BI-ESTABILIDADE E RETÂNGULOS INSCRITOS

Valdemir Antonio Zafalon

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos, 1989

BI-ESTABILIDADE E RETÂNGULOS INSCRITOS

Valdemir Antonio Zafalon
IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto

Dissertação de Mestrado

Orientador:
Prof.Dr. Claudio Martins Mendes

Aos meus pais, com carinho, pelo entusiasmo e coragem que demonstraram durante minha graduação e realização deste trabalho.

Quem nos dias de hoje, quiser lutar contra a mentira e a ignorância e escrever a verdade tem de superar ao menos cinco dificuldades. Deve ter a coragem de escrever a verdade, embora ela se encontre escamoteada em toda parte; deve ter a inteligência de reconhecê-la, embora ela se mostre permanentemente disfarçada; deve entender da arte de manejá-la como arma; deve ter a capacidade de escolher em que mãos será eficiente; deve ter a astúcia de divulgá-la entre os escolhidos.

- Bertolt Brecht

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Claudio Martins Mendes, pela dedicação e companheirismo demonstrados nos períodos de estudos e elaboração desta dissertação.

Aos Profs. Dr. José Antonio Salvador e Jair Salvador, que contam com o meu respeito e a minha admiração, pelo incentivo na escolha da minha profissão.

Aos Profs. Drs. Wilson M. Tadini e Sebastião A. Izar, pela disponibilidade e sugestões sempre tão precisas.

Ao Prof. Hermes A. Pedroso, à Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas, à Profa. Ângela Sitta e ao Prof. José Roberto Nogueira, que, cada um a sua maneira, deu sua contribuição para a realização desta dissertação.

Ao Paulo Augusto dos Santos pelo trabalho de edição do texto.

A Luciane Cristine da Cruz pela paciência ao ler este trabalho e pelas sugestões, mesmo não atuando na área de exatas.

A Leandra Paula Gerin, pelo carinho que me tem dedicado.

Este trabalho foi possível, graças ao apoio das entidades: FAPESP e CAPES.

BI-STABILITY AND INSCRIBED RECTANGLES

Valdemir Antonio Zafalon

Adviser : Prof. Dr. Claudio Martins Mendes

ABSTRACT

In this work we write in detail an example given for Leslie Wilson wich is mentioned in [7].

We prove that the caracterization given in [5] for the applications bi-stables $f : M \longmapsto \mathcal{R}^2$ is incorrect.

We still prove that the set of applications bi-stables is not dense.

Conteúdo

0 Pré-Requisitos **1**

0.1 A C^∞ - topologia de Whitney 1

0.2 Transversalidade 3

0.3 Estabilidade de aplicações 5

I Aplicações Bi-estáveis **11**

I.1 Bi-difeomorfismos 11

I.2 Bi-equivalência 12

I.3 Dobra (cúspide) transversa e dobra tangente 13

I.4 Aplicações bi-estáveis - "caracterização" 20

II A Instabilidade **21**

II.1 Retângulos inscritos 21

II.2 Teoremas de instabililidade 23

II.3 A prova do teorema II.2.1 26

III A Não Densidade **46**

III.1 Retângulos transversais a uma curva 46

III.2 Retângulos transversais - caracterização 53

III.3 Ação de um bi-difeomorfismo sobre uma curva com retângulo inscrito transverso 57

III.4 A não densidade das aplicações bi-estáveis 59

IV Generalizações **61**

IV.1 Circuitos 62

IV.2 Ação de um bi-difeomorfismo sobre curvas com circuito inscrito 64

IV.3 A construção de uma aplicação diferenciável 65

IV.4 Circuitos transversos 73

Bibliografia 82

Introdução

O objetivo desta dissertação é registrar detalhadamente um exemplo dado por Leslie Wilson e mencionado em [7]. O desenvolvimento deste exemplo se faz por meio de técnicas, estabelecendo, assim, importantes ferramentas que comprovam ser imperfeita a caracterização, apresentada em [5], para as aplicações bi-estáveis $f : M \longmapsto \mathcal{R}^2, f \in C^\infty$ com M variedade diferenciável compacta e de dimensão maior ou igual a 2 (dois). Estas ferramentas ainda fornecem condições para provar a não densidade das aplicações bi-estáveis.

Apresentaremos este trabalho em 5 (cinco) capítulos, assim dispostos :

Capítulo 0 - Contém requisitos básicos ao desenvolvimento do trabalho, a respeito de topologia diferencial.

Capítulo I - Fornece a noção e um breve estudo sobre bi-estabilidade. Além disso, a caracterização dada em [5] para aplicações bi-estáveis, $f : M \longmapsto \mathcal{R}^2$ com M compacta e de dimensão igual ou superior a 2 (dois).

Capítulo II - Desenvolve um estudo que permite comprovar a não veracidade da caracterização citada anteriormente.

Capítulo III - Neste capítulo apresentamos um estudo que comprova a não densidade das aplicações bi-estáveis $f : M \longmapsto \mathcal{R}^2$ com M compacta.

Capítulo IV - Aproveitamos as idéias contidas nos capítulos II e III para formular generalizações que fortalecem os principais resultados destes dois capítulos.

Gostaríamos de alertar que as idéias contidas nos capítulos II, III e IV não constam em bibliografia. As valiosas sugestões que permitiram o desenvolvimento desta dissertação foram enviadas por meio de correspondência pessoal aos professores Cláudio Martins Mendes e Luiz Antonio Fávaro, pelo matemático Leslie Wilson.

Capítulo 0

Pré-Requisitos

0.1 A C^∞ - topologia de Whitney

Sendo M e N variedades diferenciáveis de classe $C^r, 0 \leq r < \infty$, representaremos por C^r(M,N) o conjunto das aplicações de M em N de classe C^r.

Sejam $\Psi, \Phi, \mathcal{K}$ e Ω famílias indexadas por um mesmo conjunto Υ.

$\Phi = \{(\varphi_j, U_j)\}_{j\in\Upsilon}$ é uma família de cartas de M, localmente finita.

$\Psi = \{(\psi_j, V_j)\}_{j\in\Upsilon}$ é uma família de cartas de N.

$\mathcal{K} = \{K_j\}_{j\in\Upsilon}$ é uma família de compactos de M, onde $K_j \subset U_j, j \in \Upsilon$.

$\Omega = \{\varepsilon_j\}_{j\in\Upsilon}$ é uma família de números reais positivos.

0.1.1 Definição

Dada f $\in C^r$(M,N) e dadas famílias $\Psi, \Phi, \mathcal{K}$ e Ω, uma "vizinhança forte" básica de f é dada por :

$V^r(f, \Psi, \Phi, \mathcal{K}, \Omega) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} g \in C^r(M,N): \\ \qquad\qquad a)\, g(K_j) \subset V_j \\ \qquad\qquad b)\, \|D^k(\psi_j \circ f \circ \varphi_j{}^{-1})(x) - D^k(\psi_j \circ g \circ \varphi_j{}^{-1})(x)\| < \varepsilon_j \\ \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, r\,,\ \forall j \in \Upsilon\,, x \in \varphi_j(K_j) \end{array} \right\}$$

Todos os possíveis subconjuntos $V^r(f, \Psi, \Phi, \mathcal{K}, \Omega)$, em que Ψ, $\Phi, \mathcal{K}$ e Ω são explicitadas anteriormente, formam uma base de vizinhança para f. Variando f $\in C^r$(M,N) definimos uma topologia sobre C^r(M,N). Esta topologia é chamada de C^r - Topologia de Whitney, $0 \leq r < \infty$.

Consideremos as seguintes inclusões : C^∞(M,N)$\xrightarrow{i_r}$ C^r(M,N).

0.1.2 Definição

Definimos a C^∞ - Topologia de Whitney sobre C^∞(M,N), como sendo a reunião das topologias induzidas pelas i_r , $0 \leq r < \infty$.

Observações

a) C^∞(M,N) é visto como sub-espaço dos diferentes espaços C^r(M,N).

b) No transcorrer do texto pensaremos em C^∞(M,N) munido da C^∞ - Topologia de Whitney.

c) Neste "trabalho" nos interessará N = $\mathcal{R}^2$ e M variedade diferenciável compacta de dimensão igual ou superior a 2 (dois).

0.2 Transversalidade

O conceito de transversalidade desempenha um papel importante neste texto. Mais precisamente as noções de aplicação transversal a uma subvariedade e transversalidade entre aplicações.

0.2.1 Definição

Seja f $\in C^{\infty}(M,N)$ e W uma subvariedade de N. Diz-se que f é transversal a W em x $\in$ M, e denota-se por f$\pitchfork_x$ W, se :

a) f(M) $\cap$ W = $\emptyset$, ou

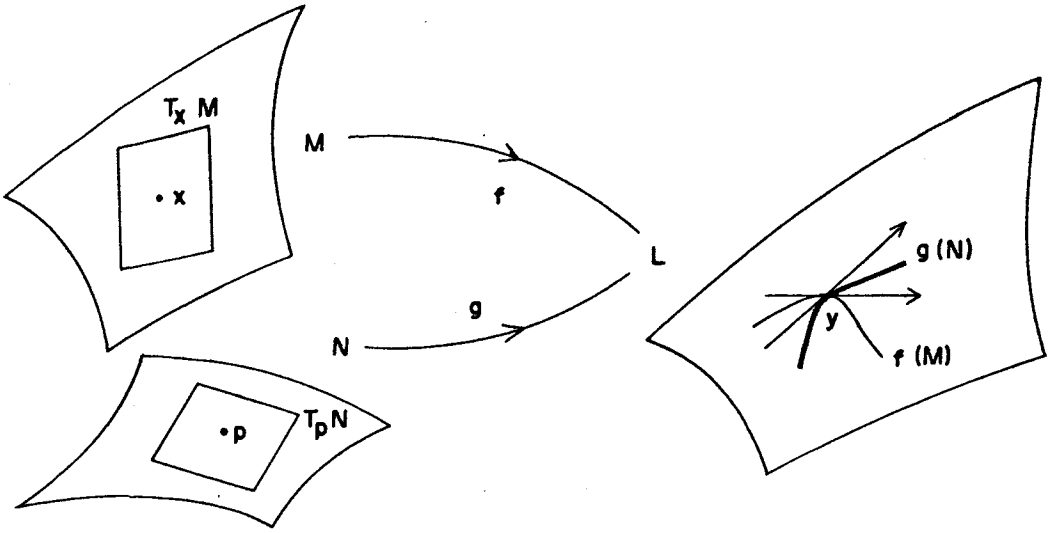
b) Se f(M) $\cap$ W $\neq$ $\emptyset$, $(df)_x(T_xM) + T_{f(x)}W = T_{f(x)}$N, onde $(df)_x : T_xM \to T_{f(x)}$N, para todo x $\in$ M tal que f(x) $\in$ W.

0.2.2 Definição

Sejam M, N e L variedades diferenciáveis. Diz-se que duas aplicações diferenciáveis f : M $\to$ L e g : N $\to$ L são transversais nos pontos x $\in$ M e p $\in$ N se f(x) = g(p) = y e $(df)_x(T_xM) + (dg)_p(T_pN) = T_yL$.

Notação: f $\pitchfork_{(x,p)}$ g

Ilustração



0.2.3 Proposição

Sejam f $\in$ C^∞(M,L) e g $\in$ C^∞(N,L) tais que f($\bar{x}$) = g($\bar{p}$) = y. Então, f $\pitchfork_{(\bar{x},\bar{p})}$ g se, e somente se, f $\times$ g : M $\times$ N $\rightarrow$ $L \times L$ definida por (f $\times$ g)(x,p) = (f(x),g(p)) é transversal à Δ = {(y,y) : y $\in$ L} em ($\bar{x}$,$\bar{p}$).

Vide [1]

0.2.4 Proposição

Se W é uma subvariedade fechada de N, então T(W) = { f $\in$ C^∞(M,N) : f $\pitchfork_x$ W } é aberto em C^∞(M,N).

Vide [2]

0.2.5 Proposição

Seja f $\in C^\infty$(M,L). O conjunto T(f) = { g $\in C^\infty$(N,L) : g $\mathcal{A}_{(x,p)}$ f } é aberto em C^∞(N,L).

Demonstração:

Fato: A aplicação $\lambda : C^\infty(N,L) \to C^\infty(M \times N, L \times L)$ definida por λ(g) = f $\times$ g onde f $\in C^\infty$(M,L) é fixa, é contínua.

Inicialmente observemos que
T(f) = { g : N $\to$ L : f $\times$ g $\mathcal{A}_{(x,p)}\Delta$}, por 2.3.

Façamos T(Δ) = {f $\times$ g : f $\times$ g$\mathcal{A}_{(x,p)}\Delta$}. Por 2.4, T($\Delta$) é aberto e daí, como T(f) = λ^{-1}(T(Δ)) concluímos que T(f) é aberto.

0.3 Estabilidade de aplicações

Neste "tópico" estamos interessados em definir o conceito de estabilidade e fornecer uma caracterização para as aplicações estáveis f $\in C^\infty$(M,N), N = $\mathcal{R}^2$.

0.3.1 Definição

a) Sejam f e g $\in C^\infty$(M,N). Dizemos que f é equivalente à g se existem difeomorfismos h : M $\to$ M e k : N $\to$ N tais que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "k"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

b) Uma aplicação f $\in C^{\infty}$(M,N) é dita estável se existe um aberto U contendo f, tal que toda g $\in$ U é equivalente à f.

A definição dada em 3.1 induz a uma relação de equivalência e as classes de equivalência podem ser completamente descritas. Naturalmente as aplicações estáveis formam um conjunto aberto. É também verdade que estas determinam um conjunto denso, quando M é compacta e dim M $\geq$ 2, como poderemos ver em 3.7.

Passemos, então, a fornecer as formas locais de um ponto regular, ponto de dobra e ponto de cúspide para f $\in C^{\infty}(M,\mathcal{R}^2)$, que serão úteis na caracterização das aplicações estáveis.

0.3.2 Definição

Se p é um ponto regular de f $\in C^{\infty}(M,\mathcal{R}^2)$, existem em torno de p e f(p) sistemas de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e (u,v), respectivamente, tal que f tem em 0 a forma:

$$\begin{cases} u = x_1 \\ v = x_2 \quad se\ n \geq 2, \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} u = x_1 \\ v = 0 \quad se\ n = 1 \end{cases}$$

0.3.3 Definição

Um ponto crítico p de f $\in C^{\infty}(M,\mathcal{R}^2)$ é um ponto de dobra se existem sistemas de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em torno de p e (u,v) em torno de f(p), tal que f tem em 0 a forma:

$$\begin{cases} u = x_1 \\ v = \pm\, {x_2}^2 \pm {x_3}^2 \pm \ldots \pm {x_n}^2. \end{cases}$$

(Forma Normal das Dobras)

0.3.4 Definição

Um ponto crítico p de f $\in C^{\infty}(M,\mathcal{R}^2)$ é de cúspide se existem sistemas de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em torno de p e (u,v) em torno de f(p), tal que f tem em 0 a forma:

$$\begin{cases} u = x_1 \\ v = \pm x_3{}^2 \pm x_4{}^2 \pm \ldots \pm x_n{}^2 - x_2{}^3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

(Forma Normal das Cúspides)

0.3.5 Definição

Dizemos que f $\in C^{\infty}(M,\mathcal{R}^2)$ é excelente se para cada p $\in \Sigma_f$ (conjunto dos pontos críticos de f), existem sistemas de coordenadas em torno de p e f(p) tal que f tem, em 0, a forma 3.3 ou 3.4.

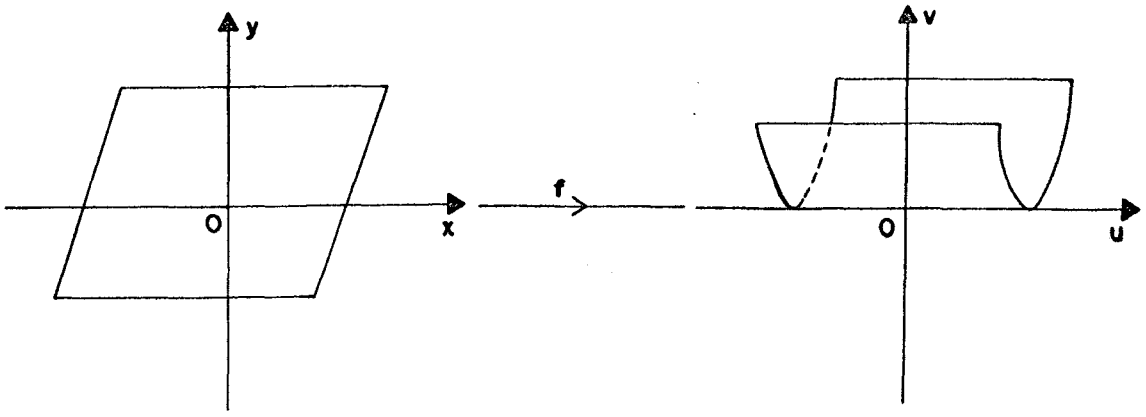
Vamos ilustrar as definições 3.3 e 3.4 fazendo M = $\mathcal{R}^2$

I - Considerando f:$\mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ (x,y) $\longmapsto$(u,v) = (x,y^2) temos

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$$

Daí, se y = 0 temos que (x,0) são pontos de Σ_f. Estes, são ditos pontos de dobra.

Ilustração

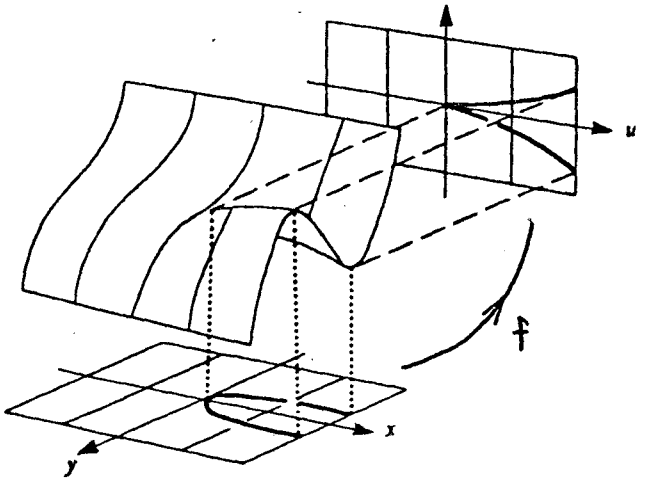


II - Considerando f : $\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ definida por f(x,y) = (u,v) = (x,y^3 - xy) temos:

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 3y^2 - x \end{bmatrix}.$$

Logo, os pontos de Σ_f são da forma ($3y^2$,y) e, desta maneira, os valores críticos de f são da forma: ($3y^2$,-$2y^3$). Se u = $3y^2$ e v = -$2y^3$ temos, y = $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}u^{\frac{1}{2}}$ e y = - $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}v^{\frac{1}{3}}$ e daí, $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}u^{\frac{1}{2}}$ = - $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}v^{\frac{1}{3}}$. Concluindo, chegamos a v = $\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}u^{\frac{3}{2}}$.

Ilustração



O resultado a seguir fornece uma caracterização das aplicações estáveis.

0.3.6 Teorema

Seja M uma variedade diferenciável n dimensional, n $\geq$ 2, compacta e f $\in C^{\infty}(M,\mathcal{R}^2)$. Então, f é estável se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

a) f é excelente

b) Se x e y são dois pontos de dobra tais que f(x) = f(y) então, $(df)_x(T_xS)$ e $(df)_y(T_yS)$ se interceptam transversalmente em $\mathcal{R}^2$. E ainda, as imagens das cúspides não interceptam as imagens das dobras ou de outras cúspides. O conjunto S denota a 1 - variedade de todos os pontos de dobra.

Finalmente, o resultado que segue nos informa sobre a densidade das aplicações estáveis.

