UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Medidas de máxima entropia para difeomorfismos
parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta
em $\mathbb{T}^3$**

Joás Elias dos Santos Rocha

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Joás Elias dos Santos Rocha

**Medidas de máxima entropia para difeomorfismos
parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta
em $\mathbb{T}^3$**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO
REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Prof. Dr. Ali Tahzibi

USP – São Carlos
Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R672m Rocha, Joás
 Medidas de máxima entropia para difeomorfismos
 parcialmente hiperbólicos com folheação central
 compacta em T^3 / Joás Rocha; orientador Ali
 Tahzibi. -- São Carlos, 2018.
 66 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

 1. Medidas de Máxima Entropia. 2. Expoente de
 Lyapunov. 3. Difeomorfismo Parcialmente Hiperbólico.
 4. Bacia . I. Tahzibi, Ali , orient. II. Título.

Joás Elias dos Santos Rocha

**Maximal entropy measures for partially hyperbolic
diffeomorphisms with compact center foliations on $\mathbb{T}^3$**

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Ali Tahzibi

USP – São Carlos

April 2018

À Helena Rocha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo encorajamento.

A orientação de Ali Tahzibi, crucial para o desenvolvimento da tese.

A Gabriel Ponce e Régis Varão pela conversas e recepção na UNICAMP.

A Jiagang Yang pela comunicação sobre seu trabalho.

Aos colegas amigos que fiz durante o doutorado e que me ajudaram em algum sentido.
A Pablo Carrasco, Rafaela Neves, Cleidinaldo Aguiar, José Santana, Jorge Parejas, Henry Gullo, Cayo Doria, Carol Mesquita, Victor Hugo e Edmilson Roque.

Aos professores e funcionários do ICMC .

Aos amigos da República Tijuana.

A Valdenberg Araújo da Silva pela grande ajuda.

A CAPES-PROEX pelo apoio financeiro DS-9058324/D.

RESUMO

ROCHA, J.E. **Medidas de máxima entropia para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta em $\mathbb{T}^3$** . 2018. 66 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Este trabalho trata das medidas de máxima entropia para certos difeomorfismos em nilvariedades. Considere um difeomorfismo parcialmente hiperbólico f definido em T^3 , dinamicamente coerente com folheação central compacta. Suponha ainda que a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo em T^2 . Mostramos que o conjunto das medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia é enumerável. Usando o princípio de invariância, mostramos que se o primeiro retorno de f à alguma folha periódica tem número de rotação irracional, então, f tem no máximo duas medidas ergódicas de máxima entropia e ter apenas uma medida de máxima entropia equivale a ser extensão de rotação. Se a aplicação de primeiro retorno à alguma folha central periódica é Morse-Smale, então existe um su-toro periódico, ou temos uma cota superior para o número de medidas ergódicas de máxima entropia que depende do número de atratores da dinâmica nessa folha. Além disso, estudamos a topologia da bacia das medidas ergódicas de máxima entropia para uma outra classe de difeomorfismos especiais que são genéricos no espaço dos difeomorfismos absolutamente parcialmente hiperbólicos e denotada por $SPH_1(M)$.

Palavras-chave: Medidas de máxima entropia, Expoentes de Lyapunov, Difeomorfismo Parcialmente Hiperbólico, Bacia.

ABSTRACT

ROCHA, J.E. **Maximal entropy measures for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliations on $\mathbb{T}^3$** . 2018. 66 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

This work is about maximal entropy measures for certain diffeomorphisms on nilmanifolds. Consider a partially hyperbolic diffeomorphism f on T^3 , C^2 , dynamically coherent with compact center foliation which is a circle bundle. Assume that the map induced by f on the space of center leaves is a transitive Anosov homeomorphism. We show that the set of hyperbolic ergodic maximal entropy measures of f is countable. Using the invariance principle, we show that if the first return map to some periodic leaf has irrational rotation number then f has at most two ergodic maximal entropy measures and, in this case, if f has only one maximal entropy measure then f is a rotation extension. If the first return map to some periodic leaf is Morse-Smale then either there exists some periodic su-torus or an upper bound for the number of ergodic maximal entropy measure depending on the number of the attractors of the dynamics in this leaf. Moreover, we study the topology of basin of ergodic maximal entropy measures of another set of special diffeomorphisms that are generic in the space of absolutely partially hyperbolic systems and denoted by $SPH_1(M)$.

Keywords: Maximal entropy measures, Lyapunov Exponent, Partially hyperbolic diffeomorphism, Basin.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Holonomia	57
Figura 2 – Pontos relevantes	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	21
2.1	Folheações	21
2.2	Sistemas Anosov e Partição de Markov	22
2.3	Dinâmica no Círculo	24
2.4	Entropia Topologica	24
2.5	Medidas Invariantes	25
2.6	Entropia Métrica	27
2.7	Teorema de Oseledets	28
2.8	Teoria de Pesin	29
3	SISTEMAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS	31
3.1	Generalidades	31
3.2	Medidas de máxima entropia em 3-nilvariedades	36
3.3	Medidas Físicas	38
3.4	Sistema Iterado de Funções	40
3.5	Medidas de Equilíbrio	41
4	RESULTADOS	43
4.1	Propriedades das medidas de máxima entropia para sistemas parci- almente hiperbólicos	43
4.2	Prova do teorema C	46
4.3	Prova do teorema A	48
4.4	Prova do teorema B	52
4.5	Prova do teorema D	54
4.6	Proposição F	58
4.7	Exemplos	59
	REFERÊNCIAS	63

INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos é a área de estudo sobre o comportamento assintótico de aplicações $f : M \rightarrow M$ onde o conjunto M está equipado com uma estrutura que pode ser, uma σ -álgebra, uma topologia ou uma estrutura de variedade diferenciável e aplicação f pode ser mensurável, contínua ou diferenciável, respectivamente. Nesta tese estudamos sistemas que se enquadram no terceiro caso com M compacta. Assim podemos estudar a aplicação em três aspectos: geométrico, topológico e mensurável.

Destacam-se neste contexto a classe de aplicações denominadas por 'sistemas parcialmente hiperbólicos'. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito parcialmente hiperbólico se o fibrado tangente admite uma decomposição contínua $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ invariante pela diferencial Df e para a qual Df contrai uniformemente em E^s , expande uniformemente em E^u e tem um comportamento intermediário em E^c . As distribuições instável e estável são sempre unicamente integráveis (HIRSCH; PUGH; SHUB, 2006). A distribuição central E^c nem sempre é unicamente integrável (HERTZ; HERTZ; URES, 2016). Além disso, quando existe, tipicamente não é absolutamente contínua (RUELLE; WILKINSON, 2001), (SHUB; WILKINSON, 2000), (AVILA; VIANA; WILKINSON, 2011). Os sistemas para os quais $E^{cs} = E^s \oplus E^c$ e $E^{cu} = E^u \oplus E^c$ são integráveis e portanto, E^c é integrável são chamados dinamicamente coerentes. As variedades tangentes a distribuição E^c são chamadas folhas centrais quando a distribuição é unicamente integrável. Um sistema é dito acessível se conseguimos ligar dois pontos do espaço com uma concatenação de um número finito de caminhos não-degenerados tangentes as folheções instável ou estável.

Em (GOGOLEV, 2011), (HAMMERLINDL; POTRIE, 2016) e alguns surveys, o leitor pode encontrar um apanhado de resultados sobre sistemas parcialmente hiperbólicos.

Toda aplicação contínua definida num compacto possui medida de probabilidade invariante e é de interesse saber o comportamento do sistema do ponto de vista probabilístico para certas medidas consideradas naturais. As medidas de máxima entropia são medidas que captam

subconjuntos invariantes para a aplicação $f : M \longrightarrow M$ onde a aplicação se comporta com maior complexidade. O expoente central de uma medida invariante é a taxa média de crescimento exponencial da derivada na direção E^c com relação a esta medida. Todo sistema parcialmente hiperbólico com direção central unidimensional é entropy-expansive e em particular possui medida de máxima entropia (FISHER *et al.*, 2010), (KELLER, 1998).

Em (HERTZ *et al.*, 2012) os autores estudam sistemas de classe C^2 , dinamicamente coerentes, parcialmente hiperbólicos com folhas centrais compactas e com acessibilidade definidas em nilvariedades. Concluem que esses sistemas satisfazem uma dicotomia: ou possuem uma única medida ergódica de máxima entropia e essa medida tem expoente central nulo (o que provam ser equivalente a ser conjugado a extensão de rotação) ou possuem no máximo um número finito de medidas ergódicas de máxima entropia todas com expoente não nulo. A ferramenta fundamental para lidar com o caso de expoente nulo é o princípio de invariância (AVILA; VIANA, 2010) e (AVILA *et al.*, 2013) que é uma generalização de (FURSTENBERG, 1963), (LEDRAPPIER, 1986). A grosso modo, a ideia do princípio é que sistemas com expoente central nulo na direção das fibras de um dado fibrado admitem uma estrutura invariante transversal as fibras se a medida tem certa regularidade e aplicação induzida na base do fibrado é parcialmente hiperbólica. Para o caso complementar, foram usados elementos da teoria de Pesin que ajudam a lidar com medidas com expoente central não nulo e (RUELLE; WILKINSON, 2001) que caracteriza a desintegração dessas medidas ao longo da folheação central.

Dando sequência ao estudo de Hertz *et al.* (2012), em (TAHZIBI; YANG, 2016) os autores mostram que a entropia métrica das medidas ergódicas com expoente central nulo não podem aproximar a entropia total do sistema.

Por fim, em (URES; VIANA; YANG, 20-) os autores caracterizam geometricamente as medidas de máxima entropia nesse contexto de (HERTZ *et al.*, 2012). Essa análise e suas conclusões são similares aquelas feitas em (DOLGOPYAT; VIANA; YANG, 2016) para medidas físicas que são medidas invariantes cujas bacias tem medida de Lebesgue positiva, por definição.

Nesta tese, usamos o princípio de invariância para estudar determinados sistemas em nilvariedades e conseguimos um resultado análogo ao que aparece em (HERTZ *et al.*, 2012). A principal diferença aqui é que não assumimos acessibilidade.

Teorema A. Seja $f : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado. Suponha que a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo. Se f exibe uma folha periódica com número de rotação irracional então vale uma, e só uma, das alternativas abaixo:

- f possui apenas uma medida de máxima entropia μ com $\lambda^c(\mu) = 0$. Além disso, f é conjugada a uma extensão de rotação.

- f possui exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia. Uma com expoente central negativo e outra com expoente central positivo.

Dizemos que $f \in SPH_1(M)$ se é um difeomorfismo em M de classe C^2 , parcialmente hiperbólico, acessível, dinamicamente coerente com direção central unidimensional cuja folheação central é composta por folhas compactas que formam um fibrado e a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo. Provamos um resultado sobre a topologia da bacia das medidas de máxima entropia para sistemas em $SPH_1(M)$.

Teorema B. Suponha que $f \in SPH_1(\mathbb{T}^3)$. Então existe $\mu \in ME^-(f)$ tal que $\text{int}(\overline{\mathcal{B}^+(\mu)}) \neq \emptyset$ ou $\eta \in ME^+(f)$ com $\text{int}(\overline{\mathcal{B}^-(\eta)}) \neq \emptyset$.

Usando a ideia de (HERTZ *et al.*, 2012) provamos:

Teorema C. Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado. Suponha que a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo.

Então, o conjunto das medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia de f é enumerável.

Teorema D. Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado. Suponha que a aplicação de f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo.

1. se f tem uma folha central periódica com dinâmica 1-Morse-Smale. Então, existe um su -toro invariante ou f tem uma única medida de máxima entropia com expoente negativo.
2. se f tem uma folha central periódica com dinâmica k -Morse-Smale, então, f possui no máximo $2(k + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ medidas ergódicas de máxima entropia ou um su -toro invariante.

Proposição E. Seja $f \in SPH_1(M)$ que não é extensão de rotação. Suponha que o conjunto $R = \{q \in \mathbb{N} \mid \text{existe } p \text{ com } p/q = \rho(f^l|W^c(x))\}$, para alguma $W^c(x)$ é periódica com período l , $p \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1\}$ é ilimitado. Então f possui exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia uma com expoente central negativo e outra com expoente central positivo

Por fim, usamos (URES; VIANA; YANG, 20-) para contar as medidas de máxima entropia quando $f \in SPH_1(M)$ é transitiva com holonomias equicontínuas no **Proposição F** abaixo.

Proposição F. Seja $f \in SPH_1(\mathbb{T}^3)$ que não é extensão de rotação. Suponha que dado $x \in \mathbb{T}^3$ a família $\{h_{x,y}^u\}_{y \in W^u(x)}$ é família equicontínua. Então, existe uma única medida ergódica de máxima entropia com expoente negativo.

A tese está organizada da seguinte maneira:

- No capítulo 2, apresentamos as ferramentas e conceitos básicos que aparecem ao longo da tese.
- No capítulo 3, falamos das aplicações com as quais iremos trabalhar e apresentamos uma série de resultados correlatos com os da tese.
- Por fim, no capítulo 4, aparecem as provas dos resultados da tese, alguns exemplos e provas de alguns resultados não autorais que são usados de maneira decisiva.

PRELIMINARES

2.1 Folheações

Definição 1. Uma partição $\mathcal{F}$ de M é dita uma folheação de dimensão l e de classe C^r , $r \geq 0$ em M se existe um atlas $\mathcal{A} = (\phi_\alpha, B^l \times B^{n-l})_{\alpha \in I}$ de classe C^r tal que para todo $y \in B^{n-l}$ e $\alpha \in I$ temos

$$\phi_\alpha(B^l \times y) \subset \mathcal{F}(\phi(0, y)).$$

Intuitivamente, uma folheação de dimensão l é uma partição composta por variedades de dimensão l e classe C^r empilhadas de maneira semelhante a partição de R^n por espaços afins paralelos de dimensão l .

Para $\phi \in \mathcal{A}$ o conjunto $\phi(B^l \times y)$ é chamado de placa e $\phi(B^l \times B^{n-l})$ é chamado de caixa folheada.

Seja $f : M \rightarrow M$ contínua. A folheação $\mathcal{F}$ é dita f -invariante se $f(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(f(x))$.

Dada uma distribuição $E \subset TM$, dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ é tangente a E se $T_x \mathcal{F}(x) = E(x)$ para todo $x \in M$.

No resto da secção seguiremos a terminologia em (PUGH *et al.*, 1997). Usualmente, em sistemas dinâmicos as folheações não são mais que C^0 . Defini-se então outras noções de regularidade.

Uma folheação é dita regular se $\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y)$ existe para todo $(x, y) \in B^l \times B^{n-l}$, é não singular e é contínua em todos os pontos.

Definição 2. suponha que $\mathcal{F}$ é invariante para $f : M \rightarrow M$ e $\mathcal{G}$ é invariante para $g : M \rightarrow M$. Dizemos que as folheações são conjugadas se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{G}(h(x))$.

Suponha que f é difeomorfismo.

Definição 3. Uma folheação invariante regular é dita normalmente hiperbólica se para alguma métrica existe uma decomposição contínua $TM = E^s \oplus T\mathcal{F} \oplus E^u$ invariante por Df satisfazendo:

- $\|Df|E^s(x)\| < 1 < \|Df|E^u(x)^{-1}\|^{-1}$, para todo $x \in M$.
- $\|Df|E^s(x)\| < \|Df|T_x\mathcal{F}(x)^{-1}\|^{-1}$, para todo $x \in M$.
- $\|Df|T_x\mathcal{F}(x)\| < \|Df|E^u(x)^{-1}\|^{-1}$, para todo $x \in M$.

Para definir uma plaqueamento de $\mathcal{F}$ escolhemos uma família finita de caixas folheadas $\varphi : B^l \times B^{n-l} \rightarrow M$ para a qual as caixas $\varphi(\frac{1}{2}B^l \times \frac{1}{2}B^{n-l})$ formam ainda uma cobertura de M . O plaqueamento é então a família formada pelas placas $\varphi(B^l \times \{y\})$.

Fixe um plaqueamento de $\mathcal{F}$.

Definição 4. Uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é dita ε -pseudo-órbita se $\text{dist}(x_{n+1}, f(x_n)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 5. Dizemos que uma folheação invariante $\mathcal{F}$ é plaque-expansive se existe $\varepsilon > 0$ para o qual dadas $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ε -pseudo-orbitas tais que $d(x_n, y_n) < \varepsilon$ com $f(x_n)$ e x_{n+1} na mesma placa de $\mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ então x_n e y_n pertencem a mesma placa.

É preciso dizer que a noção de ser plaque-expansive não depende do plaqueamento inicial.

