O PROBLEMA DO RECONHECIMENTO
EM TEORIA DE BIFURCAÇÃO

Valter Locci

Orientadora:

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para obtenção
do título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

1990

À minha filha Bruna

e

à minha esposa Marise

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar à Deus por propiciar-me esta oportunidade e por dar-me força e persistência.

À minha orientadora que apoiou-me deste o início do curso de mestrado até o término deste trabalho depositando confiança e estimulando-me nos momentos mais difíceis.

À minha esposa pela compreensão e dedicação durante os dias em que ficamos separados para a confecção deste trabalho.

Agradeço enfim, a todos que cruzaram comigo durante esta fase de minha vida proporcionando-me mais experiência e a todos que indiretamente colaboraram com este trabalho.

Este trabalho foi parcialmente
financiado pelo CNPq e pela CAPES.

ABSTRACT

In this work we apply methods of Singularity Theory to study the Recognition Problem in Bifurcation Theory. We concentrate in bifurcation problems $h(x, \lambda)$ in the ring $\mathcal{E}_{n+1}$ of germs of functions of n state variables and one parameter.

Higher-order terms, $\mathcal{O}_a(h)$, are characterized by an intrinsic ideal $\mathcal{P}(h)$ contained in $\mathcal{O}_a(h)$. The main result shows that $\text{itr}(\mathcal{M}.\text{RT}(h)) \subset \mathcal{P}(h)$, characterizing $\mathcal{P}(h)$ in an effectively computable way. When $n = 1$ we show that $\mathcal{P}(h) = \text{itr } J(h)$.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - PRELIMINARES	1
CAPÍTULO II - SINGULARIDADES E BIFURCAÇÃO	
§1 - O Problema de Bifurcação	14
§2 - Equivalências	21
§3 - O Espaço Tangente Restrito	26
§4 - Invariança da codimensão	41
CAPÍTULO III - IDEAIS INTRÍNSECOS	52
CAPÍTULO IV - O PROBLEMA DO RECONHECIMENTO	
§1 - Introdução	73
§2 - Termos de Ordem Baixa	76
§3 - Termos de Ordem Alta	82
§4 - Termos de Ordem Intermediária	91
§5 - Exemplos	98
§6 - $\mathcal{K}$ -equivalência	105
§7 - Prova do Teorema 4.3.10	107
§8 - Comentários Finais	126
BIBLIOGRAFIA	129

INTRODUÇÃO

Em 1979 Golubitsky e Schaeffer, [5] e [6], introduziram a idéia de aplicar métodos da teoria de singularidades ao estudo de problemas de bifurcação de uma classe especial de equações. A partir daí muitos pesquisadores têm usado estas idéias em diferentes contextos.

Entre os problemas específicos de teoria de bifurcação que são resolvidos pela abordagem da teoria das singularidades, destacam-se os seguintes:

- (a) Obtenção de uma lista de todas *formas normais*, com a propriedade de que todos problemas de bifurcação até uma dada codimensão são equivalentes precisamente a uma forma normal.
- (b) O *desdobramento universal* de cada forma normal.
- (c) A solução do *problema do reconhecimento* para cada forma normal.

Segundo Melbourne [10] o problema do reconhecimento é uma das facetas da teoria de singularidades menos explorada.

Golubitsky estuda em um dos capítulos de [7] o Problema do

Reconhecimento para Problemas de Bifurcação $h(x, \lambda)$ no anel $\mathcal{E}_{1+1}$ dos germes de funções de uma variável e um parâmetro. Neste trabalho generalizamos, quando possível, este estudo para $h \in \mathcal{E}_{n+1}$.

No capítulo I introduzimos a noção de germes, damos uma estrutura (entre outras) de anel ao conjunto $\mathcal{E}_n$ dos germes de funções e demonstramos algumas propriedades envolvendo ideais em $\mathcal{E}_n$.

No capítulo II inicialmente introduzimos o conceito de bifurcação e o relacionamos com Teoria de Singularidades. Em seguida definimos uma relação de equivalência em $\mathcal{E}_{n+r}$, anel dos germes de funções a n variáveis e r parâmetros, que identifica germes de um mesmo problema de bifurcação. O estudo é simplificado quando consideramos casos especiais de equivalência tais como equivalência forte e J -equivalência. Para estas equivalências definimos espaços tangentes, $RT(g)$ e $J(g)$, de germes g em $\mathcal{E}_{n+r}$. Com esta noção definimos codimensão finita de germes e tratamos da determinação finita destes. Neste ponto passamos a trabalhar basicamente com germes em $\mathcal{E}_{n+1}$. Concluimos o capítulo mostrando que a codimensão de um germe é um invariante da classe de equivalência forte.

O capítulo III trata de um assunto específico a ser usado no problema do reconhecimento. Nele definimos ideais intrínsecos, estudamos suas propriedades e o resultado central do capítulo é uma caracterização explícita de tais ideais.

O problema do reconhecimento é abordado no capítulo IV. É o assunto principal da dissertação. Dado um problema de bifurcação $h \in \mathcal{E}_{n+1}$, resolver o problema do reconhecimento para h consiste

em determinar explicitamente condições (envolvendo derivadas na origem) para que outro germe $g \in \mathcal{X}_{n+1}$ seja fortemente equivalente a h (em símbolos, $g \sim_f h$). Para $h(x, \lambda) = x^3 - x\lambda$, por exemplo, e $g \in \mathcal{X}_{1+1}$ mostraremos que vale:

$$g \sim_f h \iff g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = 0, \quad g_{xxx} > 0 \text{ e } g_{x\lambda} < 0 \text{ em } (0,0).$$

Para cada problema de bifurcação $h \in \mathcal{X}_{n+1}$ os monômios de $\mathcal{X}_{n+1}$ são separados em três classes: Termos de Ordem Baixa, $\mathcal{O}_b(h)$, Termos de Ordem Alta, $\mathcal{O}_a(h)$ e Termos de Ordem Intermediária, $\mathcal{O}_i(h)$.

Uma caracterização explícita de termos em $\mathcal{O}_b(h)$ é dada pelo espaço vetorial normal a um ideal intrínseco $S(h)$.

Termos de $\mathcal{O}_a(h)$ são caracterizados por um ideal intrínseco $\mathcal{P}(h)$ contido em $\mathcal{O}_a(h)$ e são explicitados no principal teorema da dissertação que mostra que $\text{itr}(\mathcal{M}\text{RT}(h)) \subset \mathcal{P}(h)$. No caso em que $n = 1$ demonstramos uma caracterização completa de $\mathcal{P}(h)$, isto é, $\mathcal{P}(h) = \text{itr } J(h)$. A prova deste resultado é muito trabalhosa e é feita separadamente no §7.

Os termos de ordem intermediária estão no complementar de $\mathcal{O}_b(h) + \mathcal{O}_a(h)$. O tratamento destes termos é um cálculo explícito envolvendo um número finito de parâmetros indeterminados. Os cálculos são feitos caso por caso.

Resolvemos o problema do reconhecimento para vários casos em $\mathcal{X}_{1+1}$ e $\mathcal{X}_{2+1}$.

Em seguida consideramos o problema do reconhecimento no contexto da $\mathcal{B}$ -equivalência.

Encerramos o trabalho com considerações gerais sobre a abordagem do problema do reconhecimento por outros pesquisadores.

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

Todas as aplicações consideradas são de classe C^∞ e diremos simplesmente aplicação diferenciável.

Como nosso estudo é local consideraremos germes.

Definição:

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, consideremos no conjunto de todas as aplicações $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde U é uma vizinhança de x , a seguinte relação de equivalência: Duas aplicações $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, são equivalentes se existe uma vizinhança W de x tal que $f_1|_W = f_2|_W$. A classe de equivalência desta relação é chamada *germe* em x . Os elementos destas classes são chamados *representantes* do germe. Chamando de $y = f_1(x) = f_2(x)$, usamos a notação

$$f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y) \quad \text{ou} \quad f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

para o germe de f_1 ou de f_2 . Chamamos x a *fonte* do germe e y a *meta* do germe.

Observações:

1) Dado um germe $f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, geralmente

denotaremos também um representante do mesmo por f .

2) A composição, diferenciação e inversão (no caso $n=p$) de germes são feitas tomando-se seus representantes.

3) Em geral trabalharemos com germes cuja fonte é a origem ($x=0$). Denotaremos $0 \equiv (0,0) \equiv \dots \equiv (0,\dots,0)$.

Definição:

O rank de um germe $f: (\mathbb{R}^n, x) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é o rank de sua diferencial no ponto x , isto é, o rank de sua matriz Jacobiana

$$Jf(x) = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x) \right]_{p \times n},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(x) = (f^1(x), \dots, f^p(x))$.

Definição:

Um germe $f: (\mathbb{R}^n, x) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é singular se seu rank é menor que o mínimo de $\{n, p\}$.

O conjunto dos germes de funções com fonte nula é denotado por $\mathfrak{X}_n$, isto é,

$$\mathfrak{X}_n = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Definindo naturalmente em $\mathfrak{X}_n$ operações de soma, produto por escalar e produto, temos $\mathfrak{X}_n$ como um espaço vetorial, uma álgebra real e um anel comutativo com elemento unidade.

Os germes $f \in \mathfrak{X}_n$ que são inversíveis (no anel $\mathfrak{X}_n$) são aqueles em que $f(0) \neq 0$.

O conjunto dos germes de funções com fonte e meta nulas é denotado por $\mathcal{M}_n$, isto é,

$$\mathcal{M}_n = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)\}.$$

O conjunto dos germes de aplicações inversíveis com fonte e

meta nulas é denotado por $\mathcal{R}_n$, isto é,

$$\mathcal{R}_n = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0); f \text{ é inversível}\}.$$

$\mathcal{R}_n$ com a operação de composição é um grupo.

Lema 1.1 (Hadamard):

Se $f \in \mathcal{Z}_n$ com $f(0) = 0$ então existem germes $a_1, \dots, a_n$ em $\mathcal{Z}_n$ tal que $f(x) = x_1 a_1(x) + \dots + x_n a_n(x)$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Prova:

Suponhamos f definida em uma bola contendo a origem e consideremos $h(t) = f(tx)$ onde $0 \leq t \leq 1$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= h(1) - h(0) \\ &= \int_0^1 \frac{dh}{dt}(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt = \sum_{i=1}^n x_i a_i(x), \end{aligned}$$

onde $a_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt.$ ■

A definição seguinte é básica e introduz a notação de índices múltiplos de inteiros que utilizamos.

Definição:

Polinômio de Taylor de ordem k (k-jato) de um germe $f \in \mathcal{Z}_n$, calculado na origem:

$$j^k f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f \Big|_{x=0} x^\alpha,$$

onde

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = (\alpha_1)! \dots (\alpha_n)!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

Teorema 1.2:

Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Para todo inteiro $k \geq 0$ existem coeficientes $a_\alpha \in \mathcal{E}_n$, tal que

$$f(x) = j^k f(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} a_\alpha(x) x^\alpha$$

Prova:

1) Mostremos por indução que:

$$j^k f(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} a_\alpha(x) x^\alpha :$$

Para $k = 0$ temos $j^0 f(0) = f(0) \equiv 0$ logo por 1.1 temos

$$f(x) = a_1(x) x_1 + \dots + a_n(x) x_n = \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(x) x^\alpha.$$

$$\text{Suponhamos que vale: } j^k f(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} a_\alpha(x) x^\alpha.$$

Mostremos que o resultado vale para $k + 1$:

Temos $j^{k+1} f(x) \equiv 0$ logo $j^k f(x) \equiv 0$. Usando a hipótese de indução obtemos $f(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} a_\alpha(x) x^\alpha$. Como $j^{k+1} f(x) \equiv 0$ e

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} a_\alpha(x) x^\alpha \quad \text{as derivadas parciais de ordem } k+1 \text{ de } f$$

na origem são nulas, isto é, $a_\alpha(0) = 0$. Aplicando 1.1 a cada

coeficiente a_α obtemos $a_\alpha(x) = \sum_{|\beta|=1} b_\beta(x) \cdot x^\beta$. Assim

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} a_{\alpha}(x) x^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=k+1} \left(\sum_{|\beta|=1} b_{\beta}(x) x^{\beta} \right) x^{\alpha}$$

$$= \sum_{|\gamma|=k+2} c_{\gamma}(x) x^{\gamma}.$$

2) Seja $g(x) = f(x) - j^k f(x)$. Temos $j^k g(x) \equiv 0$, logo por 1) temos $g(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} a_{\alpha}(x) x^{\alpha}$ e portanto

$$f(x) = j^k f(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} a_{\alpha}(x) x^{\alpha}.$$

Notação:

1) O ideal gerado por $p_1, \dots, p_k \in \mathfrak{Z}_n$, conjunto das combinações lineares $a_1 p_1 + \dots + a_k p_k$ com $a_i \in \mathfrak{Z}_n$, será denotado por $\langle p_1, \dots, p_k \rangle$ ou $\mathfrak{Z}_n \langle p_1, \dots, p_k \rangle$.

2) As funções coordenadas (e seus germes), que levam um ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ em sua i -ésima coordenada, serão denotadas por x_i , isto é, $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $x \mapsto x_i(x) = x_i$.

Proposição 1.3:

$$\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Prova:

$\mathcal{M} \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ pois se $f(0) = 0$ então por 1.1 temos $f(x) = a_1(x)x_1 + \dots + a_n(x)x_n$ com $a_i \in \mathfrak{Z}_n$ e portanto $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Por outro lado, se $f(x) = a_1(x)x_1 + \dots + a_n(x)x_n$ então $f(0) = 0$ e portanto $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathcal{M}$. ■

Observações:

1) A interseção qualquer de uma família $\{I_{\alpha}\}$ de ideais em $\mathfrak{Z}_n$ é um ideal e é definida por $\cap I_{\alpha} = \{f; f \in I_{\alpha}, \forall \alpha\}$.

2) A soma e o produto de dois ideais I, J são ideais e são definidos por:

$$I+J = \{f+g; f \in I \text{ e } g \in J\}$$

$$I \cdot J = \{f_1 g_1 + \dots + f_m g_m; m \geq 1, f_i \in I, g_i \in J\}$$

Em particular, quando $I = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$ e $J = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$ temos

$$I+J = \langle p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s \rangle$$

$$I \cdot J = \langle p_i q_j; i=1, \dots, r, j=1, \dots, s \rangle$$

Como $\mathcal{M} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ a k -ésima potência do ideal $\mathcal{M}$ é dada por $\mathcal{M}^k = \langle x^\alpha; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| = k \rangle$.

Proposição 1.4:

$$\mathcal{M}_n^k = \left\{ f \in \mathcal{E}_n; \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(0) = 0 \text{ para } |\alpha| \leq k-1 \right\}.$$

Prova:

Chamemos o conjunto à direita da igualdade acima de $\mathcal{F}_k$.

1) Mostremos que $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{M}^k$:

Seja $f \in \mathcal{F}_k$. Pela definição de $\mathcal{F}_k$ temos $j^{k-1}f(0) = 0$, logo usando o item 1) da prova de 1.2 temos que $f(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)x^\alpha$ e portanto $f \in \mathcal{M}^k$.

2) Mostremos que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{F}_k$:

Seja $f \in \mathcal{M}^k$. Como $\mathcal{M}^k = \langle x^\alpha; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| = k \rangle$ temos $f = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)x^\alpha$. Calculando as derivadas parciais de f até ordem $k-1$ e avaliando na origem, temos que todas elas se anulam neste ponto, isto é, $f \in \mathcal{F}_k$. ■

Definição:

Seja I um ideal em $\mathcal{O}_n$. Dois germes f, g são iguais módulo I , $f \equiv g \pmod{I}$, se $f - g \in I$.

Podemos então com esta notação reformular o Teorema de Taylor como

$$f \equiv j^k f \pmod{\mathcal{M}^{k+1}}.$$

Proposição 1.5:

Seja $I = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$ ideal em $\mathcal{O}_n$ e suponha que $p_r = a_1 p_1 + \dots + a_{r-1} p_{r-1}$ para alguns germes $a_i \in \mathcal{O}_n$. Então $I = \langle p_1, \dots, p_{r-1} \rangle$.

Prova:

Seja $f \in \langle p_1, \dots, p_r \rangle$. Então

$$\begin{aligned} f &= b_1 p_1 + \dots + b_r p_r \\ &= b_1 p_1 + \dots + b_{r-1} p_{r-1} + b_r (a_1 p_1 + \dots + a_{r-1} p_{r-1}) \\ &= (b_1 + b_r a_1) p_1 + \dots + (b_{r-1} + b_r a_{r-1}) p_{r-1} \in \langle p_1, \dots, p_{r-1} \rangle, \end{aligned}$$

mostrando que $\langle p_1, \dots, p_r \rangle \subset \langle p_1, \dots, p_{r-1} \rangle$.

A inclusão inversa é óbvia. ■

Proposição 1.6:

Sejam $I = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$ ideal em $\mathcal{O}_n$ e $q_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} p_j$, onde $i=1, \dots, r$ e $a_{ij} \in \mathcal{O}_n$. Se a matriz $(a_{ij}(0))_{r \times r}$ é inversível, então $I = \langle q_1, \dots, q_r \rangle$.

Prova:

$\langle q_1, \dots, q_r \rangle \subset I$ pois $q_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} p_j$, $p_j \in I$ e I é ideal.

Para a inclusão inversa bastará invertermos a relação $q_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} p_j$. Seja $A(x) = (a_{ij}(x))$. A matriz inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$, onde $\text{adj}(A)$ é a matriz adjunta de A . Por hipótese $\det(A) \neq 0$, e por continuidade $\det A(x)$ é não nulo em alguma vizinhança da origem. Assim segue que as entradas de $A^{-1}(x)$ estão em $\mathfrak{X}_n$. Assim $p_i = \sum_{j=1}^r b_{ij} q_j$ onde $b_{ij} \in \mathfrak{X}_n$ é a entrada ij de $A^{-1}(x)$. ■

Observação:

Em particular, $\langle a_1 p_1, \dots, a_r p_r \rangle = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$ se os $a_i \in \mathfrak{X}_n$ são inversíveis.

Lema 1.7 (Nakayama):

Sejam I, J ideais em $\mathfrak{X}_n$ com $I = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$ (isto é, I finitamente gerado). Então: $I \subset J \Leftrightarrow I \subset J + \mathcal{M}I$.

Prova:

($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Como $I \subset J + \mathcal{M}I$ temos, para cada i , $p_i = f_i + \sum_{j=1}^r a_{ij} p_j$, onde $f_i \in J$ e $a_{ij} \in \mathcal{M}$. Em notação matricial

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (1-A) \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix},$$

onde $A = (a_{ij})_{r \times r}$ e 1 é a matriz identidade $r \times r$. Mas $(1-A)(0) = 1$ e portanto $(1-A)$ é inversível em alguma vizinhança da origem. Assim

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix} = (1-A)^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix} = (b_{ij}) \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix},$$

com $b_{ij} \in \mathbb{Z}_n$, isto é, $p_i = \sum_{j=1}^r b_{ij} f_j$ e portanto $I \subset J$. ■

Corolário 1.8:

Sejam $I = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$ e $J = \langle p_1 + q_1, \dots, p_r + q_r \rangle$ ideais em $\mathbb{Z}_n$ com $q_1, \dots, q_r \in \mathcal{M}.I$. Então $I = J$.

Prova:

$J \subset I$ pois $p_i \in I$ e $q_i \in \mathcal{M}.I \subset I$.

Por outro lado, $p_i = (p_i + q_i) - q_i \in J + \mathcal{M}.I$, isto é, $I \subset J + \mathcal{M}.I$. Por 1.7 (Nakayama) obtemos $I \subset J$. ■

Notação:

Denotamos um subespaço vetorial real de $\mathbb{Z}_n$, gerado por germes $p_1, \dots, p_r$, por $\mathbb{R}\langle p_1, \dots, p_r \rangle$.

Proposição 1.9:

$\mathcal{M}\langle p_1, \dots, p_r \rangle + \mathbb{R}\langle p_1, \dots, p_r \rangle = \langle p_1, \dots, p_r \rangle$, onde

$p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Z}_n$.

Prova:

Por simplicidade escreveremos $\mathcal{M}\langle p_i \rangle + \mathbb{R}\langle p_i \rangle = \langle p_i \rangle$.

Assim

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}\langle p_i \rangle + \mathbb{R}\langle p_i \rangle &\Leftrightarrow f = a_i p_i + b_i p_i, \quad a_i \in \mathcal{M}, \quad b_i \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f = (a_i + b_i) p_i, \quad a_i \in \mathcal{M}, \quad b_i \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f = c_i p_i, \quad c_i \in \mathbb{Z}_n \\ &\Leftrightarrow f \in \langle p_i \rangle. \end{aligned}$$

Observação:

Os resultados 1.5, 1.6, 1.8 e 1.9 serão utilizados na simplificação de geradores de ideais em cálculos dos capítulos seguintes.

Definição:

Um subespaço vetorial $I \in \mathfrak{X}_n$ tem *codimensão finita* se existe um subespaço vetorial de dimensão finita $V \subset \mathfrak{X}_n$ tal que $I + V = \mathfrak{X}_n$. Caso contrário I tem *codimensão infinita*.

Denotaremos que I tem codimensão finita por $\text{cod } I < \infty$.

Observação:

Todo ideal $I \subset \mathfrak{X}_n$ é também um subespaço vetorial em $\mathfrak{X}_n$; basta tomar germes de função constante na operação produto do anel para obtermos a operação produto por escalar do espaço vetorial. Podemos portanto falar em codimensão finita de ideais de $\mathfrak{X}_n$.

Definição:

Seja $I \subset \mathfrak{X}_n$ um subespaço vetorial de codimensão finita. A *codimensão* de I , $\text{cod } I$, é a dimensão de qualquer subespaço $V \subset \mathfrak{X}_n$ tal que $\mathfrak{X}_n = I \oplus V$ (Soma direta de I e V).

Lema 1.10:

$\mathcal{M}^k$ tem codimensão finita.

Prova:

Para todo $f \in \mathfrak{X}_n$ temos $f = (f - j^{k-1}f) + j^{k-1}f$ onde $(f - j^{k-1}f) \in \mathcal{M}^k$.

Denotando por $\mathbb{R}\langle x^\alpha; |\alpha| < k, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle$ o espaço

vetorial real (de dimensão finita) gerado pelos monômios de grau $\leq k$ temos $\mathcal{Z}_n = \mathcal{M}^k \oplus \mathbb{R}\langle x^\alpha; |\alpha| \leq k \rangle$.

Em particular, $\text{cod } \mathcal{M} = 1$ pois $\mathcal{Z}_n = \mathcal{M} \oplus \mathbb{R}\langle 1 \rangle$. ■

O lema seguinte generaliza um resultado de Álgebra Linear válido para espaços vetoriais de dimensão finita.

Lema 1.11:

Se I e J são subespaços de $\mathcal{Z}_n$ com mesma codimensão finita e $I \subset J$ então $I = J$.

Prova:

Como $\text{cod } I = \text{cod } J$ existem subespaços V e W , com mesma dimensão, tal que $I \oplus V = J \oplus W = \mathcal{Z}_n$.

Como $I \subset J$ temos $J = I \oplus K$ para algum subespaço K .

Segue então que $I \oplus V = I \oplus K \oplus W = \mathcal{Z}_n$ e disto como $\dim V$ é finita temos $\dim V = \dim(K+W) = \dim K + \dim W$, mostrando que $\dim K = 0$, isto é, $K = \{0\}$. ■

Proposição 1.12:

Seja $I \subset \mathcal{Z}_n$ um ideal. Então:

$\text{Cod } I$ é finita $\Leftrightarrow$ existe um inteiro k tal que $\mathcal{M}^k \subset I$.

Prova:

($\Leftarrow$) Como $\mathcal{M}^k \subset I$ temos $\text{cod } I \leq \text{cod } \mathcal{M}^k < \infty$ pois

$$\mathcal{Z}_n = \mathcal{M}^k \oplus V = I + V = I \oplus W$$

para algum V, W com $W \subset V$ (e portanto $\dim W \leq \dim V < \infty$).

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\text{cod } I = l - 1$ e consideremos as inclusões

$$I \subset I + \mathcal{M}^1 \subset I + \mathcal{M}^{l-1} \subset \dots \subset I + \mathcal{M}^2 \subset I + \mathcal{M} \subset \mathcal{Z}_n$$

Em termos de codimensão temos

$$0 \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}) \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}^2) \leq \dots \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}^l) \leq \text{cod } I = l - 1$$

Como existem nesta expressão mais desigualdades do que números inteiros deve ocorrer pelo menos uma igualdade. Assim existe um número $k \geq 1$ tal que $\text{cod}(I+\mathcal{M}^k) = \text{cod}(I+\mathcal{M}^{k+1})$.

Mas $I+\mathcal{M}^{k+1} \subset I+\mathcal{M}^k$, logo por 1.11 $I+\mathcal{M}^k = I+\mathcal{M}^{k+1}$. Em particular $\mathcal{M}^k \subset I+\mathcal{M}^k \subset I+\mathcal{M}^{k+1}$. Assim por 1.7 (Nakayama) segue que $\mathcal{M}^k \subset I$. ■

Proposição 1.13:

Se $I = \langle p \rangle$ é ideal em $\mathbb{Z}_n$ com $n \geq 2$ e $p(0) = 0$ então $\text{cod } I$ é infinita.

Prova:

Suporemos que $\text{cod } I < \infty$ e chegaremos a uma contradição.

Supondo $\text{cod } I < \infty$, por 1.12 existe k tal que $\mathcal{M}^k \subset I = \langle p \rangle$. Disto, escrevendo $p = j^k p + r$, temos $r \in \mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{M} \cdot I$. Assim, por 1.8, temos $\langle j^k p + r \rangle = \langle j^k p \rangle$ e portanto podemos supor que p é um polinômio de grau $\leq k$.

Como p é um polinômio sobre $\mathbb{R}^n$ podemos estender p a um polinômio sobre $\mathbb{C}^n$ onde também $p(0) = 0$.

Observamos que em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, o conjunto dos zeros de um polinômio, $\{x \in \mathbb{C}^n; p(x) = 0\}$, nunca é um ponto isolado.

Por outro lado, como $\mathcal{M}^k \subset \langle p \rangle$, qualquer polinômio q de grau k pode ser fatorado como $q = ap$ para algum $a \in \mathbb{Z}_n$, onde a é um polinômio de grau $\leq k$.

A fatoração $q = ap$ acontece também sobre os números complexos e portanto qualquer tal monômio q zera sobre $\{x \in \mathbb{C}^n; p(x) = 0\}$.

Mas isto é uma contradição pois em $\mathbb{C}^n$ o conjunto dos zeros simultâneos de todos os monômios de grau k é apenas a origem, um ponto isolado. ■

Definição:

Seja $I \subset \mathbb{Z}_n$ ideal de codimensão finita. Chamamos espaço (vetorial) *normal* a I o subespaço vetorial (de dimensão finita) $I^\perp$ gerado pelos monômios que não pertencem a I .

Exemplo:

$(\mathcal{M}^k)^\perp = \mathbb{R}\langle x^\alpha; |\alpha| < k \rangle$ espaço vetorial dos polinômios de grau $< k$.

Proposição 1.14:

Seja $I \subset \mathbb{Z}_n$ ideal de codimensão finita. Então $I + I^\perp = \mathbb{Z}_n$.

Prova:

Como $\text{cod } I < \infty$ temos por 1.12 que existe k tal que $\mathcal{M}^{k+1} \subset I$.

Seja $f \in \mathbb{Z}_n$. Por 1.2 (Taylor) $f = j^k f + r$ onde $r \in \mathcal{M}^{k+1} \subset I$.

Como um monômio de grau $\leq k$ pertence a I ou a $I^\perp$ podemos escrever $j^k f = f_1 + f_2$ onde $f_1 \in I^\perp$ e $f_2 \in I$.

Assim $f = [f_1 + (f_2 + r)] \in I^\perp + I$ e portanto $\mathbb{Z}_n \subset I + I^\perp$.

A inclusão inversa é óbvia. ■

Observação:

Em geral $I \cap I^\perp \neq \{0\}$.

De fato, considerando, por exemplo, em $\mathbb{Z}_2$ o ideal $I = \langle x^2 + \lambda^2, x\lambda \rangle$ temos:

$$I^\perp = \mathbb{R}\langle 1, x, \lambda, x^2, \lambda^2 \rangle \quad \text{e} \quad I \cap I^\perp = \mathbb{R}\langle x^2 + \lambda^2 \rangle.$$

CAPÍTULO II - SINGULARIDADES E BIFURCAÇÃO

§1 - O PROBLEMA DE BIFURCAÇÃO

No capítulo anterior consideramos aplicações $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dependendo de variáveis $x = (x_1, \dots, x_n)$. Neste capítulo estaremos considerando aplicações dependendo de variáveis $x = (x_1, \dots, x_n)$ e parâmetros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Começamos apresentando as idéias no caso mais simples ($n=r=p=1$) para em seguida definir o caso mais geral.

A teoria de bifurcação estuda equações com soluções múltiplas. Por uma bifurcação queremos dizer uma mudança no número de soluções de uma equação quando um parâmetro varia.

Mais especificamente, consideremos uma equação $g(x, \lambda) = 0$ com uma incógnita x , chamada *variável padrão*, e um parâmetro auxiliar λ , chamado *parâmetro de bifurcação*. Uma solução de g é um par (x_0, λ_0) tal que $g(x_0, \lambda_0) = 0$.

Chamamos o conjunto

$$S = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2; g(x, \lambda) = 0\} = g^{-1}(0)$$

de *diagrama de bifurcação*, ou *conjunto solução* de g .

Para "contar" soluções, seja, para cada λ , $n(\lambda)$ o número de x 's para o qual (x, λ) é uma solução de $g(x, \lambda) = 0$.

Nestes termos dizemos que um ponto $(x_0, \lambda_0) \in S$ é um *ponto de bifurcação* se $n(\lambda)$ muda quando λ varia em uma vizinhança de λ_0 , isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existe λ no intervalo $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ tal que $n(\lambda) \neq n(\lambda_0)$.

Uma idéia geométrica disto pode ser vista no exemplo abaixo de um diagrama de bifurcação:

Ao esboçar um diagrama de bifurcação costuma-se colocar o parâmetro no eixo das abscissas para facilitar a visualização da bifurcação.

Estaremos preocupados em estudar problemas de bifurcação local, assim suporemos g definida em alguma vizinhança de um ponto (x_0, λ_0) . Suporemos também, como já dissemos, g infinitamente diferenciável (C^∞).

