A FIBRAÇÃO DE MILNOR

Vanderlei Marcos do Nascimento

Orientador: Prof. Dr. Washington Luiz Marar

Dissertação apresentada ao
ICMSC - USP, para obtenção do
título de mestre em matemática.

SÃO CARLOS

1990

Acreditando ser merecedor do
esforço deles, dedico todo o meu
esforço a eles:

Izidoro e Maria

MEUS AGRADECIMENTOS

Ao professor Washington pela orientação e pelo seu jeito amigo,

Aos professores Oziride M. Neto, Maria Aparecida S. Ruas, Carlos Biasi e Gilberto F. Loibel que estiveram prontos a ajudar e ouvir,

A Edna por estar em minha vida,

Ao professor Drugowich de Felício e sua família pelo apoio desde que cheguei em S. Carlos,

Ao Departamento de Matemática da UNESP-Rio Claro pela confiança depositada,

Ao Valdemir Garcia pelo apoio na digitação do texto,

A CAPES e ao CNPq pelas bolsas concedidas.

ABSTRACT

This dissertation is an exposition of part of John Milnor's work contained in "Singular Points of Complex Hypersurfaces".

RESUMO

Esta dissertação é uma exposição de parte do trabalho de John Milnor, contido em "Singular Points of Complex Hypersurfaces".

ÍNDICE

Introdução.....	1
Capítulo I	
O teorema da fibração.....	1
Capítulo II	
A topologia das fibras e de K	24
Apêndice: Descrição alternativa das fibras.....	37
Capítulo III	
O caso de um ponto crítico isolado.....	42
Referências.....	52

INTRODUÇÃO

A presente dissertação tem como objetivo expor parte do trabalho de J. Milnor contido em [Mi1].

Alguns pontos que foram deixados para o leitor em [Mi1] são detalhados aqui. Contudo, pela variedade de técnicas utilizadas por John Milnor, sentimo-nos forçados a deixar o leitor ainda com trabalho a ser feito.

O capítulo I contém o teorema de fibração:

Seja $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial e seja $K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$ onde S_ε denota a esfera centrada na origem de $\mathbb{C}^{n+1}$ e de raio $\varepsilon > 0$.

Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o espaço $S_\varepsilon - K$ é um fibrado diferenciável sobre S^1 com projeção $\vartheta(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$, $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Referiremos à fibração $\vartheta: S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$ como sendo a fibração associada à função complexa $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$.

No capítulo II discute-se a topologia das fibras da fibração acima, como também a topologia do espaço K :

As fibras $F_\theta = \vartheta^{-1}(e^{i\theta})$ da fibração localmente trivial $\vartheta: S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$ associada ao polinômio complexo $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 0$, são variedades diferenciáveis de dimensão (real) $2n$ que têm o mesmo tipo de homotopia que um complexo CW de dimensão n .

O espaço $K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$ é $(n-2)$ - conexo.

Os resultados acima provêm, principalmente, da teoria de Morse. Tal material pode ser encontrado em [Mi2] e [MOR].

No final do capítulo II encontra-se uma caracterização alternativa das fibras F_θ :

Seja $c \neq 0$ um número complexo suficientemente pequeno e consideremos a hipersuperfície complexa $f^{-1}(c)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$. Assim, F_θ é difeomorfa a intersecção $f^{-1}(c) \cap D_\varepsilon$ onde D_ε é o disco aberto de centro na origem de $\mathbb{C}^{n+1}$ e raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Finalmente, no capítulo III, considera-se o caso dos polinômios $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ com singularidade isolada, isto é, numa vizinhança da origem (excluindo-se possivelmente a origem) f não possui pontos críticos.

Neste caso particular, obtém-se uma descrição mais precisa da topologia das fibras F_θ da fibração associada a f :

O fecho $\bar{F}_\theta$ da fibra F_θ em S_ε constitui uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$ com bordo. O interior de $\bar{F}_\theta$ é F_θ e o bordo $\partial\bar{F}_\theta$ é K .

Além disso, F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que um bouquet de μ esferas S^n .

O número μ , chamado número de Milnor, é a dimensão complexa da seguinte álgebra local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/Jf$ onde $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ é o anel dos germes de funções holomorfas em torno da origem e Jf é o ideal deste anel, gerado pelas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial z_i}$, $i = 1, \dots, n+1$. Isto é, Jf é o ideal jacobiano de f .

Terminamos este capítulo com uma breve exposição do caso clássico $n = 1$.

Esta dissertação termina com a citação de alguns trabalhos que podem ser de interesse para estudo posteriores.

Para finalizar esta introdução, devido a frequência com que é utilizado nesta dissertação, citamos, abaixo, o Lema de Seleção da Curva, cuja demonstração pode ser encontrada em [Mil], § 3.

Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico real, e seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto definido por um número finito de desigualdades polinomiais, $U = \{ x \in \mathbb{R}^m; g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0 \}$, isto é, U é um conjunto semi algébrico.

"Lema de Seleção da Curva : Se $U \cap V$ contém pontos arbitrariamente próximos da origem, isto é, se 0 pertence ao fecho de $U \cap V$, então existe uma curva analítica real

$$p: [0, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

com $p(0) = 0$ e com $p(t) \in U \cap V$ para $t > 0$. "

CAPÍTULO I

O TEOREMA DA FIBRAÇÃODEFINIÇÃO:

O gradiente de uma função analítica $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ num ponto $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ é a $(n+1)$ -upla

$$\text{grad } f(z) = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}}(z) \right),$$

onde a barra denota o complexo conjugado. ■

Seja $p: I \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um caminho diferenciável. A derivada direcional de f no ponto $p(t)$, na direção do vetor $\frac{dp}{dt}(t)$ é dada por:

$$\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = df(p(t)) \cdot \frac{dp}{dt}(t).$$

Em termos dos elementos da matriz $\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right)_{1 \times (n+1)}$ de $df(z)$

e dos elementos da matriz $(v_1 \dots v_{n+1})$ de $\frac{dp}{dt}(t)$,

podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial z_j}(p(t)) \cdot v_j = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad } f(p(t)) \right\rangle,$$

onde

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n+1} a_j \bar{b}_j. \end{aligned}$$

Assim, a definição de $\text{grad } f(z)$ é tal que a regra da cadeia para a derivada direcional de f na direção de um vetor v , num ponto z , pode ser expressa na forma:

$$df(z).v = \langle v, \text{grad } f(z) \rangle.$$

Agora, seja K a intersecção dos zeros de f com a esfera $S_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} ; ||z|| = \varepsilon \}$ e consideremos a aplicação

$$\phi: S_\varepsilon - K \longrightarrow S^1 \quad \text{dada por}$$

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

O lema 1.1 abaixo fornece uma caracterização dos pontos críticos de ϕ .

Lema 1.1

Os pontos críticos de ϕ são os pontos z , e somente aqueles, para os quais o vetor $i \text{grad } \log f(z)$ é um múltiplo real de z .

Antes de demonstrarmos o lema 1.1, faremos algumas observações:

1ª Observação: Para $f(z) \neq 0$, escrevemos $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}$ e escolhemos, localmente, uma determinação para $\log f(z)$ e $\theta(z)$.

Neste caso temos:

$$\begin{aligned} i\theta(z) &= \log\left(\frac{f(z)}{|f(z)|}\right) = \log f(z) - \log |f(z)|, & \text{donde} \\ \theta(z) &= \operatorname{Re}(-i \log f(z)). \end{aligned}$$

2ª Observação: Apesar de podermos definir $\log f(z)$ apenas localmente, seu gradiente

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \log f(z) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \overline{\log f(z)}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \overline{\log f(z)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\overline{f(z)}} \frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{1}{\overline{f(z)}} \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z) \right) = \frac{\operatorname{grad} f(z)}{\overline{f(z)}}, \end{aligned}$$

é estendido naturalmente para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} - f^{-1}(0)$.

3ª Observação: Podemos pensar no espaço vetorial hermitiano $\mathbb{C}^{n+1}$ como um espaço vetorial euclidiano (de dimensão $2n+2$) sobre os reais, tomando-se o produto interno de z e z' como sendo $\operatorname{Re} \langle z, z' \rangle$. De fato, consideremos o isomorfismo

$$(a_1 + ib_1, \dots, a_{n+1} + ib_{n+1}) \xrightarrow{\gamma} (a_1, b_1, \dots, a_{n+1}, b_{n+1})$$

de $\mathbb{C}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{2n+2}$, e sejam $z = (a_1 + ib_1, \dots, a_{n+1} + ib_{n+1})$ e

$z' = (a'_1 + ib'_1, \dots, a'_{n+1} + ib'_{n+1})$. Temos, então,

$$\operatorname{Re} \langle z, z' \rangle = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (a_j + ib_j) \cdot (\overline{a'_j + ib'_j}) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (a_j a'_j + b_j b'_j) = (\gamma(z), \gamma(z')),$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Demonstração do lema 1.1:

Como $\dim T_{\varnothing(z)} S^1 = 1$, temos que a derivada

$$d\varnothing(z): T_z(S_\varepsilon - K) \longrightarrow T_{\varnothing(z)} S^1$$

não é sobrejetora, isto é, z é ponto crítico de $\varnothing$, se, e somente se, $d\varnothing(z)$ é a aplicação nula.

Agora, de acordo com a 1ª observação, escrevendo-se $\varnothing(z) = e^{i\theta(z)}$, temos $\theta(z) = \operatorname{Re}(-i \log f(z))$. Derivando-se a função θ ao longo de uma curva $z = p(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\theta \circ p)(t) &= \operatorname{Re} \left(-i \frac{d}{dt}(\log \circ f \circ p)(t) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{-i}{f(p(t))} \frac{d}{dt}(f \circ p)(t) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{-i}{f(p(t))} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} f(p(t)) \right\rangle \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} \log f(p(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Noutras palavras, a derivada direcional de θ , no ponto $z = p(t)$, na direção do vetor $v = \frac{dp}{dt}(t)$ é dada por :

$$d\theta(z).v = \operatorname{Re} \langle v, i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle.$$

Agora, se o vetor $i \operatorname{grad} \log f(z)$ é um múltiplo real de z (ou seja, se esse vetor é normal a S_ε), segue-se da 3ª observação acima que para todo vetor v , tangente a $S_\varepsilon - K$ em z , a derivada direcional $\operatorname{Re} \langle v, i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle$ é zero. Como

$$d\varnothing(z) = \varnothing(z) d\theta(z) \quad (\text{já que } \varnothing = e^{i\theta}), \quad \text{temos}$$

$$d\varnothing(z).v = \varnothing(z) d\theta(z).v = 0$$

para todo $v \in T_z(S_\varepsilon - K)$.