Teorema 1. (Estabilidade)(HIRSCH; PUGH; SHUB, 2006) Uma folheação normalmente hiperbólica, e plaque-expansive $\mathcal{F}$ para $f : M \rightarrow M$ é estável por perturbações C^1 . Em outros termos, se $g : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo suficientemente próximo de f na topologia C^1 então existe uma única folheação $\mathcal{G}$ invariante para g próxima de $\mathcal{F}$ e conjugada à esta por um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$. Além disso, $\mathcal{G}$ é normalmente hiperbólica e plaque-expansive.

2.2 Sistemas Anosov e Partição de Markov

Definição 6. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ numa variedade compacta é dito ser Anosov se para alguma métrica existe uma decomposição contínua $TM = E^s \oplus E^u$ e $\lambda < 1$, $\beta > 1$ e uma constante $C > 0$ de modo que $|Df^n|E^s(x)| < \lambda^n$ e tal que $|(Df^n|E^u(x))^{-1}|^{-1} > \beta^n$ para todo $x \in M$.

O conjunto dos difeomorfismos de Anosov é um conjunto aberto na topologia C^1 .

Um resultado clássico em (HIRSCH; PUGH; SHUB, 2006), garante que existem folheações tangentes as direções E^u e E^s , digamos W^u e W^s . Dado $\varepsilon > 0$ pequeno, definimos $W_{loc}^*(x) = B_M(x, \varepsilon) \cap W^*(x)$ para $*$ $\in \{u, s\}$.

Definamos $[x, y] \equiv W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^u(y)$. Dizemos que $R \subset M$ é um retângulo se dados $x, y \in R$ temos $[x, y], [y, x] \in R$ e $R = \overline{\text{int}(R)}$. Uma partição $\{R_i\}_{i=1, \dots, n}$ por retângulos é dita de Markov quando vale :

- $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$.
- se $x \in \text{int}(R_i) \cap f^{-1}(\text{int}(R_j))$ então $R_j \cap W^u(f(x)) \subset f(W^u(x) \cap R_i)$ e $f(W^s(x) \cap R_i) \subset W^s(f(x)) \cap R_i$.

A existência de partição de Markov está ligada com a possibilidade de codificação das órbitas e semiconjugação de sistemas Anosov no toro com subshifts do tipo finito, por exemplo. Para uma introdução, o leitor pode consultar (KATOK; HASSELBLATT, 1997), (LIND; MARCUS, 1995), (ADLER; WEISS, 1967).

Considere um homeomorfismo $h : N \rightarrow N$ onde um espaço métrico compacto com métrica ρ . Defina:

$$W^s(x, \varepsilon) = \{y \in N; \rho(g^n x, g^n y) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0\}$$

$$W^u(x, \varepsilon) = \{y \in N : \rho(g^{-n} x, g^{-n} y) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0\}$$

Definição 7. Dizemos que g é um homeomorfismo de Anosov se existem $\varepsilon, \delta > 0, C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que

- Se $y \in W^s(x, \varepsilon)$ então $\rho(g^n x, g^n y) \leq C\lambda^n \rho(x, y)$ para todo $n \geq 0$.
Se $y \in W^u(x, \varepsilon)$ então $\rho(g^{-n} x, g^{-n} y) \leq C\lambda^n \rho(x, y)$ para todo $n \geq 0$.
- Se $\rho(x, y) \leq \delta$ então :

$$\text{card}(W^s(x, \varepsilon) \cap W^u(y, \varepsilon)) = 1$$

e definindo $[x, y] \equiv W^s(x, \varepsilon) \cap W^u(y, \varepsilon)$ temos que $[\cdot, \cdot]$ é contínua.

Teorema 2. Homeomorfismos Anosov admitem partição de Markov.

De fato, o conceito de homeomorfismo Anosov foi introduzido na procura por axiomas que garantissem a existência de uma partição de Markov (ALEKSEEV; YAKOBSON, 1981).

Considere uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ com matriz de entradas inteiras, $\det A = 1$ e autovalores com norma diferente de 1. Como A tem entradas inteiras, temos $A(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$. Assim, A induz uma aplicação $F_A : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Como $\det A = 1$, a aplicação F_A é injetiva e preserva a medida de Lebesgue.

A aplicação F_A é um Anosov.

De fato, se $E^s(0)$ e $E^u(0)$ são as autodireções de A , então identificando $T_x M$ com $T_0 M$ e fazendo $E^s(x) \equiv E^s(0)$ e $E^u(x) \equiv E^u(0)$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$, temos a decomposição que garante que F_A é Anosov.

A aplicação F_A obtida deste modo é chamado de Anosov linear. A construção acima pode ser generalizada para $\mathbb{T}^n$.

Teorema 3. (FRANKS, 1969), (MANNING, 1974), (MANNING, 1975). Em $\mathbb{T}^n$ todo homeomorfismo Anosov é topologicamente conjugado a um Anosov linear.

2.3 Dinâmica no Círculo

Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo que preserva orientação. Considere um levantamento $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f , i.e., uma aplicação F tal que $F \circ p = p \circ f$ onde $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ com $p(t) = e^{it}$.

Teorema 4. Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe o limite:

$$R(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Além disso, esse limite é o mesmo para todo x .

Definição 8. Definimos o número de rotação de $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ como o limite $\rho(f) = \{R(f)\}$ obtido como acima onde $R(f)$ é o limite definido acima e $\{x\}$ representa a parte fracionária de x .

Teorema 5. (DENJOY, 1932) Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo de classe C^2 com número de rotação irracional ρ . Então, f é conjugado à rotação R_ρ . Por consequência, todo ponto tem órbita densa.

Proposição 1. Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo de classe C^2 com número de rotação racional $\rho = \frac{p}{q}$ e $m.d.c.(p, q) = 1$. Então, todo ponto periódico de f tem período q .

Definição 9. Dizemos que uma aplicação $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é k -Morse-Smale se possui $2k$ pontos periódicos, k dos quais são atratores e os outros k , repulsores. Além disso se $P = \{a_1, \dots, a_{2k}\}$ é conjunto de tais pontos periódicos, tem-se $\Omega(g) = P$. Denotaremos o conjuntos das aplicações k -Morse-Smale por MS_k .

Teorema 6. (MELO; STRIEN, 2012) O conjunto dos sistemas Morse-Smale do círculo é aberto e denso na topologia C^1 .

2.4 Entropia Topologica

Entropia topológica é um invariante por conjugação topológica que quantifica a complexidade das órbitas de um sistema num sentido que será precisado nesta secção. A seguir, introduziremos alguns conceitos como limites. A prova da existência desses limites é clássica e pode ser encontrada em (VIANA; OLIVEIRA, 2014), por exemplo.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua e M um espaço topológico compacto. Considere $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que um conjunto $E \subset M$ é (n, ε) -gerador se dado $x \in M$ existe $y \in E$ tal que $\text{dist}(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon$ para $k = 0, \dots, n-1$. Seja $r(n, \varepsilon) = \min\{\text{card} E; E \text{ é } (n, \varepsilon)\}$.

Definição 10. Definimos a entropia topológica como

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon)$$

Proposição 2. Se f e g são sistemas conjugados topologicamente então $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(g)$.

Podemos ainda definir a entropia topológica por meio de conjuntos separados. Considere $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que um conjunto $S \subset M$ é (n, ε) -separado se dados $x, y \in S$ existe $j \in \{0, \dots, n\}$ para o qual $\text{dist}(f^j(x), f^j(y)) \geq \varepsilon$. Seja $S(n, \varepsilon) = \max\{\#S; S \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-separado}\}$. Se definimos:

$$s(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S(n, \varepsilon)$$

Temos:

Teorema 7. $h_{\text{top}}(f) = s(f)$.

2.5 Medidas Invariantes

Considere uma aplicação $f : M \rightarrow M$ mensurável.

Definição 11. Uma medida μ é dita f -invariante se dado $E \subset M$ mensurável tem-se $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$.

As vezes é útil levar uma medida de um espaço para outro como na definição:

Definição 12. Seja $g : M \rightarrow N$ uma aplicação mensurável e μ medida de probabilidade em M . O push-forward de μ por g é a medida $g_*\mu$ definida por $g_*\mu(E) = \mu(g^{-1}(E))$ para todo $E \subset N$ mensurável.

A existência de medidas invariante existe para uma classe ampla de aplicações dado que:

Teorema 8. Toda aplicação contínua num compacto possui medida invariante.

O leitor pode consultar (VIANA; OLIVEIRA, 2014) para o teorema acima.

Definição 13. Uma medida invariante μ é dita ergódica se dado E mensurável tal que $f^{-1}(E) = E$ então $\mu(E) \in \{0, 1\}$.

Ter ergodicidade significa que do ponto de vista mensurável, o sistema não pode ser decomposto.

Se $\mathcal{P}_i$ são partições finitas de M para $i = 1, \dots, n$ definimos $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 = \{A \cap B; A \in \mathcal{P}_1 \text{ e } B \in \mathcal{P}_2\}$ e recursivamente definimos $\bigvee_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_n \vee (\bigvee_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}_i)$.

Definição 14. Seja μ medida e $\mathcal{P}$ partição cujos elementos são mensuráveis. Seja $\hat{\mu} = \beta_*(\mu)$ onde $\beta : M \rightarrow M/\mathcal{P}$ é a aplicação que associa x ao único conjunto $\mathcal{P}(x)$ que contém x . Dizemos que a família $\{\mu_x\}$ de medidas em M é uma desintegração de μ na partição $\mathcal{P}$ se:

- $\mu_x(\mathcal{P}(x)) = 1$ para μ -quase todo ponto x .
- Se $E \subset M$ é mensurável, então $x \mapsto \mu_x(E)$ é $\hat{\mu}$ -mensurável e $\mu(E) = \int \mu_x(E) d\hat{\mu}$.

Uma partição $\mathcal{P}$ é dita mensurável se existe uma sequência E_n de partições finitas com elementos mensuráveis de modo que $\mathcal{P} = \bigvee_{i=0}^{\infty} E_n$.

Teorema 9. (ROKHLIN, 1949) Se $\mathcal{P}$ é uma partição mensurável em M e μ é uma medida em M então existe uma desintegração de μ relativa a $\mathcal{P}$. Além disso, a desintegração é essencialmente única, i.e., se $\{\mu_x\}$ e $\{m_x\}$ são desintegrações de μ , então $\mu_x = m_x$ para μ -q.t.p x .

Como consequência da unicidade essencial da desintegração, se μ é f -invariante e $\mathcal{P}$ é partição invariante então $f_*\mu_x = m_{f(x)}$ para μ -qtp x .

O seguinte teorema afirma que as medidas ergódicas são os pontos extremais do conjunto das medidas de máxima entropia.

Teorema 10 (Decomposição ergódica). Se μ é invariante existe uma partição $\mathcal{P}$ em conjuntos mensuráveis de um subconjunto de $M_0 \subset M$ com $\mu(M_0) = 1$ e uma família de medidas ergódicas $\{\mu_P\}_{P \in M_0}$ de modo que :

- A aplicação $P \rightarrow \mu_P(E)$ é mensurável para todo E mensurável.
- $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\hat{\mu}(P)$ para todo E mensurável.
- $\mu_P(P) = 1$ para $\hat{\mu}$ -q.t.p P .

onde $\hat{\mu}$ é o pushforward de μ pela aplicação $M \rightarrow M/\mathcal{P}$ que leva x no elemento da partição que contém x .

2.6 Entropia Métrica

Seja μ uma medida invariante para f . Considere uma partição $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_n\}$ finita de M . A entropia da partição é por definição:

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n -\mu(E_i) \log \mu(E_i).$$

Seja $\mathcal{P}^n \equiv \bigvee_{i=1}^n f^{-i} \mathcal{P}$.

Seja $h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n)$ (A prova da existência do limite pode ser encontrada em (VIANA; OLIVEIRA, 2014)).

Definição 15. Chamamos de entropia métrica o seguinte supremo tomado sobre todas as partições finitas de M :

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

A entropia métrica é um invariante topológico no sentido seguinte sentido. Suponha que $f : M \rightarrow M$ é conjugada a aplicação $g : N \rightarrow N$ contínua por um homeomorfismo t , *i.e.*, $t \circ f = g \circ t$. Então, se μ é f -invariante temos $h_\mu(f) = h_{t_*\mu}(g)$ (na verdade, é suficiente que t seja mensurável com inversa mensurável).

Teorema 11 (Jacobs). Se $\{\mu_P\}_P$ é decomposição ergódica de μ então

$$h_\mu(f) = \int h_{\mu_P}(f) d\hat{\mu}(P)$$

Corolário 1. Se $\{\mu_P\}_P$ é a decomposição ergódica de uma medida de máxima entropia μ então para $\hat{\mu}$ -q.t.p P vale que μ_P tem máxima entropia.

Corolário 2. Suponha que o sistema f possua apenas um número finito de medidas de probabilidade ergódicas de máxima entropia $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$. Então toda medida μ de máxima entropia é da forma $\mu = a_1\mu_1 + \dots + a_k\mu_k$ onde $a_i \geq 0$ e $\sum_{j=1}^k a_j = 1$.

Temos a seguinte relação entre entropia métrica e entropia topológica:

Teorema 12. (DINABURG, 1971) [Princípio Variacional] $h_{top}(f) = \sup_{\mu} h_\mu(f)$.

Definição 16. Uma medida μ é dita de máxima entropia se $h_\mu = \sup_v h_v(f)$ onde o sup é tomado sobre todas medidas f -invariantes.

Existe ainda uma definição de entropia topológica que tem caráter dimensional que pode ser encontrado em (PESIN, 2008), (PESIN; WEISS, 1997) mas fogem ao escopo deste texto.

O teorema abaixo fornece uma relação entre a entropia de sistemas semi-conjugados e será utilizado no próximo capítulo.

Teorema 13. (LEDRAPPIER; WALTERS, 1977) Sejam F e f sistemas contínuos semi conjugados como abaixo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Considere ν uma medida f -invariante. Então, vale:

$$\sup_{p_*\mu=\nu} h_\mu(F) = h_\nu(f) + \int_M h(F, p^{-1}(x)) d\nu(x)$$

Observação 1. $h(F, p^{-1})$ no teorema acima é definida por meio de conjuntos geradores (ou separados) restritos a fibra $p^{-1}(x)$. Apesar de $p^{-1}(x)$ não ser necessariamente invariante a definição faz sentido bastando seguir as fibras $p^{-1}(f(x)), \dots, p^{-1}(f^n(x))$.

A topologia fraca* será a topologia com a qual trabalharemos ao longo do texto. O leitor interessado em saber mais sobre essa e outras topologias no espaço das medidas, pode consultar (VIANA; OLIVEIRA, 2014).

Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Considere uma medida de probabilidade μ em M . Para $\varepsilon > 0$, definamos:

$$V(\mu, \varphi, \varepsilon) = \{\eta \in \mathcal{M}_1(M); |\int \varphi d\mu - \int \varphi d\eta| < \varepsilon\}$$

A topologia fraca* em $\mathcal{M}_1(M)$ é a topologia cuja sub-base é coleção de conjuntos da forma $V(\mu, \varphi, \varepsilon)$ definimos como acima.

Teorema 14. $\mathcal{M}_1(M)$ é metrizável e compacto se M é compacto e separável.

Proposição 3. Uma sequência de medidas de probabilidade $\{\lambda_n\}_n$ em M converge na topologia fraca* para uma medida λ se para toda função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ temos que

$$\lim \int \varphi d\lambda_n = \int \varphi d\lambda$$

Definição 17. O suporte de uma medida μ , denotado por $\text{supp}(\mu)$, é conjuntos dos pontos x para os quais $\mu(U) > 0$ para todo aberto U contendo x .

2.7 Teorema de Oseledets

Considere um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$.

Definição 18. Seja $x \in M$ e $v \in T_x M$. Dizemos que $\lambda(x, v)$ é o expoente de Lyapunov de f em x na direção v se

$$\lambda(x, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x)v|.$$

O teorema de Oseledets é uma espécie de teorema "espectral assintótico" se fizermos uma analogia entre expoentes e autovalores.

Teorema 15. (OSELEDETS, 1968) Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^1 . Existe $M^* \subset M$ tal que $\mu(M^*) = 1$ para toda medida μ f -invariante e para cada $x \in M^*$ existem $k = k(x)$, $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{k(x)}(x)$ e uma decomposição $T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_{k(x)}(x)$ invariante por Df , i.e., $Df(x)E_i(x) = E_i(f(x))$ tal que para $v \in E_i(x)$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lambda_i(x).$$

Observação 2. Como $k(x) = k(f(x))$ e $\lambda_i(x) = \lambda_i(f(x))$, se μ é medida ergódica invariante, então, existe $\tilde{M} \subset M$ com $\mu(\tilde{M}) = 1$ e constantes $k, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que para todo $x \in \tilde{M}$ existe uma decomposição $T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_k(x)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lambda_i$ para todo $v \in E_i(x)$.