Nem sempre existem pontos de bifurcação para uma equação $g(x, \lambda) = 0$. Veja, por exemplo, $g(x, \lambda) = x - f(\lambda) = 0$, onde f depende apenas de λ .

Pelo Teorema da Função Implícita se $g_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$ então

em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 temos que $g(x, \lambda) = 0$ pode ser resolvido em função de λ . Assim se (x_0, λ_0) é um ponto de bifurcação devemos ter $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$.

Um ponto (x_0, λ_0) tal que $g(x_0, \lambda_0) = 0$ e $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$ é chamado uma *singularidade* de g .

Pontos de bifurcação de uma equação $g(x_0, \lambda_0) = 0$ são pontos singulares de g , começando aqui a ligação entre Teoria de Bifurcação e Teoria de Singularidades.

Observamos que nem todo ponto singular é ponto de bifurcação, veja por exemplo $g(x, \lambda) = x^3 - \lambda$ que tem $(0, 0)$ como ponto singular mas não é ponto de bifurcação.

Passemos agora às definições no caso geral.

Sejam X, Λ, Y subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p$ respectivamente, $g: X \times \Lambda \longrightarrow Y$ uma aplicação C^0 e consideremos a equação

$$g(x, \lambda) = 0, \quad (*)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Uma *solução* para $(*)$ é um ponto $(x, \lambda) \in X \times \Lambda$ que a satisfaz.

Denotamos o conjunto das soluções de $(*)$ por

$$S = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda; g(x, \lambda) = 0\}$$

Fixando λ em Λ podemos considerar também

$$S_\lambda = \{x \in X; g(x, \lambda) = 0\}$$

O problema básico é discutir a variação do tipo topológico do conjunto S_λ quando λ varia. Para isto definiremos uma relação de equivalência, $\sim$, no conjunto das soluções S de g , para em seguida tornar preciso os conceitos de ponto de bifurcação e de problema de bifurcação neste caso mais geral.

Definição:

Seja U um subconjunto aberto de X . Dizemos que S_λ é equivalente a S_μ , $S_\lambda \sim S_\mu$, em U se $S_\lambda \cap U$ é homeomorfo a $S_\mu \cap U$.

Definição:

Dizemos que $\lambda_0 \in \Lambda$ é um ponto de bifurcação de $(*)$ se, para qualquer vizinhança V de λ_0 , existem um $x_0 \in S_{\lambda_0}$, uma vizinhança U de x_0 e λ_1, λ_2 em V tal que $S_{\lambda_1} \neq S_{\lambda_2}$ em U .

Em particular, um ponto λ_0 é ponto de bifurcação se $S_{\lambda_0} \neq \emptyset$ e existe $x_0 \in S_{\lambda_0}$ tal que, para toda vizinhança W de (x_0, λ_0) existem duas soluções distintas $(x_1, \lambda), (x_2, \lambda) \in W$, isto é, existem $\lambda \in \Lambda$, $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, tais que $(x_1, \lambda), (x_2, \lambda) \in W$ e $(x_1, \lambda), (x_2, \lambda)$ satisfazem $g(x, \lambda) = 0$.

$$S_{\lambda_0} = \{x_0\}$$

$$S_\lambda = \{x_1, x_2\}$$

O ponto " (x_0, λ_0) " da definição acima também é chamado de ponto de bifurcação de g .

Os diagramas abaixo ilustram a idéia geométrica de ponto de bifurcação em casos mais gerais.

Observe que a definição de ponto de bifurcação feita no caso geral engloba o caso particular, introduzido antes, de uma variável e um parâmetro pois conjuntos finitos com número diferente de elementos não são homeomorfos.

Baseando-se nas considerações feitas anteriormente, poderemos definir um problema de bifurcação. Como o estudo que pretendemos fazer é local usaremos germes e consideraremos $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$.

Definição:

Seja $g: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ um germe. Chamamos $g(x, \lambda)$ de problema de bifurcação se $g(0, 0) = 0$ e $d_x g(0, 0) = 0$, onde $d_x g$ é a matriz Jacobiana $p \times n$ obtida da diferenciação de g na direção de x .

Geometricamente, dois problemas de bifurcação são equivalentes se seus diagramas de bifurcação são localmente homeomorfos em uma vizinhança da origem, por homeomorfismos que preservam orientação.

Um ponto singular de uma aplicação diferenciável $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ onde o germe de g é singular.

Ao tratarmos pontos singulares de aplicações diferenciáveis dependendo de parâmetros, $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^p$, consideramos apenas a parte que depende apenas de x , isto é, dizemos que (x_0, λ_0) é ponto singular de g se $g(x_0, \lambda_0) = 0$ e o germe $g(x, \lambda_0)$ é singular.

Observe que o conjunto $\langle f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^p \rangle$, com $p > 1$, não tem estrutura de anel pois não temos a operação produto de dois de seus elementos como no caso $p = 1$, mas podemos dotar este conjunto com uma estrutura de $\mathcal{E}_{n+r}$ -módulo.

O estudo de problemas de bifurcação no caso geral é complicado. Neste trabalho nos preocupamos com o caso mais simples quando $p = 1$, isto é, $g: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$. Dentro deste caso enfocaremos o caso particular de apenas um parâmetro, $r = 1$, que é a situação que engloba a maior parte dos casos mais interessantes. Estudaremos com mais detalhes ainda o caso $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Denotamos o anel dos germes de funções a n variáveis e r parâmetros por:

$$\mathcal{E}_{n+r} = \langle f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \rangle$$

O caso $\mathcal{E}_{1+1}$ é denotado também por $\mathcal{E}_2$ por simplicidade.

Analogamente denotamos $\mathcal{M}_{n+r}$, $\mathcal{R}_{n+r}$.

Um caso particular a ser considerado é quando temos um parâmetro t separado, isto é, $g(x, \lambda, t)$. Neste caso o anel de tais germes é denotado por $\mathcal{E}_{x, \lambda, t}$.

§2- EQUIVALÊNCIAS

No caso particular de um parâmetro, dentro do estudo de problemas de bifurcação, $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$, queremos considerar como "iguais" dois germes $f, g \in \mathfrak{X}_{n+1}$ que satisfazem a seguinte (entre outras) propriedade: os conjuntos soluções das equações de bifurcação $f(x, \lambda) = 0$ e $g(x, \lambda) = 0$ são difeomorfos no ponto $\lambda = 0$, difeomorfos em cada ponto de um intervalo $(-\varepsilon, 0)$ e difeomorfos em cada ponto de um intervalo $(0, \varepsilon)$, nesta ordem, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Isto pode ser feito definindo em $\mathfrak{X}_{n+1}$ uma relação de equivalência que preserve esta propriedade e considerando os representantes das classes de equivalência desta relação. Começamos definindo uma relação de equivalência no caso mais geral, $\mathfrak{X}_{n+r}$.

Definição:

Dois germes $f, g \in \mathfrak{X}_{n+r}$ são *equivalentes*, $f \sim g$, se existem germes $S \in \mathfrak{X}_{n+r}$ e $\phi \in \mathcal{R}_{n+r}$ tais que $f(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(\phi(x, \lambda))$, onde $\phi(x, \lambda) = (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$, $S(x, \lambda) > 0$, $\det X_x(0, 0) > 0$ e $\det \Lambda_\lambda(0) > 0$. O germe de difeomorfismo ϕ é chamado *mudança*

de coordenadas para bifurcação. O par (S, ϕ) é chamado equivalência e denotado por $\gamma = (S, \phi)$ ou $\gamma = (S, X, \Lambda)$.

Podemos considerar uma equivalência $\gamma = (S, \phi)$ como uma transformação $\gamma: \mathbb{R}_{n+r} \longrightarrow \mathbb{R}_{n+r}$ definida por $h \longrightarrow \gamma(h) = S(h \cdot \phi)$.

O conjunto das equivalências $\gamma = (S, \phi)$ será denotado por $\mathcal{B}$ (de bifurcação), isto é,

$$\mathcal{B} = \{(S, \phi); S \in \mathbb{R}_{n+r}, S(x, \lambda) > 0 \text{ e } \phi \text{ é mudança de coordenadas para bifurcação}\}.$$

O produto de duas equivalências $\gamma_1 = (S_1, \phi_1)$ e $\gamma_2 = (S_2, \phi_2)$ pode ser definido como

$$\gamma_1 \times \gamma_2 = (S_1, \phi_1) \times (S_2, \phi_2) = (S_1(S_2 \circ \phi_1), \phi_2 \circ \phi_1)$$

O conjunto $\mathcal{B}$ com esta operação é um grupo e é chamado grupo de bifurcação.

Notação:

X_x denota a derivada (matriz jacobiana) de X na direção x

X_λ denota a derivada de X na direção λ

Λ_λ denota a derivada (matriz jacobiana) de Λ

$$X(x, \lambda) = (X^1(x, \lambda), \dots, X^n(x, \lambda))$$

$$\Lambda(\lambda) = (\Lambda^1(\lambda), \dots, \Lambda^r(\lambda))$$

Denotaremos a matriz Jacobiana $(n+r) \times (n+r)$ de ϕ por

$$J\phi = \begin{bmatrix} X_x & X_\lambda \\ 0 & \Lambda_\lambda \end{bmatrix}$$

Observações:

1) A componente X de ϕ depende de x e λ , enquanto a componente Λ depende apenas de λ . Isto pode ser interpretado

na prática como: os parâmetros influenciam nas variáveis mas as variáveis não influenciam nos parâmetros.

2) As condições $\det X_x(0,0) > 0$ e $\det \Lambda_\lambda(0) > 0$ são para preservar a orientação pois

$$\det J\phi(0,0) = \det \begin{bmatrix} X_x(0) & X_\lambda(0) \\ 0 & \Lambda_\lambda(0) \end{bmatrix} = (\det X_x(0))(\det \Lambda_\lambda(0)) > 0$$

3) A condição $S(0,0) > 0$ faz com que $g \sim cg \forall c > 0$. Basta tomar $S(x,\lambda) = c$ e ϕ como a identidade. Por outro lado, em geral $g \not\sim -g$.

Para verificarmos que dois germes equivalentes em $\mathcal{E}_{n+1}$ têm a propriedade requerida na introdução acima precisamos de algumas notações.

Sejam $g \in \mathcal{E}_{n+1}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$ e considere $U = A \times B$ uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Denotamos o conjunto solução de g em U por

$$S(g,U) = \{(x,\lambda) \in U; g(x,\lambda) = 0\} = g^{-1}(0) \cap U.$$

Para um λ_0 pertencente a B fixado denotemos

$$S_{\lambda_0}(g,U) = \{x \in A; g(x,\lambda_0) = 0\}.$$

Proposição 2.2.1:

Se f e g pertencentes a $\mathcal{E}_{n+1}$ são equivalentes, $f = S(g \circ \phi) = Sg(X,\Lambda)$, então $S_\lambda(g,U)$ e $S_{\Lambda(\lambda)}(f,\phi(U))$ são difeomorfos em alguma vizinhança de $(0,0)$.

Prova:

Como $S(0,0) > 0$ existe uma vizinhança $U = A \times B$ de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $S(x,\lambda) > 0$ para todo $(x,\lambda) \in U$.

Considerando $(x, \lambda) \in U$ temos

$$f(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow (g \circ \phi)(x, \lambda) = 0.$$

Isto é o mesmo que dizer que $S(g, U)$ e $S(f, \phi(U))$ são difeomorfos pois ϕ é difeomorfismo. Como a restrição de difeomorfismo é difeomorfismo, para cada λ fixado em U temos o resultado.

Observe, em particular, que temos uma bijeção entre $S_\lambda(g, U)$ e $S_{\Lambda(\lambda)}(f, \phi(U))$ e que no caso destes conjuntos serem finitos temos f e g com o mesmo número de soluções. ■

Observação:

A proposição 2.2.1 é falsa se considerarmos Λ dependente de x . Consideremos em $\mathbb{R}_2$, por exemplo, $g(x, \lambda) = x^2 - \lambda^2$ e $\phi(x, \lambda) = (X(x, \lambda), \Lambda(x, \lambda)) = (x - \lambda, \lambda + x)$.

Temos

$$f(x, \lambda) = (g \circ \phi)(x, \lambda) = (x - \lambda)^2 + (x + \lambda)^2 = -4x\lambda$$

Pelos diagramas de bifurcação abaixo, apesar de $g^{-1}(0)$ ser isomorfo a $f^{-1}(0)$, os problemas de bifurcação não são equivalentes pois a variação do número de soluções no primeiro caso é 2, 1, 2 enquanto no segundo caso é 1, ∞ e 1.

$$g(x, \lambda) = 0$$

$$f(x, \lambda) = 0$$

Trabalharemos inicialmente com um caso especial de equivalência.

Definição:

Dois germes f, g em $\mathcal{Z}_{n+r}$ são *fortemente equivalentes*, $f \sim_f g$, se eles são equivalentes, $f = Sg(X, \Lambda)$, com $\Lambda(\lambda) = \lambda$.

Esta equivalência será também chamada $\mathcal{F}$ -equivalência e a equivalência mais geral chamada de $\mathcal{B}$ -equivalência para diferenciá-las.

O conjunto das equivalências fortes é denotado por

$$\mathcal{F} = \{(S, X, \Lambda) \in \mathcal{B}; \Lambda(\lambda) = \lambda\}$$

e é um subgrupo de $\mathcal{B}$.

Utilizaremos um caso mais especial ainda de equivalências.

Definição:

Uma J -equivalência em $\mathcal{Z}_{n+r}$ é uma equivalência forte $\gamma = (S, X, \lambda)$ em que $S(0,0) = 1$ e $X_x(0,0) = 1$.

O conjunto das J -equivalências é denotado por

$$J = \{(S, X, \lambda) \in \mathcal{F}; S(0,0)=1 \text{ e } X_x(0,0)=1\}$$

e é um subgrupo de $\mathcal{F}$.

§3- O ESPAÇO TANGENTE RESTRITO

Nesta seção estudamos o espaço tangente restrito de germes em $\mathcal{E}_{n+r}$. Com esta noção definimos codimensão de germes e tratamos da determinação finita destes.

Definição:

Espaço tangente restrito de um germe $g \in \mathcal{E}_{n+r}$:

$$RT(g) = \{ag + b^1_{x_1}g_{x_1} + \dots + b^n_{x_n}g_{x_n} ; a \in \mathcal{E}_{n+r}, b^i \in \mathcal{M}_{n+r}, i=1, \dots, n\}.$$

A justificativa para o nome "espaço tangente" para o conjunto acima será dada mais adiante. O termo restrito está relacionado com a equivalência forte.

Podemos encontrar outra caracterização de $RT(g)$.

Proposição 2.3.1:

$$RT(g) = \left\{ ag + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b^{ij}_{x_i} g_{x_j} + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n c^{kj}_{\lambda_k} g_{x_j} ; a, b^{ij}, c^{kj} \in \mathcal{E}_{n+r} \right\}.$$

Prova:

Chamemos de $F(g)$ o termo entre chaves acima. Se $h \in F(g)$

temos

$$h = ag + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b^{ij} x_i + \sum_{k=1}^r c^{kj} \lambda_k \right) g_{x_j} = ag + \sum_{j=1}^n b^j g_{x_j} \in RT(g),$$

onde b^j é o termo entre parênteses. Isto mostra que $F(g) \subset RT(g)$.

Para a inclusão contrária, tomando $h = ag + \sum_{j=1}^n b^j g_{x_j} \in RT(g)$, basta usar 1.2 (Hadamard) em cada b^j e depois reagrupar os termos. ■

Observemos, portanto, que $RT(g)$ é um ideal de $\mathcal{X}_{n+r}$ e assim será denotado simplesmente por

$$RT(g) = \langle g, x_i g_{x_j}, \lambda_k g_{x_j}; 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq r \rangle, \quad \text{ou}$$

$$RT(g) = \langle g, x_i g_{x_j}, \lambda_k g_{x_j} \rangle,$$

quando não houver dúvida quanto à variação dos índices.

Vejamos agora alguns exemplos de cálculo de $RT(g)$:

Exemplo 1:

$$h \in \mathcal{X}_{1+1} \quad \text{dado por} \quad h(x, \lambda) = x^3 - x\lambda.$$

$$\begin{aligned} RT(h) &= \langle h, x h_x, \lambda h_x \rangle = \langle x^3 - x\lambda, 3x^3 - x\lambda, 3x^2\lambda - \lambda^2 \rangle = \langle x^3, x\lambda, \lambda^2 \rangle \\ &= \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \langle \lambda \rangle \end{aligned}$$

Na terceira igualdade usamos 1.6 pois

$$\begin{aligned} x^3 - x\lambda &= 1x^3 + 1x\lambda + 0\lambda^2 \\ 3x^3 - x\lambda &= 1x^3 + 1x\lambda + 0\lambda^2 \\ 3x^2\lambda - \lambda^2 &= 0x^3 - (3x)x\lambda - 1\lambda^2 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3x & -1 \end{bmatrix} \quad \text{é inversível.}$$

Exemplo 2:

$h \in \mathcal{H}_{2+1}$ dado por $h(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda$.

$$\begin{aligned} RT(h) &= \langle h, x_1 h_1, x_2 h_1, \lambda h_1, x_1 h_2, x_2 h_2, \lambda h_2 \rangle \\ &= \langle x_1^2 + x_2^2 + \lambda, 2x_1^2, 2x_2^2, 2x_1 x_2, 2x_1 \lambda, 2x_2 \lambda \rangle \\ &= \langle x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, \lambda \rangle = \mathcal{M}^2 + \langle \lambda \rangle. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade usamos 1.6.

Exemplo 3:

$h \in \mathcal{H}_{1+2}$ dado por $h(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + \lambda_1 + \lambda_2$

$$\begin{aligned} RT(h) &= \langle h, x h_x, \lambda_1 h_{\lambda_1}, \lambda_2 h_{\lambda_2} \rangle = \langle x^2 + \lambda_1 + \lambda_2, 2x^2, 2x\lambda_1, 2x\lambda_2 \rangle \\ &= \langle x^2, x\lambda_1, x\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 \rangle. \end{aligned}$$

Exemplo 4:

$h \in \mathcal{H}_{2+2}$ dado por $h(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 + \lambda_2$

$$\begin{aligned} RT(h) &= \langle h, x_1 h_1, x_2 h_1, \lambda_1 h_1, \lambda_2 h_1, x_1 h_2, x_2 h_2, \lambda_1 h_2, \lambda_2 h_2 \rangle \\ &= \langle x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 + \lambda_2, x_1^2, x_1 x_2, x_1 \lambda_1, x_1 \lambda_2, x_1 x_2, x_2^2, x_2 \lambda_1, x_2 \lambda_2 \rangle \\ &= \langle \lambda_1 + \lambda_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_1 \lambda_1, x_2 \lambda_1, x_1 \lambda_2, x_2 \lambda_2 \rangle. \end{aligned}$$

Definição:

Sejam $g, p \in \mathcal{H}_{n+r}$. Dizemos que $g+tp$ é fortemente equivalente a g para todo t , $(g+tp) \sim_f g \quad \forall t$, se existem $S \in \mathcal{H}_{x,\lambda,t}$ e $(X, \lambda, t) \in \mathcal{R}_{x,\lambda,t}$ tal que

$$g(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \lambda)$$

com $S(0, 0, t) > 0$, $\det X_x(0, 0, t) > 0$, $X(0, 0, t) \equiv 0$,
 $S(x, \lambda, 0) \equiv 1$ e $X(x, \lambda, 0) \equiv x$.

Observações:

- 1) S e X dependem diferenciavelmente de x, λ e t .
- 2) Devemos ter $S(x, \lambda, 0) \equiv 1$ e $X(x, \lambda, 0) \equiv x$ para valer a igualdade na definição quando $t = 0$.
- 3) O difeomorfismo (X, λ) deve preservar a origem para todo t , logo devemos ter $X(0, 0, t) = 0$.
- 4) O germe p em $g + tp$, $t \in \mathbb{R}$, é dito uma perturbação de g .

A proposição seguinte motivou a definição de espaço tangente. Ela resolve parcialmente a seguinte questão: Dado $g \in \mathcal{Z}_{n+r}$, para quais perturbações p temos $(g+tp) \sim_f g \ \forall t$ pequeno?

Proposição 2.3.2:

Sejam $g, p \in \mathcal{Z}_{n+r}$. Se $(g+tp) \sim_f g \ \forall t$ pequeno, então $p \in RT(g)$.

Prova:

Pela definição temos

$$g(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \lambda),$$

com $X(x, \lambda, 0) \equiv x$, $S(x, \lambda, 0) \equiv 1$ e $X(0, 0, t) \equiv 0$.

Derivando esta expressão em relação a t e fazendo $t = 0$

$$\begin{aligned} p(x, \lambda) &= \left[S_t(x, \lambda, t) g(X(x, \lambda, t), \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + S(x, \lambda, t) \left(\sum_{i=1}^n g_{x_i}(X(x, \lambda, t), \lambda) X_t^i(x, \lambda, t) \right) \right] \Big|_{t=0} \\ &= S_t(x, \lambda, 0) g(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n X_t^i(x, \lambda, 0) g_{x_i}(x, \lambda). \end{aligned}$$

Denotando $S_t(x, \lambda, 0) = a(x, \lambda)$ e $X_t^i(x, \lambda, 0) = b^i(x, \lambda)$ obtemos

$$p(x, \lambda) = a(x, \lambda)g(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n b^i(x, \lambda)g_{x_i}(x, \lambda)$$

Como $X(0,0,t) = 0$ temos $X_t^i(0,0,0) = 0$, isto é, $b^i(0,0) = 0$ e

portanto $p \in RT(g)$. ■

Observe portanto que os germes p procurados na questão acima estão dentro de $RT(g)$.

A condição da proposição anterior não é condição suficiente, isto é, podemos ter $p \in RT(g)$ mas não ser verdade que $(g+tp) \sim_f g$ $\forall t$ pequeno. O exemplo abaixo mostra esta afirmação.

Exemplo:

Consideremos em $\mathcal{X}_{1+1}$ os germes $g(x, \lambda) = x^2$ e $p(x, \lambda) = x\lambda$.

Temos

$$RT(g) = \langle h, xh_x, \lambda h_x \rangle = \langle x^2, 2x^2, 2x\lambda \rangle = \langle x^2, x\lambda \rangle,$$

onde na última igualdade usamos 1.5 e 1.6.

Observe que $p \in RT(g)$. Considerando $t \neq 0$ temos os seguintes diagramas de bifurcação:

$$g = x^2 = 0$$

$$g+tp = x^2 + tx\lambda = 0 \\ (t < 0)$$

$$g+tp = x^2 + tx\lambda = 0 \\ (t > 0)$$

Segue então por 2.2.1 que $(g+tp) \not\sim_f g$ para $t \neq 0$.

Outro resultado, esclarecendo mais ainda a questão da procura das perturbações p tais que $g+tp \sim_f g \forall t$ pequeno, depende da relação entre $RT(g)$ e $RT(g+tp)$. Quando $RT(g) = RT(g+tp) \forall t$ em $[0,1]$ mostraremos que $g+tp \sim_f g \forall t \in [0,1]$. Para isto precisamos antes de dois lemas.

Lema 2.3.3:

Sejam $g, p \in \mathcal{G}_{n+r}$. Se $RT(g) = RT(g+tp) \forall t$ perto de 0, então existem $a, b^1, \dots, b^n \in \mathcal{G}_{x, \lambda, l}$ tal que

$$p = aG + b^1 G_{x_1} + \dots + b^n G_{x_n},$$

onde $G = g + tp$ e $b^l(0,0,t) \equiv 0$.

Prova:

Temos $g+tp \in RT(g) = RT(g+tp)$ logo

$$g+tp = \tilde{a}g + \tilde{b}^1 g_{x_1} + \dots + \tilde{b}^n g_{x_n} \quad \text{com } \tilde{b}^l(0,0) = 0.$$

Assim para cada $t \neq 0$ temos

$$p = \frac{\tilde{a}-1}{t}g + \frac{\tilde{b}^1}{t}g_{x_1} + \dots + \frac{\tilde{b}^n}{t}g_{x_n}$$

e portanto $p \in RT(g) = RT(g+tp) = RT(G)$, isto é,

$$p = aG + b^1 G_{x_1} + \dots + b^n G_{x_n} \quad \text{com } b^l(0,0) = 0.$$

Falta mostrar que $a, b^1, \dots, b^n$ podem ser escolhidos dependendo diferencialmente de t . Para isto fixemos $t_0 \neq 0$ perto de 0.

Como $RT(g) = RT(g+tp)$, $RT(g) = \langle g, x_i g_{x_j}, \lambda_k g_{x_j} \rangle$ e

$$RT(g+t_0 p) = \langle g+t_0 p, x_i g_{x_j} + t_0 x_i p_{x_j}, \lambda_k g_{x_j} + t_0 \lambda_k p_{x_j} \rangle$$

temos que existem germes em $\mathcal{G}_{n+r}$ tal que cada gerador de $RT(g+t_0 p)$ pode ser escrito em função dos geradores de $RT(g)$.

Como o caso geral é complicado em notação, faremos aqui um caso particular para introduzir a notação.

Para o caso $n = p = 1$ temos que existem A^i, B^i, C^i em $\mathbb{Z}_2$, $i=1,2,3$ tal que

$$g + t_0 p = A^1 g + B^1 xg_x + C^1 \lambda g_x$$

$$xg_x + t_0 xp_x = A^2 g + B^2 xg_x + C^2 \lambda g_x$$

$$xg_x + t_0 \lambda p_x = A^3 g + B^3 xg_x + C^3 \lambda g_x$$

Em termos matriciais

$$\begin{bmatrix} p \\ xp_x \\ \lambda p_x \end{bmatrix} = \frac{1}{t_0} \begin{bmatrix} A^1-1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2-1 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g \\ xg_x \\ \lambda g_x \end{bmatrix}$$

Usando a notação $v(h) = \begin{bmatrix} h \\ xh_x \\ \lambda h_x \end{bmatrix}$ para algum $h \in \mathbb{Z}_2$ e

chamando de Q a matriz acima relacionando $v(p)$ e $v(g)$ podemos escrever nossa notação matricial como $v(p) = Q \cdot v(g)$.

Voltemos agora ao caso geral usando uma notação generalizada da que acabamos de introduzir.

Como $G = g + tp$ podemos escrever $v(G) = v(g) + t \cdot v(p)$.

Assim

$$v(p) = Q \cdot v(g) = Q \cdot [v(G) - t \cdot v(p)],$$

isto é,

$$[1 + t \cdot Q] \cdot v(p) = Q \cdot v(G)$$

que representa um sistema dependendo diferencialmente de t .

Como a matriz identidade 1 é inversível temos, para t suficientemente pequeno, que a matriz $[1 + t \cdot Q]$ é inversível.

Igualando a primeira componente de cada lado da equação

$$v(p) = [1+t.Q]^{-1}.Q.v(G)$$

obtemos p escrito em função dos geradores de $RT(G)$, com os coeficientes em $\mathcal{G}_{n+r}$. Isto prova portanto a dependência diferenciável dos coeficientes com relação a variável t . ■

Lema 2.3.4:

Sejam $g, p \in \mathcal{G}_{n+r}$. Se $RT(g+tp) = RT(g) \quad \forall t$ perto de 0 então $(g+tp)_f \sim_f g \quad \forall t$ suficientemente perto de 0.

Prova:

Por 2.3.3 temos $p = aG + b^1 G_{x_1} + \dots + b^n G_{x_n}$, onde $a, b^1, \dots, b^n \in \mathcal{G}_{x, \lambda, t}$, $b^i(0,0,t) \equiv 0$ e $G = g + tp$.

Tomando representantes dos germes acima, escolhemos intervalos $K^1, \dots, K^n, L^1, \dots, L^r, M$ tal que

$$p = aG + b^1 G_{x_1} + \dots + b^n G_{x_n}$$

vale numa vizinhança $K \times L \times M$ de $(0,0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$, onde $K = K^1 \times \dots \times K^n$ e $L = L^1 \times \dots \times L^r$.

Queremos provar que $g \sim_f G(\dots, t) \quad \forall t$ suficientemente perto de 0, isto é, queremos construir $X(x, \lambda, t)$ e $S(x, \lambda, t)$ variando diferencialmente e satisfazendo:

$$1) \ a) \ g(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)G(X(x, \lambda, t), \lambda, t)$$

$$b) \ X(x, \lambda, 0) \equiv x, \quad S(x, \lambda, 0) = 1$$

$$c) \ X(0, 0, t) \equiv 0$$

Afirmamos então que as funções $X = (X^1, \dots, X^n)$ e S são encontradas resolvendo as seguintes E.D.O's:

$$2) \ a) \ \frac{dX}{dt}(x, \lambda, t) = - \left[b^1(X(x, \lambda, t), \lambda, t), \dots, b^n(X(x, \lambda, t), \lambda, t) \right]$$

$$b) \ X(x, \lambda, 0) = x$$

$$3) \ a) \ \frac{dS}{dt}(x, \lambda, t) = -a(X(x, \lambda, t), \lambda, t)S(x, \lambda, t)$$

$$b) \ S(x, \lambda, 0) = 1$$

De fato, suponhamos que 2) e 3) têm solução em $K \times L \times M$ e denotemos $X(x, \lambda, t)$ por y . Derivando em relação a t o lado direito de 1)a) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[S(x, \lambda, t)G(X(x, \lambda, t), \lambda, t)] &= \\ &= S_t(x, \lambda, t)G(y, \lambda, t) + S(x, \lambda, t) \left[\sum_{i=1}^n G_{x_i}(y, \lambda, t) X_t^i(x, \lambda, t) + G_t(y, \lambda, t) \right] \\ &= -a(y, \lambda, t)S(x, \lambda, t)G(y, \lambda, t) + \\ &\quad + S(x, \lambda, t) \left[- \sum_{i=1}^n b^i(y, \lambda, t)G_{x_i}(y, \lambda, t) + p(x, \lambda) \right] \\ &= S(x, \lambda, t) \left[-a(y, \lambda, t)G(y, \lambda, t) - \sum_{i=1}^n b^i(y, \lambda, t)G_{x_i}(y, \lambda, t) + p(x, \lambda) \right] = 0. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos 2)a), 3)a) e o fato de $G_t = p$. Na quarta igualdade usamos o fato de $p = aG + b^1G_{x_1} + \dots + b^nG_{x_n}$.

Na equação acima concluímos que $S(x, \lambda, t)G(X(x, \lambda, t), \lambda, t)$ não depende de t , logo tomando $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} S(x, \lambda, t)G(X(x, \lambda, t), \lambda, t) &= S(x, \lambda, 0)G(X(x, \lambda, 0), \lambda, 0) \\ &= 1G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda), \end{aligned}$$

o que mostra 1)a).