Por outro lado, se os vetores z e $\text{igrad log } f(z)$ são linearmente independentes sobre os reais, então existe um vetor v , em nosso espaço euclidiano, tal que

$$\begin{cases} \text{Re } \langle v, z \rangle = 0 \\ \text{Re } \langle v, \text{igrad log } f(z) \rangle \neq 0 \end{cases}$$

De fato, se $\text{Re } \langle \text{igrad log } f(z), z \rangle = 0$, basta tomarmos

$$v = \text{igrad log } f(z),$$

que é não nulo, pois estamos considerando $\text{igrad log } f(z)$ e z linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Caso contrário, se $\text{Re } \langle \text{igrad log } f(z), z \rangle \neq 0$, tomamos

$$v = z - \frac{\langle z, z \rangle \text{igrad log } f(z)}{\text{Re } \langle \text{igrad log } f(z), z \rangle}.$$

De $\text{Re } \langle v, z \rangle = 0$ temos $v \in T_z(S_\varepsilon - K)$ (usando-se novamente a 3ª observação) e de $\text{de}(z).v = \text{Re } \langle v, \text{igrad log } f(z) \rangle \neq 0$ temos que $d\varnothing(z).v = \varnothing(z) \text{ de}(z).v \neq 0$. Portanto z não é ponto crítico de $\varnothing$. $\left[\begin{array}{l} \text{Que } \text{Re } \langle v, \text{igrad log } f(z) \rangle \neq 0 \text{ segue de} \\ \text{Re } \langle v, v \rangle = \text{Re } \langle v, z - \frac{\langle z, z \rangle \text{igrad log } f(z)}{\text{Re } \langle \text{igrad log } f(z), z \rangle} \rangle \end{array} \right]$ Isto demonstra o lema 1.1.

Suporemos, de agora em diante, que $f: \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ é polinomial não nula, e que anula-se na origem de $\mathbb{C}^{n+1}$. Queremos provar que se tomarmos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então $\varnothing: S_\varepsilon - K \longrightarrow S^1$ não terá ponto crítico.

Seja $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$. ■

Lema 1.2

Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ com $||z|| \leq \varepsilon$, os vetores z e $\text{igrad log } f(z)$ são linearmente independentes sobre os reais.

Na verdade, pode-se demonstrar um resultado um pouco mais forte:

Lema 1.3:

Dada qualquer função polinomial $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ que se anula na origem, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ com $||z|| \leq \varepsilon_0$, os vetores z e $\text{grad log } f(z)$ são linearmente independentes sobre os complexos ou

$$\text{grad log } f(z) = \lambda z ,$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que seu argumento ($\arg \lambda$) é, em valor absoluto, menor que, digamos, $\pi/4$. Noutras palavras, λ está no quadrante aberto de $\mathbb{C}$ simétrico em relação ao semi eixo positivo x .

Observemos que o lema 1.2 segue do lema 1.3:

Primeiro, se z e $\text{grad log } f(z)$ são linearmente independentes sobre os complexos, também o são z e $\text{igrad log } f(z)$. Segundo, se $\text{grad log } f(z) = \lambda z$ com $\lambda \neq 0$ e $|\arg \lambda| < \pi/4$, então λ não é imaginário puro, e $\text{igrad log } f(z) = (i\lambda)z$ com $(i\lambda)$ não real.

A demonstração do lema 1.3. dependerá do Lema de Seleção da Curva e do lema abaixo.

Lema 1.4

Seja $p: [0, \delta') \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um caminho analítico real com $p(0) = 0$, tal que, para cada $t > 0$, o número $f(p(t))$ é não nulo e o vetor $\text{grad } \log f(p(t))$ é um múltiplo complexo de $p(t)$, isto é,

$$\text{grad } \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{C}.$$

Então o argumento de $\lambda(t)$ tende a zero quando $t \rightarrow 0$.

Noutras palavras, para valores positivos suficientemente pequenos de t , $\lambda(t)$ é não nulo e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{i\theta(t)} = 1.$$

Demonstração do lema 1.4

Como $p(t)$, $f(z)$ e $\text{grad } f(z)$ são funções analíticas, podemos considerar suas expansões de Taylor em torno da origem:

$$p(t) = a_0 t^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + \dots ; a_i \in \mathbb{C}^{n+1}$$

$$f(p(t)) = b_0 t^\beta + b_1 t^{\beta+1} + \dots ; b_i \in \mathbb{C}$$

$$\text{grad } f(p(t)) = c_0 t^\gamma + c_1 t^{\gamma+1} + \dots ; c_i \in \mathbb{C}^{n+1}$$

e a_0 , b_0 , c_0 são não nulos.

Observações:

- A identidade $\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad } f(p(t)) \right\rangle$ mostra

que $\text{grad } f(p(t))$ não pode ser identicamente nulo pois, caso contrário, teríamos $\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = 0$, donde $f \circ p$ seria constante numa vizinhança de $t = 0$. Como $f(p(0)) = f(0) = 0$, $f(p(t))$ seria nula nessa vizinhança, contrariando a hipótese do lema.

- Os expoentes α , β e γ são inteiros positivos com $\alpha \geq 1$ ($\alpha \neq 0$ pois $p(0)=0$), $\beta \geq 1$ ($\beta \neq 0$ pois, f anula-se na origem). As séries são todas convergentes para, digamos, $|t| < \varepsilon'$.

Para cada $t > 0$ temos, por hipótese,

$$\text{grad } \log f(p(t)) = \lambda(t) p(t) \quad \text{e, portanto,}$$

$\text{grad } f(p(t)) = \lambda(t) p(t) \overline{f(p(t))}$. Como as componentes dos vetores $\text{grad } f(p(t))$ e $p(t)\overline{f(p(t))}$ são funções analíticas reais, comparando as componentes correspondentes, temos que $\lambda(t)$ é um quociente de funções analíticas reais e, portanto, possui uma expansão de Laurent. Agora, substituindo-se as expansões de Taylor na igualdade

$$\text{grad } f(p(t)) = \lambda(t) p(t) \overline{f(p(t))}, \quad \text{obtemos:}$$

$$c_0 t^\gamma + \dots = \lambda(t) (a_0 \bar{b}_0 t^{\alpha+\beta} + \dots).$$

Assim a expansão de Laurent para λ é da forma:

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots) \quad \text{com } c_0 = \lambda_0 a_0 \bar{b}_0$$

Substituindo-se $c_0 = \lambda_0 a_0 \bar{b}_0$ na expansão em série de potências da identidade:

$$\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad } f(p(t)) \right\rangle, \quad \text{obtemos}$$

$$\begin{aligned} \beta b_0 t^{\beta-1} + \dots &= \langle \alpha a_0 t^{\alpha-1} + \dots, \lambda_0 a_0 \bar{b}_0 t^\gamma + \dots \rangle = \\ &= \alpha ||a_0||^2 \bar{\lambda}_0 b_0 t^{\alpha-1+\gamma} + \dots \end{aligned}$$

Comparando-se os coeficientes principais segue-se que

$$\beta = \alpha ||a_0||^2 \bar{\lambda}_0.$$

Isto mostra que λ_0 é um número real positivo.

Para podermos computar $\lim (\lambda(t)/|\lambda(t)|)$ é necessário assegurar que $\lambda(t) \neq 0$ para t nalguma vizinhança de zero, $t \neq 0$. Isto segue da igualdade

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots).$$

De fato, como $(1 + k_1 t + \dots)$ é contínua e tem limite 1 quando $t \rightarrow 0$, existe uma vizinhança de $t = 0$ tal que $(1 + k_1 t + \dots)$ é maior que, digamos, $1/2$, para $t \neq 0$ nessa vizinhança. Assim,

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + \dots) > \frac{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}}{2}$$

para $t \neq 0$ nessa vizinhança. Daí, e do fato que $\lambda_0 > 0$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + \dots)}{|\lambda_0| |t^{\gamma-\alpha-\beta}| |1 + k_1 t + \dots|} = 1,$$

o que completa a demonstração do lema 1.4.

Demonstração do Lema 1.3

Primeiro, suponhamos, por absurdo, que existam pontos $z \in \mathbb{C}^{n+1}-V$, arbitrariamente próximos da origem com

$$\text{grad } \log f(z) = \lambda z \neq 0, \text{ e com } |\arg \lambda| > \pi/4$$

Noutras palavras, suponhamos que λ situa-se no semi plano aberto dado por

$$\operatorname{Re}((1+i)\lambda) < 0,$$

ou no semi plano aberto dado por

$$\operatorname{Re}((1-i)\lambda) < 0.$$

Queremos expressar estas condições por meio de equações e inequações polinomiais, de modo a aplicar o Lema de Seleção da Curva.

Seja W o conjunto de todos os $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ para os quais os vetores $\operatorname{grad} f(z)$ e z são linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}$. Então $z \in W$ se, e somente se,

$$z_j \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}}(z) = z_k \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(z), \quad j, k = 1, \dots, n+1. \quad \text{De fato, se}$$

$$\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}}(z) \right) = \lambda (z_1, \dots, z_{n+1})$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(z) = \lambda z_j$, $\forall j$, donde

$$z_k \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(z) = \lambda z_k z_j = z_j \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}}(z) \quad \forall j, k.$$

Por outro lado, se $z = 0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, então z pertence trivialmente a W ; se $z \neq 0$, então $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ com, digamos, $z_s \neq 0$ e, assim, podemos escrever:

$$\frac{z_j}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(z) \quad \forall j, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}}(z) \right) &= \left(\frac{z_1}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}}(z), \dots, \frac{z_{n+1}}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}}(z) \right) = \\ &= \frac{1}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}}(z) (z_1, \dots, z_{n+1}), \end{aligned}$$

ou seja, $\operatorname{grad} f(z)$ e z são linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}$.

Pondo $z_j = x_j + iy_j$ e tomando-se as partes real e imaginária das relações:

$$z_j \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) = z_k \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \quad , \quad \text{obtemos (lembrando que } f \text{ é}$$

polinomial) uma coleção de equações polinomiais nas variáveis reais x_j e y_j . Isto mostra que W é um conjunto algébrico real.

Notemos que um ponto $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ pertence a W se, e somente-se,

$$\frac{\text{grad } f(z)}{\overline{f(z)}} = \lambda z \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ isto é,}$$

$$\text{grad } f(z) = \lambda \overline{f(z)} z.$$

Tomando-se o produto interno por $\overline{f(z)} z$, obtemos:

$$\langle \text{grad } f(z), \overline{f(z)} z \rangle = \lambda || \overline{f(z)} z ||^2.$$

Noutras palavras, o número λ multiplicado por um número positivo, é igual a $\langle \text{grad } f(z), \overline{f(z)} z \rangle$.

Para $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ definimos :

$$\lambda'(z) = \langle \text{grad } f(z), \overline{f(z)} z \rangle.$$

Segue que se $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ e $\text{grad } f(z) = \lambda \overline{f(z)} z$, então

$$\arg \lambda = \arg \lambda'.$$

Agora, denotemos por U_+ (respectivamente U_-) o conjunto aberto constituído de todos os z em $\mathbb{C}^{n+1}$ que satisfazem a desigualdade

$$\text{Re} ((1 + i) \lambda'(z)) < 0$$

(respectivamente $\text{Re} ((1-i) \lambda'(z)) < 0$).

Observamos que se $z \in V$, isto é, $f(z) = 0$, então $\lambda'(z) = 0$ e z

não pertence a U_+ nem a U_- , ou seja,

$$U_+ \subset \mathbb{C}^{n+1} - V \quad \text{e} \quad U_- \subset \mathbb{C}^{n+1} - V.$$

Escrevendo cada componente z_j de z como $z_j = x_j + iy_j$, em $\lambda'(z) = \langle \text{grad } f(z), \overline{f(z)} z \rangle$, e substituindo nas expressões para U_+ e U_- , obtemos que estes são conjuntos semi-algébricos reais.