2.8 Teoria de Pesin

Esta secção é baseada em (BARREIRA; PESIN, 2002).

A teoria de Pesin é útil para lidar com difeomorfismos que não são uniformemente hiperbólicos.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação C^2 numa variedade riemanniana compacta M . Um conjunto $R \subset M$ é dito não uniformemente hiperbólico se existe $\varepsilon > 0$ e:

- constantes $\lambda < 0$ e $\mu > 1$.
- $K, C : R \rightarrow (0, \infty)$ mensuráveis.
- subespaços $E^u(x), E^s(x) \subset T_x M$ para todo $x \in R$ com

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

$$df(x)(E^s(x)) = E^s(f(x))$$

$$df(x)(E^u(x)) = E^u(f(x))$$

Satisfazendo as seguintes condições para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$1. \|df^n(x)|_{E^s(x)}\| \leq C(x)\lambda^n e^{n\varepsilon} \|v\|.$$

2. $\|df^{-n}|E^u(x)\| \leq C(x)\mu^n e^{|n|\varepsilon}\|v\|.$
3. $\langle (E^u(x), E^s(x)) \rangle \geq K(x)$ com $K(f^n(x)) \geq e^{-n\varepsilon}K(x)$
4. $C(f^n(x)) \geq e^{|n|\varepsilon}C(x)$

O conjunto regular de nível l é por definição o conjunto:

$$R^l = \{x \in R; C(x, \varepsilon) \leq l, K(x, \varepsilon) \geq \frac{1}{l}\}$$

Teorema 16. (PESIN, 1976) Para cada $x \in R$ existe uma variedade estável $W^s(x)$ tal que $T_x W^s(x) \subset E^s(x)$ e se $y \in W^s$ temos para $n \geq 0$:

$$\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \tilde{C}\lambda^n e^{n\varepsilon} \text{dist}(x, y).$$

O teorema acima vale também para a distribuição E^u com a devida simetria.

Para $x \in M$ seja $r(x)$ o tamanho da sua variedade estável. Temos $r(f^n(x)) \geq \tilde{K}e^{n\varepsilon}r(x)$ para alguma constante $\tilde{K}$. Além disso, para cada $l \in \mathbb{N}$ existe r_l tal que $r(x) \geq r_l$ se $x \in R^l$.

As variedades estáveis em R^l variam uniformemente na topologia C^1 , isto é, se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ com $x_n \in R^l$ para $\sigma \in \{u, s\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{C^1}(W^\sigma(x_n), W^\sigma(x)) = 0.$$

SISTEMAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS

3.1 Generalidades

Definição 19. Considere uma variedade riemanianna M . Dizemos que um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é parcialmente hiperbólico se para alguma métrica o fibrado tangente admite uma decomposição contínua $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$, Df -invariante e existem $\alpha < 1$ e $\beta > 1$ e uma constante $C > 1$ tais que:

- $|Df^n|_{E^s}(x)| \leq C\alpha^n$, para todo $x \in M$.
- $|(Df^n|_{E^u}(x))^{-1}|^{-1} \geq C\beta^n$, para todo $x \in M$.
- $|Df^n|_{E^s}(x)| < |(Df^n|_{E^c}(x))| < |Df^n|_{E^u}(x)|$ para todo $x \in M$.

O conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos é aberto na topologia C^1 . Existe ainda a noção de difeomorfismo parcialmente hiperbólico absoluto que é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico que para $x, y, z \in M$ satisfaz a seguinte condição:

$$|Df|_{E^s}(x)| < |Df|_{E^c}(y)| < |Df|_{E^u}(z)|.$$

Note que se f é parcialmente hiperbólico então a decomposição fornecida pelo teorema de Oseledec é subordinada a decomposição acima.

As direções E^u , E^s , E^c são chamadas direção instável, estável e central, respectivamente. E^{cu} e E^{cs} são chamadas de direção centro-instável e direção centro-estável.

Pelos Resultados de (HIRSCH; PUGH; SHUB, 2006) existem folheações tangentes as distribuições E^u e E^s , i.e., existem folheações $\mathcal{F}^\sigma$ com $T_x \mathcal{F}^\sigma = E^\sigma(x)$ para $\sigma = u, s$ e todo $x \in M$. As folheações $\mathcal{F}^u$ e $\mathcal{F}^s$ são chamadas folheação instável e folheação estável, respectivamente.

A existência de folheação tangente a distribuição central é mais delicada mesmo quando a direção central tem dimensão um (HERTZ; HERTZ; URES, 2016).

Definição 20. Dizemos que f é dinamicamente coerente se existem folheações $\mathcal{F}^{cs}$ e $\mathcal{F}^{cu}$ tangente a E^{cs} e E^{cu} , respectivamente. Nesse caso a distribuição central é integrável e a folheação tangente a E^c é $\mathcal{F}^c(x) = \mathcal{F}^{cs}(x) \cap \mathcal{F}^{cu}(x)$.

Em $\mathbb{T}^3$ todo difeomorfismo absolutamente hiperbólico é dinamicamente coerente (BRIN; BURAGO; IVANOV, 2009).

Definição 21. Dizemos que f é acessível se dados $x, y \in M$ existe um caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ que pode ser decomposto como união finita de caminhos não triviais cada um contido numa variedade estável ou instável de f .

Os sistemas acessíveis formam um conjunto C^1 aberto e C^k denso dentro do conjunto dos parcialmente hiperbólicos com direção central unidimensional. Veja (DIDIER, 2003), (BURNS *et al.*, 2008) e (DOLGOPYAT; WILKINSON, 2003).

Teorema 17. (GOGOLEV, 2011);(EPSTEIN, 1976) Seja $f: M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente, com $\dim E^u = \dim E^s = 1$ e folheação central unidimensional compacta. Então, f possui um recobrimento $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ finito tal que a aplicação induzida por $\tilde{f}$ no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov. De fato, tal homeomorfismo é conjugado a um automorfismo Anosov de $\mathbb{T}^2$. Além disso, as folhas centrais de f tem comprimento uniformemente limitado.

Observação 3. Se E^u , E^s e E^c são orientáveis e a orientação é preservada por f , podemos tomar $\tilde{f} = f$.

Definição 22. Seja um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra. Defina: $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, e $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}]$. Dizemos que G é nilpotente se existe n tal que $\mathfrak{g}^n = 0$.

Exemplo 1 (Grupo de Heisenberg). Considere $G = \{A = (a_{ij}) \in GL(n) | A \text{ é triangular superior e } a_{ii} = 1 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$. Consideremos $n = 3$ o que não faz diferença substancial. Então

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Além disso, $[A, B] = AB - BA$ nessa álgebra de Lie.

Uma conta simples mostra que:

$$\mathfrak{g}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}^3 = 0$$

Portanto G é nilpotente. O grupo G é chamado de grupo de Heisenberg.

Exemplo 2. Todo grupo de Lie comutativo é nilpotente. Com efeito, se G é grupo de Lie comutativo então $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} = 0$.

Definição 23. Dizemos que M é uma nilvariedade se $M = G/\Gamma$ onde G é um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo e Γ é um subgrupo de Lie discreto cocompacto de G , i.e, G/N é compacto.

Exemplo 3. Considere o grupo de Heisenberg G e $N = GL(3, \mathbb{Z}) \cap G$. N é um subgrupo discreto de G . Portanto G/N é uma nilvariedade.

Exemplo 4. $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ é nilvariedade já que $(\mathbb{R}^n, +)$ é comutativo.

Temos alguns resultados importantes no contexto de nilvariedades. Para exemplo e futura referência enunciamos:

Proposição 4. (HAMMERLINDL; POTRIE, 2014) Seja $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico de uma nilvariedade $M \neq \mathbb{T}^3$. Então, as folheações W^u and W^s tem um único conjunto minimal.

Definição 24. Um sistema parcialmente hiperbólico (f, μ) é dito extensão de rotação de um sistema A se é conjugado a um sistema $g : M \rightarrow M$ com $M = N \times \mathbb{S}^1$ e da forma $g(x, \theta) = (Ax, R_x(\theta))$ onde R_x é uma rotação.

Considere X e M um espaços de topológicos e N uma variedade riemanniana.

Definição 25. $\pi : X \rightarrow M$ é um fibrado contínuo sobre M se existe uma família enumerável de abertos $\{U_\alpha\}_\alpha$ que formam uma cobertura de M e homeomorfismos $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times N$ tais que as aplicações $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\beta \times N \rightarrow U_\alpha \times N$ são da forma $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \xi) = (x, g_x(\xi))$ com $g_x : N \rightarrow N$ difeomorfismo de classe C^1 , a aplicação $x \rightarrow g_x$ é contínua e tanto $Dg_x(\xi)$ quanto sua inversa são uniformemente limitada e são uniformemente contínuas.

Nas fibras $\pi^{-1}(x)$ então colocamos a métrica que torna as coordenadas uma isometria entre N e $\pi^{-1}(x)$. Como as derivadas de g_x são uniformemente limitadas tais métricas diferem no máximo por um fator K . Denotaremos $X_x = \pi^{-1}(x)$.

Definição 26. Seja $\pi : X \rightarrow M$ um fibrado contínuo. Um cociclo $F : X \rightarrow X$ sobre $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$ e $F_x : X_x \rightarrow X_{f(x)}$ é um difeomorfismo com $x \rightarrow F_x$ contínua em x e $DF_x(\xi)$ e sua inversa são uniformemente limitadas e uniformemente contínuas.

Exemplo 5 (Skew-Product). Considere M, N espaços topológicos e $f : M \rightarrow M$. Um skew-product sobre f é uma aplicação da forma $F : M \times N \rightarrow M \times N$ com $F(m, n) = (f(m), \varphi_m(n))$ onde $\{\varphi_m\}_{m \in M}$ é uma família de aplicações definidas em N . O skew-product é um exemplo de cociclo contínuo assumindo que $m \mapsto \varphi_m$ é contínua e $D\varphi_m(n)$ e sua inversa são uniformemente limitadas e uniformemente contínuas. Denotamos o skew-product por $F = f \times \varphi_m$.

Os expoentes extremais nas fibras de F são definidos como:

$$\lambda_+(F, (x, \xi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|DF_x^n(\xi)\|}{n}$$

$$\lambda_-(F, (x, \xi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|DF_x^n(\xi)^{-1}\|^{-1}}{n}$$

Pela imposição de limitação uniforme para as aplicações $Df_x(\xi)$ e suas inversas, as aplicações $(x, \xi) \mapsto \log \|Df_x(\xi)\|$ e $(x, \xi) \mapsto \log \|Df_x(\xi)^{-1}\|^{-1}$ são integráveis para qualquer medida de probabilidade em X e a existência dos expoentes extremais é consequência do teorema ergódico subaditivo (KINGMAN, 1968).

Observação 4. Os expoentes acima não dependem da escolha de cartas. Sejam $\{U_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{U_{\beta(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de abertos tal que $f^n(x) \in U_{\alpha(n)} \cap U_{\beta(n)}$. Em $X_{f^n(x)}$ temos uma métrica induzida por $\varphi_{\alpha(n)}$ e $\varphi_{\beta(n)}$, digamos, $|\cdot|_{\alpha, n}$ e $|\cdot|_{\beta, n}$ e como sabemos, existe K independente de n tal que

$$\frac{1}{K} |\cdot|_{\beta, n} \leq |\cdot|_{\alpha, n} \leq K |\cdot|_{\beta, n}$$

Assim, para $|Df_x^n(\xi)| \equiv \sup_{|v|_{*,0}} \frac{|Df_x^n(\xi)|}{|v|_{*,0}}$ com $*$ $\in \{\alpha, \beta\}$, temos:

$$\frac{1}{K} |Df_x^n(\xi)|_{\beta} \leq |Df_x^n(\xi)|_{\alpha} \leq K |Df_x^n(\xi)|_{\beta}.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Df_x^n(\xi)|_{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Df_x^n(\xi)|_{\beta}.$$

Teorema 18. (RUELLE; WILKINSON, 2001) Considere um cociclo $F : X \rightarrow X$ com fibras compactas sobre uma aplicação invertível $f : M \rightarrow M$. Suponha que F preserve uma medida η ergódica que projeta-se sobre uma medida ν ergódica para f . Sejam $\Sigma_- \equiv \{(x, \xi) \in X; \lambda_-(x, \xi) > 0\}$ e $\Sigma_+ \equiv \{(x, \xi) \in X; \lambda_+(x, \xi) < 0\}$. Então existe $S \subset X$ mensurável tal que $\text{card } S \cap X_x = k < \infty$ para todo $x \in M$ e $\eta(S^c \triangle \Sigma_-) = 0$. O mesmo vale para Σ_+ .

A versão acima é a versão enunciada em (AVILA; VIANA; WILKINSON, 2011).

Suponha que $f: M \rightarrow M$ é um homeomorfismo hiperbólico [Ver seção de Sistemas Anosov 2.2]. Vamos definir holonomias para cociclos sobre f .

Holonomias. Uma s -holonomia para F é uma família de homeomorfismos $h_{x,y}^s: X_x \rightarrow X_y$, com $y \in W^s(x)$, β -Hölder tais que:

- $h_{x,x}^s = id$, $h_{y,z}^s \circ h_{x,y}^s = h_{x,z}^s$.
- $F_y \circ h_{x,y}^s = h_{f(x),f(y)}^s \circ F_x$.
- $(x, y, \xi) \rightarrow h_{x,y}^s$ é contínua.

De maneira análoga definimos as holonomias instáveis.

Seja $[x, y] \equiv W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$. Se consideramos ε suficientemente pequeno, a aplicação $\iota: B_\varepsilon^u(x) \times B_\varepsilon^s(x) \rightarrow M$ definida por $\iota(x, y) = [x, y]$ é um homeomorfismo sobre sua imagem que chamaremos de $B(x)$.

Definição 27. Dizemos que μ , medida em M , tem estrutura produto se existem medidas μ^s e μ^u em $B_\varepsilon^s(x)$ e $B_\varepsilon^u(x)$, respectivamente, de tal modo que

$$\mu|_{B(x)} \text{ é equivalente a } \iota_*(\mu^u \times \mu^s).$$

Exemplo 6. Considere $A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um difeomorfismo linear de Anosov. Então, como se sabe, as folhas estáveis e instáveis são retas paralelas a direção dos autovetores de A que são transversais. Como $\det A = 1$, A preserva a medida de Lebesgue, digamos μ . Usando o teorema de Fubini, não é difícil ver que desintegração de μ restrita a um cubo pequeno de lados paralelos as direções instável e estável em torno de x é equivalente a $\iota_*(Leb_{B^u} \times Leb_{B^s})$, onde Leb_{B^*} é a medida de Lebesgue de $W_{loc}^*(x)$.

Definição 28. Considere uma medida m e sua desintegração $\{\mu_x\}$ ao longo das fibras de um cociclo que admite holonomias instáveis. Dizemos que $\{\mu_x\}$ é essencialmente invariante por holonomias instáveis se existe um conjunto $\tilde{M} \subset M$ com $\pi_* m(\tilde{M}) = 1$ tal que para todo $x, y \in \tilde{M}$ com $y \in W^u(y)$ temos:

$$(h_{x,y}^u)_* \mu_x = \mu_y.$$

De modo análogo definimos desintegração essencialmente invariante por holonomias estáveis.

Definição 29. Considere a desintegração $\{\mu_x\}$ de uma medida m ao longo das fibras de um cociclo que admite holonomias instáveis. Dizemos que $\{\mu_x\}$ é invariante por holonomias instáveis se dados $x, y \in \text{supp}(\pi_*(m))$ com $x \in W^u(y)$ temos:

$$(h_{x,y}^u)_* \mu_x = \mu_y.$$

A invariância por holonomia estável é definida de maneira análoga.

Apresentaremos agora um teorema, devido a Ávila e Viana, que foi usado para obter alguns resultados de rigidez no caso em que expoentes de Lyapunov são nulos em direções centrais.

Teorema 19. (AVILA; VIANA, 2010)[Princípio de Invariância topológico] Seja $F : X \longrightarrow X$ um cociclo, que admite holonomias, sobre um homeomorfismo hiperbólico $f : M \longrightarrow M$. Considere $\{\mu_k\}_k$ uma sequência de medidas invariantes por F que se projetam sobre uma medida ν . Suponha que μ é um ponto de acumulação dessa sequência. Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \min\{\lambda_-(x, \xi), 0\} d\mu_k = 0$ então μ admite uma desintegração $\{\mu_x\}_{x \in M}$ ao longo das fibras do cociclo que é essencialmente invariante por holonomias estáveis.

