidade de EDFR Autônomas Envolvendo Ponto Ejetivo

A seguir, daremos um teorema sobre periodicidade, utilizando os teoremas 0.4 e 0.5, que envolvem o conceito de ponto ejetivo, para uma EDFR autônoma.

Consideremos as equações

$$(2.14) \quad \dot{x}(t) = L(x_t) + f(x_t)$$

$$(2.15) \quad \dot{y}(t) = L(y_t)$$

onde $L : C \rightarrow R^n$ é linear e contínua; $f : C \rightarrow R^n$ é completamente contínua, f' é contínua e $f(0) = f'(0) = 0$.

Para cada autovalor, λ , associado a equação (2.15) existe uma decomposição de C como $C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, onde P_λ e Q_λ são invariantes pela aplicação da solução associada a equação (2.15), $T(t)\phi = y_t(\phi)$ para $\phi \in C$, $t \geq 0$. Sejam π_λ e $(I - \pi_\lambda)$ as projeções definidas pela decomposição de C , com a imagem de π_λ sendo P_λ .

Suponhamos que exista um subconjunto $K \subset C$ tal que cada solução $x(\phi)$ da equação (2.14) para $\phi \in K$, "volte" para K , em algum tempo $\tau(\phi) > 0$, isto é, $x_{\tau(\phi)}(\phi) \in K$, se $\phi \in K$. Logo temos definida uma aplicação $A : K \rightarrow K$ dada por

$$A(\phi) = x_{\tau(\phi)}(\phi), \quad \text{para } \phi \in K.$$

Se A é completamente contínua e K for fechado, limitado e convexo então segue do Teorema do Ponto Fixo de Schauder, a existência de $\phi \in K$ tal que $A\phi = \phi$, isto é, uma solução periódica da equação (2.14). Para que esta solução não seja trivial necessitamos que o ponto fixo de A não seja $\phi = 0$. Para que isto ocorra, bastará que $\phi = 0$ seja um ponto ejetivo de A em K . Logo precisaremos de um resultado que nos dê uma condição necessária para que $\phi = 0$ seja um ponto ejetivo de A . Esta condição é dada no seguinte resultado.

Teorema 2.2

Se as seguintes condições estão satisfeitas:

- (i) Existe um autovalor, λ , associado a equação (2.15) satisfazendo $\operatorname{Re} \lambda > 0$.
- (ii) Existe um subconjunto $K \subset C$, fechado, convexo tal que $0 \in K$ e existe $\delta > 0$ tal que

$$v = v(\delta) = \inf\{|\pi_\lambda \phi| : \phi \in K \text{ e } |\phi| = \delta\} > 0.$$
- (iii) Existe uma função completamente contínua $\tau: K \setminus \{0\} \rightarrow [\alpha, \infty)$, $\alpha \geq 0$, tal que a aplicação $A: K \setminus \{0\} \rightarrow C$ dada por $A(\phi) = x_{\tau(\phi)}(\phi)$, para $\phi \in K \setminus \{0\}$, leva $K \setminus \{0\}$ em K e é completamente contínua.

Então 0 é um ponto ejetivo de A .

Demonstração

Seja $\phi_\lambda = (\phi_\lambda^1, \phi_\lambda^2, \dots, \phi_\lambda^d)$ uma base para P_λ e $\pi_\lambda \phi = \phi_\lambda b$ onde $b = b(\phi) \in \mathbb{R}^d$.

Para $V: C \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, seja

$$\dot{V}(\phi) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \inf \frac{1}{t} [V(x_t(\phi)) - V(\phi)].$$

Por um resultado de [5; pag. 232] temos que existe uma forma quadrática definida positiva, $V(\phi) = b'Bb$, com a propriedade que para todo $p > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo δ , $0 < \delta < \delta_0$, $\dot{V}(\phi) > 0$ se $V(\phi) \geq p^2 \delta^2$ para $\phi \in \bar{B}_\delta = \{\phi \in C : |\phi| \leq \delta\}$.

Com a função $V(\phi)$, temos que a condição (ii) implica que

$$v^2 \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ V\left(\frac{\phi}{|\phi|}\right) : \phi \in K, |\phi| \neq 0 \right\} > 0$$

pois se $\phi \neq 0$ temos que $b = b(\phi) \neq 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 < |\pi_\lambda \phi| &= |\phi b| \leq |\phi| |b| = \frac{|\phi|}{|b|} |b|^2 = \\ &= \alpha |b|^2 \quad \text{onde } \alpha = \frac{|\phi|}{|b|}. \end{aligned}$$

Se $\beta^2 = \min\{c'Bc : |c| = 1\}$, e $\phi \neq 0$ teremos

$$V(\phi) = b'Bb = |b'| \left[\frac{b'}{|b'|} B \frac{b}{|b|} \right] |b| \geq \beta^2 |b|^2.$$

Logo, $0 < |\pi_\lambda \phi| \leq \alpha |b|^2 \leq \alpha \beta^2 V(\phi)$.

Portanto, $v^2 > 0$.

Fixemos $p < v$ e consideremos δ_0 , obtido acima. Logo $V(x_t(\phi))$ é crescente em t , enquanto $V(x_t(\phi)) \geq p^2 \delta^2$, para $|x_t(\phi)| \leq \delta$, com $0 < \delta < \delta_0$.

Seja $G(\delta) = \{\phi \in C : |\phi| < \delta \text{ e } V(\phi) < p^2 \delta^2\}$. Então $G(\delta)$ é um subconjunto aberto de C e $0 \in G(\delta)$.

Como τ é completamente contínua, existe $k > 0$ tal que $\tau(\phi) \leq k$, para toda $\phi \in G(\delta_0) \cap K$. Escolhendo δ_1 , $0 < \delta_1 < \delta_0$, suficientemente pequeno, de maneira que a solução $x(\phi)$ da equação (2.14) passando por $\phi \in \overline{G(\delta_1)}$ satisfaz

$x_t(\phi) \in G(\delta_0)$ para $0 \leq t \leq k$, que é uma consequência do teorema da continuidade das soluções em relação as condições iniciais da equação (2.14) e da continuidade de V .