A hipótese de existirem $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ arbitrariamente próximos da origem, com $\text{grad } \log f(z) = \lambda z \neq 0$ e $|\arg \lambda| > \pi/4$ é, então, equivalente a

$$0 \in \overline{W \cap (U_+ \cup U_-)} = \overline{W \cap U_+} \cup \overline{W \cap U_-}$$

(a barra denota o fecho) e

$$z \in W \cap (U_+ \cup U_-) = W \cap U_+ \cup W \cap U_-.$$

Portanto, pelo Lema de Seleção da Curva, deve existir um caminho analítico real

$$p: [0, \delta) \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{com } p(0) = 0 \quad \text{e com} \\ p(t) \in W \cap U_- \quad \text{ou } p(t) \in W \cap U_+, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Assim, em qualquer caso, conseguimos:

$$\text{grad } \log f(p(t)) = \lambda(t) p(t) \quad \text{com } |\arg \lambda(t)| > \pi/4$$

para todo $t > 0$.

Isto leva-nos a um absurdo, pois

$p(t) \in (U_+ \cup U_-)$ implica em $p(t) \in \mathbb{C}^{n+1} - V$, $\forall t \neq 0$, donde $f(p(t)) \neq 0 \quad \forall t \neq 0$, de modo que podemos aplicar o lema 1.4 para obtermos uma contradição. Esta contradição não completa a demonstração: permanece a possibilidade de existirem pontos $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$, arbitrariamente próximos da origem, satisfazendo

$$\text{grad } \log f(z) = \lambda z \quad \text{com } \lambda = 0 \quad \text{ou } |\arg \lambda| = \pi/4.$$

Neste caso, definimos o conjunto algébrico real

$$\tilde{W} = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} ; (\operatorname{Re} ((1+i) \lambda'(z))) \cdot \operatorname{Re} ((1-i) \lambda(z)) = 0 \}$$

e o conjunto semi algébrico real

$$U = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} ; ||f(z)||^2 > 0 \}.$$

Estamos supondo que $0 \in (W \cap \tilde{W}) \cap U$ e $z \in (W \cap \tilde{W}) \cap U$. Outra vez, pelo Lema de Seleção da Curva, deve existir um caminho real analítico $p: [0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in (W \cap \tilde{W}) \cap U$, para todo $t > 0$.

Agora, $p(t) \in W$ implica em $\operatorname{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$ e $p(t) \in \tilde{W}$ implica em $\lambda(p(t)) = \lambda'(p(t)) = 0$ ou $|\arg \lambda(t)| = |\arg \lambda'(p(t))| = \pi/4 \quad \forall t > 0$. Como, também, $p(t) \in U$, temos $f(p(t)) \neq 0$ para $t > 0$ e podemos aplicar o lema 1.4 para obter uma contradição. Isto completa a demonstração do lema 1.3.

Um comentário final é que, no lema 1.3, o valor $\pi/4$ para $|\arg \lambda|$ poderia, na verdade, ter sido escolhido como sendo qualquer valor não nulo em $(-\pi/2, \pi/2)$. De fato, o importante é garantir que λ não seja imaginário puro. Houvéssemos escolhido $0 \neq \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, bastaria substituir

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} ((1+i) \lambda'(z)) \text{ e } \operatorname{Re} ((1-i) \lambda(z)) \text{ por} \\ &\operatorname{Re} ((a+bi) \lambda'(z)) \text{ e } \operatorname{Re} ((a-bi) \lambda'(z)), \end{aligned}$$

respectivamente, onde $\arg(a+bi) = \beta$.

Corolário 1.5:

Nas condições do lema 1.3, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, então a aplicação

$\varnothing : S \rightarrow K \rightarrow S^1$ não tem pontos críticos. ■

Segue que, para cada $e^{i\theta} \in S^1$, a imagem inversa

$$F_{\theta} = \vartheta^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_{\varepsilon} - K$$

é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$.

DEFINIÇÃO: O número ε_0 acima é conhecido como um raio de Milnor. ■

Para demonstrarmos que ϑ é de fato uma projeção de uma fibração localmente trivial, faremos um uso mais refinado do lema 1.3, de modo a controlar cuidadosamente o comportamento de $\vartheta(z)$ quando z tende ao conjunto K , onde ϑ não está definido.

Lema 1.6

Se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, então existe um campo de vetores, diferenciável, $v(z)$, tangente a $S_{\varepsilon} - K$ tal que, para cada z em $S_{\varepsilon} - K$, o produto interno hermitiano

$$\langle v(z), \text{igrad } \log f(z) \rangle$$

é não nulo e tem argumento em valor absoluto menor que $\pi/4$.

Demonstração:

O campo de vetores será construído em 3 etapas: primeiro, um vetor é construído num ponto dado qualquer; depois, a construção é estendida a uma vizinhança deste ponto e, por fim, usamos uma partição da unidade para obtermos $v(z)$.

Seja $z_a \in S_{\varepsilon} - K$ e consideremos os casos:

Caso 1: z_a e $\text{igrad } \log f(z_a)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.

Neste caso, as equações

$$\begin{aligned} \langle v, z_a \rangle &= 0 \\ \langle v, \operatorname{igrad} \log f(z_a) \rangle &= 1, \end{aligned}$$

têm uma única solução simultânea, da forma

$$v = \alpha z_a + \beta \operatorname{igrad} \log f(z_a), \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

De fato, como z_a e $\operatorname{igrad} \log f(z_a)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, temos que o determinante de Gramm,

$\det G =$

$$= \begin{vmatrix} \langle z_a, z_a \rangle & \langle \operatorname{igrad} \log f(z_a), z_a \rangle \\ \langle z_a, \operatorname{igrad} \log f(z_a) \rangle & \langle \operatorname{igrad} \log f(z_a), \operatorname{igrad} \log f(z_a) \rangle \end{vmatrix}$$

é não nulo (na verdade é positivo) . Então o sistema linear, nas variáveis α e β ,

$$\begin{cases} \langle v, z_a \rangle = \alpha \langle z_a, z_a \rangle + \beta \langle \operatorname{igrad} \log f(z_a), z_a \rangle = 0 \\ \langle v, \operatorname{igrad} \log f(z_a) \rangle = \alpha \langle z_a, \operatorname{igrad} \log f(z_a) \rangle + \\ + \beta \langle \operatorname{igrad} \log f(z_a), \operatorname{igrad} \log f(z_a) \rangle \end{cases}$$

tem uma única solução,

$$\alpha = \frac{-1}{\det G} \langle \operatorname{igrad} \log f(z_a), z_a \rangle$$

$$\beta = \frac{1}{\det G} \langle z_a, z_a \rangle, \quad \text{donde}$$

$$v = \frac{1}{\det G} [\langle \operatorname{igrad} \log f(z_a), z_a \rangle z_a - \langle z_a, z_a \rangle \operatorname{grad} \log f(z_a)]$$

Agora observamos que a função $h: S_{\mathbb{C}} - K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(z) = \det G(z) = |\langle z, \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle|^2 - \|z\|^2 \|\operatorname{igrad} \log f(z)\|^2$$

é uma função C^∞ e, como $h(z_a) \neq 0$, existe uma vizinhança U_a^1 de z_a tal que $h(z) \neq 0$ para todo z em U_a^1 . Também a função dada por

$$g(z) = \langle \operatorname{igrad} \log f(z), z \rangle z - i \langle z, z \rangle \operatorname{grad} \log f(z)$$

é C^∞ , e não nula em z_a . Logo, existe uma vizinhança U_a^2 de z_a tal que $g(z) \neq 0$, para todo z em U_a^2 . Podemos então definir

$$v_a(z) = \frac{\langle \operatorname{igrad} \log f(z), z \rangle z - i \|z\|^2 \operatorname{grad} \log f(z)}{\|\langle z, \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle\|^2 - \|z\|^2 \|\operatorname{igrad} \log f(z)\|^2},$$

para todo $z \in U_a = U_a^1 \cap U_a^2$.

Por construção, temos:

$$\langle v_a(z), z \rangle = 0$$

$$\langle v_a(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle = 1, \quad \forall z \in U_a.$$

A 1ª equação garante que $\operatorname{Re} \langle v_a(z), z \rangle = 0$ e, assim, $v_a(z)$ é tangente a S_ε -K em z .

Caso 2: Se $\operatorname{grad} \log f(z_a)$ é igual a um múltiplo λz_a , então pomos

$$v = iz_a.$$

Assim, $\operatorname{Re} \langle iz_a, z_a \rangle = 0$ e, pelo lema 1.3, o número

$$\langle iz_a, \operatorname{igrad} \log f(z_a) \rangle = \bar{\lambda} \|z_a\|^2 \text{ tem argumento, em}$$

valor absoluto, menor que $\pi/4$. Usando a continuidade da função

$$z \mapsto |\arg \langle iz, \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle| \text{ conseguimos uma}$$

vizinhança U_a de z_a tal que

$$|\arg \langle iz, \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle| < \pi/4 \text{ para todo } z \text{ em } U_a.$$

Definimos, então,

$$v_a(z) = iz, \quad \forall z \in U_a.$$

Desse modo, cobrimos $S_\varepsilon-K$ por abertos U_a em cada qual está definido um campo tangente de vetores satisfazendo as propriedades requeridas. Usando-se uma partição diferenciável da unidade, obtemos um campo global de vetores, $v(z)$. O campo $v(z)$ é tangente a $S_\varepsilon-K$ pois, para cada z , $v(z)$ é obtido de uma combinação linear com coeficientes reais (fornecidos pela partição) de vetores tangentes. Precisamos, contudo, garantir que as "colanges" mantêm a propriedade

$$|\arg \langle v(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle| < \pi/4.$$

Proposição 1.7

Sejam $u, v_{a1}, \dots, v_{an}$ vetores de $\mathbb{C}^{n+1}$ e suponhamos que

$$|\arg \langle v_{ai}, u \rangle| < \pi/4, \quad i = 1, \dots, n.$$

Então para toda combinação linear, não nula,

$$v = \alpha_1 v_{a1} + \dots + \alpha_n v_{an}, \quad \text{com coeficientes reais,}$$

temos $|\arg \langle v, u \rangle| < \pi/4$.

Demonstração

Mostraremos que a afirmação é verdadeira para $v = \alpha_1 v_{a1} + \alpha_2 v_{a2}$. O caso geral seguir-se-á por indução.

Sejam $\beta = \arg \langle v, u \rangle$,

$$\beta_1 = \arg \langle \alpha_1 v_{a1}, u \rangle = \arg \langle v_{a1}, u \rangle \quad \text{e}$$

$$\beta_2 = \arg \langle \alpha_2 v_{a2}, u \rangle = \arg \langle v_{a2}, u \rangle.$$

Por hipótese,

$$|\beta_1| < \pi/4 \quad \text{e} \quad |\beta_2| < \pi/4.$$

Queremos mostrar que $|\beta| < \pi/4$. Agora, temos que:

$$\begin{aligned}
& |\langle \alpha_1 v_{a1}, u \rangle| \cos \beta_1 + |\langle \alpha_2 v_{a2}, u \rangle| \cos \beta_2 = \\
& = \operatorname{Re} \langle \alpha_1 v_{a1}, u \rangle + \operatorname{Re} \langle \alpha_2 v_{a2}, u \rangle = \operatorname{Re} \langle \alpha_1 v_{a1} + \alpha_2 v_{a2}, u \rangle = \\
& = |\langle \alpha_1 v_{a1} + \alpha_2 v_{a2}, u \rangle| \cos \beta \leq \\
& \leq |\langle \alpha_1 v_{a1}, u \rangle| \cos \beta + |\langle \alpha_2 v_{a2}, u \rangle| \cos \beta, \\
& \text{ou seja,} \\
& |\langle \alpha_1 v_{a1}, u \rangle| (\cos \beta_1 - \cos \beta) + |\langle \alpha_2 v_{a2}, u \rangle| (\cos \beta_2 - \cos \beta) \leq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Se $|\beta| \geq \pi/4$, então $-1 \leq \cos \beta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como

$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \beta_1$, $\cos \beta_2 \leq 1$, ficamos com $(\cos \beta_1 - \cos \beta) > 0$ e $(\cos \beta_2 - \cos \beta) > 0$, o que contradiz (*). Esta contradição leva-nos a $|\beta| < \pi/4$ e demonstra a proposição 1.7.

