Periodicidade para uma classe de Equações
Diferenciais Retardadas no Plano

Maria Elisa Quiroga

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para obtenção
do Título de Mestre em Matemática

Orientador: *Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas*

São Carlos
1992

A Deus, sem o qual nada seria possível.

Aos meus pais (in memoriam)

Ao meu filho Rafael

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Plácido Z. Táboas, pela segurança na condução dessa minha iniciação à pesquisa. A confiança, o entusiasmo e a dedicação irrestrita constituem palavras de denotação fraca perante todo o relacionamento humano que perpassou por sua orientação.

Aos professores do Departamento de Matemática, do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e colegas de mestrado, pelo ótimo ambiente de estudo, pelo apoio, pelo incentivo e pelas conversas que proporcionaram momentos de iluminação, sensibilidade e grandeza.

A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro parcial.

Abstract

We are concerned with periodicity results for the planar delay-differential equation

$$x'(t) = -x(t) + \alpha F(x(t-1)), \quad \alpha > 0.$$

With F satisfying a kind of planar negative feedback condition and some appropriate hypotheses, we state an existence theorem for nonconstant periodic solutions.

Neglecting the boundedness condition on F , we show the existence of a sequence of values of α , $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots$, where a Hopf bifurcation occurs.

Conteúdo

Introdução	ii
1 Definições e Fatos Básicos	1
2 As Bifurcações de Hopf	11
3 Soluções Periódicas	19
4 Exemplos	38
Referências	44

Introdução

Neste trabalho estudamos o problema da existência de soluções periódicas não constantes da equação diferencial com retardamento

$$x'(t) = -x(t) + \alpha F(x(t-1)), \quad (E)$$

onde $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $F = \text{col}(F_1, F_2)$ é uma função de classe C^3 de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ e $\alpha > 0$ é um parâmetro.

No capítulo um apresentamos definições e fatos básicos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

A localização das raízes características da equação linearizada de (E), em torno de (0,0), é fundamental para o comportamento assintótico das soluções. Por esse motivo, não podemos deixar de fazer o estudo da equação característica que está contido no capítulo dois. Ainda nesse capítulo provamos, para uma certa classe de funções F , a existência de uma infinidade de valores positivos do parâmetro α onde ocorrem bifurcações de Hopf.

No capítulo três, acrescentando uma hipótese de limitação para F , fazemos uma aplicação de um teorema de ponto fixo através do qual obtemos a existência de soluções periódicas não constantes da equação (E), com período $T > 4$, para α maior que um certo α_0 .

No capítulo quatro apresentamos exemplos mostrando que a classe de funções F para a qual uma equação do tipo (E) admite soluções periódicas não constantes com período $T > 4$, α maior que um certo α_0 , é bastante geral.

Este trabalho visa uma apresentação de detalhes de [8] e a construção de alguns exemplos que consideramos interessantes. A linha de demonstração do Lema 3.7 tem inspiração em [1].

Capítulo 1

Definições e Fatos Básicos

O interesse central deste trabalho está contido na teoria das equações diferenciais diferença. Como estas são um caso especial das Equações Diferenciais Funcionais Retardadas, formularemos os pré-requisitos no contexto mais geral destas últimas, de acordo com a teoria desenvolvida por Jack Hale em [4].

Consideremos $r \geq 0$ um número real dado, $\mathbf{R}^n$ o espaço vetorial n -dimensional com a norma euclideana $|\cdot|$, $C([a, b], \mathbf{R}^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas do intervalo $[a, b]$ tomando valores em $\mathbf{R}^n$, munido da norma do supremo.

Sejam $[a, b] = [-r, 0]$ e $C = C([-r, 0], \mathbf{R}^n)$, onde a norma de um elemento $\phi \in C$ é dada por

$$|\phi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$$

Definição 1.1 *Sejam $\sigma \in \mathbf{R}$, $A \geq 0$ e $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbf{R}^n)$. Para cada $t \in [\sigma, \sigma + A]$, definimos a função $x_t \in C$ por*

$$x_t(\theta) = x(t + \theta),$$

onde $-r \leq \theta \leq 0$.

Definição 1.2 *Sejam D um subconjunto de $\mathbf{R} \times C$, $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ uma função, e “.” representando a derivada à direita. A equação*

$$x'(t) = f(t, x_t) \quad (1.1)$$

é dita uma equação diferencial funcional retardada sobre D e será denotada por $EDFR(f)$.