Para toda $\phi \in G(\delta_0) \cap K$, com $|\phi| = \varepsilon < \delta_0$, o fato de $p < v$ implica que

$$V(\phi) = V(|\phi| \frac{\phi}{|\phi|}) = |\phi|^2 \left(\frac{\phi}{|\phi|} \right) \geq \varepsilon^2 v^2 > \varepsilon^2 p^2,$$

logo $\dot{V}(\phi) > 0$. Portanto $V(\phi)$ é crescente ao longo das soluções da equação (2.14) para $|\phi| < \delta_0$, $\phi \in K \setminus \{0\}$. Logo para $\phi \in G(\delta_1) \cap (K \setminus \{0\})$, existem $t_1 > t_2 > 0$, tal que $x_t(\phi) \in G(\delta_1)$, $0 \leq t \leq t_2$, $x_t(\phi) \in G(\delta_0) \setminus G(\delta_1)$, $t_2 < t < t_1$ e $x_{t_1}(\phi) \in \partial G(\delta_0)$.

Seja $n_0(\phi)$, o maior inteiro tal que

$A^k \phi \in \{x_t(\phi) : 0 \leq t \leq t_2\} \subset G(\delta_1)$, $k = 0, 1, \dots, n_0(\phi)$. Logo $A^{n_0(\phi)+1} \phi \notin G(\delta_1) \cap K$, mostrando que 0 é um ponto ejetivo de A .

Com isto, podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração é uma aplicação direta dos Teoremas 0.4, 0.5 e 2.2.

Teorema 2.3

Suponhamos que $K \subset C$ é fechado convexo, $0 \in K$ e que as condições (i), (ii), (iii) do Teorema 2.2 estão satisfeitas. Se uma das condições abaixo ocorrer:

(iv) K é limitado e de dimensão infinita

(iv') K é limitado, de dimensão finita e 0 é um ponto extremo de K .

(iv") Existe $M > 0$, tal que $Ax = \lambda x$, $x \in K \cap S_M$ implica $\lambda < 1$.

Então existe uma solução periódica, não nula, da equação (2.14) com condição inicial em $K \setminus \{0\}$.

2.3. Soluções Periódicas de EDR Autônomas em C_a

Nesta secção, apresentaremos um teorema que nos garantirá a existência de soluções periódicas, não constante, em $C([-r,0], S^1(a))$, para um EDR autônoma, quando temos uma esfera, $S^1(a)$, invariante em R^2 , usando a teoria de autovetores em cones desenvolvida na secção 0.3.

Adotaremos, a seguir, as seguintes notações:

Para $a > 0$,

$$S^1(a) = \{x \in R^2 : |x| = a\}$$

e

$$C_a = C([-r,0], S^1(a))$$

Dados $k_1, k_2 \in R$, $0 < k_1 < k_2$, vimos na secção 0.5, que o conjunto

$$K_0 = \left\{ \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in C : 0 \leq k_1 \phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta) \leq k_2 \phi_1(\theta), \text{ para } -r \leq \theta \leq 0 \right\}$$

define um cone em C . Logo $K = K_0 \cap \overline{B(0,a)}$ é um cone truncado em C , onde $\overline{B(0,a)}$ é a bola fechada de centro zero e raio a em C .

Seja $F = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq k_1 x_1 \leq x_2 \leq k_2 x_1\}$ o cone em R^2 , determinado por k_1, k_2 . Denotemos por ξ , o ângulo de abertura do cone F , isto é, $\xi = \arctg k_2 - \arctg k_1$.

Consideremos a EDR, autônoma,

$$(2.16) \quad \dot{x}(t) = f(x_t)$$

de modo que estejam satisfeitas condições que garantam unicidade para o problema de valor inicial e continuidade em relação aos dados iniciais e seja $T(t) : C \rightarrow C$ a aplicação solução associada a equação (2.16)

Com as notações acima temos o:

Teorema 2.4

Suponhamos que:

- (i) C_a é invariante pela aplicação solução $T(t)$, $t \geq 0$.
- (ii) Se $\phi \in K \cap C_a$ então $S^1(a) \subset \bigcup_{t>r} T(t)\phi(0)$.
- (iii) f é contínua em C e
 $0 < ||f(\phi)|| < \frac{a\xi}{r}$, para toda $\phi \in C_a$ tal que $\phi(0) \in F$.

Então existe uma solução periódica, não constante, da equação (2.16) em C_a .

Demonstração

Consideremos os conjuntos

$$A = \{\phi \in C : |\phi(\theta)| < a, \text{ para algum } -r \leq \theta \leq 0\}$$

$$e \quad G = A \cap B(0, 2a),$$

que é aberto e limitado em C . Temos que $\partial G \cap B(0, a) = \emptyset$, pois $B(0, a) \subset G$ e G é aberto. Além disso, $K \cap \partial G = K \cap C_a$, pois, o fato de $C_a \subset \partial G$, implica que $K \cap C_a \subset K \cap \partial G$ e se $\phi \in K \cap \partial G$, então $\phi \notin G$, logo $|\phi(\theta)| \geq a$, para todo, $-r \leq \theta \leq 0$; como $\phi \in K$, então $|\phi(\theta)| \leq a$, para todo, $-r \leq \theta \leq 0$, implicando que $|\phi| = a$, logo $\phi \in K \cap C_a$.

Consideremos a aplicação, $\tau : K \cap C_a \rightarrow [r, \infty)$, definida

por $\tau(\phi) = \min\{t \geq r : T(t)\phi \in K \cap C_a\}$, para cada $\phi \in K \cap C_a$,
 que está bem definida pois se $\phi \in K \cap C_a$, segue de (iii) que
 existe um menor $t_0 \geq r$ tal que $T(t_0)\phi(0) \in \partial F$. Por (ii), te-
 mos que $T(t_0)\phi(0) \in F \cap S^1(a)$. Mostremos que $\tau(\phi) = t_0 + r$, is-
 to é, que $T(t_0 + r)\phi \in K \cap C_a$. De fato, o conjunto

$$D = \{\rho : 0 \leq \rho \leq r \text{ e } T(t_0 + \theta)\phi(0) \in F \cap S^1(a), \text{ para todo } \theta, 0 \leq \theta \leq \rho\}.$$