Conclui-se, portanto, a demonstração do lema 1.6.

De posse do campo global $v(z)$, consideremos sua normalização:

$$w(z) = v(z) / \operatorname{Re} \langle v(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle.$$

Segue-se que $w(z)$ também é diferenciável e tangente a S_c -K. Além disso, w satisfaz as seguintes propriedades:

$$1^a) \quad \operatorname{Re} \langle w(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle = 1$$

$$2^a) \quad |\operatorname{Re} \langle w(z), \operatorname{grad} \log f(z) \rangle| < 1$$

De fato,

$$\operatorname{Re} \langle w(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle = \frac{\operatorname{Re} \langle v(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle}{\operatorname{Re} \langle v(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle} = 1$$

e

$$| \operatorname{Re} \langle w(z), \operatorname{grad} \log f(z) \rangle | = \frac{|\operatorname{Re} \langle v(z), \operatorname{grad} \log f(z) \rangle|}{|\operatorname{Re} \langle v(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle|} =$$

$$= \frac{|\operatorname{Im} \langle v(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle|}{|\operatorname{Re} \langle v(z), \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle|} < 1, \text{ pelo lema 1.5.}$$

Agora, consideremos as trajetórias da equação diferencial

$$\frac{dz}{dt} = w(z)$$

Lema 1.8

Dado $z^\circ \in S_\varepsilon - K$, existe um, e apenas um, caminho diferenciável

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow S_\varepsilon - K$$

que satisfaz a equação diferencial $\frac{dp}{dt}(t) = w(p(t))$ com a condição inicial $p(0) = z^\circ$.

Demonstração

Pelo teorema de existência e unicidade de solução de equação diferencial, temos que uma tal solução existe localmente e pode ser estendida a um intervalo maximal de $\mathbb{R}$. Como $S_\varepsilon - K$ não é compacto, para que seja possível estender a solução em todo $\mathbb{R}$, devemos assegurar que $p(t)$ não tende a K quando t tende a algum limite finito t , ou seja, que $|f(p(t))|$ não tende a zero.

Como $\log |f(p(t))| = \operatorname{Re} \log f(p(t))$, devemos garantir que $\operatorname{Re} \log f(p(t))$ não tende a $-\infty$ quando $t \rightarrow t_0$. Mas, a derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \log (f \circ p)(t) &= \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} \log f(p(t)) \right\rangle = \\ &= \operatorname{Re} \langle w(p(t)), \operatorname{grad} \log f(p(t)) \rangle \end{aligned}$$

tem valor absoluto menor que 1 ; portanto $\operatorname{Re} \log f(p(t))$ é limitada em cada vizinhança finita de t_0 finito. ■

Escrevendo $\vartheta(z) = e^{i\theta(z)}$ segue da demonstração do lema 1.1 e das propriedades do campo $w(z)$ que:

$$\frac{d}{dt}(\vartheta \circ p)(t) = \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log f(p(t)) \right\rangle \text{ é identicamente } 1$$

para todo $z = p(t)$ que é solução de $\frac{dz}{dt} = w(z)$. Portanto,

$$\vartheta(p(t)) = t + \text{constante} = t + \vartheta(p(0)).$$

Noutras palavras, ϑ projeta cada solução $p(t)$ num caminho que percorre S^1 no sentido anti-horário com velocidade constante e igual a um.

Observação 1.9 :

Se $p(t)$ é um caminho na variedade F_ϑ , então

$$0 = \frac{d}{dt}(\vartheta \circ p)(t) = \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log f(p(t)) \right\rangle.$$

Isto nos diz que, segundo o produto interno real usual, o vetor $i \operatorname{grad} \log f(p(t))$ é normal a F_ϑ em $z = p(t)$. Mas, então, a propriedade $\operatorname{Re} \langle w(z), i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle = 1$ diz que $w(z)$ tem

componente não nula no espaço normal a F_θ em z , ou seja, as curvas integrais de $w(z)$ são transversais as variedades F_θ . ■

A observação acima, juntamente com a descrição do comportamento da função θ ao longo de cada curva integral do campo $w(z)$, $\theta(p(t)) = t + \theta(p(0))$, sugerem como deve ser feita a "colagem" das fibras para obtermos a trivialização.

Consideremos o fluxo sobre $S_\varepsilon - K$, gerado pelo campo w , isto é:

$$h: (S_\varepsilon - K) \times \mathbb{R} \longrightarrow S_\varepsilon - K \text{ dado por}$$

$$h(z, t) = p_z(t),$$

onde $p_z: \mathbb{R} \longrightarrow S_\varepsilon - K$ é a única curva integral com $p_z(0) = z$.

Segue que $h_t: S_\varepsilon - K \longrightarrow S_\varepsilon - K$ dado por $h_t(z) = p_z(t)$ é um difeomorfismo para cada $t \in \mathbb{R}$, e para t_1 e t_2 em $\mathbb{R}$ temos

$$h_{t_1} \circ h_{t_2} = h_{t_1+t_2}.$$

Notemos que cada fibra $F_\theta = \varnothing^{-1}(e^{i\theta})$ é levada sobre a fibra $F_{\theta+t}$ por cada h_t . De fato, se $z \in F_\theta$, temos

$$\begin{aligned} \varnothing(h_t(z)) &= \varnothing(p_z(t)) = e^{i\theta(p_z(t))} = \\ &= e^{i(t+\theta(p_z(0)))} = e^{i(t+\theta(z))} = e^{i(t+\theta)}, \end{aligned}$$

donde $h_t(z) \in F_{\theta+t}$. Como h_t é difeomorfismo, segue-se a afirmação.

Teorema da Fibração:

Seja ε_0 um raio de Milnor.

Para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ o espaço S_ε -K é um fibrado diferenciável localmente trivial, sobre S^1 , com projeção $\vartheta(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.

Demonstração:

Dado $e^{i\theta} \in S^1$, seja U_θ um intervalo aberto em S^1 , da forma $U_\theta = \{ e^{it} \in S^1; t \in J_\theta = (\theta-a, \theta+a), 0 < a < \pi \}$, e consideremos a aplicação

$$\psi_\theta : U_\theta \times F_\theta \longrightarrow \vartheta^{-1}(U_\theta) \quad , \text{ dada por}$$

$$\psi_\theta(e^{it}, z) = h_{t-\theta}(z).$$

Temos, então,

$$(\vartheta \circ \psi_\theta)(e^{it}, z) = \vartheta(h_{t-\theta}(z)) = \vartheta(p_z(t-\theta)) =$$

$$e^{i[(t-\theta)+\theta(p_z(0))]} = e^{i(t-\theta+\theta(z))} = e^{it}, \text{ já que } z \in F_\theta,$$

ou seja, $\vartheta(z) = e$. Noutras palavras, ϑ é uma projeção.

Falta mostrar que ψ_θ é um difeomorfismo. Que ψ_θ é diferenciável, segue-se da composição das aplicações diferenciáveis:

$$\begin{aligned} U_\theta \times F_\theta &\longrightarrow J_\theta \times F_\theta \longrightarrow F_\theta \times (-a, a) \longrightarrow \vartheta^{-1}(U_\theta) \\ (e^{it}, z) &\longmapsto (t, z) \longmapsto (z, t-\theta) \longmapsto h(z, t-\theta) = \psi_\theta(e^{it}, z). \end{aligned}$$

Seja, agora,

$$g: \varnothing^{-1}(U_{\varnothing}) \longrightarrow U_{\varnothing} \times F_{\varnothing} \quad \text{dada por}$$

$$g(z) = (\varnothing(z), h_{\varnothing-\arg\varnothing(z)}(z)) = (e^{i\varnothing(z)}, h_{\varnothing-\varnothing(z)}(z)).$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} \psi_{\varnothing}(g(z)) &= \psi_{\varnothing}(e^{i\varnothing(z)}, h_{\varnothing-\varnothing(z)}(z)) = h_{\varnothing(z)-\varnothing}(h_{\varnothing-\varnothing(z)}(z)) = \\ &= h_{\varnothing}(z) = p_z(0) = z, \quad \text{ou seja, } \psi_{\varnothing} \circ g = \text{Id}_{\varnothing^{-1}(U_{\varnothing})}. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} g(\psi_{\varnothing}(e^{it}, z)) &= g(h_{t-\varnothing}(z)) = \\ &= (\varnothing(h_{t-\varnothing}(z)), h_{\varnothing-\arg\varnothing(h_{t-\varnothing}(z))}(h_{t-\varnothing}(z))) = \\ &= (e^{it}, h_{\varnothing-t}(h_{t-\varnothing}(z))) = (e^{it}, h_{\varnothing}(z)) = (e^{it}, z) \end{aligned}$$

ou seja, $g \circ \psi_{\varnothing} = \text{Id}_{U_{\varnothing} \times F_{\varnothing}}$. Concluimos, portanto, que $g = \psi_{\varnothing}^{-1}$.

Para ver que $\psi_{\varnothing}^{-1}$ é diferenciável, basta considerar a composição de aplicações diferenciáveis:

$$\begin{aligned} z \longrightarrow (z, \arg\varnothing(z)) \longrightarrow (z, \varnothing-\arg\varnothing(z)) \longrightarrow h(z, \varnothing-\arg\varnothing(z)) = \\ = h_{\varnothing-\arg\varnothing(z)}(z). \end{aligned}$$

Assim, as componentes $\varnothing(z)$ e $h_{\varnothing-\arg\varnothing(z)}(z)$ de $g(z)$ são diferenciáveis, donde g é diferenciável.

CAPÍTULO II

A TOPLOGIA DAS FIBRAS E DE K

Consideremos a fibração localmente trivial

$$\vartheta : S_{\varepsilon} - K \longrightarrow S^1$$

associada a uma função polinomial complexa $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ que anula-se na origem, obtida no capítulo anterior. Vimos (corolário 1.5) que cada fibra $F_{\vartheta} = \vartheta^{-1}(e^{i\vartheta})$ é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$. Os resultados principais deste capítulo são:

-Cada fibra F_{ϑ} tem o mesmo tipo de homotopia que complexo CW finito, de dimensão n . (Teorema 2.1);

-O espaço $K = V \cap S_{\varepsilon}$ é $(n-2)$ conexo. (Teorema 2.2)

A demonstração do teorema 2.1 depende de um estudo da teoria de Morse associada a função real, diferenciável, $|f|$, restrita a F_{ϑ} . A demonstração de 2.2 depende de um estudo paralelo da função diferenciável $|f|$, na totalidade do espaço $S_{\varepsilon} - K$. Em cada caso será mostrado que o índice de Morse de $|f|$ num ponto crítico é $\geq n$. Assim, nosso primeiro passo será identificar os pontos críticos destas aplicações.