Temos também a seguinte versão do teorema de invariância:

Teorema 20. (AVILA; VIANA, 2010) Seja $F : X \longrightarrow X$ um cociclo que admite holonomias, sobre um homeomorfismo hiperbólico $f : M \longrightarrow M$. Considere $\{\mu_k\}_k$ uma sequência de medidas invariantes por F que se projetam sobre uma medida ν que tem estrutura produto. Suponha que μ é um ponto de acumulação dessa sequência. Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |\lambda_{\pm}(x, \xi)| d\mu_k = 0$ então μ admite uma desintegração $\{\mu_x\}_{x \in M}$ ao longo das fibras do cociclo que é invariante por holonomias instáveis e estáveis. Além disso, a desintegração é contínua em $\text{supp}(\nu)$.

3.2 Medidas de máxima entropia em 3-nilvariedades

Na sequência, daremos a ideia da prova de um teorema que utiliza o princípio de invariância para o estudo de medidas de máxima entropia. Antes façamos uma observação.

Observação 5. Suponha que $f : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico numa 3-nilvariedade com folheção central compacta W^c . Seja $\pi : M \longrightarrow M/W^c$ a aplicação quociente. Suponha que a aplicação induzida por f no quociente, que chamaremos $f_c : M/W^c \longrightarrow M/W^c$ é um homeomorfismo Anosov transitivo. Como os comprimentos dos círculos da família $\{\pi^{-1}(x_c)\}_{x_c \in M/W^c}$ formam um conjunto uniformemente limitado, temos $h_{top}(f, \pi^{-1}(x_c)) = 0$ para todo $x_c \in M/W^c$. Assim, pela fórmula de Ledrappier-Walters, teorema 13, temos que $\sup_{\pi_*\mu = \alpha} h_\mu(f) = h_\alpha(A)$ para toda medida f_c -invariante α . Assim, Se ν é a medida de máxima entropia de f_c , então a medida μ de máxima entropia de f satisfaz:

$$\pi_*(\mu) = \nu.$$

Teorema 21. (HERTZ et al., 2012) Seja $f : M \longrightarrow M$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, acessível, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas. Então, vale uma, e só uma, das alternativas abaixo:

- f possui apenas uma medida de máxima entropia μ com $\lambda^c(\mu) = 0$. Além disso, f é conjugada a uma extensão de rotação.

- f possui um número finito não nulo de medidas ergódicas de máxima entropia. Além disso, todas elas tem expoente não nulo e existe pelo menos uma medida de máxima entropia com expoente positivo e outra com expoente negativo.

Idéia da Prova. Como na observação acima, seja $\pi : M \longrightarrow M/W^c$ a aplicação quociente e ν a medida de máxima entropia para aplicação f_c induzida por f no quociente. Supondo que a medida de máxima entropia m , tenha expoente de Lyapunov central nulo, podemos usar o princípio de invariância já que ela projeta-se sobre a medida de máxima entropia da aplicação quociente f_c (que tem estrutura de produto (BOWEN, 1970)). Obtem-se então uma família de medidas no círculo que são invariantes por holonomias.

Como f é acessível, pelo princípio de invariância (AVILA; VIANA, 2010) os suportes de tais medidas é todo o círculo. Usando o teorema de Lesbegue e o fato de que as holonomias são absolutamente contínuas, conclui-se que as medidas condicionais ao longo da folheação central precisam ser equivalentes a medida de Lesbegue do Círculo e assim não tem átomos e tem suporte total. Desse modo, definimos uma ação, como abaixo, de $\mathbb{S}^1$ do círculo em M que comuta com f . Digamos que a desintegração da medida de máxima entropia é $\{m_x\}$. Tome uma orientação para W^c . Então, vendo $\mathbb{S}^1$ como $[0, 1] \mod 1$, defina $\Gamma : \mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M$ de modo que $m_x([\Gamma(\theta, x), x]) = \theta$. Assim, pela invariância da desintegração, vem que $f(\Gamma(\theta, x)) = \Gamma(\theta, f(x))$. Por fim, mostra-se que f é conjugado a uma extensão de rotação de um Anosov, digamos $\hat{f}$. Suponha que $\hat{m}$ é a push-forward de m pela aplicação que conjuga f e $\hat{f}$.

Para unicidade, basta mostrar que $\hat{f}$ tem uma única medida de máxima entropia. Suponha que η é medida de máxima entropia de $\hat{f}$. Então, η projeta-se sobre a única medida de máxima entropia de f_c . Pela acessibilidade de f temos que as medidas condicionais de η ao longo da folheação de η tem suporte total, não tem átomos e são invariantes por rotação. Portanto, as medidas condicionais são medidas de Lebesgue e por consequência $\eta = \hat{m}$.

Podemos supor agora que as medidas de máxima entropia tem expoente não-nulo. Suponha, por contradição, que existem infinitas medidas de máxima entropia $\{\mu_k\}_k$ com expoente negativo, digamos. Por (RUELLE; WILKINSON, 2001) a desintegração das medidas ao longo da folheação central é atômica com número essencialmente constante de átomos.

Então 'integrando' as medidas de Dirac centradas no extremo direito da fronteira de atração (distribuição E^c é orientável) dos pontos das bacia de uma medida μ_k , obtemos uma medida de máxima entropia μ_k^+ com expoente central positivo. Usando a limitação uniforme dos comprimentos das folhas centrais, obtem-se que as sequências $\{\mu_k\}_k$ e $\{\mu_k^+\}_k$ tem ponto de acumulação em comum, digamos η que pelo princípio de invariância teria desintegração contínua, invariante por holonomias estáveis e instáveis no suporte de sua projeção que é todo o toro ($\pi_* m_k = \nu$ para todo k , assim $\pi_*(m) = \nu$ e portanto $\text{supp}(m) = M/W^c$). Repetindo os 3 primeiros parágrafos, a prova segue-se que f é extensão de rotação e acessível e teria apenas uma medida de máxima entropia, o que é uma contradição.

O seguinte resultado foi obtido por Ures, Viana e Yang em (URES; VIANA; YANG, 20-).

Teorema 22. (URES; VIANA; YANG, 20-) Considere uma aplicação $f : M \rightarrow M$ de classe C^2 parcialmente hiperbólico numa variedade $M \neq \mathbb{T}^3$. Então:

1. f possui uma única medida de máxima entropia, é transitiva e a medida de máxima entropia tem expoente central nulo. Além disso, f é uma extensão de rotação de um Bernoulli.
2. Ou, f tem exatamente 2 medidas ergódicas de máxima entropia uma com expoente de Lyapunov central positivo e outra com expoente negativo.

Essas medidas variam continuamente na topologia C^1 .

Abaixo, $W_P^s(x)$ denota a variedade estável de Pesin de x .

Definição 30. Dizemos que um conjunto de pontos periódicos $S = \{p_1, \dots, p_k\}$ é um esqueleto para o parcialmente hiperbólico $f : M \rightarrow M$ se $\dim W_P^s(p_i) = \dim E^{cs}(p_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$ e vale:

- Para todo $x \in M$ temos $W^u(x) \cap \bigcup_{i=1}^k W_P^s(\mathcal{O}(p_i)) \neq \emptyset$
- $W^u(\mathcal{O}(p_i)) \cap W_P^s(\mathcal{O}(p_j)) = \emptyset$ se $i \neq j$.

Em $\mathbb{T}^3$, a cardinalidade de esqueletos é a mesma do conjunto das medidas ergódicas de máxima entropia com expoente central negativo para certos sistemas.

Teorema 23. (URES; VIANA; YANG, 20-) Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ parcialmente hiperbólico, acessível e dinamicamente coerente. Então se $S = \{p_1, \dots, p_k\}$ é um esqueleto de f temos que para cada p_i existe uma única medida ergódica de máxima entropia μ_i com expoente de Lyapunov central negativo e vale:

- O fecho $W^u(\mathcal{O}(p_i))$ e a classe homoclínica de $\mathcal{O}(p_i)$ coincide com o suporte de μ_i que é a união finita de componentes u-minimais: a variedade instável de cada ponto do suporte é densa na componente correspondente.
- Os suportes das medidas μ_i são disjuntos.

3.3 Medidas Físicas

Nesta secção "*Leb*" denota a medida de Lebesgue.

Definição 31. Uma medida μ é dita física se é invariante e sua bacia tem medida de Lebesgue positiva.

As ideias usadas na demonstração do teorema em (URES; VIANA; YANG, 20-) são similares as usadas no artigo (DOLGOPYAT; VIANA; YANG, 2016).

Vale a pena atentar para o algumas semelhanças entre as medidas de máxima entropia e as medidas físicas nesse contexto. Nesta secção falaremos um pouco disso e enunciaremos resultados de (DOLGOPYAT; VIANA; YANG, 2016). Nesse artigo, a definição de parcialmente hiperbólico é um pouco mais abrangente:

Definição 32. (DOLGOPYAT; VIANA; YANG, 2016) Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito parcialmente hiperbólico se TM admite uma decomposição contínua $TM = E^{cs} \oplus E^u$ e existem constantes $C, \sigma > 1$ tais que:

- $\|Df^n(x)v\| > C\sigma^n\|v\|$, para todo $v \in E^u(x)$ e todo $x \in M$
- $\frac{\|Df^n(v^u)\|}{\|Df^n(v^{cs})\|} \geq C\sigma^n \frac{\|v^u\|}{\|v^{cs}\|}$, para todo $v^{cs} \in E^{cs}$ e $v^u \in E^u$.

Nesta secção e apenas nesta, o conceito de parcialmente hiperbólico será o definido acima.

Definição 33. Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \rightarrow M$ é dito ter centro mostly contracting se dado um disco D^u dentro de uma variedade instável, existe $D^0 \subset D^u$ com medida de Lesbague positiva tal que para todo $x \in D^0$ vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)|_{E^{cs}}\| < 0.$$

Usando o teorema 21 de (HERTZ *et al.*, 2012) e elementos da teoria de Pesin, os autores mostram que, quando a alternativa 1 do teorema 22 (URES; VIANA; YANG, 20-), enunciado na secção 3.1., não ocorre os suportes das medidas de máxima entropia com mesmo sinal do expoente central são disjuntos e além disso, seus suportes são u-saturados se o expoente central é negativo e s-saturados se o expoente central é positivo. Isso também é verdade no caso de medidas físicas com expoente negativo (VIANA; YANG, 2013) para sistemas com direcção mostly contracting. Então usando a proposição 4 de (HAMMERLINDL; POTRIE, 2014) a primeira parte do teorema 22 provado em (URES; VIANA; YANG, 20-) segue.

O teorema a seguir é o análogo do teorema 23 para medidas físicas.

Teorema 24. (DOLGOPYAT; VIANA; YANG, 2016) Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ parcialmente hiperbólico com direcção central mostly-contracting. Então se $S = \{p_1, \dots, p_k\}$ é um esqueleto de f temos que para cada p_i existe uma única medida física μ_i e vale:

- O fecho $W^u(\mathcal{O}(p_i))$ e a classe homoclínica de $\mathcal{O}(p_i)$ coincide com o suporte de μ_i que é a união finita de componentes u-minimais: a variedade instável de cada ponto do suporte é densa na componente correspondente.

- o fecho de $W^s(p_i)$ coincide com o fecho pontos de densidade para a medida de Lebesgue da bacia de μ_i .
- Os suportes das medidas μ_i são disjuntos.

3.4 Sistema Iterado de Funções

Definição 34. Considere $f_0, \dots, f_k : M \rightarrow M$. O sistema iterado gerado por tais funções é definido como $F : \Sigma_k \times M \rightarrow \Sigma_k \times M$ por $F((\omega_n)_n, x) = ((\omega_{n+1})_n, f_{\omega_0}(x))$.

Em (DÍAZ; GELFERT; RAMS, 2017) os autores fizeram um estudo de certa classe de sistemas iterados. Nesta secção enunciaremos um dos resultados que trata da unicidade de medidas de máxima entropia com dado sinal do expoente central dado o paralelismo com resultados da tese.

Até o final da secção $M = \mathbb{S}^1$.

Hipótese 1 Seja J um intervalo. Dizemos que $F \in CEC + (J)$ se existem constantes $K_1, \dots, K_5$ tais que para todo $H \subset \mathbb{S}^1$ com $H \cap J \neq \emptyset$ com $|H| < K_1$ existe sequência $\eta_0, \dots, \eta_{l-1}$ com $l \leq K_2 \log |H| + K_3$

- $f_{\eta_l} \circ \dots \circ f_{\eta_0}(H) \supset B(J^+, K_4)$, onde $B(x, r)$ denota a bola de raio r .
- Para todo $x \in H$ temos $\log |(f_{\eta_l} \circ \dots \circ f_{\eta_0})'(x)| \geq lK_5$.

$F \in CEC - (J)$ se $F^{-1} \in CEC + (J)$.

Hipótese 2 Defina a órbita de $x \in \mathbb{S}^1$ como $\mathcal{O}^+(x) \equiv \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_0}(x); n \in \mathbb{N}, \omega_i \in \{1, \dots, k\}\}$. Dizemos que $F \in Acc + (J)$ se $\mathcal{O}^+(int J) = \mathbb{S}^1$. Dizemos que $F \in Acc - (J)$ se $F^{-1} \in Acc + (J)$.

Se F é transitiva, o que é o caso no contexto de (DÍAZ; GELFERT; RAMS, 2017), existe $J \subset \mathbb{S}^1$ para o qual $F \in CEC + (J) \cap CEC - (J) \cap Acc + (J) \cap Acc - (J)$.

Dizemos que o skew-Product F é proximal (Para frente) se dados $x, y \in \mathbb{S}^1$ existe $\xi \in \Sigma_k$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |F^n(\xi, x) - F^n(\xi, y)| = 0$. Dizemos que F é proximal para trás se F^{-1} é proximal. Por fim, F é proximal se é proximal para frente e para trás.

Considere uma medida μ de Bernoulli em Σ_k . Dizemos que F μ -sincroniza (para o futuro) se dados $x, y \in \mathbb{S}^1$ para μ -qtp $\xi \in \Sigma_k$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F^n(\xi, x) - F^n(\xi, y)| = 0.$$

Dizemos que F μ -sincroniza para o passado se F^{-1} μ -sincroniza para o futuro. Se F μ -sincroniza para o futuro e passado dizemos que F sincroniza.

As noções de sincronização e proximalidade são equivalentes se as funções $f_1, \dots, f_k$ não tem pontos fixos em comum (MALICET, 2017).

No teorema abaixo, μ é a medida de Bernoulli equidistribuída.

Teorema 25. (DÍAZ; GELFERT; RAMS, 2017) Suponha que F satisfaz a hipótese de proximidade, $F \in CEC + (J) \cap CEC - (J) \cap Acc + (J) \cap Acc - (J)$ para algum $J \subset \mathbb{S}^1$ e que as funções $f_1, \dots, f_k$ não tem medida invariante em comum e são de classe C^1 . Então F possui exatamente duas medidas de máxima entropia, uma com expoente central positivo e outra com expoente central negativo.

O teorema acima é parte de um dos teoremas provados na referência dada.

3.5 Medidas de Equilíbrio

Definição 35. Uma medida μ é dita de equilíbrio para a função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = \sup \{h_\eta(f) + \int \varphi d\eta \mid \eta \text{ é } f\text{-invariante}\}.$$

Note que para a medida de equilíbrio para $\varphi = 0$ é a medida de máxima entropia para f .

Definição 36. O espaço dos k -frames sobre a variedade SM^n é o conjunto

$$St_k(M^n) := \{(x, v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in T_x M \text{ for } i = 1, \dots, k \text{ and } \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}.$$

Definição 37. O frame flow sobre S é a aplicação $\varphi^t : St_k(M^n) \rightarrow St_k(M^n)$ com $\varphi^t(x, v_1, \dots, v_k) = (\rho_t(x, v_1), P_t(v_1, v_1), \dots, P_t(v_k, v_k))$ onde $\rho : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é o fluxo geodésico e $P_t(v, w)$ é o transporte paralelo de v pela geodésica determinada por w .

Note que o espaço dos frame flows $St_k(M^n)$ fibra sobre TM^n . Basta definirmos a projeção $p : St_k(M^n) \rightarrow TM^n$ por $p(x, v_1, \dots, v_k) = (x, v_1)$. Além disso, a aplicação $f = \varphi^1$ é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. O leitor interessado nesse tipo de sistema pode consultar (BURNS; POLLICOTT, 2003), (BRIN; GROMOV, 1980), (BRIN, 1982).

No teorema a seguir $k = n$.

Teorema 26. (SPATZIER; VISSCHER, 2016) Seja $F : M \rightarrow M$ o frame flow sobre uma variedade de dimensão ímpar diferente de 7. Então, se $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua cuja restrição as fibras $p^{-1}(v)$ do frame é constante, então (F, φ) possui um único estado de equilíbrio.