As condições em 1)b) são as condições iniciais das E.D.O's 2) e 3). Como $b^i(0, 0, t) \equiv 0$ temos que 0 é solução de 2) quando $x = \lambda = 0$, isto é, solução de

$$\frac{d}{dt}X(0, 0, t) = -\left(b^1(X(0, 0, t), 0, t), \dots, b^n(X(0, 0, t), 0, t)\right)$$

com condição inicial $X(0, 0, 0) = 0$. Por unicidade de solução

temos $X(0,0,t) = 0$, mostrando 1)c).

Para terminarmos a prova falta mostrarmos que as E.D.O.'s 2) e 3) têm solução sobre $K \times L \times M$ (K e L possivelmente reduzidos). Mas isto é garantido pelo teorema usual de existência e unicidade de soluções de E.D.O.'s. Este teorema garante a existência de X em 2). Substituindo X em 3), o teorema garante também a existência de S em 3). ■

Podemos agora provar o que queríamos.

Teorema 2.3.5:

Sejam $g, p \in \mathcal{E}_{n+r}$. Se $RT(g+tp) = RT(g) \quad \forall t \in [0,1]$ então $(g+tp) \sim_f g \quad \forall t \in [0,1]$.

Prova:

Inicialmente definimos a seguinte relação de equivalência em $[0,1]$:

$$t_1 \sim t_2 \iff (g+t_1p) \sim_f (g+t_2p)$$

Afirmamos primeiro que as classes de equivalência $[t]$ são abertas em $[0,1]$.

De fato, dado $t_0 \in [0,1]$, mostraremos que $(g+tp) \sim_f (g+t_0p) \quad \forall t$ em $[0,1]$ e suficientemente perto de t_0 .

Considerando $h = g + t_0p$ e usando a hipótese do teorema para concluir, temos

$$RT(h+sp) = RT(g+t_0p+sp) = RT(g+(t_0+s)p) = RT(g)$$

$\forall s$ suficientemente perto de 0.

Novamente por hipótese $RT(g) = RT(g+t_0p) = RT(h)$, logo

$$RT(h+sp) = RT(h) \quad \forall s \text{ suficientemente perto de } 0.$$

Isto implica por 2.3.4 que $(h+sp) \sim_f h \quad \forall s$ suficientemente

perto de 0.

Substituindo h por $g+t_0p$ novamente, obtemos

$$[g+(t_0+s)p] \sim_f (g+t_0p) \quad \forall s \text{ suficientemente perto de } 0.$$

Assim

$$(g+tp) \sim_f (g+t_0p) \quad \forall t \text{ suficientemente perto de } t_0,$$

provando que as classes de equivalência são abertas.

Agora, denotando $A = [t_0]$ e $B = \bigcup_{t \neq t_0} [t]$, temos

$$A \cup B = [0,1] \text{ e } A \cap B = \emptyset, \text{ onde } A \text{ e } B \text{ são abertos em } [0,1].$$

Como $[0,1]$ é conexo e $A \neq \emptyset$ devemos ter $B = \emptyset$ e, portanto, $A = [0,1]$.

$$\text{Assim } (g+tp) \sim_f (g+t_0p) \quad \forall t, t_0 \in [0,1].$$

$$\text{Em particular, para } t_0 = 0 \text{ temos } (g+tp) \sim_f g \quad \forall t \in [0,1]. \quad \blacksquare$$

Definição:

A *codimensão de um germe* $g \in \mathcal{X}_{n+r}$ (com relação a $\mathcal{F}$ -equivalência) é a codimensão de $RT(g)$.

De 1.12 segue imediatamente que

Proposição 2.3.6:

Seja $g \in \mathcal{X}_{n+r}$. Então:

$$g \text{ tem codimensão finita} \iff \exists k \text{ inteiro tal que } \mathcal{M}^k \subset RT(g).$$

O resultado seguinte mostra que a classe de equivalência de um germe de codimensão finita é determinado por seu polinômio de Taylor de ordem finita.

Corolário 2.3.7:

Se $g \in \mathcal{S}_{n+r}$ é tal que $\mathcal{M}^k \subset RT(g)$, então $g \sim_f j^k g$.

Prova:

Usando 1.2 (Taylor) podemos escrever $g = (j^k g - r)$ onde $r \in \mathcal{M}^{k+1}$, isto é, $g + r = j^k g$. Nestes termos devemos mostrar que $g \sim_f g+r$. Para isto mostraremos que $RT(g) = RT(g+tr) \forall t \in [0,1]$ e assim por 2.3.5 temos $g \sim_f g+tr \forall t \in [0,1]$ (e em particular $g \sim_f g+r$).

Mostremos que $RT(g) = RT(g+tr)$ usando 1.8:

Como $r \in \mathcal{M}^{k+1}$, por 1.4, temos $r_{x_j} \in \mathcal{M}^k$ e assim $x_i r_{x_j}, \lambda_k r_{x_j} \in \mathcal{M}^{k+1}$. Mas por hipótese $\mathcal{M}^k \subset RT(g)$, logo $\mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{M}.RT(g)$ e portanto temos $r, x_i r_{x_j}, \lambda_k r_{x_j} \in \mathcal{M}.RT(g)$.

Além disto temos

$$RT(g) = \langle g, x_i g_{x_j}, \lambda_k g_{x_j} \rangle \text{ e}$$

$$RT(g+tr) = \langle g+tr, x_i g_{x_j} + t x_i r_{x_j}, \lambda_k g_{x_j} + t \lambda_k r_{x_j} \rangle.$$

logo por 1.8 $RT(g) = RT(g+tr)$. ■

O resultado acima sugere a seguinte definição.

Definição:

Dizemos que g é k -determinado (com relação à equivalência forte) se $\forall h$ tal que $j^k g(0) = j^k h(0)$ temos $g \sim_f h$. Se g é k -finitamente determinado para algum k dizemos que g é finitamente determinado.

O teorema abaixo caracteriza a determinação finita.

Teorema 2.3.8:

(a) Se $\mathcal{M}^k \subset RT(g)$ então g é k -determinado com relação à equivalência forte.

(b) Se g é k -determinado então $RT(g) \supset \mathcal{M}^{k+1}$.

Prova:

(a) Segue imediatamente de 2.3.7.

(b) Tomando $p \in \mathcal{M}^{k+1}$ temos por hipótese $g \sim_f g+tp$. Por 2.3.2 $p \in RT(g)$ logo $\mathcal{M}^{k+1} \subset RT(g)$. ■

Observação:

Os exemplos 3 e 4, vistos depois de 2.3.1, não são de codimensão finita. De fato, para $r \geq 2$ todo germe que não é germe de submersão é de codimensão infinita em relação à equivalência forte. Este resultado é provado em [9]. Tendo em vista o resultado, vamos nos concentrar em $r = 1$. No entanto sempre que possível trabalharemos no geral, pois alguns dos resultados podem ser utilizados em equivalências mais gerais.

Proposição 2.3.9:

Em $\mathcal{E}_{n+r}$, germes da forma $g(x, \lambda) = \lambda_1 q(x, \lambda)$ ou $g(x, \lambda) = x_1^2 q(x, \lambda)$ têm codimensão infinita (e portanto não são finitamente determinados).

Prova:

a) Se $g = \lambda_1 q$ então $g_{x_j} = \lambda_1 q_{x_j}$ e

$$RT(g) = \langle \lambda_1 q, x_1(\lambda_1 q_{x_j}), \lambda_k(\lambda_1 q_{x_j}) \rangle \subset \langle \lambda_1 \rangle.$$

Por 1.13 $\text{cod } \langle \lambda_i \rangle = \infty$ logo $\text{cod } \text{RT}(g) = \infty$.

b) Se $g = x_s^2 q$ então

$$g_{x_s} = 2x_s q + x_s^2 q_{x_s} = x_s (2q + x_s q_{x_s}) \quad e$$

$$g_{x_j} = x_s^2 q_{x_j} \quad \text{para } j \neq s.$$

Assim

$$\text{RT}(g) = \langle x_s^2 q, x_i x_s (2q + x_s q_{x_s}), x_i x_s^2 q_{x_s}, \lambda_k x_s (2q + x_s q_{x_s}), \lambda_k x_s^2 q_{x_j} \rangle \subset \langle x_s \rangle,$$

onde $j \neq s$.

Por 1.13 $\text{cod } \langle x_s \rangle = \infty$ logo $\text{cod } \text{RT}(g) = \infty$. ■

Exemplo:

Consideremos em $\mathbb{R}_2$ os germes $g(x, \lambda) = \lambda$ e

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda + e^{-(1/x)^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \lambda & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Os germes f e g têm derivadas de todas as ordens na origem iguais, isto é, $j^k f = j^k g \quad \forall k \geq 1$, mas pelos diagramas de bifurcação abaixo e por 2.2.1 temos que $f \not\sim_f g$.

$$g(x, \lambda) = 0$$

$$f(x, \lambda) = 0$$

Observe que por 2.3.9 $\text{cod } \text{RT}(g) = \infty$.

O exemplo acima é uma motivação para procurarmos trabalhar com germes de codimensão finita, evitando casos patológicos.

Dado um germe g , para verificarmos se ele é de codimensão finita, devemos procurar uma potência k de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}^k \subset \text{RT}(g)$. Isto se torna mais simples com o resultado seguinte.

Proposição 2.3.10:

Seja $g \in \mathfrak{X}_{n+r}$ e $k > 0$ inteiro. Se $\mathcal{M}^k \subset \text{RT}(g) + \mathcal{M}^{k+1}$ então $\mathcal{M}^k \subset \text{RT}(g)$.

Prova:

Consequência imediata de 1.7 (Nakayama) fazendo $I = \mathcal{M}^k$ e $J = \text{RT}(g)$. ■

§4- INVARIANÇA DA CODIMENSÃO

Nesta seção mostraremos para $h \in \mathcal{E}_{n+1}$ que $RT(h)$ e $J(h)$ são realmente espaços tangentes a h e daí provaremos que a codimensão de um germe é um invariante da classe de $\mathcal{F}$ -equivalência.

Definição:

Se $\phi(x, \lambda) = (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$ é uma mudança de coordenadas para bifurcação, a transformação pull-back, $\phi^*: \mathcal{E}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{E}_{n+1}$, é definida por $g \longrightarrow \phi^*(g) = g \circ \phi$.

Proposição 2.4.1:

Seja $\phi(x, \lambda) = (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$ uma mudança de coordenadas para bifurcação em $\mathcal{E}_{n+1}$. Então:

- a) ϕ^* é isomorfismo de anel.
- b) I ideal $\Rightarrow \phi^*(I)$ é ideal.

Prova:

a)

Sejam $g, h \in \mathcal{E}_{n+1}$. Temos

$$\phi^*(g+h) = (g+h) \circ \phi = g \circ \phi + h \circ \phi = \phi^*(g) + \phi^*(h)$$

$$\phi^*(gh) = (gh) \circ \phi = (g \circ \phi)(h \circ \phi) = \phi^*(g)\phi^*(h),$$

e portanto ϕ^* é homomorfismo. Denotando por 1 o difeomorfismo identidade temos $1^*(h) = h \circ 1 = h$. Se ψ é outra mudança de coordenadas temos

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)^*(h) &= h \circ (\phi \circ \psi) = (h \circ \phi) \circ \psi = \psi^*(h \circ \phi) = \psi^*(\phi^*(h)) \\ &= (\psi^* \circ \phi^*)(h), \end{aligned}$$

isto é, $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

Agora como ϕ é inversível existe ϕ^{-1} tal que $\phi \circ \phi^{-1} = 1$ e $\phi^{-1} \circ \phi = 1$. Assim, usando o resultado acima, temos

$$1^* = (\phi \circ \phi^{-1})^* = (\phi^{-1})^* \circ \phi^*$$

$$1^* = (\phi^{-1} \circ \phi)^* = \phi^* \circ (\phi^{-1})^*,$$

mostrando que ϕ^* é inversível com $(\phi^*)^{-1} = (\phi^{-1})^*$ e que ϕ^* é isomorfismo.

b)

Sejam $\bar{g}, \bar{h} \in \phi^*(I)$, isto é, $\bar{g} = \phi^*(g)$ e $\bar{h} = \phi^*(h)$ onde $g, h \in I$.

Como $\phi^*(g) + \phi^*(h) = \phi^*(g+h)$ e $g+h \in I$ temos $\bar{g} + \bar{h} \in \phi^*(I)$, mostrando que $\phi^*(I)$ é fechado na soma.

Consideremos agora um germe qualquer $f \in \mathcal{E}_{n+1}$. Como ϕ^* é isomorfismo e I é ideal, temos $(\phi^*)^{-1}(f)g \in I$ e portanto $\phi^*[(\phi^*)^{-1}(f)g] \in \phi^*(I)$. Mas

$$\phi^*[(\phi^*)^{-1}(f)g] = (\phi^* \circ (\phi^{-1})^*)(f)\phi^*(g) = f\phi^*(g)$$

e portanto $f\phi^*(g) \in \phi^*(I)$, provando que $\phi^*(I)$ é ideal. ■

Proposição 2.4.2:

Seja $\gamma = (S, \phi)$, onde $\phi = (X, \Lambda)$, uma equivalência em $\mathcal{E}_{n+1}$.

Então

a) γ é inversível com $\gamma^{-1} = \left[\frac{1}{S \circ \phi^{-1}}, \phi^{-1} \right]$ e portanto γ^{-1} é

equivalência.

b) Se I é ideal então $\gamma(I) = \phi^*(I)$.

Prova:

a)

Devemos mostrar que $\gamma \circ \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \circ \gamma = 1$. De fato, tomando $h \in \mathcal{Z}_{n+1}$ temos

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \gamma^{-1})(h) &= \gamma(\gamma^{-1}(h)) = \gamma \left[\frac{1}{(S \circ \phi^{-1})} (h \circ \phi^{-1}) \right] \\ &= S \left[\frac{1}{(S \circ \phi^{-1} \circ \phi)} (h \circ \phi^{-1} \circ \phi) \right] = S \left[\frac{1}{S} h \right] = h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1} \circ \gamma)(h) &= \gamma^{-1}(\gamma(h)) = \gamma^{-1}(S(h \circ \phi)) \\ &= \frac{1}{(S \circ \phi^{-1})} [S(h \circ \phi) \circ \phi^{-1}] = \frac{1}{(S \circ \phi^{-1})} (S \circ \phi^{-1})h = h \end{aligned}$$

b)

Temos $\phi^*(I) = \{h \circ \phi; h \in I\}$ e $\gamma(I) = \{S(h \circ \phi); h \in I\}$.

Para mostrar uma inclusão seja $h \in I$ e $S(h \circ \phi) \in \gamma(I)$. Por

2.4.1 b) $\phi^*(I)$ é ideal e como $h \circ \phi \in \phi^*(I)$ devemos ter $S(h \circ \phi) \in \phi^*(I)$. Portanto $\gamma(I) \subset \phi^*(I)$.

Por outro lado, seja $h \circ \phi \in \phi^*(I)$. Podemos escrever

$$h \circ \phi = \left[S \frac{1}{S} \right] (h \circ \phi) = S \left[\left[\frac{1}{(S \circ \phi^{-1})} h \right] \circ \phi \right] = S(\bar{h} \circ \phi),$$

onde $\bar{h} = \frac{1}{(S \circ \phi^{-1})} h$.

Como I é ideal e $h \in I$ temos $\bar{h} \in I$ e portanto

$$h \circ \phi = S(\bar{h} \circ \phi) \in \gamma(I).$$

Isto prova que $\phi^*(I) \subset \gamma(I)$ e assim $\phi^*(I) = \gamma(I)$. ■

Observação:

Apesar do resultado 2.4.2 b) a equivalência γ não é homomorfismo de anel pois se $g, h \in \mathbb{Z}_{n+1}$ temos

$$\begin{aligned}\gamma(gh) &= S[(gh) \cdot \phi] = S[(g \cdot \phi)(h \cdot \phi)] \\ &= S^{-1}S[(g \cdot \phi)S(h \cdot \phi)] = S^{-1}\gamma(g)\gamma(h),\end{aligned}$$

e em geral $S^{-1} \neq 1$.

Definição:

Uma curva diferenciável de equivalências fortes em $\mathbb{Z}_{n+1}, \delta_t$, é um par $S(x, \lambda, t), X(x, \lambda, t)$ dependendo diferencialmente de t em que $\delta_0 = 1$, isto é, $S(x, \lambda, 0) = 1, X(x, \lambda, 0) = x$ e que além disto, para todo t fixado, (S, X, λ) é uma equivalência forte. Se além disto (S, X, λ) for J -equivalência, diremos curva diferenciável de J -equivalências.

Observação:

Para cada t fixado, δ_t pode ser visto como uma transformação $\delta_t: \mathbb{Z}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{n+1}$ dada por

$$h \longrightarrow \delta_t(h) = S(x, \lambda, t)h(X(x, \lambda, t), \lambda).$$

Definiremos agora um subespaço de $RT(h)$ que será de grande interesse na solução do problema do reconhecimento.

Definição:

Se $h \in \mathbb{Z}_{n+1}$ definimos

$$J(h) = \{ah + b^1 h_{x_1} + \dots + b^n h_{x_n}; a, b^i, b_{x_j}^i \in \mathcal{M} \text{ para } 1 \leq i, j \leq n\}$$

Raciocinando de modo análogo ao que foi feito para $RT(h)$ em 2.3.1 temos a seguinte caracterização para $J(h)$:

$$J(h) = \left\{ \sum_{i=1}^n a^i x_i h + b \lambda h + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c^{ijk} x_i x_k h_{x_j} + \sum_{j=1}^n d^j \lambda h_{x_j}; \right. \\ \left. a^i, b, c^{ijk}, d^j \in \mathfrak{g}_{n+1} \right\}.$$

Equivalentemente usando a notação de ideais:

$$J(h) = \langle x_i h, \lambda h, x_i x_k h_{x_j}, \lambda h_{x_j}; 1 \leq i, j, k \leq n \rangle$$

O ideal $J(h)$ é dito espaço tangente a h segundo J -equivalências.

Mostremos que os ideais $RT(h)$ e $J(h)$ são realmente espaços tangentes.

Proposição 2.4.3:

Seja $h \in \mathfrak{g}_{n+1}$. Então

a) $p \in RT(h) \Leftrightarrow \exists \delta_t$, curva equivalente forte, tal que

$$p = \left. \frac{d}{dt} \delta_t(h) \right|_{t=0}.$$

b) $p \in J(h) \Leftrightarrow \exists \delta_t$, curva de J -equivalências, tal que

$$p = \left. \frac{d}{dt} \delta_t(h) \right|_{t=0}.$$

Prova:

a)

($\Leftarrow$) A prova neste sentido se assemelha à prova de 2.3.2. Denotando a curva por $\delta_t(h) = Sh(X, \lambda)$ com $S(x, \lambda, 0) = 1$, $X(x, \lambda, 0) = x$ e $X(0, 0, t) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
p(x, \lambda) &= \left[\frac{d}{dt} \delta_t(h) \right]_{t=0}(x, \lambda) = \frac{d}{dt} \left[\left[Sh(X, \lambda) \right](x, \lambda) \right]_{t=0} \\
&= S_t(x, \lambda, 0) h(X(x, \lambda, 0), \lambda) + \\
&\quad + S(x, \lambda, 0) \left[\sum_{i=1}^n h_{x_i}(X(x, \lambda, 0), \lambda) X_t^i(x, \lambda, 0) \right] \\
&= S_t(x, \lambda, 0) h(x, \lambda) + S(x, \lambda, 0) \left[\sum_{i=1}^n X_t^i(x, \lambda, 0) h_{x_i}(x, \lambda) \right] \\
&= a(x, \lambda) h(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n b^i(x, \lambda) h_{x_i}(x, \lambda),
\end{aligned}$$

onde $a(x, \lambda) = S_t(x, \lambda, 0)$ e $b^i(x, \lambda) = X_t^i(x, \lambda, 0)$.

Como $X^i(0, 0, t) = 0$ temos $X_t^i(0, 0, 0) = 0$, isto é,

$b^i(0, 0) = 0$ e portanto $p \in RT(h)$.

($\Rightarrow$) Neste sentido a prova tem uma semelhança com a prova de 2.3.4.

Como $p \in RT(h)$, por definição, existem $a, b^1, \dots, b^n \in \mathcal{E}_{n+1}$ com $b^i(0, 0) = 0$ tal que $p = ah + b^1 h_{x_1} + \dots + b^n h_{x_n}$. Utilizando os germes $a, b^1, \dots, b^n$ temos as seguintes E.D.O.'s:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(x, \lambda, t) = a(x, \lambda) \\ S(x, \lambda, 0) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X^i(x, \lambda, t) = b^i(x, \lambda) \\ X^i(x, \lambda, t) = x_i \end{cases} \quad i=1, \dots, n.$$

Estas E.D.O.'s têm como solução

$$S(x, \lambda, t) = 1 + ta(x, \lambda),$$

$$X^1(x, \lambda, t) = x_1 + tb^1(x, \lambda),$$

|

$$X^n(x, \lambda, t) = x_n + tb^n(x, \lambda),$$

com $S, X^i \in \mathcal{E}_{x, \lambda, t}$.

Denotemos $X = (X^1, \dots, X^n)$. Definindo δ_t como

$$\delta_t(h) = S(x, \lambda, t)h(X(x, \lambda, t), \lambda)$$

temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \delta_t(h)(x, \lambda) \right|_{t=0} &= S_t(x, \lambda, 0)h(X(x, \lambda, 0), \lambda) + \\ &+ S(x, \lambda, 0) \left[\sum_{i=1}^n h_{x_i}(X(x, \lambda, 0), \lambda) X_t^i(x, \lambda, 0) \right] \\ &= a(x, \lambda)h(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n b^i(x, \lambda)h_{x_i}(x, \lambda) \\ &= p(x, \lambda). \end{aligned}$$

b)

Basta trocar $RT(h)$ por $J(h)$. ■

Da prova acima concluímos que a matriz Jacobiana de X em $(0, 0, t)$ deve ser a matriz identidade quando estamos no caso de J -equivalência pois derivando $X^i(x, \lambda, t) = x_i + tb^i(x, \lambda, t)$ temos

$$X_{x_j}^i(x, \lambda, t) = \delta_{ij} + tb_{x_j}^i(x, \lambda, t),$$

onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ e $b_{x_j}^i \in \mathcal{M}$.

Proposição 2.4.4:

Seja $h \in \mathcal{Z}_{n+1}$. Então

a) $J(h) = \mathcal{M} \cdot RT(h) + [R(\lambda h)_{x_j}]$

b) $RT(h) = J(h) + [R(h, x_i h_{x_j})]$

c) $\text{cod } RT(h) < \infty \rightarrow \text{cod } J(h) < \infty$.

Prova:

a)

Temos

$$J(h) = \langle x_i h, \lambda h, x_i x_k h_{x_j}, \lambda h_{x_j} \rangle = \langle x_i h, \lambda h, x_i x_k h_{x_j} \rangle + \langle \lambda h_{x_j} \rangle$$

$$\mathcal{M}.RT(h) = \langle x_i, \lambda \rangle \langle h, x_k h_{x_j}, \lambda h_{x_j} \rangle = \langle x_i h, \lambda h, x_i x_k h_{x_j} \rangle + \mathcal{M}. \langle \lambda h_{x_j} \rangle$$

Somando $R(\lambda h_{x_j})$ na expressão de $\mathcal{M}.RT(h)$ e usando 1.9 obtemos o resultado.

b)

Basta desmembrar $RT(h)$ usando 1.9 e usar o item a), isto é,

$$\begin{aligned} RT(h) &= \mathcal{M}.RT(h) + R(h, x_i h_{x_j}, \lambda h_{x_j}) \\ &= (\mathcal{M}.RT(h) + R(\lambda h_{x_j})) + R(h, x_i h_{x_j}) \\ &= J(h) + R(h, x_i h_{x_j}). \end{aligned}$$

c)

Como $\text{cod } RT(h) < \omega$ existe k tal que $\mathcal{M}^k \in RT(h)$, logo $\mathcal{M}^{k+1} \in \mathcal{M}.RT(h)$. Mas, por a), $\mathcal{M}.RT(h) \subseteq J(h)$ e portanto $\mathcal{M}^{k+1} \subseteq J(h)$. ■

Lema 2.4.5:

Se γ é uma equivalência e δ_t é uma curva diferenciável de equivalências fortes em $\mathcal{E}_{n+1}$ então $\gamma \delta_t \gamma^{-1}$ também é uma curva diferenciável de equivalências fortes.

Prova:

Usaremos as seguintes notações:

$$\bar{\delta}_t = \gamma \delta_t \gamma^{-1}$$

$$\gamma(h) = S(h \circ \phi) \quad \text{onde} \quad \phi(x, \lambda) = (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)), \quad \phi \in \mathcal{R}_{n+1}$$

$$\delta_t(h) = T(h \circ \psi) \quad \text{onde} \quad T \in \mathcal{E}_{x, \lambda, t}, \quad \psi \in \mathcal{R}_{x, \lambda, t},$$

$$T(x, \lambda, 0) = 1, \quad \psi(x, \lambda, 0) = (x, \lambda).$$

Por 2.4.2 a) temos $\gamma^{-1} = \left[\frac{1}{(S \circ \phi^{-1})}, \phi^{-1} \right]$.

Assim

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_t(h) &= \gamma(\delta_t(\gamma^{-1}(h))) = \gamma[T(\gamma^{-1}(h) \circ \psi)] = S([T(\gamma^{-1}(h) \circ \psi)] \circ \phi) \\ &= S[(T \circ \phi) \gamma^{-1}(h) \circ \psi \circ \phi] \\ &= S(T \circ \phi) \left\{ \left[\frac{1}{(S \circ \phi^{-1})} (h \circ \phi^{-1}) \right] \circ \psi \circ \phi \right\} \\ &= S(T \circ \phi) \frac{1}{(S \circ \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi)} (h \circ \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi) = R(h \circ \Gamma),\end{aligned}$$

onde $R = S(T \circ \phi) \frac{1}{(S \circ \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi)}$ e $\Gamma = \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi$.

Claramente $R \in \mathcal{Z}_{x,\lambda,t}$ e $\Gamma \in \mathcal{R}_{x,\lambda,t}$. Além disto temos

$$\begin{aligned}\Gamma(x, \lambda, 0) &= \phi^{-1}(\psi(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), 0)) = \phi^{-1}(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)) \\ &= (\phi^{-1} \circ \phi)(x, \lambda) = (x, \lambda),\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos $\psi(x, \lambda, 0) = (x, \lambda)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}R(x, \lambda, 0) &= \left[S(T \circ \phi) \frac{1}{(S \circ (\phi^{-1} \circ \psi \circ \phi))} \right] (x, \lambda) \\ &= S(x, \lambda) T(\phi(x, \lambda)) \frac{1}{S(x, \lambda)} = T(\phi(x, \lambda)) \\ &= T(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), 0) = 1\end{aligned}$$

Isto mostra que $\bar{\delta}_t$ é uma curva diferenciável de equivalência forte. ■

Observação:

Vale um resultado análogo a este quando consideramos curva diferenciável de J-equivalências.

Mostraremos agora que para germes equivalentes temos um isomorfismo entre os espaços tangentes destes germes (relativos a $\mathcal{B}$ -equivalência e a J -equivalência).

Proposição 2.4.6:

Seja $g \sim h$, isto é, $g = \gamma(h) = S(h \circ \phi)$ onde $\phi = (X, \Lambda)$.

Então

$$a) \text{RT}(g) = \gamma(\text{RT}(h)) = \phi^*(\text{RT}(h))$$

$$b) \text{J}(g) = \gamma(\text{J}(h)) = \phi^*(\text{J}(h)).$$

Prova:

a)

Basta mostrar que $\text{RT}(g) = \gamma(\text{RT}(h))$ pois por 2.4.2.b) $\gamma(\text{RT}(h)) = \phi^*(\text{RT}(h))$. (Uma outra opção seria uma prova algébrica mostrando que $\text{RT}(g) = \phi^*(\text{RT}(h))$).

Mostremos primeiro que $\gamma(\text{RT}(h)) \subset \text{RT}(g)$.

Seja $p \in \text{RT}(h)$. Por 2.4.3 existe uma curva de equivalências fortes, δ_t , tal que $p = \left. \frac{d}{dt} \delta_t(h) \right|_{t=0}$.

Aplicando γ a p e observando que γ é independente de t temos:

$$\begin{aligned} \gamma(p) &= \gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \delta_t(h) \right|_{t=0} \right) = \left. \frac{d}{dt} \gamma \delta_t(h) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma \delta_t(\gamma^{-1} \gamma)(h) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\gamma \delta_t \gamma^{-1}) \gamma(h) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\gamma \delta_t \gamma^{-1})(g) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \bar{\delta}_t(g) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Como, por 2.4.5, $\bar{\delta}_t$ é uma curva diferenciável de equivalências fortes temos $\gamma(p) \in \text{RT}(g)$ e portanto $\gamma(\text{RT}(h)) \subset \text{RT}(g)$.

Para mostrar que $RT(g) \subset \gamma(RT(h))$ basta trocar o papel de g com h e mostrar que $\gamma^{-1}(RT(g)) \subset RT(h)$.

b)

Análogo à prova do item a). ■

Podemos agora provar o resultado principal desta seção:

Teorema 2.4.7 (Invariança da codimensão):

A codimensão é um invariante por equivalência forte, isto é, se $g \sim_f h$ então $\text{cod } RT(g) = \text{cod } RT(h)$.

Prova:

Seja $g = S(h \circ \phi)$. Pela definição de codimensão podemos escrever

$$\mathcal{Z}_{n+1} = RT(g) \oplus V = RT(h) \oplus W.$$

Por 2.4.6 temos $RT(g) = \phi^*(RT(h))$, logo

$$\begin{aligned} RT(g) \oplus V = \mathcal{Z}_{n+1} &= \phi^*(\mathcal{Z}_{n+1}) = \phi^*(RT(h) \oplus W) \\ &= \phi^*(RT(h)) \oplus \phi^*(W) = RT(g) \oplus \phi^*(W). \end{aligned}$$

Daí temos $\dim V = \dim W$, isto é, $\text{cod } RT(g) = \text{cod } RT(h)$. ■

CAPÍTULO III - IDEAIS INTRÍNECOS

Estudaremos as propriedades de ideais intrínsecos que serão de fundamental importância no estudo do problema de reconhecimento.

O resultado central é um teorema de caracterização destes ideais.