Observação: Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Para $r > 0$, uma equação do tipo

$$x'(t) = F(x(t), x(t-r)) \quad (1.2)$$

é um exemplo de equação diferencial-diferença, objeto de estudo deste trabalho. Se definirmos $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(t, \phi) = F(\phi(0), \phi(-r))$, vê-se imediatamente que (1.2) é um caso particular de (1.1), com $D = \mathbb{R} \times C$.

Definição 1.3 Se existem $\sigma \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ tal que $x \in C([\sigma-r, \sigma+A], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (1.1) para $t \in [\sigma, \sigma+A)$, a função x é dita solução da equação (1.1).

Definição 1.4 Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$, dizemos que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (1.1) com valor inicial ϕ em σ se:

1. existe $A > 0$ tal que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (1.1) sobre $[\sigma-r, \sigma+A)$
2. $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$

Definição 1.5 A equação (1.1) é dita linear se $f(t, \phi) = L(t, \phi) + h(t)$, onde $L(t, \phi)$ é linear em ϕ ; linear homogênea se $h \equiv 0$ e linear não homogênea se $h \not\equiv 0$.

Definição 1.6 A equação (1.1) é dita autônoma se $f(t, \phi) = g(\phi)$ onde g não depende de t .

Lema 1.1. Se $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ são dados e $f(t, \phi)$ é contínua, então encontrar uma solução da equação (1.1) por (σ, ϕ) é equivalente a resolver a equação integral

$$\begin{aligned}x_{\sigma} &= \phi \\x(t) &= \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq \sigma.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Definição 1.7 *Sejam X, Y espaços de Banach e $f : A \subset X \rightarrow Y$. A função f é completamente contínua se é contínua e leva cada limitado de A em um conjunto relativamente compacto de Y .*

Lema 1.2 *(Teorema do ponto fixo de Schauder). Se U é um subconjunto limitado, fechado e convexo de um espaço de Banach X e, $T : U \rightarrow U$ é completamente contínua, então T tem um ponto fixo em U .*

Se V é um subconjunto de $\mathbf{R} \times C$, então $C(V, \mathbf{R}^n)$ é a classe de todas funções $f : V \rightarrow \mathbf{R}^n$ que são contínuas e $C^0(V, \mathbf{R}^n) \subset C(V, \mathbf{R}^n)$ é o subconjunto das funções contínuas e limitadas de V em $\mathbf{R}^n$. Com a norma

$$\|f\|_V = \sup_{(t, \phi) \in V} \|f(t, \phi)\|,$$

o espaço $C^0(V, \mathbf{R}^n)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.1 *(Existência). Sejam Ω um subconjunto aberto em $\mathbf{R} \times C$ e $f^0 \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$. Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$, então existe uma solução da EDFR(f^0) passando por (σ, ϕ) .*

Mais geralmente, se $W \subseteq \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ é dada, então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de W tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbf{R}^n)$, existe uma vizinhança $U \subseteq C^0(V, \mathbf{R}^n)$ de f^0 e um $\alpha > 0$ tal que, para qualquer $(\sigma, \phi) \in W, f \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \phi, f)$ da EDFR(f) por (σ, ϕ) definida em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.

Teorema 1.2 *(Dependência contínua). Suponhamos que $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times C$ é aberto, $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ e x^0 é uma solução da EDFR(f^0) por (σ^0, ϕ^0) que existe e é única em $[\sigma^0 - r, b]$. Sejam $W^0 \subseteq \Omega$ o conjunto compacto definido por*

$$W^0 = \{(t, x_t^0) \mid t \in [\sigma^0, b]\}$$

e, V^0 uma vizinhança de W^0 na qual f^0 é limitada. Se (σ^k, ϕ^k, f^k) , $k = 1, 2, \dots$ satisfaz $\sigma^k \rightarrow \sigma^0, \phi^k \rightarrow \phi^0$ e $\|f^k - f^0\|_{V^0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então existe um k^0 tal que para $k \geq k^0$ cada solução $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ por (σ^k, ϕ^k) da EDFR(f^k)

existe em $[\sigma^k - r, b]$ e $x^k \rightarrow x^o$ uniformemente em $[\sigma^o - r, b]$. Como nem todas as x^k estão necessariamente definidas em $[\sigma^o - r, b]$, por $x^k \rightarrow x^o$ uniformemente sobre $[\sigma^o - r, b]$, entendemos que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $k_1(\epsilon)$ tal que $x^k(t), k \geq k_1(\epsilon)$, está definida sobre $[\sigma^o - r + \epsilon, b]$ e $x^k \rightarrow x^o$ uniformemente sobre $[\sigma^o - r + \epsilon, b]$.