0.3.7 Proposição

O conjunto $E^{\infty}(\mathrm{M},\mathcal{R}^2)$, das aplicações estáveis de M em $\mathcal{R}^2$, M compacta e dim M $\geq$ 2 é denso em $C^{\infty}(\mathrm{M},\mathcal{R}^2)$

Vide [8]

Capítulo I

Aplicações Bi-estáveis

I.1 Bi-difeomorfismos

I.1.1 Definição

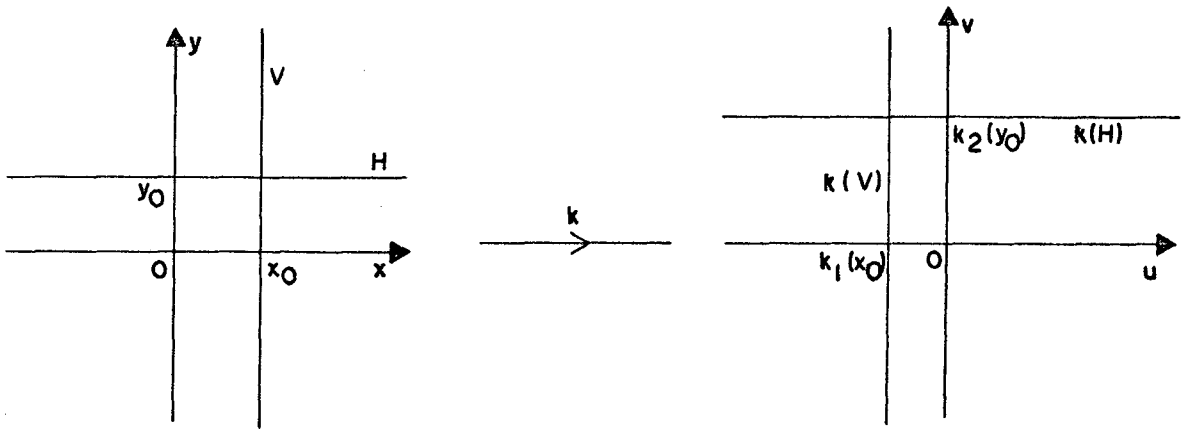
Seja k : $\mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ tal que k(x,y) = $(k_1(\mathrm{x});k_2(\mathrm{y}))$ onde, k_1 e k_2 são difeomorfismos C^∞ de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$. Ao difeomorfismo k, definido desta maneira, diz-se bi-difeomorfismo.

Um bi-difeomorfismo k tem a propriedade de "levar" retas horizontais (verticais) em retas horizontais (verticais).

Vejamos:

Se V = $\{(x_0,\mathrm{y}) : \mathrm{y} \in \mathcal{R}\}$ temos: k(V) = $\{\mathrm{k}(x_0,\mathrm{y}) : \mathrm{y} \in \mathcal{R}\}$ = $\{(k_1(x_0); k_2(\mathrm{y})) : \mathrm{y} \in \mathcal{R}\}$. Portanto, k(V) é difeomorfo ($\cong$) à $k_2(\mathcal{R})$ que, por sua vez, é $\cong$ à $\mathcal{R}$; sendo ainda que k(V) tem a primeira coordenada fixa. Da mesma maneira, se H = $\{(\mathrm{x},y_0) : \mathrm{x} \in \mathcal{R}\}$, teremos k(H) $\cong$ $\mathcal{R}$ com seus pontos apresentando a segunda coordenada fixa.

ilustração



I.2 Bi-equivalência

I.2.1 Definição

Sejam f, g $\in C^\infty(M,\mathcal{R}^2)$. Diremos que f é bi-equivalente a g se existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{R}^2 \arrow[d, "k"] \\ M \arrow[r, "g"] & \mathcal{R}^2 \end{tikzcd} ,$$

onde h é um difeomorfismo e k um bi-difeomorfismo.

Nota

O diagrama da definição anterior pode ser entendido da seguinte maneira:

$$f = (f_1, f_2) \qquad g = (g_1, g_2)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R} \arrow[d, "k_2"] & M \arrow[l, "f_2"'] \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{R} \arrow[d, "k_1"] \\
\mathcal{R} & M \arrow[l, "g_2"'] \arrow[r, "g_1"] & \mathcal{R}
\end{tikzcd}$$

Assim, podemos dizer que (f_1, f_2) é bi-equivalente a (g_1, g_2) se o diagrama acima comuta.

I.2.2 Definição

Uma aplicação $f \in C^\infty(M,\mathcal{R}^2)$ é dita bi-estável se existe um aberto U de f, tal que, toda $g \in U$ é bi-equivalente a f.

Nota

Uma aplicação f bi-estável, é também estável segundo a definição 3.1.

I.3 Dobra (cúspide) transversa e dobra tangente

Seja p um ponto de dobra (cúspide) de uma aplicação $f \in C^\infty(M,\mathcal{R}^2)$, dim M $\geq$ 2, dado como em 3.3 ou 3.4 do capítulo 0.

I.3.1 Definição

Diremos que p é um ponto de dobra transversa (respectivamente um ponto de cúspide transversa) se a imagem de $(df)_p$ for transversal aos dois sub-espaços $\mathcal{R} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathcal{R}$ do $\mathcal{R}^2$.

I.3.2 Definição

Se p é um ponto de dobra, diremos que p é um ponto de dobra tangente de f se a imagem de $(df)_p$ for tangente a um dos eixos.

O resultado que daremos a seguir fornece uma caracterização local das dobras (cúspides) transversas e dobras tangentes por bi-difeomorfismo.

I.3.3 Proposição

Seja f $\in C^\infty(\mathrm{M},\mathcal{R}^2)$, M compacta e dim M $\geq$ 2.

a) Se f admite p como ponto de dobra tangente, então f é, em p, localmente bi-equivalente a:

$$(y, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{f_1} (y^2 \pm \textstyle\sum_{i=2}^n x_i{}^2; y) \quad \text{ou}$$

$$(y, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{f_1} (y; y^2 \pm \textstyle\sum_{i=2}^n x_i{}^2) \quad \text{em } 0.$$

b) Se f admite p como ponto de dobra transversa, então f é, em p, localmente bi-equivalente a:

$$(y, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{f_2} (y \pm \textstyle\sum_{i=2}^n x_i{}^2; y) \quad \text{em } 0.$$

c) Se f admite p como ponto de cúspide transversa, então f é, em p, localmente bi-equivalente a:

$$(x, y, x_3, \ldots, x_n) \xmapsto{f_3} (x^3 + xy + y + y^2.\lambda(y) \pm \textstyle\sum_{i=3}^n x_i{}^2; y) \quad \text{em}$$

0, onde λ é uma aplicação diferenciável de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$.

Vide [5]

Já vimos em 3.6 o teorema que caracteriza as aplicações estáveis de M em $\mathcal{R}^2$. De fato, dobras tangentes e transversas são indistinguíveis via difeomorfismo. Já para os bi-difeomorfismos, que são mais restritivos, há uma distinção entre pontos de dobras tangentes e transversas, já que um não pode ser levado ao outro via bi-difeomorfismos.

A seguir, comprovaremos a veracidade dessas afirmações.

Tomemos por forma local de um ponto de dobra transversa àquela dada por $(y, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{f_2} (y \pm \sum_{i=2}^{n} {x_i}^2; y)$ e para o ponto de dobra tangente $(y, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{f_1} (y^2 \pm \sum_{i=2}^{n} {x_i}^2; y)$. Consideremos $\mathrm{h} : \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ dado por $\mathrm{h}(u, v) = (v^2 - v + u; v)$. Como

$$(dh)_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

concluímos que h é uma mudança de coordenadas, e ainda: $\mathrm{h}(y \pm \sum_{i=2}^{n} {x_i}^2; y) = (y^2 - \cancel{y} + \cancel{y} \pm \sum_{i=2}^{n} {x_i}^2; y) = (y^2 \pm \sum_{i=2}^{n} {x_i}^2; y)$.

$$\begin{tikzcd}
(y, x_2, \ldots, x_n) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & (y \pm \sum_{i=2}^{n} {x_i}^2; y) \arrow[d, "\mathrm{h(u,v)} = (v^2 - v + u, v)"] \\
(y, x_2, \ldots, x_n) \arrow[r, "f_1"] & (y^2 \pm \sum_{i=2}^{n} {x_i}^2; y)
\end{tikzcd}$$

Afirmação (*):

Um bi-difeomorfismo não leva ponto de dobra tangente em ponto de dobra transversa.

De fato, vamos admitir a existência de k(u,v) = (k_1(u),k_2(v)), um bi-difeomorfismo que desempenhe tal função. Assim, teríamos a

existência do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[d, "k_2"] & (y, x_2, \ldots, x_n) \arrow[l] \arrow[r, "\pi_1 \circ f_2"] \arrow[d, "h"] & (y \pm \sum_{i=2}^{n} x_i^2) \arrow[d, "k_1"] \\
y & (y, x_2, \ldots, x_n) \arrow[l] \arrow[r, "\pi_1 \circ f_1"] & (y^2 \pm \sum_{i=2}^{n} x_i^2)
\end{tikzcd}$$

Entretanto, (0,0,...,0) é ponto crítico de $\pi_1 \circ f_1$ e não é ponto crítico de $\pi_1 \circ f_2$. Como h e k_1 são difeomorfismos fica impossibilitado a existência de tal diagrama. Donde se conclui que um ponto de dobra transversa não pode ser levado por um bi-difeomorfismo num ponto de dobra tangente.

O que faremos agora é tomarmos as formas locais dos pontos de dobras tangentes e transversas para fazermos considerações geométricas a respeito de $(df_1)_0$ e $(df_2)_0$.

Com efeito:

a) Dobra transversa : $(y, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{f_2} (y \pm \sum_{i=2}^{n} x_i^2; y)$.

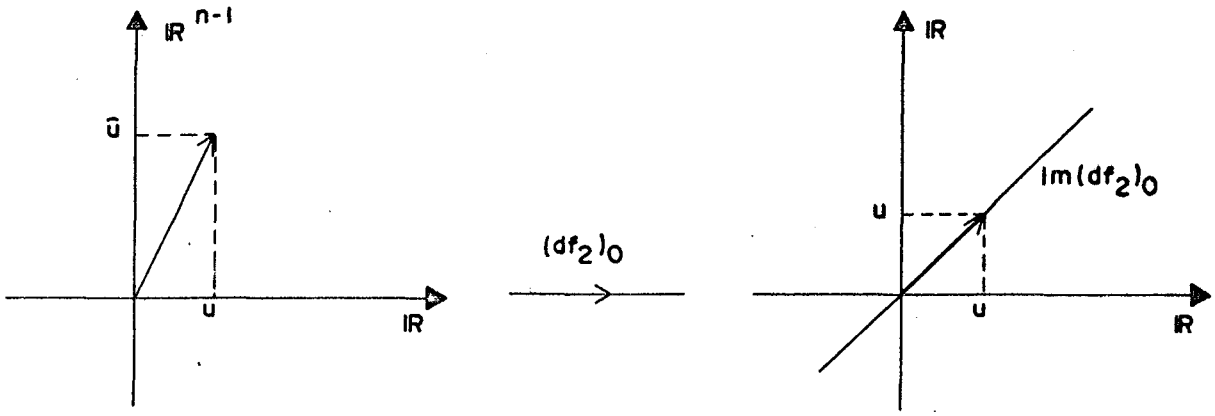
Temos,

$$(df_2)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

e daí,

$$(df_2)_0(u, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}$$

Ilustração



b) Dobra tangente : $(y, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{f_1} (y^2 \pm \sum_{i=2}^{n} x_i{}^2; y)$.

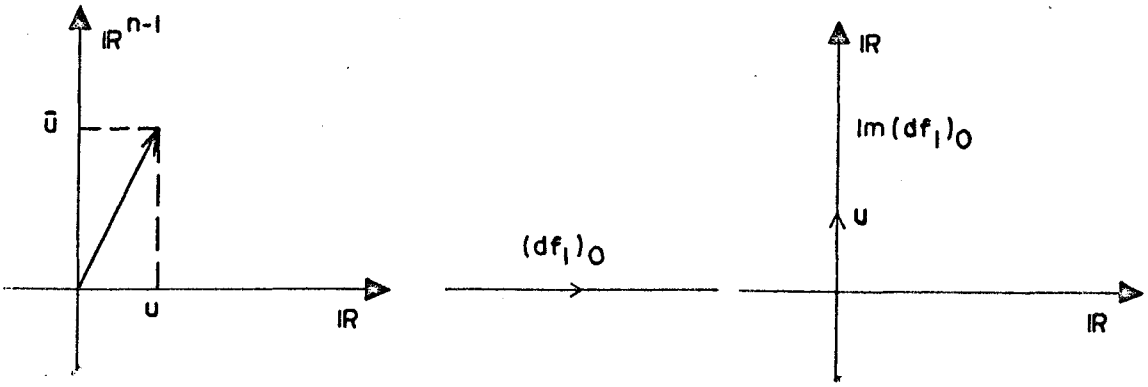
Temos,

$$(df_1)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

e daí,

$$(df_1)_0(u, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Ilustração



As considerações e interpretações geométricas feitas em a) e b) nos levam a:

a_1 - Necessariamente a imagem de $(df_2)_0$ é transversal aos dois eixos

a_2 - Necessariamente a imagem de $(df_1)_0$ é tangente a um dos eixos

Finalmente, de a_1 e a_2 concluimos que, para verificar se um ponto de dobra de uma aplicação f $\in C^\infty(\mathrm{M},\mathcal{R}^2)$ é tangente ou transversa, basta verificar se a imagem de $(df)_0$ tem inclinação $\theta = \frac{\pi}{2}$, 0 ou $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, 0.

O exemplo que daremos a seguir fornece uma boa noção das idéias expostas anteriormente.

I.3.4 Exemplo

Considere M $= S^2 = \{(\mathrm{x,y,z}) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $\pi : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ definida por $\pi(\mathrm{x,y,z}) = (\mathrm{x,y})$. Façamos f $= \pi_{/M}$.

Temos:

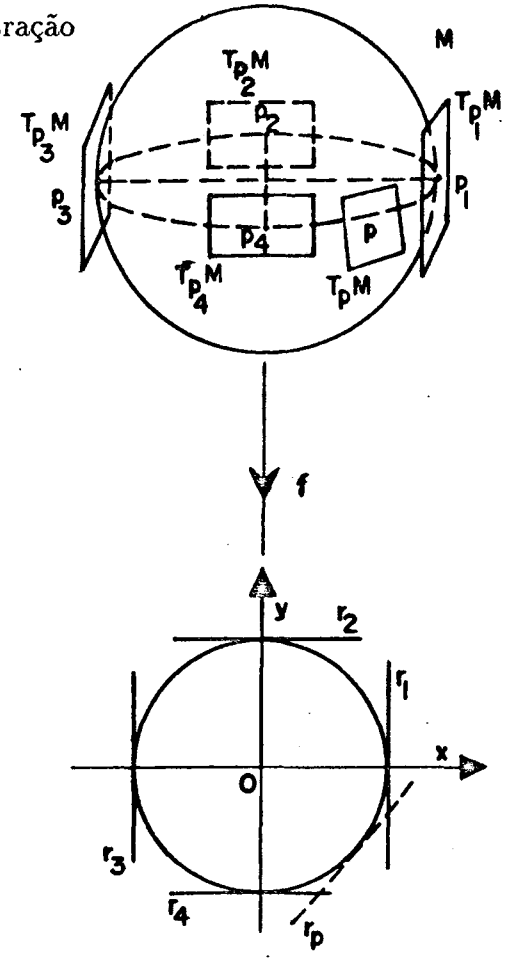
a) $\Sigma_f = S' = \{(x,y,0) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

b) $f(\Sigma_f) = S'' = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

c) Σ_f é uma curva de dobras

d) Na ilustração abaixo podemos verificar que: os pontos p_1, p_2, p_3 e $p_4 \in \Sigma_f$ são pontos de dobra tangente e todo $p \in \Sigma_f$, com $p \neq p_i$, i=1,2,3 e 4, é um ponto de dobra transversa.

Ilustração



$$r_i = (df)_{p_i}(T_{p_i}M) \quad \text{i=1,2,3 e 4 ;} \quad r_p = (df)_p(T_pM)$$

I.4 Aplicações bi-estáveis - "caracterização"

Em [5], J. P. Dufour caracteriza aplicações bi-estáveis f: M $\longrightarrow \mathcal{R}^2$, quando M é uma variedade diferenciável compacta e dim M $\geq$ 2. Entretanto, a caracterização não apresenta condições suficientes para tal.

No próximo capítulo apresentaremos resultados que comprovam essa afirmação.

A caracterização apresentada por Dufour é a seguinte:

I.4.1 Teorema

Uma aplicação f : M $\longrightarrow \mathcal{R}^2$ com M variedade diferenciável compacta e dim M $\geq$ 2 é bi-estável se, e somente se, os pontos p $\in \Sigma_f$ são pontos de dobras (cúspides) transversas ou pontos de dobras tangentes e $f_{/\Sigma_f}$ é injetiva.

Nota

A aplicação f do exemplo I.3.4 é bi-estável segundo a caracterização dada em I.4.1, entretanto veremos que isso não ocorre.

Capítulo II

A Instabilidade

Neste capítulo, demonstramos um importante teorema a respeito de conceitos de bi-estabilidade, com o objetivo de fundamentar a não-veracidade da caracterização dada em [5].

Para atingirmos esse objetivo, será necessário o desenvolvimento de importantes ferramentas.

II.1 Retângulos inscritos

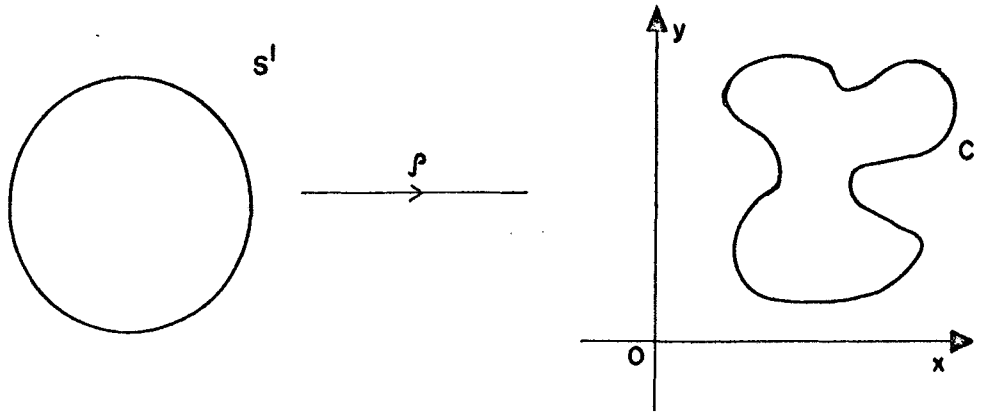
II.1.1 Definição

Diremos que R $\subset \mathcal{R}^2$ é um retângulo, se R for um retângulo com lados paralelos aos eixos O_x e O_y.

II.1.2 Definição

Uma curva C é a imagem de $\rho : S^1 \longrightarrow \mathcal{R}^2$, mergulho C^∞.

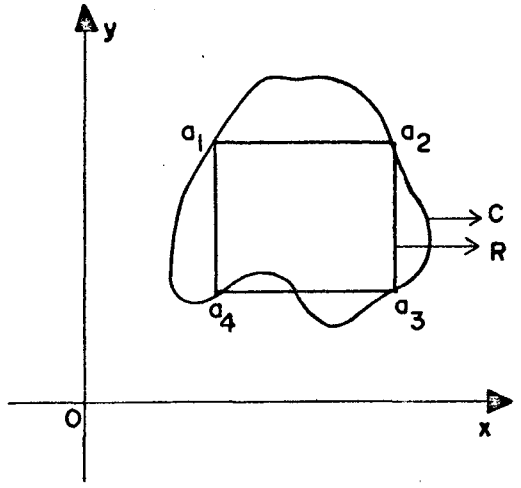
Ilustração



II.1.3 Definição

Um retângulo R é dito inscrito em uma curva $\mathcal{C}$, se seus vértices $a_{i's}$ $\in \mathcal{C}$, i=1,2,3 e 4.