Como aplicação da teoria desenvolvida obteremos para ideais intrínsecos alguns resultados análogos aos obtidos no §4 do capítulo II.

Ao final calculamos o espaço tangente restrito para um exemplo mais complicado.

Considerando a $\mathcal{F}$ -equivalência em $\mathcal{E}_{n+r}$ denotaremos a órbita de um germe $g \in \mathcal{E}_{n+r}$ por $\mathcal{F}.g$, isto é,

$$\mathcal{F}.g = \{f \in \mathcal{E}_{n+r}; f \sim_f g\}$$

Como queremos trabalhar com órbitas em $\mathcal{E}_{n+r}$, os subconjuntos de $\mathcal{E}_{n+r}$ de grande interesse são aqueles formados por união de órbitas.

Definição:

Um subconjunto I de $\mathfrak{I}_{n+r}$ é *intrínseco* se ele contém a órbita, segundo a relação de equivalência forte, de cada um de seus elementos, isto é, se para todo $f, g \in \mathfrak{I}_{n+r}$ vale a implicação:

$$f \in I \text{ e } g \sim_f f \Rightarrow g \in I.$$

Esta definição pode ser feita para a $\mathcal{B}$ -equivalência e I é dito $\mathcal{B}$ -intrínseco. Quando necessário distingui-las diremos também $\mathcal{F}$ -intrínseco para um subconjunto intrínseco como definido acima.

Observe que naturalmente um subconjunto $\mathcal{B}$ -intrínseco é $\mathcal{F}$ -intrínseco.

Os subconjuntos de $\mathfrak{I}_{n+r}$ de maior interesse são os *ideais intrínsecos*.

Proposição 3.1:

São ideais intrínsecos em $\mathfrak{I}_{n+r}$:

- a) $\mathcal{M}$.
- b) $\langle \lambda_i \rangle$, onde $1 \leq i \leq r$.
- c) $I+J$ e $I.J$ se I e J são ideais intrínsecos.
- d) $\cap I_\alpha$ se $\{I_\alpha\}$ é uma família de ideais intrínsecos.
- e) $\langle \lambda^\beta \rangle = \langle \lambda^{\beta_1} \dots \lambda^{\beta_i} \dots \lambda^{\beta_r} \rangle$ onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$,

$$\mathcal{M}^k, \quad \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle = \langle \lambda_i \rangle + \langle \lambda_j \rangle, \quad \langle \lambda_i + \lambda_j \rangle \text{ e}$$

$$\langle p(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \rangle \text{ onde } p \text{ é polinômio em } \lambda.$$

Prova:

a) Seja $f \in \mathcal{M}$ e $g \sim_f f$. Como $g(x, \lambda) = S(x, \lambda)f(X(x, \lambda), \lambda)$ temos $g(0, 0) = S(0, 0)f(0, 0) = 0$, pois $f(0, 0) = 0$, e portanto $g \in \mathcal{M}$.

b) Sejam $f\lambda_i \in \langle \lambda_i \rangle$ e $g \sim_f (f\lambda_i)$. Então

$$\begin{aligned} g(x, \lambda) &= S(x, \lambda)(f\lambda_i)(X(x, \lambda), \lambda) = S(x, \lambda)f(X(x, \lambda), \lambda)\lambda_i(X(x, \lambda), \lambda) \\ &= [S(x, \lambda)f(X(x, \lambda), \lambda)]\lambda_i \in \langle \lambda_i \rangle. \end{aligned}$$

$(\lambda_i: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{R})$ é definido por $(x, \lambda) \longrightarrow \lambda_i(x, \lambda) = \lambda_i$

c) Seja $f = f_1 + f_2 \in I + J$ e $g \sim_f f$. Como $g = Sf(X, \lambda)$ temos

$$g = S(f_1 + f_2)(X, \lambda) = Sf_1(X, \lambda) + Sf_2(X, \lambda) \in I + J$$

pois $Sf_1(X, \lambda) \in I$ e $Sf_2(X, \lambda) \in J$.

Agora seja $f = f_1g_1 + \dots + f_kg_k \in I \cdot J$ e $g \sim_f f$. Como $g = Sf(X, \lambda)$ temos

$$\begin{aligned} g &= S(f_1g_1 + \dots + f_kg_k)(X, \lambda) \\ &= [Sf_1(X, \lambda)][1g_1(X, \lambda)] + \dots + [Sf_k(X, \lambda)][1g_k(X, \lambda)] \in I \cdot J, \end{aligned}$$

pois $Sf_i(x, \lambda) \in I$ e $1g_i(X, \lambda) \in J$.

d) Seja $f \in \cap I_\alpha$ e $g \sim_f f$. Então $f \in I_\alpha \forall \alpha$ e $g \sim_f f$.

Como cada I_α é intrínseco temos $g \in I_\alpha \forall \alpha$ e assim $g \in \cap I_\alpha$.

e) Consequência dos itens anteriores. ■

Observação:

O ideal $\langle x_i \rangle$ de $\mathfrak{S}_{n+r}$ não é intrínseco.

De fato, tomando $g(x, \lambda) = x_i$ em $\langle x_i \rangle$ e

$$X(x, \lambda) = (x_1 + \lambda_1, x_2 + \lambda_2, \dots, x_n + \lambda_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r),$$

temos $g(X(x, \lambda), \lambda) = x_i + \lambda_i \notin \langle x_i \rangle$. Mas $1g(X, \lambda) \sim g$, logo $\langle x_i \rangle$ não é intrínseco.

Baseados na proposição 3.1 acima apresentamos agora três tabelas com alguns ideais intrínsecos de codimensão finita em $\mathfrak{S}_{1+1}$, $\mathfrak{S}_{2+1}$, $\mathfrak{S}_{1+2}$. Estas tabelas são úteis no ato de verificar se um ideal é intrínseco, e nestes casos, colocá-los como potências de $\mathcal{M}$ e $\langle \lambda \rangle$.

Ideais intrínsecos em $\mathfrak{S}_{1+1}$

$\mathcal{M}$	$= \langle x, \lambda \rangle$
$\mathcal{M}^2$	$= \langle x^2, x\lambda, \lambda^2 \rangle$
$\mathcal{M}^2 + \langle \lambda \rangle$	$= \langle x^2, \lambda \rangle$
$\mathcal{M}^3$	$= \langle x^3, x^2\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle$
$\mathcal{M}^3 + \langle \lambda \rangle$	$= \langle x^3, \lambda \rangle$
$\mathcal{M}^3 + \langle \lambda^2 \rangle$	$= \langle x^3, x^2\lambda, \lambda^2 \rangle$
$\mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle$	$= \langle x^3, x\lambda, \lambda^2 \rangle$
$\mathcal{M}^4$	$= \langle x^4, x^3\lambda, x^2\lambda^2, x\lambda^3, \lambda^4 \rangle$
$\mathcal{M}^4 + \langle \lambda \rangle$	$= \langle x^4, \lambda \rangle$
$\mathcal{M}^4 + \langle \lambda^2 \rangle$	$= \langle x^4, x^3\lambda, \lambda^2 \rangle$
$\mathcal{M}^4 + \langle \lambda^3 \rangle$	$= \langle x^4, x^3\lambda, x^2\lambda^2, \lambda^3 \rangle$
$\mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle$	$= \langle x^4, x\lambda, \lambda^2 \rangle$
$\mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle$	$= \langle x^4, x^3\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle$
$\mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle$	$= \langle x^4, x^2\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle$
$\mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle$	$= \langle x^4, x^2\lambda, \lambda^2 \rangle$

Ideais intrínsecos em $\mathfrak{S}_{2+1}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \langle x_1, x_2, \lambda \rangle \\
 \mathcal{M}^2 &= \langle x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1 \lambda, x_2 \lambda, \lambda^2 \rangle \\
 \mathcal{M}^2 + \langle \lambda \rangle &= \langle x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, \lambda \rangle \\
 \mathcal{M}^3 &= \langle x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3, x_1^2 \lambda, x_1 x_2 \lambda, x_2^2 \lambda, x_1 \lambda^2, x_2 \lambda^2, \lambda^3 \rangle \\
 \mathcal{M}^3 + \langle \lambda \rangle &= \langle x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3, \lambda \rangle \\
 \mathcal{M}^3 + \langle \lambda^2 \rangle &= \langle x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3, x_1^2 \lambda, x_1 x_2 \lambda, x_2^2 \lambda, \lambda^2 \rangle \\
 \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle &= \langle x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3, x_1 \lambda, x_2 \lambda, \lambda^2 \rangle
 \end{aligned}$$

Ideais intrínsecos em $\mathfrak{S}_{1+2}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \langle x, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \\
 \mathcal{M}^2 &= \langle x^2, x \lambda_1, x \lambda_2, \lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_2^2 \rangle \\
 \mathcal{M}^2 + \langle \lambda_1 \rangle &= \langle x^2, x \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_1 \rangle \\
 \mathcal{M}^2 + \langle \lambda_2 \rangle &= \langle x^2, x \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_2 \rangle \\
 \mathcal{M}^2 + \langle \lambda_1 \rangle + \langle \lambda_2 \rangle &= \langle x^2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle
 \end{aligned}$$

Vejamos agora algumas proposições que caracterizam ideais intrínsecos de codimensão finita.

Proposição 3.2:

Seja $I \subset \mathfrak{S}_{n+r}$ ideal intrínseco de codimensão finita. Se

$f \in I$ então $x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \lambda_k \frac{\partial f}{\partial x_j} \in I$ para $i, j=1, \dots, n$ e $k=1, \dots, r$

(isto é, $I \supset RT(f)$).

Prova:

Como $\text{cod } I < \omega$, existe k tal que $\mathcal{M}^{k+1} \subset I$. Assim podemos escrever $f = j^k f + r$, onde $r \in \mathcal{M}^{k+1}$.

Derivando esta expressão de f em relação a x_j obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(j^k f) + \frac{\partial r}{\partial x_j}.$$

Multiplicando por x_i e por λ_k esta expressão obtemos:

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}(j^k f) + x_i \frac{\partial r}{\partial x_j}, \quad \text{com} \quad x_i \frac{\partial r}{\partial x_j} \in \mathcal{M}^{k+1} \subset I$$

$$\lambda_k \frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_j}(j^k f) + \lambda_k \frac{\partial r}{\partial x_j}, \quad \text{com} \quad \lambda_k \frac{\partial r}{\partial x_j} \in \mathcal{M}^{k+1} \subset I$$

Dai, como estamos interessados em verificar que

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \lambda_k \frac{\partial f}{\partial x_j} \in I,$$

podemos então considerar f como um polinômio de grau $\leq k$, isto é, $f \in (\mathcal{M}^{k+1})^\perp \cap I$.

Denotaremos $f(x_1, \dots, x_j + tx_i, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ por $f(x_j + tx_i, \lambda)$.

Agora $f(x_j + tx_i, \lambda) = f(\phi)$, onde

$$\det J\phi = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \dots & t \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & 1 \\ \hline & & & & 1 & \dots & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad \det J\phi = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1+t & \dots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & 1 \\ \hline & & & & 1 & \dots & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = 1+t$$

logo $f(x_j + tx_i, \lambda) \in I$, $\forall t > -1$ real pois I é intrínseco.

Também $\rho(t) = \frac{f(x_j + tx_i, \lambda) - f(x, \lambda)}{t} \in I \quad \forall t > -1, \quad t \neq 0$, pois

I é ideal.

Como $(\mathcal{M}^{k+1})^\perp \cap I$ é subespaço vetorial de dimensão finita (e $\therefore$ fechado) temos $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \in I$.

Assim

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = x_i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_j + tx_i, \lambda) - f(x, \lambda)}{tx_i} = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \in I$$

Do mesmo modo, substituindo x_i por λ_k , obtemos $\lambda_k \frac{\partial f}{\partial x_j} \in I$. ■

Proposição 3.3:

Se $I \subset \mathfrak{S}_{n+r}$ é ideal intrínseco e f é polinômio temos:

$$f \in I \Rightarrow I \supset RT(f).$$

Prova:

Igual à prova de 3.2, partindo do ponto em que f é considerado polinômio. ■

Proposição 3.4:

Seja $I \subset \mathfrak{S}_{n+1}$ um ideal intrínseco de codimensão finita e

$$p(x, \lambda) = p(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{\gamma=(\alpha, \beta)} a_\gamma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda^\beta \quad \text{um polinômio}$$

em $\mathfrak{S}_{n+1}$. Então

$$p \in I \Leftrightarrow \forall \gamma \text{ tal que } a_\gamma \neq 0 \text{ temos } x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda^\beta \in I.$$

Prova:

($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Considerando $\gamma = (l, m) = (l_1, \dots, l_n, m)$ tal que $a_\gamma \neq 0$, mostraremos que $x^\gamma \lambda^m \in I$.

Como I tem codimensão finita, existe um inteiro positivo k tal que $\mathcal{M}^{k+1} \subset I$.

Se $|l| + m > k$ temos $x^l \lambda^m \in \mathcal{M}^{k+1} \subset I$ e terminamos.

Podemos supor então que $|l| + m \leq k$ e portanto que o grau de p é menor ou igual a k .

Denotemos $t = (t_1, \dots, t_n)$ e $tx = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n)$.

Considerando $p(tx, \lambda)$ mostremos por indução em k que derivações parciais sucessivas, com relação as variáveis t_i 's, de $p(tx, \lambda)$ estão em I quando $t_i > 0$ para $i=1, \dots, n$:

Observemos inicialmente que $p(tx, \lambda) \in I$ quando $t_i > 0$ para $i=1, \dots, n$ pois I é intrínseco e $p(x, \lambda) \in I$.

Para $k = 1$, usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial}{\partial t_i} [p(tx, \lambda)] = x_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} p \right] (tx, \lambda).$$

Por 3.2 o termo à direita na igualdade acima está em I e portanto $\frac{\partial}{\partial t_i} p(tx, \lambda) \in I$.

Suponhamos a afirmação válida para todo índice múltiplo $(k_1, \dots, k_n)$ com módulo igual a $k-1$, isto é, que

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}} [p(tx, \lambda)] = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} p \right] (tx, \lambda) \in I.$$

Mostremos que vale para módulo do índice múltiplo igual a k :

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial t_1^k \dots \partial t_n^k} [p(tx, \lambda)] &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial t_1^k \dots \partial t_i^{k-1} \dots \partial t_n^k} p(tx, \lambda) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t_i} \left[x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i-1} \dots x_n^{k_n} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i-1} \dots \partial x_n^{k_n}} p \right] (tx, \lambda) \right] \\
&= x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i-1} \dots x_n^{k_n} \left[x_i \left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i} \dots \partial x_n^{k_n}} p \right] (tx, \lambda) \right] \\
&= x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i} \dots x_n^{k_n} \left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i} \dots \partial x_n^{k_n}} p \right] (tx, \lambda) \\
&= x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i-1} \dots x_n^{k_n} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i-1} \dots \partial x_n^{k_n}} p \right] (tx, \lambda) \right] - Z,
\end{aligned}$$

onde $Z = x_i^{(k_i-1)} x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i-2} \dots x_n^{k_n} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i-1} \dots \partial x_n^{k_n}} p \right] (tx, \lambda) t_i$

(Na segunda igualdade usamos a hipótese de indução).

Usando na última expressão das igualdades acima a hipótese de indução e a proposição 3.2 obtemos $\frac{\partial^k}{\partial t_1^k \dots \partial t_n^k} p(tx, \lambda) \in I$, completando a indução.

Agrupemos agora os termos de $p(x, \lambda)$ de acordo com o grau de x^α do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
p(x, \lambda) &= \sum_{\alpha} p_{\alpha}(\lambda) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\
&= p_{(0, \dots, 0)}(\lambda) + \left(p_{(1, \dots, 0)}(\lambda) x_1 + \dots + p_{(0, \dots, 1)}(\lambda) x_n \right) + \dots \\
&\dots + \left(p_{(k, \dots, 0)}(\lambda) x_1^k + \dots + p_{(k_1, \dots, k_n)}(\lambda) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + \dots + p_{(0, \dots, k)}(\lambda) x_n^k \right).
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1^k \dots \partial t_n^k} p(tx, \lambda) = k_1! \dots k_n! p_{(k_1, \dots, k_n)}(\lambda) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Assim, pela indução mostrada acima, obtemos que cada termo acima, de grau k em x no polinômio $p(tx, \lambda)$, está em I .

Como I é ideal, o polinômio de grau $\leq k-1$ em x , obtido de $p(tx, \lambda)$ subtraindo os termos de grau k em x , pertence a I . Aplicando a este polinômio o mesmo procedimento anterior obtemos que os termos de $p(tx, \lambda)$ com grau $k-1$ em x também estão em I . Como p tem grau finito k , este processo é finito

e concluímos que cada termo $p_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(\lambda) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ está em I .

Em particular, $p_{(l_1, \dots, l_n)}(\lambda) x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \in I$.

Denotando agora $p_l(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_k \lambda^k$ temos

$b_m = a_{(l, m)} \neq 0$. Seja então b_μ o primeiro coeficiente não nulo de $p_l(\lambda)$. Claramente $\mu \leq m$. Temos então $p_l(\lambda) = \lambda^\mu q(\lambda)$ para algum $q(\lambda)$ inversível e portanto, $\lambda^\mu = \frac{1}{q(\lambda)} p_l(\lambda)$.

Assim

$$x^l \lambda^m = x^l \lambda^{m-\mu} \lambda^\mu = x^l \left[\lambda^{m-\mu} \frac{1}{q(\lambda)} \right] p_l(\lambda) = \left[\lambda^{m-\mu} \frac{1}{q(\lambda)} \right] p_l(\lambda) x^l.$$

Como o termo entre parênteses acima está em $\mathcal{E}_{n+1}$ e o termo $p_l(\lambda) x^l$ está em I obtemos $x^l \lambda^m \in I$. ■

Observação:

A proposição 3.4 não vale para $\mathfrak{S}_{n+r}$, $r > 1$ pois $I = \langle \lambda_1 + \lambda_2 \rangle + \mathcal{M}^2$ é ideal intrínseco de codimensão finita em $\mathfrak{S}_{1+2}$ mas $\lambda_1 + \lambda_2 \in I$ com $\lambda_1 \notin I$ e $\lambda_2 \notin I$.

Observação:

A prova da proposição 3.4 para $I \subset \mathfrak{S}_{n+r}$, $r > 1$ vale até o ponto em que mostramos que $p_\alpha(\lambda)x^\alpha \in I$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Podemos então reformular a proposição 3.4 para $\mathfrak{S}_{n+r}$ desde que $p_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ seja monômio em λ_i . Temos então duas versões:

a) Seja $I \subset \mathfrak{S}_{n+r}$ ideal intrínseco de codimensão finita com a propriedade especial de que os geradores de I que dependem dos parâmetros λ_i são monômios e seja

$$p(x, \lambda) = \sum_{\gamma=(\alpha, \beta)} a_\gamma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_r^{\beta_r} \quad \text{polinômio.}$$

Então:

$$p \in I \Leftrightarrow \forall \gamma \text{ tal que } a_\gamma \neq 0 \text{ temos } x^\alpha \lambda^\beta \in I.$$

b) Sejam $I \subset \mathfrak{S}_{n+r}$ ideal intrínseco de codimensão finita e

$$p(x, \lambda) = \sum_{\gamma=(\alpha, \beta)} a_\gamma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_r^{\beta_r}$$

polinômio com a propriedade especial de que quando agrupamos os termos de p de acordo com o grau dos x_i 's, obtemos apenas monômios multiplicando os termos x^α . Então:

$$p \in I \Leftrightarrow \forall \gamma \text{ tal que } a_\gamma \neq 0 \text{ temos } x^\alpha \lambda^\beta \in I.$$

Proposição 3.5:

Seja $I \subset \mathfrak{S}_{n+r}$ um ideal intrínseco de codimensão finita.

Se $x^\alpha \lambda^\beta = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_r^{\beta_r} \in I$, então $\mathcal{M}^{|\alpha|} \langle \lambda^\beta \rangle \subset I$.

Prova:

Devemos mostrar que os geradores de $\mathcal{M}^{|\alpha|} \langle \lambda^\beta \rangle$ estão em I .

Calculando

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_j} (x^\alpha \lambda^\beta) = \alpha_j x_1^{\alpha_1} \dots x_j^{\alpha_j-1} \dots x_i^{\alpha_i+1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda^\beta$$

$$\lambda_k \frac{\partial}{\partial x_j} (x^\alpha \lambda^\beta) = \alpha_j x_1^{\alpha_1} \dots x_j^{\alpha_j-1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda^\beta \lambda_k$$

obtemos monômios de grau $|\alpha|+|\beta|$ que são geradores de $\mathcal{M}^{|\alpha|} \langle \lambda^\beta \rangle$ e por 3.2 estão em I .

Aplicando este procedimento um número finito de vezes aos geradores obtidos, encontramos todos os geradores de $\mathcal{M}^{|\alpha|} \langle \lambda^\beta \rangle$; para encontrar um gerador em específico, basta escolher índices i, j, k adequados. (No primeiro cálculo acima, por exemplo, abaixamos de 1 o grau de x_j e aumentamos de 1 o grau de x_i). ■

Exemplo:

Seja $I \subset \mathfrak{S}_{2+2}$ um ideal intrínseco de codimensão finita e suponhamos que $x_1 x_2^2 \lambda_1^6 \lambda_2^5$ pertença a I . Mostremos que $\lambda_1^9 \lambda_2^5 \in I$:

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 x_2^2 \lambda_1^6 \lambda_2^5) = x_2^2 \lambda_1^7 \lambda_2^5 \in I \quad \text{por 3.2}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2^2 \lambda_1^7 \lambda_2^5) = 2x_2 \lambda_1^7 \lambda_2^5 \in I \quad \text{por 3.2}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 \lambda_1^7 \lambda_2^5) = \lambda_1^9 \lambda_2^5 \in I \quad \text{por 3.2}$$

Teorema 3.6 (Caracterização de ideais intrínsecos em $\mathcal{O}_{n+1}$):

Seja $I \subset \mathcal{O}_{n+1}$ um ideal de codimensão finita. Então:

I é intrínseco $\Leftrightarrow I = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}^{k_1} \langle \lambda^1 \rangle + \dots + \mathcal{M}^{k_s} \langle \lambda^s \rangle$, onde k, k_i e l_i são inteiros não negativos,
 $0 < l_1 < \dots < l_s$ e $k > l_1 + k_1 > \dots > l_s + k_s$.

Prova:

($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Como $\text{cod } I < \infty$, seja k o menor inteiro tal que $\mathcal{M}^k \subset I$.

Seja p um elemento, não nulo, de $I - \mathcal{M}^k$ (caso não exista p temos $I = \mathcal{M}^k$ e terminamos).

Podemos supor que p seja um polinômio. Por 3.4 os monômios $x^\alpha \lambda^\beta$ que compoem p estão no ideal intrínseco I , mais ainda, por 3.5 temos $\mathcal{M}^{|\alpha|} \langle \lambda^\beta \rangle \subset I$. Aplicando este raciocínio a cada um dos finitos monômios em $(\mathcal{M}^k)^\perp \cap I$ concluímos que I é a soma de ideais da forma $\mathcal{M}^{k_i} \langle \lambda^{l_i} \rangle$. Eliminando as redundâncias obtemos as condições $0 < l_1 < \dots < l_s$ e $k > l_1 + k_1 > \dots > l_s + k_s$. ■

Observação:

Ideais intrínsecos de codimensão finita, I , em $\mathcal{O}_{n+r}$, com $r > 1$, não têm uma caracterização tão elegante quanto a descrita acima. Em casos especiais podemos escrever I como soma de termos $\mathcal{M}^k \langle \lambda^\gamma \rangle$, onde $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$, sem nada afirmarmos sobre as relações entre k e $|\gamma|$ descritas em 3.6.

Em $\mathcal{O}_{1+2}$, por exemplo, $I = \mathcal{M}_{1+2}^3 + \langle \lambda_1^2 \rangle + \langle \lambda_2 \rangle$ e $J = \mathcal{M}_{1+2}^2 + \langle \lambda_1 + \lambda_2 \rangle$ são ideais intrínsecos de codimensão finita.

Seguindo as observações feitas depois de 3.4 devemos então,

no caso $r > 1$, exigir que o ideal intrínseco de codimensão finita I tenha a propriedade adicional de que os geradores de I que dependem dos termos de λ sejam monômios para que possamos escrever I como soma de termos $\mathcal{M}^k \langle \lambda^r \rangle$.

O teorema acima nos possibilita relacionar ideais $\mathcal{F}$ -intrínsecos com ideais $\mathcal{B}$ -intrínsecos.

Corolário 3.7:

Ideais $\mathcal{F}$ -intrínsecos de codimensão finita em $\mathcal{S}_{n+1}$ são invariantes por $\mathcal{B}$ -equivalência, isto é, se I é ideal $\mathcal{F}$ -intrínseco então I é ideal $\mathcal{B}$ -intrínseco.

Prova:

Chamaremos de $\mathcal{B}$ -invariantes os conjuntos I com a propriedade:

$$f \in I, \quad g \sim f \quad \Rightarrow \quad g \in I.$$

Inicialmente como em 3.1 afirmamos que os seguintes conjuntos são invariantes:

$\mathcal{M}$, $\langle \lambda \rangle$, $I+J$ e $I.J$ quando I e J são invariantes.

A prova desta afirmação é a mesma de 3.1, devendo apenas considerar $\mathcal{B}$ -equivalência, o difeomorfismo (X, Λ) e substituir $\Lambda(\lambda)$ por $a(\lambda)\lambda$ (Teorema de Taylor) ao provar que $\langle \lambda \rangle$ é invariante.

Com estes resultados e a caracterização acima dos ideais $\mathcal{F}$ -intrínsecos de codimensão finita temos que ideais $\mathcal{F}$ -intrínsecos de codimensão finita são $\mathcal{B}$ -invariantes. ■

O resultado acima será usado no capítulo seguinte na passagem da equivalência forte para a $\mathcal{B}$ -equivalência.

Observemos por 3.1 e por 3.5 que o menor ideal intrínseco de $\mathcal{S}_{n+1}$ contendo os monômios $x_i^k, x_i^{k_1} \lambda_1^{l_1}, \dots, x_i^{k_s} \lambda_s^{l_s}$ para algum k fixado é $\mathcal{M}^k + \mathcal{M}^{k_1} \langle \lambda_1^{l_1} \rangle + \mathcal{M}^{k_s} \langle \lambda_s^{l_s} \rangle$.

Quando expressamos um ideal intrínseco I de $\mathcal{S}_{n+1}$ em função de potências de $\mathcal{M}$ e $\langle \lambda \rangle$ pode acontecer de não estarmos expressando este ideal em sua "representação mais simples". O ideal $I = \mathcal{M}^2 + \mathcal{M} \langle \lambda \rangle$, por exemplo, pode ser descrito simplesmente como $I = \mathcal{M}^2$ pois $\mathcal{M} \langle \lambda \rangle \subset \mathcal{M}^2$.

Definição:

Quando um ideal intrínseco de codimensão finita em $\mathcal{S}_{n+1}$ é descrito na forma $I = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}^{k_1} \langle \lambda_1^{l_1} \rangle + \mathcal{M}^{k_s} \langle \lambda_s^{l_s} \rangle$, onde $0 < l_1 < \dots < l_s$ e $k > l_1 + k_1 > \dots > l_s + k_s$, dizemos que I está em sua *forma reduzida*. Neste caso os monômios $x_i^k, x_i^{k_1} \lambda_1^{l_1}, \dots, x_i^{k_s} \lambda_s^{l_s}$, onde $i = 1, \dots, n$, são ditos *geradores intrínsecos* de I .

Queremos agora distinguir ideais intrínsecos maximais dentro de ideais de codimensão finita.

Definição:

Se I é um ideal de codimensão finita em $\mathcal{S}_{n+1}$ denotamos por $\text{itr } I$ o maior ideal intrínseco contido em I .

Mostremos que tal ideal existe:

Temos $\text{cod } I < \infty$, logo existe k , menor possível, tal que

$\mathcal{M}^k \subset I$. Como $\mathcal{M}^k$ é ideal intrínseco devemos ter $\mathcal{M}^k \subset \text{itr } I \subset I$. Agora, se J é um ideal intrínseco tal que $\mathcal{M}^k \subset J \subset I$, por 3.6, devemos ter

$$J = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}^{\frac{k}{2}} \langle \lambda^{\frac{l}{2}} \rangle + \dots + \mathcal{M}^{\frac{k}{s}} \langle \lambda^{\frac{l}{s}} \rangle$$

com $0 < l_1 < \dots < l_s$ e $k > l_1 + k_1 > \dots > l_s + k_s$; portanto existe apenas um número finito de tais ideais. Como a soma finita de tais ideais é um ideal intrínseco contido em I , basta tomar $\text{itr } I$ como esta soma.

Observe que $\text{cod}(\text{itr } I) < \infty$ pois $\mathcal{M}^k \subset \text{itr } I \subset I$.

Mostraremos agora alguns resultados relacionando partes intrínsecas de espaços tangentes de germes equivalentes.

Proposição 3.8:

Seja $\gamma = (S, \phi)$, onde $\phi = (X, \lambda)$, uma equivalência forte em $\mathcal{E}_{n+1}$ e I um ideal intrínseco de codimensão finita. Então:

a) $\phi^*(I) = I$.

b) $\gamma(I) = I$.

Prova:

a)

Observemos inicialmente que

$$\phi^*(\lambda) = \lambda \circ \phi = \lambda(X^1, \dots, X^n, \lambda) = \lambda$$

$$\phi^*(x_i) = x_i \circ \phi = x_i(X^1, \dots, X^n, \lambda) = X^i.$$

Como $X^i(0,0) = 0$ podemos escrever

$$X^i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_i \cdot \lambda.$$

Como a matriz $(a_{ij}(0,0))_{n \times n}$ coincide com a matriz Jacobiana de X em $(0,0)$, que é difeomorfismo, temos $(a_{ij}(0,0))$ inversível.

Temos então três propriedades:

$$1) \phi^*(\langle \lambda \rangle) = \langle \lambda \rangle$$

De fato, pois $\phi^*(\langle \lambda \rangle) = \langle \phi^*(\lambda) \rangle = \langle \lambda \rangle$.

$$2) \phi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathcal{M}) &= \phi^*(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = \langle X^1, \dots, X^n, \lambda \rangle \\ &= \langle a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1\lambda, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_n\lambda, \lambda \rangle \\ &= \langle a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \lambda \rangle \\ &= \langle x_1, \dots, x_n, \lambda \rangle = \mathcal{M}. \end{aligned}$$

(1.6 foi usado na quinta igualdade).