Teorema 1.3 (Unicidade). *Suponhamos que Ω é um conjunto aberto em $\mathbf{R} \times C$, $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ é contínua e $f(t, \phi)$ é Lipschitziana em ϕ em cada conjunto compacto em Ω . Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$, então a solução da equação (1.1) por (σ, ϕ) é única.*

Definição 1.8 *Suponhamos que f na equação (1.1) seja contínua. Se x é uma solução da equação (1.1) sobre um intervalo $[\sigma - r, a), a > \sigma$, dizemos que $\tilde{x}$ é um prolongamento de x se existe $b > a$ tal que $\tilde{x}$ está definida em $[\sigma - r, b)$, coincide com x em $[\sigma - r, a)$ e $\tilde{x}$ satisfaz a equação (1.1) em $[\sigma, b)$.*

Definição 1.9 *Uma solução x da equação (1.1) é maximal se não existe um prolongamento de x . Neste caso, seu intervalo de existência $[\sigma - r, a)$ é chamado intervalo maximal de existência à direita.*

Teorema 1.4 (Escape de compactos). *Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbf{R} \times C$ e $f \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$. Se x é uma solução maximal da equação (1.1) sobre $[\sigma - r, b)$, então, para qualquer conjunto compacto W em Ω , existe um t_W tal que $(t, x_t) \notin W$ para $t_W \leq t < b$.*

Teorema 1.5 (Escape de limitados e fechados). *Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbf{R} \times C$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ completamente contínua, isto é, f é contínua e leva conjuntos fechados e limitados de Ω em conjuntos limitados de $\mathbf{R}^n$. Se x é uma solução maximal da equação (1.1) em $[\sigma - r, b)$, então para todo conjunto fechado e limitado $U \subset \Omega$, existe $t_U \in \mathbf{R}$ tal que $(t, x_t) \notin U$ para $t \in [t_U, b)$.*

Observação: Os fatos apresentados até aqui pertencem a teoria geral das EDR. No entanto, não os utilizaremos em toda generalidade neste trabalho. Na verdade, pode-se tirar vantagens das particularidades das equações estudadas a seguir para obter informações mais completas e de forma mais simples. Descrevemos abaixo uma situação que ilustra o que estamos afirmando.

Se $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ é uma função contínua pode-se demonstrar diretamente que o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + F(x(t-r)), \\ x|_{[-r,0]} &= \phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

tem uma única solução $x : [-r, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$.

De fato, essa equação é equivalente à

$$\begin{aligned} (e^t x(t))' &= e^t F(x(t-r)) \\ x|_{[-r,0]} &= \phi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Chamando de $x_1(t)$ a solução $x(t)$ para $t \in [0, r]$, (1.5) nos leva a

$$x_1(t) = \phi_1(0)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} F(\phi(s-r)) ds, \quad t \in [0, r]$$

Do mesmo modo se $x_2(t)$ representa a solução $x(t)$ para $t \in [r, 2r]$, obtemos

$$x_2(t) = x_1(r)e^{r-t} + \int_r^t e^{s-t} F(x_1(s-r)) ds, \quad t \in [r, 2r]$$

Procedendo dessa forma sucessivamente obtemos a existência e a unicidade da solução de (1.4) em $[-r, \infty)$. $\diamond$

Definição 1.10 *Consideremos uma família a um parâmetro de EDFRs da forma*

$$x'(t) = F(\alpha, x_t), \quad (1.6)$$

onde $F(\alpha, \phi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas em α, ϕ , para $\alpha \in \mathbf{R}$, $\phi \in C$ e $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α . Definamos $L : \mathbf{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}^n$ por

$$L(\alpha)\psi = F_\phi(\alpha, 0)\psi,$$

onde $F_\phi(\alpha, 0)$ é a derivada de $F(\alpha, \phi)$ com respeito a ϕ em $\phi = 0$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

(H_1) A EDFR ($L(0)$) linear tem uma raiz característica simples imaginária pura $\lambda_0 = i\nu_0 \neq 0$ e toda raiz característica $\lambda_j \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$ satisfaz $\lambda_j \neq m\lambda_0$ para todo

inteiro m . Uma vez que $L(\alpha)$ é continuamente diferenciável em α , de acordo com [4, Lema 2.2, seção 7.2], existe $\alpha_0 > 0$ e uma raiz característica simples $\lambda(\alpha)$ da equação linear $\text{EDFR}(L(\alpha))$ a qual tem uma derivada contínua $\lambda'(\alpha)$ em α para $|\alpha| < \alpha_0$.