RESULTADOS

4.1 Propriedades das medidas de máxima entropia para sistemas parcialmente hiperbólicos

Considere $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo. Seja E um campo de direções mensurável e invariante por Df .

Definição 38. Seja μ uma medida f -invariante. O expoente da medida μ na direção invariante E é:

$$\lambda(\mu, E) = \int \log |Df|E(x)| d\mu(x).$$

Para sistemas parcialmente hiperbólicos as direções central e instável exercem papel central no estudo de medidas de máxima entropia. Para endossar a última afirmação temos:

Teorema 27. (PESIN, 1977) Considere $f : M \rightarrow M$ uma aplicação $C^{1+\alpha}$ numa variedade riemanniana compacta. Se μ é absolutamente contínua com relação a Lebesgue, então vale

$$h_\mu(f) = \int \sum_{\lambda_i(x) > 0} \lambda_i(x) \sigma_i(x) d\mu(x)$$

Existe uma versão mais geral da fórmula acima. O leitor interessado pode consultar (LEDRAPPIER; YOUNG, 1985).

No resto do capítulo M será uma 3-nilvariedade.

Seguindo a terminologia de (URES; VIANA; YANG, 20-) e (TAHZIBI; YANG, 2016), temos a seguinte definição:

Definição 39. Denotamos por $SHP_1(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de classe C^2 , parcialmente hiperbólicos, acessíveis, dinamicamente coerentes com direção central unidimensional cuja folheação central é composta por folhas compactas que formam um fibrado e cuja a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo.

Denotaremos por W^* a folheação invariante por f e tangente a E^* para $*$ $\in \{u, s, c, cu, cs\}$. As variedades estável e instável de Pesin (como no teorema 16) de um ponto x serão denotadas por $W_P^s(x)$ e $W_P^u(x)$, respectivamente.

Seja $f_c : M/W^c \rightarrow M/W^c$ a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais. Na sequência, pediremos que f_c seja um homeomorfismo de Anosov transitivo (veja o teorema 17 que fala sobre a hipótese de ser Anosov). As medidas de máxima entropia para os elementos de $SPH_1(M)$ foram estudadas em (HERTZ *et al.*, 2012) e (URES; VIANA; YANG, 20-).

Denotaremos as variedades estáveis e instáveis de f_c por $\mathcal{F}^u$ e $\mathcal{F}^s$, respectivamente.

As definições, notações e proposições que se seguem no resto desta secção estão contidas em (URES; VIANA; YANG, 20-). A maioria dos resultados desta secção aparece sem prova pois até a presente data, o artigo não foi publicado.

Denotemos por ν a medida de máxima entropia da aplicação quociente.

Considere uma partição de Markov para a aplicação quociente, $\{B_j\}$, com $\nu(\partial B_j) = 0$ para todo j . Seja $\{\nu_x^u\}$ desintegração de ν da partição por folhas instáveis restrita a partição de Markov. Chamaremos o elemento desta última partição a qual pertence um ponto x de $\xi_c(x)$.

Seja $\pi : M \rightarrow M/W^c$ a aplicação quociente. Considere $\mathcal{P} = \{\pi^{-1}(B_i)\}$ partição em M . Definamos uma partição ξ^u em M onde o elemento que contém x , $\xi^u(x)$, é a componente conexa de $\mathcal{P}(x) \cap W^u(x)$ que contém x . Seja $\{\mu_x^u\}$ família de medidas tal que $\pi(\mu_x^u) = \nu_{\pi(x)}^u$ e $\mu_x^u(\xi^u(x)) = 1$.

Definição 40. Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é dita ν -mostly contracting se dado $x \in M$ existe $D \subset \xi^u(x)$ com $\mu_x^u(D) > 0$ e para todo $y \in D$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n|E^c(y)|| < 0.$$

Notação. Denotaremos por $\mathcal{M}_\nu(f)$ o conjunto das medidas μ invariantes por f tais que $\pi(\mu) = \nu$.

Definição 41. Seja $\eta \in \mathcal{M}_\nu(f)$. Dizemos que η é ν -Gibbs u -state se $\pi(\eta_x^u) = \nu_x^u$ para η quase todo ponto x .

Proposição 5. (URES; VIANA; YANG, 20-) Para todo $x \in M$ temos que todo ponto limite da sequência $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \mu_x^u$ é ν -Gibbs u -estado.

Proposição 6. (URES; VIANA; YANG, 20-) O suporte de toda uma medida ν -Gibbs u -state é saturado por folhas instáveis.

Demonstração. Seja η um ν -Gibbs u -state. Vamos mostrar que se $x \in \text{supp}(\eta)$ então temos $\xi^u(x) \subset \text{supp}(\eta)$. Ora, $\text{supp}(\nu_{\pi(x)}^u) = \xi_c(\pi(x))$ mas como π restrita a folha instável é homeomorfismo vem que $\text{supp}(\mu_x^u) = \xi^u(x)$. Mas η -q.t.p. x temos que $\eta_x^u = \mu_x^u$ e η_x^u -q.t.p. $y \in \xi^u(x)$ é ponto regular e portanto $\xi^u(x) = \text{supp}(\mu_x^u) \subset \text{supp} \eta$.

Do parágrafo anterior, existe um conjunto C de medida η total tal que $\xi^u(x) \subset \text{supp}(\eta)$ para todo $x \in C$. Como $\eta(C) = 1$ temos $\overline{C} = \text{supp}(\eta)$. Logo, pela continuidade da folheação e compacidade do suporte vem $\xi^u(p) \subset \text{supp}(\eta)$ para todo $p \in \text{supp}(\eta)$.

Por fim, como $W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\xi^u(f^{-n}(x)))$, o resultado segue.

□

Proposição 7. (URES; VIANA; YANG, 20-) Sejam η_1 e η_2 ν -Gibbs u -state. Então:

$$\text{supp}(\eta_1) \cap \text{supp}(\eta_2) = \emptyset$$

Demonstração. Seja $x \in \text{supp}(\eta_1) \cap \text{supp}(\eta_2)$. Com efeito, f é ν -mostly contracting. Assim, existe $S \subset \xi(x)$ tal que $\mu_x^u(S) > 0$ e $\limsup \frac{1}{n} \log \|Df^n|E^c(x)\| < 0$. Portanto, existe um subconjunto Γ de $\xi(x)$ tal que todos os seus pontos tem variedade de Pesin com raio maior que algum $\varepsilon > 0$.

Sejam x_1 e x_2 pontos regulares de η_1 e η_2 , respectivamente, tais que $\mu_{x_i}^u(\mathcal{B}(\eta_i)) = 1$, $i = 1, 2$.

Ora, existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(y, x) < \delta$ então $\text{dist}(p_1, p_2) < \kappa$ para todo $p_1 \in \xi^u(y)$, $p_2 \in \xi^u(x)$ e κ pequeno dado.

Seja n tal que $\text{dist}(f^n(x_i), x) < \delta$. A holonomia centro-estável induzida por Γ leva conjuntos de medida $\mu_{f^n(x_1)}^u$ -positiva em conjuntos de medida $\mu_{f^n(x_2)}^u$ -positiva o que nos dá $\mathcal{B}(\eta_1) \cap \mathcal{B}(\eta_2) \neq \emptyset$ como veremos abaixo.

Como $\mu_{x_i}^u(\mathcal{B}(\eta_i)) = 1$ temos $\mu_{f^n(x_i)}^u(\mathcal{B}(\eta_i)) = 1$. Temos pela invariância por holonomia estável:

$$\mu_{f^n(x_2)}(\mathcal{H}^{cs}(\mathcal{B}(\eta_1) \cap \Gamma \cap \xi^u(f^n(x_1)))) = \mu_{f^n(x_1)}(\mathcal{B} \cap \Gamma \cap \xi^u(f^n(x_1))) > 0.$$

Mas $\mu_{f^n(x_2)}^u(\mathcal{B}(\eta_2)) = 1$ e assim

$$\mu_{f^n(x_2)}^u(\mathcal{B}(\eta_2) \cap \mathcal{H}^{cs}(\mathcal{B}(\eta_1) \cap \Gamma \cap \xi^u(f^n(x_1)))) > 0$$

como $\mathcal{H}^{cs}(\mathcal{B}(\eta_1) \cap \Gamma) \subset \mathcal{B}(\eta_1)$ segue que $\mathcal{B}(\eta_1) \cap \mathcal{B}(\eta_2) \neq \emptyset$.

□

Proposição 8. O conjunto das medidas com máxima entropia e expoente negativo é igual ao conjunto das medidas ν -Gibbs u -state para $f \in SPH_1(M)$ que não é extensão de rotação.

Proposição 9. (URES; VIANA; YANG, 20-) Toda $f \in SHP_1(M)$ que não é extensão de rotação é v -mostly contracting.

Proposição 10. (URES; VIANA; YANG, 20-) Se μ é medida de máxima entropia ergódica com expoente central negativo de $f \in SPH_1(M)$ então existe $a \in M$ periódico hiperbólico com índice estável igual a 2, tal que $\overline{W^u(\mathcal{O}(a))} = \text{supp}(\mu)$.

Seja $\pi : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3/W^c$ a aplicação que associa um ponto a sua classe no espaço das folhas centrais. Denotamos por $\rho(g)$ o número de rotação de uma aplicação $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Dizemos que $f : M \longrightarrow M$ tem uma folha central com dinâmica MS_k se existe $W^c(x)$ com período l tal que $f^l|_{W^c(x)} \in MS_k$. Note que podemos definir o número de rotação de uma folha periódica $W^c(x)$ de período l como $\rho(f^l|_{W^c(x)})$ pois o número de rotação é invariante por conjugação.

4.2 Prova do teorema C

Definição 42. Seja $g : M \longrightarrow M$ um difeomorfismo. Uma medida g -invariante μ ergódica é dita hiperbólica se existe para o conjunto $\tilde{M} \subset M$ com medida μ total dado pelo teorema de Oseledets, observação 2, temos $\lambda(x, v) \neq 0$ se $x \in \tilde{M}$ e $v \in T_x M$.

Seja $MEE_h(f)$ o conjunto das medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia de f . Sejam ainda $MME_h^+(f)$ e $MME^-(f)$ os subconjuntos de $MEE_h(f)$ das medidas com expoente central positivo e negativo, respectivamente.

Teorema C. Seja $f : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado. Suponha que a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo.

Então, o conjunto das medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia de f é enumerável.

Demonstração. A prova é uma adaptação das ideias de (HERTZ *et al.*, 2012)).

Considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{m}} = \{\mu; \mu \text{ é ergódica de máxima entropia com } \lambda^c(\mu) < -\frac{1}{m}\}.$$

Seja $\mu \in \mathcal{M}_{\frac{1}{m}}$. Por Ruelle-Wilkinson, a desintegração $\{\mu_x\}$ ao longo da folheação central de tais medidas é atômica, isto é, existe $S \subset M$ invariante e $k \in \mathbb{N}$ com $\mu(S) = 1$ tal que $S \cap \pi^{-1}(x_c) = k$ para v -q.t.p $x_c \in \mathbb{T}^2$ e $\mu_{\pi(x)}(x) = \frac{1}{k}$ para $x \in S$.

Assim, para cada $x \in S$, seja $\hat{x}$ o extremo direito da fronteira de $W_P^S(x) \cap W^c(x)$. Definimos então $\mu_{\pi(x)}^+ = \frac{1}{k} \sum_{x \in S \cap \pi^{-1}(x)} \delta_{\hat{x}}$ e por fim, defina

$$\mu^+ = \int_{\mathbb{T}^2} \mu_{x_c}^+ dv.$$

Mostremos que μ^+ é ergódica. Seja $E \subset M$ invariante. Por definição:

$$\mu^+(E \cap \hat{S}) = \mu(\widehat{(E \cap \hat{S})} \cap S).$$

Note que $\widehat{E \cap \hat{S}}$ é f invariante e portanto $\mu^+(E \cap \hat{S}) \in \{0, 1\}$.

O expoente central de μ^+ não pode ser negativo pois se o fosse, os pontos de $\hat{x} \in \hat{S}$ deveriam, tipicamente, atrair uma vizinhança mas então a variedade de x não teria $\hat{x}$ como fronteira. A medida μ^+ é chamada medida gêmea de μ .

Suponha que $\#\mathcal{M}_{\frac{1}{m}} = \infty$.

Seja $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente em $\mathcal{M}_{\frac{1}{m}}$ com $\lim \mu_n = \eta$ e suponha que $\{\mu_n^+\}$ também é convergente. Denotaremos a desintegração de μ_n e μ_n^+ por $\{\mu_{n,x_c}\}$ e $\{\mu_{n,x_c}^+\}$, respectivamente.

Vamos mostrar que as sequências acima $\{\mu_n\}_n$ e $\{\mu_n^+\}_n$ convergem para o mesmo limite. A prova consiste em mostrar que como as folhas centrais tem comprimento uniformemente limitado então para x_n que é μ_n típico, $W_P^S(x_n) \cap W^c(x_n)$ tem comprimento cada vez menor. Os argumentos são familiares de teoria medida.

Seja $S_n \subset \mathbb{T}^3$ típico para μ_n no sentido de Ruelle-Wilkinson, isto é, $S_n \subset M$ invariante e com $\mu(S_n) = 1$ tal que $S \cap \pi^{-1}(x_c) = k$ para algum $k = k(n)$ natural, v-q.t.p $x_c \in \mathbb{T}^2$ e $\mu_{n,\pi(x)}(x) = \frac{1}{k}$ para $x \in S_n$.

Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ sempre que $d_M(x, y) < \delta$. Existe um conjunto $D \subset \mathbb{T}^2$ com $v(D) = 1$ tal que $\pi^{-1}(x_c) \cap S_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x_c \in D$ pois $\pi_*(\mu_n) = v$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $x_c \in D$ existe $N = N(x_c)$ tal que se $n > N(x_c)$ então $\text{length}(W_P^S(x) \cap W^c(x)) < \delta$ para todo $x \in S_n$. Assim $d_M(x, \hat{x}) < \delta$ para todo $x \in S_n \cap \pi^{-1}(x_c)$ se $n > N(x_c)$.

Seja $A_n \equiv \{x_c \in D; \text{length}(W_P^S(x) \cap W^c(x)) < \delta \text{ para todo } x \in S_m \text{ com } m > n\}$.

Ora, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Portanto, existe $N > 0$ tal que $v(\bigcup_{j=1}^N A_j) > 1 - \varepsilon$. Assim, para $n > N$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_M \varphi d\mu_n - \int_M \varphi d\mu_n^+ \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} \varphi d\mu_{n,x_c} d\nu - \int_{\mathbb{T}^2} \varphi d\mu_{n,x_c}^+ d\nu \right| \\
&= \left| \int \frac{1}{k(n)} \sum_{x \in \pi^{-1}(x) \cap S_n} (\varphi(x) - \varphi(\hat{x})) d\nu \right| \\
&< \varepsilon \nu(A_n) + \varepsilon \max \varphi.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^+$.

Portanto $\lambda^c(\eta) = \lim \lambda^c(\mu_n^+)$ e assim $\lambda^c(\eta) \geq 0$.

Mas como $\mu_n \in \mathcal{M}_{\frac{1}{m}}$ deveríamos ter $\lambda^c(\eta) \leq -\frac{1}{m}$, uma contradição. Logo, $\mathcal{M}_{\frac{1}{m}}$ é finito.

Por fim, como $MEE_h^-(f) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{M}_{\frac{1}{m}}$, o resultado segue observando a igualdade análoga para $MME_h^+(f)$.

□

De fato, podemos ter infinitas medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia, como no exemplo simples abaixo.

Exemplo 7. (Infinitas medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia)

Considere $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um Anosov linear e considere $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ com infinitos pontos fixos hiperbólicos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $|A^{-1}|^{-1} < |g'(p)| < |A|$ para todo $p \in \mathbb{S}^1$.

Então, a aplicação $f : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$ definida por $f(\xi, x) = (A(\xi), g(x))$ possui infinitas medidas hiperbólicas de máxima entropia.

Seja μ_i a medida de Lebesgue do toro $\mathbb{T}^2 \times \{p_i\}$ para $i \in \mathbb{N}$. Ora, μ_i é invariante ergódica e de máxima entropia pois se projeta sobre a medida de máxima entropia de A . Além disso,

$$\lambda^c(\mu_i) = \int \log \|Df|E^c(x)\| d\mu_i(x) = \log \|g'(p_i)\| \neq 0.$$

Portanto, a aplicação $A \times g$ tem infinitas medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia.

4.3 Prova do teorema A

Nesta secção mostraremos que as conclusões de (HERTZ *et al.*, 2012)) valem para sistemas que exibem um folha periódica com número de rotação irracional ainda que não seja acessível. Depois disso, usamos (URES; VIANA; YANG, 20-).