3) $\phi^*(I \cdot J) = \phi^*(I)\phi^*(J)$ e $\phi^*(I+J) = \phi^*(I) + \phi^*(J)$ se I e J são ideais.

Isto segue imediatamente das definições de soma e produto de ideais e do fato de ϕ^* ser homomorfismo.

Aplicando repetidamente as três propriedades acima a um ideal do tipo $\mathcal{M}^k \cdot \langle \lambda \rangle^l$ concluímos que $\phi^*(\mathcal{M}^k \cdot \langle \lambda \rangle^l) = \mathcal{M}^k \cdot \langle \lambda \rangle^l$.

Voltando ao ideal I , como ele é intrínseco e de codimensão finita, temos por 3.6 que $I = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}^{k_1} \cdot \langle \lambda \rangle^{l_1} + \dots + \mathcal{M}^{k_s} \cdot \langle \lambda \rangle^{l_s}$.

Usando todos estes resultados obtemos finalmente $\phi^*(I) = I$.

b)

Basta usar 2.4.2 b) e o item a), isto é, $\gamma(I) = \phi^*(I) = I$. ■

Proposição 3.9:

Se $g \sim_f h$ e $\text{cod RT}(h) < \omega$ então

a) $\text{itr RT}(g) = \text{itr RT}(h)$

b) $\text{itr J}(g) = \text{itr J}(h)$.

Prova:

a)

Escrevendo $g = S(h \circ \phi)$ temos por 2.4.6 a) que

$\phi^*(RT(h)) = RT(g)$. Em particular, como $\text{itr } RT(h) \subset RT(h)$, devemos ter $\phi^*(\text{itr } RT(h)) \subset RT(g)$.

Por outro lado, como $\text{cod}(\text{itr } RT(h)) < \infty$, por 3.8 a), temos $\phi^*(\text{itr } RT(h)) = \text{itr } RT(h)$.

Assim $\text{itr } RT(h) \subset RT(g)$ e portanto pela definição de $\text{itr } RT(g)$ temos $\text{itr } RT(h) \subset \text{itr } RT(g)$.

Para obter a inclusão inversa basta repetir o procedimento acima trocando g por h e usando $(\phi^{-1})^*$.

b)

Mesmo raciocínio usando $J(h)$. ■

Proposição 3.10:

Se $g \sim_f h$ e $RT(h)$ é ideal intrínseco de codimensão finita então $RT(g) = RT(h)$.

Prova:

Como $g \sim_f h$ podemos escrever $g = \gamma(h) = S(h \circ \phi)$. Por 2.4.6 $RT(g) = \gamma(RT(h))$, mas por 3.8 b) $\gamma(RT(h)) = RT(h)$, assim $RT(g) = RT(h)$. ■

Vimos em 1.14 que se I é ideal de codimensão finita então $\mathfrak{z} = I + I^\perp$. Vimos também que em geral $I \cap I^\perp \neq \{0\}$. Mas para ideais intrínsecos temos:

Proposição 3.11:

Se $I \subset \mathfrak{z}_{n+1}$ é ideal intrínseco de codimensão finita, então $\mathfrak{z}_{n+1} = I \oplus I^\perp$.

Prova:

Por 1.14 temos $\mathfrak{z}_{n+1} = I + I^\perp$, faltando mostrar que

$$I \cap I^\perp = \{0\}.$$

Seja $p = \sum_{\gamma=(\alpha,\beta)} a_\gamma x^\alpha \lambda^\beta$ polinômio não nulo em I .

Por 3.4 temos $x^\alpha \lambda^\beta \in I$ para todo α tal que $a_\gamma \neq 0$, logo $x^\alpha \lambda^\beta \in I^\perp$ para todos estes γ 's e portanto $p \in I^\perp$. ■

Proposição 3.12:

Se $I \subset \mathcal{Z}_{n+1}$ é ideal de codimensão finita então $I = \text{itr } I \oplus V$ onde $V = (\text{itr } I)^\perp \cap I$.

Prova:

Como $\text{itr } I \subset I$ e $V \subset I$ temos $\text{itr } I + V \subset I$.

Por outro lado, como $f \in \mathcal{Z}_{n+1}$, podemos escrever $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in \text{itr } I$ e $f_2 \in (\text{itr } I)^\perp$. Mais especificamente, se $f \in I$ podemos escrever $f = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$, onde $\bar{f}_1 \in (\text{itr } I) \cap I = \text{itr } I$ e $\bar{f}_2 \in (\text{itr } I)^\perp \cap I = V$.

Portanto $I = \text{itr } I + V$.

Finalmente, por 3.11, $\text{itr } I \cap (\text{itr } I)^\perp = \{0\}$ e como $V \subset (\text{itr } I)^\perp$ temos $(\text{itr } I) \cap V = \{0\}$. ■

Estamos agora em condições de calcular $RT(g)$ em um exemplo em que $RT(g)$ não é intrínseco e expressá-lo como

$$RT(g) = \text{itr } RT(g) \oplus V.$$

Exemplo:

Para $g(x, \lambda) = x^5 + x^3 \lambda + \lambda^2$ mostraremos que

$$RT(g) = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle + [R(g, xg_x)]$$

De fato, por definição temos

$$RT(g) = \langle g, xg_x, \lambda g_x \rangle = \langle x^5 + x^3 \lambda + \lambda^2, 5x^4 + 3x^2 \lambda, 5x^3 \lambda + 3x^2 \lambda^2 \rangle$$

Procuremos inicialmente uma potência de $\mathcal{M}$ contida em $RT(g)$, verificando se seus geradores estão em $RT(g)$.

Analisando $\mathcal{M}^5$ verificamos que seus geradores não estão em $RT(g)$, mas para $\mathcal{M}^6$ temos

$$\lambda^6 = \lambda^4(g) + r_1$$

$$\lambda^5 x = \lambda^3 x(g) + r_2$$

$$\lambda^4 x^2 = \lambda^2 x^2(g) + r_3$$

$$\lambda^3 x^3 = \lambda x^3(g) + r_4$$

$$\lambda^2 x^4 = x^4(g) + r_5$$

$$\lambda x^5 = \frac{x^2}{3}(xg_x) + r_6$$

$$x^6 = \frac{x}{5}(xg_x) - \frac{3}{25}(\lambda g_x) + \frac{9}{25}x^2(g) - \frac{3}{25}x^2(xg_x) + r_7,$$

onde $r_i \in \mathcal{M}^7$.

Em termos de ideais temos $\mathcal{M}^6 \subset RT(g) + \mathcal{M}^7$, logo por 2.3.10 temos $\mathcal{M}^6 \subset RT(g)$.

Para determinar a parte intrínseca restante devemos ir testando potências $\mathcal{M}^k \langle \lambda \rangle^l$ com $k+l < 6$, $k < 5$ e $l > 0$.

Para $\mathcal{M}^4 \langle \lambda \rangle = \langle x^4 \lambda, x^3 \lambda^2, x^2 \lambda^3, x \lambda^4, \lambda^5 \rangle$ temos

$$x^4 \lambda = \frac{x}{3}(xg_x) + r_1$$

$$x^3 \lambda^2 = x^3(g) + r_2$$

$$x^2 \lambda^3 = x^2 \lambda(g) + r_3$$

$$x \lambda^4 = x \lambda^2(g) + r_4$$

$$\lambda^5 = \lambda^3(g) + r_5,$$

onde $r_i \in \mathcal{M}^6$.

Em termos de ideais $\mathcal{M}^4 \langle \lambda \rangle \subset RT(g) + \mathcal{M}^6$, e como $\mathcal{M}^6 \subset RT(g)$ temos $\mathcal{M}^4 \langle \lambda \rangle \subset RT(g)$.

Continuando o raciocínio, para $\mathcal{M} \langle \lambda^2 \rangle = \langle x \lambda^2, \lambda^3 \rangle$ temos

$$x \lambda^2 = x(g) + r_1$$

$$\lambda^3 = \lambda(g) + r_2, \quad \text{onde } r_i \in \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4 \langle \lambda \rangle.$$

Em termos de ideais temos $\mathcal{M}.\langle \lambda^2 \rangle \subset RT(g) + \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4.\langle \lambda \rangle$,
 logo $\mathcal{M}.\langle \lambda^2 \rangle \subset RT(g)$.

Deste modo $\mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4.\langle \lambda \rangle + \mathcal{M}.\langle \lambda^2 \rangle \subset RT(g)$, terminando o
 processo e mostrando que

$$\text{itr } RT(g) = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4.\langle \lambda \rangle + \mathcal{M}.\langle \lambda^2 \rangle = \langle x^6, x^4\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle$$

Com o uso de 3.12 o cálculo da parte não intrínseca de $RT(g)$
 se torna muito simples:

$$[\text{itr } RT(g)]^\perp = \langle 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \lambda, \lambda^2, x\lambda, x^2\lambda, x^3\lambda \rangle,$$

$$[\text{itr } RT(g)]^\perp \cap RT(g) = \mathbb{R}\langle x^5 + x^3\lambda + \lambda^2, 5x^5 + 3x^3\lambda \rangle = \mathbb{R}\langle g, xg_x \rangle$$

Assim

$$RT(g) = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4.\langle \lambda \rangle + \mathcal{M}.\langle \lambda^2 \rangle + \mathbb{R}\langle g, xg_x \rangle.$$

CAPÍTULO IV - O PROBLEMA DO RECONHECIMENTO

§1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo tratamos do assunto mais específico da dissertação. Dado um problema de bifurcação $h \in \mathcal{Z}_{n+1}$, resolver o problema do reconhecimento para h consiste em determinar explicitamente condições (envolvendo derivadas na origem) para que outro germe $g \in \mathcal{Z}_{n+1}$ seja fortemente equivalente a h . (Consideraremos a $\mathcal{B}$ -equivalência no §6).

Para $h(x, \lambda) = x^3 - x\lambda$, por exemplo, considerando $g \in \mathcal{Z}_2$ mostraremos que vale:

$$g \underset{f}{\sim} h \iff g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = 0, \quad g_{xxx} > 0 \text{ e } g_{x\lambda} < 0 \text{ em } (0,0).$$

Desenvolveremos algoritmos que solucionam o problema do reconhecimento para vários casos.

Em geral consideraremos h como o representante mais simples da classe de equivalência considerada e nos referiremos a ele como uma *forma normal* para o problema de bifurcação.

Considerando $h \in \mathcal{Z}_{n+1}$ temos a seguinte questão:

— Dado um monômio $x^\alpha \lambda^l$ em $\mathcal{Z}_{n+1}$, para quais valores de t temos $(h + tx^\alpha \lambda^l) \underset{f}{\sim} h$?

Quando $(h+tx^{\alpha_l}) \sim_f h$ apenas para $t = 0$ temos $D^{(\alpha,l)}h(0,0) = 0$.

Quando $(h+tx^{\alpha_l}) \sim_f h \quad \forall t \in \mathbb{R}$ o valor de $D^{(\alpha,l)}h(0,0)$ não tem influência na equivalência.

Substituindo h por $g \sim_f h$ temos uma situação mais interessante. Mais especificamente:

Para quais monômios x^{α_l} temos $(g+tx^{\alpha_l}) \sim_f g \quad \forall g \sim_f h$ e $\forall t \in \mathbb{R}$?

A noção de determinação finita, introduzida no §3 do capítulo II, resolve parcialmente esta questão. Quando $M^k \subset RT(h)$ temos $h \sim_f j^k h$ e portanto os monômios de M^{k+1} são soluções.

As considerações acima separam os monômios de $\mathcal{E}_{n+1}$ em três classes.

Definições:

Dado $h \in \mathcal{E}_{n+1}$ definimos os seguintes conjuntos:

a) *Termos de Ordem Baixa:*

$$\mathcal{O}_b(h) = \{p \in \mathcal{E}_{n+1}; \forall g \sim_f h \text{ temos } g+tp \sim_f g \text{ apenas para } t=0\}.$$

b) *Termos de Ordem Alta:*

$$\mathcal{O}_a(h) = \{p \in \mathcal{E}_{n+1}; \forall g \sim_f h \text{ temos } g+tp \sim_f g \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

c) *Termos de Ordem Intermediária:*

$$\mathcal{O}_i(h) = (\mathcal{O}_b(h) \cup \mathcal{O}_a(h))^c,$$

o c indica complementar em $\mathcal{E}_{n+1}$.

Os termos de ordem alta caracterizam os germes equivalentes a h mais precisamente que o critério de determinação finita.

Considerando $h \in \mathcal{E}_{n+1}$, $g \sim_f h$, $x^{\alpha_l} \in \mathcal{O}_a(h)$ e denotando $f = g + tx^{\alpha_l}$ temos pela definição de $\mathcal{O}_a(h)$ que $(g+tx^{\alpha_l}) \sim_f g$

$\forall t \in \mathbb{R}$. Variando t podemos fazer $D^{(\alpha,1)}f(0,0)$ assumir qualquer valor arbitrário, isto é, a derivada $D^{(\alpha,1)}f(0,0)$ não pode entrar na solução do problema do reconhecimento para h .

§2 - TERMOS DE ORDEM BAIXA

Observemos inicialmente que $\mathcal{O}_b(h)$ não é espaço vetorial pois $0 \notin \mathcal{O}_b(h)$.

Para dar uma caracterização explícita de $\mathcal{O}_b(h)$ encontraremos um subespaço vetorial de $\mathcal{I}_{n+1}$ contido em $\mathcal{O}_b(h) \cup \{0\}$ de fácil caracterização.

Como vimos em 3.1, a intersecção qualquer de uma família de ideais intrínsecos de $\mathcal{I}_{n+1}$ é um ideal intrínseco. Podemos então definir:

Definição:

Dado $h \in \mathcal{M}_{n+1}$, o menor ideal intrínseco contendo h , $\mathcal{J}(h)$, é a intersecção de todos ideais intrínsecos contendo h .

Segue da definição que se I é um ideal intrínseco contendo h então $\mathcal{J}(h) \subset I$.

Mostraremos agora alguns resultados envolvendo $\mathcal{J}(h)$ para $\mathcal{B}$ -equivalência.

Proposição 4.2.1:

Sejam $g, h \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Se $g \sim h$ então $\mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(h)$.

Prova:

Como $h \in \mathcal{J}(h)$, $g \sim h$ e $\mathcal{J}(h)$ é intrínseco temos por 3.7 $g \in \mathcal{J}(h)$. Mas $\mathcal{J}(g)$ é o menor ideal intrínseco contendo g logo $\mathcal{J}(g) \subset \mathcal{J}(h)$.

Trocando g por h obtemos a inclusão inversa. ■

Proposição 4.2.2:

Seja $h \in \mathfrak{S}_{n+1}$ tal que $\text{cod RT}(h) < \infty$ ou h polinômio.

Então:

- a) $\mathcal{J}(h) \supset \text{RT}(h)$ (e $\therefore \text{cod } \mathcal{J}(h) < \infty$ quando $\text{cod RT}(h) < \infty$)
- b) Se $\text{RT}(h)$ é intrínseco então $\mathcal{J}(h) = \text{RT}(h)$
- c) $\mathcal{J}(h) = \sum \langle M^{|\alpha|} \langle \lambda^\beta \rangle; D^{(\alpha, \beta)} h(0,0) \neq 0 \rangle$.

Prova:

a)

Como $\text{cod RT}(h) < \infty$ existe k tal que $M^k \subset \text{RT}(h)$ e assim por 2.3.7 temos $h \sim j^k h$. Por 4.2.1 temos $\mathcal{J}(h) = \mathcal{J}(j^k h)$, logo podemos tomar h como um polinômio. Assim por 3.3 temos $\mathcal{J}(h) \supset \text{RT}(h)$.

b)

Pela definição de $\mathcal{J}(h)$, como $\text{RT}(h)$ é intrínseco e $h \in \text{RT}(h)$, temos $\mathcal{J}(h) \subset \text{RT}(h)$. A inclusão contrária foi obtida em a).

c)

Como na parte a), podemos supor h como um polinômio $\sum_{\gamma=(\alpha, \beta)} a_\gamma x^\alpha \lambda^\beta$. Denotando simplesmente por Σ o lado direito da

igualdade da afirmação em c) temos inicialmente que esta soma é finita.

A inclusão $\mathcal{J}(h) \subset \Sigma$ é imediata pois Σ é intrínseco e contém h .

Por outro lado, pela parte a), $\mathcal{J}(h)$ é de codimensão finita, logo por 3.4 temos $x^\alpha \lambda^\beta \in \mathcal{J}(h)$ para todo $\gamma = (\alpha, \beta)$ tal que $a_\gamma \neq 0$. Daí, por 3.5, temos $\mathcal{M}^{|\alpha|} \langle \lambda \rangle^\beta \subset \mathcal{J}(h)$ para todo γ tal que $a_\gamma \neq 0$, provando que $\Sigma \subset \mathcal{J}(h)$. ■

Observemos que a caracterização de $\mathcal{J}(h)$ obtida em 4.2.2 c) nem sempre é a forma reduzida de $\mathcal{J}(h)$. Para $h(x, \lambda) = x^2 + x\lambda$ em $\mathfrak{E}_{1+1}$, por exemplo, temos $\mathcal{J}(h) = \mathcal{M}^2 + \mathcal{M} \langle \lambda \rangle = \mathcal{M}^2$.

Como $\mathcal{J}(h)$ é ideal ele é também espaço vetorial e podemos então considerar o espaço vetorial $\mathcal{J}(h)^\perp$.

Teorema 4.2.3 (Caracterização de termos de ordem baixa):

Seja $h \in \mathfrak{E}_{n+1}$ um germe de codimensão finita.

a) Se $g \sim h$ então para todo $x^\alpha \lambda^\beta \in \mathcal{J}(h)^\perp$ temos

$$D^{(\alpha, \beta)} g(0, 0) = 0.$$

b) $\mathcal{J}(h)^\perp \subset \mathcal{O}_b(h) \cup \{0\}$.

Prova:

a)

Suponhamos que $x^\alpha \lambda^\beta \in \mathcal{J}(h)^\perp$ e $D^{(\alpha, \beta)} g(0, 0) \neq 0$.

Pela invariança da codimensão, 2.4.7, temos $\text{cod RT}(g) < \infty$. Daí, como $D^{(\alpha, \beta)} g(0, 0) \neq 0$, temos por 4.2.2 c) $x^\alpha \lambda^\beta \in \mathcal{J}(g)$.

Por outro lado, como $g \sim h$ temos $\mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(h)$ e assim $x^\alpha \lambda^\beta \in \mathcal{J}(h)$, chegando a um absurdo pois assumimos $x^\alpha \lambda^\beta \in \mathcal{J}(h)^\perp$.

b)

Mostraremos que todo monômio não nulo de $\mathcal{E}_{n+1}$ que não está em $\mathcal{O}_b(h)$ também não está em $\mathcal{J}(h)^\perp$.

Se $x^\alpha \lambda^\beta \notin \mathcal{O}_b(h)$ então existe $g \sim h$ e $t_0 \neq 0$ tal que $(g + t_0 x^\alpha \lambda^\beta) \sim g$. Denotando $f = g + t_0 x^\alpha \lambda^\beta$ temos

$$D^{(\alpha, \beta)} f(0, 0) = t_0 + D^{(\alpha, \beta)} g(0, 0).$$

Como $t_0 \neq 0$ a diferença das duas derivadas parciais da expressão anterior deve ser não nula e assim $D^{(\alpha, \beta)} f(0, 0) \neq 0$ ou $D^{(\alpha, \beta)} g(0, 0) \neq 0$. Disto, como $g \sim h$ e $f \sim h$ concluímos por a) que $x^\alpha \lambda^\beta \notin \mathcal{J}(h)^\perp$. ■

O próximo resultado caracteriza parte dos termos de ordem intermediária.

Teorema 4.2.4:

Sejam $h \in \mathcal{E}_{n+1}$ com $\text{cod RT}(h) < \infty$ e $g \sim h$. Se $x^\alpha \lambda^l = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \lambda^l$ é um gerador intrínseco de $\mathcal{J}(h)$ então existe algum $k = (k_1, \dots, k_n)$ com $|k| = |\alpha|$ tal que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^l g(0, 0) \neq 0.$$

Prova:

Como $g \sim h$ temos por 4.2.1 que $\mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(h)$.

Usando 4.2.2 c) temos uma caracterização de $\mathcal{J}(h)$. Como $x^\alpha \lambda^l$ é gerador intrínseco de $\mathcal{J}(h)$ temos que $\mathcal{M}^{|\alpha|, \langle \lambda^\beta \rangle}$ é realmente um termo da forma reduzida de $\mathcal{J}(h)$ e, portanto, por 4.2.2 c), concluímos que deve existir algum $k = (k_1, \dots, k_n)$ com $|k| = |\alpha|$ tal que $D^{(k, l)} g(0, 0) \neq 0$. ■

No teorema acima nem sempre temos $\alpha = k$. Seja, por exemplo, $h \in \mathcal{H}_{2+1}$ definido como $h(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 - x_2^2 + \lambda$. Considerando $X(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1)$ e denotando $g = h(X, \lambda)$ temos: $g \sim h$, $\mathcal{J}(h) = \mathcal{M}^2 + \langle \lambda \rangle$, $g(x_1, x_2, \lambda) = h(X(x_1, x_2, \lambda), \lambda) = +4x_1x_2 + \lambda$ e x_1^2 gerador intrínseco de $\mathcal{J}(h)$, mas $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 g(0,0) = 0$.

O caso de maior importância deste teorema é quando $n = 1$ pois quando isto ocorre a única possibilidade para k é ser igual a α e assim o teorema diz que para todo g equivalente a h e para todo gerador intrínseco $x^\alpha \lambda^l$ de $\mathcal{J}(h)$ devemos ter $D^{(k,l)}g(0,0) \neq 0$. Em outras palavras, os termos de ordem intermediária têm uma caracterização melhor no caso $n = 1$.

Concluiremos esta seção com dois exemplos em $\mathcal{H}_{1+1}$ e outro em $\mathcal{H}_{2+1}$.

Exemplo 1:

$$h(x, \lambda) = x^3 - x\lambda$$

$$S(h) = \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \langle \lambda \rangle = \langle x^3, x\lambda, \lambda^2 \rangle$$

$$S(h)^\perp = \mathbb{R} \langle 1, x, \lambda, x^2 \rangle$$

$$\text{Geradores intrínsecos de } S(h): x^3, x\lambda$$

Por 4.2.3 e 4.2.4 concluímos que se $g \sim h$ então em $(x, \lambda) = (0, 0)$ temos:

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = 0; \quad g_{xxx} \neq 0 \quad \text{e} \quad g_{x\lambda} \neq 0.$$

Exemplo 2:

$$h(x, \lambda) = x^5 + x^3 \lambda + \lambda^2$$

$$S(h) = \mathcal{M}^5 + \mathcal{M}^3 \cdot \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle = \langle x^5, x^3 \lambda, \lambda^2 \rangle$$

$$S(h)^\perp = \mathbb{R} \langle 1, x, x^2, x^3, x^4, \lambda, x\lambda, x^2 \lambda \rangle$$

Geradores intrínsecos de $S(h)$: $x^5, x^3 \lambda, \lambda^2$

Por 4.2.3 e 4.2.4 concluímos que se $g \sim h$ então em $(x, \lambda) = (0, 0)$ temos:

$$\begin{cases} g = g_x = g_{xx} = g_{xxx} = g_{xxxx} = g_\lambda = g_{x\lambda} = g_{xx\lambda} = 0 \\ g_{xxxxx} \neq 0, \quad g_{xxx\lambda} \neq 0 \quad \text{e} \quad g_{\lambda\lambda} \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo 3:

$$h(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda$$

$$S(h) = \mathcal{M}^2 + \langle \lambda \rangle = \langle x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, \lambda \rangle$$

$$S(h)^\perp = \mathbb{R} \langle 1, x_1, x_2 \rangle$$

Geradores intrínsecos de $S(h)$: $x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, \lambda$

Por 4.2.3 se $g \sim h$ temos

$$g = g_{x_1} = g_{x_2} = 0.$$

Por 4.2.4 temos $g_\lambda \neq 0$ e pelo menos mais uma das seguintes condições:

$$\text{ou } g_{x_1 x_1} \neq 0 \quad \text{ou } g_{x_1 x_2} \neq 0 \quad \text{ou } g_{x_2 x_2} \neq 0.$$

§3 - TERMOS DE ORDEM ALTA

Nesta seção caracterizaremos explicitamente termos de ordem alta para $h \in \mathcal{E}_{n+1}$. Isto será feito com o auxílio de um ideal intrínseco, $\mathcal{P}(h)$, contido em $\mathcal{O}_a(h)$. Mostraremos que $\text{itr}(\mathcal{M}, \text{RT}(h)) \subset \mathcal{P}(h)$ e, no caso em que $n = 1$, encontraremos explicitamente $\mathcal{P}(h)$.

Recordando a definição dos termos de ordem alta temos

$$\mathcal{O}_a(h) = \{p \in \mathcal{E}_{n+1}; \forall g \sim_f h \text{ temos } g+tp \sim_f g \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Proposição 4.3.1:

Se $h \in \mathcal{E}_{n+1}$ então $\mathcal{O}_a(h)$ é subespaço vetorial intrínseco de $\mathcal{M}_{n+1}$.

Prova:

1) $\mathcal{O}_a(h)$ é espaço vetorial:

Sejam $p \in \mathcal{O}_a(h)$, $s \in \mathbb{R}$ e $g \sim_f h$. Temos, $g+tp \sim_f g \quad \forall t \in \mathbb{R}$
logo $g+t(sp) \sim_f g \quad \forall t \in \mathbb{R}$, isto é, $sp \in \mathcal{O}_a(h)$.

Sejam $p_1, p_2 \in \mathcal{O}_a(h)$ e $g \sim_f h$. Temos $g+tp_1 \sim_f h \quad \forall t \in \mathbb{R}$
logo $(g+tp_1)+sp_2 \sim_f g \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$. Tomando $s = t$ temos

$g+t(p_1+p_2) \underset{f}{\sim} g \quad \forall t \in \mathbb{R}$, mostrando que $p_1+p_2 \in \mathcal{O}_a(h)$.

2) $\mathcal{O}_a(h)$ é intrínseco:

Sejam $p \in \mathcal{O}_a(h)$, $g \underset{f}{\sim} h$, $t \in \mathbb{R}$ e γ uma equivalência forte. Temos

$$g+t\gamma(p) = g+\gamma(tp) = \gamma(\gamma^{-1}(g)+tp).$$

Como $\gamma^{-1}(g) \underset{f}{\sim} h$ temos $\gamma^{-1}g+tp \underset{f}{\sim} h$ e assim $\gamma(\gamma^{-1}(g)+tp) \underset{f}{\sim} h$, isto é, $g+t\gamma(p) \underset{f}{\sim} h$. Portanto $\gamma(p) \in \mathcal{O}_a(h)$, mostrando que $\mathcal{O}_a(h)$ é intrínseco. ■

O conjunto da definição seguinte caracterizará melhor os termos de ordem alta.

Definição:

Se $h \in \mathcal{Z}_{n+1}$, definimos $\mathcal{P}(h)$ como

$$\mathcal{P}(h) = \{p \in \mathcal{Z}_{n+1}; \forall g \underset{f}{\sim} h \text{ e } \forall t \in \mathbb{R} \text{ temos } RT(g+tp) = RT(g)\}.$$

(Usamos a letra "p" de perturbação).

Os resultados seguintes caracterizam os elementos de $\mathcal{P}(h)$ como termos de ordem alta.

Observemos que se $p \in \mathcal{P}(h)$ então $sp \in \mathcal{P}(h) \quad \forall s \in \mathbb{R}$ pois

$$RT(g+t(sp)) = RT(g+(ts)p) = RT(g).$$

Teorema 4.3.2:

Seja $h \in \mathcal{Z}_{n+1}$ e $p \in \mathcal{P}(h)$. Então

$$g \underset{f}{\sim} h \iff g+p \underset{f}{\sim} h.$$

Prova:

Considerando $g \sim_f h$ temos $RT(g+tp) = RT(g) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, logo por 2.3.5 temos $g+tp \sim_f h$ e portanto $g+p \sim_f h$.

Por outro lado, consideremos $g+p \sim_f h$. Como $-p \in \mathcal{P}(h)$, usando a implicação que acabamos de provar, temos $(g+p)-p \sim_f h$, isto é, $g \sim_f h$. ■

Corolário 4.3.3:

$$\mathcal{P}(h) \subset \mathcal{O}_a(h).$$

Prova:

Seja $p \in \mathcal{P}(h)$. Como $tp \in \mathcal{P}(h) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ temos por 4.3.2 que $g+tp \sim_f g, \quad \forall g \sim_f h$, isto é, $p \in \mathcal{O}_a(h)$. ■

Corolário 4.3.4:

Se $RT(h)$ é intrínseco de codimensão finita então $\mathcal{O}_a(h) \subset \mathcal{P}(h)$ e portanto $\mathcal{O}_a(h) = \mathcal{P}(h)$.

Prova:

Seja $p \in \mathcal{O}_a(h)$. Por definição de $\mathcal{O}_a(h)$ temos $g+tp \sim_f g \quad \forall g \sim_f h$ e $\forall t \in \mathbb{R}$. Pela transitividade da relação de equivalência temos $g+tp \sim_f h, \quad \forall g \sim_f h$ e $\forall t \in \mathbb{R}$. Disto, usando 3.10, obtemos

$$RT(g+tp) = RT(h) = RT(g) \quad \forall g \sim_f h, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

isto é, $p \in \mathcal{P}(h)$. ■

Corolário 4.3.5:

Seja $h \in \mathcal{S}_{n+1}$ com $\text{cod } RT(h) < \infty$. Então

a) $\mathcal{P}(h)^\perp \cap \mathcal{P}(h) = \{0\}$ e portanto $\mathcal{P}(h) \subset \mathcal{S}(h)$.

b) Quando $n = 1$ os geradores intrínsecos de $\mathcal{S}(h)$ não estão em $\mathcal{P}(h)$.

Prova:

a)

Suponhamos $p \in \mathcal{P}(h)^\perp \cap \mathcal{X}(h)$ com $p \neq 0$ e seja $g \sim_f h$.

Por 4.2.3 b), $p \in \mathcal{P}(h)^\perp \subset \mathcal{O}_b(h) \cup \{0\}$ logo $g+tp \sim_f h$ apenas para $t = 0$.

Por outro lado, como $p \in \mathcal{X}(h)$ temos por 4.3.2 que $(g+tp) \sim_f h \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Chegamos, portanto, a um absurdo, e assim devemos ter $p = 0$, mostrando que $\mathcal{P}(h)^\perp \cap \mathcal{X}(h) = 0$.