Ilustração

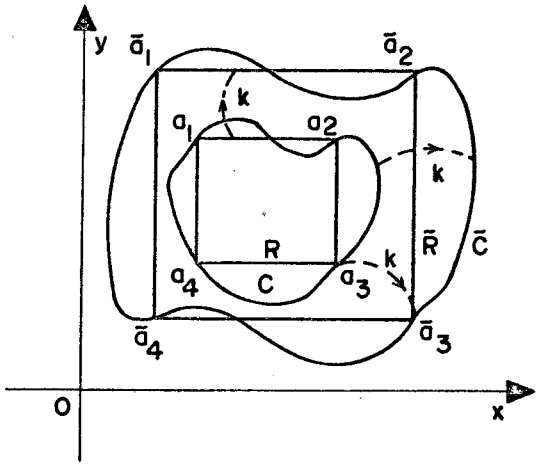


Observação

No texto, consideraremos os $a_{i's}$, i=1,2,3 e 4, nas posições apresentadas na ilustração.

O que faremos a seguir é fornecer uma noção intuitiva da ação de um bi-difeomorfismo k = $k_1 \times k_2$ sobre uma curva com retângulo inscrito. A consideração principal a ser feita é a seguinte: um retângulo R é "preservado" por um bi-difeomorfismo, isto é, k(R) é um retângulo (vide I.1.1). Sendo assim, este fato é suficiente para que o retângulo k(R) esteja inscrito na curva k($\mathcal{C}$).

Considere o fato geometricamente:



$$\tilde{a}_i = k(a_i) \quad \tilde{R} = k(R) \quad \tilde{\mathcal{C}} = k(\mathcal{C}).$$

II.2 Teoremas de instabililidade

Um resultado importante que surge das definições anteriores é o seguinte:

II.2.1 Teorema

Se $\mathcal{C}$ é uma curva com retângulo inscrito R, então, $\mathcal{C}$ é instável sob bi-equivalência.

A prova deste Teorema será feita mais adiante. A seguir, daremos uma aplicação deste resultado.

II.2.2 Teorema

Seja $f : M \longrightarrow \mathcal{R}^2$ com M uma variedade diferenciável compacta e dim $M \geq 2$, tal que $f(S_j(f))$ seja uma curva com retângulo inscrito. Então, f **não** é bi-estável. O conjunto $S_j(f)$ é uma componente de Σ_f que sabemos ser, genericamente, uma reunião finita de círculos.

Demonstração:

Suponhamos que f seja bi-estável. Então, existe uma vizinhança V_f de f tal que, para toda $g \in V_f$ existem difeomorfismos h e $k = k_1 \times k_2$ tais que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{R}^2 \arrow[d, "k = k_1 \times k_2"] \\ M \arrow[r, "g"] & \mathcal{R}^2 \end{tikzcd}$$

Este diagrama pode ser restrito ao seguinte:

$$\begin{tikzcd} S_j(\mathrm{f}) \arrow[r, "\mathrm{f}"] \arrow[d, "\mathrm{h}"] & \mathcal{R}^2 \arrow[d, "\mathrm{k} = k_1 \times k_2"] \\ S_j(\mathrm{g}) \arrow[r, "\mathrm{g}"] & \mathcal{R}^2 \end{tikzcd}$$

Teríamos assim a curva $\mathrm{f}(S_j(\mathrm{f}))$ com retângulo inscrito e bi-estável, o que contraria o teorema II.2.1. Portanto, f nestas condições não é bi-estável.

Já havíamos alertado que, segundo a caracterização fornecida por Dufour, a aplicação f dada no exemplo I.3.4 é bi-estável. Concluímos, entretanto, que este fato não é verdadeiro.

Com efeito, a aplicação f enquadra-se perfeitamente nas hipóteses de I.4.1 e II.2.2. Para II.2.2:

- S^2 é compacta e dim $S^2 = 2$
- $\Sigma_f = S^1$ e $\mathrm{f}(S^1) = S^1$ possui retângulo inscrito, aliás, uma família infinita de retângulos inscritos.

Para I.4.1:

- $\Sigma_f = S^1$ é uma curva de dobras.
- Todo $\mathrm{p} \in \Sigma_f$ ou é um ponto de dobra tangente ou um ponto de dobra transversa.
- $f_{/\Sigma_f}$ é naturalmente injetiva.

Assim, chegamos ao seguinte fato:

"As condições necessárias apresentadas no Teorema I.4.1 não são suficientes para caracterizar as aplicações bi-estáveis".

II.3 A prova do teorema II.2.1

Neste tópico, construiremos uma aplicação diferenciável, fornecendo um estudo e resultados, que desempenharão um papel importantíssimo na demonstração do Teorema II.2.1.

II.3.1 A definição de uma aplicação α sobre uma curva

Seja $\mathcal{C}$ uma curva e R um retângulo inscrito em $\mathcal{C}$. Indicaremos por m_i a declividade da reta tangente t_i a $\mathcal{C}$ em a_i, i=1,2,3 e 4, vértices de R, com $0 < |m_i| < \infty$.

Sendo $0 < |m_i| < \infty$, existem $B_i = I_{\varepsilon_i} \times I_{\delta_i} \ni a_i$ onde I_{ε_i} e I_{δ_i} são intervalos abertos, $\varepsilon_i, \delta_i \in \mathcal{R}_{++}$ e i=1,2,3 e 4 tais que $C_i = B_i \cap \mathcal{C}$ são gráficos de funções diferenciáveis.

Ilustração

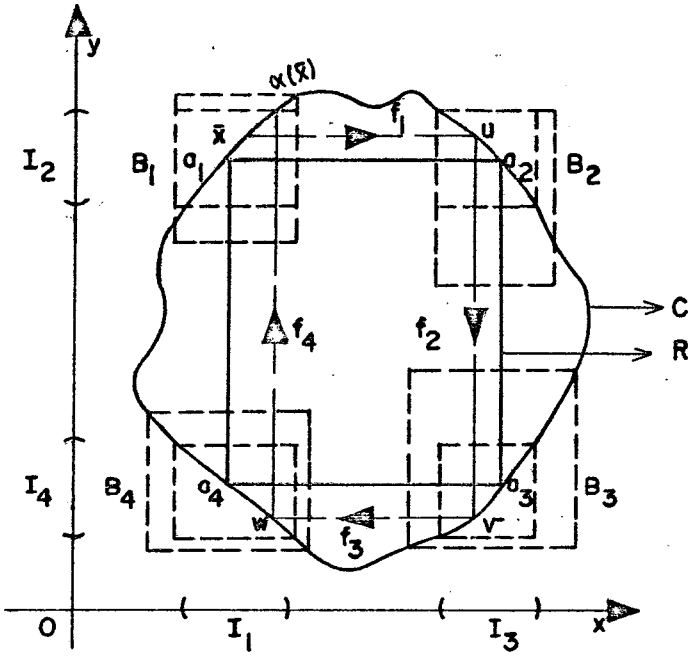


FIG. II.3.a

Faremos:

- $I_1 = \pi_1(C_1)$
- $I_4 = \{\pi_2(x,y) : (x,y) \in C_4, x \in I_1\}$
- $I_3 = \{\pi_1(x,y) : (x,y) \in C_3, y \in I_4\}$
- $I_2 = \{\pi_2(x,y) : (x,y) \in C_2, x \in I_3\}$
- $U_1 = C_1 \cap (I_1 \times I_2)$

Definimos $\alpha : U_1 \longrightarrow C_1$ seguindo as setas na figura II.3.a e acompanhando o seguinte roteiro:

- a) Cada $\overline{x} \in U_1$ é levado em u $\in C_2 \cap (I_3 \times I_2)$ por f_1, horizontalmente.
- b) u, por sua vez, é levado em v $\in C_3 \cap (I_3 \times I_4)$ por f_2, verticalmente.
- c) f_3 leva v horizontalmente em w $\in C_4 \cap (I_1 \times I_4)$.
- d) Finalmente, w é levado verticalmente por f_4 em $\alpha(\overline{x}) \in C_1$.

Nota

$$\alpha(a_1) = a_1$$

II.3.2 Proposição

A aplicação α definida em II.3.1 é diferenciável em a_1.

Demonstração:

De fato, a aplicação α é a composição das $f_{i's}$, i=1,2,3 e 4, mais precisamente $\alpha = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Cada f_i é diferenciável, visto que são dadas de maneira análoga a g, que apresentamos na figura II.3.b.

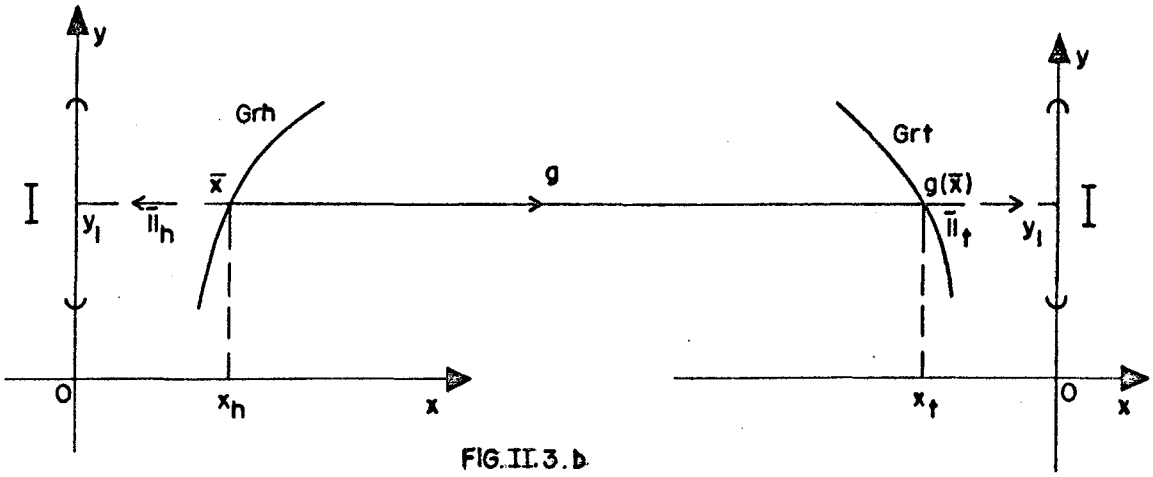


FIG.II.3.b

onde π_h e π_t são "projeções". Sendo $\pi_t \circ g = \pi_h$ e, π_t uma submersão, temos que g tem a mesma classe de diferenciabilidade de π_h. Portanto, g $\in C^\infty$. Assim, como cada f_i é diferenciável, decorre que α é também diferenciável.

Considere $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathcal{R}^2$ uma parametrização de $\mathcal{C}$, próximo a a_1, tal que $\psi(-\varepsilon, \varepsilon) = C_1$. Façamos $\psi^{-1}(U_1) = (-\theta, \theta)$ onde $U_1 = C_1 \cap (I_1 \times I_2)$, como em II.3.1; para definir:

II.3.3 Definição

Sendo α definida como em II.3.1, indicaremos por $\alpha'(a_1)$ a derivada de α em a_1 e o seu valor por : $\alpha'(a_1) = (\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi)'(0)$, onde $\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi : (-\theta, \theta) \longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$.

A definição II.3.3 independe da parametrização ψ tomada.

De fato, sejam ψ e ψ_1 parametrizações de $\mathcal{C}$, próximo a a_1, tais que $\psi_1(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) = C_1 = \psi(-\varepsilon, \varepsilon)$. Façamos $\lambda = \psi^{-1} \circ \psi_1$ e observermos que $(\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi)(0) = 0$ e $\lambda(0) = (0)$. Daí, $({\psi_1}^{-1} \circ \alpha \circ \psi_1)'(0) = [({\psi_1}^{-1} \circ \psi) \circ \psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi \circ (\psi^{-1} \circ \psi_1)]'(0) = [\lambda^{-1} \circ (\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi) \circ \lambda]'(0) = \frac{1}{\lambda'(0)} . (\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi)'(0) . \lambda'(0) = (\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi)'(0) = \alpha'(a_1)$.

II.3.4 Lema

Seja C uma curva com retângulo inscrito R e $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a C nos vértices de R. Então, $\alpha'(a_1) = \frac{m_1.m_3}{m_2.m_4}$

Consideraremos dois casos para fazer a demonstração de II.3.4.

No primeiro caso consideraremos curvas C que são funções afins próximo aos vértices. No segundo caso, curvas quaisquer nas hipóteses de II.3.4. Assim:

Caso - 1

Seja C uma curva com retângulo inscrito R, que sejam funções afins, próximo aos vértices de R. A figura II.3.c ilustra esta situação, bem como a construção de α.

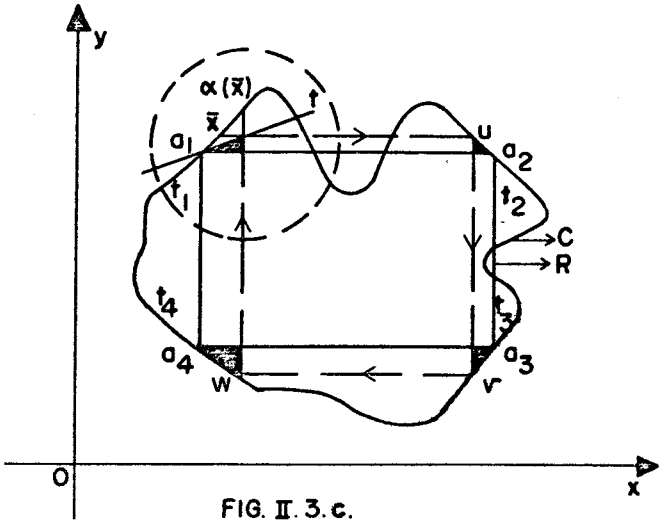


FIG. II.3.c.

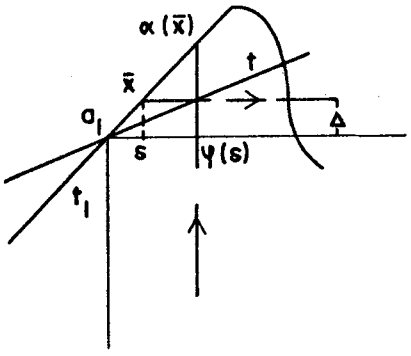
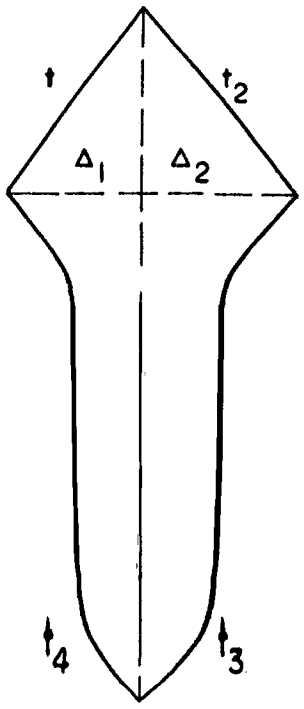


FIG. II.3.d

Destacamos em II.3.d a região circundada na figura II.3.c.

Na sequência nos interessará a declividade de t (fig. II.3.d). Afirmamos que a declividade m de t é: $m = \frac{m_2.m_4}{m_3}$.

Com efeito, para cada $\overline{x}$ no domínio de α temos:



e daí,

$$\begin{cases} m.\Delta_1 = -m_2.\Delta_2 \\ -m_4.\Delta_1 = m_3.\Delta_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m.\Delta_1 + m_2.\Delta_2 = 0 \\ m_4.\Delta_1 + m_3.\Delta_2 = 0 \end{cases} \overset{*}{\iff}$$

$$\overset{*}{\iff} \left\{ \begin{pmatrix} m & m_2 \\ m_4 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. ,$$

ou seja, (Δ_1, Δ_2) é solução não nula do sistema linear homogêneo dado por (*). Portanto,

$$det \begin{pmatrix} m & m_2 \\ m_4 & m_3 \end{pmatrix} = 0 ,$$

donde vem: m = $\frac{m_2.m_4}{m_3}$.

Consideremos ψ(s) = (s,m_1.s) próximo a a_1 como em II.3.3. Façamos, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e φ(s) = α_1(s,m_1.s)

$$\begin{tikzcd}
\psi(s) = \overline{x} \arrow[r, "\alpha"] & \alpha(\overline{x}) \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\
s \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\varphi(s) = (\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi)(s)"'] & \alpha_1(s, m_1.s)
\end{tikzcd}$$

Temos da figura II.3.d $\frac{\Delta}{s} = m_1$ e $\frac{\Delta}{\varphi(s)} = m$. Logo, $\varphi(s) = \frac{m_1}{m}.s$. De II.3.3 $\alpha'(a_1) = (\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi)'(0)$, ou seja, $\alpha'(a_1) = \varphi'(0) = \frac{m_1}{m}$. Portanto, $\alpha'(a_1) = \frac{m_1.m_3}{m_2.m_4}$.

Caso - 2

$\mathcal{C}$ é uma curva com retângulo inscrito R e $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices de R. Passemos a mostrar que o Lema II.3.4 é verdadeiro também neste caso. A figura II.3.1 ilustra $\mathcal{C}$, R e a construção de α, auxiliando a demonstração desse caso.

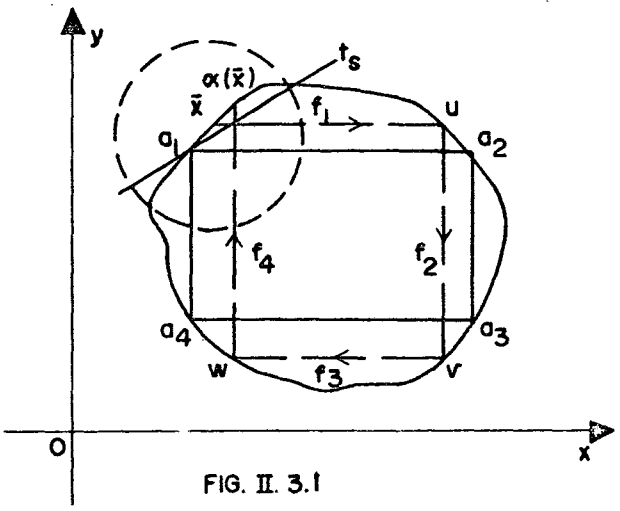


FIG. II. 3.1

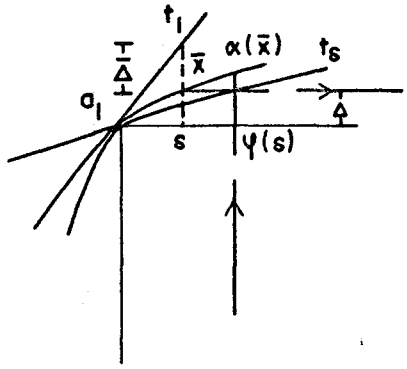


FIG. II.3.n

A figura II.3.n destaca a região circundada na figura II.3.l.

Seja ψ(s) = (s,f(s)) uma parametrização para C e φ(s) = $(\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi)$(s) como em II.3.3. Daí, $\alpha'(a_1) = \varphi'(0)$.

Considere para cada s tal que $\psi(s) = \overline{x}$ o valor $m_s = \frac{m_2{}^s.m_4{}^s}{m_3{}^s}$, em que m_s é a declividade de t_s que aparece na figura II.3.l e $m_j{}^s$, $j = 2$, 3 e 4 são as declividades das secantes à curva C que passam por u e a_2, v e a_3, w e a_4, respectivamente.

Sendo t_1 a tangente a C em a_1 temos $\lim_{s\to 0} \frac{\overline{\Delta}}{s} = 0$ (*), e ainda da figura II.3.n obtemos:

$\varphi(s) = m_s{}^{-1}.\Delta$ e $\Delta + \overline{\Delta} = m_1.s$, daí $\varphi(s) = \frac{m_1}{m_s}.s - \frac{\overline{\Delta}}{m_s}$ e como $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(s)}{s} = \lim_{s\to 0}(\frac{m_1}{m_s} - \frac{1}{m_s}.\frac{\overline{\Delta}}{s})$. Como $\lim_{s\to 0} m_s = \frac{m_2.m_4}{m_3}$ e por (*) vem: $\varphi'(0) = \frac{m_1.m_3}{m_2.m_4}$ e portanto, $\alpha'(a_1) = \frac{m_1.m_3}{m_2.m_4}$.