Teorema A. Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado. Suponha que

a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo. Se f exibe uma folha periódica com número de rotação irracional então vale uma, e só uma, das alternativas abaixo:

- f possui apenas uma medida de máxima entropia μ com $\lambda^c(\mu) = 0$. Além disso, f é conjugada a uma extensão de rotação.
- f possui exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia; uma com expoente central negativo e outra com expoente central positivo.

Precisamos antes provar a proposição 11 abaixo.

Proposição 11. Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado. Suponha que a aplicação induzida por f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo e que f exibe uma folha periódica com número de rotação irracional. Se f possui uma medida de máxima entropia μ com $\lambda^c(\mu) = 0$ então f é conjugada a uma extensão de rotação.

Lema 1. Sejam $f_n : M \rightarrow M$ funções contínuas e μ_n sequência de medidas em M . Se $w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$ e a sequência de aplicações contínuas $\{f_n\}$ converge uniformemente para f então

$$w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n)_* \mu_n = f_* \mu.$$

Demonstração. Considere $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Temos que provar que

$$\lim \int \varphi \circ f_n d\mu_n = \int \varphi \circ f d\mu.$$

Ora, φ é uniformemente contínua. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Existe $\delta > 0$ e tal que se $d(x, y) < \delta$ temos $d(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$. Além disso, existe $N > 0$ tal que se $n > N$, $d(f_n(x), f(x)) < \delta$ e $|\int \varphi d\mu_n - \int \varphi d\mu| < \varepsilon$.

Mas

$$\int \varphi \circ f_n - \int \varphi \circ f = (\int \varphi \circ f_n d\mu_n - \int \varphi \circ f d\mu_n) + (\int \varphi \circ f d\mu_n - \int \varphi \circ f d\mu).$$

Logo, para todo $n > N$:

$$|\int \varphi \circ f_n - \int \varphi \circ f| < \varepsilon.$$

□

Lema 2. Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado sobre um Anosov. Suponha que uma medida de máxima entropia ergódica μ tem expoente central nulo. Se $\{\mu_x\}$ é a desintegração central de μ então para **todo** $x \in \mathbb{T}^2$ vale

$$f_* m_x = m_{f(x)}.$$

Demonstração. Suponha que a medida de máxima entropia ergódica tem expoente central nulo. Seja $C \equiv \{x \in \mathbb{T}^2; f_* m_x = m_{f(x)}\}$. Então $v(C) = 1$. Considere um ponto $x \in \mathbb{T}^2$. Então, tome uma sequência de abertos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(U_n) = 0$ e $\bigcap_n U_n = \{x\}$. Como $v(U_n) > 0$ então existe $x_n \in U_n \cap C$. Portanto obtemos uma sequência x_n com $\lim_n x_n = x$ e com $f_* m_{x_n} = m_{f(x_n)}$.

Seja $f_n = f|_{\pi^{-1}(x_n)}$ vista como aplicação de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^1$ (para isso trivializamos o fibrado numa vizinhança de p e numa vizinhança de $f(p)$). Temos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para $f|_{W^c(x)}$, já que f é de classe C^2 . Defina $\mu_n = \mu_{x_n}$. Pelo princípio de invariância, versão do teorema 20, a desintegração ao longo da folheação central é contínua e portanto, $w^* - \lim \mu_n = \mu_x$

Pelo lema anterior,

$$w^* - \lim f_{n*} \mu_n = f_* \mu_x.$$

Do mesmo modo, $w^* - \lim f_* \mu_n = \mu_x$.

Logo,

$$f_* \mu_x = \mu_{f(x)}.$$

□

Demonstração. Suponha que $W^c(a)$ é uma folha periódica de período τ e $f^\tau|_{W^c(a)}$ tem número de rotação irracional.

Suponha que f tem medida m ergódica de máxima entropia com expoente central zero. Então, pelo princípio de invariância, existe uma desintegração contínua $\{m_x^c\}$ ao longo da folheação central invariante por holonomias instáveis e estáveis.

Ora, a família $\{m_x^c\}_x$ é invariante e $f^\tau|_{W^c(a)} \circ h = h \circ R_\alpha$ para α irracional. Como R_α é unicamente ergódica para a medida de Lebesgue $Leb_{\mathbb{S}^1}$ então $h_* Leb_{\mathbb{S}^1}$ é a única medida invariante para $f^\tau|_{W^c(a)}$. Além disso, tal medida não tem átomos e $\text{supp}(m_a) = \text{supp } h_* Leb_{\mathbb{S}^1} = W^c(a)$. Usando a acessibilidade da aplicação quociente $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ obtemos que m_x^c não possui átomos e tem suporte total para todo $x \in \mathbb{T}^2$. O resto da prova de que f é extensão de rotação é idêntica ao teorema 21 mas será lembrada aqui. Definimos assim, uma ação, como abaixo, de $\mathbb{S}^1$ em M que comuta com f . Digamos que a desintegração da medida de máxima entropia é $\{m_x\}_{x \in \mathbb{T}^2}$. Tome uma orientação para W^c . Então, vendo $\mathbb{S}^1$ como $[0, 1] \mod .1$, defina $\Gamma : \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ de modo que $m_x([\Gamma(\theta, x), x]) = \theta$. Essa ação está bem definida e é contínua porque $\text{supp}(m_x) = W^c(x)$, as medidas condicionais não tem átomos e a desintegração é contínua. Assim, pela invariância da desintegração, vem que $f(\Gamma(\theta, x)) = \Gamma(\theta, f(x))$. Portanto, concluímos que f é conjugado a uma extensão de rotação de um Anosov.

Note que a mesma ideia acima também estabelece que se temos uma medida cuja desintegração é invariante por f e por holonomias, então f é extensão de rotação.

Para unicidade, suponha que η é medida de máxima entropia. Então $\lambda^c(\eta) = 0$ pois f é extensão de rotação. Se $\{\eta_x\}$ é a desintegração de η , temos que η_a é a única medida para

a qual vale $\eta_a = f_*^\tau \eta_a$ e assim $\eta_a = m_a$. Pela acessibilidade do quociente e invariância das desintegrações de m e η por holonomias temos que $\eta_x = m_x$ para todo $x \in \mathbb{T}^3$.

Isso conclui a prova da proposição 11.

□

Para o que se segue, enunciamos uma proposição de (URES; VIANA; YANG, 20-) numa versão ligeiramente diferente mas cuja prova é a mesma.

Proposição 12. (URES; VIANA; YANG, 20-) Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, de classe C^2 dinamicamente coerente com folheação unidimensional compacta formando um e suponha que a aplicação induzida por f no quociente é homeomorfismo de Anosov transitivo. Suponha ainda que f não tem medida de máxima entropia com expoente nulo. Então, dadas η_1 e η_2 medidas ergódicas diferentes de máxima entropia com expoente central negativo, temos $\text{supp}(\eta_1) \cap \text{supp}(\eta_2) = \emptyset$.

Final da prova do teorema A.

Seja μ uma medida de máxima entropia com expoente negativo e $W^c(x)$ uma folha de período l com $\rho(f^l|W^c(x)) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Considere $a \in W^c(x) \cap \text{supp}(\mu)$. Nesse caso, como $f \in C^2$, do teorema de Denjoy, temos que $\{f^n(a)\}$ é denso em $W^c(x)$ e assim $W^c(x) \subset \text{supp}(\mu)$ e portanto f não suporta outra medida de máxima entropia com expoente central negativo, pela proposição acima.

□

Note que o suporte das medidas de máxima entropia é total no contexto do teorema A. Suponha que μ é a medida de máxima entropia com enpoente negativo. De fato, $W^c(x) \subset \text{supp}(\mu)$. Como o suporte de μ é u -saturado, temos que $W^{cu}(x) \subset \text{supp}(\mu)$. No entanto, $\overline{W^{cu}(x)} = \mathbb{T}^3$, logo $\text{supp}(\mu) = \mathbb{T}^3$.

Proposição E. Seja $f \in \text{SPH}_1(M)$ que não é extensão de rotação. Suponha que o conjunto $R = \{q \in \mathbb{N} \mid \text{existe } p \text{ com } p/q = \rho(f^l|W^c(x))\}$, para alguma $W^c(x)$ é periódica com período l , $p \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1\}$ é ilimitado.

Então f possui exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia uma com expoente central negativo e outra com expoente central positivo.

Demonstração. Suponha que R é ilimitado e que μ_1 e μ_2 são medidas de máxima entropia com expoente negativo. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $W^c(x_k)$ folha central periódica com periódico τ_k com $\rho(f^{\tau_k}|W^c(x_k)) = \frac{p_k}{q_k}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sejam $a_i \in W^c(x_k) \cap \text{supp}(\mu_i)$, para $i = 1, 2$. Temos que $\text{card}\{f^{n\tau_k}(a_i) \mid n \in \mathbb{N}\} \geq q_k$ pela proposição 1. Pelo teorema 17, o comprimento das folhas centrais é limitado, digamos por M . Assim, existem pontos $a_j^{(i)} \in W^c(x) \cap \text{supp}(\mu_j)$ com $j = 1, 2$ e $i = 1, \dots, q_k$ e portanto para alguma ordenação dos $a_j^{(i)}$'s temos

$\sum_{i=1}^{q_k} \text{dist}(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}) \leq M$. Logo, $\min_{i,j} \text{dist}(a_1^j, a_2^i) \leq \frac{M}{q_k}$. Dado que k é arbitrariamente grande vem que $\text{dist}(\text{supp}(\mu_1), \text{supp}(\mu_2)) = 0$, o que conclui a prova. □

4.4 Prova do teorema B

Definição 43. Seja μ uma medida f -invariante. Definimos a bacia de μ como o conjunto $\mathcal{B}^+(\mu) \equiv \{x \in M; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x) = \int \varphi d\mu \text{ para todo potencial } \varphi\}$.

Definimos ainda $\mathcal{B}^-(\mu)$ como a bacia de μ com relação a aplicação f^{-1} .

Pelo teorema ergódico de Birkhoff, os conjunto $\mathcal{B}^+(\mu)$ e $\mathcal{B}^-(\mu)$ tem medida μ total se μ é ergódica.

Vamos analisar agora a topologia das bacia das medidas de máxima de entropia de uma aplicação de $SPH_1(\mathbb{T}^3)$. O seguinte lema é um resultado clássico de teoria da medida.

Lema 3. Seja U um conjunto aberto e $\{\lambda_n\}$ uma sequência de medidas convergindo na topologia fraca* para λ . Então $\liminf \lambda_n(U) \geq \lambda(U)$.

Denotaremos por $ME^-(f) = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ o conjunto das medidas ergódicas de máxima entropia com expoente negativo e por $ME^+(f) = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ o conjunto das medidas de máxima entropia com expoente positivo.

Teorema B. Suponha que $f \in SPH_1(\mathbb{T}^3)$. Então existe $\mu \in ME^-(f)$ tal que $\text{int}(\overline{\mathcal{B}^+(\mu)}) \neq \emptyset$ ou $\eta \in ME^+(f)$ com $\text{int}(\overline{\mathcal{B}^-(\eta)}) \neq \emptyset$.

Demonstração. Temos que $\pi \circ f = g \circ \pi$ para algum Anosov $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Além disso g é topologicamente conjugado a um Anosov linear $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ pelo teorema 3, digamos $A \circ h = h \circ g$ para um homeomorfismo h . Seja ν a medida de máxima entropia de g .

Seja $D = \{x \in \mathbb{T}^2; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} A_*^j \delta_x = h_* \nu\}$. Pelo teorema de Birkhoff, $h_* \nu(D) = 1$ mas $h_* \nu$ é a medida de máxima entropia de A e portanto, a medida de Lebesgue (BOWEN, 1970). Logo, D é denso em $\mathbb{T}^2$. Como h é homeomorfismo temos que $h^{-1}(D)$ é denso em $\mathbb{T}^2$. Além disso, se $x \in D$ então:

$$\begin{aligned} h_*\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_*^j \delta_{h^{-1}(x)}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} ((h \circ g)^j)_* \delta_{h^{-1}(x)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} A_*^j \delta_x \end{aligned}$$

Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (g^j)_* \delta_{h^{-1}(x)} = \nu.$$

Note que como $h^{-1}(D)$ é denso em $\mathbb{T}^2$ então $C \equiv \pi^{-1}(h^{-1}(D))$ é denso em $\mathbb{T}^3$: se $y \in \mathbb{T}^3$ então, considerando uma caixa c -folheada $\phi : U \times I \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^3$ contendo y com $y = \phi(u, a)$ então podemos achar $\{u_n\}_n$ com $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n, a)$, onde $\pi_* \phi(u_n, a) \in D$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_* \phi(u_n, a) = \pi_* y$ pela densidade de D .

Seja $p \in C$, então:

$$\pi_*\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)_* \delta_p\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (g^j)_* \delta_{\pi(p)}.$$

Assim, como $\pi(p) \in h^{-1}(D)$ vem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_*\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)_* \delta_p\right) = \nu.$$

Temos que para alguma sequência $\{n_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ a sequência $\left\{\frac{1}{n_r} \sum_{j=0}^{n_r-1} (f^j)_* \delta_p\right\}_r$ converge.

Como não faz diferença para os argumentos, vamos supor que $\left\{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)_* \delta_p\right\}_n$ converge para evitar subíndices.

Pelo teorema 21 e corolário 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)_* \delta_p = a_1(p) \mu_1 + \dots + a_k(p) \mu_k + b_1(p) \eta_1 + \dots + b_m(p) \eta_m.$$

Suponha que existe $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $a_i(p) \neq 0$. Considere $q \in \mathcal{B}^+(\mu_i) \cap \text{supp}(\mu_i)$.

Seja $W_p^s(q)$ a variedade estável de Pesin de q . Considere $U = W_\varepsilon^u(W_p^s(q))$. Dado que U é aberto, pelo lema 3 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ vale:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)_* \delta_p(U) > a_i(p) \mu_i(U) / 2 > 0.$$

Assim, existe $l(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $f^{l(\varepsilon)}(p) \in U$. Ora $W_p^s(q) \subset \mathcal{B}(\mu_i)$ e então, se definirmos $\hat{q}_\varepsilon \equiv W_{loc}^u(f^{l(\varepsilon)}(p)) \cap W_p^s(q)$ temos $\hat{q}_\varepsilon \in \mathcal{B}^+(\mu_i)$.

Logo $f^{-l(\varepsilon)}(\hat{q}_\varepsilon) \in \mathcal{B}^+(\mu_i)$ e $dist(f^{-l(\varepsilon)}(\hat{q}_\varepsilon), p) \leq C\lambda^{l(\varepsilon)}\varepsilon$, onde $\lambda < 1$ e C é uma constante. Obtemos então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-l(\frac{1}{n})}(\hat{q}_{\frac{1}{n}}) = p.$$

Portanto, $p \in \overline{\mathcal{B}^+(\mu_i)}$.

Analogamente, se supomos que existe $i \in \{1, \dots, m\}$ com $b_i(p) \neq 0$ então $p \in \overline{\mathcal{B}^-(\eta_i)}$.

Logo, $C \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{\mathcal{B}^+(\mu_i)} \bigcup \bigcup_{k=1}^m \overline{\mathcal{B}^-(\eta_k)}$ mas $\overline{C} = \mathbb{T}^3$, logo $\mathbb{T}^3 = \bigcup_{i=1}^k \overline{\mathcal{B}^+(\mu_i)} \bigcup \bigcup_{k=1}^m \overline{\mathcal{B}^-(\eta_k)}$.

Assim, existe $j \in \{1, \dots, \max\{m, k\}\}$ tal que $int(\overline{\mathcal{B}^+(\mu_j)}) \neq \emptyset$ ou $int(\overline{\mathcal{B}^-(\eta_j)}) \neq \emptyset$.

□

Proposição 13. Seja $f : N \rightarrow N$, definida numa variedade N , uma aplicação parcialmente hiperbólica e transitiva. Se μ é uma medida ergódica hiperbólica tal que o expoente de μ é negativo para toda direção $v \in E^s \oplus E^c$ então,

$$\overline{\mathcal{B}^+(\mu)} = M.$$

Demonstração. A ideia é a mesma da prova anterior. Basta substituir o C por $\{f^n(x)\}_n$.

□

4.5 Prova do teorema D

Chamaremos de *su-caminho* uma concatenação de caminhos não-triviais tangentes a uma das direções E^u ou E^s .

A classe de acessibilidade de x é o conjunto de pontos que podem ser ligados a x por um *su-caminho*. A classe de acessibilidade de um ponto x será denotada por $ACC(x)$.