Como $F \cap S^1(a)$ é fechado, segue que D também é fechado; as-
 sim resta apenas mostrar que $r = \max D$. De fato, se $\bar{\rho} = \max D < r$,
 existiria uma seqüência, (θ_n) , tal que $\bar{\rho} < \theta_n \leq r$ tal que
 $\theta_n \rightarrow \bar{\rho}$, quando $n \rightarrow \infty$ e $T(t_0 + \theta_n)\phi(0) \notin F \cap S^1(a)$ para todo
 $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$(2.17) \quad \left| \int_{t_0}^{t_0 + \theta_n} f(x_s(\phi)) ds \right| > a\xi.$$

Da continuidade das soluções da equação (2.16) segue, toman-
 do-se o limite em (2.17), quando $n \rightarrow \infty$, que:

$$a\xi \leq \left| \int_{t_0}^{t_0 + \bar{\rho}} f(x_s(\phi)) ds \right| < r \frac{a\xi}{r} \quad \therefore a\xi < a\xi$$

que é um absurdo, logo $\max D = r$ é portanto $T(t_0 + r)\phi \in K \cap C_a$.

Observemos que τ é contínua em $K \cap C_a$, pois $f(\phi) \neq 0$
 para $\phi \in C_a$ com $\phi(0) \in F$ e vale o teorema da continuidade em
 relação as condições iniciais.

Seja $\tilde{T} : K \cap C_a \rightarrow C_a$ definida por $\tilde{T}(\phi) = T(\tau(\phi))\phi$.
 Temos que $\tilde{T}(K \cap C_a) \subset K \cap C_a$, pois $\phi \in K \cap C_a$ então $\tilde{T}(\phi) = T(\tau(\phi))\phi \in K \cap C_a$, pela definição da aplicação τ . Além disso, $\tilde{T}$ é completamente contínua, pois $T(t)\phi$ é contínua em t , ϕ e $\tau(\phi)$ é contínua, portanto, $\tilde{T}$ é contínua e se $B \subset K \cap C_a$ é limitado, temos que:

(1) $\tilde{T}(B)$ é uniformemente limitado, pois $\tilde{T}(B) \subset K \cap C_a$.

$$\text{Seja } L = \frac{a\xi}{r}.$$

(2) $\tilde{T}(B)$ é equicontínuo, pois dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$, então se $\theta_1, \theta_2 \in [-r, 0]$ com $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$ temos que, para todo $\phi \in \tilde{T}(B)$, existe $\psi \in B$ tal que $\tilde{T}(\psi) = \phi$, logo como $\tau(\phi) \geq r$,

$$\begin{aligned} |\phi(\theta_1) - \phi(\theta_2)| &= |\tilde{T}(\psi)(\theta_1) - \tilde{T}(\psi)(\theta_2)| = \\ &= \left| \int_{\tau(\psi) + \theta_2}^{\tau(\psi) + \theta_1} f(x_s(\psi)) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\tau(\psi) + \theta_2}^{\tau(\psi) + \theta_1} |f(x_s(\psi))| ds \right| < \\ &< L |\theta_1 - \theta_2| < L\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Ascoli-Arzelà segue que $\tilde{T}(B)$ é relativamente compacto, mostrando que $\tilde{T}$ é completamente contínua.

Como $K \cap C_a = K \cap \partial G$, temos que $\tilde{T} : K \cap \partial G \rightarrow K$ e $\inf\{|T(\phi)| : \phi \in K \cap \partial G\} > 0$, pois $\tilde{T}(\phi) \in K \cap C_a$, logo

$|\tilde{T}(\phi)| = a > 0$. Portanto estamos nas condições do Teorema 0.9 e podemos concluir que $\tilde{T}$ tem um autovetor $\phi \in K \cap \partial G$, isto é, existe uma constante μ , tal que $\tilde{T}\phi = \mu\phi$. Como $|\mu\phi| = |\tilde{T}\phi| = a = |\phi|$, segue que $|\mu| = 1$; mas ϕ e $\mu\phi$ pertencem a K_0 , que é um cone, logo $\mu = 1$. Portanto ϕ é um ponto fixo de $\tilde{T}$, isto é, $\phi = \tilde{T}(\phi) = T(\tau(\phi))\phi$. Portanto, existe uma solução periódica, não constante em C_a .

CAPÍTULO 3

Nós daremos neste capítulo dois exemplos, onde aplicaremos os resultados vistos no Capítulo 2. No primeiro exemplo faremos uma aplicação do Teorema 2.1, no segundo exemplo uma aplicação do Teorema 2.3 e no terceiro exemplo, do Teorema 2.4.

O exemplo a seguir é uma ligeira modificação de [7; pag. 254].

Exemplo 1

Consideremos a equação escalar

$$(3.1) \quad \dot{x}(t) = -\alpha x(t-1) [1+g(x(t))]$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g tem primeira e segunda derivadas contínuas.

Para a equação (3.1) temos definidas:

$L(\alpha) : C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $L(\alpha)\phi = -\alpha\phi(-1)$, para $\phi \in C$

e

$f(\alpha) : C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\alpha)\psi = -\alpha\psi(-1)g(\psi(0))$, para $\psi \in C$.

Com isto,

$$\dot{x}(t) = L(\alpha)x_t + f(\alpha)x_t$$

Observemos que $L(\alpha)\phi$ é linear e contínua em ϕ e continuamente diferenciável em α e a aplicação $f(\alpha)\psi$ é contínua em α, ψ .

Se $F(\alpha, \phi) = -\alpha\phi(-1)[1+g(\phi(0))]$ então podemos escrever a equação (3.1) como

$$\dot{x}(t) = F(\alpha, x_t)$$

e $F(\alpha, \phi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas em α , ϕ ; $F(\alpha, 0) = 0$ para todo $\alpha > 0$; F é localmente lipschitziana com relação a ϕ e portanto temos unicidade de soluções para equação (3.1).