(H_2) $\Re(\lambda')(0) \neq 0$, onde a linha representa a derivada de λ em relação a α .

O Teorema enunciado a seguir é conhecido como Teorema de Bifurcação de Hopf.

Teorema 1.6. *Se $F(\alpha, \phi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas com relação a α e ϕ , $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α , e as hipóteses (H_1) e (H_2) estão satisfeitas, então existem constantes $a_0 > 0, \alpha_0 > 0, \delta_0 > 0$, funções continuamente diferenciáveis $\alpha(a) \in \mathbb{R}, \omega(a) \in \mathbb{R}$ e $x^*(a)$ $\omega(a)$ -periódica, para $|a| < a_0$, tal que $x^*(a)$ é uma solução da equação (1.6). Além disso, para $|\alpha| < \alpha_0, |\omega - (\frac{2\pi}{\nu_0})| < \delta_0$, as soluções x^* são as únicas soluções ω -periódicas da equação (1.6) com $|x_t| < \delta_0$, exceto por uma translação de fase.*

Seja K um espaço métrico compacto e M um espaço métrico. Consideremos $C(K, M)$ o conjunto das aplicações contínuas de K em M com a topologia dada por

$$d(f, g) = \max_{x \in K} d(f(x), g(x)),$$

onde $f, g \in C(K, M)$.

Definição 1.11 *Um conjunto $E \subset C(K, M)$ é equicontínuo se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0, \delta = \delta(\epsilon)$ tal que se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall f \in E$.*

Daremos a seguir uma versão do teorema de Ascoli útil aos nossos propósitos.

Teorema 1.7 (Ascoli-Arzelà). *Sejam K um espaço métrico compacto e $E \subset C(K, \mathbb{R}^m)$. Se*

1. *existe $N \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq N, \forall x \in K, \forall f \in E$,*
2. *E é equicontínuo,*

então E é relativamente compacto.

O conceito de ejetividade, dado a seguir, é atribuído a Browder [2].

Definição 1.12 *Sejam X um espaço de Banach, U um subconjunto de X e x um ponto de U . Dada uma aplicação $A : U \setminus \{x\} \rightarrow X$, o ponto $x \in U$ é dito um ponto ejetivo de A se existe uma vizinhança aberta $G \subseteq X$ de x , tal que para cada $y \in G \cap U, y \neq x$, existe um inteiro $m = m(y)$ tal que $A^m y \notin G \cap U$.*

Definição 1.13 *Dado $M > 0$, definimos $S_M = \{x \in X \mid \|x\| = M\}$ e $B_M = \{x \in X \mid \|x\| < M\}$.*

Observamos que $S_M = \partial B_M$.

Teorema 1.8. *Se K é um subconjunto fechado, limitado, convexo, de dimensão infinita de um espaço de Banach X , $A : K \setminus \{x_0\} \rightarrow K$ é completamente contínua, e $x_0 \in K$ é um ponto ejetivo de A , então existe um ponto fixo de A em $K \setminus \{x_0\}$. Se K é de dimensão finita e x_0 é um ponto extremo de K , então é válida a mesma conclusão.*

O Teorema abaixo é atribuído a R. Nussbaum [6].

Teorema 1.9. *Sejam X um espaço de Banach, K um subconjunto convexo e fechado de X e $A : K \setminus \{0\} \rightarrow K$ uma aplicação completamente contínua, tal que $0 \in K$ é um ponto ejetivo de A . Suponhamos que exista um $M > 0$ tal que $Ax = \lambda x$ implique $\lambda < 1$ para todo $x \in K \cap S_M$. Então A tem um ponto fixo em $K \cap B_M \setminus \{0\}$ se K tem dimensão infinita ou 0 é um ponto extremo de K .*

Consideremos as equações diferenciais retardadas

$$x'(t) = Lx_t + f(x_t) \quad (1.7)$$

$$y'(t) = Ly_t ; \quad (1.8)$$

onde $L : C \rightarrow \mathbf{R}^2$ é uma aplicação linear contínua, $f : C \rightarrow \mathbf{R}^2$ é completamente contínua com sua primeira derivada contínua, $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$. A equação característica da equação (1.8) é dada por

$$\det \Delta(\lambda) = 0$$

onde $\Delta(\lambda) := \lambda I - L(e^{\lambda \cdot} I)$. Suas raízes serão chamadas indistintamente *raízes*

características ou autovalores.

Para cada autovalor λ , o espaço de fase C é decomposto como soma direta, $C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, onde P_λ e Q_λ são invariantes sob o operador solução da equação (1.8), $T(t)$, $t \geq 0$ dado por $T(t)\phi = y_t(\cdot; \phi)$, $\phi \in C$. Seja π_λ o operador projeção com imagem P_λ definido por essa decomposição.