Consideremos as aplicações diferenciáveis

$$a_{\vartheta} : F_{\vartheta} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a : S_{\varepsilon} - K \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definidas por}$$

$$a_{\vartheta}(z) = a(z) = \log |f(z)|.$$

Como a derivada da função real logaritmo é um isomorfismo, os pontos críticos da função a são os mesmos de $|f|$ em $S_{\varepsilon} - K$ e os pontos críticos da função a_{ϑ} são os mesmos de $|f|$

restrita a F_Θ . É conveniente trabalharmos com as funções a e a_Θ , devido a caracterização da derivada direcional, dada no capítulo I, a qual envolve a função $\log f(z)$.

Lema 2.3

Os pontos críticos de $a_\Theta(z) = \log |f(z)|$ em F_Θ são aqueles $z \in F_\Theta$ para os quais o vetor $\text{grad } \log f(z)$ é um múltiplo complexo de z .

Demonstração:

Derivando-se a função $\log |f(z)| = \text{Re } \log f(z)$ ao longo de uma curva $z = p(t)$ em $\mathbb{C}^{n+1} - V$, obtemos que a derivada direcional na direção $v = \frac{dp}{dt}(t)$ é

$$\frac{d}{dt} \text{Re } \log f(p(t)) = \text{Re } \langle v, \text{grad } \log f(z) \rangle.$$

Assim, z será crítico desta aplicação, restrita a F_Θ , se e somente se, o vetor $\text{grad } \log f(z)$ é normal a F_Θ em z . (Aqui, "normal" significa ortogonal a todo vetor tangente, segundo o produto interno real usual).

Agora, segundo o produto interno real usual z é normal a S_ε e, portanto, a F_Θ . Também, pela observação 1.9 (pág. 20), temos que o vetor $\text{igrad } \log f(z)$ é normal a F_Θ em z . Como F_Θ tem codimensão real 2 e os vetores z e $\text{igrad } \log f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ (lema 1.2), conclui-se que os vetores z e $\text{igrad } \log f(z)$ geram o espaço normal a F_Θ em z . Desse modo, z é ponto crítico de a_Θ se, e somente se,

$$\text{grad } \log f(z) = \lambda_1 z + \lambda_2 \text{igrad } \log f(z)$$

para certos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\text{grad } \log f(z) = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_2} z.$$

■

Observação 2.4:

O espaço tangente de F_Θ num ponto crítico z , de a_Θ , é de fato um subespaço vetorial complexo de $\mathbb{C}^{n+1}$, consistindo de todos os vetores v em $\mathbb{C}^{n+1}$ tais que $\langle v, z \rangle = 0$. Isto segue do fato que se $\text{igrad log } f(z)$ é um múltiplo complexo de z , então então um vetor v é real ortogonal a ambos z e $\text{igrad log } f(z)$ se, e somente se, ele é complexo ortogonal a z . Com efeito, temos :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \text{Re } \langle v, z \rangle = 0 \\ \text{Re } \langle v, \text{igrad log } f(z) \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Re } \langle v, z \rangle = 0 \\ \text{Re } \langle v, (\lambda_1 + i\lambda_2)z \rangle = 0 ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \text{Re } \langle v, z \rangle = 0 \\ \text{Re } \langle v, \lambda_1 z \rangle + \text{Re } \langle v, i\lambda_2 z \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Re } \langle v, z \rangle = 0 \\ \text{Re } \langle v, i\lambda_2 z \rangle = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \text{Re } \langle v, z \rangle = 0 \\ \text{Im } \langle v, z \rangle = 0 \end{cases}, \text{ isto é, } \langle v, z \rangle = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Agora devemos estudar a Hessiana de a_Θ num ponto crítico, de modo a computar o índice de Morse. Usamos a interpretação seguinte da Hessiana. Dado um vetor v tangente a F_Θ num ponto crítico z , escolhe-se um caminho diferenciável,

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow F_\Theta \text{ com vetor velocidade } \frac{dp}{dt} = v \text{ em } p(0) = z.$$

Então a derivada segunda

$$\ddot{a}_\Theta(t) = \frac{d^2 a_\Theta(p(t))}{dt^2}$$

em $t = 0$ pode ser expressa como uma função quadrática de v . Tal função quadrática é a Hessiana de a_Θ .

Lema 2.5 :

A derivada segunda de $a_{\Theta}(p(t))$ em $t = 0$ é dada por uma expressão da forma

$$\ddot{a}_{\Theta} = \sum \operatorname{Re} (b_{jk} v_j v_k) - c ||v||^2$$

onde (b_{jk}) é uma matriz de números complexos e c é um número real positivo.

Demonstração:

Notemos primeiro que o caminho $p(t)$ está na variedade F_{Θ} e, portanto, $\frac{f}{|f|} = e^{i\Theta}$ é constante ao longo deste caminho.

Derivando-se a identidade

$$a_{\Theta}(p(t)) = \log |f(p(t))| = \log f(p(t)) - i\Theta,$$

obtemos

$$\dot{a}_{\Theta} = \frac{d}{dt} \log f = \sum \left(\frac{\partial \log f}{\partial z_j} \right) \frac{dp_j}{dt}.$$

Derivando-se outra vez, vem que:

$$\ddot{a}_{\Theta} = \sum \left(\frac{\partial \log f}{\partial z_j} \right) \frac{d^2 p_j}{dt^2} + \sum \frac{\partial^2 \log f}{\partial z_j \partial z_k} \frac{dp_j}{dt} \frac{dp_k}{dt}.$$

Pondo $t = 0$ e $\operatorname{grad} \log f(z) = \lambda z$ (pelo lema 2.3) e introduzindo a abreviação

$$D_{jk} = \frac{\partial^2 \log f}{\partial z_j \partial z_k},$$

podemos reescrever

$$\ddot{a}_{\Theta} = \langle \dot{p}, \lambda z \rangle + \sum D_{jk} v_j v_k,$$

onde o lado esquerdo é real, já que é a derivada segunda de uma função real. Agora, multiplicando-se ambos os lados da igualdade acima por λ e tomando-se parte real, obtemos:

$$\ddot{a}_\theta \operatorname{Re}(\lambda) = |\lambda|^2 \operatorname{Re} \langle \ddot{p}, z \rangle + \sum \operatorname{Re}(\lambda D_{jk} v_j v_k).$$

Substituindo-se a identidade $\operatorname{Re} \langle \ddot{p}, z \rangle = -||v||^2$, que é obtida derivando-se $\langle p(t), p(t) \rangle = \varepsilon^2$ duas vezes, ficamos com:

$$\ddot{a}_\theta \operatorname{Re}(\lambda) = \sum \operatorname{Re}(\lambda D_{jk} v_j v_k) - ||\lambda v||^2.$$

Pelo lema 1.3 temos que $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e, então, dividindo-se por $\operatorname{Re} \lambda$, concluímos a demonstração do lema 2.5.

Agora podemos avaliar o índice de a_θ e a .

Lema 2.6:

O índice de Morse de $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ num ponto crítico é $\geq n$. Portanto, o índice de $a : S_\varepsilon - K \rightarrow \mathbb{R}$ num ponto crítico é também $\geq n$.

Demonstração:

O índice de Morse, I , da função quadrática

$$H(v) = \operatorname{Re} \left(\sum b_{jk} v_j v_k \right) - c ||v||^2,$$

onde v varia em $T_z F_\theta$, é definido como sendo a dimensão máxima dentre os subespaços vetoriais de $T_z F_\theta$, nos quais H é definida negativa.

Se $H(v) \geq 0$ para algum vetor v , não nulo, então

$H(iv) < 0$, pois o primeiro termo na expressão para $H(v)$ muda de sinal enquanto o segundo termo permanece negativo. Notemos que, pela observação 2.4, o vetor iv também é tangente a $T_{z\theta}F_\theta$.

Consideremos a decomposição do espaço tangente $T_{z\theta}F_\theta$ numa soma direta real,

$$T_{z\theta}F_\theta = T_0 \oplus T_1,$$

onde a Hessiana é definida negativa em T_0 e definida semi-positiva em T_1 . Segue-se que a dimensão de T_0 é igual ao índice de Morse, I .

Mas, H também é definida negativa em iT_1 . Portanto,

$$I \geq \dim(iT_1) = \dim T_1 = \dim T_{z\theta}F_\theta - \dim T_0 = 2n - I.$$

Noutras palavras, $I \geq n$.

A afirmação correspondente para a função

$$a : S_\varepsilon - K \longrightarrow \mathbb{R}$$

segue do seguinte: Todo ponto crítico, z , de a é também um ponto crítico de a_θ , para $\theta = \arg f(z)$. Como $T_{z\theta}F_\theta \subset T_z(S_\varepsilon - K)$, temos que o índice de a é maior ou igual ao índice de a_θ em z . Isto demonstra o lema 2.6.

O próximo passo é verificar que os pontos críticos situam-se todos num subconjunto compacto de F_θ (ou de $S_\varepsilon - K$).

Lema 2.7:

Existe uma constante $\eta_\theta > 0$ tal que se $z \in F_\theta$ é crítico de a_θ , então $|f(z)| \geq \eta_\theta$. Assim, os pontos críticos de a_θ estão todos no subconjunto compacto

$$C_{\theta} = \{ z \in F_{\theta} ; |f(z)| \geq \eta_{\theta} \}.$$

Analogamente, existe $\eta > 0$ tal que os críticos de a estão no compacto

$$C = \{ z \in S_{\varepsilon} - K ; |f(z)| \geq \eta \}$$

Demonstração:

Suponhamos que existam pontos z , críticos de $a_{\theta} = \log |f|$, com $|f(z)|$ arbitrariamente próximo de zero. Então estes pontos críticos têm um ponto limite z° no conjunto compacto S_{ε} , com $|f(z)| \rightarrow |f(z^{\circ})| = 0$. Assim, se mostrarmos que existe uma curva diferenciável $p: (0, \delta) \rightarrow F_{\theta}$, com $p(t) \rightarrow z^{\circ}$ quando $t \rightarrow 0$, ao longo do qual $|f|$ não pode tender a zero, teremos obtido uma contradição. Seja

$$W = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; \text{grad } f(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C} \}.$$

Vimos, na demonstração do lema 1.3 (página 10), que W é um conjunto algébrico real. Seja também,

$$B_{\theta} = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; \text{Re}(ie^{-i\theta}f(z)) = 0 \},$$

que é um conjunto algébrico real já que f é polinomial. Por fim consideremos o conjunto semi-algébrico real

$$U_{\theta} = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; \text{Im}(ie^{-i\theta}f(z)) > 0 \}.$$

Observemos que se $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ pertence a $W \cap U_{\theta}$, então $\text{grad } \log f(z) = \lambda z$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. E, que $z \in U_{\theta} \cap B_{\theta}$ se, e somente se, $\arg f(z) = \theta$.