Deste resultado, como $\mathcal{X}(h) \subset \mathcal{P}(h)^\perp \oplus \mathcal{P}(h)$, segue que $\mathcal{X}(h) \subset \mathcal{P}(h)$.

b)

Suponhamos que $x^{k,l} \in \mathcal{X}(h)$ e que $x^{k,l}$ é um gerador intrínseco de $\mathcal{P}(h)$.

Como $x^{k,l} \in \mathcal{X}(h)$ temos por 4.3.2 que $h+tx^{k,l} \sim h \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Como $x^{k,l}$ é um monômio de h temos que $D^{(k,l)}h(0,0) \neq 0$ e portanto existe uma escolha não nula de t tal que $D^{(k,l)}[h+tx^{k,l}](0,0) = 0$. Por 4.2.4, como $n = 1$, para esta escolha de t temos um absurdo. ■

O conjunto $\mathcal{X}(h)$ tem uma estrutura especial.

Proposição 4.3.6:

$\mathcal{X}(h)$ é ideal.

Prova:

a) Dados $p, q \in \mathcal{X}(h)$ mostremos que $p+q \in \mathcal{X}(h)$:

Tomando $g \sim_f h$ temos pela definição de $\mathcal{X}(h)$ que $RT(g+tp) = RT(g)$. Por 4.3.2 $g+tp \sim_f h \quad \forall t \in \mathbb{R}$, logo novamente

pela definição de $\mathcal{P}(h)$ temos $RT((g+tp)+sq) = RT(g+tp) \forall s \in \mathbb{R}$.

Destes resultados, fazendo $t = s$, obtemos

$$RT(g+t(p+q)) = RT(g+tp) = RT(g),$$

ou seja, $p+q \in \mathcal{P}(h)$.

b) Dados $p \in \mathcal{P}(h)$ e $f \in \mathcal{Z}_{n+1}$ mostremos que $fp \in \mathcal{P}(h)$:

Por Taylor podemos escrever $f = r+q$, onde $r = f(0,0)$ e $q \in \mathcal{M}$.

Como $fp = (r+q)p = rp+qp$, por a) basta mostrar que $rp, qp \in \mathcal{P}(h)$.

Já vimos que $rp \in \mathcal{P}(h)$ pois

$$RT(g+t(rp)) = RT(g+(tr)p) = RT(g) \forall g \sim h.$$

Falta então mostrar que $qp \in \mathcal{P}(h)$, isto é, que

$$RT(g+tqp) = RT(g) \forall g \sim h.$$

Em outras palavras, usando a notação simplificada, devemos mostrar que

$$\langle g+tqp, x_i g_{x_j} + t x_i(qp)_{x_j}, \lambda g_{x_j} + t \lambda(qp)_{x_j} \rangle = \langle g, x_i g_{x_j}, \lambda g_{x_j} \rangle.$$

Por 1.8 basta mostrar que

$$tqp, t x_i(qp)_{x_j}, t \lambda(qp)_{x_j} \in \mathcal{M}.RT(g).$$

Para isto, como $p \in \mathcal{P}(h)$, temos $RT(g+p) = RT(g)$, isto é,

$$\langle g+p, x_i g_{x_j} + x_i p_{x_j}, \lambda g_{x_j} + \lambda p_{x_j} \rangle = \langle g, x_i g_{x_j}, \lambda g_{x_j} \rangle.$$

Desta igualdade temos $p, x_i p_{x_j}, \lambda p_{x_j} \in RT(g)$. Usando isto, mais o fato de q pertencer a $\mathcal{M}$, obtemos o requerido, isto é,

$$qp \in \mathcal{M}.RT(g)$$

$$x_i(qp)_{x_j} = x_i(q_{x_j} p + qp_{x_j}) = (x_i q_{x_j})p + q(x_i p_{x_j}) \in \mathcal{M}.RT(g)$$

$$\lambda(qp)_{x_j} = \lambda(q_{x_j} p + qp_{x_j}) = (\lambda q_{x_j})p + q(\lambda p_{x_j}) \in \mathcal{M}.RT(g). \quad \blacksquare$$

Como $\mathcal{P}(h)$ é ideal o teorema 4.3.2 pode ser escrito em termos de $\text{mod } \mathcal{P}(h)$ como:

$$g \sim_f h \iff g \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)}.$$

Proposição 4.3.7:

$\mathcal{P}(h)$ é intrínseco.

Prova:

Seja $p \in \mathcal{P}(h)$ e $\gamma: \mathfrak{g}_{n+1} \longrightarrow \mathfrak{g}_{n+1}$ uma equivalência forte qualquer.

Devemos mostrar que $\gamma(p) \in \mathcal{P}(h)$. Seja então $g \sim_f h$. Temos

$$RT(g+t\gamma(p)) = RT(\gamma(\gamma^{-1}(g)+tp)) = \gamma RT(\gamma^{-1}(g)+tp),$$

onde na última igualdade usamos 2.4.6.

Por outro lado, como $\gamma^{-1}(g) \sim_f g$ temos $\gamma^{-1}(g) \sim_f h$ e portanto, pela definição de $\mathcal{P}(h)$, obtemos

$$RT(\gamma^{-1}(g)+tp) = RT(\gamma^{-1}(g)).$$

Juntando os resultados obtemos

$$RT(g+t\gamma(p)) = \gamma RT(\gamma^{-1}(g)) = RT(g),$$

e assim $\gamma(p) \in \mathcal{P}(h)$. ■

A proposição 4.3.8 abaixo simplifica bastante os cálculos pois não precisamos considerar a variável t nem os germes $g \sim_f h$ quando verificamos se $RT(g+tp) = RT(g) \forall g \sim_f h$, basta considerar o caso em que $t = 1$ e $g = h$.

Proposição 4.3.8:

Seja $h \in \mathfrak{g}_{n+1}$. Se I é ideal intrínseco e $RT(h+p) = RT(h) \forall p \in I$ então $I \subset \mathcal{P}(h)$.

Prova:

Sejam $p \in I$, $t \in \mathbb{R}$ e $g \sim_f h$. Devemos mostrar que

$$RT(g+tp) = RT(g).$$

Seja então γ uma equivalência forte satisfazendo $\gamma(h) = g$.

Temos

$$RT(g+tp) = RT(\gamma(h)+tp) = RT(\gamma(h+\gamma^{-1}(tp))) = \gamma RT(h+\gamma^{-1}(tp)),$$

onde na última igualdade usamos 2.4.6.

Por outro lado, como I é ideal intrínseco temos $tp \in I$ e $\gamma^{-1}(tp) \in I$. Vale então, por hipótese, que $RT(h+\gamma^{-1}(tp)) = RT(h)$. Substituindo este resultado na igualdade anterior e usando novamente 2.4.6 obtemos

$$RT(g+tp) = \gamma RT(h) = RT(\gamma(h)) = RT(g). \quad \blacksquare$$

O teorema seguinte identifica os termos de ordem alta que podem ser efetivamente calculados. Estes termos determinam a ordem das derivadas que não podem entrar no problema do reconhecimento. Para o caso $n \neq 1$, ele é, sem dúvida, o resultado mais útil para o problema do reconhecimento na teoria de bifurcação.

Teorema 4.3.9:

Se $h \in \mathcal{X}_{n+1}$ tem codimensão finita então $\text{itr}(\mathcal{M}.RT(h)) \subset \mathcal{P}(h)$.

Prova:

Denotemos $I = \text{itr}(\mathcal{M}.RT(h))$. Por 4.3.8 para mostrar que $I \subset \mathcal{P}(h)$ basta mostrar que $RT(h+p) = RT(h) \quad \forall p \in I$.

Considerando $p \in I$ e simplificando a notação sabemos que

$$RT(h+p) = \langle h+p, x_i h_{x_j} + x_i p_{x_j}, \lambda h_{x_j} + \lambda p_{x_j} \rangle$$

Como I é ideal intrínseco de codimensão finita, temos por 3.2 $x_i p_{x_j}, \lambda p_{x_j} \in I$ e assim

$$p, x_i p_{x_j}, \lambda p_{x_j} \in I = \text{itr}(\mathcal{M}.RT(h)) \subset \mathcal{M}.RT(h).$$

Por 1.8 temos então

$$\langle h+p, x_i h_{x_j} + x_i p_{x_j}, \lambda h_{x_j} + \lambda p_{x_j} \rangle = \langle h, x_i h_{x_j}, \lambda h_{x_j} \rangle,$$

isto é, $RT(h+p) = RT(h)$. ■

Uma consequência imediata do teorema acima é que $\text{cod } \mathcal{P}(h)$ é finita quando $\text{cod } RT(h) < \omega$.

Quando $n = 1$ é possível obter uma caracterização completa de $\mathcal{P}(h)$ e, consequentemente, caracterizar mais precisamente $\mathcal{O}_a(h)$.

Lembrando que $J(h) = \mathcal{M}.RT(h) + \mathbb{R}\langle \lambda h_x \rangle$ temos

Teorema 4.3.10:

Se $h \in \mathfrak{X}_2$ é um problema de bifurcação de codimensão finita então $\mathcal{P}(h) = \text{itr } J(h)$.

A demonstração deste teorema é específica para a situação considerada e usa técnicas não sofisticadas, porém é extremamente longa e trabalhosa. Para não interromper a sequência, faremos esta demonstração separadamente no §7.

Como aplicação continuaremos desenvolvendo os três exemplos iniciados no §2.

Exemplo 1:

Para $h(x, \lambda) = x^3 - x\lambda$ temos $RT(h) = \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle$.

Por 2.4.4 a)

$$\begin{aligned} J(h) &= \mathcal{M} \cdot RT(h) + \mathbb{R} \langle \lambda h_x \rangle = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathbb{R} \langle 3x^2\lambda - \lambda^2 \rangle \\ &= \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle. \end{aligned}$$

Assim por 4.3.10

$$\mathcal{P}(h) = \text{itr } J(h) = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle.$$

Exemplo 2:

Para $h(x, \lambda) = x^5 + x^2\lambda + \lambda^2$ vimos no final do capítulo III que $RT(h) = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle + \mathbb{R} \langle h, xh_x \rangle$.

Por 2.4.4 a)

$$\begin{aligned} J(h) &= \mathcal{M} \cdot RT(h) + \mathbb{R} \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \mathcal{M}^7 + \mathcal{M}^5 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda^2 \rangle + \mathcal{M} \cdot \mathbb{R} \langle h, xh_x \rangle + \mathbb{R} \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \langle x^7, x^5\lambda, x^2\lambda^2, x\lambda^3, \lambda^4 \rangle + \langle xh, x^2h_x, \lambda h, x\lambda h_x \rangle + \mathbb{R} \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \langle x^7, x^5\lambda, x^2\lambda^2, x\lambda^3, \lambda^4, x^6+x^4\lambda+x\lambda^2, 5x^6+3x^4\lambda, x^5\lambda+x^3\lambda^2+\lambda^3, \\ &\quad 5x^5\lambda+3x^3\lambda^2 \rangle + \mathbb{R} \langle 5x^4\lambda+3x^2\lambda^2 \rangle \\ &= \langle x^7, x^5\lambda, x^2\lambda^2, x\lambda^3, \lambda^4, x^6+x^4\lambda+x\lambda^2, 5x^6+3x^4\lambda, x^5\lambda+x^3\lambda^2+\lambda^3, \\ &\quad 5x^5\lambda \rangle + \langle x^4\lambda \rangle \\ &= \langle x^7, x^5\lambda, x^2\lambda^2, x\lambda^3, \lambda^4, x^6, x^4\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle \\ &= \langle x^6, x^4\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle. \end{aligned}$$

Assim por 4.3.10

$$\mathcal{P}(h) = \text{itr } J(h) = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle$$

Exemplo 3:

Para $h(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda$ temos $RT(h) = \mathcal{M}^2 + \langle \lambda \rangle$.

Logo $\text{itr}(\mathcal{M} \cdot RT(h)) = \text{itr}(\mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle) = \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle$.

Assim por 4.3.9 $\mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle \subset \mathcal{P}(h)$.

§4 - TERMOS DE ORDEM INTERMEDIÁRIA

Nos parágrafos anteriores vimos que

$$\mathcal{O}_i(h) = (\mathcal{O}_b(h) \cup \mathcal{O}_a(h))^c$$

e que os espaços $S(h)^\perp$ e $\mathcal{P}(h)$ caracterizam $\mathcal{O}_b(h)$ e $\mathcal{O}_a(h)$ respectivamente. Deste modo temos

$$\mathcal{O}_i(h) \subset (S(h)^\perp \oplus \mathcal{P}(h))^\perp,$$

onde o espaço vetorial à direita da inclusão tem finitos geradores pois $\mathcal{P}(h)$ é de codimensão finita.

Nosso tratamento dos termos de ordem intermediária é um cálculo explícito envolvendo um número finito de parâmetros indeterminados. Estes cálculos devem ser feitos caso por caso.

Consideremos o problema do reconhecimento para um problema de bifurcação $h \in \mathcal{Z}_{n+1}$. Queremos determinar quais germes $g \in \mathcal{Z}_{n+1}$ são fortemente equivalentes a h . A idéia essencial é, depois de reduzir g módulo $\mathcal{P}(h)$ a tão poucos termos quanto possível, realizar mudanças de coordenadas explícitas em g módulo $\mathcal{P}(h)$. Em símbolos tentamos determinar S e X tal que

$$g \equiv Sh(X, \lambda) \bmod \mathcal{P}(h).$$

Com o $\bmod \mathcal{P}(h)$ apenas finitos termos das séries de Taylor

de S e X realmente precisam ser considerados. Mais especificamente, se $\mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{P}(h)$ apenas termos de ordem k ou menos nas séries de Taylor de S e X contribuem para $g \equiv Sh(X, \lambda) \pmod{\mathcal{P}(h)}$. Usualmente apenas uma fração destes termos contribuem e isto nos motiva a fazer a definição seguinte.

Definição:

Uma *homotetia* é uma equivalência (S, X, Λ) em que $S(x, \lambda) = \alpha$, $X(x, \lambda) = \beta x$ e $\Lambda(\lambda) = \delta \lambda$ (Com $\alpha, \beta, \delta > 0$). Quando $\delta = 1$ dizemos *homotetia forte*.

Denotaremos uma homotetia entre g e h por $g \overset{h}{\sim} h$ e a homotetia forte por $g \overset{h}{\underset{f}{\sim}} h$.

Na solução do problema do reconhecimento para h veremos que em muitos casos apenas homotetias (ou equivalências lineares em outros) fazem uma contribuição para transformar g em h , isto é,

$$g \underset{f}{\sim} h \pmod{\mathcal{P}(h)} \rightarrow g \overset{h}{\underset{f}{\sim}} h.$$

Para finalizar esta seção concluiremos a solução do problema do reconhecimento para $x^3 - x\lambda$, $x^5 + x^3\lambda + \lambda^2$ e $x_1^2 + x_2^2 + \lambda$.

Exemplo 1:

Consideremos $h(x, \lambda) = x^3 - x\lambda$. Vimos no §2 (pag. 80) que se $g \underset{f}{\sim} h$ então devemos ter

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = 0; \quad g_{xxx} \neq 0 \text{ e } g_{x\lambda} \neq 0 \text{ em } (0,0).$$

Podemos portanto, usando o teorema de Taylor, escrever

$$g = ax^3 + bx\lambda + p, \text{ onde } a \neq 0, b \neq 0 \text{ e } p \in \langle x^4, x^2\lambda, \lambda^2 \rangle.$$

Além disto, vimos no §3 (pag. 90) que

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle = \langle x^4, x^2 \lambda, \lambda^2 \rangle,$$

logo podemos escrever $g = \tilde{g} + p$, onde $\tilde{g}(x, \lambda) = ax^3 + bx\lambda$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $p \in \mathcal{P}(h)$.

Temos então por 4.3.2

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h,$$

isto é,

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)}.$$

Afirmamos agora que apenas uma homotetia é suficiente para a equivalência entre $\tilde{g}$ e h .

De fato:

Considerando primeiro

$$S(x, \lambda) = \alpha + r(x, \lambda), \quad r = r_1 x + r_2 \lambda \in \mathcal{M}, \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad X(x, \lambda) = x,$$

temos

$$h \equiv S\tilde{g} \pmod{\mathcal{P}(h)} \equiv (\alpha + r)\tilde{g} \pmod{\mathcal{P}(h)} \equiv \alpha\tilde{g} + r\tilde{g} \pmod{\mathcal{P}(h)} \equiv \alpha\tilde{g} \pmod{\mathcal{P}(h)}$$

pois

$$r\tilde{g} = (r_1 x + r_2 \lambda)(ax^3 + bx\lambda) = ar_1 x^4 + ar_2 x^3 \lambda + br_1 x^2 \lambda + br_2 x \lambda^2 \in \mathcal{P}(h).$$

Considerando

$$S(x, \lambda) = 1, \quad X(x, \lambda) = \beta x + \gamma \lambda + r(x, \lambda), \quad \beta > 0, \quad r \in \mathcal{M}^2,$$

temos

$$h \equiv 1\tilde{g}(X, \lambda) \pmod{\mathcal{P}(h)} \equiv aX^3 + bX\lambda \pmod{\mathcal{P}(h)}$$

$$\equiv a(\beta x + \gamma \lambda + r)^3 + b(\beta x + \gamma \lambda + r)\lambda \pmod{\mathcal{P}(h)}$$

$$\equiv a\beta^3 x^3 + b\beta x \lambda \pmod{\mathcal{P}(h)} \equiv \tilde{g}(\beta x, \lambda) \pmod{\mathcal{P}(h)},$$

pois

$$a[3(\beta x)^2(\gamma \lambda + r) + 3(\beta x)(\gamma \lambda + r)^2 + (\gamma \lambda + r)^3] + b(\gamma \lambda + r)\lambda \in \mathcal{P}(h).$$

A substituição da equivalência por uma equivalência linear é imediata se observarmos que aumentando o grau dos monômios x^3 e $x\lambda$ obtemos monômios $x^3\lambda$, x^4 , $x^2\lambda$ ou $x\lambda^2$ que estão todos em $\mathcal{P}(h)$.

Finalmente mostraremos que:

$$\tilde{g} \underset{f}{\sim} h \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{g} \underset{f}{\sim} h &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \text{ tal que } h = \alpha \tilde{g}(\beta x, \lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \text{ / } x^3 - x\lambda = \alpha(a\beta^3 x^3 + b\beta x\lambda) = \alpha\beta^3 ax^3 + \alpha\beta bx\lambda \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta^3 a = 1 \\ \alpha\beta b = -1 \\ \alpha, \beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, b < 0 \\ \alpha\beta = \frac{-1}{b} \\ \beta^3 a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, b < 0 \\ \beta = \left(\frac{-b}{a}\right)^{1/2} \\ \alpha = \left(\frac{a}{b^3}\right)^{1/2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0. \end{aligned}$$

Resumindo o que fizemos temos:

$$\begin{aligned} g \underset{f}{\sim} h &\Leftrightarrow \tilde{g} \underset{f}{\sim} h \pmod{\mathcal{P}(h)} \\ &\text{onde } g = \tilde{g} + p, \quad \tilde{g} = ax^3 + bx\lambda \in \mathcal{P}(h) \text{ e } p \in \mathcal{P}(h) \\ &\Leftrightarrow \tilde{g} \underset{f}{\sim} h \text{ onde } g = \tilde{g} + p \text{ e } p \in \mathcal{P}(h) \\ &\Leftrightarrow a > 0, b < 0, \quad \tilde{g} = ax^3 + bx\lambda, \quad g = \tilde{g} + p \text{ e } p \in \mathcal{P}(h) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} g = g_x = g_{xx} = g_{x\lambda} = 0 \\ g_{xxx} > 0, \quad g_{x\lambda} < 0 \end{cases} \text{ em } (0,0). \end{aligned}$$

Exemplo 2:

Consideremos $h(x, \lambda) = x^5 + x^3\lambda + \lambda^2$. Vimos no §2 que se $g \underset{f}{\sim} h$ então devemos ter

$$\begin{cases} g = g_x = g_{xx} = g_{xxx} = g_{xxxx} = g_\lambda = g_{x\lambda} = g_{xx\lambda} = 0 \\ g_{xxxxx} \neq 0, \quad g_{xxx\lambda} \neq 0 \text{ e } g_{\lambda\lambda} \neq 0 \end{cases} \text{ em } (0,0).$$

Além disto, vimos no §3 que

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle = \langle x^6, x^4\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle,$$

logo podemos escrever

$$g = \tilde{g} + p,$$

onde $\tilde{g}(x, \lambda) = ax^5 + bx^3\lambda + c\lambda^2$, $a, b, c \neq 0$ e $p \in \mathcal{P}(h)$.

Temos então por 4.3.2

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)}$$

Como no exemplo anterior a substituição da equivalência entre $\tilde{g}$ e h por uma equivalência linear é imediata. Mais ainda, podemos também substituí-la por uma homotetia pois

$$\begin{aligned} h &= \alpha \tilde{g}(\beta x + \gamma \lambda, \lambda) = \alpha [a(\beta x + \gamma \lambda)^5 + b(\beta x + \gamma \lambda)^3 \lambda + c\lambda^2] \\ &\equiv \alpha (a\beta^5 x^5 + b\beta^3 x^3 \lambda + c\lambda^2) \pmod{\mathcal{P}(h)} \end{aligned}$$

Finalmente mostraremos que:

$$\tilde{g} \stackrel{h}{\sim}_f h \Leftrightarrow a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \quad \text{e} \quad a^3 c^2 = b^5.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{g} \stackrel{h}{\sim}_f h &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \text{ tal que } h = \alpha \tilde{g}(\beta x, \lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \quad / \quad x^5 + x^3 \lambda + \lambda^2 = \alpha (a\beta^5 x^5 + b\beta^3 x^3 \lambda + c\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha, \beta > 0 \\ \alpha \beta^5 a = 1 \\ \alpha \beta^3 b = 1 \\ \alpha c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha = \frac{1}{c} \\ \beta = \left(\frac{c}{b}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{c}{b}\right)^{5/3} a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha = \frac{1}{c} \\ \beta = \left(\frac{c}{b}\right)^{1/3} \\ a^3 c^2 = b^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a, b, c > 0 \quad \text{e} \quad a^3 c^2 = b^5.$$

Concluindo temos

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \stackrel{h}{\sim}_f h \text{ onde } g = \tilde{g} + p, \quad \tilde{g} = ax^5 + bx^3\lambda + c\lambda^2, \quad a \neq 0, \\ b \neq 0, \quad c \neq 0 \quad \text{e} \quad p \in \mathcal{P}(h)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g = g_x = g_{xx} = g_{xxx} = g_{xxxx} = g_{\lambda} = g_{x\lambda} = g_{xx\lambda} = 0 \\ g_{xxxxx} > 0, \quad g_{xxx\lambda} > 0, \quad g_{\lambda\lambda} > 0 \\ \left(\frac{g_{xxxxx}}{5!}\right)^3 \cdot \left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{2!}\right)^2 = \left(\frac{g_{xxx\lambda}}{3!}\right)^5 \end{cases} \quad \text{em } (0,0).$$

Exemplo 3:

Consideremos $h(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda$. Vimos no §2 que se $g \sim_f h$ então devemos ter em $(0,0)$

$$g = g_{x_1} = g_{x_2} = 0, \quad g_\lambda \neq 0,$$

e pelo menos mais uma das condições:

$$\text{ou } g_{x_1 x_1} \neq 0 \quad \text{ou } g_{x_1 x_2} \neq 0 \quad \text{ou } g_{x_2 x_2} \neq 0.$$

Podemos portanto, usando o teorema de Taylor, escrever

$$g = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d\lambda + p, \text{ onde } d \neq 0 \text{ e } p \in \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}\langle\lambda\rangle.$$

Além disto, vimos no §3 que

$$\mathcal{P}(h) \supset \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}\langle\lambda\rangle.$$

Escrevendo

$$g = \tilde{g} + p,$$

onde $\tilde{g}(x, \lambda) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d\lambda$ e $d \neq 0$, temos $p \in \mathcal{P}(h)$, e portanto, por 4.3.2,

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h,$$

isto é,

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)}.$$

Como no exemplo anterior, a substituição da equivalência entre $\tilde{g}$ e h por uma equivalência linear é imediata. Mais ainda, como $\mathcal{P}(h)$ contém $\mathcal{M}\langle\lambda\rangle$, podemos eliminar λ da parte linear de $X(x, \lambda)$. Assim, basta considerar

$$X(x, \lambda) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2),$$

isto é, $X \in GL(2)$.

Usando, neste caso, os resultados de classificação de cônicas sob a ação de $GL(2)$, obtemos para

$$\tilde{g}(x, \lambda) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d\lambda$$

que

$$\tilde{g} \sim_f h \Leftrightarrow \Delta = -b^2 + 4ac > 0 \quad \text{e} \quad d > 0.$$

A condição $d > 0$ foi obtida igualando o coeficiente de λ na

equação $h(x, \lambda) = S\tilde{g}(X(x, \lambda), \lambda)$, $S > 0$.

Como $a = \frac{1}{2}g_{x_1 x_1}(0, 0)$, $b = g_{x_1 x_2}(0, 0)$ e $c = \frac{1}{2}g_{x_2 x_2}(0, 0)$

temos

$$\Delta = -\left[g_{x_1 x_2}(0, 0)\right]^2 + 4\left[\frac{1}{2}g_{x_1 x_1}(0, 0)\right]\left[\frac{1}{2}g_{x_2 x_2}(0, 0)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} g_{x_1 x_1}(0, 0) & g_{x_1 x_2}(0, 0) \\ g_{x_1 x_2}(0, 0) & g_{x_2 x_2}(0, 0) \end{vmatrix} = \det Hg(0, 0).$$

Resumindo o que fizemos temos:

$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)}$, onde $g = \tilde{g} + p$, $p \in \mathcal{P}(h)$,

$$\tilde{g}(x, \lambda) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d\lambda \text{ e } d \neq 0$$

$\Leftrightarrow h = Sg(X, \lambda)$, onde $S > 0$, $X(x, \lambda) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2)$,

$$g = \tilde{g} + P, \quad \tilde{g}(x, \lambda) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d\lambda \text{ e } d \neq 0,$$

$\Leftrightarrow \Delta = -b^2 + 4ac > 0$, $d > 0$, onde $g = \tilde{g} + p$ e

$$\tilde{g}(x, \lambda) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + d\lambda.$$

$\Leftrightarrow g = g_{x_1} = g_{x_2} = 0$, $g_\lambda > 0$ e $\det Hg > 0$ em $(0, 0)$.

Observação:

Resolver completamente o problema do reconhecimento, como no exemplo acima, quando $n > 1$ é uma tarefa muito difícil. No entanto, podemos obter informações bem precisas sobre os termos de ordem alta.

§5 - EXEMPLOS

Nesta seção damos um algoritmo para a solução do problema do reconhecimento e o aplicamos na solução dos exemplos:

$$1) \varepsilon x^k + \delta \lambda, \quad k \geq 2,$$

$$2) \varepsilon x^k + \delta \lambda x, \quad k \geq 3,$$

$$3) \varepsilon(x^2 + \delta \lambda^2),$$

$$4) \varepsilon x^3 + \delta \lambda^2,$$

onde ε e δ são iguais a ± 1 .

As famílias acima aparecem naturalmente na classificação por codimensão do problema de bifurcação em $\mathcal{B}_{1+1}$. Em particular, elas incluem quase que totalmente os problemas de codimensão ≤ 3 (Ver [7], Teorema 2.1, pag.196).

Algoritmo:

Dado um problema de bifurcação h para ser estudado, consideramos $g \sim_f h$ e executamos os seguintes passos:

1) Calculamos os dados algébricos de h :

$RT(h)$, $S(h)$, geradores intrínsecos de $S(h)$, $S(h)^\perp$,

$J(h)$ ou $\mathcal{M}.RT(h)$, $\mathcal{P}(h)$ ou $\text{itr } \mathcal{M}.RT(h)$.

- 2) Usando 4.2.3 determinamos derivadas de g que devem ser nulas (Os geradores do espaço vetorial $S(h)^\perp$). Usando 4.2.4 determinamos parte dos termos do desenvolvimento de Taylor de g que devem ser considerados (Os geradores intrínsecos de $S(h)$). Aplicando o teorema de Taylor escrevemos g como $g = \tilde{g} + p$, onde $\tilde{g} = \sum a_i x^\alpha \lambda^\beta$ e $p \in \mathcal{P}(h)$.
- 3) Usando 4.3.2 eliminamos termos de ordem alta, passando a trabalhar módulo $\mathcal{P}(h)$. A equivalência entre $\tilde{g}$ e h é assim simplificada, podendo em certos casos ser linear ou até mesmo uma homotetia.
- 4) Igualando os coeficientes dos monômios em $h = \tilde{Sg}(X, \lambda)$, considerando $S(0,0) > 0$ e $\det X_x(0,0) > 0$, determinamos condições sobre os coeficientes a_i de $\tilde{g}$. (Em alguns casos devemos fazer antes mudanças de coordenadas para eliminar coeficientes que aparecem em apenas um dos lados da equação).
- 5) Expressamos as condições acima em termos das derivadas de g em $(0,0)$, finalizando os cálculos.

Para simplicidade de notação vamos supor $\epsilon = \delta = 1$. Os outros casos são inteiramente análogos.

Exemplo 5.1:

$$h(x, \lambda) = x^k + \lambda$$

$$RT(h) = \langle x^{k+\lambda}, kx^k, k\lambda x^{k-1} \rangle = \langle x^k, \lambda \rangle = \mathcal{M}^k + \langle \lambda \rangle.$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^k + \langle \lambda \rangle$$

$$\text{Geradores intrínsecos de } \mathcal{P}(h): \{x^k, \lambda\}$$

$$\mathcal{P}(h)^\perp = \mathbb{R}\langle 1, x, \dots, x^{k-1} \rangle$$

$$J(h) = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}.\langle \lambda \rangle + \mathbb{R}\langle \lambda x^{k-1} \rangle = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}.\langle \lambda \rangle \quad (k \geq 2)$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}.\langle \lambda \rangle = \langle x^{k+1}, x\lambda, \lambda^2 \rangle$$

Considerando $g \sim_f h$ temos por 4.2.3 e 4.2.4

$$g = g_x = \dots = g_{x^{k-1}} = 0, \quad g_{x^k} \neq 0 \quad \text{e} \quad g_\lambda \neq 0 \quad \text{em} \quad (0,0).$$

Pelo teorema de Taylor

$$g = ax^k + b\lambda + p, \quad a, b \neq 0, \quad p \in \langle x^{k+1}, x\lambda, \lambda^2 \rangle = \mathcal{P}(h)$$

Por 4.3.2 temos

$$g \sim_f h \iff \tilde{g} \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)} \quad \text{onde} \quad \tilde{g} = ax^k + b\lambda \quad \text{e} \quad a, b \neq 0$$

Aumentando o grau dos monômios x^k e λ encontramos monômios em $\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}.\langle \lambda \rangle$, logo podemos substituir a equivalência entre $\tilde{g}$ e h por uma equivalência linear, mais ainda, por uma homotetia pois $\mathcal{M}.\langle \lambda \rangle \subset \mathcal{P}(h)$.