Seja $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 \dots * \gamma_n$, onde γ_k é caminho tangente a uma das direções E^u ou E^s para $k = 1, \dots, n$. Denotamos por h_{γ_k} a holonomia $h_{\gamma_k(0), \gamma_k(1)}^{\sigma_k} : W^c(\gamma_k(0)) \rightarrow W^c(\gamma_k(1))$ onde $\sigma_k \in \{u, s\}$ indica a direção tangente a γ_k . Por fim, h_γ denota a composição de holonomias $h_{\gamma_1} \circ h_{\gamma_2} \dots \circ h_{\gamma_n}$.

Lema 4. Seja $p : T \rightarrow \mathbb{T}^2$ um recobrimento de $\mathbb{T}^2$ com número finito de folhas e T conexo por caminhos. Então, T é homeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

Demonstração. Primeiramente, T é compacto pois é um recobrimento finito. Note que T é uma superfície portanto é um n -Toro ou uma esfera pelo teorema de classificação. Segue da unicidade do recobrimento universal que T não pode ser uma esfera pois a esfera é simplesmente conexa.

Assim, T deveria ser um n -Toro. Note que como $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é abeliano, todo recobrimento é normal. Portanto, $\pi_1(T) = \frac{\mathbb{Z}^2}{G}$ onde G é o grupo de automorfismos do recobrimento. Logo, $\pi_1(T)$ é abeliano, o que só pode acontecer se T for um toro. $\square$

Definição 44. Dizemos que T é um su-toro se é saturado por folhas estáveis e por folhas instáveis.

Teorema D. Seja $f : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente com folhas centrais unidimensionais compactas formando um fibrado. Suponha que a aplicação de f no espaço das folhas centrais é um homeomorfismo de Anosov transitivo.

1. Se f tem uma folha central periódica com dinâmica 1-Morse-Smale. Então, existe um su -toro periódico ou f tem uma única medida de máxima entropia com expoente negativo e uma única com expoente positivo.
2. Se f tem uma folha central periódica com dinâmica k -Morse-Smale, então, f possui no máximo $2(k + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ medidas ergódicas de máxima entropia ou um su -toro periódico.

Demonstração. Sob a hipótese 1:

Seja $W^c(a)$ a folha periódica com dinâmica 1-Morse-Smale com a atrator e r repulsor para $f^\tau|_{W^c(a)}$ onde τ é o período de $W^c(a)$. Dividiremos a prova em dois casos.

Caso 1: f possui uma medida de máxima entropia ergódica com exponte central nulo.

Suponha que f possui uma medida de máxima entropia com expoente nulo, m . Seja $\{m_x\}_{x \in \mathbb{T}^2}$ a desintegração de m ao longo das folhas centrais.

Pelo lema 2, temos que $m_a = c_1 \delta_a + c_2 \delta_r$ para $c_1, c_2 \in [0, 1]$. Suponha que $c_1 \neq 0$. Como a desintegração é invariante por holonomias estáveis e instáveis, vem que:

$$\#\{h_\gamma(a) \cap W^c(a); \gamma \text{ é } su\text{-caminho}\} \subset \text{supp}(m_a) = \{a, r\}.$$

E portanto, como as holonomias são homeomorfismos e a aplicação quociente é acessível temos que para todo $p \in \mathbb{T}^3$:

$$1 \leq \#\{h_\gamma(a) \cap W^c(p); \gamma \text{ é } su\text{-caminho}\} \leq 2.$$

Posto de outro modo, $\#ACC(a) \cap W^c(p) = \#ACC(a) \cap W^c(a) \leq 2$ para todo $p \in \mathbb{T}^3$. Portanto $Acc(a)$ é um conjunto compacto.

Assim, temos que

$$\pi|_{ACC(a)} : ACC(a) \longrightarrow \mathbb{T}^2$$

é um recobrimento de 2 folhas ou de 1 folha de $\mathbb{T}^2$. Como $ACC(a)$ é compacto e conexo por caminhos então é um toro com o mesmo período de a pelo lema 4.

Complemento do caso 1

Vamos mostrar que existe uma única medida de máxima entropia ergódica com expoente negativo ou um su-toro periódico. Suponha então que μ_1 e μ_2 são medidas ergódicas de máxima entropia com expoente central negativo.

Note que se η é medida de máxima entropia, então temos $\text{supp}(\eta) \cap W^c(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathbb{T}^3$, como veremos a seguir. Seja $y \in \text{supp}(\eta)$. Temos que $W^u(y) \subset \text{supp}(\eta)$ e $\pi(W^c(y)) = \mathcal{F}^u(\pi(y))$ mas $\overline{\mathcal{F}^u(\pi(y))} = \mathbb{T}^2$. Portanto, $\overline{W^u(y)} \cap W^c(x) \neq \emptyset$ e assim $\text{supp}(\eta) \cap W^c(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathbb{T}^3$.

Lema 5. O suporte de uma das medidas, μ_1 ou μ_2 possui um ponto por folha central.

Demonstração. Suponhamos que não, ou seja, que o número de pontos do suporte de μ_i em cada folha central, tipicamente, é pelo menos dois. Existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{T}^2$ de $\pi(r)$ tal que para todo $x \in U$ temos $\mathcal{F}_{loc}^u(x) \cap \mathcal{F}_{loc}^s(\pi(r)) \neq \emptyset$. Como $\pi_*\mu_1 = \pi_*\mu_2$ (veja a observação 5), existe $p \in U$ com $\text{Card}(\pi^{-1}(p) \cap \text{supp}(\mu_i)) \geq 2$ para $i = 1, 2$. Sejam $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(p) \cap \text{supp}(\mu_1)$ e $p_3, p_4 \in \pi^{-1}(p) \cap \text{supp}(\mu_2)$.

Considere a holonomia instável $h^u : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{F}_{loc}^u(p) \cap \mathcal{F}_{loc}^s(\pi(r)))$.

Pelo princípio de invariância, (AVILA; VIANA, 2010), $h^u(p_1), h^u(p_2) \in \text{supp}(\mu_1)$ e $h^u(p_3), h^u(p_4) \in \text{supp}(\mu_2)$. Denotemos $\hat{p}_i = h^u(p_i)$. Agora, consideremos a holonomia estável

$$h^s : \pi^{-1}(\mathcal{F}_{loc}^u(p) \cap \mathcal{F}_{loc}^s(\pi(r))) \longrightarrow W^c(r).$$

Como a folha central de r tem dinâmica 1-Morse-Smale segue que (veja figura 1)

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f^n(h^s(\hat{p}_i)), a) = 0 \\ \text{ou} \\ h^s(\hat{p}_i) = r \end{cases}$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f^n(\hat{p}_i), a) = 0$ ou $h^s(\hat{p}_i) \in W^s(r)$ o que nos dá $a \in \text{supp} \mu_i$ ou $r \in \text{supp} \mu_i$, para cada $i=1$ e 2 , já que o suporte é fechado e f -invariante. Além disso, h^s é um homeomorfismo e portanto, $a \in (\text{supp}(\mu_1) \cap \text{supp}(\mu_2))$ mas os suportes das medidas μ_i são disjuntos pela proposição 12. Uma contradição.

□

Pela prova do lema temos como consequência que $\text{Card}(\text{supp}(\mu_i) \cap \{a, r\}) = 1$ para $i = 1, 2$. Digamos que μ_1 tenha um átomo por folha e que $r \in \text{supp}(\mu_1)$ e $a \notin \text{supp}(\mu_1)$. Para simplificar a notação, de agora em diante, faremos $\mu = \mu_1$.

Lema 6. $W^s(r) \subset \text{supp}(\mu)$.

Demonstração. Pelo lema acima temos que $\#\text{supp}(\mu) \cap W^c(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{T}^3$. Além disso, $\text{supp}(\mu) \cap W^c(x) \subset W^s(r)$ para todo $x \in W^{cs}(r)$. De fato, se tivéssemos $y \notin W^s(r)$ para

Figura 1 – Holonomia

algum $y \in \text{supp}(\mu) \cap W^c(x)$ e $x \in W^{cs}(r)$ então, $\lim f^k(y) = a$ e teríamos $a \in \text{supp}(\mu)$ o que não pode acontecer pelo que assumimos acima. Portanto, $W^s(r) = \bigcup_{x \in W^{cs}(r)} W^s(r) \cap W^c(x) \subset \text{supp}(\mu)$.

□

Seja $S: \mathbb{T}^3/W^c \rightarrow \mathbb{T}^3$ a aplicação que associa $p \mapsto S(p) \in \text{supp}(\mu) \cap \pi^{-1}(p)$ para todo $p \in \mathbb{T}^3/W^c$. Note que a aplicação está bem definida pois toda folha central possui exatamente um ponto do suporte de μ . Ora, como $\text{supp}(\mu)$ é u -saturado temos que $S(\mathcal{F}^u(p)) = W^u(S(p))$. Além disso, mostramos que $W^s(r) \subset \text{supp}(\mu)$ e portanto $S(\mathcal{F}^s(\pi(r))) = W^s(r)$.

Note que dado $q \in \text{supp}(\mu)$ existe uma sequência $(p_n)_n$, com $\lim p_n = q$, tal que $W^s(p_n) \subset \text{supp}(\mu)$ e como $\text{supp}(\mu)$ é fechado, segue-se que $W^s(q) \in \text{supp}(\mu)$. De fato, basta notar que $\mathcal{F}^s(\pi(r)) \cap \mathcal{F}^u(\pi(q))$ se acumula em $\pi(q)$. Portanto, $S(\mathcal{F}^s(\pi(r)) \cap \mathcal{F}^u(\pi(q)))$ se acumula em q e para $x \in (\mathcal{F}^s(\pi(r)) \cap \mathcal{F}^u(\pi(q)))$ temos $W^s(x) \subset \text{supp}(\mu)$.

Assim, $\text{supp}(\mu)$ é um su -toro.

A prova da unicidade de medida ergódica de máxima entropia com expoente central positivo é inteiramente análoga.

Sob a hipótese 2: A Prova é apenas uma generalização da prova acima. Se temos uma medida de máxima entropia ergódica com expoente zero, construímos um toro via recobrimento. Se não, podemos usar a proposição 12. Suponha que existem $k + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$ medidas de máxima entropia com expoente negativo $\mu_1, \dots, \mu_{k + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \mu_{k + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$. Usando o mesmo argumento que na prova anterior sob a hipótese 1, concluímos que o suporte de umas das medidas μ_i tem um ponto por folha. O resto da prova segue de maneira idêntica.

□

Ressaltamos aqui que a existência de su-toro periódico é rara pois acessibilidade é aberta e densa.

4.6 Proposição F

Definição 45. Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é dita transitiva se dados abertos $A, B \subset M$ existe $N = N(A, B) > 0$ tal que $f^{-N}(A) \cap B \neq \emptyset$.

Lema 7. Seja $f \in SPH_1(\mathbb{T}^3)$ uma aplicação transitiva que não é extensão de rotação. Suponha que dado $x \in \mathbb{T}^3$ a família $\{h_{x,y}^u\}_{y \in W^u(x)}$ é família equicontínua. Então, $\overline{W^u(\mathcal{O}(a))} = \mathbb{T}^3$ se a é ponto periódico com $\dim W_P^s(a) = 2$.

Demonstração. Considere a um ponto periódico com $\dim W_P^s(a) = 2$.

Seja $z \in M$ tal que $\overline{\{f^n z\}_{n \in \mathbb{N}}} = M$.

Considere $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ para qual temos $d(h_{x,y}^u(\xi), h_{x,y}^u(\zeta)) < \varepsilon$ se $\text{dist}(\xi, \zeta) < \delta$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $z \in W_{loc}^s(B^{cu}(a))$ onde $B^{cu}(a) = \bigcup_{x \in W_P^s \cap W^c(a)} W_{loc}^u(a)$.

Se isso não é verdade, tomamos um iterada do ponto z para o qual seja.

Seja $z^{(s)} \in W_{loc}^s(z) \cap B^{cu}(a)$ e $z_0 \in W^c(a) \cap W^s(z^{(s)})$ e $z_a = W_{loc}^c(z^{(s)}) \cap W^s(a)$ (veja a figura 2).

Figura 2 – Pontos relevantes

Ora, $\omega(z^{(s)}) = \omega(z)$.

Seja $N > 0$ tal que se $n > N$ temos $\text{dist}(f^n z_0, a) < \delta$. Assim, se $n > N$, vem:

$$\varepsilon \geq \text{dist}(h_{a, f^n(z^{(s)})}^u(a), h_{a, f^n(z^{(s)})}^u(f^n(z_0))).$$

o que dá

$$\varepsilon \geq \text{dist}(h_{a, f^n(z^{(s)})}^u(a), f^n(z^{(s)})) = \text{dist}(f^n(z_a), f^n(z^{(s)})).$$

Assim,

$$\omega(z^{(s)}) = \omega(z_a).$$

Logo:

$$\omega(z_a) = \omega(z^{(s)}) = \omega(z) = \mathbb{T}^3.$$

Mas $z_a \in W^u(a)$ o que conclui a prova.

□

De modo inteiramente análogo podemos provar:

Lema 8. Seja $f \in SPH_1(\mathbb{T}^3)$ uma aplicação transitiva que não é extensão de rotação. Suponha que dado $x \in \mathbb{T}^3$ a família $\{h_{x,y}^s\}_{y \in W^s(x)}$ é família equicontínua. Então, $\overline{W^s(\mathcal{O}(a))} = \mathbb{T}^3$ se a é ponto periódico com $\dim W_P^u(a) = 2$.

Proposição F. Seja $f \in SPH_1(\mathbb{T}^3)$ que não é extensão de rotação. Suponha que dado $x \in \mathbb{T}^3$ a família $\{h_{x,y}^u\}_{y \in W^u(x)}$ é família equicontínua. Então, existe uma única medida ergódica de máxima entropia com expoente negativo. Assumindo que dado $x \in \mathbb{T}^3$ a família $\{h_{x,y}^s\}_{y \in W^s(x)}$ é equicontínua, temos unicidade da medida ergódica de máxima entropia com expoente positivo.

Demonstração. Seja η medida de máxima entropia com expoente central negativo. Então, pelo lema 10, existe um ponto a periódico com $\dim W_P(a) = 2$ tal que $\overline{W^u(\mathcal{O}(a))} = \text{supp}(\eta)$. Pelo lema anterior, $\text{supp}(\eta) = \mathbb{T}^3$ e como os suportes de ergódicas de máxima entropia com mesmo sinal de expoente central são disjuntos, pelo lema 7, temos uma única medida ergódica de máxima entropia com expoente negativo.

□

4.7 Exemplos

Exemplo 8 (Sistemas satisfazendo hipóteses do teorema D). Seja $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma automorfismo Anosov. Considere $g : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ uma aplicação MS_1 com derivada tal que $A \times g$ seja

parcialmente hiperbólico, i.e., $|A^{-1}|^{-1} < |g'(p)| < |A|$ para todo $p \in \mathbb{S}^1$. Então existem perturbações de $A \times g$ que são dinamicamente coerentes e possuem ao menos uma folha periódica com dinâmica 1-Morse-Smale.

Primeiro, note que como a aplicação quociente é Anosov, então é expansiva. Logo, a folheação central de f é plaque-expansive, como veremos. Seja $\varepsilon > 0$ uma constante de expansividade para A . Considere $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ε -pseudo órbitas com $\text{dist}_M(x_n, y_n) < \varepsilon$ e $f(x_n) \in W^c(x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, $\{\pi(x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{\pi(y_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ são órbitas de A , i.e., $A^n(\pi(x_0)) = \pi(x_n)$ e $A^n(\pi(y_0)) = \pi(y_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $\text{dist}_{\mathbb{T}^2}(A^n(x_0), A^n(y_0)) < \varepsilon$ e portanto, $\pi(x_n) = A^n(\pi(x_0)) = A^n(\pi(y_0)) = \pi(y_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Isso significa que $x_n \in W^c(y_n)$ que é o que queríamos mostrar.

Considere $p \in \mathbb{T}^2$ ponto fixo de A . Então existe uma continuação p_B para B numa vizinhança C^1 de A . Dada a estabilidade da folheação central nesse caso, (HIRSCH; PUGH; SHUB, 2006), existe $\delta > 0$ tal que se $d_{C^1}(\tilde{f}, f) < \delta$ então $d_{C^1}(\tilde{f}|_{[p(\tilde{f})]}, f|_{[p]}) < \varepsilon$ onde $[p]$ é a folha central $\pi^{-1}(p)$ e $[p(\tilde{f})]$ é a folha central de $\tilde{f}$ que se projeta sobre o ponto fixo $p(\tilde{f})$ de $\tilde{f}$ que é continuação de p . Pela estabilidade estrutural dos sistemas Morse-Smale (MELO; STRIEN, 2012), temos que $\tilde{f}|_{[p(\tilde{f})]}$ é MS_1 se ε é pequeno. Portanto a propriedade de possuir uma folha central com dinâmica 1-Morse-Smale é aberta. Logo, numa vizinhança de f encontramos um conjunto aberto denso de difeomorfismos dinamicamente coerentes, C^2 e com uma folha periódica onde a dinâmica restrita é 1-Morse-Smale.