Seja $\Phi = (\phi_{1\lambda}, \dots, \phi_{d\lambda})$ uma base do subespaço P_λ e consideremos a aplicação linear $\phi \rightarrow b$, onde $b = b(\phi)$ é um d -vetor definido por $\pi_\lambda \phi = \Phi b$. Escolhemos para b a norma euclidiana.

Podemos então enunciar o Lema abaixo cuja demonstração é encontrada em [3, Lema 3.1] ou [4, capítulo 10, Lema 1.1].

Lema 1.3. *Existe uma forma quadrática definida positiva $V(\phi) = b^T B b$, com a seguinte propriedade:*

$\forall p > 0, \exists \delta_0 > 0$ tal que $\forall \delta, 0 < \delta \leq \delta_0$, se ϕ satisfaz $\|\phi\| \leq \delta$ e $V(\phi) \geq p^2 \delta^2$, então

$$V'(\phi) := \liminf_{t \rightarrow 0_+} \frac{1}{t} [V(x_t(\cdot; \phi)) - V(\phi)] > \frac{1}{2} V(\phi) > 0.$$

Lema 1.4. *Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

(i) *Existe um autovalor λ da equação (1.8) com $\Re(\lambda) > 0$.*

(ii) *Existe um subconjunto convexo fechado K de C , $0 \in K$, e uma função contínua $\tau : K \setminus \{0\} \rightarrow [\rho, \infty)$, $\rho > 0$, tal que a aplicação $A : K \rightarrow C$ dada por*

$$A\phi = x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi), \quad \phi \in K \setminus \{0\}$$

$$A0 = 0,$$

é completamente contínua e $AK \subset K$.

(iii) *Se $0 < a < M$, para algum $M \in \mathbb{R}$,*

$$\inf \{ \|\pi_\lambda x_t\| \mid x_t = x_t(\cdot; \phi), \phi \in K, \|\phi\| = a, 0 \leq t \leq \tau(\phi) \} > 0.$$

(iv) Dado $G \subset C$ aberto, $0 \in G$, existe uma vizinhança V de 0 tal que $x_t(\cdot; \phi) \in G$, se $\phi \in V \cap K$, $\phi \neq 0$, e $0 \leq t \leq \tau(\phi)$.

Então, 0 é um ponto ejetivo de A .

Prova: Sejam $\phi \in K$ e $x_t = x_t(\cdot; \phi)$ solução não nula de (1.7).

Chamando de $b(t)$ a coordenada de $\frac{x_t}{\|x_t\|}$ em P_λ e considerando a função $V(\phi)$ do Lema 1.3, segue que:

$$V\left(\frac{x_t}{\|x_t\|}\right) = b(t)^T B b(t) = |b(t)|^2 \frac{b(t)^T}{|b(t)|} B \frac{b(t)}{|b(t)|} \geq |b(t)|^2 \beta^2 \quad (1.9)$$

onde $\beta^2 := \min\{b^T B b \mid |b| = 1\}$.

Então

$$\left\| \pi_\lambda \left(\frac{x_t}{\|x_t\|} \right) \right\|^2 \leq \|\Phi\|^2 |b(t)|^2 \leq \frac{\|\Phi\|^2}{\beta^2} V\left(\frac{x_t}{\|x_t\|}\right) = u^2 \beta^{-2} V\left(\frac{x_t}{\|x_t\|}\right) \quad (1.10)$$

Segue de (1.10) e da hipótese (iii) que

$$\nu^2 := \inf \left\{ V\left(\frac{x_t}{\|x_t\|}\right) \mid x_t = x_t(\cdot; \phi), \phi \in K, \|\phi\| = a, 0 \leq t \leq \tau(\phi) \right\} > 0.$$

Fixemos p , $0 < p < \nu$ e seja δ_0 de acordo com o lema 1.3.

Então para todo δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, se

$$\|\phi\| \leq \delta, V(\phi) \geq p^2 \delta^2 \Rightarrow V'(\phi) > \frac{1}{2} V(\phi) > 0.$$

Para cada δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, definamos

$$G(\delta) := \{\phi \in C \mid \|\phi\| < \delta, V(\phi) < p^2 \delta^2\}.$$

$G(\delta)$ é aberto e $0 \in G(\delta)$.