Temos portanto

$$\begin{aligned} \tilde{g} \sim_f h &\iff \exists \alpha, \beta > 0 \text{ tal que } h = \alpha \tilde{g}(\beta x, \lambda) \\ &\iff \exists \alpha, \beta > 0 \quad / \quad x^k + \lambda = \alpha(a\beta^k x^k + b\lambda) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha a \beta^k = 1 \\ \alpha b = 1 \\ \alpha, \beta > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0 & b > 0 \\ \alpha = \frac{1}{b} \\ \beta = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/k} \end{cases} \iff a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Concluindo, temos

$$g \sim_f h \iff \begin{cases} g = g_x = \dots = g_{x^{k-1}} = 0 \\ g_{x^k} > 0 \quad \text{e} \quad g_\lambda > 0 \end{cases} \quad \text{em} \quad (0,0).$$

Exemplo 5.2:

$$h(x, \lambda) = x^k + x\lambda$$

$$RT(h) = \langle x^k + x\lambda, kx^k + x\lambda, kx^{k-1}\lambda + \lambda^2 \rangle = \langle x^k, x\lambda, \lambda^2 \rangle = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}.\langle \lambda \rangle.$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}.\langle \lambda \rangle$$

Geradores intrínsecos de $\mathcal{P}(h)$: $\langle x^k, x\lambda \rangle$

$$\mathcal{P}(h)^\perp = \mathbb{R}\langle 1, x, \dots, x^{k-1}, \lambda \rangle$$

$$\begin{aligned} J(h) &= \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathbb{R}\langle kx^{k-1}\lambda + \lambda^2 \rangle \\ &= \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle + \mathbb{R}\langle \lambda^2 \rangle \\ &= \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle. \end{aligned} \quad (k \geq 3)$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle = \langle x^{k+1}, x^2\lambda, \lambda^2 \rangle$$

Considerando $g \sim_f h$ temos por 4.2.3 e 4.2.4

$$g = g_x = \dots = g_{x^{k-1}} = g_\lambda = 0, \quad g_{x^k} \neq 0 \quad \text{e} \quad g_{x\lambda} \neq 0 \quad \text{em} \quad (0,0).$$

Pelo teorema de Taylor

$$g = ax^k + bx\lambda + p, \quad a, b \neq 0, \quad p \in \langle x^{k+1}, x^2\lambda, \lambda^2 \rangle = \mathcal{P}(h)$$

Por 4.3.2 temos

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)} \quad \text{onde} \quad \tilde{g} = ax^k + bx\lambda \quad \text{e} \quad a, b \neq 0$$

Aumentando o grau dos monômios x^k e $x\lambda$ encontramos monômios em $\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle + \langle \lambda^2 \rangle$, logo podemos substituir a equivalência entre $\tilde{g}$ e h por uma equivalência linear. Mais ainda, por uma homotetia pois substituindo $X(x, \lambda) = \alpha x + \beta \lambda$ em $\tilde{g}(X, \lambda)$ os termos em λ estão em $\mathcal{P}(h)$.

Temos portanto

$$\begin{aligned} \tilde{g} \sim_f h &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \quad \text{tal que} \quad h = \alpha \tilde{g}(\beta x, \lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \quad / \quad x^k + x\lambda = \alpha(a\beta^k x^k + b\beta x\lambda) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a \beta^k = 1 \\ \alpha \beta b = 1 \\ \alpha, \beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 & b > 0 \\ \alpha = \frac{1}{b\beta} \\ \beta^{k-1} = \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 & b > 0 \\ \alpha = \left(\frac{a}{b^k}\right)^{\frac{1}{k-1}} \\ \beta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{k-1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0$$

Concluindo, temos

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \begin{cases} g = g_x = \dots = g_{x^{k-1}} = g_\lambda = 0 \\ g_{x^k} > 0 \quad \text{e} \quad g_{x\lambda} > 0 \end{cases} \quad \text{em} \quad (0,0).$$

Exemplo 5.3:

$$h(x, \lambda) = x^2 + \lambda^2$$

$$RT(h) = \langle x^2 + \lambda^2, x^2, x\lambda \rangle = \langle x^2, x\lambda, \lambda^2 \rangle = \mathcal{M}^2$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^2 + \langle \lambda \rangle^2 = \mathcal{M}^2$$

Geradores intrínsecos de $\mathcal{P}(h)$: $\langle x^2 \rangle$

$$\mathcal{P}(h)^\perp = \mathbb{R}\langle 1, x, \lambda \rangle$$

$$J(h) = \mathcal{M}^3 + \mathbb{R}\langle x\lambda \rangle = \mathcal{M}^3 + \mathcal{M} \cdot \langle x\lambda \rangle + \mathbb{R}\langle x\lambda \rangle$$

$$= \mathcal{M}^3 + \langle x\lambda \rangle = \langle x^3, x\lambda, \lambda^3 \rangle$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^3$$

Considerando $g \sim_f h$ temos por 4.2.3 e 4.2.4

$$g = g_x = g_\lambda = 0 \quad \text{e} \quad g_{xx} \neq 0 \quad \text{em} \quad (0,0).$$

Pelo teorema de Taylor

$$g = ax^2 + bx\lambda + c\lambda^2 + p, \quad a \neq 0, \quad p \in \mathcal{P}(h)$$

Por 4.3.2 temos

$$g \sim_f h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim_f h \pmod{\mathcal{P}(h)} \quad \text{onde} \quad \tilde{g} = ax^2 + bx\lambda + c\lambda^2 \quad \text{e} \quad a \neq 0.$$

Como $h = x^2 + \lambda^2$ e $\tilde{g} = ax^2 + bx\lambda + c\lambda^2$ simplificaremos os cálculos fazendo uma mudança de coordenadas que elimine o termo $x\lambda$ de $\tilde{g}$.

Tomando $\phi(x, \lambda) = (x - \frac{b\lambda}{2a}, \lambda)$ trabalharemos com

$$\tilde{\tilde{g}}(x, \lambda) = \tilde{g} \circ \phi(x, \lambda) = ax^2 + d\lambda^2, \quad \text{onde} \quad d = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

que é equivalente a $\tilde{g}$.

Aumentando o grau dos monômios x^2 e λ^2 encontramos monômios em $\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^3$, logo podemos substituir a equivalência entre $\tilde{\tilde{g}}$ e h por uma equivalência linear.

Temos portanto

$$\tilde{\tilde{g}} \sim_f h \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, \beta > 0 \text{ e } \gamma \text{ tal que } h = \alpha \tilde{\tilde{g}}(\beta x + \gamma \lambda, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0, \gamma \neq 0 \quad x^2 + \lambda^2 = \alpha[a(\beta x + \gamma \lambda)^2 + d\lambda^2]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 0 & \beta > 0 \\ \alpha\beta^2 a = 1 \\ 2\alpha\alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha a\gamma^2 + \alpha d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \quad d > 0 \\ \alpha = \frac{1}{d} \\ \beta = \left(\frac{d}{a}\right)^{1/2} \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } d > 0.$$

Como $a > 0$ a condição $d > 0$ é equivalente a $4ac - b^2 > 0$.

Mas $a = \frac{1}{2}g_{xx}(0,0)$, $b = g_{x\lambda}(0,0)$ e $c = \frac{1}{2}g_{\lambda\lambda}(0,0)$, logo temos

$$4ac - b^2 > 0 \rightarrow 4\left(\frac{1}{2}g_{xx}(0,0)\right)\left(\frac{1}{2}g_{\lambda\lambda}(0,0)\right) - \left[g_{x\lambda}(0,0)\right]^2 > 0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} g_{xx}(0,0) & g_{x\lambda}(0,0) \\ g_{x\lambda}(0,0) & g_{\lambda\lambda}(0,0) \end{vmatrix} = \det Hg(0,0) > 0$$

Concluindo, temos

$$g \underset{f}{\sim} h \Leftrightarrow \begin{cases} g = g_x = g_\lambda = 0 \\ g_{xx} > 0 \text{ e } \det Hg > 0 \end{cases} \text{ em } (0,0).$$

Exemplo 5.4:

$$h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2$$

$$RT(h) = \langle x^3 + \lambda^2, x^3, x^2\lambda \rangle = \langle x^3, x^2\lambda, \lambda^2 \rangle = \mathcal{M}^3 + \langle \lambda \rangle^2$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^3 + \langle \lambda \rangle^2 = \langle x^3, x^2\lambda, \lambda^2 \rangle$$

Geradores intrínsecos de $\mathcal{P}(h)$: $\langle x^3, \lambda^2 \rangle$

$$\mathcal{P}(h)^\perp = \mathbb{R}\langle 1, x, x^2, \lambda, x\lambda \rangle$$

$$\begin{aligned} J(h) &= \mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle + \mathbb{R}\langle x^2\lambda \rangle = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle + \mathcal{M} \cdot \langle x^2\lambda \rangle + \mathbb{R}\langle x^2\lambda \rangle \\ &= \mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda^2 \rangle + \langle x^2\lambda \rangle = \langle x^4, x\lambda^2, \lambda^3, x^2\lambda \rangle = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle. \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2 \cdot \langle \lambda \rangle = \langle x^4, x^2\lambda, x\lambda^2, \lambda^3 \rangle.$$

Considerando $g \underset{f}{\sim} h$ temos por 4.2.3 e 4.2.4

$$g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = g_{x\lambda} = 0, \quad g_{xxx} \neq 0 \text{ e } g_{\lambda\lambda} \neq 0 \text{ em } (0,0).$$

Pelo teorema de Taylor

$$g = ax^3 + b\lambda^2 + p, \quad a, b \neq 0, \quad p \in \mathcal{P}(h)$$

Por 4.3.2 temos

$$g \underset{f}{\sim} h \Leftrightarrow \tilde{g} \underset{f}{\sim} h \pmod{\mathcal{P}(h)} \quad \text{onde } \tilde{g} = ax^3 + b\lambda^2, \quad a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$$

Como nos exemplos anteriores podemos substituir a equivalência entre $\tilde{g}$ e h por uma equivalência linear ou uma homotetia.

De maneira análoga aos exemplos anteriores, obtemos

$$\tilde{g} \underset{f}{\sim} h \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0$$

Concluindo, temos

$$g \underset{f}{\sim} h \Leftrightarrow \begin{cases} g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = g_{x\lambda} = 0 \\ g_{x^3} > 0 \text{ e } g_{\lambda^2} > 0 \end{cases} \quad \text{em } (0,0).$$

§6 - $\mathcal{B}$ -EQUIVALÊNCIA

Nesta seção consideramos o problema do reconhecimento para $h \in \mathcal{S}_{n+1}$ no contexto da $\mathcal{B}$ -equivalência, isto é, para um dado $g \in \mathcal{S}_{n+1}$ queremos verificar se existe uma equivalência, possivelmente não forte, que transforme g em h .

Neste contexto consideramos novamente termos de ordem baixa, alta e intermediária. A caracterização dos termos de ordem baixa e alta é a mesma dos parágrafos precedentes, isto é, os termos de ordem baixa são caracterizados por $S(h)^\perp$ e os termos de ordem alta são caracterizados por $\mathcal{P}(h)$.

Os resultados do §2 já se aplicam a $\mathcal{B}$ -equivalências.

No §3 caracterizamos $\mathcal{P}(h)$, isto é, termos que podem ser eliminados por uma equivalência forte. Estes termos podem, portanto, ser eliminados por uma equivalência mais geral.

A única diferença entre o contexto da equivalência forte e o da $\mathcal{B}$ -equivalência é nos termos de ordem intermediária. Neste caso existem poucos parâmetros extras na série de Taylor de $A(\lambda)$ que podem ajudar na solução de $h = Sg(X, A) \bmod \mathcal{P}(h)$. Entretanto esta diferença não muda a solução do problema do reconhecimento

para muitos exemplos. Em particular, a solução do problema do reconhecimento, no contexto geral, para os exemplos vistos até aqui muda apenas para o exemplo $x^5 + x^3\lambda + \lambda^2$.

Encerramos esta seção estudando tal exemplo.

Exemplo:

Resolver o problema do reconhecimento no contexto geral para $h(x, \lambda) = x^5 + x^3\lambda + \lambda^2$:

Como antes, considerando $g \sim h$, a questão se reduz a $g \sim h \Leftrightarrow \tilde{g} \sim h \pmod{\mathcal{P}(h)}$, onde $\tilde{g} = ax^5 + bx^3\lambda + c\lambda^2$, $a, b, c \neq 0$

Mais ainda, podemos do mesmo modo considerar a equivalência entre $\tilde{g}$ e h como uma homotetia.

Assim

$$\begin{aligned} \tilde{g} \stackrel{h}{\sim} h &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma > 0 \quad / \quad h = \alpha \tilde{g}(\beta x, \gamma \lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma > 0 \quad / \quad x^5 + x^3\lambda + \lambda^2 = \alpha(a\beta^5 x^5 + b\beta^3 x^3 \gamma \lambda + c\gamma^2 \lambda^2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ \alpha\beta^5 a = 1 \\ \alpha\beta^3 \gamma b = 1 \\ \alpha\gamma^2 c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ \beta^2 a = \gamma b \\ \beta^3 b = \gamma c \\ \alpha\gamma^2 c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ \beta = \frac{ac}{b^2} \\ \gamma = \frac{a^3 c^2}{b^5} \\ \alpha = \frac{b^{10}}{a^6 c^5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a, b, c > 0. \end{aligned}$$

Neste caso Λ provê um terceiro parâmetro de homotetia que usamos para eliminar a igualdade $a^3 c^2 = b^5$ obtida anteriormente.

Concluindo temos

$$\begin{aligned} g \sim h &\Leftrightarrow \tilde{g} \stackrel{h}{\sim} h \quad \text{onde} \quad \tilde{g} = ax^5 + bx^3\lambda + c\lambda^2, \quad a, b, c \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} g = g_x = g_{xx} = g_{xxx} = g_{xxxx} = g_\lambda = g_{x\lambda} = g_{xx\lambda} = 0 \\ g_{xxxxx} > 0, \quad g_{xxx\lambda} > 0 \quad \text{e} \quad g_{\lambda\lambda} > 0 \end{cases} \quad \text{em } (0,0). \end{aligned}$$

§7 - PROVA DO TEOREMA 4.3.10

Dividiremos e reescreveremos o teorema 4.3.10 em duas partes. Provaremos primeiro que $\text{itr } J(h) \subset \mathcal{A}(h)$ e depois que $\mathcal{A}(h) \subset \text{itr } J(h)$. A prova da segunda inclusão é muito mais técnica que a prova da primeira.

Para a prova da primeira das inclusões precisaremos antes de três lemas.

Lema 4.7.1:

Seja $h \in \mathcal{H}_{1+1}$ com $h(0,0) = h_x(0,0) = 0$, $h_\lambda(0,0) \neq 0$ e $\text{cod } RT(h) < \infty$. Então

a) $h_{x^k}(0,0) \neq 0$ para algum $k > 1$.

b) $J(h) = \mathcal{M}.RT(h)$.

Prova:

a)

Suponhamos que $h_{x^k}(0,0) = 0$ para todo $k > 1$. Usando o teorema de Taylor podemos escrever

$$h(x,\lambda) = a\lambda + \lambda q(x,\lambda) = \lambda(a + q(x,\lambda)),$$

onde $a \neq 0$. Mas por 2.3.9 $\text{cod RT}(h) = \infty$, que é absurdo, provando a afirmação.

b)

Pelo item a) existe k , menor possível, tal que $h_x^k(0,0) \neq 0$.

Assim, pelo teorema de Taylor, podemos escrever

$$h(x, \lambda) = p(x, \lambda)x^k + q(x, \lambda)\lambda,$$

onde $p(0,0) \neq 0$ e $q(0,0) \neq 0$.

Temos então

$$h_x = kpx^{k-1} + p_x x^k + q_x \lambda = (kp + xp_x)x^{k-1} + q_x \lambda.$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{RT}(h) &= \langle h, xh_x \rangle + \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \langle px^k + q\lambda, (kp + xp_x)x^{k-1} + (xq_x)\lambda \rangle + \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \langle x^k, \lambda \rangle + \langle \lambda h_x \rangle = \langle x^k, \lambda \rangle = \mathcal{M}^k + \langle \lambda \rangle. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade acima usamos 1.6 pois a matriz mudança de geradores é dada por

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} p(0,0) & q(0,0) \\ kp(0,0) & 0 \end{bmatrix},$$

com $\det A(0,0) = -kp(0,0)q(0,0) \neq 0$ (e portanto inversível).

Segue então que $\mathcal{M} \cdot \text{RT}(h) = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle$ e como $h_x \in \mathcal{M}$ temos $\lambda h_x \in \mathcal{M} \cdot \langle \lambda \rangle \subset \mathcal{M} \cdot \text{RT}(h)$.

Mas por 2.4.4 $J(h) = \mathcal{M} \cdot \text{RT}(h) + \mathbb{R} \langle \lambda h_x \rangle$, logo

$J(h) = \mathcal{M} \cdot \text{RT}(h)$. ■

Observemos que o item a) do lema acima não vale para $h \in \mathfrak{Z}_{n+1}$, $n > 1$. Tomando, por exemplo, $h = x_1 x_2 + \lambda \in \mathfrak{Z}_{n+1}$ temos $\text{cod RT}(h) < \infty$, $h_\lambda(0,0) \neq 0$ mas $h_{x_1}^k(0,0) = h_{x_2}^k(0,0) = 0$.

Lema 4.7.2:

Seja $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ ideal de $\mathfrak{Z}_2$ de codimensão finita e suponha que $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$ para $\alpha, \beta \in \mathfrak{Z}_2$. Então existe $Q \in \mathfrak{Z}_2$ tal que:

$$\alpha = +Qf_2 \quad \text{e} \quad \beta = -Qf_1$$

Prova:

Consideremos o anel quociente $\frac{\mathfrak{Z}_2}{\langle f_2 \rangle}$. Como $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$ temos a classe $[\alpha f_1] \equiv 0$ em $\frac{\mathfrak{Z}_2}{\langle f_2 \rangle}$. Logo $[\alpha] \equiv 0$ ou $[f_1] \equiv 0$.

A hipótese de codimensão finita garante que $[f_1] \neq 0$ pois se $[f_1] \equiv 0$ então $f_1 = \rho f_2$ e assim

$$I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle \rho f_2, f_2 \rangle = \langle f_2 \rangle,$$

que é de codimensão infinita por 1.13.

Segue portanto que existe $Q \in \mathfrak{Z}_2$ tal que $\alpha = Qf_2$.

Substituindo $\alpha = Qf_2$ em $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$ obtemos $Qf_2 f_1 + \beta f_2 = 0$ e portanto $\beta = -Qf_1$. ■

Relembremos que para $h \in \mathfrak{Z}_{1+1}$ temos

$$J(h) = \langle ah + bh_x; a, b, b_x \in \mathcal{M} \rangle.$$

Podemos caracterizar $\mathcal{M} \cdot \text{RT}(h)$ de modo semelhante, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \cdot \text{RT}(h) &= \mathcal{M} \cdot \langle h, xh_x, \lambda h_x \rangle = \mathcal{M} \cdot \langle h \rangle + \mathcal{M}^2 \cdot \langle h_x \rangle \\ &= \langle ah + bh_x; a, b, b_x, b_\lambda \in \mathcal{M} \rangle. \end{aligned}$$

Lema 4.7.3:

Seja $h \in \mathfrak{Z}_2$ com $h(0,0) = h_x(0,0) = 0$ e $\text{cod RT}(h) < \infty$.
Se $p \in \text{itr } J(h)$ então $\lambda p_x \in \mathcal{M}.\text{RT}(h)$.

Prova:

O caso em que $h_\lambda(0,0) \neq 0$ é simples. Vimos em 4.7.1 que $J(h) = \mathcal{M}.\text{RT}(h)$. Como $\text{cod } J(h) < \infty$ temos por 3.2 que $\lambda p_x \in \text{itr } J(h)$ e assim $\lambda p_x \in \mathcal{M}.\text{RT}(h)$, pois $\text{itr } J(h) \subset \text{itr}(\mathcal{M}.\text{RT}(h)) \subset \mathcal{M}.\text{RT}(h)$.

Consideremos então o caso em que $h_\lambda(0,0) = 0$.

Por 3.2 temos $x p_x, \lambda p_x \in \text{itr } J(h) \subset J(h)$. Como

$J(h) = \{ah + bh_x; a, b, b_x \in \mathcal{M}\}$ podemos escrever

$$x p_x = \alpha h + \beta h_x$$

$$\lambda p_x = \gamma h + \delta h_x,$$

onde $\alpha, \beta, \beta_x, \gamma, \delta, \delta_x \in \mathcal{M}$.

Deste modo, como $\mathcal{M}.\text{RT}(h) = \{ah + bh_x; a, b, b_x, b_\lambda \in \mathcal{M}\}$,
temos apenas que mostrar que $\delta_\lambda \in \mathcal{M}$.

Multiplicando a primeira das equações acima por λ , a segunda por x , e subtraindo os resultados obtemos

$$(\lambda\alpha - x\gamma)h + (\lambda\beta - x\delta)h_x = 0.$$

Observemos que $\langle h, h_x \rangle$ tem codimensão finita pois $\text{RT}(h) \subset \langle h, h_x \rangle$.

Estamos então nas condições do lema 4.7.2, assim existe um germe diferenciável $Q \in \mathfrak{Z}_2$ tal que

$$\lambda\alpha - x\gamma = -Qh_x$$

$$\lambda\beta - x\delta = +Qh.$$

Denotando

$$E = \lambda\alpha - x\gamma + Qh_x = 0$$

$$F = \lambda\beta - x\delta - Qh = 0,$$

obtemos

$$F_x = \lambda \beta_x - \delta - x\delta_x - Q_x h - Qh_x$$

$$F_{x\lambda} = \beta_x + \lambda \beta_{x\lambda} - \delta_\lambda - x\delta_{x\lambda} - Q_{x\lambda} h - Q_x h_\lambda - Q_\lambda h_x - Qh_{x\lambda}$$

$$F_{x\lambda}(0,0) = -\delta_\lambda(0,0) - Q(0,0)h_{x\lambda}(0,0) = 0.$$

Na última expressão usamos o fato de $h_\lambda(0,0) = 0$.

Por outro lado,

$$E_\lambda = \alpha - x\gamma_\lambda + Q_\lambda h_x + Qh_{x\lambda}$$

$$E_\lambda(0,0) = Q(0,0)h_{x\lambda}(0,0) = 0.$$

Comparando $F_{x\lambda}(0,0)$ e $E_\lambda(0,0)$ obtemos $\delta_\lambda(0,0) = 0$. ■

Observe que uma possível generalização dos dois lemas acima para $h \in \mathfrak{H}_{n+1}$ seria muito trabalhosa.

Uma caracterização de $J(h)$ em termos de $h, xh_x, \lambda h_x$ pode ser feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J(h) &= \langle xh, \lambda h, x^2 h_x, \lambda h_x \rangle = \mathcal{M} \langle h \rangle + \langle x^2 h_x, x \lambda h_x \rangle + \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \mathcal{M} \langle h \rangle + \mathcal{M} \langle xh_x \rangle + \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \{ah + bxh_x + c\lambda h_x; a, b \in \mathcal{M}, c \in \mathfrak{H}_2\}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, para $\mathcal{M} \cdot \text{RT}(h)$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \cdot \text{RT}(h) &= \mathcal{M} \langle h, xh_x, \lambda h_x \rangle = \mathcal{M} \langle h \rangle + \mathcal{M} \langle xh_x \rangle + \mathcal{M} \langle \lambda h_x \rangle \\ &= \{ah + bxh_x + c\lambda h_x; a, b, c \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Estamos agora em condições de afirmar e provar uma das inclusões do teorema em questão.

Teorema 4.7.4:

Se $h \in \mathfrak{H}_2$, $h(0,0) = h_x(0,0) = 0$ e $\text{cod RT}(h) < \infty$ então $\text{itr } J(h) \subset \mathcal{P}(h)$.

Prova:

Por 4.3.8 basta mostrar que $RT(h+p) = RT(h) \quad \forall p \in \text{itr } J(h)$.

Seja $p \in \text{itr } J(h)$. Por 3.2 $xp_x, \lambda p_x \in \text{itr } J(h)$. Como

$$J(h) = \{ah + bxh_x + c\lambda h_x; a, b \in \mathcal{M}, c \in \mathcal{S}_2\},$$

podemos escrever

$$p = A_1 h + B_1 xh_x + C_1 \lambda h_x$$

$$xp_x = A_2 h + B_2 xh_x + C_2 \lambda h_x$$

$$\lambda p_x = A_3 h + B_3 xh_x + C_3 \lambda h_x,$$

onde $A_i, B_i \in \mathcal{M}$.

Além disto por 4.7.3 $\lambda p_x \in \mathcal{M}.RT(g)$ e como

$$\mathcal{M}.RT(g) = \{ah + bxh_x + c\lambda h_x; a, b, c \in \mathcal{M}\},$$

devemos ter $C_3 \in \mathcal{M}$.

Escrevendo o sistema acima em notação matricial e usando a notação introduzida na prova de 2.3.3 temos

$$\begin{bmatrix} p \\ xp_x \\ \lambda p_x \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} p \\ xh_x \\ \lambda h_x \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad v(p) = Q.v(h),$$

onde $Q(0,0)$ é estritamente triangular superior, isto é, triangular superior com zeros na diagonal.

Adicionando $v(h)$ a ambos os lados da equação acima abtemos

$$\begin{bmatrix} h+p \\ x(h+p)_x \\ \lambda(h+p)_x \end{bmatrix} = (I+Q) \begin{bmatrix} p \\ xh_x \\ \lambda h_x \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad v(h+p) = (I+Q).v(h),$$

onde I é a matriz identidade.

Mas $(I+Q)$ é inversível em alguma vizinhança da origem pois $Q(0,0)$ é estritamente triangular superior, logo por 1.6 temos $RT(h+p) = RT(h)$. ■

Para a prova da inclusão contrária precisamos antes de mais alguns resultados.

Definição:

Dado um monômio $x^k \lambda^l \in \mathfrak{S}_{1+1}$, denotamos por $\mathcal{X}$, ou $\mathcal{X}(x^k \lambda^l)$, o maior ideal intrínseco que não contém $x^k \lambda^l$.

Proposição 4.7.5:

$$\mathcal{X}(x^k \lambda^l) = \mathcal{M}^{k+l+1} + \langle \lambda \rangle^{l+1}.$$

Prova:

Temos $\mathcal{M}^{k+l+1} \subset \mathcal{X}$ pois $x^k \lambda^l \notin \mathcal{M}^{k+l+1}$ e $\mathcal{M}^{k+l+1}$ é intrínseco.

Do mesmo modo $\langle \lambda \rangle^{l+1} \subset \mathcal{X}$ pois $x^k \lambda^l \notin \langle \lambda \rangle^{l+1}$ que é intrínseco.

Assim $\mathcal{M}^{k+l+1} + \langle \lambda \rangle^{l+1} \subset \mathcal{X}$. Segue então desta inclusão que $\mathcal{X}$ tem codimensão finita, logo pela caracterização de ideais intrínsecos vista anteriormente falta apenas mostrar que não há mais ideais $\mathcal{M}^\alpha \cdot \langle \lambda \rangle^\beta$ entre $\mathcal{M}^{k+l+1} + \langle \lambda \rangle^{l+1}$ com $\alpha \leq k+l$, $\beta \leq l$ e $l+1 < \alpha+\beta < k+l+1$.

Suponhamos que exista $\mathcal{M}^\alpha \cdot \langle \lambda \rangle^\beta \subset \mathcal{X}$ nas condições acima. Temos então que os geradores de $\mathcal{M}^\alpha \cdot \langle \lambda \rangle^\beta$ estão em $\mathcal{X}$, isto é, $x^\alpha \lambda^\beta, x^{\alpha-1} \lambda^{\beta+1}, \dots, \lambda^{\alpha+\beta} \in \mathcal{X}$.

Por hipótese, temos l no intervalo $[\beta, \beta+\alpha-2]$ e, portanto, podemos escrever $l = \beta+i$, para algum i em $\{0, 1, \dots, \alpha-2\}$. Assim $x^{\alpha-i} \lambda^l = x^{\alpha-i} \lambda^{\beta+i} \in \mathcal{X}$.

Novamente por hipótese $(\alpha-i) + (\beta+i) < k+l+1$, logo $(\alpha-i) + l < k+l+1$ e assim segue que $\alpha-i \leq k$.

Resumindo, obtivemos $x^{\alpha-i} \lambda^l \in \mathcal{X}$ com $\alpha-i \leq k$ que é um absurdo pois isto implica em $x^k \lambda^l$ pertencer a $\mathcal{X}$. ■

Lema 4.7.6:

Seja $X(x, \lambda)$ um polinômio em $\mathcal{M}_2$ tal que $X_x(0,0) > 0$ e considere I ideal intrínseco de codimensão finita em $\mathfrak{S}_2$. Então:

$$x^k \lambda^l \in I \iff X^k \lambda^l \in I.$$

Prova:

Como $X \in \mathcal{M}$ temos $X^k \in \mathcal{M}^k$ e assim $X^k \lambda^l \in \mathcal{M}^k \langle \lambda \rangle^l$. Daí uma das implicações é imediata pois supondo $x^k \lambda^l \in I$ temos por 3.5 que $\mathcal{M}^k \langle \lambda \rangle^l \subset I$ e portanto $X^k \lambda^l \in I$.

Por outro lado, supondo $X^k \lambda^l \in I$, temos por 3.4 que cada monômio de $X^k \lambda^l$ está em I .

Como $X_x(0,0) > 0$ podemos escrever $X(x, \lambda) = ax + p(x, \lambda)$, onde $a > 0$. Substituindo este resultado em $X^k \lambda^l$ obtemos que $a^k x^k \lambda^l$ deve pertencer a I .