Mostraremos que para $\alpha = \pi/2$, ocorrerá uma bifurcação de Hopf, isto é, existem soluções periódicas da equação (3.1), não nulas, com período próximo a 4, para α suficientemente próximo a $\pi/2$. Para isto precisaremos de informações sobre o comportamento dos zeros do polinômio característico associado a parte linear da equação (3.1), que é,

$$(3.2) \quad \dot{y}(t) = -\alpha y(t-1).$$

A equação característica associada a equação (3.2) será

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda(\alpha)) &= 0, \quad \text{onde} \quad \Delta(\lambda(\alpha)) = \lambda(\alpha) - \int_{-1}^0 d\eta(\theta) e^{\lambda(\alpha)\theta} = \\ &= \lambda(\alpha) - L(\alpha)(e^{\lambda(\alpha) \cdot}) = \\ &= \lambda(\alpha) + \alpha e^{-\lambda(\alpha)} \end{aligned}$$

e com isto teremos

$$(3.3) \quad \lambda(\alpha) e^{\lambda(\alpha)} = -\alpha$$

As informações que necessitaremos estão contidas no seguinte resultado:

Lema 3.1

Se $0 < \alpha < \pi/2$, cada raiz da equação (3.3) tem parte real negativa. Se $\alpha > e^{-1}$, existe uma raiz, $\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\sigma(\alpha)$

da equação (3.3) que é continuamente diferenciável em α , e satisfaz, $0 < \sigma(\alpha) < \pi$, $\sigma(\pi/2) = \pi/2$, $\gamma(\pi/2) = 0$, $\gamma'(\pi/2) > 0$, $\gamma(\alpha) > 0$ para $\alpha > \pi/2$.

Demonstração

De acordo com [7, pag. 339] todas as raízes da equação $ze^z + ae^z + b = 0$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ tem parte real negativa se e somente se $a > -1$, $a+b > 0$ e $b < \xi \operatorname{sen} \xi - a \cos \xi$, onde ξ é raiz de $\xi = -a \operatorname{tg} \xi$, $0 < \xi < \pi$ se $a \neq 0$ e $\xi = \pi/2$ se $a = 0$.

Assim escrevendo a equação (3.3) como

$$\lambda(\alpha) e^{\lambda(\alpha)} + \alpha e^{\lambda(\alpha)} + \alpha = 0$$

para $0 < \alpha < \pi/2$, concluímos, pelo resultado acima, que $\operatorname{Re} \lambda(\alpha) < 0$.

Para o restante da prova, definamos $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\rho(\mu) = -\mu e^\mu$. Então ρ é continuamente diferenciável e $\rho'(\mu) = -(1+\mu)e^\mu$, portanto $\rho'(\mu) > 0$ para $\mu < -1$, $\rho'(-1) = 0$ e $\rho'(\mu) < 0$ para $\mu > -1$. Logo ρ tem um máximo em $\mu = -1$, dada por e^{-1} . Portanto a equação (3.3) não tem raízes reais para $\alpha > e^{-1}$. Se $\alpha > e^{-1}$ e $\lambda = \gamma + i\sigma$ satisfaz a equação (3.3) então $\lambda e^\lambda = -\alpha$, logo $\gamma + i\sigma = -\alpha e^{-(\gamma+i\sigma)}$ e tomando-se $\gamma = -\mu$, obtemos

$$\begin{cases} \mu = \alpha e^\mu \cos \sigma \\ \sigma = \alpha e^\mu \operatorname{sen} \sigma \end{cases}$$

ou ainda,

$$\frac{\mu}{\sigma} = \cot \sigma \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\sigma}{e^\mu \operatorname{sen} \sigma} = \frac{\sigma e^{-\sigma \cot \sigma}}{\operatorname{sen} \sigma} \stackrel{\text{def}}{=} f(\sigma),$$

$$0 < \sigma < \pi$$

Observemos que:

(i) $f(\sigma) > 0$ para $0 < \sigma < \pi$.

(ii) $f(\sigma)$ é diferenciável em σ , para $0 < \sigma < \pi$ e

$$f'(\sigma) = \left\{ \operatorname{sen} \sigma \left\{ e^{-\sigma \cot \sigma} + \sigma (e^{-\sigma \cot \sigma}) \left[-\cot \sigma - \sigma \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \right) \right] \right\} - \right. \\ \left. - \sigma e^{-\sigma \cot \sigma} \cos \sigma \right\} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma}.$$

$$(iii) \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} = \frac{(1 - \sigma \cot \sigma)^2 + \sigma^2}{\sigma^2} > 0 \quad \text{para } 0 < \sigma < \pi.$$

Logo de (i) e (iii), concluímos que f é estritamente crescente em $(0, \pi)$. Além disso, $f(\sigma) \rightarrow \infty$ quando $\sigma \rightarrow \pi^-$ e $f(\sigma) \rightarrow e^{-1}$ quando $\sigma \rightarrow 0^+$. Portanto, existe exatamente um valor $\sigma = \sigma(\alpha)$, $0 < \sigma(\alpha) < \pi$, tal que $f(\sigma(\alpha)) = \alpha$, se $\alpha > e^{-1}$. Seja $\gamma(\alpha) = -\sigma(\alpha) \cot \sigma(\alpha)$. As funções $\sigma(\alpha)$ e $\gamma(\alpha)$ são continuamente diferenciáveis em α , pois f é continuamente diferenciável, tem inversa em $(0, \pi)$ e $f^{-1}(\alpha) = \sigma(\alpha)$.

Como $f(\pi/2) = \pi/2$, temos que $\sigma(\pi/2) = \pi/2$, logo $\gamma(\pi/2) = 0$ e se $\alpha > \pi/2 > e^{-1}$ temos que $\sigma(\alpha) > \pi/2$, portanto $\gamma(\alpha) > 0$ para $\alpha > \pi/2$.

Derivando ambos os membros da equação (3.3), em relação a α , obtemos

$$\lambda'(\alpha) e^{\lambda(\alpha)} + \lambda(\alpha) \lambda'(\alpha) e^{\lambda(\alpha)} = -1$$

Calculando em $\alpha = \pi/2$ e usando o fato que $\lambda(\pi/2) = \gamma(\pi/2) + i\sigma(\pi/2) = i\pi/2$, segue que

$$\gamma'(\pi/2) = \frac{\pi/2}{1 + (\pi/2)^2} > 0,$$

concluindo a demonstração do Lema.

Com isto temos o:

Teorema 3.2

A equação (3.1) tem uma bifurcação de Hopf em $\alpha = \pi/2$.