Observações

1) Pode ocorrer na construção de α que tenhamos de tomar t_s como na figura $\otimes$ mas, mesmo assim, obtemos $m_s = \frac{m_2{}^s.m_4{}^s}{m_3{}^s}$.

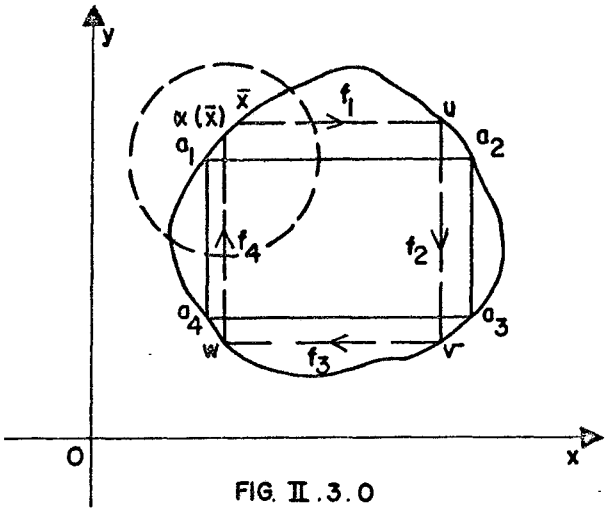


FIG. II.3.0

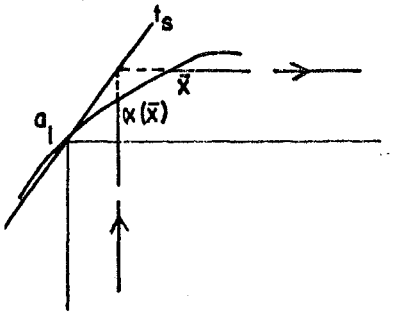


FIG. ⊗

2) Para todo x $\in$ Dom α se obtém t_s, ou como na figura II.3.n ou como na figura ⊗.

II.3.5 A ação de um bi-difeomorfismo k $= k_1 \times k_2$ sobre a aplicação α.

Se $\mathcal{C}$ é uma curva com retângulo inscrito R e α uma aplicação dada como em II.3.1, então um bi-difeomorfismo k $= k_1 \times k_2$ age sobre o "sistema" ($\mathcal{C}$,R,α) da seguinte maneira:

Consideremos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ com $\gamma(p_i) = a_i$, i=1,2,3 e 4, $\gamma'(p_i) = \frac{\gamma_2'(p_i)}{\gamma_1'(p_i)} = m_i$. Façamos $\Delta = \frac{m_1.m_3}{m_2.m_4}$ e $\theta = k \circ \gamma$. Desta maneira, $\theta = (k_1 \circ \gamma_1, k_2 \circ \gamma_2)$. Daí, $\theta'(p_i) = (k_1'(\gamma_1(p_i)).\gamma_1'(p_i), k_2'(\gamma_2(p_i)).\gamma_2'(p_i))$ e, assim, $\tilde{m}_i = \frac{k_2'(\gamma_2(p_i))}{k_1'(\gamma_1(p_i))}.m_i$.

O $\tilde{\Delta}$ associado a $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{R}, \tilde{\alpha})$ é dado por: $\frac{\tilde{m}_1.\tilde{m}_3}{\tilde{m}_2.\tilde{m}_4}$ se $k(a_1)$ tem a posição de a_1 ou a_3 em R ou $\frac{\tilde{m}_2.\tilde{m}_4}{\tilde{m}_1.\tilde{m}_3}$ se $k(a_1)$ tem a posição de a_2 ou a_4. Temos ainda, $\gamma_1(p_1) = \gamma_1(p_4)$, $\gamma_1(p_2) = \gamma_1(p_3)$, $\gamma_2(p_2) = \gamma_2(p_1)$,

$\gamma_2(p_3) = \gamma_2(p_4)$ e, portanto $\tilde{\Delta} = \Delta$ ou $\frac{1}{\Delta}$.

Conclusão:

Dada uma curva $\mathcal{C}$ com retângulo inscrito e o valor associado Δ, se $\mathcal{C}$ é transformada em $\tilde{\mathcal{C}}$ por $k_1 \times k_2$ então, o valor $\tilde{\Delta}$ associado a $\tilde{\mathcal{C}}$ é: Δ ou $\frac{1}{\Delta}$.

II.3.6 Definição

Seja R um retângulo e a_i, i = 1, 2, 3 e 4, seus vértices. Se A = (a_1, a_2, a_3, a_4) definimos $\Re$ = { A = (a_1, a_2, a_3, a_4) : $a_{i's}$ são vértices de um retângulo }.

Observações

a) Se a_i, i = 1, 2, 3 e 4 são vértices de um retângulo R temos:

$a_1 = (x_1, x_2)$, $a_2 = (x_3, x_2)$, $a_3 = (x_3, x_4)$ e $a_4 = (x_1, x_4)$ e $\Re = \{(x_1, x_2, x_3, x_2, x_3, x_4, x_1, x_4) : x_i \in \mathcal{R}$ i = 1, 2, 3 e 4 }.

b) $\Re$ é uma subvariedade fechada do $\mathcal{R}^8$ e codim $\Re = 4$ pois $\Re$ é um subespaço linear de dimensão 4 do $\mathcal{R}^8$.

II.3.7 Definição

Seja f : $S^1 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ um mergulho de classe C^∞.

Definimos uma aplicação $f_4 : {}_4S^1 \longrightarrow \mathcal{R}^8$ por : f_4(u,v,s,t) = (f(u),f(v),f(s),f(t)) onde, ${}_4S^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (S^1)^4 : x_i \neq x_j, 1 \leq i < j \leq 4\}$.

Nota

A = $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathrm{Im} f_4 \cap \Re$ se, e somente se,

$f(u_0) = a_1, f(v_0) = a_2, f(s_0) = a_3 e f(t_0) = a_4$ são vértices de um retângulo inscrito à curva $f(S^1) = \mathcal{C}$.

O conjunto $merg^\infty(S^1, \mathcal{R}^2)$ denota o conjunto dos mergulhos C^∞de S^1 no $\mathcal{R}^2$.

II.3.8 Lema

O conjunto $T = \{ f \in merg^\infty(S^1, \mathcal{R}^2) : f_4 \pitchfork \Re \}$ é denso em $merg^\infty(S^1, \mathcal{R}^2)$.

Demonstração

De fato, o teorema de transversalidade para multijatos "adaptado" nos fornece:

$T_W = \{f \in merg^\infty(S^1, \mathcal{R}^2) : {}_4j^0 f \pitchfork W\}$, em que W é uma subvariedade de ${}_4J^0(S^1, \mathcal{R}^2)$, é denso em $merg^\infty(S^1, \mathcal{R}^2)$.

Temos ainda,

$$\begin{tikzcd}
{}_4S^1 \arrow[r, "{}_4j^0 f"] \arrow[dr, "f_4 = \pi \circ {}_4j^0 f"'] & {}_4J^0(S^1, \mathcal{R}^2) \subset (S^1 \times \mathcal{R}^2)^4 \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathcal{R}^8
\end{tikzcd}$$

π é a projeção canônica e, naturalmente $\pi \pitchfork \Re$. Daí, fazendo $W = \pi^{-1}(\Re)$ temos que $T_W \subset T$.

$({}_4j^0 f \pitchfork \pi^{-1}(\Re) \Longrightarrow \pi({}_4j^0 f) \pitchfork \Re)$

Portanto, como T_W é denso em $merg^\infty(S^1, \mathcal{R}^2)$ temos que T é denso em $merg^\infty(S^1, \mathcal{R}^2)$.

Obsevação

Se $f_4 \pitchfork \Re$ temos:

(I) Trivialmente $\Rightarrow$ Im$f_4 \cap \Re = \emptyset \Rightarrow$ f(S^1) não possui retângulos inscritos

(II) Não trivialmente $\Rightarrow$ Im$f_4 \cap \Re \neq \emptyset \Rightarrow$ f(S^1) possui retângulos inscritos

II.3.9 Lema

Seja f $\in merg^{\infty}(S^1, \mathcal{R}^2)$. Então, se $f_4 \pitchfork \Re$ o número de retângulos inscritos à curva f(S^1) é finito.

Demonstração

De fato, se $f_4 \pitchfork \Re$ temos:

(I) Im$f_4 \cap \Re = \emptyset$ e, assim, f(S^1) não tem retângulo inscrito conforme observação anterior.

(II) Im$f_4 \cap \Re \neq \emptyset$. Neste caso, ${f_4}^{-1}(\Re)$ é uma subvariedade de ${}_4S^1$ e $codim\ {}_{4S^1} {f_4}^{-1}(\Re) = codim_{\mathcal{R}^8} \Re = 4$.

Logo, ${f_4}^{-1}(\Re)$ é constituido somente de pontos isolados.

Afirmamos que ${f_4}^{-1}(\Re)$ é finito. Com efeito, se considerarmos $\widehat{f}_4 : (S^1)^4 \to \mathcal{R}^8$ definida por : $\widehat{f}_4$(u,v,s,t) = (f(u),f(v),f(s),f(t)). Temos:

a) $\widehat{f}_4 \pitchfork \Re$, já que $f_4 \pitchfork \Re$ e $\widehat{f}_4^{-1}(\Re) = {f_4}^{-1}(\Re) \subset {}_4S^1$.

b) $codim_{(S^1)^4} \widehat{f}_4^{-1}(\Re) = 4$.

Assim, $\widehat{f}_4^{-1}(\Re)$ consiste de pontos isolados. Como $(S^1)^4$ é compacto, são em número finito. Donde concluímos, que $f(S^1)$ tem somente um número finito de retângulos inscritos.

Os lemas II.3.8 e II.3.9 nos conduzem ao seguinte resultado:

II.3.10 Proposição

As curvas que admitem um número finito de retângulos inscritos, determinam um conjunto denso.

Com as informações obtidas por meio dos resultados apresentados, estamos aptos a demonstrar o teorema II.2.1, o que faremos em três casos.

Caso - 1

Vamos supor que $\mathcal{C}$ tenha infinitos retângulos inscritos. Pela proposição II.3.10, toda vizinhança de $\mathcal{C}$ tem uma curva com um número finito de retângulos inscritos. Logo, não existe uma vizinhança de curvas bi-equivalentes a $\mathcal{C}$, pois, para estas, o número de retângulos inscritos é o mesmo.

Portanto, nestas condições, $\mathcal{C}$ é instável.

Caso - 2

Vamos supor que $\mathcal{C}$ tenha somente um número finito de retângulos inscritos e, tais que, as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices dos retângulos sejam todas <u>não</u> nulas e <u>não</u> infinitas.

Sejam $R_1, R_2, ..., R_k$ os retângulos inscritos em $\mathcal{C}$.

Sejam $\{\Delta_1, \frac{1}{\Delta_1}, ..., \Delta_k, \frac{1}{\Delta_k}\}$ os invariantes de $R_1, R_2, ..., R_k$.

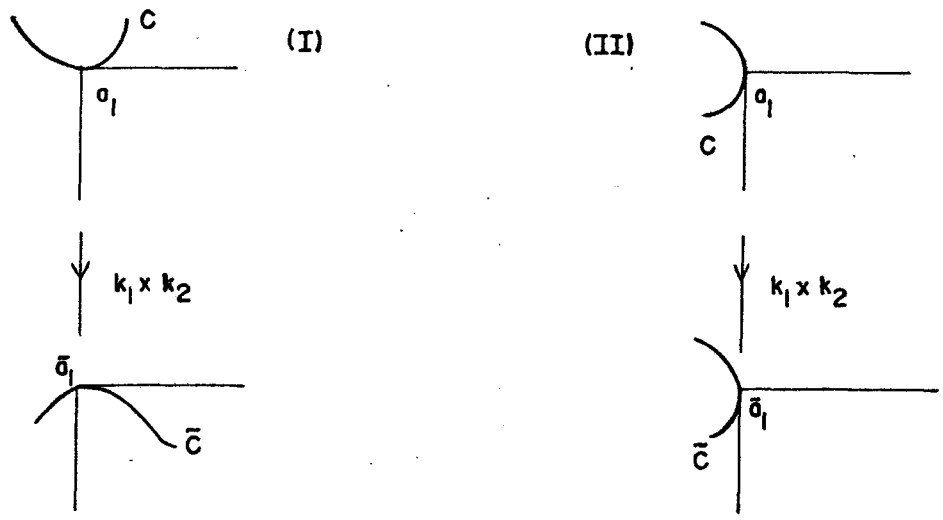
Tomemos $\mathcal{C}^*$ suficientemente próxima de $\mathcal{C}$ contendo $R_1, R_2, ..., R_k$ inscritos com $\{\Delta^*{}_1, \frac{1}{\Delta^*{}_1}, ..., \Delta^*{}_k, \frac{1}{\Delta^*{}_k}\} \neq \{\Delta_1, \frac{1}{\Delta_1}, ..., \Delta_k, \frac{1}{\Delta_k}\}$. Logo, $\mathcal{C}^*$ não é bi-equivalente a $\mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{C}$ é instável nas condições do caso 2.

Caso - 3

Vamos supor que $\mathcal{C}$ tenha pelo menos um retângulo inscrito, com tangente horizontal (vertical) em pelo menos um dos vértices do retângulo. Mostremos, então, que $\mathcal{C}$ é instável. Antes, faremos algumas considerações.

Se $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é uma parametrização para $\mathcal{C}$ e $\gamma(0) = a_1$, por exemplo, com $\gamma'(0) = (\gamma_1'(0), 0)$ e $\gamma_1'(0) \neq 0$ temos: $k(\gamma(t)) = (k_1(\gamma_1(t)), k_2(\gamma_2(t)))$, $k(a_1) = \tilde{a_1}$ se $k = k_1 \times k_2$ é um bi-difeomorfismo. E ainda, $d(k \circ \gamma)(0) = (k_1'(\gamma_1(0)).\gamma_1'(0), 0)$ com $(k_1 \circ \gamma_1)'(0) \neq 0$ pois k_1 é um difeomorfismo e 0 é valor regular de $k_1 \circ \gamma_1$. Daí, concluímos que tangente horizontal é "levada" em tangente "horizontal". Analogamente, concluímos que tangente vertical é "levada" em tangente vertical.

Ilustração

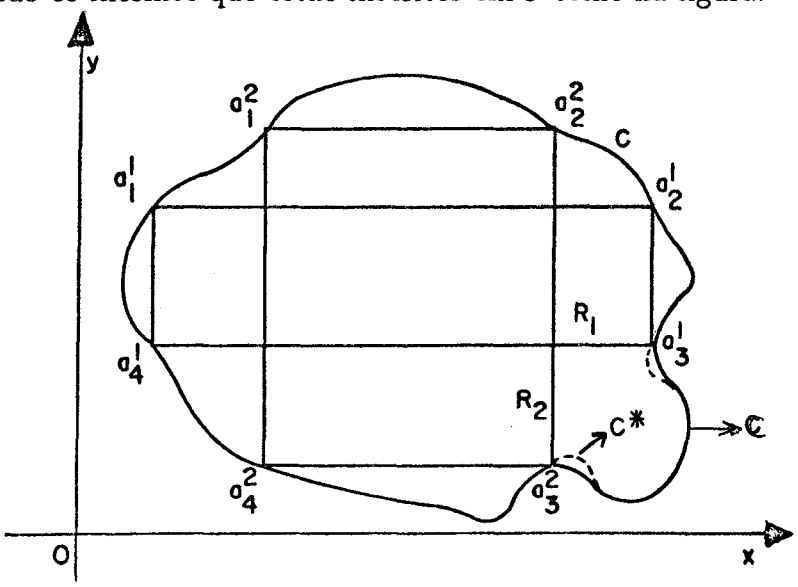


Vamos supor que a situação descrita no caso 3 ocorra quando $\mathcal{C}$ tem um número finito de retângulos.

Suponhamos que exista uma vizinhança de curvas bi-equivalentes a $\mathcal{C}$. Nesta vizinhança, é possível, encontrar uma curva $\mathcal{C}^*$ dada por:

$\mathcal{C}^*$ é a própria $\mathcal{C}$, a menos de pequenas perturbações próximo aos vértices onde $\mathcal{C}$ tem tangente horizontal (vertical). Os retângulos inscritos

em C^* são os mesmos que estão inscritos em C como na figura.



Impossível, já que tangente horizontal (vertical) é "levada" em tangente horizontal (vertical), o que não ocorre com C e C^*.

Portanto, nestas condições C é instável.

Dos casos 1, 2 e 3, concluímos que as curvas com retângulo inscrito são instáveis sob bi-equivalência.

Observação

Com uma demonstração análoga à apresentada no caso 2, é possivel provar a instabilidade de uma curva, com um número infinito enumerável de retângulos inscritos. Para tanto, basta tomar C^* com $\{\Delta^*{}_1, \frac{1}{\Delta^*{}_1}, \ldots, \Delta^*{}_k, \frac{1}{\Delta^*{}_k}, \ldots\} \neq \{\Delta_1, \frac{1}{\Delta_1}, \ldots, \Delta_k, \frac{1}{\Delta_k}, \ldots\}$.

O teorema II.2.1 pode ser demonstrado usando outro tipo de técnica, como veremos a seguir.

Consideraremos F uma parte finita de S^1.

Notações

a) E_F denota o anel dos germes, de aplicações diferenciáveis de S^1 em $\mathcal{R}$ numa vizinhança de F.

b) M_F o ideal dos germes de E_F que se anulam sobre F.

II.3.11 Definição

Sejam $f, g \in E_F$. Diremos que (f, g) é localmente infinitesimalmente bi-estável de ordem 1, numa vizinhança de F, se para todo par $(\tilde{f}, \tilde{g})$ de elementos de E_F, podemos resolver as equações:

$$(*) \begin{cases} \tilde{f} = (df)s - u \circ f \\ \tilde{g} = (dg)s - w \circ g \end{cases},$$

módulo ${M_F}^2$, onde as incógnitas são:

s : germe de campo de vetores sobre S^1, numa vizinhança de F.

u : germe de aplicação de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$ numa vizinhança de f(F).

w : germe de aplicação de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$ numa vizinhança de g(F).

II.3.12 Teorema

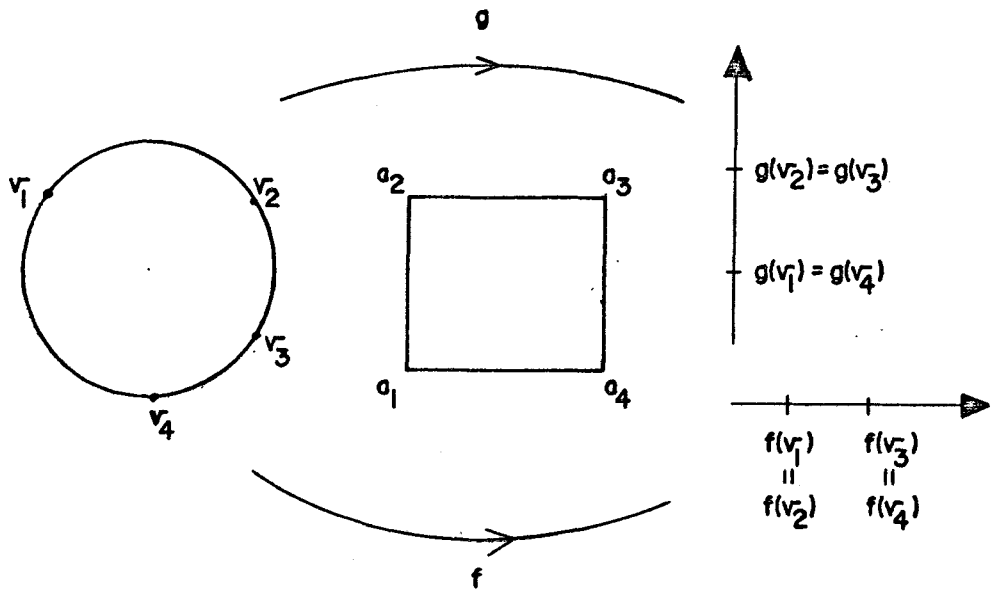
Se (f,g) é bi-estável então, para toda parte finita F de S^1, (f,g) é localmente infinitesimalmente bi-estável de ordem 1 numa vizinhança de F.