Como I é ideal e $a^k \in \mathbb{R}$ obtemos $x^k \lambda^l \in I$. ■

Lema 4.7.7:

Se $X, Y \in \mathcal{M}_2$ e $X \equiv Y \pmod{\mathcal{M}^k}$ então $X^l \equiv Y^l \pmod{\mathcal{M}^{k+l-1}}$.

Prova:

Como $X \equiv Y \pmod{\mathcal{M}^k}$ podemos escrever $X = Y + r$, onde $r \in \mathcal{M}^k$ e $k \geq 1$.

Elevando X a l e desenvolvendo pelo Binômio de Newton obtemos

$$X^l = Y^l + \left[\binom{l}{1} Y^{l-1} r + \binom{l}{2} Y^{l-2} r^2 + \dots + \binom{l}{l} r^l \right].$$

Como $Y \in \mathcal{M}$ temos $Y^i \in \mathcal{M}^i$ para todo inteiro positivo i .

Com isto, como $r \in \mathcal{M}^k$ e $k \geq 1$, analisando a expressão obtida para X^l obtemos que o termo entre colchetes está em $\mathcal{M}^{k-1+l}$, ou seja, $X^l \equiv Y^l \pmod{\mathcal{M}^{k+l-1}}$. ■

Enunciaremos e provaremos agora a inclusão contrária do teorema 4.7.4. Esta prova é bem extensa e ocupará todo o final desta seção.

Teorema 4.7.8:

Se $h \in \mathcal{Z}_2$ é um problema de bifurcação com $\text{cod RT}(h) < \infty$, então $\mathcal{P}(h) \subset \text{itr } J(h)$.

Prova:

Basta mostrar que $\mathcal{P}(h) \subset J(h)$ pois disto segue que $\text{itr } \mathcal{P}(h) \subset \text{itr } J(h)$ e como $\mathcal{P}(h)$ é intrínseco obtemos $\mathcal{P}(h) \subset \text{itr } J(h)$.

Seja então $p \in \mathcal{P}(h)$. Por 4.3.2 temos $h + tp \sim_f h \ \forall t$. Assim, por definição existem $S, X \in \mathcal{Z}_{x,\lambda,t}$ tal que

$$h(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)h(X(x, \lambda, t), \lambda), \quad (*)$$

onde $S(x, \lambda, 0) = 1$, $X(x, \lambda, 0) = x$ e $X(0, 0, t) = 0$.

A equação (*) afirma que a equivalência (S, X) aplicada a h pode mudar os termos de ordem alta (representados por p), mas apenas os termos de ordem alta são afetados.

Repetiremos inicialmente o procedimento feito na prova de 2.3.2.

Derivando (*) com relação a t e tomando $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} p(x, \lambda) &= \dot{S}(x, \lambda, 0)h(X(x, \lambda, 0), \lambda) \\ &\quad + S(x, \lambda, 0)h_x(X(x, \lambda, 0), \lambda)\dot{X}(x, \lambda, 0), \end{aligned}$$

isto é,

$$p(x, \lambda) = \dot{S}(x, \lambda, 0)h(x, \lambda) + X(x, \lambda, 0)h_x(x, \lambda),$$

onde o ponto sobre S ou X indica derivada parcial com relação a variável t .

Como $J(h) = \{ah + bh_x; a, b, b_x \in \mathcal{M}\}$ devemos mostrar que $S(0,0,0) = 0$ e $\dot{X}_x(0,0,0) = 0$ (Já temos $\dot{X}(0,0,0) = 0$ pois $X(0,0,t) = 0$).

Na realidade vale mais do que isto, mostraremos que $S(0,0,t) \equiv 1$ e que $X_x(0,0,t) \equiv 1$ (podendo, portanto, suprir a dependência de S e X de t), ou seja, a equivalência entre $h+tp$ e h deverá ser a J -equivalência para cada t .

Para isto, igualaremos os coeficientes de dois termos que não são de ordem alta em (*) e obteremos duas equações

$$S(0,0,t)X_x^k(0,0,t) = 1 \quad \text{e} \quad S(0,0,t)X_x^{k_1}(0,0,t) = 1,$$

com $k > k_1$, que resolvidas nos fornecerão o resultado desejado.

$$(1 = SX_x^k = SX_x^{k_1}X_x^{k-k_1} = 1X_x^{k-k_1} = X_x^{k-k_1}, \quad \text{fornecendo} \quad X_x(0,0,t) = 1 \text{ e } S(0,0,t) = 1).$$

1) Mostremos que $S(0,0,t)X_x^k(0,0,t) = 1$ para algum k :

Como $\text{cod } RT(h) < \infty$, por 4.7.1, existe um inteiro $k > 0$, menor possível, tal que

$$h(x,0) \equiv ax^k \text{ mod } \mathcal{M}^{k+1}, \quad a \neq 0.$$

Assim x^k é um gerador intrínseco de $S(h)$ pois $D^{(k,0)}h(0,0) = a \neq 0$.

Logo por 4.3.5 b), temos que $x^k \notin \mathcal{P}(h)$. Assim os termos de ordem alta que são potências de x apenas, devem estar em $\mathcal{M}^{k+1}$, isto é, se $p \in \mathcal{P}(h)$ então $p(x,0) \in \mathcal{M}^{k+1}$.

Denotemos o lado esquerdo da equação (*) por $LE(x,\lambda,t)$ e o lado direito por $LD(x,\lambda,t)$.

Observemos que $LE(x,0,t) \text{ mod } \mathcal{M}^{k+1}$ não depende de t pois

$p(x,0) \in \mathcal{M}^{k+1}$ e assim $LD(x,0,t)$ também não depende. Podemos então neste caso supor $t = 0$ e denotar $LE(x,\lambda)$ e $LD(x,\lambda)$. (Idem para $S(x,\lambda,t)$ e $X(x,\lambda,t)$).

Assim

$$LE(x,0) = h(x,0) \equiv ax^k \bmod \mathcal{M}^{k+1}$$

$$LD(x,0) \equiv S(x,0)[aX^k(x,0)] \bmod \mathcal{M}^{k+1}.$$

Mas usando o teorema de Taylor temos

$$X(x,\lambda) = X_x(0,0)x + X_\lambda(0,0)\lambda + r(x,\lambda), \quad r \in \mathcal{M}^2.$$

Fazendo $\lambda = 0$

$$X(x,0) = X_x(0,0)x + r(x,0), \quad r \in \mathcal{M}^2.$$

Assim, usando 4.7.7, obtemos

$$X^k(x,0) \equiv X_x^k(0,0)x^k \bmod \mathcal{M}^{k+1}.$$

Substituindo $X^k(x,0)$ em $LD(x,0)$ obtemos

$$\begin{aligned} LD(x,0) &\equiv S(x,0)[aX_x^k(0,0)x^k] \bmod \mathcal{M}^{k+1} \\ &\equiv S(0,0)aX_x^k(0,0)x^k \bmod \mathcal{M}^{k+1}, \end{aligned}$$

onde a última equivalência foi obtida expandindo $S(x,0)$ pelo teorema de Taylor.

Igualando os coeficientes de x^k em $LE(x,0)$ e $LD(x,0)$ concluímos que $S(0,0,0)X_x^k(0,0,t) = 1$.

2) Mostremos que $S(0,0,t)X_x^{k_1}(0,0,t) = 1$ para algum $k_1 < k$:

Como acima para obter esta expressão igualaremos LE e LD , mas ao invés de usarmos $\bmod \mathcal{M}^{k+1}$ trabalharemos com $\bmod \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ (caracterizado em 4.7.5) é o maior ideal intrínseco que não contém um determinado monômio $x^k \lambda^l$ a ser definido de acordo com cada um dos casos a considerar:

$$I) \mathcal{P}(h) \neq \mathcal{M}^k$$

$$II) \mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^k$$

CASO I:

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}^{k_1} \langle \lambda \rangle^{l_1} + \dots + \mathcal{M}^{k_s} \langle \lambda \rangle^{l_s}, \quad s > 0 \text{ e } k > k_1 + 1_1:$$

Por definição, o gerador intrínseco $x^{k_1} \lambda^{l_1}$ de $\mathcal{P}(h)$ não pertence a $\mathcal{R} = \mathcal{M}^{k_1 + l_1 + 1} + \langle \lambda \rangle^{l_1 + 1}$.

Mostremos que, neste caso, os outros geradores intrínsecos de $\mathcal{P}(h)$ pertencem a $\mathcal{R}$:

Primeiramente, como $k > k_1 + 1_1$ temos $k \geq k_1 + 1_1 + 1$. Segue então que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{M}^{k_1 + l_1 + 1} \subset \mathcal{R}$ e portanto $x^k \in \mathcal{R}$.

Por outro lado, como $1_1 < 1_2 < \dots < 1_s$ temos $1_1 + 1 \leq 1_2 < \dots < 1_s$ e portanto $\langle \lambda \rangle^{l_s} \subset \dots \subset \langle \lambda \rangle^{l_2} \subset \langle \lambda \rangle^{l_1 + 1} \subset \mathcal{R}$.

Deste modo $\mathcal{M}^{k_i} \langle \lambda \rangle^{l_i} \subset \mathcal{M}^{k_i} \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$ para $i = 2, 3, \dots, s$ e portanto $x^{k_i} \lambda^{l_i} \in \mathcal{R}$ para $i = 2, 3, \dots, s$; isto mostra que os outros geradores estão em $\mathcal{R}$.

Com estes resultados temos então $h(x, \lambda) \equiv bx^{k_1} \lambda^{l_1} \pmod{\mathcal{R}}$, para algum $b \neq 0$.

Agora $\mathcal{P}(h) \subset \mathcal{R}$ pois $\mathcal{P}(h)$ é ideal intrínseco e por 4.3.5 b) não contém o gerador intrínseco $x^{k_1} \lambda^{l_1}$.

Usando então o fato de $p \in \mathcal{P}(h) \subset \mathcal{R}$ obtemos para (*) que

$$\begin{aligned} LE(x, \lambda) &= h(x, \lambda) + tp(x, \lambda) \equiv h(x, \lambda) \pmod{\mathcal{R}} \\ &\equiv bx^{k_1} \lambda^{l_1} \pmod{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando 4.7.6 obtemos

$$LD(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)h(X(x, \lambda, t), \lambda)$$

$$\equiv S(x, \lambda, t)[bX_x^{(k)}(x, \lambda, t) \cdot \lambda^{(l)}] \mod \mathcal{A}.$$

Desenvolvendo $X(x, \lambda)$ por Taylor

$$X(x, \lambda) = X_x(0, 0)x + X_\lambda(0, 0)\lambda + r(x, \lambda),$$

onde $r \in \mathcal{M}^2$.

Elevando X à k_1 -ésima potência

$$\begin{aligned} X^{(k)}(x, \lambda) &= [X_x(0, 0)x + X_\lambda(0, 0)\lambda + r(x, \lambda)]^{(k)} \\ &\equiv (X_x(0, 0)x + X_\lambda(0, 0)\lambda)^{(k)} \mod \mathcal{M}^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} X^{(k)}(x, \lambda)\lambda^{(l)} &\equiv [X_x(0, 0)x + X_\lambda(0, 0)\lambda]^{(k)}\lambda^{(l)} \mod \mathcal{M}^{(k+l+1)} \\ &\equiv X_x^{(k)}(0, 0) x^{(k)}\lambda^{(l)} \mod \mathcal{M}^{(k+l+1)} + \langle \lambda \rangle^{(l+1)} \\ &\equiv X_x^{(k)}(0, 0) x^{(k)}\lambda^{(l)} \mod \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo este resultado em $LD(x, \lambda)$ obtemos

$$LD(x, \lambda) \equiv S(x, \lambda, t)[bX_x^{(k)}(0, 0, t)x^{(k)}\lambda^{(l)}] \mod \mathcal{A}.$$

Aqui o coeficiente de $x^{(k)}\lambda^{(l)}$ é igual a $bS(0, 0, t)X_x^{(k)}(0, 0, t)$.

Igualando os coeficientes de $x^{(k)}\lambda^{(l)}$ em LD e LE obtemos

$$S(0, 0, t)X_x^{(k)}(0, 0, t) = 1, \text{ terminando a prova para o CASO I.}$$

CASO II:

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^k.$$

Este caso é mais trabalhoso; parece não ser possível provar que $\mathcal{P}(h) \subset \text{itr } J(h)$ trabalhando diretamente com h . Entretanto se $g \sim_f h$ temos por definição de $\mathcal{P}$ que $\mathcal{P}(g) = \mathcal{P}(h)$ e por 3.9 b) que $\text{itr } J(g) = \text{itr } J(h)$. Basta então provar que

$\mathcal{P}(g) \subset \text{itr } J(g)$ para algum $g \sim_f h$.

Observe que tudo que foi provado até agora para h pode ser obtido do mesmo modo para $g \sim_f h$, basta trocar h por g .

Para obter a equação que falta para concluirmos, isto é, $S(0,0,t)X_x^k(0,0,t) = 1$, trabalharemos então com um $g \sim_f h$ cuidadosamente construído.

Dividimos o restante desta prova em itens para facilitar a demonstração.

a) Construção de $g \sim_f h$ adequado:

Podemos ordenar os monômios de $\mathcal{M}^k$ do seguinte modo:

$$x^k, x^{k-1}\lambda, \dots, \lambda^k, x^{k+1}, x^k\lambda, \dots, \lambda^{k+1}, x^{k+2}, \dots$$

Para qualquer germe $g \sim h$ temos por 4.2.1 que $\mathcal{P}(g) = \mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^k$, logo, por 4.2.2 c), os monômios que aparecem na série de Taylor de g devem ser de grau $\geq k$ e o coeficiente de x^k não pode zerar. Mais ainda, deve existir pelo menos mais um monômio com coeficiente nulo, pois do contrário, como $k \geq 2$, por 2.3.9, $RT(g)$ teria codimensão infinita (e portanto $RT(h)$ também).

Assim podemos escrever

$$g = ax^k + bx^{k-1}\lambda + \dots, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad k \leq k_1 + l_1,$$

onde os monômios que compõem g estão ordenados como descrevemos acima.

Podemos refinar o argumento acima e obter um limite superior para $k_1 + l_1$ do seguinte modo:

Por 4.3.9 $\text{cod } \mathcal{P}(g) < \infty$, logo existe $r > 0$ tal que $\mathcal{M}^r \subset \mathcal{P}(g)$.

Se $x^{k-1}\lambda$ pertencesse a $\mathcal{M}^r$ teríamos $g = ax^k + p$ com $p \in \mathcal{M}^r \subset \mathcal{P}(g)$ e por 4.3.2 teríamos $g \sim_f ax^k$ que é um absurdo

pois $\text{cod } \mathcal{R}(g) < \infty$. Assim devemos ter $k_1 + l_1 < r$, estabelecendo um limite superior para o monômio $x^{k_1} \lambda^{l_1}$.

Agora entre todos os g 's equivalentes a h , como descritos acima, escolhemos g tal que o primeiro termo não nulo depois de x^k tenha grau maximal com respeito ao ordenamento acima.

Nossos cálculos agora são semelhantes aos anteriores. Para $p \in \mathcal{P}(g)$ temos a equação:

$$g(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \lambda), \quad (**)$$

Analogamente ao que fizemos para h no CASO I, queremos trabalhar com $(**)$ módulo $\mathcal{X}$, onde $\mathcal{X}$ se refere ao novo $x^{k_1} \lambda^{l_1}$, assim

b) Prova de que $\mathcal{P}(g) \subset \mathcal{X}$:

Como $\mathcal{X}$ contém todos os ideais intrínsecos que não contém $x^{k_1} \lambda^{l_1}$ e como $\mathcal{P}(g)$ é intrínseco, basta mostrar que $x^{k_1} \lambda^{l_1} \notin \mathcal{P}(g)$.

Se $x^{k_1} \lambda^{l_1}$ pertencesse a $\mathcal{P}(g)$ então $g - bx^{k_1} \lambda^{l_1}$ seria equivalente a g e seu primeiro termo não nulo depois de x^k deveria ocorrer mais adiante no ordenamento do que $x^{k_1} \lambda^{l_1}$, que é absurdo pela construção de g . Portanto $x^{k_1} \lambda^{l_1} \notin \mathcal{P}(g)$, provando que $\mathcal{P}(g) \subset \mathcal{X}$.

Podemos agora analisar $LE(x, \lambda)$ e $LD(x, \lambda)$ para $(**)$.

Como $p \in \mathcal{P}(g) \subset \mathcal{X}$ temos

$$\begin{aligned} LE(x, \lambda) &= g(x, \lambda) + tp(x, \lambda) \equiv g(x, \lambda) \pmod{\mathcal{X}} \\ &\equiv ax^k + bx^{k_1} \lambda^{l_1} \pmod{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Observemos que aqui também LE não depende de t e, portanto, o mesmo acontece para LD .

Usando então 4.7.6 obtemos

$$\begin{aligned} LD(x, \lambda) &= S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \lambda) \\ &\equiv S(x, \lambda, t)[aX^k(x, \lambda, t) + bX^{k_1}(x, \lambda, t)\lambda^{l_1}] \mod \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Observemos que se quizessemos obter novamente a equação

$$S(0, 0, t)X_x^k(0, 0, t) = 1,$$

bastaria igualar os coeficientes de x^k em $LE(x, 0)$ e $LD(x, 0)$.

Para obter a outra equação derivaremos LE e LD l_1 vezes em relação a λ e igualaremos os coeficientes de x^{k_1} .

Mas antes disto obteremos outros resultados que nos mostrarão que o termo X^k em LD não contribuirá para o coeficiente de x^{k_1} .

c) Prova de que $k_1 \leq k-2$ em $g = ax^k + bx^{k_1}\lambda^{l_1} + \dots$:

Suponhamos ao contrário, isto é, que $k_1 \geq k-1$.

Em uma primeira opção, se $k_1 \geq k$ temos

$$g \equiv ax^k + bx^{k_1}\lambda^{l_1} \mod \mathcal{X} \equiv ax^k \left[1 + \frac{b}{a} x^{k_1-k} \lambda^{l_1} \right] \mod \mathcal{X}.$$

Tomando $S = 1 + \frac{b}{a} x^{k_1-k} \lambda^{l_1}$ obtemos $S^{-1}g \equiv ax^k \mod \mathcal{X}$, que é equivalente a g mas tem codimensão infinita, chegando a um absurdo.

Por outro lado, em uma última opção, se $k_1 = k-1$ podemos tomar $X = x - \frac{b}{ka}\lambda^{l_1}$ e obter

$$g(X, \lambda) \equiv aX^k + bX^{k-1}\lambda^{l_1} \pmod{\mathcal{X}}.$$

$$\equiv a \left(x - \frac{b}{ka} \lambda^{l_1} \right)^k + b \left(x - \frac{b}{ka} \lambda^{l_1} \right)^{k-1} \lambda^{l_1} \pmod{\mathcal{X}}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \left[ax^k - \frac{ka}{ka} bx^{k-1} \lambda^{l_1} + a \binom{k}{2} x^{k-2} \left(-\frac{b}{ka} \right)^2 \lambda^{2l_1} + \dots + a \binom{k}{k} \left(-\frac{b}{ka} \right)^k \lambda^{kl_1} \right] + \\ &+ b \lambda^{l_1} \left[x^{k-1} + \binom{k-1}{1} x^{k-2} \left(-\frac{b}{ka} \lambda^{l_1} \right) + \dots + \binom{k-1}{k-1} \left(-\frac{b}{ka} \lambda^{l_1} \right)^{k-1} \right] \pmod{\mathcal{X}} \\ &\equiv ax^k \pmod{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

onde os termos omitidos estão em $\langle \lambda \rangle^{l_1+1} \subset \mathcal{X}$.

Chegamos novamente a uma contradição, deste modo devemos ter $k_1 \leq k-2$.

d) Prova de que $X(x, \lambda) \equiv xY(x, \lambda) \pmod{\mathcal{M}^{k_1+l_1-k+2}}$ para algum $Y \in \mathcal{E}_2$:

Provaremos por indução em $\mathcal{M}^j$, onde $j \leq k_1+l_1-k+2$.

Para $j = 1$ o resultado vale trivialmente pois podemos escrever $X = Yx + Z\lambda \equiv xY \pmod{\mathcal{M}}$.

Suponhamos que vale $X \equiv x\bar{Y} \pmod{\mathcal{M}^j}$ para $j < k_1+l_1-k+2$.

Mostraremos então que

$$X \equiv xY \pmod{\mathcal{M}^{j+1}} \text{ para } j+1 \leq k_1+l_1-k+2.$$

Temos $X \equiv x\bar{Y} \pmod{\mathcal{M}^j}$, logo $X \equiv x\bar{Y} + \alpha x + c\lambda^j \pmod{\mathcal{M}^{j+1}}$, para algum $\alpha x \in \mathcal{M}^j$ e $c \in \mathbb{R}$.

Tomando $Y = \bar{Y} + \alpha$ obtemos

$$X \equiv x(\bar{Y} + \alpha) + c\lambda^j \pmod{\mathcal{M}^{j+1}} \equiv xY + c\lambda^j \pmod{\mathcal{M}^{j+1}}.$$

Falta então mostrar que $c = 0$. Para isto calcularemos X^k , substituiremos em LD de (**) e igualaremos LE com LD.

Usando 4.7.7 obtemos

$$X^k \equiv (xY+c\lambda^j)^k \bmod \mathcal{M}^{j+1+k-1} \equiv (xY+c\lambda^j)^k \bmod \mathcal{M}^{j+k}.$$

Mais ainda,

$$(xY+c\lambda^j)^k \equiv (xY)^k + k(xY)^{k-1}(c\lambda^j) \bmod \langle \lambda^{2j} \rangle.$$

Assim

$$X^k \equiv (xY)^k + ckY^{k-1}x^{k-1}\lambda^j \bmod \mathcal{M}^{k+j} + \langle \lambda^{2j} \rangle.$$

Afirmamos agora que o monômio $x^{k-1}\lambda^j$ não está em

$$\mathcal{R} = \mathcal{M}^{k+l_1+1} + \langle \lambda \rangle^{l_1+1}.$$

Observe que se isto vale devemos ter

$$x^{k-1}\lambda^j \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow (k-1)+j < k_1+l_1+1 \text{ e } j < l_1+1$$

$$\Leftrightarrow j < k_1+l_1-k+2 \text{ e } j < l_1+1$$

Por hipótese já temos $j < k_1+l_1-k+2$. Pelo item c) acima temos $k_1 < k-2$, logo

$$j < k_1+l_1-k+2 \leq (k-2)+l_1-k+2 = l_1 < l_1+1$$

e portanto realmente temos $x^{k-1}\lambda^j \notin \mathcal{R}$.

Substituindo a expressão de X^k em $LD = aSX^k + bSX^{k_1}\lambda^{l_1} \bmod \mathcal{R}$ e usando o fato de $x^{k-1}\lambda^j \notin \mathcal{R}$ temos que o coeficiente de $x^{k-1}\lambda^j$ em LD é igual a $aS(0,0)ckY^{k-1}(0,0)$.

Por outro lado, o coeficiente de $x^{k-1}\lambda^j$ em $LE = ax^k + bx^{k_1}\lambda^{l_1} \bmod \mathcal{R}$ é igual a zero pois de $k_1 \leq k-2$ temos $k_1 < (k-1) < k$.

Igualando estes coeficientes obtemos $c = 0$, mostrando que

$$X^k \equiv (xY)^k \bmod \mathcal{M}^{k+j}.$$

e) Prova de que o coeficiente de $x_1^k \lambda_1^l$ em LD de (***) é igual a $bS(0,0)X_x^k(0,0)$:

Temos $LD = aSX^k + bSX_1^k \lambda_1^l \mod \mathcal{R}$. Como no cálculo do CASO I o coeficiente de $x_1^k \lambda_1^l$ em $bSX_1^k \lambda_1^l \mod \mathcal{R}$ é $bS(0,0)X_x^k(0,0)$.

Falta mostrar que o termo aSX^k realmente não contribui para o coeficiente de $x_1^k \lambda_1^l$.

Pelo item d) acima $X \equiv xY \mod \mathcal{M}_1^{k+l-k+2}$.

Usando 4.7.7 obtemos $X^k \equiv x^k Y^k \mod \mathcal{M}_1^{k+l+1}$.

Como $\mathcal{M}_1^{k+l+1} \subset \mathcal{R}$ podemos escrever $X^k \equiv x^k Y^k \mod \mathcal{R}$.

Pelo item c) acima $k_1 \leq k-2$, logo os monômios de X^k têm o grau da variável x maior que k_1 e assim X^k não pode contribuir para o coeficiente de $x_1^k \lambda_1^l$ em LD, provando o item e).

Este último item encerra finalmente a prova do teorema pois, como já dissemos, basta derivar LE e LD l_1 vezes com relação a λ e igualar os coeficientes de x_1^k para obtermos

$$S(0,0,t)X_x^k(0,0,t) = 1. \quad \blacksquare$$

§8 - COMENTÁRIOS FINAIS

O conceito de determinação finita introduzido no §2 do capítulo II é um caso particular do conceito de M-determinação. Dizemos que um germe $h \in \mathcal{E}_{n+r}$ é M-determinado, onde M é um subespaço de $\mathcal{E}_{n+r}$, se temos h equivalente a g quando $h - g \in M$.

Neste trabalho o Problema do Reconhecimento, em especial a questão da determinação, foi tratado seguindo a linha adotada por Golubitsky. Nesta linha, a abordagem do problema é mais simples e serve para o leitor de áreas afins.

Em [1] Bruce, du Plessis e Wall tratam do problema de M-determinação em um contexto bem mais amplo, utilizando conceitos sofisticados de Geometria Algébrica e envolvendo, de forma essencial, os conceitos de grupos de Lie unipotentes e álgebras de Lie nilpotentes. (Chamamos de unipotente o grupo cujas partes lineares são matrizes unipotentes, isto é, matrizes que em algum sistema de coordenadas podem ser escritas como matrizes triangular superior com 1's na diagonal. Uma álgebra de Lie nilpotente é a álgebra de Lie de um grupo unipotente).

Com a hipótese de unipotência para os grupos, os autores acima obtêm condições necessárias e suficientes para a M-determinação finita.

T. Gaffney em *New Methods in Classification Theory of Bifurcation Problems* [3], e I. Melbourne em *The Recognition Problem for Equivariant Singularities* [10], utilizando os resultados do trabalho acima, obtiveram caracterizações dos termos de ordem alta que possibilitam determiná-los de forma efetiva.

Em [3], Gaffney trata da M-determinação de problemas de bifurcação $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^p$ em $\mathcal{E}_{n+r}^p$ (um $\mathcal{E}_{n+r}$ -módulo). O $\mathcal{P}(h)$ usado por ele é mais genérico do que o usado nesta dissertação:

$$\mathcal{P}(h) = \{p \in \mathcal{E}_{n+r}^p; g + p \sim g \quad \forall g \sim h\}$$

Para $h \in \mathcal{E}_{n+r}^p$ de codimensão finita, Gaffney caracteriza $\mathcal{P}(h)$ como:

$$\mathcal{P}(h) = \text{itr } L.h,$$

onde L é um subespaço h -maximal nilpotente de $L\mathcal{B}$ (aqui $L\mathcal{B}$ é a álgebra de Lie de $\mathcal{B}$). (Teorema 1.8, pag 103, [3]).

A prova deste resultado é bastante conceitual e foge do escopo desta dissertação.

Usando o grupo $\mathcal{F}$ no lugar de $\mathcal{B}$ e tomando $n = r = p = 1$, tem-se que a álgebra de Lie nilpotente maximal de $\mathcal{F}$ é exatamente o espaço tangente do grupo unipotente J . Assim o resultado acima é o teorema 4.3.10 desta dissertação, isto é,

$$\mathcal{P}(h) = \text{itr } J(h).$$

Em [10] Melbourne trata do problema do reconhecimento para germes $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com a presença de simetria, dada pela ação de um grupo de Lie compacto Γ em $\mathbb{R}^n$.

Para um grupo unipotente $\mathcal{U}$, Melbourne define um $\mathcal{P}(h, \mathcal{U})$

análogo ao de Gaffney, isto é,

$$\mathcal{P}(h, \mathcal{U}) = \{p \in \mathcal{E}_{n+1}^n; g + p \in \mathcal{U}.h \quad \forall g \sim_{\mathcal{U}} h\}.$$

A caracterização deste $\mathcal{P}(h, \mathcal{U})$ é dada por

$$\mathcal{P}(h, \mathcal{U}) = \text{itr}_{\mathcal{U}} T(h, \mathcal{U}),$$

isto é, $\mathcal{P}(h, \mathcal{U})$ é a parte $\mathcal{U}$ -intrínseca do espaço tangente a h com relação a $\mathcal{U}$ -equivalência

Em particular, quando Γ é trivial (isto é, no caso sem simetria) e $\mathcal{U}$ é o grupo J , obtém-se

$$\mathcal{P}(h, J) = \text{itr}_J J(h).$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRUCE, J. W., DU PLESSIS, A. A., and WALL C. T. C.
Determinacy and unipotency. *Inventiones Mathematicae* 88,
521-554, 1987.
- [2] CHOW, S. N. and HALE, J. K. *Methods of bifurcation theory.*
Grundlehren 251, Springer, New York, 1982.
- [3] GAFFNEY, T. *New methods in classification theory of
bifurcation problems.* *Contemporary Mathematics*, 56,
97-118, 1986
- [4] GIBSON, C. G. *Singular points of smooth mappings.*
Research Notes in Mathematics, 25, London, Pitman, 1979.
- [5] GOLUBITSKY, M. & SCHAEFFER, D. G. *A theory for imperfect
bifurcation via singularity theory.* *Communication on
Pure and Applied Mathematics*, 32, 21-98, 1979a.
- [6] GOLUBITSKY, M. & SCHAEFFER, D. G. *Imperfect bifurcation in
presence of symetry.* *Communications in Mathematical
Physics*, 67, 205-232, 1979b.
- [7] GOLUBITSKY, M. & SCHAEFFER, D. G. *Singularities and
groups in bifurcation theory.* *Applied Mathematical in
Sciences*, 51, Berlin, Springer, 1984. Vol. 1.
- [8] GOLUBITSKY, M., STEWART, I. & SCHAEFFER, D. G.
Singularities and groups in bifurcation theory. *Applied
Mathematical Sciences*, 69, Berlin, Springer, 1988. Vol. 2.
- [9] ISUMIA, S., *Generic Bifurcations of varieties I.* To
appear
- [10] MELBOURNE, I. *The recognition problem for equivariant
singularities.* *Nonlinearity* 1, 215-240, 1988.