Demonstração

Vimos que $F(\alpha, \phi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas com relação a α, ϕ e $F(\alpha, 0) = 0$ para $\alpha > 0$ e do Lema 3.1 segue que:

(H1) A EDR($L(\pi/2)$) linear autônoma, tem uma raiz característica simples, $\lambda(\pi/2) = i\pi/2$, imaginária pura e toda raiz característica $\lambda(\alpha) \neq \lambda(\pi/2)$, $\bar{\lambda}(\pi/2)$ satisfaz $\lambda(\alpha) \neq m\lambda(\pi/2)$, $m \in \mathbb{Z}$.

(H2) $\text{Re}\lambda'(\pi/2) = \gamma'(\pi/2) > 0$.

Logo estamos nas condições do Teorema 2.1 e com isto podemos concluir que existem constantes $a_0, \alpha_0, \delta_0 > 0$, funções $\alpha(a)$ e $\omega(a) \in \mathbb{R}$, $x^*(a)$, $\omega(a)$ -periódica, todas continuamente diferenciáveis para $|a| < a_0$, tal que $x^*(a)$ é solução da equação (3.1). Podemos concluir também que o período destas soluções estão próximas de 4.

Exemplo 2

Consideremos a equação escalar

$$(3.4) \quad \dot{x}(t) = -\alpha x(t-1) [1+x(t)]$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $L(\alpha) : C \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $L(\alpha)\phi = -\alpha\phi(-1)$, $f(\alpha) : C \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(\alpha)\phi = -\alpha\phi(-1)\phi(0)$ então a equação (3.3) é equiva-

lente a

$$\dot{x}(t) = L(x_t) + f(x_t).$$

A equação característica associada a parte linear de (3.4) é

$$(3.5) \quad \lambda(\alpha) e^{\lambda(\alpha)} = -\alpha.$$

Nosso próximo passo é mostrar que a equação (3.4) tem solução periódica, não constante, para $\alpha > \pi/2$. Para isto, usaremos o Teorema 2.3 dado no capítulo anterior.

Seja $x(\phi, \alpha)$ a solução da equação (3.1) passando por ϕ . Se $\phi(0) > -1$ então $x(\phi, \alpha)(t) > -1$ para $t \geq 0$, e não existe $t_0 > 0$ tal que $x(\phi, \alpha)(t) = 0$ para $t \geq t_0$, a menos que $\phi = 0$.

Definição 3.3

Diremos que os zeros de $x(\phi, \alpha)(t)$ são *limitados* se $x(\phi, \alpha)$ tem somente um número finito de zeros positivos.

Com isto temos o:

Lema 3.4

- (i) Se $\phi(0) > -1$ e os zeros de $x(\phi, \alpha)(t)$ são limitados então $x(\phi, \alpha)(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.
- (ii) Se $\phi(0) > -1$ então $x(\phi, \alpha)$ é limitada. Além disso, se os zeros de $x(\phi, \alpha)$ não são limitados então qual quer máximo de $x(\phi, \alpha)(t)$, $t > 0$ é menor do que $e^{\alpha-1}$.
- (iii) Se $\phi(0) > -1$ e $\alpha > 1$, então os zeros de $x(\phi, \alpha)$ não são limitados.

- (iv) Se $\phi(\theta) > 0$, $-1 < \theta < 0$, ou $\phi(0) > -1$ e $\phi(\theta) < 0$, $-1 < \theta < 0$, então os zeros de $x(\phi, \alpha)$, se existirem, serão simples e a distância de um zero ao próximo zero é maior ou igual a 1.

Demonstração

De (i)

Suponhamos que exista $t_1 > 0$ tal que $x(t) = x(\phi, \alpha)(t)$ tem sinal constante para $t \geq t_1 - 1$, que existe pois os zeros de $x(\phi, \alpha)(t)$ são limitados.

Como $x(t) > -1$, para $t \geq 0$, pois $\phi(0) > -1$, segue que $\dot{x}(t)x(t-1) < 0$ para $t \geq t_1$. Se $x(t) > 0$ para $t \geq t_1$ então $\dot{x}(t) < 0$ para $t \geq t_1$ e portanto, $x(t)$ é estritamente decrescente e não se anula para $t \geq t_1$, logo $x(t) \rightarrow a$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum $a \geq 0$. Se $x(t) < 0$ para $t \geq t_1$ então $\dot{x}(t) > 0$ para $t \geq t_1$, portanto, $x(t)$ é estritamente crescente para $t \geq t_1$ e não se anula para $t \geq t_1$, logo $x(t) \rightarrow b$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum $b \leq 0$. Portanto, $x(t)$ é limitada e aproxima-se, monotonicamente de um ponto limite, quando $t \rightarrow \infty$, isto implica que $\dot{x}(t)$ é limitada e $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo, $-\alpha x(t-1)[1+x(t)] \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, implicando que ou $x(t-1) \rightarrow 0$ ou $x(t) \rightarrow -1$, quando $t \rightarrow \infty$. Como $x(t) \not\rightarrow -1$ quando $t \rightarrow \infty$ segue que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

De (ii)

Temos que $x(t)$ satisfaz

$$(3.6) \quad 1+x(t) = (1+x(t_0)) \exp\left(-\alpha \int_{t_0-1}^{t-1} x(s) ds\right) \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Se os zeros de $x(t)$ são limitados então (i) implica que $x(t)$ é limitada. Se os zeros de $x(t)$ não são limitados então existe uma seqüência de subintervalos I_k de $[0, \infty)$, não sobrepostos, tal que $x(t)$ é zero nos extremos de cada subintervalo e tem sinal constante em I_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Logo existe $t_k \in I_k$ tal que $x(t_k)$ é máximo ou mínimo em I_k , para cada $k = 0, 1, 2, \dots$; portanto, $0 = \dot{x}(t_k) = -\alpha x(t_k - 1) [1 + x(t_k)]$, implicando que $x(t_k - 1) = 0$, pois $x(t_k) > -1$, conseqüentemente, a equação (3.6) implica, para $t_0 = t_k - 1$ e $t = t_k$, que $1 + x(t_k) < e^\alpha$, isto é, $x(t_k) < e^\alpha - 1$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, logo $x(t) < e^\alpha - 1$ para $t > 0$.