Vide [6]

Passemos então a mostrar o Teorema II.2.1 com estas noções.

Representemos por (f,g) : $S^1 \to \mathcal{R}^2$ a curva $\mathcal{C}$, $\mathcal{R} \xleftarrow{g} S^1 \xrightarrow{f} \mathcal{R}$. Sejam $a_i =$ (f(v_i) , g(v_i)), i = 1, 2, 3 e 4, os vértices do retângulo R, inscrito em $\mathcal{C}$. Portanto, f(v_1) = f(v_2), g(v_2) = g(v_3), f(v_3) = f(v_4) e g(v_4) = g(v_1).

Ilustração



Vamos considerar F = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset S^1$ e mostrar que (f,g) <u>não</u> é infinitesimalmente bi-estável numa vizinhança de F.

Com efeito,

Interessa-nos trabalhar apenas com os 1 - polinômios de Taylor das aplicações no sistema (*) (módulo ${M_F}^2$).

Suponhamos que os 1 - polinômios de Taylor de f e g em torno de v_i sejam:

f(v_i) + $a_i.x$

g(v_i) + $b_i.x$, i = 1, 2, 3 e 4.

E que, numa vizinhança de v_i, tenhamos :

s $= (s_i + y_i.x + \ldots)\frac{\delta}{\delta x}$,

$u(\lambda) = u_1 + t_1.\lambda + \ldots$, numa vizinhança de f$(v_1)$ = f(v_2),

$u(\lambda) = u_2 + t_2.\lambda + \ldots$, numa vizinhança de f$(v_3)$ = f(v_4),

$w(z) = w_1 + e_1.z + \ldots$, numa vizinhança de g$(v_2)$ = g(v_3) e

$w(z) = w_2 + e_2.z + \ldots$, numa vizinhança de g$(v_1)$ = g(v_4)

Daí,

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = (a_1 + a'_1.x)(s_1 + y_1.x) - (\overline{u}_1 + t_1.a_1.x) \\ \tilde{g}_1 = (b_1 + b'_1.x)(s_1 + y_1.x) - (\overline{w}_2 + e_2.b_1.x) \\ \tilde{f}_2 = (a_2 + a'_2.x)(s_2 + y_2.x) - (\overline{u}_1 + t_1.a_2.x) \\ \tilde{g}_2 = (b_2 + b'_2.x)(s_2 + y_2.x) - (\overline{w}_1 + e_1.b_2.x) \\ \tilde{f}_3 = (a_3 + a'_3.x)(s_3 + y_3.x) - (\overline{u}_2 + t_2.a_3.x) \\ \tilde{g}_3 = (b_3 + b'_3.x)(s_3 + y_3.x) - (\overline{w}_1 + e_1.b_3.x) \\ \tilde{f}_4 = (a_4 + a'_4.x)(s_4 + y_4.x) - (\overline{u}_2 + t_2.a_4.x) \\ \tilde{g}_4 = (b_4 + b'_4.x)(s_4 + y_4.x) - (\overline{w}_2 + e_2.b_4.x) \end{cases}$$

As $\tilde{f}_i$ e $\tilde{g}_i$, i = 1, 2, 3 e 4, são polinomiais de grau 1 e as incógnitas são os s_i, y_i, $\overline{u}_j$, $\overline{w}_j$ e e_j, com $\overline{u}_j = u_j + t_j.f(v_j)$, j = 1, 2 e $\overline{w}_j = w_j + e_j.g(v_j)$.

Na ordem zero este sistema origina um sistema (**) da forma:

$$(**)\begin{cases} a_1.s_1 - \overline{u}_1 = d_1 \\ b_1.s_1 - \overline{w}_2 = l_1 \\ a_2.s_2 - \overline{u}_1 = d_2 \\ b_2.s_2 - \overline{w}_1 = l_2 \\ a_3.s_3 - \overline{u}_2 = d_3 \\ b_3.s_3 - \overline{w}_1 = l_3 \\ a_4.s_4 - \overline{u}_2 = d_4 \\ b_4.s_4 - \overline{w}_2 = l_4 \end{cases},$$

onde os $l_{i's}$ e os $d_{i's}$ são dados.

Podemos resolver (**) se, e somente se, podemos resolver (***), que é obtido de (**) eliminando as incógnitas $\overline{u}$ e $\overline{w}$.

$$(***)\begin{cases} a_1.s_1 - a_2.s_2 = f_1 \\ a_3.s_3 - a_4.s_4 = f_2 \\ b_2.s_2 - b_3.s_3 = g_1 \\ b_4.s_4 - b_1.s_1 = g_2 \end{cases},$$

com f_j e g_j, j = 1 e 2, arbitrários.

O determinante da matriz do sistema (***) é dado por:

$\Delta = b_1.a_2.b_3.a_4 - a_1.b_2.a_3.b_4$

Dois casos a considerar:

a) $\Delta = 0$

O sistema (***) não tem solução e assim, (**) não tem solução. Portanto, o sistema (*) não tem solução.

b) $\Delta \neq 0$

Neste caso (***) determina de modo único os s_i, i = 1, 2, 3 e 4. Concluímos que (**) determina de modo único $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{w}_1$ e $\overline{w}_2$.

Voltando ao sistema inicial (*), com interesse agora nos coeficientes de x, para obtermos:

$$\begin{cases} a_1.y_1 - a_1.t_1 + a'_1.s_1 = h_1 \\ b_1.y_1 - b_1.e_2 + b'_1.s_1 = k_1 \\ a_2.y_2 - a_2.t_1 + a'_2.s_2 = h_2 \\ b_2.y_2 - b_2.e_1 + b'_2.s_2 = k_2 \\ a_3.y_3 - a_3.t_2 + a'_3.s_3 = h_3 \\ b_3.y_3 - b_3.e_1 + b'_3.s_3 = k_3 \\ a_4.y_4 - a_4.t_2 + a'_4.s_4 = h_4 \\ b_4.y_4 - b_4.e_2 + b'_4.s_4 = k_4 \end{cases}$$

como os s_i, i = 1, 2, 3 e 4, são determinados, recaímos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1.y_1 - a_1.t_1 = \overline{h}_1 \\ b_1.y_1 - b_1.e_2 = \overline{k}_1 \\ a_2.y_2 - a_2.t_1 = \overline{h}_2 \\ b_2.y_2 - b_2.e_1 = \overline{k}_2 \\ a_3.y_3 - a_3.t_2 = \overline{h}_3 \\ b_3.y_3 - b_3.e_1 = \overline{k}_3 \\ a_4.y_4 - a_4.t_2 = \overline{h}_4 \\ b_4.y_4 - b_4.e_2 = \overline{k}_4 \end{cases}$$

onde os $\overline{h}_i$ e $\overline{k}_i$, i = 1, 2, 3 e 4 são arbitrários, mas conhecidos.

Temos:

Se $a_i = 0$ ou $b_i = 0$ para algum i, este sistema não admite solução, consequentemente o sistema inicial (*) não admite solução.

Caso contrário, resolver este sistema seria equivalente a resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1.a_2.y_1 - a_1.a_2.y_2 = h_1{}^* \\ a_3.a_4.y_3 - a_3.a_4.y_4 = h_2{}^* \\ b_2.b_3.y_2 - b_2.b_3.y_3 = k_3{}^* \\ b_1.b_4.y_1 - b_1.b_4.y_4 = k_4{}^* \end{cases}$$

Mas,

$$det \begin{pmatrix} a_1.a_2 & -a_1.a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3.a_4 & -a_3.a_4 \\ 0 & b_2.b_3 & -b_2.b_3 & 0 \\ b_1.b_4 & 0 & 0 & -b_1.b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1.a_2.b_2.b_3.a_3.a_4.b_1.b_4 - b_1.b_4.a_1.a_2.a_3.a_4.b_2.b_3 = 0.$$

Assim, não é possível resolver este sistema para arbitrários $h_1{}^*, h_2{}^*, k_3{}^*$ e k_4^*.

Conclusão:

Sendo o sistema (*) não solúvel para $F = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ concluímos que:

Se uma curva $(f , g) : S^1 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ admite retângulo inscrito, esta não é bi-estável.

Capítulo III

A Não Densidade

O que faremos neste capítulo é introduzir um novo conceito: o de retângulo transversal a uma curva ou retângulo transverso. Apresentaremos uma caracterização para estes, mas o intuito principal é mostrar que o conjunto das aplicações bi-estáveis f : M $\rightarrow$ $\mathcal{R}^2$ com M variedade diferenciável compacta, não é denso.

III.1 Retângulos transversais a uma curva

III.1.1 A construção de uma aplicação diferenciável $\overline{\mathcal{C}}$

Seja $\mathcal{C}$ uma curva com retângulo inscrito R e $0 < |m_i| < \infty$, i = 1, 2, 3 e 4, as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices de R.

Tomemos B_1 e C_i, i = 1, 2, 4 como em II.3.1 e ainda:

- $I_1 = \pi_1(C_4)$
- $I_2 = \pi_2(C_2)$

- $I_3 = \pi_1(C_2)$
- $\overline{U}_1 = C_1 \cap (I_1 \times I_2)$

Ilustração

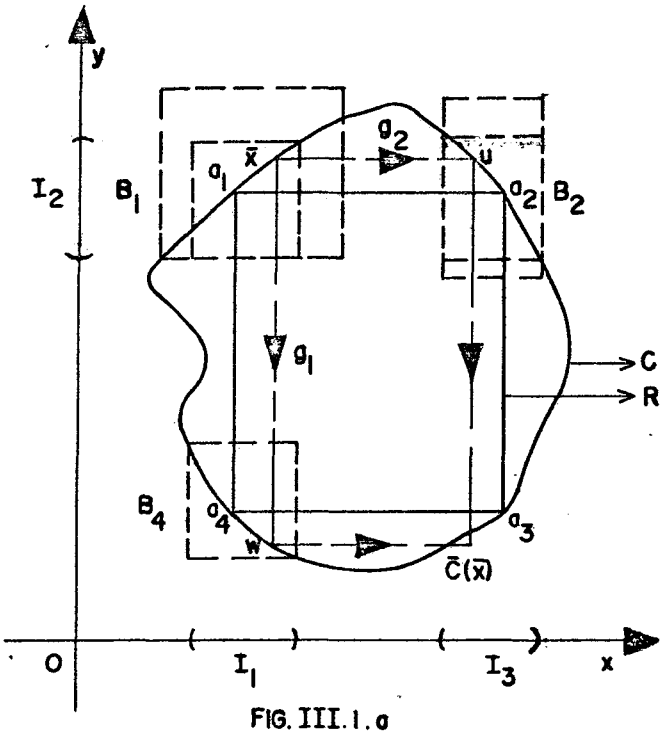


FIG. III.1.a

Definimos uma aplicação $\overline{C} : \overline{U}_1 \to \mathcal{R}^2$ seguindo o sentido das setas na figura III.1.a e acompanhando o seguinte roteiro:

- a) Cada $\overline{x} \in \overline{U}_1$ é levado verticalmente por g_1 em w $\in C_4$.
- b) O ponto $\overline{x}$ é levado ainda horizontalmente por g_2 em u $\in C_2 \cap (I_3 \times I_2)$.
- c) O valor $\overline{C}(\overline{x})$ é dado pela intersecção das retas r e s, onde r é a reta que passa por u e tem a direção $\vec{j}$, e s é a reta que passa por w e tem a direção $\vec{i}$.

Nota

$$\overline{C}(a_1) = a_3$$

III.1.2 Proposição

A aplicação $\overline{C}$ definida em III.1.1 é diferenciável.

Demonstração

Com efeito, sendo $\overline{x} = (x_1, y_1)$ façamos $g_1(\overline{x}) = (x_1, w_2(\overline{x}))$ e $g_2(\overline{x}) = (u_1(\overline{x}), y_1)$. Temos que $\overline{C}(\overline{x}) = (u_1(\overline{x}); w_2(\overline{x}))$ e as aplicações g_1 e g_2 são diferenciáveis, pois os mecanismos de suas construções são análogos àqueles utilizados na construção de α em II.3.1. Desta maneira, u_1 e w_2 são diferenciáveis e, portanto, $\overline{C}$ diferenciável.

Exemplo 1

Sendo $C = S^1$ e R um retângulo inscrito a C, a imagem da aplicação $\overline{C}$ é um arco de S^1 contendo a_3.

Ilustração

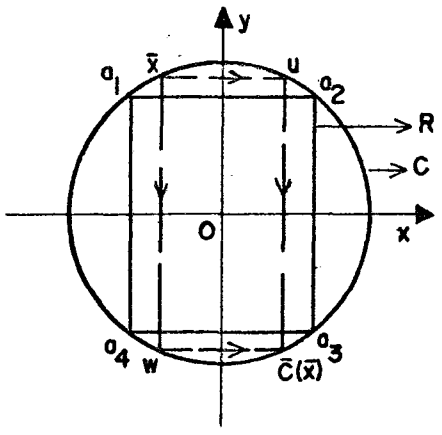


FIG. III.1.b

Na figura III.1.b temos $\mathcal{C} = S^1$ com retângulo inscrito R. Os pontos $\overline{x}, u, w$ e $\overline{\mathcal{C}}(\overline{x})$ determinam um retângulo e $1 = \| \overline{x} \| = \| \overline{\mathcal{C}}(\overline{x}) \|$. Assim, devemos ter $\overline{\mathcal{C}}(\overline{x}) \in \mathcal{C}$, e, como $\overline{\mathcal{C}}$ é contínua, não constante, conclui-se que $\overline{\mathcal{C}}$ é um arco de S^1.

Exemplo 2

Seja $\mathcal{C}$ uma curva que tem um retângulo inscrito cujos vértices são:

$\overline{a_1} = (0, a_1)$, $a_1 \in \mathcal{R}_{++}$

$\overline{a_2} = (a_3, a_1)$, $a_3 \in \mathcal{R}_{++}$

$\overline{a_3} = (a_3, 0)$

$\overline{a_4} = (0, 0)$; e ainda, a curva $\mathcal{C}$ é : a reta $r_1 : y = m_1.x + a_1$ próximo a $\overline{a}_1$, $r_2 : y = m_2(x - a_3) + a_1$ próximo a $\overline{a}_2$, $r_3 : y = m_3(x - a_3)$ próximo a $\overline{a}_3$ e $r_4 : y = m_4.x$ próximo a $\overline{a}_4$, conforme figura III.1.c.

Afirmamos que $\overline{\mathcal{C}}$ é tal que $\overline{\mathcal{C}}(\overline{x}) \in r : y = \frac{m_2.m_4}{m_1}(x - a_3)$.

Ilustração

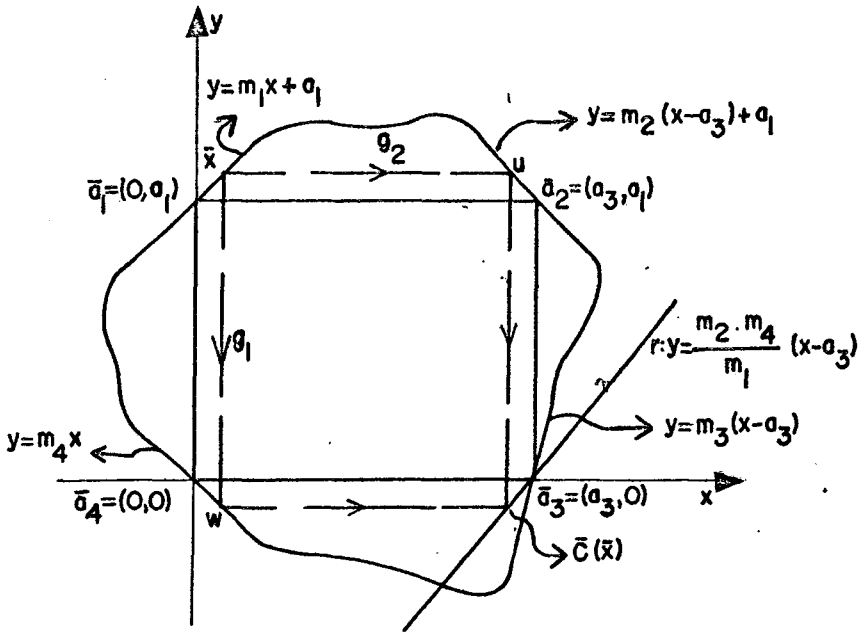


FIG. III . 1.c

Com efeito, façamos $\overline{x} = (x_1, y_1)$, $g_1(\overline{x}) = (x_1, w_2(\overline{x})) = w$, $g_2(\overline{x}) = (u_1(\overline{x}), y_1) = u$ e, assim, $\overline{C}(\overline{x}) = (u_1(\overline{x}), w_2(\overline{x}))$.

Como $\overline{x} \in r_1$ indicaremos $\overline{x} = (x_1, m_1.x_1 + a_1)$ e, então, $y_1 = m_1.x_1 + a_1$. Mas $y_1 = m_2(u_1(\overline{x}) - a_3) + a_1$ e daí, $m_1.x_1 + a_1 = m_2(u_1(\overline{x}) - a_3) + a_1$, ou seja, $u_1(\overline{x}) = \frac{1}{m_2}(m_1.x_1 + m_2.a_3)$. Como $w_2(\overline{x}) = m_4.x_1$ temos: $\overline{C}(\overline{x}) = (\frac{1}{m_2}(m_1.x_1 + m_2.a_3); m_4.x_1)$ e de fato, $\overline{C}(\overline{x}) \in r$ pois, $\frac{m_2.m_4}{m_1}(\frac{1}{m_2}(m_1.x_1 + m_2.a_3) - a_3) = m_4.x_1 + \frac{m_2 m_4}{m_1}.a_3 - \frac{m_2 m_4}{m_1}.a_3 = m_4.x_1$.

Observação

O exemplo 2 informa que quando a curva C forem funções afins próximo aos vértices do retângulo temos: $\overline{C}(\overline{x}) \in r$. E, como $\overline{C}$ é contínua, não constante, $\overline{C}$ deve ser afim, ou seja, um segmento de r que passa por a_3.

III.1.3 Definição

Seja $\mathcal{C}$ uma curva com retângulo inscrito R e $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices de R. Dizemos que R é transversal a $\mathcal{C}$ se $\overline{\mathcal{C}}$ for transversal a $\mathcal{C}$, em a_3.

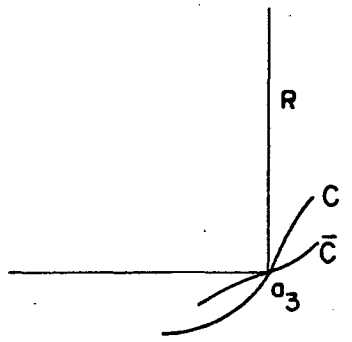
Notação

$$R \pitchfork \mathcal{C}$$

Simbolicamente ...

$$R \pitchfork \mathcal{C} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{C}} \pitchfork_{a_3} \mathcal{C}$$

Ilustração

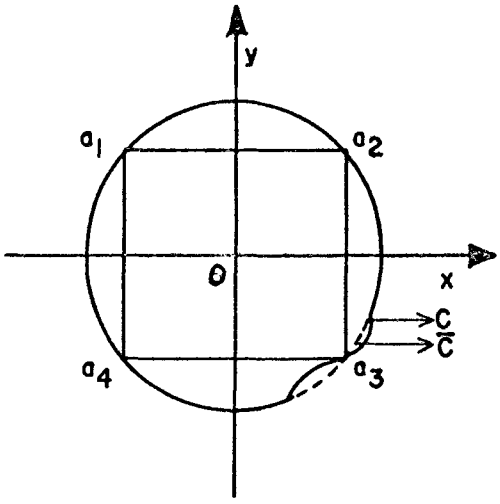


Observação

Uma questão que surge naturalmente após a definição III.1.3 é a seguinte: Existe curva $\mathcal{C}$ com retângulo inscrito transverso? O exemplo que daremos a seguir responde a esta questão.