Escolhamos $\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta_0$ de modo que segundo a condição (iv) do Lema 1.4,

$$\phi \in G(\delta_1) \cap K, \phi \neq 0 \Rightarrow x_t \in G(\delta_0), \quad 0 \leq t \leq \tau(\phi) \quad (1.11)$$

Para $\phi \in G(\delta_1) \cap K, \phi \neq 0$ e $t \in [0, \tau(\phi)]$ fixado arbitrariamente, seja $\epsilon = \|x_t(\cdot; \phi)\| < \delta_0$

Então

$$V(x_t) = \|x_t\|^2 V\left(\frac{x_t}{\|x_t\|}\right) \geq \epsilon^2 \nu^2 > p^2 \epsilon^2$$

e o lema 1.3 implica que

$$V'(x_t) > \frac{1}{2} V(x_t) > \frac{1}{2} p^2 \epsilon^2 > 0,$$

isto é, $V(x_t)$ é estritamente crescente em $t, 0 \leq t \leq \tau(\phi)$.

Além disso, $V'(x_t)$ fica uniformemente afastada do zero em $[0, \tau(\phi)]$, já que

$$V'(x_t) > \frac{1}{2} V(x_t) > \frac{1}{2} V(\phi).$$

Se $A\phi = x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi)$ ainda permanecer em $G(\delta_1) \cap K$, nós podemos repetir o raciocínio para assegurar que

$$V'(x_t) > \frac{1}{2} V(x_t) > \frac{1}{2} V(x_{\tau(\phi)}) > \frac{1}{2} V(\phi) > 0$$

para $\tau(\phi) \leq t \leq \tau(\phi) + \tau(A\phi)$ e assim sucessivamente.

Suponhamos por um momento que $A^n(\phi) \in G(\delta_1) \cap K, \quad n = 1, 2, \dots$

Então $V(x_t(\cdot; \phi))$ é estritamente crescente em $t, V(\phi) < p^2 \delta_1^2$ e $V'(x_t(\cdot; \phi))$ fica uniformemente longe do zero para $t \geq 0$.

Sejam t_0 o primeiro instante t para o qual $V(x_{t_0}(\cdot; \phi)) = p^2 \delta_0^2$ e $n_0 = n_0(\phi)$ o maior inteiro positivo tal que $A^{n_0} \phi = x_T$ para algum $T \leq t_0$.

Então, como $x_{t_0} \notin G(\delta_0), t_0 \leq T + \tau(A^{n_0} \phi)$ pois $p^2 \delta_0^2 = V(x_{t_0})$, segue da construção de δ_1 que

$$A^{n_0} \phi \notin G(\delta_1) \cap K$$

o que é uma contradição, e portanto, temos a ejetividade de 0 com respeito à A . $\diamond$

Capítulo 2

As Bifurcações de Hopf

Consideremos a família a um parâmetro de equações diferenciais autônomas não lineares da forma

$$x'(t) = -x(t) + \alpha F(x(t-1)) \quad (E)$$

onde $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^3 , $F(0) = 0$, $F'(0) \neq 0$ e $\alpha > 0$ um parâmetro real. Nosso objetivo neste capítulo, é estabelecer para certos valores do parâmetro α , a existência de soluções periódicas não nulas de (E), que emanam da solução nula - as chamadas Bifurcações de Hopf.

Denotando $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0) = \delta_1$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) = \delta_2$, a equação (E) com F munida da hipótese:

$$(H.1) \quad x_2 F_1(x) > 0, \text{ se } x_2 \neq 0, x_1 F_2(x) < 0, \text{ se } x_1 \neq 0; \delta_1 = -\delta_2 = 1$$

tem linearização próxima à origem dada por:

$$x'(t) = -x(t) + B(\alpha)x(t-1) \quad (L)$$

onde

$$B(\alpha) := \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação: As hipóteses $x_2 F_1(x) > 0, x_2 \neq 0$ e $x_1 F_2(x) < 0, x_1 \neq 0$ implicam $\delta_1, -\delta_2 \geq 0$.

As suposições sobre as derivadas parciais podem ser substituídas por $\delta_1, \delta_2 \neq 0$.