De (iii)

Suponhamos, por absurdo, que os zeros de $x(t)$ são limitados, então por (i) segue que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e portanto existe $t_0 > 0$ tal que $\alpha(1 + x(t)) > 1$, para $t \geq t_0$ e $x(t)$ tem sinal constante para $t \geq t_0$. Assim,

$$\dot{x}(t)x(t-1) = -\alpha x^2(t-1) [1 + x(t)] < 0 \quad \text{para } t \geq t_0 + 1$$

e $x(t) \rightarrow 0$, monotonicamente, quando $t \rightarrow \infty$.

Se $x(t) > 0$ em $[t_0, \infty)$ temos que

$$x(t_0 + 3) - x(t_0 + 2) = \int_{t_0 + 2}^{t_0 + 3} \dot{x}(s) ds < -x(t_0 + 2) < 0$$

portanto $x(t_0 + 3) < 0$, o que é um absurdo, pois $x(t)$ é positiva. Um raciocínio análogo para $x(t) < 0$ em $[t_0, \infty)$ nos levará a uma contradição. Portanto os zeros de $x(t)$ não são limitados.

De (iv)

Suponhamos que $x(t_0) = 0$ e $x(t) > 0$ para $t_0 - 1 < t < t_0$.

Então para $t_0 < t < t_0 + 1$ temos que $\dot{x}(t) < 0$. Analogamente, se $x(t) < 0$ para $t_0 - 1 < t < t_0$ então $\dot{x}(t) > 0$ para $t_0 < t < t_0 + 1$. Portanto não existirá um zero de $x(t)$ em $(t_0, t_0 + 1]$, logo a distância até o próximo zero, de $x(t)$, será maior ou igual a 1, concluindo a demonstração do Lema.

Consideremos

$$K = \{\phi \in C : \phi(\theta) \geq 0, -1 < \theta < 0, \phi(-1) = 0 \text{ e } \phi \text{ não decrescente}\}.$$

Então K é um cone em C .

Se $\alpha > 1$ e $\phi \in K$, $\phi \neq 0$ então seja

$$z(\phi, \alpha) = \min \{t : x(\phi, \alpha)(t) = 0 \text{ e } \dot{x}(\phi, \alpha)(t) > 0\}.$$

Temos que $z(\phi, \alpha) > 1$ e além disso do Lema 3.4 segue que $x(\phi, \alpha)(t)$ é positiva e não decrescente em $(z(\phi, \alpha), z(\phi, \alpha) + 1)$.

Definamos $\tau : (K \setminus \{0\}) \times (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ por $\tau(\phi, \alpha) = z(\phi, \alpha) + 1$. Então τ é contínua e temos o:

Lema 3.5

A aplicação $\tau(\phi, \alpha)$, definida acima, é completamente contínua.

Demonstração

Afirmamos que uma solução $x = x(\phi, \alpha)$, para $\phi \in K$ e $\alpha > 1$, não pode demorar um tempo maior do que 2 para tornar-se negativa, pois se $x(1) = \eta > 0$, pela equação (3.6), teremos que

$$x(2) \leq (1 + \eta)e^{-\alpha\eta} - 1 < 0$$

pois $h(\eta) = (1+\eta)e^{-\alpha\eta} - 1$ satisfaz:

$$h(0) = 0 \quad \text{e} \quad h'(\eta) = (-\alpha - \alpha\eta + 1)e^{-\alpha\eta}.$$

Como $\alpha > 1$ e $\eta > 0$ temos que $h'(\eta) < 0$, logo $h(\eta) < 0$ para $\eta > 0$.

$$\therefore x(2) < 0.$$

Para cada $B \subset K$ limitado, $\phi \in B$, $\alpha > 1$ seja $t_0(\phi, \alpha) \leq 3$, o ponto onde $x = x(\phi, \alpha)$ tem um mínimo. Como $t_0(\phi, \alpha) \geq 1$, o conjunto $H(\alpha) = \overline{\bigcup_{\phi \in B} x_{t_0(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha)} \subset C$ é compacto, pois é uniformemente limitado e equicontínuo.

Temos que $H(\alpha) \subset K_1 = \{\phi \in C : -1 < \psi(\theta) \leq 0, -r \leq \theta \leq 0 \text{ e } \psi \text{ não crescente}\}$.

Definindo $\tau_1 : (K_1 \setminus \{0\}) \times (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ por $\tau_1(\alpha) = \min\{t > 0 : x(\psi, \alpha)(t) = 0\}$, temos que τ_1 é contínua. Se provarmos que $\tau_1(H(\alpha) \setminus \{0\}, \alpha)$ é limitado para cada $\alpha \in (1, \infty)$ então teremos que $\tau(B \setminus \{0\}, \alpha)$ será limitado para cada $\alpha \in (1, \infty)$. Como $H(\alpha) \setminus \{0\} \subset H(\alpha)$ então

$$\tau_1(H(\alpha) \setminus \{0\}, \alpha) \subset \tau_1(H(\alpha), \alpha),$$

mas $H(\alpha)$ é compacto e τ_1 é contínua, portanto $\tau_1(H(\alpha), \alpha)$ é limitado para cada $\alpha \in (1, \infty)$. Logo $\tau(B \setminus \{0\}, \alpha)$ é limitado para cada $\alpha \in (1, \infty)$.

Se $A \subset (1, \infty)$ é limitado e fechado então A é compacto e como τ é contínua segue que $\tau(\phi, A)$ é limitado em $\mathbb{R}$. Logo τ é completamente contínua.

Para $\alpha > 1$, definamos $A(\alpha) : K \rightarrow C$ por

$$A(\alpha)\phi = \begin{cases} 0 & \text{se } \phi = 0 \\ x_{\tau(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha) & \text{se } \phi \neq 0 \end{cases}$$

Então $A(\alpha)K \subset K$ e além disso temos o:

Lema 3.6

A aplicação $A(\alpha) : K \rightarrow K$ definida acima é completamente contínua.

Demonstração

Temos que $A(\alpha) : K \rightarrow K$ é contínua pois $\tau(\phi, \alpha)$ é contínua e as soluções da equação (3.4) dependem continuamente em relação as condições iniciais.

Para mostrarmos que $A(\alpha)$ leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compacto usaremos o Teorema de Ascoli-Arzelà.