Do mesmo modo podemos achar sistemas satisfazendo as hipóteses da parte 2 do **teorema D** começando com g k-Morse-Smale.

Note que por (HIRSCH; PUGH; SHUB, 2006) os sistemas com alguma folha periódica com dinâmica Morse-Smale é aberto e denso dentre os sistemas cuja folheação central forma um fibrado sobre um Anosov.

Observação 6 (Sobre medidas de máxima entropia para sistemas transitivos). Em (CHENG; GAN; SHI, 2017), dentro do Lema 4.6, os autores constroem exemplos de sistemas $g : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ parcialmente hiperbólicos transitivos (de fato, robustamente transitivos) com uma folha Morse-Smale que admitem dois toros $S_1 = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ e $S_2 = \mathbb{T}^2 \times \{1\}$ invariantes que são s, u -saturados com $\pi(S_i) = \mathbb{T}^2$. Tais sistemas são skew-products sobre um Anosov $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Naquele exemplo, se considerarmos a medida de Lesbesgue normalizada μ_i em $\mathbb{T}^2 \times \{i\}$, $i \in \{1, 2\}$, obtemos medidas de máxima entropia ergódicas com expoente negativo. Desse modo, acessibilidade é uma hipótese necessária na **Proposição F**.

Por (BONATTI; DÍAZ; URES, 2002), teo 1.5) genericamente, dentre os sistemas transitivos robustamente acessíveis com pontos fixos hiperbólicos de índices distintos, a folheação estável ou a folheação instável é minimal. Também em (BONATTI; DÍAZ; URES, 2002), teo.1.6) mostra-se que entre os difeomorfismos transitivos coerentes robustamente com uma folha central compacta periódica, é genérica a propriedade de ter ambas as folheações estável e instável

minimais.

Logo, sistemas transitivos genéricos no contexto acima tem uma única medida ergódica de máxima entropia com expoente central negativo e outra com expoente central positivo.

Deixamos aqui um exemplo de sistema satisfazendo as hipóteses do corolário A:

Exemplo 9 (Sistemas especiais que não são extensão de rotação exibindo folha central com número de rotação irracional). A ideia da construção é perturbar uma extensão de rotação acessível numa vizinhança de uma folha central fixa com auxílio de uma bump-function. Depois giramos o sistema, se necessário.

Considere uma extensão de rotação acessível $F : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$. Acessibilidade é aberta e densa no contexto conservativo por (DOLGOPYAT; WILKINSON, 2003).

Escreva $F = A \ltimes R_x$, onde R_x é uma rotação. Podemos supor que $R_0 = Id_{\mathbb{S}^1}$, se não for assim, fazemos $G = (Id_{\mathbb{T}^2}, R_0^{-1}) \circ F$ e como ação de rotação preserva as folheações instável e estável, o novo sistema é ainda acessível.

Seja $g_t(\xi) = \xi + t \sin(4\pi\xi)$. Para t pequeno, g é um difeomorfismo 2-Morse-Smale C^1 -próximo da identidade. Considere $R > 0$ tal que existe um ponto periódico $p \in \mathbb{T}^2$ com órbita fora de $B(0, R)$. Considere uma bump-function $\eta : \mathbb{T}^2 \longrightarrow [0, 1]$ com $\eta(0) = 1$ e $\eta(x) = 0$ se $|x| > R$.

Defina $H = A \ltimes (g_{l(x)} \circ R_x)$, onde $l(x) = t_0 \eta(x)$ para algum $t_0 > 0$ fixado.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que para todo $g \in B_{C^1}(F, \varepsilon)$, g seja acessível, (DIDIER, 2003). Se t_0 é escolhido pequeno, então $d_{C^1}(H, F) < \frac{\varepsilon}{2}$, como veremos nas contas abaixo.

Faremos as contas para os levantamentos $\tilde{H}$ e $\tilde{F}$ de H e F em $\mathbb{R}^3$. Para tanto, escrevamos $R_x(\xi) = \alpha(x) + \xi$, onde $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ é uma aplicação C^2 . Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x, \xi) &= (Ax, \alpha(x) + \xi) \\ \tilde{H}(x, \xi) &= (Ax, \alpha(x) + \xi + t_0 \eta(x) \sin(4\pi(\alpha(x) + (\xi))))\end{aligned}$$

Temos

$$|\tilde{F}(x, \xi) - \tilde{H}(x, \xi)| = t_0 |\eta(x) \sin(4\pi(\alpha(x) + (\xi)))|.$$

Por consequência:

$$|\tilde{F}(x, \xi) - \tilde{H}(x, \xi)| < t_0.$$

Para as derivadas temos:

$$D\tilde{F} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \alpha'(x) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{H} = \begin{bmatrix} A \\ \alpha'(x) + t_0 \sin(4\pi(\xi + \alpha(x))) \eta'(x) - \eta(x) t_0 \cos(4\pi(\xi + \alpha(x))) \alpha'(x) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \eta(x)t_0 \cos(4\pi(\xi + \alpha(x))) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$|D\tilde{F}(x, \xi) - D\tilde{H}(x, \xi)| < t_0 \max\{|\sin(4\pi(\xi + \alpha(x)))||\eta'(x)| + |\eta(x) \cos(4\pi(\xi + \alpha(x)))\alpha'(x)|, \\ , |\eta(x) \cos(4\pi(\xi + \alpha(x)))|\}.$$

Como $\mathbb{T}^2$ é compacto existe $M > 0$ tal que para todo $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\max\{|\sin(4\pi(\xi + \alpha(x)))||\eta'(x)| + |\eta(x) \cos(4\pi(\xi + \alpha(x)))\alpha'(x)|, |\eta(x) \cos(4\pi(\xi + \alpha(x)))|\} < M.$$

Se $t_0 < \min\{\frac{\varepsilon}{8M}, \frac{\varepsilon}{8}\}$ obtemos o desejado.

Seja $\tau(p)$ o período de p . Se $F^{\tau(p)}|_{W^c(p)}$ é rotação irracional, então H satisfaz as condições que procuramos. Se não, basta fazermos $I = P_\beta \circ H$ onde P_β é a aplicação $P(x, \xi) = (x, \xi + \beta)$ com β suficientemente pequeno e tal que

$$\alpha(p) + \alpha(f(p)) + \dots + \alpha(f^{\tau(p)-1}(p)) + \tau(p)\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Uma pequena perturbação não destroi a dinâmica 2-Morse-Smale em $W^c(0)$ e pela condição em β temos que $I^{\tau(p)}|_{W^c(p)}$ é uma rotação irracional e portanto obtemos o exemplo procurado.

REFERÊNCIAS

- ADLER, R. L.; WEISS, B. Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 57, n. 6, p. 1573–1576, 1967. Citado na página [23](#).
- ALEKSEEV, V. M.; YAKOBSON, M. V. Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems. **Physics Reports**, Elsevier, v. 75, n. 5, p. 290–325, 1981. Citado na página [23](#).
- AVILA, A.; SANTAMARIA, J.; VIANA, M. *et al.* Holonomy invariance: rough regularity and applications to lyapunov exponents. **Astérisque**, v. 358, p. 13–74, 2013. Citado na página [18](#).
- AVILA, A.; VIANA, M. Extremal lyapunov exponents: an invariance principle and applications. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 181, n. 1, p. 115–178, 2010. Citado nas páginas [18](#), [36](#), [37](#) e [56](#).
- AVILA, A.; VIANA, M.; WILKINSON, A. Absolute continuity, lyapunov exponents and rigidity i: geodesic flows. **arXiv preprint arXiv:1110.2365**, 2011. Citado nas páginas [17](#) e [34](#).
- BARREIRA, L.; PESIN, Y. B. **Lyapunov exponents and smooth ergodic theory**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2002. v. 23. Citado na página [29](#).
- BONATTI, C.; DÍAZ, L. J.; URES, R. Minimality of strong stable and unstable foliations for partially hyperbolic diffeomorphisms. **Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu**, Cambridge University Press, v. 1, n. 4, p. 513, 2002. Citado na página [60](#).
- BOWEN, R. Markov partitions for axiom a diffeomorphisms. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 92, n. 3, p. 725–747, 1970. Citado nas páginas [37](#) e [52](#).
- BRIN, M. Ergodic theory of frame flows. In: **Ergodic Theory and Dynamical Systems II**. [S.l.]: Springer, 1982. p. 163–183. Citado na página [41](#).
- BRIN, M.; BURAGO, D.; IVANOV, S. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of the 3-torus. **J. Mod. Dyn**, v. 3, n. 1, p. 1–11, 2009. Citado na página [32](#).
- BRIN, M.; GROMOV, M. On the ergodicity of frame flows. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 60, n. 1, p. 1–7, 1980. Citado na página [41](#).
- BURNS, K.; HERTZ, F. R.; HERTZ, M. R.; TALITSKAYA, A.; URES, R. Density of accessibility for partially hyperbolic diffeomorphisms with one-dimensional center. **Discrete Contin. Dyn. Syst**, v. 22, n. 1-2, p. 75–88, 2008. Citado na página [32](#).
- BURNS, K.; POLLICOTT, M. Stable ergodicity and frame flows. **Geometriae Dedicata**, Springer, v. 98, n. 1, p. 189–210, 2003. Citado na página [41](#).
- CHENG, C.; GAN, S.; SHI, Y. A robustly transitive diffeomorphism of kan’s type. **arXiv preprint arXiv:1701.05282**, 2017. Citado na página [60](#).

- DENJOY, A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 11, p. 333–376, 1932. Citado na página [24](#).
- DIDIER, P. Stability of accessibility. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 23, n. 6, p. 1717–1731, 2003. Citado nas páginas [32](#) e [61](#).
- DINABURG, E. I. A connection between various entropy characterizations of dynamical systems. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.**, v. 35, n. 324-366, p. 13, 1971. Citado na página [27](#).
- DOLGOPYAT, D.; VIANA, M.; YANG, J. Geometric and measure-theoretical structures of maps with mostly contracting center. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 341, n. 3, p. 991–1014, 2016. Citado nas páginas [18](#) e [39](#).
- DOLGOPYAT, D.; WILKINSON, A. Stable accessibility is c_1 dense, to appear. **Astérisque**, 2003. Citado nas páginas [32](#) e [61](#).
- DÍAZ, J.; GELFERT, K.; RAMS, M. Entropy spectrum of lyapunov exponents for nonhyperbolic step skew-products and elliptic cocycles. **arXiv:1610.07167v2**, 2017. Citado nas páginas [40](#) e [41](#).
- EPSTEIN, D. B. Foliations with all leaves compact. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, v. 26, n. 1, p. 265–282, 1976. Citado na página [32](#).
- FISHER, T.; DIAZ, L. J.; PACIFICO, M. J.; VIEITEZ, J. L. Entropy-expansiveness for partially hyperbolic diffeomorphisms. **arXiv preprint arXiv:1010.0721**, 2010. Citado na página [18](#).
- FRANKS, J. Anosov diffeomorphisms on tori. **Transactions of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 145, p. 117–124, 1969. Citado na página [24](#).
- FURSTENBERG, H. Noncommuting random products. **Transactions of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 108, n. 3, p. 377–428, 1963. Citado na página [18](#).
- GOGOLEV, A. Partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliations. **arXiv preprint arXiv:1104.5464**, 2011. Citado nas páginas [17](#) e [32](#).
- HAMMERLINDL, A.; POTRIE, R. Pointwise partial hyperbolicity in three-dimensional nilmanifolds. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 89, n. 3, p. 853–875, 2014. Citado nas páginas [33](#) e [39](#).
- _____. Partial hyperbolicity and classification: a survey. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, p. 1–43, 2016. Citado na página [17](#).
- HERTZ, F. R.; HERTZ, M. R.; TAHZIBI, A.; URES, R. Maximizing measures for partially hyperbolic systems with compact center leaves. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 32, n. 2, p. 825–839, 2012. Citado nas páginas [18](#), [19](#), [36](#), [39](#), [44](#), [46](#) e [48](#).
- HERTZ, F. R.; HERTZ, M. R.; URES, R. A non-dynamically coherent example on t_3 . In: ELSEVIER. **Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis**. [S.l.], 2016. v. 33, n. 4, p. 1023–1032. Citado nas páginas [17](#) e [32](#).
- HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. **Invariant manifolds**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 583. Citado nas páginas [17](#), [22](#), [31](#) e [60](#).

KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge university press, 1997. v. 54. Citado na página 23.

KELLER, G. **Equilibrium states in ergodic theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1998. v. 42. Citado na página 18.

KINGMAN, J. F. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 499–510, 1968. Citado na página 34.

LEDRAPPIER, F. Positivity of the exponent for stationary sequences of matrices. In: **Lyapunov exponents**. [S.l.]: Springer, 1986. p. 56–73. Citado na página 18.

LEDRAPPIER, F.; WALTERS, P. A relativised variational principle for continuous transformations. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 2, n. 3, p. 568–576, 1977. Citado na página 28.

LEDRAPPIER, F.; YOUNG, L.-S. The metric entropy of diffeomorphisms: part ii: relations between entropy, exponents and dimension. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 540–574, 1985. Citado na página 43.

LIND, D.; MARCUS, B. **An introduction to symbolic dynamics and coding**. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. Citado na página 23.

MALICET, D. Random walks on homeo (s 1). **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 356, n. 3, p. 1083–1116, 2017. Citado na página 41.

MANNING, A. There are no new anosov diffeomorphisms on tori. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 96, n. 3, p. 422–429, 1974. Citado na página 24.

_____. Classification of anosov diffeomorphisms on tori. **Dynamical Systems—Warwick 1974**, Springer, p. 26–27, 1975. Citado na página 24.

MELO, W. D.; STRIEN, S. V. **One-dimensional dynamics**. [S.l.]: Springer, 2012. v. 25. Citado nas páginas 24 e 60.

OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. characteristic lyapunov exponents of dynamical systems. **Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva**, Moscow Mathematical Society, v. 19, p. 179–210, 1968. Citado na página 29.

PESIN, J. B. Families of invariant manifolds corresponding to nonzero characteristic exponents. **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, IOP Publishing, v. 10, n. 6, p. 1261, 1976. Citado na página 30.

PESIN, Y.; WEISS, H. A multifractal analysis of equilibrium measures for conformal expanding maps and moran-like geometric constructions. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 86, n. 1, p. 233–275, 1997. Citado na página 27.

PESIN, Y. B. Characteristic lyapunov exponents and smooth ergodic theory. **Russian Mathematical Surveys**, Turpion Ltd, v. 32, n. 4, p. 55–114, 1977. Citado na página 43.

_____. **Dimension theory in dynamical systems: contemporary views and applications**. [S.l.]: University of Chicago Press, 2008. Citado na página 27.

- PUGH, C.; SHUB, M.; WILKINSON, A. *et al.* Hölder foliations. **Duke Mathematical Journal**, Duke University Press, v. 86, n. 3, p. 517–546, 1997. Citado na página 21.
- ROKHLIN, V. A. On the fundamental ideas of measure theory. **Matematicheskii Sbornik**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, v. 67, n. 1, p. 107–150, 1949. Citado na página 26.
- RUELLE, D.; WILKINSON, A. Absolutely singular dynamical foliations. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 219, n. 3, p. 481–487, 2001. Citado nas páginas 17, 18, 34 e 37.
- SHUB, M.; WILKINSON, A. Pathological foliations and removable zero exponents. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 139, n. 3, p. 495–508, 2000. Citado na página 17.
- SPATZIER, R.; VISSCHER, D. Equilibrium measures for certain isometric extensions of anosov systems. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, p. 1–14, 2016. Citado na página 41.
- TAHZIBI, A.; YANG, J. Strong hyperbolicity of ergodic measures with large entropy. **Preprint**, 2016. Citado nas páginas 18 e 43.
- URES, R.; VIANA, M.; YANG, J. Maximal measures of diffeomorphisms with circle fiber bundle. Comunicação privada. 20–. Citado nas páginas 18, 19, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 48 e 51.
- VIANA, M.; OLIVEIRA, K. Fundamentos da teoria ergódica. **Rio de Janeiro: SBM**, v. 90, 2014. Citado nas páginas 24, 25, 27 e 28.
- VIANA, M.; YANG, J. Physical measures and absolute continuity for one-dimensional center direction. In: ELSEVIER. **Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis**. [S.l.], 2013. v. 30, n. 5, p. 845–877. Citado na página 39.