Estamos, então, supondo que existem pontos z arbitrariamente próximos de z° com

$$z \in ((S_{\varepsilon} \cap W \cap B_{\theta}) \cap U_{\theta}) \subset F_{\theta}.$$

Como S_ε também é um conjunto algébrico real, pelo Lema de Seleção da Curva, existe uma curva diferenciável $p: (0, \delta) \rightarrow F_\theta$, com $p(t) \in W \cap B_\theta \cap U_\theta$ e com $p(t) \rightarrow z^\circ$ quando $t \rightarrow 0$. Então, usando o fato de $p(t)$ pertencer a $W \cap U_\theta$ e o lema 2.3, temos que $p(t)$ é constituído de pontos críticos de a_θ . Deste modo, a função a_θ (e, portanto, $|f|$) é constante ao longo desta curva. Como $p(t) \in F_\theta$, devemos ter $|f(p(t))|$ constante não nula.

A afirmação para a função a segue de modo análogo, bastando considerar o conjunto algébrico $W \cap S_\varepsilon$ e o conjunto semi-algébrico $\{z \in \mathbb{C}^{n+1}; |f(z)|^2 > 0\}$.

Finalmente, afirmamos que C_θ e C são compactos. Com efeito, consideremos o subconjunto fechado de $\mathbb{C}^{n+1}$

$$A_\theta = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; |f(z)| \geq \eta_\theta\}.$$

Então,

$$A_\theta \cap (S_\varepsilon - K) = A_\theta \cap S_\varepsilon \quad \text{e} \quad C_\theta = A_\theta \cap F_\theta.$$

Como $\vartheta^{-1}(e^{i\theta}) = F_\theta$ é fechado em $S_\varepsilon - K$, temos que $F_\theta = F \cap (S_\varepsilon - K)$ para algum F fechado em $\mathbb{C}^{n+1}$. Assim,

$$C_\theta = A_\theta \cap F_\theta = A_\theta \cap F \cap (S_\varepsilon - K) = A_\theta \cap F \cap S_\varepsilon,$$

ou seja, C_θ é fechado e limitado em $\mathbb{C}^{n+1}$, portanto compacto.

A compacidade do conjunto C segue do fato de

$$A = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; |f(z)| \geq \eta\}$$

ser fechado em $\mathbb{C}^{n+1}$ e de

$$C = (S_\varepsilon - K) \cap A = S_\varepsilon \cap A. \quad \blacksquare$$

Lema 2.8:

Existe uma aplicação diferenciável

$$s_{\theta}: F_{\theta} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$$

tal que os pontos críticos de s_{θ} são não degenerados, com índice de Morse $\geq n$ e tal que

$$s_{\theta}(z) = |f(z)|$$

para $|f(z)|$ suficientemente próximo de zero. Similarmente, existe uma aplicação diferenciável

$$s: S_{\varepsilon}-K \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$$

com pontos críticos todos não degenerados, de índice $\geq n$, e com

$$s(z) = |f(z)|$$

para $|f(z)|$ suficientemente próximo de zero.

Demonstração:

Segue do fato que as funções de Morse formam um aberto denso em $C^{\infty}(F_{\theta}, \mathbb{R})$ com a topologia de Whitney. (veja [Mi2], 22.4) ■

Observação 2.9 :

Como os pontos críticos de s_{θ} são não degenerados, são isolados. Além disso, os pontos críticos de s_{θ} estão contidos num compacto. Portanto, s_{θ} tem somente um número finito de pontos críticos. ■

Teorema 2.1 :

Cada fibra F_{θ} tem o mesmo tipo homotopia que um complexo CW finito, de dimensão n .

Demonstração:

De modo a aplicarmos a teoria de Morse na sua forma usual, faz-se necessário o uso de uma aplicação $g_\theta: F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: o conjunto dos z com $g_\theta(z) \leq c$ é compacto, para cada constante real c .

Afirmamos que a função

$$g_\theta(z) = -\log s_\theta(z)$$

satisfaz esta condição, ou seja,

$$g_\theta^{-1}(-\infty, c] = s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty) \text{ é compacto para cada } c.$$

De fato, seja M_θ uma vizinhança compacta dos pontos críticos de $|f|$, fornecida pelo lema 2.8, fora da qual $|f| = s_\theta$. Com um argumento análogo ao dado para garantir a compacidade de C_θ no lema 2.7, temos que

$$\{ z \in F_\theta ; |f(z)| \geq e^{-c} \}$$

é compacto para cada c . Agora, como $s_\theta(z) = |f(z)|$ fora de M_θ , segue-se que:

$$s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty) \subset (|f|_{/F_\theta})^{-1}[e^{-c}, \infty) \cup M_\theta,$$

para cada c , ou seja, $s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty)$ é um fechado em F_θ contido num subconjunto compacto de F_θ , portanto compacto.

Como o índice I de Morse de s_θ (ou de $\log s_\theta$) num ponto crítico z é $\geq n$, o índice de $-\log s_\theta$ é

$$\tilde{I}_\theta = \dim T_z F_\theta - I = 2n - I \leq n.$$

Agora, de acordo com o teorema principal da teoria de Morse [M12]

a variedade F_Θ tem o mesmo tipo de homotopia que um complexo CW obtido pela adjunção de uma célula de dimensão $\tilde{I}_\Theta$ para cada ponto crítico de índice $\tilde{I}_\Theta \leq n$. Como existem finitos pontos críticos, o complexo CW é finito. Isto demonstra o teorema 2.1.

Observação 2.10:

Considerando-se $g: S_\varepsilon - K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(z) = -\log s(z)$ e lembrando-se que o índice I de s (ou $\log s$) num ponto crítico é $\geq n$, obtemos que o índice de $g(z) = -\log s(z)$ é

$$\tilde{I} = \dim T_z(S_\varepsilon - K) - I = (2n+1) - I \leq n+1.$$

Assim, um argumento análogo mostra que o espaço $S_\varepsilon - K$ tem o mesmo tipo de homotopia que um complexo CW de dimensão $n+1$. ■

Em particular, se $n \geq 1$, segue-se que o grupo de homologia $H_{2n}(F_\Theta, \mathbb{Z}_2)$ é trivial. Isto implica que F_Θ não possui componente conexa compacta. De fato, se A fosse uma componente compacta de F_Θ , como toda variedade é localmente conexa, teríamos A um aberto de F_Θ e, portanto, uma variedade de dimensão $2n$. Segue que [Gre.]

$$H_{2n}(A, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

e daí, pela sequência exata de homologia do par (F_Θ, A) ,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_{2n+1}(F_\Theta, A; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_{2n}(A; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_{2n}(F_\Theta; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}_2 & & 0 & & \end{array}$$

temos uma contradição.

[Que $H_{2n+1}(F_\Theta, A; \mathbb{Z}_2) = 0$ pode ser visto do modo seguinte. Toda componente é fechada e, portanto, o complementar de A , A^c , é uma variedade de dimensão $2n$. Usando a excisão de A obtemos:

$$H_{2n+1}(F_\Theta, A; \mathbb{Z}_2) = H_{2n+1}(A \cup A^c, A; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{2n+1}(A^c; \mathbb{Z}_2) \simeq 0 \quad]$$

Teorema 2.2:

O espaço $K = V \cap S_\varepsilon$ é $(n-2)$ - conexo.

Demonstração:

Seja $N_\eta(K)$ a vizinhança de K consistindo de todos os z em S_ε tais que

$$|f(z)| \leq \eta.$$

Segue-se do lema 2.7 que se η é suficientemente pequeno, então η é valor regular de $|f(z)|$ e, portanto, $N_\eta(K)$ é uma variedade diferenciável com bordo dado por:

$$\partial(N_\eta(K)) = \{ z \in S_\varepsilon; |f(z)| = \eta \}$$

Pela mesma razão, temos que

$$S_\varepsilon\text{-Interior } N_\eta(K) = S_\varepsilon - (N_\eta(K) - \partial(N_\eta(K))) = \{ z \in S_\varepsilon; |f(z)| \geq \eta \}$$

é uma variedade diferenciável com bordo.

Usando a função real diferenciável e não degenerada s , restrita a $S_\varepsilon\text{-Interior } N_\eta(K)$, temos que :

$$\left[s / (S_\varepsilon\text{-Int } N_\eta(K)) \right]^{-1} = (S_\varepsilon\text{-Int } N_\eta(K)) \cap s^{-1}(-\infty, c]$$

é compacto para todo $c \in \mathbb{R}$, já que é fechado no compacto $S_\varepsilon\text{-Interior } N_\eta(K)$. Segue-se que $S_\varepsilon\text{-Interior } N_\eta(K)$ tem o mesmo tipo de homotopia que um complexo CW obtido pela adjunção de uma célula de dimensão $I \geq n$ para cada ponto crítico de índice I . Então a esfera toda, S_ε , tem o tipo de homotopia de um complexo CW construído de $N_\eta(K)$ pela adjunção de células de dimensão $\geq n$.

Agora, como a adjunção de uma célula de dimensão $\geq n$ não altera altera os grupos de homotopia em dimensão $\leq n-2$ [Whi], segue que

$$\pi_i(N_\eta(K)) \simeq \pi_i(S_\varepsilon) \simeq 0, \text{ para } i \leq n-2.$$

Usando o fato de que K , sendo um conjunto algébrico real, é triangulável [Loj], temos que K é um retrato absoluto de vizinhança [Spa]. Segue que se η é suficientemente pequeno, então K é um retrato da vizinhança $N_\eta(K)$. Portanto,

$$\pi_i(K) \simeq \pi_i(N_\eta(K)) \simeq 0 \text{ para } i \leq n-2. \quad \blacksquare$$

APÊNDICE

UMA DESCRIÇÃO ALTERNATIVA DAS FIBRAS

Seja D_ε o disco cuja fronteira é S_ε ,

$$D_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; ||z|| \leq \varepsilon \}.$$

Lema 2.11:

Existe um campo diferenciável de vetores, $v(z)$, em $D_\varepsilon - V$ tal que o produto interno

$$\langle v(z), \text{grad log } f(z) \rangle$$

é real e positivo para todo z em $D_\varepsilon - V$, e tal que

$$\langle v(z), z \rangle$$

tem parte real positiva.

Demonstração:

A demonstração é análoga àquela do lema 1.6. Localmente, dado z_a em $D_\varepsilon - V$, temos que:

1.º) Se z_a e $\text{grad log } f(z_a)$ são linearmente independentes sobre os complexos, então o sistema

$$\begin{cases} \langle v(z), \text{grad log } f(z) \rangle = 1 \\ \langle v(z), z \rangle = 1 \end{cases}$$

possui uma solução C^∞ numa vizinhança de z_a ;

2.º) Se $\text{grad log } f(z_a) = \lambda z_a$, definimos

$$v(z_a) = \lambda z_a.$$

O lema 1.3 garante $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Portanto,

$$\langle v(z_a), \operatorname{grad} \log f(z_a) \rangle = |\lambda|^2 |z_a|^2 > 0 \quad e$$

$$\operatorname{Re} \langle v(z_a), z_a \rangle = \operatorname{Re}(\lambda |z_a|^2) > 0.$$

Deste modo, as duas condições estão satisfeitas numa vizinhança de z_a .

Usando uma partição diferenciável da unidade, obtem-se $v(z)$.