Se $B \subset K$ é limitado então a parte (ii) e (iii) do Lema 3.4 implica que:

$$|A(\alpha)\phi| = |x_{\tau(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha)| < e^{\alpha} - 1, \text{ pois } \alpha > 1.$$

Portanto $A(\alpha)B$ é uniformemente limitado.

Além disso $A(\alpha)B$ é equicontínuo, pois se $x_{\tau(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha) \in A(\alpha)B$, temos que

$$D_{\theta} x_{\tau(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha) < \alpha(e^{\alpha} - 1) [1 - (e^{\alpha} - 1)],$$

logo a derivada dos elementos de $A(\alpha)B$ são uniformemente limitadas implicando que $A(\alpha)B$ é equicontínuo. Logo $A(\alpha)B$ é relativamente compacto, mostrando que $A(\alpha)$ é completamente contínua.

Seja $\lambda(\alpha)$ a raiz da equação (3.5) dada pelo Lema 3.1, $C = P_{\lambda(\alpha)} \oplus Q_{\lambda(\alpha)}$ a decomposição de C pelo autovalor $\lambda(\alpha)$,

$\pi_{\lambda(\alpha)}$ a projeção de C em $P_{\lambda(\alpha)}$. Então temos o:

Lema 3.7

Se J_0 é um subconjunto compacto de $(1, \infty)$ então

$$\mu = \inf\{|\pi_{\lambda(\alpha)}\phi| : \phi \in K, |\phi| = 1 \text{ e } \alpha \in J_0\} > 0.$$

Demonstração

Sejam $\lambda = \lambda(\alpha)$ a solução da equação (3.3) dada pelo Lema 3.1, $\phi(\theta) = \frac{e^{\lambda\theta}}{1+\lambda}$, $-1 \leq \theta \leq 0$ e $\psi(s) = e^{-\lambda s}$, $0 \leq s \leq 1$ e consideremos $\Phi = (\phi, \bar{\phi})$ e $\Psi = (\psi, \bar{\psi})$.

A equação adjunta formal da equação (3.2) é

$$\dot{z}(t) = \alpha z(t+1).$$

Temos que:

$$\begin{aligned} (\psi, \phi) &= \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 d\eta(\theta) \int_0^\theta \psi(\xi-\theta)\phi(\xi) d\xi = \\ &= \psi(0)\phi(0) - \alpha \int_{-1}^0 \psi(\xi+1)\phi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\text{e } (\Psi, \Phi) = I_2 = \text{identidade de ordem 2.}$$

Portanto, para $\eta \in C$ temos que $\pi_{\lambda}\eta = \Phi(\Psi, \eta)$.

Agora,

$$\begin{aligned} &\inf\{|\pi_{\lambda}\eta| : \eta \in K, |\eta| = 1, \alpha \in J_0\} = \\ &= \inf\{|\Phi(\Psi, \eta)| : \eta \in K, |\eta| = 1, \alpha \in J_0\} > 0, \end{aligned}$$

pois

$$(\Psi, \eta) = \begin{bmatrix} (\psi, \eta) \\ (\bar{\psi}, \eta) \end{bmatrix}$$

e como (ψ, η) e $(\bar{\psi}, \eta)$ são complexos conjugados, basta olhar mos para (Ψ, η) . Se $\eta \in K$ e $|\eta| = 1$ então $\eta(-1) = 0$, η é não decrescente, contínua, logo $\eta(0) = 1$ e portanto temos

$$(\psi, \eta) = \psi(0)\eta(0) - \alpha \int_{-1}^0 \psi(\xi+1)\eta(\xi) d\xi = R(\eta) + iI(\eta),$$

onde $R(\eta) = 1 - \alpha \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\xi+1)} \cos \sigma(\xi+1) \eta(\xi) d\xi$ e

$$I(\eta) = \alpha - \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\xi+1)} \sin \sigma(\xi+1) \eta(\xi) d\xi$$

com $\lambda = \gamma + i\sigma$.

Visto que J_0 é compacto, existe $a > 0$ tal que $0 < a < \sigma = \sigma(\alpha) < \pi - a$ para $\alpha \in J_0$.

Suponhamos, por absurdo, que exista uma seqüência (η_n) , $\eta_n \in K$, com $\eta_n(0) = 1$ e uma seqüência (α_n) em J_0 tal que $(\psi, \eta_n, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi, \eta_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Podemos supor que $\alpha_n \rightarrow \beta$ quando $n \rightarrow \infty$, pois J_0 é compacto. Como $I(\eta_n) \rightarrow 0$ temos que $\eta_n(\theta) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $-1 \leq \theta \leq 0$. Assim $R(\eta_n) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, mas isto contraria o fato de $R(\eta_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo não existe (η_n) em K , com $\eta_n(0) = 1$ e (α_n) em J_0 tal que $(\psi, \eta_n, \alpha_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $\inf\{ |(\Psi, \eta)| : \eta \in K, |\eta| = 1, \alpha \in J_0 \} > 0$ e o Lema está provado.

Lema 3.8

Existe $M > 0$ tal que $A(\alpha)\phi = \lambda\phi$, para todo $\phi \in KNS_M$ então $\lambda < 1$.

Demonstração

Suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra, isto é, para todo $M > 0$, existe $\phi \in K \cap S_M$ tal que $A(\alpha)\phi = \lambda\phi$, para algum $\lambda \geq 1$. Tomando-se $M > e^\alpha - 1$, teremos que

$$|A(\alpha)\phi| = |\lambda\phi| = |\lambda||\phi| \geq |\phi| = M > e^\alpha - 1$$

Por outro lado, temos que

$$|A(\alpha)\phi| = |x_{\tau(\phi, \alpha)}(\phi, \alpha)| < e^\alpha - 1,$$

para toda $\phi \in K$, o que é um absurdo com a expressão acima, e o Lema está provado.

Estamos nas condições do Teorema 2.3 e com isto demonstrar o:

Teorema 3.9

Se $\alpha > \pi/2$ a equação (3,4) tem uma solução periódica não nula, com condição inicial em $K \setminus \{0\}$.

Observação 3.10

Outros exemplos, incluindo o exemplo acima, podem ser encontrados em [7; pag. 260-261].

Exemplo 3

Consideremos a equação

$$(3.5) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t)g(x_t, y_t) + h_1(x_t, y_t) \\ \dot{y}(t) = -x(t)g(x_t, y_t) + h_2(x_t, y_t) \end{cases}$$

onde $g, h_1, h_2 : \bar{C} \times \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas com $\bar{C} = C([-r, 0], \mathbb{R})$.