Observemos também que as hipóteses acima forçam que as órbitas da equação (E) espiralem em torno da origem e tornam plausível a existência de soluções periódicas.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não trivial de (L) da forma $x(t) = e^{\lambda t}u, u \in \mathbb{R}^2$, é que λ seja raiz da chamada equação característica de (L):

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \Delta(\lambda) := (\lambda + 1)I - B(\alpha)e^{-\lambda} \quad (2.1)$$

onde I representa a matriz identidade de ordem 2; ou equivalentemente

$$(\lambda + 1)^2 e^{2\lambda} = -\alpha^2 \quad (2.2)$$

Fazendo uma mudança de parâmetros $\beta = \alpha e$ e uma translação de $\lambda, \mu = \lambda + 1$, a equação (2.2) torna-se

$$\mu^2 e^{2\mu} = -\beta^2 \quad (2.3)$$

Observemos que $\mu = 0$ é a única raiz real de (2.3) e ocorre somente quando $\beta = 0$. Além disso, μ é uma raiz de (2.3) se e somente se, seu complexo conjugado $\bar{\mu}$ também o é; podemos, portanto, restringir nosso estudo ao semiplano superior $\Im(\mu) > 0$.

Lema 2.1. *As raízes imaginárias puras de (2.3) são $\mu = \pm k\pi i$, e elas ocorrem apenas para $\beta = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$.*

Prova: Se $\mu = a + bi$, (2.3) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} e^{2a} [(a^2 - b^2) \cos 2b - 2ab \sin 2b] = -\beta^2 \\ (a^2 - b^2) \sin 2b + 2ab \cos 2b = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Supondo $\mu = bi, b > 0$, o sistema (2.4) nos dá $\sin 2b = 0, \cos 2b > 0$ e, portanto, $b = k\pi$ e $\beta = k\pi$, $k = 1, 2, \dots \diamond$

Lema 2.2. *Não existe raízes de (2.3) sobre as retas $a + bi \mid b = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$.*

Prova: Se $\mu = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i$, $k = 0, 1, 2, \dots$, o sistema (2.4) torna-se:

$$\begin{cases} e^{2a} \left[a^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \right] = \beta^2 \\ a(2k + 1)\pi = 0. \end{cases}$$

o qual é incompatível. $\diamond$

Segue do Lema 2.2 que toda raiz μ de (2.3) deve pertencer a alguma das faixas:

$$S_k := \left\{ \mu = a + bi, b > 0, \left(k - \frac{1}{2}\right) \pi < b < \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lema 2.3. *Se $\mu = a + bi \in S_0$ é uma raiz de (2.3), então $a > 0$.*

Prova: Segue da equação (2.3) que μe^μ é um número imaginário puro. Portanto, como $\Re(\mu e^\mu) = e^a[a \cos b - b \sin b] = 0$, com $\cos b > 0$ e $b \sin b > 0$, concluímos que a deve ser positivo. $\diamond$

Lema 2.4. *Cada faixa S_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ contém precisamente uma raiz de (2.3), que é simples.*

Prova: Faremos a prova para a faixa S_1 . Pequenas adaptações levam aos demais casos.

Seja $\mu = a + bi \in S_1$. A equação (2.3) implica $\Re(\mu e^\mu) = e^a(a \cos b - b \sin b) = 0$ e, como $\cos b < 0$, segue que $a \sin b = \frac{b \sin^2 b}{\cos b} \leq 0$. Logo, $\Im(\mu e^\mu) = e^a(a \sin b + b \cos b)$ é negativo, de modo que na faixa com a qual estamos tratando, (2.3) é equivalente à:

$$\mu e^\mu = -i\beta \tag{2.5}$$

e a equação (2.5) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} b \tan b = a \\ e^a(a \sin b + b \cos b) = -\beta \end{cases} \tag{2.6}$$

Substituindo a primeira equação de (2.6) na 2a. equação, obtemos

$$\beta = \Lambda(b) := \frac{-be^{b \tan b}}{\cos b}, \quad (2.7)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{db} &= -e^{b \tan b} [\sec b + b \sec b \tan b + b \sec b (\tan b + b \sec^2 b)] \\ &= -e^{b \tan b} (1 + 2b \tan b + b^2 \sec^2 b) \sec b \\ &= -e^{b \tan b} [(1 + b \tan b)^2 + b^2] \sec b > 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

e além disso,

$$\Lambda\left(\frac{\pi}{2}+\right) = 0, \quad \Lambda\left(\frac{3\pi}{2}-\right) = +\infty \quad (2.9)$$

As propriedades de Λ implicam que (2.7) define b univocamente como uma função de β , $0 < \beta < +\infty$. Através da primeira equação de (2.6), também obtemos a e, portanto $\mu \in S_1$, como função de β . Além disso, μ é diferenciável com respeito à β .