Consideremos agora as soluções da equação diferencial

$$\frac{dp}{dt}(t) = v(p(t)) \quad \text{em } D_{\varepsilon} - V.$$

Vimos na prova do lema 1.1 que, escrevendo

$$\frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta}, \quad \text{temos}$$

$$\frac{d}{dt}(\theta \circ p)(t) = \operatorname{Re} \langle \frac{dp}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log f(p(t)) \rangle.$$

Assim, como $\langle \frac{dp}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log f(p(t)) \rangle$ é real positivo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\theta \circ p)(t) &= \operatorname{Re} \langle \frac{dp}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log f(p(t)) \rangle = \\ &= -\operatorname{Im} \langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} \log f(p(t)) \rangle = 0, \end{aligned}$$

ou seja, o argumento de $f(z)$ é constante ao longo de cada curva integral. Ainda do fato de $\langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} \log f(p(t)) \rangle$ ser real positivo obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\log|f(p(t))|) &= \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \log f(p(t)) = \\
&= \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} \log f(p(t)) \right\rangle = \\
&= \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} \log f(p(t)) \right\rangle > 0,
\end{aligned}$$

donde $\log |f(p(t))|$ (e, portanto, $|f(p(t))|$) é uma função estritamente monótona de t .

Além disso, como $\operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), p(t) \right\rangle > 0$, temos que

$$\frac{d}{dt}(|p(t)|^2) = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), p(t) \right\rangle > 0,$$

ou seja, $|p(t)|$ é uma função estritamente monótona de t .

As propriedades, acima, do campo $v(z)$ permitem demonstrar o lema seguinte.

Lema 2.12.

Se $c \in \mathbb{C}$ tem módulo pequeno e $\frac{c}{|c|} = e^{i\theta}$, então a intersecção de $f^{-1}(c)$ com o interior do disco D_ε , ($\overset{\circ}{D}_\varepsilon$), é difeomorfa a $F_\theta \cap \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; |f(z)| > |c|\}$.

Demonstração:

A idéia desta demonstração é ir puxando $f^{-1}(c) \cap \overset{\circ}{D}_\varepsilon$ para a esfera S_ε , preservando o argumento de f .

Dado $z \in f^{-1}(c) \cap \overset{\circ}{D}_\varepsilon$, seguimos a curva integral que passa por z , $p_z(t)$, na direção de crescimento de $|f|$, até atingirmos o ponto z' em S_ε -K. Teremos, então,

$$e^{i\theta} = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{f(z')}{|f(z')|} \quad \text{e} \quad |f(z')| > |c|.$$

Afirmamos que a correspondência $z \mapsto z'$ fornece o difeomorfismo desejado. Primeiro observamos que, como o campo $v(z)$ é não nulo em cada ponto e $||p_z(t)||$ é crescente, para garantirmos que cada solução $p_z(t)$ possa ser estendida até atingir a esfera S_ϵ é suficiente garantirmos que $p_z(t)$ não tende a $V \cap D_\epsilon$. Isto segue do fato de $|f(p_z(t))|$ ser crescente. Deste modo, se h é o fluxo local maximal associado ao campo $v(z)$, temos que a equação

$$||h(z,t)||^2 = ||p_z(t)||^2 = \epsilon^2$$

tem solução e como, pela construção de v ,

$$\frac{\partial}{\partial t} ||h(z,t)||^2 = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} h(z,t), h(z,t) \right\rangle = 2 \operatorname{Re} \langle v(p_z(t)), p_z(t) \rangle$$

é diferente de zero, a equação acima define implicitamente t como uma função diferenciável de z , $t=t(z)$. Segue que a correspondência acima, $z \mapsto z' \in F_\Theta$, define a aplicação

$$\begin{aligned} f^{-1}(c) \cap D_\epsilon^\circ &\longrightarrow S_\epsilon \\ z &\longmapsto z' = h(z, t(z)) \end{aligned}$$

que é um difeomorfismo sobre sua imagem. Devemos, assim, verificar que esta aplicação é sobre o conjunto

$$F_\Theta \cap \{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; |f(z)| > |c| \}.$$

Dado $z' \in F_\theta \cap \{ z ; |f(z)| > |c| \}$ seguimos a curva integral $p_z(t)$ na direção de decrescimento de $|f|$, de modo que devemos ter $p_z(t)$ tendendo a $V \cap D_\varepsilon$. Como $|f(p_z(t))|$ é contínua, deve assumir o valor $|c|$ nalgum instante t . ■

Teorema 2.13:

Se o número complexo $c \neq 0$ tem módulo suficientemente pequeno, então a hipersuperfície complexa $f^{-1}(c)$ intercepta o disco aberto D_ε numa variedade diferenciável difeomorfa a fibra F_θ .

Demonstração:

Segue da teoria de Morse. (ver por exemplo [MM]).

CAPÍTULO III

O CASO DE UM PONTO CRÍTICO ISOLADO

Neste capítulo é suposto que a função polinomial $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ não tem pontos críticos numa vizinhança da origem, exceto possivelmente a própria origem. Isto é, a origem é um ponto não singular ou um ponto singular isolado da hipersuperfície $V = f^{-1}(0)$. Supõe-se, ainda, $n \geq 1$.

Seja S_ε contida numa vizinhança da origem, nas condições acima. Então, o vetor $\text{grad } f(z)$ é não nulo para todo $z \neq 0$ nessa vizinhança, em particular para $z \in S_\varepsilon$.

Proposição 3.1:

Os pontos críticos de f/S_ε são os pontos z em S_ε para os quais o vetor $\text{grad } f(z)$ é um múltiplo complexo de z .

Demonstração:

Como $T_{z \in S_\varepsilon}$ é um espaço vetorial real, consideramos a identificação natural de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e temos que $z \in S_\varepsilon$ é crítico de f/S_ε se, e somente se, o núcleo da derivada

$$d(f/S_\varepsilon)(z) = df(z)/T_{z \in S_\varepsilon} : T_{z \in S_\varepsilon} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \longmapsto \langle v, \text{grad } f(z) \rangle$$

tem dimensão maior ou igual a $2n$, já que $T_{z \in S_\varepsilon}$ tem dimensão $2n+1$.

[Observamos que se permitíssemos $n = 0$, então todo z em S_ε seria crítico de f/S_ε]

Suponhamos que z e $\text{grad } f(z)$ sejam linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$. Afirmamos que z não é crítico de f/S_ε . De fato, se z e $\text{grad } f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, então o sistema

$$\begin{cases} \langle v, z \rangle = 0 \\ \langle v, \text{grad } f(z) \rangle = 1 \end{cases}$$

tem solução $v \neq 0$. A primeira equação fornece $\text{Re } \langle v, z \rangle = 0$, ou seja, $v \in T_z S_\varepsilon$. Mas, $\langle i v, z \rangle = i \langle v, z \rangle = 0$. Portanto, $i v$ também pertence a $T_z S_\varepsilon$ e temos $\langle i v, \text{grad } f(z) \rangle = i$, pela segunda equação. Como os vetores v e $i v$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, temos que o núcleo de $d(f/S_\varepsilon)(z)$ tem dimensão $\leq (2n+1)-2 = 2n-1$, de modo que z não é crítico.

Por outro lado, suponhamos $\text{grad } f(z) = \lambda z$, para algum λ em $\mathbb{C}$. Temos então,

$$\begin{aligned} \text{Ker } d(f/S_\varepsilon)(z) &= \{ v \in T_z S_\varepsilon ; \langle v, \text{grad } f(z) \rangle = \langle v, \lambda z \rangle = 0 \} = \\ &= \{ v \in \mathbb{C}^{n+1} ; \text{Re } \langle v, z \rangle = 0, \langle v, \lambda z \rangle = 0 \} = \\ &= \{ v \in \mathbb{C}^{n+1} ; \langle v, z \rangle = 0 \}, \end{aligned}$$

que é um espaço vetorial real de dimensão $2n$. Segue-se que z é crítico. Isto completa a demonstração do lema 3.1.

Lema 3.2:

Para ε suficientemente pequeno, $K = S_\varepsilon \cap V$ não contém pontos críticos de f/S_ε .

Demonstração:

A demonstração é baseada no Lema de Seleção da Curva. Sejam os conjuntos algébricos reais

$$V = f^{-1}(0) \text{ e } W = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; \text{grad } f(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C} \}$$

e seja U o conjunto semi-algébrico real,

$$U = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; \langle z, z \rangle = ||z||^2 > 0 \} = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}.$$

Suponhamos, por absurdo, que para todo $\varepsilon > 0$ exista $z \in V$, crítico de f/S_ε . Então $0 \in \overline{V \cap W \cap U}$ e, portanto, pelo Lema de Seleção da Curva, existe uma curva analítica real

$p: [0, \delta') \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ com $p(0) = 0$ e $p(t) \in V \cap W \cap U$ para $t > 0$.

Agora, como $p(t) \in V$, temos que $f(p(t)) = 0$ para $t \in [0, \delta')$, donde

$$\left\langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad } f(p(t)) \right\rangle = \frac{d}{dt}(f \circ p)(t) \equiv 0.$$

De $p(t) \in W$ temos que $\text{grad } f(p(t)) = \lambda p(t)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Mas, então,

$$0 = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad } f(p(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \lambda p(t) \right\rangle,$$

resultando em

$$0 = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), p(t) \right\rangle = \frac{d}{dt} ||p(t)||^2.$$

Noutras palavras, $p(t)$ é constante e, como $p(0) = 0$, devemos ter $p(t) \equiv 0$, contrariando o fato de, por construção, $p(t)$ pertencer a U . Esta contradição demonstra o lema 3.2.

Lema 3.3:

Para ε suficientemente pequeno, o fecho em S_ε de cada fibra F_θ é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$, com bordo. O interior dessa variedade é F_θ e o bordo é precisamente K .

Demonstração:

Devemos verificar, primeiramente, que os pontos de K pertencem ao fecho de F_θ em S_ε .

Dado $z^\circ \in K$, como z° não é crítico de f/S_ε , existem, pela forma local das submersões, coordenadas (reais) $u_1, \dots, u_{2n+1}$ numa vizinhança U' de z° tal que

$$f(z) = u_1(z) + i u_2(z),$$

para todo z em U' . Assim, se U'' é uma vizinhança qualquer de z° em S_ε , temos que para todo z em $U = U' \cap U''$, $f(z)$ também escreve-se como $f(z) = u_1(z) + i u_2(z)$. Observe-se que U não está inteiramente contido em K , já que z° não é crítico de f/S_ε e como

$$0 = f(z^\circ) = u_1(z^\circ) + i u_2(z^\circ),$$

a vizinhança U contém pontos z tais que $(u_1(z))^2 + (u_2(z))^2 \neq 0$ e $\arg(u_1(z) + i u_2(z)) = \theta$, para cada θ . Segue-se que $z^\circ \in \bar{F}_\theta$.

Para concluir a demonstração observemos que

$$\bar{F}_\theta \cap U = (F_\theta \cup K) \cap U = (F_\theta \cup \{z; u_1(z) = u_2(z) = 0\}) \cap U$$

e que um ponto z pertence a $F_\theta \cap U$ se, e somente se,

$$\arg(u_1(z) + i u_2(z)) = \theta \quad (\text{portanto } u_1(z) \neq 0 \text{ ou } u_2(z) \neq 0).$$

Noutras palavras, os pontos de $F_\Theta \cap U$ não pertencem ao bordo de $\bar{F}_\Theta \cap U$. Como todo ponto de K admite uma tal vizinhança U , segue-se o resultado.