Seja $f : C \rightarrow R^2$ dada por

$$f(\phi) = \begin{bmatrix} \phi_2(0)g(\phi_1, \phi_2) + h_1(\phi_1, \phi_2) \\ -\phi_1(0)g(\phi_1, \phi_2) + h_2(\phi_1, \phi_2) \end{bmatrix}$$

onde $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in C = C([-r, 0], R^2).$

Então se $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, temos que a equação (3.5)

é equivalente a equação

$$\dot{X}(t) = f(X_t).$$

Sejam $0 < k_1 < k_2$ e $F = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq k_1 x_1 \leq x_2 \leq k_2 x_1\}$ o cone em R^2 determinado por k_1, k_2 , cujo ângulo de abertura é $\xi = \arctg k_2 - \arctg k_1$, com $0 < \xi < \pi$.

Seja

$$K_o = \{\phi : \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in C : k_1 \phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta) \leq k_2 \phi_1(\theta)\}$$

um cone em C e $K = K_o \cap \overline{B(0, a)}$ o cone truncado pela bola fechada de centro zero e raio a em C . ($a > 0$).

Suponhamos que:

(1) Se $\phi \in C_a$ então $h_1(\phi) = h_2(\phi) = 0$, para algum $a > 0$.

(2) Para toda $\phi \in C_a$ com $\phi(0) \in F$ temos que

$$|g(\phi)| < \frac{\xi}{2r} = M.$$

(3) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $|g(\phi)| > \varepsilon$ para toda $\phi \in C_a$.

Observemos que com estas condições:

(i) Se $\phi \in C_a$ com $\phi(0) \in F$ então de (1) e (2) segue que

$$\begin{aligned} |f(\phi)| &= |\phi_2(0)g(\phi)| + |\phi_1(0)g(\phi)| \leq \\ &\leq 2|\phi||g(\phi)| < 2aM \end{aligned}$$

Além disso, como $\phi(0) \in S^1(a)$ temos

$$|f(\phi)| = |\phi_2(0)g(\phi)| + |\phi_1(0)g(\phi)| > 0.$$

Logo $0 < |f(\phi)| < \frac{a\xi}{r}$ se $\phi \in C_a$ com $\phi(0) \in F$.

(ii) C_a é invariante pela aplicação solução, $T(t)$, associada a equação (3.5), pois se

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

é uma solução da equação (3.5) temos que:

$$x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) = x(t)h_1(x_t) + y(t)h_2(x_t).$$

Logo, por (1), para toda condição inicial em C_a teremos

$$x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) = 0, \text{ assim } x^2(t) + y^2(t) = a^2.$$

Portanto toda solução com condição inicial em C_a , permanecerá em C_a .

(iii) Se $\phi \in K \cap C_a$ então $T(t)\phi(0)$ cobre $S^1(a)$, para $t \geq r$, pois se $\phi \in K \cap C_a$ temos que

$$T(t)\phi(0) = \begin{bmatrix} x(\phi)(t) \\ y(\phi)(t) \end{bmatrix} \in S^1(a),$$

pois C_a é $T(t)$ -invariante. De (3) segue que ou $g(\phi) > \varepsilon$ ou $g(\phi) < -\varepsilon$, assim $\dot{x}(t)$ tem o mesmo sinal de $y(t)$ e $\dot{y}(t)$ tem sinal contrário de $x(t)$, ou vice-versa e tanto $\dot{x}(t)$ como $\dot{y}(t)$ não tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$, assim $T(t)\phi(0)$ percorre $S^1(a)$ horário ou anti-horário e portanto

$$S^1(a) \subset \bigcup_{t > r} T(t)\phi(0)$$

Logo as hipóteses do Teorema 2.4 estão satisfeitas e podemos concluir que existe uma solução periódica, não constante, da equação (3.5) em C_a .

Observação 3.11

É fácil exhibir funções g, h_1 e h_2 nas condições especificadas acima. Por exemplo:

$$g : C \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } g(\phi) = \frac{\xi}{2a} \left| \int_{-r}^0 \phi(s) ds \right| + \varepsilon, \phi \in C$$

e

$$h_1, h_2 : C \rightarrow \mathbb{R} \text{ dadas: } h_1(\phi) = h_2(\phi) = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - a^2$$

onde

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in C \text{ e } a > 0.$$

A idéia do exemplo 3 baseia-se num exemplo contido em [2; pag. 31].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Banks, H.T. - The Representation of Solutions of Linear Differential Equations. Journal of Diff. Eq. 5(1966), 399-410.
- [2] - Baroni, R.L.S. - Tese de Doutorado apresentada ao ICMSC-USP, 1983.
- [3] - Butzer, P.L. and Berens, H. - Semi-groups of Operators and Approximation. Springer-Verlag, New York (1967).
- [4] - Cameron, R.H. and Martins, W.T. - Anunsymmetric Fubini Theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 47(1971), 121-125.
- [5] - Hale, J.K. - Ordinary Differential Equations. Wiley, (1969).
- [6] - Hale, J.K. - Functional Differential Equations. Applied Mathematics Sciences, Vol. 3, Springer-Verlag, New York, (1971).
- [7] - Hale, J.K. - Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York Inc., (1977).
- [8] - Hale, J.K.; Magalhães, L.T; Oliva, W.M. - An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems - Geometric Theory. Springer-Verlag, (1984). Applied Math. Series, 47.
- [9] - Kato, T. - Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, New York, (1976).
- [10] - Kolmogorov, A.N. y Folmin, S.V. - Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional. Editorial Mir-Moscu, (1972).
- [11] - Nussbaum, R. - Periodic Solutions of Some Nonlinear Autonomous Functional Differential Equations. Ann. Math. Pura Apl. 10(1974), 263-306.
- [12] - Onuchic, N. - Equações Diferenciais com Retardamento, 8.^o Colóquio Brasileiro de Matemática, (1971).
- [13] - Pazy, A. - Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Lecture Note # 10. University of Maryland (1974).
- [14] - Taylor, A.L. - Introduction to Functional Analysis. John Wiley & Sons, Inc. New York (1958).