Exemplo

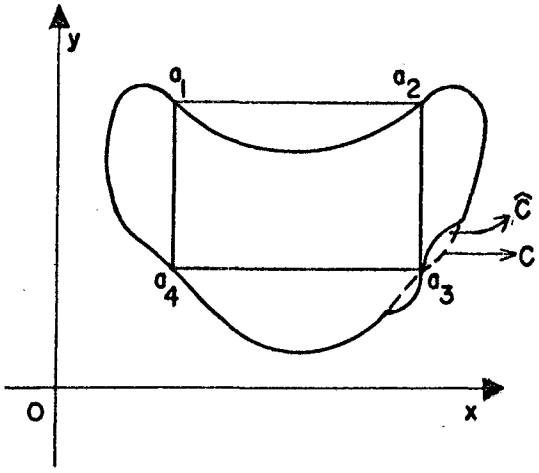
Considere $\mathcal{C}$ e R como na ilustração.



A curva $\mathcal{C}$ é S^1 a menos de uma pequena perturbação próxima a a_3. As "emendas" C^∞ são feitas usando partição da unidade. Neste caso, temos que R $\pitchfork$ $\mathcal{C}$. De fato, como vimos no exemplo 1 a aplicação $\overline{\mathcal{C}}$ "é a parte pontilhada", próxima a a_3, e naturalmente $\overline{\mathcal{C}} \pitchfork_{a_3} \mathcal{C}$.

Observação

Toda curva $\mathcal{C}$ tendo um retângulo inscrito, tem arbitrariamente próxima uma curva $\widehat{\mathcal{C}}$ com retângulo inscrito transverso. Para formar $\widehat{\mathcal{C}}$ basta perturbar $\mathcal{C}$ próximo de a_3, de maneira que esta seja transversal a $\overline{\mathcal{C}}$ neste vértice.



III.2 Retângulos transversais - caracterização

Dada uma curva com retângulo inscrito é possível saber se este é transversal à curva. Para tanto, basta conhecermos as declividades das tangentes à curva nos vértices do retângulo.

III.2.1 Proposição

Seja $\mathcal{C}$ uma curva com retângulo inscrito R e $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices de R. Então, R $\not\pitchfork \mathcal{C}$ se, e somente se, $\frac{m_1.m_3}{m_2.m_4} = 1$.

Demonstração

Consideremos a curva $\mathcal{C}$ em dois casos

Caso - 1

A curva $\mathcal{C}$, próxima aos vértices de R, são funções afins. A figura III.2.a ilustra esta situação.

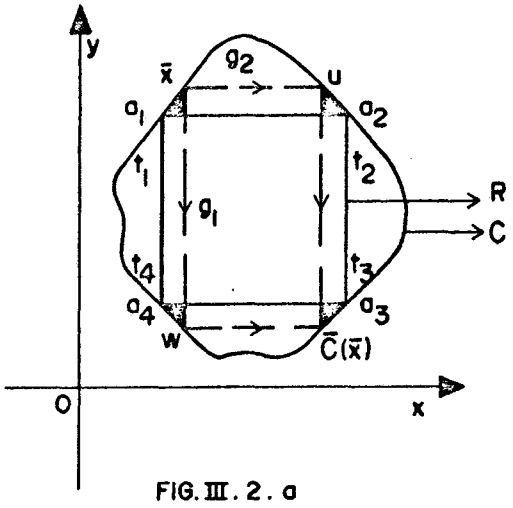


FIG. III. 2. a

O exemplo 2 nos informa que $\overline{C}$ é um segmento de reta que passa por a_3 se a curva C é dada como na figura III.2.a. Por hipótese R $\not\pitchfork C$ e, portanto, $\overline{C} \not\pitchfork_{a_3} C$. Desta maneira o segmento $\overline{C}$ coincide com C próximo a a_3. Sendo assim, $m_r = m_3$ se, e somente se, $\frac{m_2.m_4}{m_1} = m_3$. Desta maneira, R $\not\pitchfork C$ se, e somente se, $\frac{m_1.m_3}{m_2.m_4} = 1$.

Caso - 2

Seja C uma curva qualquer, nas hipóteses da proposição III.2.1, que tenha em R um retângulo inscrito.

Ilustração

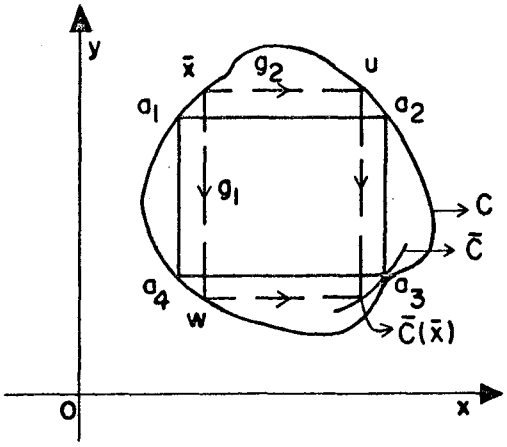


FIG. III. 2. b

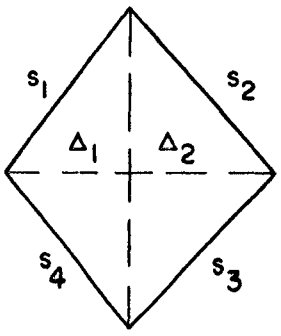
(⇒)

Estamos admitindo por hipótese R $\not\pitchfork C$. Daí, $\overline{C} \not\pitchfork_{a_3} C$ o que nos leva a: $\overline{C}$ é tangente a C em a_3. Para cada $\overline{x} \in Dom\overline{C}$, considere as secantes, s_i i = 1, 2 e 4, à curva C assim:

s_1 passa por a_1 e $\overline{x}$

s_2 passa por a_2 e u

s_4 passa por a_4 e w, e denotaremos por s_3 a reta secante à curva $\overline{C}$ que passa por a_3 e $\overline{C}(\overline{x})$. A partir destas é possível construir um sistema linear homogêneo, com solução não nula por meio de:



Fazendo $\overline{m}_j$ j = 1, 2, 3 e 4 as declividades das s_j, tal sistema é dado por

$$\begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_4 & \overline{m}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, devemos ter

$$det \begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_4 & \overline{m}_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Como *det* é uma função contínua

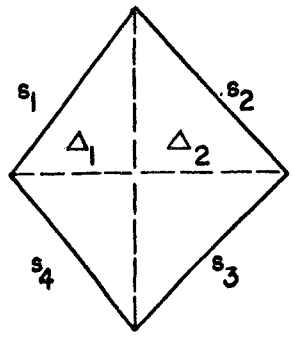
$$\lim_{\overline{x} \to a_1} det \begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_4 & \overline{m}_3 \end{pmatrix} = 0$$

e daí $m_1.m_3 - m_2.m_4 = 0$ pois $\lim_{\overline{x} \to a_1} \overline{m}_j = m_j$, j = 1, 2, 3 e 4.

Portanto, $\frac{m_1.m_3}{m_2.m_4} = 1$ se R $\not\subset C$.

($\Leftarrow$)

Por hipótese $\frac{m_1.m_3}{m_2.m_4} = 1$ (*). Usaremos s_j e $\overline{m}_j$ para denotar as retas secantes e suas declividades como em ($\Rightarrow$). Daí temos:



e (Δ_1, Δ_2) é solução não nula do sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_4 & \overline{m}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$det \begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_4 & \overline{m}_3 \end{pmatrix} = 0.$$

e, como det é uma função contínua

$$\lim_{\overline{x} \to a_1} det \begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_4 & \overline{m}_3 \end{pmatrix} = 0.$$

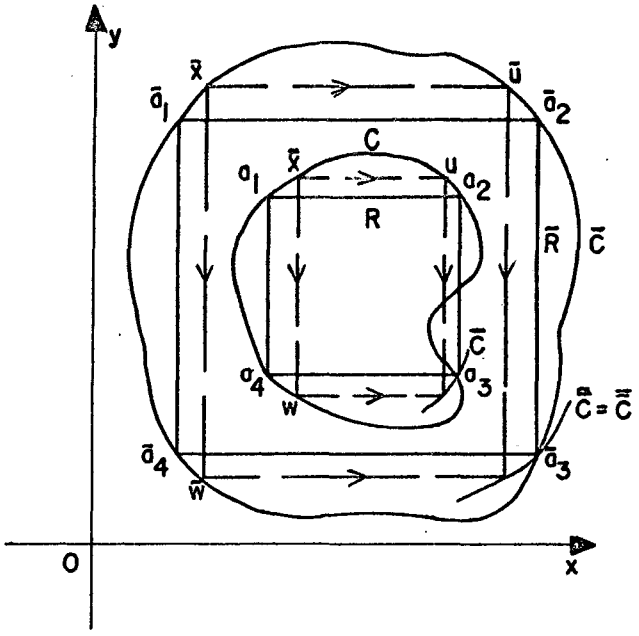
Assim, $\frac{m_1 . \lim_{\overline{x} \to a_1} \overline{m}_3}{m_2 . m_4} = 1 \overset{(*)}{=} \frac{m_1 . m_3}{m_2 . m_4}$, ou seja, $\lim_{\overline{x} \to a_1} \overline{m}_3 = m_3$. Conclui-se, então, que $\overline{C}$ é tangente a C em a_3 e daí, $\overline{C} \not\pitchfork_{a_3} C$.

Portanto, R $\not\pitchfork C$ se $\frac{m_1 . m_3}{m_2 . m_4} = 1$.

III.3 Ação de um bi-difeomorfismo sobre uma curva com retângulo inscrito transverso

Seja C uma curva com retângulo inscrito R e R $\pitchfork C$. Façamos k $= k_1 \times k_2$ um bi-difeomorfismo e passemos a verificar como age k nesta

situação.



Considerando $k(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{C}}$, $k(R) = \tilde{R}$, e sem perda de generalidade $k(a_3) = \tilde{a}_3$, temos: $\tilde{\overline{\mathcal{C}}} = k(\overline{\mathcal{C}}) = \tilde{\overline{\mathcal{C}}}$, onde $\tilde{\overline{\mathcal{C}}}$ é construída sobre $\tilde{\mathcal{C}}$ de maneira análoga à construção de $\overline{\mathcal{C}}$ sobre $\mathcal{C}$.

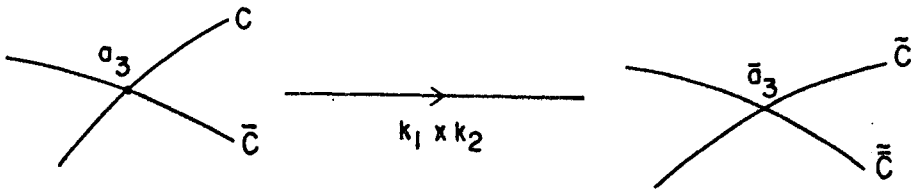
Vamos supor que $\tilde{R} \not\pitchfork \tilde{\mathcal{C}}$, daí $\tilde{\overline{\mathcal{C}}} \not\pitchfork_{\tilde{a}_3} \tilde{\mathcal{C}}$. Façamos $(d\,\tilde{\overline{\mathcal{C}}})(0) = (d\,\tilde{\mathcal{C}})(0), \tilde{\overline{\mathcal{C}}} = \tilde{\mathcal{C}}\,(0) = \tilde{a}_3$ e $\overline{\mathcal{C}}(0) = \mathcal{C}(0) = a_3$.

Temos: $(d\,\tilde{\overline{\mathcal{C}}})(0) = (d\,\tilde{\mathcal{C}})(0) \iff (dk \circ \overline{\mathcal{C}})(0) = (dk \circ \mathcal{C})(0) \iff (dk)(\overline{\mathcal{C}}(0)).(d\overline{\mathcal{C}})(0) = (dk)(\mathcal{C}(0))(d\mathcal{C})(0) \iff (d\overline{\mathcal{C}})(0) = (d\mathcal{C})(0) \iff \overline{\mathcal{C}} \not\pitchfork_{a_3} \mathcal{C} \iff R \not\pitchfork \mathcal{C}$. Impossível, estamos admitindo $R \pitchfork \mathcal{C}$.

Conclusão

Retângulos transversais a uma curva são preservados por bidifeomorfismos, ou seja, $R \pitchfork \mathcal{C}$, então $k(R) \pitchfork k(\mathcal{C})$.

Ilustração



III.4 A não densidade das aplicações bi-estáveis

Finalmente, usaremos o conceito de retângulo transversal a uma curva para alcançarmos um dos objetivos deste capítulo, que é comprovar que o conjunto das aplicações bi-estáveis f : M $\longrightarrow$ $\mathcal{R}^2$, com M compacta, não é denso.

Sendo $\Re$ e f_4 dados como em II.3.6 e II.3.7, respectivamente, temos:

III.4.1 Proposição

Seja $\mathcal{C}$ uma curva, R um retângulo inscrito em $\mathcal{C}$, a_i i=1,2,3 e 4 vértices de R e $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ em a_i. Então, $R \pitchfork \mathcal{C}$ se, e somente se, $f_4 \pitchfork_A \Re$ A $= (a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Demonstração

Temos que: $\Re = < (1,0,0,0,0,0,1,0),(0,1,0,1,0,0,0,0),$ $(0,0,1,0,1,0,0,0),(0,0,0,0,0,1,0,1) >$ e G $= (df_4)_A(T_A \cdot {}_4S^1) =$ $< (1,m_1,0,0,0,0,0,0)$, $(0,0,1,m_2,0,0,0,0)$, $(0,0,0,0,1,m_3,0,0)$, $(0,0,0,0,0,0,1,m_4) >$.

Daí, $R \pitchfork \mathcal{C} \iff \bar{\mathcal{C}} \pitchfork_{a_3} \mathcal{C} \iff \frac{m_1 . m_3}{m_2 . m_4} \neq 1 \iff$

$m_2.m_4 - m_1.m_3 \neq 0 \iff det\binom{\Re}{G} \neq 0 \iff < \Re, G >= \mathcal{R}^8 \iff$
$(df_4)_A(T_A \cdot {}_4S^1) + T_A\Re = \mathcal{R}^8 \iff f_4 \pitchfork_A \Re.$

III.4.2 Teorema

O conjunto das curvas bi-estáveis não é denso.

Demonstração

Consideremos $\mathcal{C}$ uma curva com retângulo inscrito R tal que R $\pitchfork$ $\mathcal{C}$.

Como transversalidade é uma condição aberta, existe uma vizinhança de $\mathcal{C}$ onde todas as curvas têm retângulo inscrito transverso. Por II.2.1, nesta vizinhança existem somente curvas instáveis. Portanto, não é denso o conjunto das curvas bi-estáveis.

Passemos, então, ao objetivo deste capítulo.

III.4.3 Teorema

O conjunto das aplicações bi-estáveis f : M $\longrightarrow$ $\mathcal{R}^2$, com M variedade diferenciável compacta dimM $\geq$ 2, não é denso.

Demonstração

Seja f : M $\longrightarrow$ $\mathcal{R}^2$, M compacta e dimM $\geq$ 2 tal que f(S_j(f)) seja uma curva com retângulo inscrito transverso. S_j(f) é uma componente de Σ_f. Toda aplicação g arbitrariamente próxima de f, é tal que g(S_j(g)) tem retângulo inscrito transverso e por II.2.2 são instáveis. Portanto, não é denso o conjunto das f : M $\longrightarrow$ $\mathcal{R}^2$ bi-estáveis com M compacta.

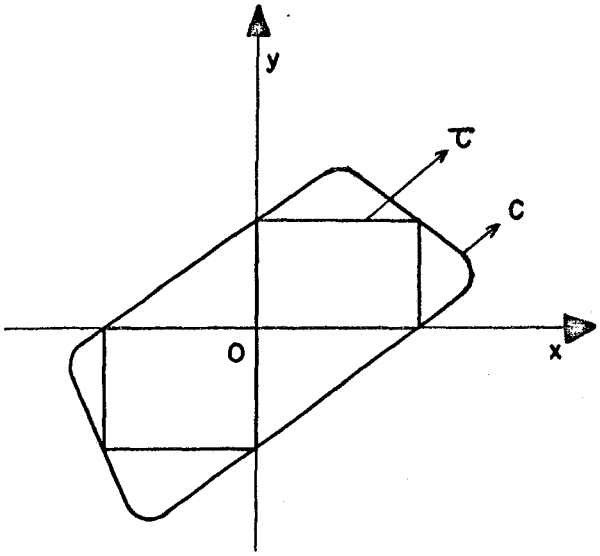
Capítulo IV

Generalizações

Neste capítulo, pretendemos "estender" as noções apresentadas nos capítulos II e III a respeito de retângulos inscritos. Apresentaremos definições e resultados utilizando técnicas muito parecidas às apresentadas nestes dois últimos capítulos. Trata-se das noções de circuitos, circuitos inscritos e circuitos transversos.

Estas generalizações são importantes, devido ao fato de existirem curvas com circuitos inscritos, mas que não admitem retângulos inscritos. Poderemos justificar este fato por meio da ilustração.

Ilustração



IV.1 Circuitos

IV.1.1 Definição

Um conjunto $\tau \subset \mathcal{R}^2$ é dito um circuito se:

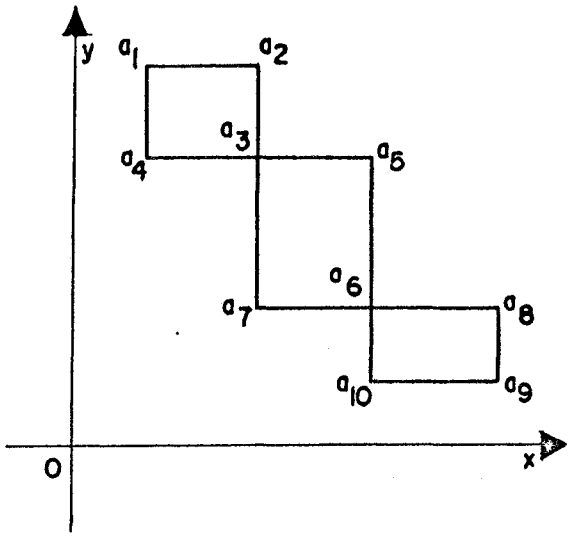
a) τ é uma reunião finita de retângulos.

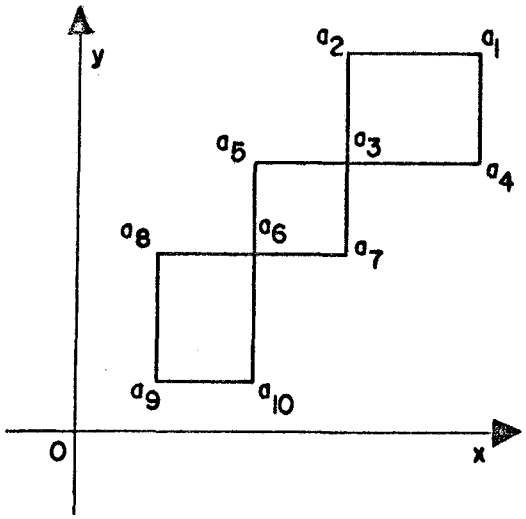
b) τ é conexo por caminhos.

c) Dois retângulos quaisquer que se interceptam têm um único ponto em comum.

d) Para qualquer reta horizontal ou vertical r, que não passa pelos vértices dos retângulos e $r \cap \tau \neq \emptyset$, tem-se: $\# \, r \cap \tau = 2$.

Ilustração





Observações

a) Denominaremos por malha cada retângulo que compõe o circuito τ. Na ilustração, τ tem 3 malhas e diremos : 3-circuito.

b) Se τ é um 1-circuito, então, τ é um retângulo, como na definição II.1.1.

c) São ditos vértices de um circuito τ, os $a_{i's}$ que pertencem a uma única malha. Por exemplo, na ilustração somente a_3 e a_6 <u>não</u> são vértices.