Corolário 3.4:

A variedade compacta com bordo, $\bar{F}_\Theta$, está mergulhada em S_ϵ de tal modo que tem o mesmo tipo de homotopia que seu complemento $S_\epsilon - \bar{F}_\Theta$.

Demonstração:

Como $\bar{F}_\Theta$ é uma subvariedade de S_ϵ , a inclusão $i: \bar{F}_\Theta \rightarrow S_\epsilon$ fornece um mergulho. Agora, o Teorema da Fibração fornece a fibração localmente trivial $\vartheta: S_\epsilon - K \rightarrow S^1$. Segue-se que a restrição

$$\vartheta: S_\epsilon - (K \cup \vartheta^{-1}(e^{i\theta})) \rightarrow S^1 - \{e^{i\theta}\},$$

é uma fibração localmente trivial. Mas, $S^1 - \{e^{i\theta}\}$ é contrátil. Portanto, a fibração é (globalmente) trivial, ou seja,

$$S_\epsilon - \bar{F}_\Theta = S_\epsilon - (K \cup F_\Theta) \text{ é difeomorfo a } (S^1 - \{e^{i\theta}\}) \times F_{\Theta'},$$

onde $F_{\Theta'}$ é qualquer fibra diferente de F_Θ . Usando novamente a contratibilidade de $S^1 - \{e^{i\theta}\}$, temos que $S_\epsilon - \bar{F}_\Theta$ tem $F_{\Theta'}$ como um retrato por deformação. Como as fibras são difeomorfas, temos que

$$S_\epsilon - \bar{F}_\Theta \sim F_{\Theta'} \sim F_\Theta.$$

($\sim$ significa "tem o mesmo tipo de homotopia que").

Como o interior de $\bar{F}_\Theta$ é justamente F_Θ , segue-se que F_Θ tem o mesmo tipo de homotopia que $\bar{F}_\Theta$.

Corolário 3.5

A homologia de F_Θ está concentrada nas dimensões 0 e n. Além disso, $H_0(F_\Theta) \simeq \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Pelo teorema 2.1 temos que $H_q(F_\Theta) = 0$ para $q > n$. Também, $H_q(F_\Theta) \simeq H_q(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta)$, já que F_Θ é difeomorfa a um retrato por deformação de $S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta$. Portanto, basta considerarmos $H_q(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta)$. O teorema da dualidade de Alexander fornece um isomorfismo

$$H^{2n+1-q}(\bar{F}_\Theta) \simeq H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta).$$

Assim, da sequência exata de homologia

$$\dots \rightarrow H_q(S_\varepsilon) \rightarrow H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) \rightarrow H_{q-1}(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) \rightarrow H_{q-1}(S_\varepsilon) \rightarrow \dots,$$

temos que, para $2 \leq q \leq n$,

$$H_{q-1}(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) \simeq H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) \simeq H^{2n+1-q}(\bar{F}_\Theta).$$

Agora, pelo teorema 2.1 temos que

$$H^{2n+1-q}(\bar{F}_\Theta) = 0, \text{ para } 2n+1-q > n.$$

Portanto,

$$H_{q-1}(F_\Theta) \simeq H_{q-1}(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) = 0, \text{ para } 2 \leq q \leq n.$$

Além disso, temos

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_{2n+1}(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) & \rightarrow & H_{2n+1}(S_\varepsilon) & \rightarrow & H_{2n+1}(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) & \rightarrow & H_{2n}(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) \rightarrow \\ \text{"} & & \text{"} & & & & \text{"} \\ 0 & & \mathbb{Z} & & & & 0 \end{array}$$

Portanto,

$$H^0(\bar{F}_\Theta) \simeq H_{2n+1}(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) \simeq \mathbb{Z},$$

ou seja, F_Θ é conexa.

Lema 3.6

A fibra F_Θ é $(n-1)$ - conexa.

Demonstração:

Pelo corolário anterior temos que $H_1(F_\Theta) = 0$ para $1 \leq i < n$. Então, se mostrarmos que F_Θ é simplesmente conexa para $n \geq 2$, o resultado seguirá do teorema de Hurewicz [Spa]. Agora, também pelo corolário anterior, temos que F_Θ é conexa e como é localmente conexa por caminhos, segue-se que é conexa por caminhos. Assim, é suficiente mostrarmos que $\pi_1(F_\Theta) = 0$ para $n \geq 2$.

Consideremos a função

$$-s_\Theta: \bar{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{R},$$

onde s_Θ é a função de Morse obtida no lema 2.8. Então, $-s_\Theta$ é uma função de Morse em $\bar{F}_\Theta$ cujos pontos críticos têm índice $I \leq n$. Notando que o índice I de $-s_\Theta$ associado ao menor valor crítico é zero, concluímos que $\bar{F}_\Theta$ é obtida de um disco D_0^{2n} pela adjunção de células de dimensão menor ou igual a n . Agora, $S_\varepsilon - D_0^{2n}$ é

contrátil e, portanto, simplesmente conexo. Também, a adjunção de uma célula e_λ de dimensão $\lambda \leq n$ a D_0^{2n} , não altera o grupo fundamental de $S_\varepsilon - (D_0^{2n} \cup e_\lambda)$, desde que $\lambda \leq (\dim(S_\varepsilon)) - 3 = 2n-2$. Portanto, desde que $\lambda \leq n \leq 2n-2$ (ou seja, $n \geq 2$), temos

$$\pi_1(S_\varepsilon - (D_0^{2n} \cup e_\lambda)) \simeq \pi_1(S_\varepsilon - D_0^{2n}) = 0.$$

Mas, $\bar{F}_\Theta$ é obtido de D_0^{2n} após a adjunção de um número finito de células. Portanto,

$$0 = \pi_1(S_\varepsilon - D_0^{2n}) \simeq \pi_1(\bar{F}_\Theta).$$

Usando o corolário 3.4 obtemos

$$0 = \pi_1(\bar{F}_\Theta) \simeq \pi_1(S_\varepsilon - \bar{F}_\Theta) \simeq \pi_1(F_\Theta).$$

Isto completa a demonstração.

Teorema 3.7:

Cada fibra tem o tipo de homotopia de um bouquet

$$S^n \vee S^n \vee \dots \vee S^n$$

de esferas.

Demonstração:

Afirmamos que $H_n(F_\Theta)$ é abeliano livre. De fato, se $H_n(F_\Theta)$ possuisse parte de torsão, teríamos cohomologia não trivial em dimensão $n+1$, o que é impossível pelo teorema 2.1. Portanto, se $n \geq 2$, usando o teorema de Hurewicz, temos que

$$\pi_n(F_\Theta) \simeq H_n(F_\Theta).$$

Seja $(S^n \vee \dots \vee S^n, p_0) \longrightarrow (F_\Theta, p_1)$ uma aplicação contínua que

leva o ponto base p_0 no ponto base p_1 e que leva as esferas (S^n, p_0) do bouquet nos geradores de $\pi_n(F_\Theta, p_1)$. Uma tal aplicação induz um isomorfismo entre as homologias

$$H_n(S^n \vee \dots \vee S^n) \cong H_n(F_\Theta).$$

O teorema de Whitehead ([Spa] 7.5.9) garante que a aplicação acima é uma equivalência de homotopia, já que F_Θ e $S^n \vee \dots \vee S^n$ são simplesmente conexos.

Se $n = 1$ temos o caso clássico. Neste caso, $\bar{F}_\Theta$ é uma superfície conexa compacta orientável e com bordo.

Pela classificação dessas variedades de dimensão 2 [Hi], segue-se que $\bar{F}_\Theta$ tem o mesmo tipo de homotopia que um bouquet de esferas S^1 .

Exemplo: Seja $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z_1, z_2) = z_1^p + z_2^q$ com p e q primos entre si. Neste caso, $K = S_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$ é um nó toral ([MM] p. 19) do tipo (p, q) . As fibras $\bar{F}_\Theta$ são superfícies de Seifert de K ([RO]) de genus igual a $(p-1)(q-1)/2$ ([Mi1] p. 83).

Caso particular $(p, q) = (2, 3)$. Neste caso, K é o nó trefoil

$\bar{F}_\Theta$ é o toro com bordo K . Em [MM] capítulo I encontra-se outros fatos interessantes acerca dos nós K .

Para estudo posterior:

Quatro anos após a publicação de [Mi1], H. Hamm desenvolveu estudo semelhante ao que expusemos para o caso de aplicações

$$f: \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^k.$$

Tais estudo podem ser encontrados em [Lo].

Recentemente, uma tentativa de estudo semelhante foi feita para aplicações $f: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^{n+k}$, por D. Mond [Mon].

Teorema ([Mon]) Se $f_0: (\mathbb{C}^n, o) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, o)$ é finitamente $\mathcal{A}$ - determinada e $f_t: B_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ é um bom representante estável de f_0 , então a imagem X_t de f_t tem o mesmo tipo de homotopia que um bouquet de μ esferas S^n .

Observação: O termo bom representante estável de f_0 é introduzido em [Ma]. cap I. Lá também é determinado, em função de f_0 , o número μ , ou mais precisamente, a característica de Euler de X_t no caso em que f_0 é de corank 1.

REFERÊNCIAS

- [Mi1]: MILNOR, J. - Singular Points of Complex Hypersurfaces. Annals of Math. Studies, 61, Princeton, (1968).
- [Mi2]: - Morse Theory. Annals of Math. Studies, 51, Princeton, (1963).
- [Mi3]: - A Procedure for Killing Homotopy Groups of Diff. Manifolds. Math. Soc. Symp in Pure Math III (1961).
- [MOR]: MORSE, M. - The Calculus of Variations in the Large. Am. Math. Soc. Colloq. Publ. 18, (1934).
- [MM]: CARNEIRO, M.J.D & SOARES, M.G. - Introdução à Topologia de Singularidades Complexas. 15^o Coloq. Bras. de Mat., (1985).
- [Ro]: ROLFSEN, D. - Knot and Links. Mathematics Lectures Series 7. Publish or Perish, Inc. (1976).
- [Lo]: LOOIJENGA, E. Isolated Singular Points on Complete Intersections, London Math. Soc. Lecture Notes 77, (1984).

- [Loj]: Lojasiewicz, S. Triangulation of semi-analytic sets,
Annali Scu. Norm. Sup. Pisa, Sc. Fis. Mat. Ser. 3,
v.18, fasc. 4 (1964), 449-474.
- [Ma]: MARAR, W.L. - Mapping Fibrations and Multiple Point Schemes,
Ph.D. Thesis. University of Warwick, (1989).
- [Mon]: MOND. D. - Vanishing Cycles for Analytic Maps, University
of Warwick preprint, (1989).
- [Spa]: SPANIER, E. - Algebraic Topology, McGraw-Hill, (1966).
- [Pa]: Palis, J. Jr. & Melo, W.de. - Introdução aos Sistemas
Dinâmicos. Projeto Euclides - IMPA - CNPq.
- [Hi]: HIRSH, M. W.- Differential Topology. Springer Verlag,
GTM 33, (1976)
- [Gre]: Greenberg, M. - Lectures on Algebraic Topology.
W.A.Benjamin, Inc. (1967)
- [Whi]: Whitehead, G.W. - Homotopy Theory. Cambridge, MIT, (1966)