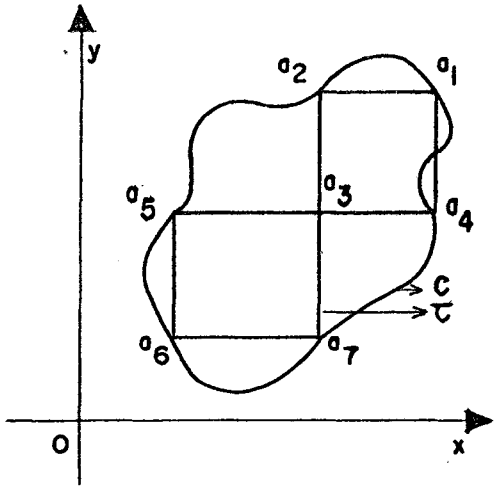
d) Um circuito de p malhas, ou seja, um p-circuito, possui 2p + 2 vértices. Ao vértice a_1 denominamos primeiro vértice e a a_{3p+1}, último vértice.

No desenvolvimento deste capítulo, usaremos como conceito de curva aquele dado em II.1.2.

IV.1.2 Definição

Seja $\mathcal{C}$ uma curva e τ um p-circuito. Diremos que τ é um circuito inscrito em $\mathcal{C}$ se seus vértices $a_{i's} \in \mathcal{C}$.

Ilustração



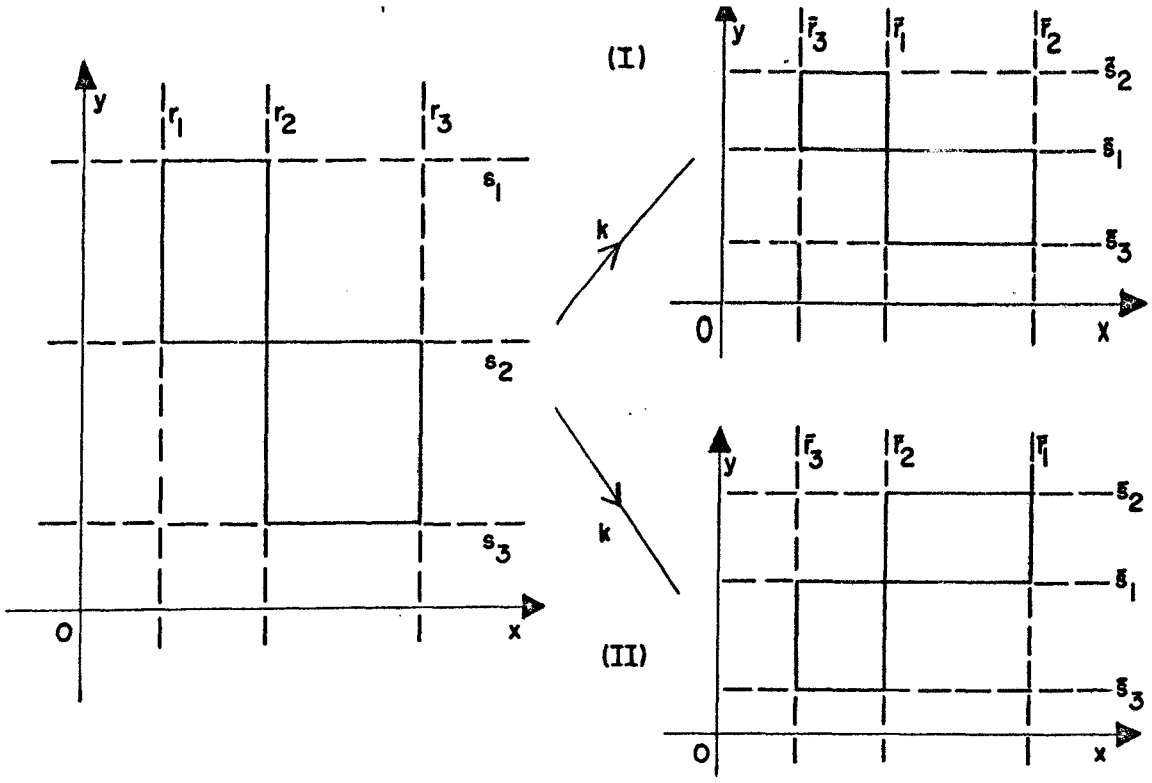
Observação

Se a_j estiver em duas malhas e $a_j \in C$ o estudo de circuitos inscritos reduz-se ao estudo de retângulos inscritos.

Existem analogias entre os conceitos e resultados de curva com retângulo inscrito, e de curva com circuito inscrito. No decorrer deste capítulo procuraremos evidenciá-las.

IV.2 Ação de um bi-difeomorfismo sobre curvas com circuito inscrito

Consideraremos τ um 2-circuito e $k = k_1 \times k_2$ um bi--difeomorfismo. Afirmamos que $k(\tau) = \tilde{\tau}$ é ainda um 2-circuito. De fato, consideremos como auxílio a ilustração.



Com o auxílio das retas r_i e s_i, i = 1, 2 e 3, podemos verificar que k leva τ em $\tilde{\tau}$ nas situações (I) ou (II) ilustradas, que de fato representam um circuito.

O mesmo ocorre se τ é um p-circuito, $p > 2$. Sendo assim, é lógico que uma curva com circuito inscrito é levada por um bi-difeomorfismo numa curva com circuito inscrito.

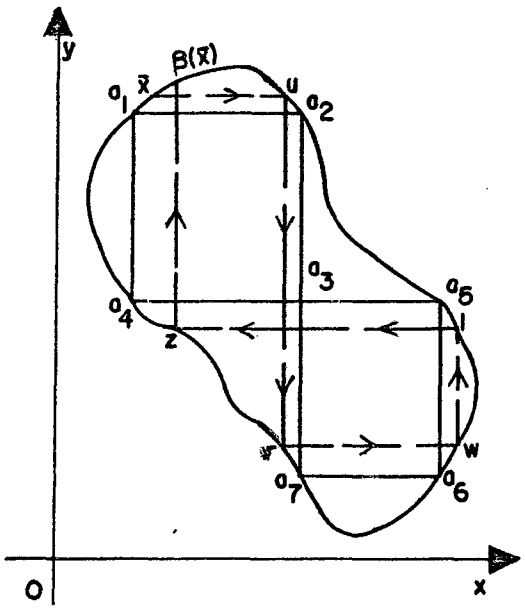
IV.3 A construção de uma aplicação diferenciável

Seja $\mathcal{C}$ uma curva e τ um 2-circuito inscrito em $\mathcal{C}$. Façamos $0 < |m_i| < \infty$, i = 1, ..., 7, i $\neq$ 3, as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices de τ. Os conjuntos U_1 e C_1 são tomados de maneira similar àquela

da construção de α em II.3.1.

Definimos $\beta : U_1 \longrightarrow C_1$ assim:

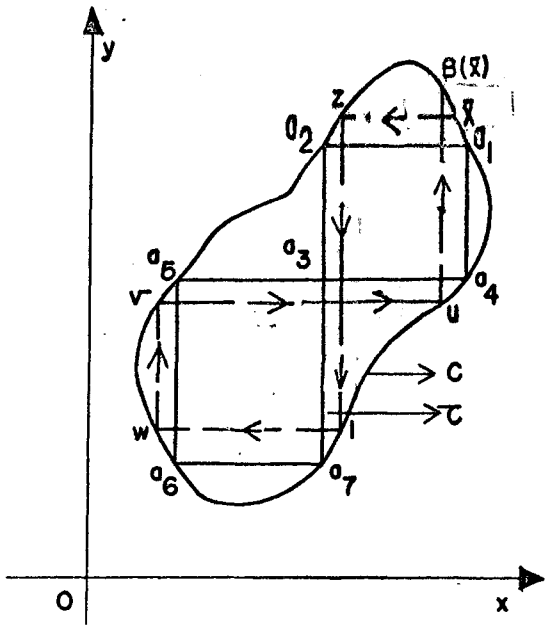
Para cada $\overline{x} \in U_1$ associamos $\beta(\overline{x}) \in C_1$ seguindo também um esquema, inteiramente análogo àquele utilizado em II.3.1. Para não tornarmos o processo repetitivo, nos orientaremos pela ilustração, seguindo o sentido das setas.



Observação

a) O processo de construção de β é exatamente o mesmo da construção de α fazendo as "ampliações" necessárias, devido ao número maior de vértices de um circuito em relação a um retângulo.

b) A aplicação β não sofre nenhuma alteração, caso o circuito τ tenha a outra disposição possível, como podemos ver na ilustração.



c) Se τ é um p-circuito, procede-se da mesma maneira para construir β.

d) A diferenciabilidade de β é extraída do fato de β ser uma composição dessas aplicações "horizontais" e "verticais", que são diferenciáveis, conforme comprovação feita em II.3.2.

e) A definição de $\beta'(a_1)$ obedece às mesmas considerações de II.3.3, feitas para ψ, parametrização de $\mathcal{C}$ próxima a a_1, para chegarmos a: $\beta'(a_1) = (\psi^{-1} \circ \beta \circ \psi)'(0)$.

f) Analogamente ao que fizemos em II.3.5, para verificar os invariantes associados a $(\mathcal{C}$,R,$\alpha)$, é também possível concluir que os invariantes associados a $(\mathcal{C},\tau,\beta)$ são em número finito.

IV.3.1 Proposição

Seja $\mathcal{C}$ uma curva, τ um 2-circuito inscrito em $\mathcal{C}$ e $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices de τ. Então, $\beta'(a_1) = \frac{m_1.m_5.m_7}{m_2.m_4.m_6}$.

Demonstração:

Seja ψ uma parametrização de C próxima à a_1 com, $\psi(s) = (s,f(s))$ e $\psi(0) = a_1$, como em II.3.3. Sendo $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ a aplicação definida em IV.3, façamos $\varphi(s) = \beta_1(s,f(s))$. Daí, $\varphi(s) = (\psi^{-1} \circ \beta \circ \psi)(s)$ e $\varphi'(0) = \beta'(a_1)$.

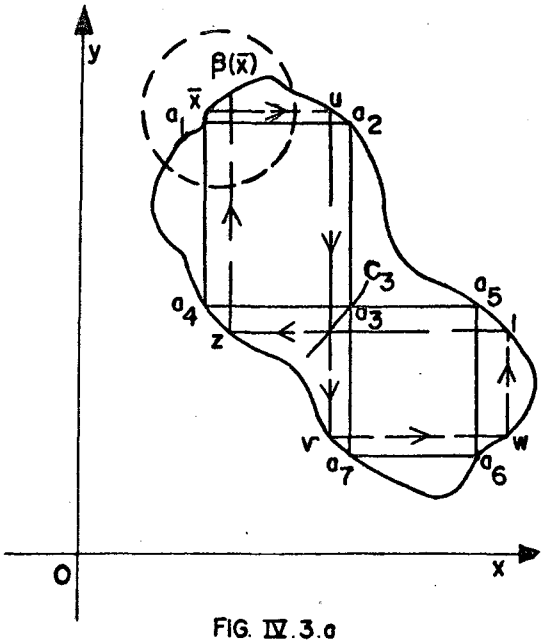
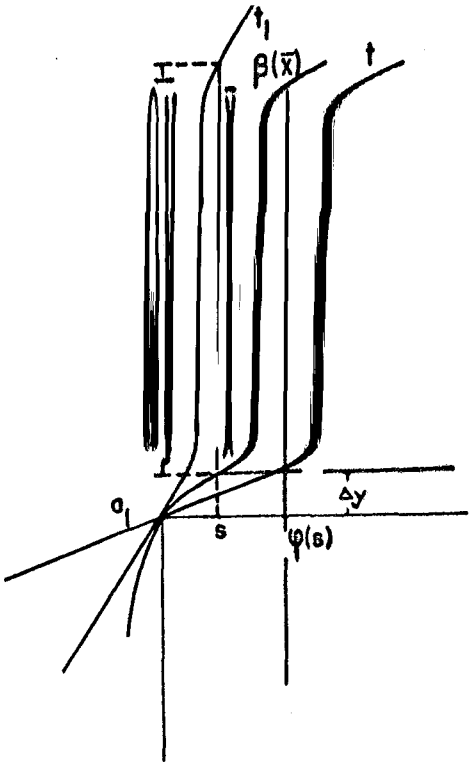
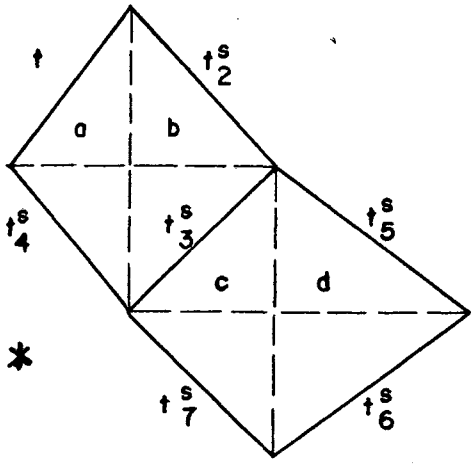


FIG. IV.3.a

Para cada $\overline{x} \in U_1$ destaquemos a região circundada na figura IV.3.a, para obtermos:



t_1 é a tangente a C em a_1 e m_s a declividade de t. Daí, $\varphi(s) = \frac{\Delta y}{m_s}$ e $\Delta y + \overline{\Delta y} = m_1.s$ e assim: $\varphi(s) = (m_1.s - \overline{\Delta y}).\frac{1}{m_s}$. O valor numérico m_s pode ser obtido dos sistemas lineares homogêneos, com soluções não triviais, dados por:



$$(I)\begin{pmatrix} m_s & m_2{}^s \\ m_4{}^s & m_3{}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(II)\begin{pmatrix} m_3{}^s & m_5{}^s \\ m_7{}^s & m_6{}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$pois \;\; det\begin{pmatrix} m_s & m_2{}^s \\ m_4{}^s & m_3{}^s \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} m_3{}^s & m_5{}^s \\ m_7{}^s & m_6{}^s \end{pmatrix} = 0.$$

Daí, $m_s = \frac{m_2{}^s.m_4{}^s.m_6{}^s}{m_5{}^s.m_7{}^s}$. Os $t_j{}^s$ que aparecem em (*) são retas secantes a $\mathcal{C}$ que passam por u e a_2, z e a_4, l e a_5, w e a_6 e v e a_7, sendo os $m_j{}^s$ suas declividades. O valor $m_3{}^s$ denota a declividade de $t_3{}^s$, reta secante a $\mathcal{C}_3$ que passa por a_3 e $\mathcal{C}_3(\overline{x})$. $\mathcal{C}_3$ surge em meio à construção de β por um mecanismo muito parecido àquele da construção de $\overline{\mathcal{C}}$ em III.1.1.

Substituindo o valor numérico de m_s na expressão de $\varphi(s)$, obtemos: $\varphi(s) = (m_1.s - \overline{\Delta y}).\frac{m_5{}^s.m_7{}^s}{m_2{}^s.m_4{}^s.m_6{}^s}$. Mas, $\beta'(a_1) = \varphi'(0) = \lim_{s\to 0}\frac{\varphi(s)}{s}$ e portanto $\beta'(a_1) = \lim_{s\to 0}(m_1 - \frac{\overline{\Delta y}}{s}).\frac{m_5{}^s.m_7{}^s}{m_2{}^s.m_4{}^s.m_6{}^s} = \frac{m_1.m_5.m_7}{m_2.m_4.m_6}$.

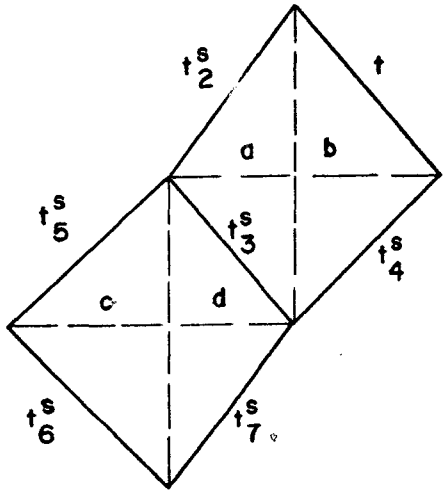
Extraimos esta conclusão dos seguintes fatos:

- como t_1 é a tangente a $\mathcal{C}$ em a_1, $\lim_{s\to 0}\frac{\overline{\Delta y}}{s} = 0$

- $\lim_{s\to 0} m_j{}^s = m_j$, j = 2, 4, 5, 6 e 7

Observação

Convém observar que o valor de m_s utilizado na demonstração da proposição IV.3.1 é o mesmo, caso o 2-circuito τ tenha a outra disposição possível. Sendo assim, também $\beta'(a_1)$ não se altera. Com efeito, m_s seria obtido de:



$$(I)\begin{pmatrix} m_2{}^s & m_s \\ m_3{}^s & m_4{}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(II)\begin{pmatrix} m_5{}^s & m_3{}^s \\ m_6{}^s & m_7{}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $m_s = \frac{m_2{}^s.m_4{}^s.m_6{}^s}{m_5{}^s.m_7{}^s}$.

Usando o raciocínio indutivo, podemos chegar a um valor para $\beta'(a_1)$ quando τ é um p-circuito inscrito, p $\geq$ 2, em uma curva $\mathcal{C}$. O valor que se obtém é o seguinte:

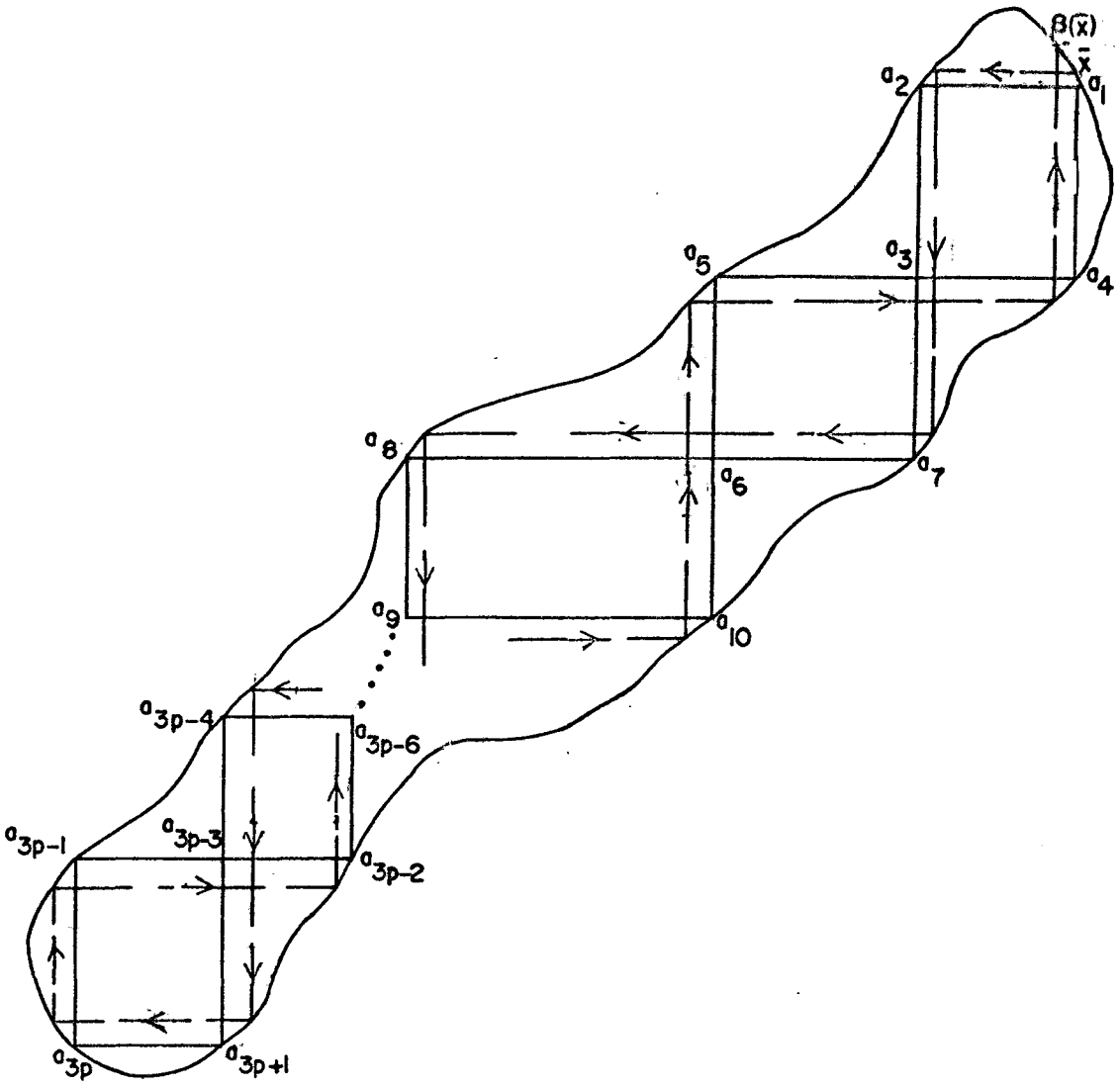
$$\beta'(a_1) = \begin{cases} m_1.\prod_{\substack{k=1 \\ k \not\equiv 0 mod 3}}^{p+\frac{p-2}{2}} \frac{m_{2k+3}}{m_{2k}}.\frac{1}{m_{3p}}, & \text{se o número de malhas p for par} \\ \\ \frac{1}{m_2}.\prod_{\substack{k=2 \\ k \not\equiv 0 mod 3}}^{p+\frac{p+1}{2}} \frac{m_{2k-3}}{m_{2k}}.m_{3p}, & \text{se o número de malhas p for ímpar} \end{cases}$$

A demonstração deste fato pode ser feita utilizando-se as técnicas e idéias contidas na demonstração de IV.3.1. Basta tomar m_s como:

a -) $\prod_{\substack{k=1 \\ k \not\equiv 0 \text{ mod } 3}}^{p+\frac{p-2}{2}} \frac{m_{2k}}{m_{2k+3}}.m_{3p}$, se o número de malhas p for par.

b -) $m_1.m_2.\prod_{\substack{k=2 \\ k \not\equiv 0 \text{ mod } 3}}^{p+\frac{p+1}{2}} \frac{m_{2k}}{m_{2k-3}}.\frac{1}{m_{3p}}$, se o número de malhas p for ímpar

Ilustração



A ilustração mostra-nos uma curva C com um p-circuito inscrito τ, bem como a construção de β.

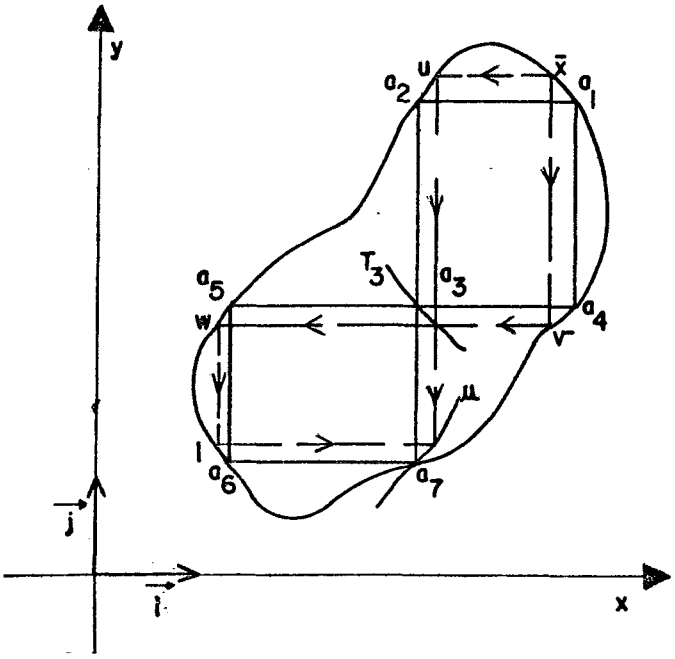
IV.4 Circuitos transversos

Assim como fizemos para retângulos, definiremos circuitos transversais a uma curva.

Seja $\mathcal{C}$ uma curva, τ um 2-circuito inscrito em $\mathcal{C}$ e, $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a $\mathcal{C}$ nos vértices de τ.

Escolhamos $\overline{U}_1$ como em III.1.1 na definição de $\overline{\mathcal{C}}$ para definir $\mu : \overline{U}_1 \to \mathcal{R}^2$, seguindo o mesmo mecanismo da construção de $\overline{\mathcal{C}}$. Devemos considerar as "ampliações" necessárias, devido ao número maior de vértices de τ quando comparado com os de R.

Orientaremos a construção de μ por meio da figura abaixo, seguindo o sentido das setas.



Observações

a) Já atentamos anteriormente para o fato da construção de μ

obedecer às mesmas regras de $\overline{C}$ em III.1.1. Sendo assim, a diferenciabilidade de μ é natural.

b) $\mu(a_1) = a_7$

c) Se τ é um p-circuito, $p > 2$, procede-se da mesma maneira para se construir μ e, neste caso, $\mu(a_1) = a_{3p+1}$

IV.4.1 Definição

Seja C uma curva, τ um p-circuito inscrito em C e, $0 < |m_i| < \infty$ as declividades das tangentes a C nos vértices de τ. Dizemos que τ é transversal a C se $\mu \not\pitchfork_{a_{3p+1}} C$.

Notação: $\tau \not\pitchfork C$

Assim, como foi possível fornecer uma caracterização para retângulos transversais, também no caso de circuitos é possível.

IV.4.2 Proposição

Seja C uma curva, τ um 2-circuito inscrito e $0 < |m_i| < \infty$, as declividades das tangentes a C nos vértices de τ. Então, $\tau \not\pitchfork C$ se, e somente se, $\frac{m_1.m_5.m_7}{m_2.m_4.m_6} = 1$.

Demonstração:

Por hipótese $\tau \not\pitchfork C$, daí $\mu \not\pitchfork_{a_7} C$, ou seja, μ e C são tangentes em a_7.

Ilustração

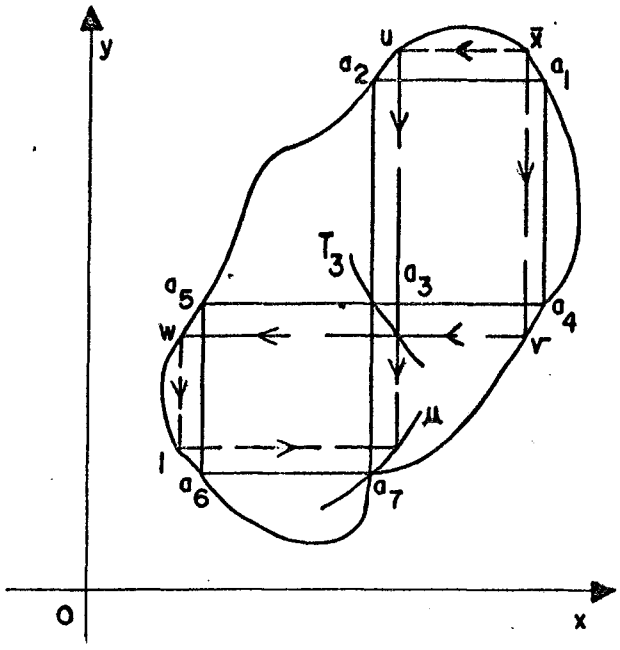
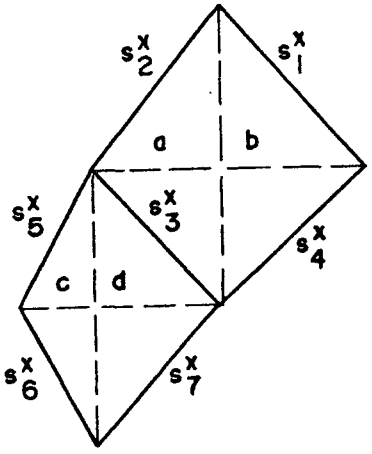


FIG. IV.4.a

($\Longrightarrow$)

Para cada $\overline{x} \in \overline{U}_1$ é possível construir dois sistemas lineares homogêneos com soluções não nulas, a partir do esquema abaixo:



- $s_3{}^x$ é a secante a T_3 que passa por a_3 e $T_3(\overline{x})$. T_3 surge na construção de μ por um mecanismo análogo ao empregado em III.1.1, na construção de $\overline{C}$. Façamos $\overline{m}_3$ a declividade de $s_3{}^x$.

- $s_j{}^x$, j = 1, 2, 3, 4, 5 e 6, são as secantes a C que passam por a_1 e $\overline{x}$, a_2 e u, a_4 e v, a_5 e w e a_6 e l. Os valores $\overline{m}_j$ denotam as declividades de $s_j{}^x$.

- $s_7{}^x$ é a secante a μ que passa por a_7 e $\mu(\overline{x})$, sendo $\overline{m}_7$ sua declividade.

Temos:

$$(I) \quad \begin{pmatrix} \overline{m}_2 & \overline{m}_1 \\ \overline{m}_3 & \overline{m}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(II) \begin{pmatrix} \overline{m}_5 & \overline{m}_3 \\ \overline{m}_6 & \overline{m}_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e, portanto,$$

$$det \begin{pmatrix} \overline{m}_2 & \overline{m}_1 \\ \overline{m}_3 & \overline{m}_4 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \overline{m}_5 & \overline{m}_3 \\ \overline{m}_6 & \overline{m}_7 \end{pmatrix} = 0.$$

Mas det é uma função contínua e assim,

$$\lim_{\overline{x} \to a_1} det \begin{pmatrix} \overline{m}_2 & \overline{m}_1 \\ \overline{m}_3 & \overline{m}_4 \end{pmatrix} = \lim_{\overline{x} \to a_1} det \begin{pmatrix} \overline{m}_5 & \overline{m}_3 \\ \overline{m}_6 & \overline{m}_7 \end{pmatrix} = 0.$$

Daí, $\frac{m_2 . m_4}{m_1} = m_3 = \frac{m_5 . m_7}{m_6}$, já que $\lim_{\overline{x} \to a_1} \overline{m}_j = m_j$, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7.

Portanto, se $\tau \not\pitchfork C$ temos $\frac{m_1 . m_5 . m_7}{m_2 . m_4 . m_6} = 1$.

($\Leftarrow$)

Consideremos as $s_j{}^x$ e $\overline{m}_j$, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, e os sistemas (I) e (II) extraídos da construção de μ, já indicados em ($\Rightarrow$).

Destaquemos: $\overline{m}_7$ é a declividade da secante $s_7{}^x$ a μ que passa por $\mu(\overline{x})$ e a_7, sendo m_7 declividade da tangente a C em a_7.

$$Temos \quad det \begin{pmatrix} \overline{m}_2 & \overline{m}_1 \\ \overline{m}_3 & \overline{m}_4 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \overline{m}_5 & \overline{m}_3 \\ \overline{m}_6 & \overline{m}_7 \end{pmatrix} = 0$$

e como det é uma função contínua

$$\lim_{\overline{x}\to a_1} det \begin{pmatrix} \overline{m}_2 & \overline{m}_1 \\ \overline{m}_3 & \overline{m}_4 \end{pmatrix} = \lim_{\overline{x}\to a_1} det \begin{pmatrix} \overline{m}_5 & \overline{m}_3 \\ \overline{m}_6 & \overline{m}_7 \end{pmatrix} = 0.$$

Daí, $\frac{m_1.m_5.\lim_{\overline{x}\to a_1}\overline{m}_7}{m_2.m_4.m_6} = 1 = \frac{m_1.m_5.m_7}{m_2.m_4.m_6}$. Portanto, $\lim_{\overline{x}\to a_1}\overline{m}_7 = m_7$, ou seja, μ é tangente a C em a_7. Logo, $\tau \not\pitchfork C$.

É possível fornecer uma caracterização para $\tau \not\pitchfork C$, quando τ é um p-circuito. De fato, se τ é um p-circuito, então $\tau \not\pitchfork C$ se, e somente se

a) $1 = m_1.\prod_{k=1}^{p+\frac{p-2}{2}} \frac{m_{2k+3}}{m_{2k}}.\frac{1}{m_{3p}}$, se p é par
k $\not\equiv$ 0 mod 3

b) $1 = \frac{1}{m_2}.\prod_{k=2}^{p+\frac{p+1}{2}} \frac{m_{2k-3}}{m_{2k}}.m_{3p}$, se p é ímpar
k $\not\equiv$ 0 mod 3 .

A demonstração deste fato é feita segundo os mesmos mecanismos da proposição IV.4.2. Basta considerar p sistemas lineares homogêneos com soluções não nulas, caso τ tenha a forma da figura IV.4.a, dados por:

$$a_1) \begin{pmatrix} \overline{m}_2 & \overline{m}_1 \\ \overline{m}_3 & \overline{m}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1{}^1 \\ a_1{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2) \begin{pmatrix} \overline{m}_5 & \overline{m}_3 \\ \overline{m}_6 & \overline{m}_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2{}^1 \\ a_2{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_p)\begin{pmatrix} \overline{m}_{3p-1} & \overline{m}_{3p-3} \\ \overline{m}_{3p} & \overline{m}_{3p+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_p{}^1 \\ a_p{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observação

Se $\mathcal{C}$ é uma curva com circuito transverso τ, existe um vinhança de $\mathcal{C}$ onde todas as curvas têm circuito inscrito transverso, pelo fato da transversalidade ser uma condição aberta.

Como podemos facilmente perceber, todas as noções estabelecidas a respeito de circuitos estão muito próximas daquelas estabelecidas para retângulos, nos capítulos II e III. Não pretendemos demonstrar os resultados que daremos a seguir, mesmo porque o processo é exatamente o mesmo utilizado nas demonstrações de II.2.1 e II.2.2. Trata-se apenas de substituir nas hipóteses de II.2.1 e II.2.2 o conceito de retângulo R por p-circuito τ, p $\geq$ 2. E ainda, considerar $\Re = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_{3p+1}) : a_{i's}$ são vértices de um p-circuito $\}$. Observar que :

$$codim_{\mathcal{R}^{4(p+1)}}{}^{\Re} = 2(p+1) \quad e$$

$$\begin{tikzcd}
{}_{2(p+1)}S^1 \arrow[r, "{}_{2(p+1)}j^0 f"] \arrow[dr, "f_{2(p+1)}"'] & {}_{2(p+1)}J^0(S^1, \mathcal{R}^2) = (S^1 \times \mathcal{R}^2)^{2(p+1)} \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathcal{R}^{4(p+1)}
\end{tikzcd}$$

IV.4.3 Teorema

Se $\mathcal{C}$ é uma curva com um p-circuito inscrito τ, então $\mathcal{C}$ é instável.

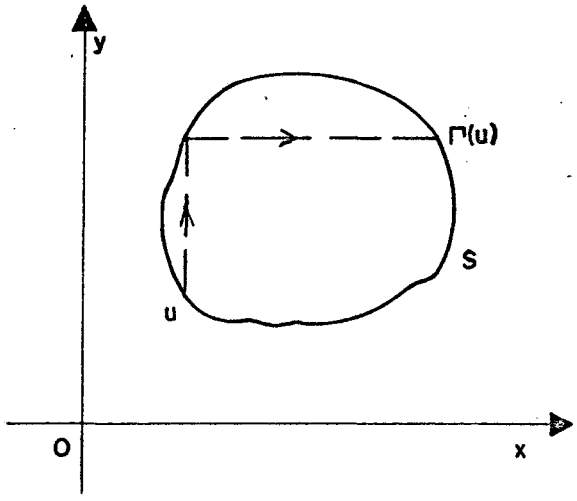
IV.4.4 Teorema

Seja f : M $\longrightarrow \mathcal{R}^2$ com M uma variedade diferenciável compacta e dimM $\geq$ 2, tal que f(S_j(f)) seja uma curva com p-circuito inscrito. Então, f é instável.

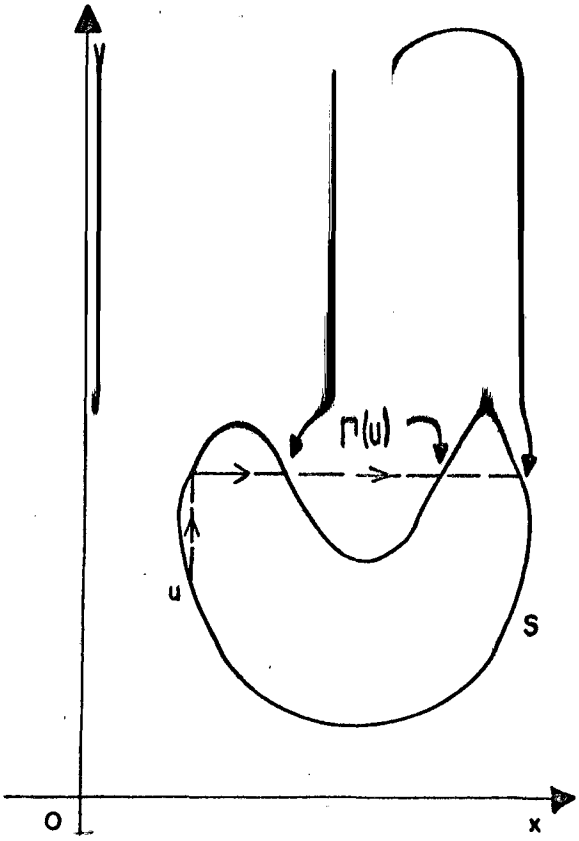
Considerações finais

1 - O resultado obtido do Teorema IV.4.4 reduz sensivelmente a possibilidade de existência de aplicações bi-estáveis, f : M $\longrightarrow \mathcal{R}^2$ com M compacta.

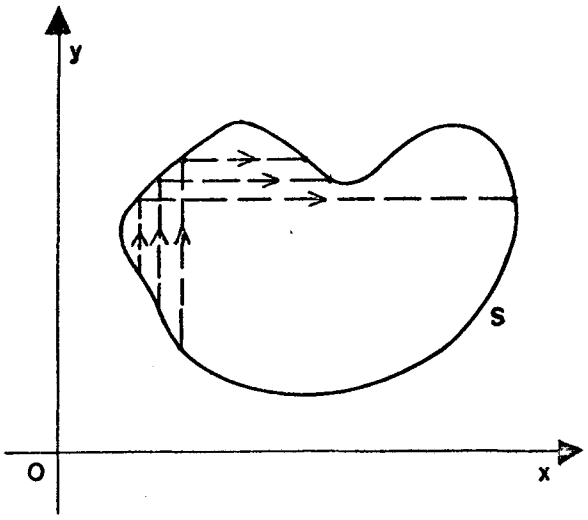
2 - Quando já trabalhávamos na redação desta dissertação, tomamos conhecimento de [6]. Neste artigo, J. P. DUFOUR define uma aplicação Γ : S $\longrightarrow$ S, $S \cong S^1$ esquematizada na figura.



No caso de termos um conjunto S como na figura seguinte, como ficaria Γ(u) ?



Convém observar que a escolha de um destes valores poderia acarretar problemas na continuidade de Γ.



Neste caso, a idéia é guardar todas as informações sobre Γ no ponto u, em todos os valores indicados na figura anterior, considerando, para tanto, Γ como uma aplicação multivalente, ou seja, uma multi-aplicação.

Ainda em [6], DUFOUR desenvolve, num longo estudo, sobre a dinâmica de multi-aplicações em dimensão 1 (um). Como consequência deste estudo, DUFOUR obtém um resultado surpreendente:

"Não existe aplicação bi-estável $f : M \longrightarrow \mathcal{R}^2$, com M varie-

dade diferenciável compacta".

Neste mesmo trabalho, DUFOUR mostra a existência de $f : S^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ bi-estável no <u>*sentido*</u> <u>*topológico*</u>, isto é, exige-se apenas que h e $k = k_1 \times k_2$ do diagrama

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{R}^2 \arrow[d, "k = k_1 \times k_2"] \\ S^2 \arrow[r, "g"] & \mathcal{R}^2 \end{tikzcd}$$

sejam homeomorfismos.