Seja μ_0 uma raiz de (2.3). Uma vez que $\mu_0 \neq -1$ obtemos

$$\frac{d}{d\mu} (\mu^2 e^{2\mu} + \beta^2)_{\mu=\mu_0} = 2\mu_0 e^{2\mu_0} (1 + \mu_0) \neq 0;$$

portanto, μ_0 é simples. $\diamond$

Observação: Da prova do Lema 2.4 decorre que:

1. Se μ permanece no semiplano superior $\Im(\mu) > 0$, em cada faixa fixada S_k a raiz de (2.3) é uma função diferenciável de $\beta > 0$ e, em virtude de (2.8) temos que $\frac{db}{d\beta} > 0$.
2. Como $|\tan b| < b \sec^2 b$, em virtude da 1a. equação de (2.6)

$$\frac{da}{d\beta} = (\tan b + b \sec^2 b) \frac{db}{d\beta} > 0.$$

Lema 2.5. Se $\mu_k = a_k + b_k i \in S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ são raízes de (2.3), então suas partes reais satisfazem $a_0 > a_1 > \dots \rightarrow -\infty$.

Prova: Se $\mu^2 e^{2\mu} = -\beta^2$ e $\mu = a + bi$, então

$$(a^2 + b^2)e^{2a} = \beta^2 \quad (2.10)$$

Para $\beta = \pi$ a equação (2.10) define $b > 0$ como função de a , $a \in (-\infty, 0]$ e tal função é decrescente, já que

$$\frac{db}{da} = -\frac{1}{b} [\pi^2 e^{-2a} + a] < 0, \text{ para } a \leq 0.$$

Ainda, de acordo com os Lemas 2.1 e 2.3 temos que $a_0 > a_1 = 0 > a_k$, $k = 2, 3, \dots$.

Assim $a_0 > a_1 = 0 > \dots > a_k \dots$, com $a_k + b_k i = \mu_k \in S_k$, para $k \geq 0$.

Suponhamos por um momento que tal ordenação seja falsa para algum valor do parâmetro $\beta > 0$.

Como $\Re(\mu)$ é uma função contínua de β em cada faixa S_k , existe algum $\beta = \bar{\beta}$ para o qual (2.3) tem raízes μ_k e μ_l tal que, $a_k = a_l = a$, com $k > l$.

Mas então, pela equação (2.10):

$$(a^2 + b_k^2)e^{2a} = (a^2 + b_l^2)e^{2a}$$

o que implica que $b_k = b_l$, uma contradição.

Assim, $a_0 > a_1 > \dots$. Se $a = a_k$, $b = b_k$ em (2.10), podemos ver que $a_k \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow \infty$. $\diamond$

Relembrando que as raízes μ da equação (2.3) se distribuem simetricamente com relação ao eixo real, os Lemas 2.1 - 5 fornecem uma descrição completa do lugar geométrico dessas raízes. Quando β varia de 0 à $+\infty$, as raízes de (2.3) descrevem as curvas $a = b \tan b$ em S_k , $k = 0, 1, \dots$. A figura 2.1(a) representa uma situação particular para um valor fixado de β . O modo como as raízes μ estão distribuídas sobre as curvas $a = b \tan b$ é vinculado a ordenação das partes reais estabelecida no Lema 2.5.

Figura 2.1(a). Localização das raízes de (2.3)

Quando α atinge um certo valor α_0 , da esquerda para direita, um par de autovalores conjugados $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0), \bar{\lambda}_0$, cruzam o eixo imaginário pela primeira vez. Como os autovalores λ de (L) são as translações $\lambda = \mu - 1$ das raízes μ de (2.3), α_0 corresponde ao valor β_0 de β que produz $\mu \in S_0$ da forma $\mu = 1 + bi$ de modo que:

$$\Re(\mu e^\mu) = e[\cos b - b \sin b] = 0,$$

$$\Im(\mu e^\mu) = e[\sin b + b \cos b] = \beta_0.$$

Alguns cálculos elementares leva-nos à $e(1 + b^2) \sin b = \beta_0$ e $\alpha_0 = (1 + b^2) \sin b$, onde b é dado por $b \tan b = 1$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$.

De acordo com observação subsequente ao lema 2.4 segue que $\frac{d}{d\beta}(\Re(\mu)) > 0$. Levando em conta que α é um múltiplo positivo de β , podemos dizer que a parte real de λ cruza o eixo imaginário com velocidade positiva.

A localização dos autovalores λ de (L) é representada na Figura 2.1 (b) exatamente como uma translação da Figura 2.1 (a).

Figura 2.1 (b). Localização dos autovalores de (2.2).

Teorema 2.1. *Se (H.1) é satisfeita, então existe uma sequência $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots \rightarrow \infty$ tal que a equação (E) tem uma bifurcação de Hopf em $\alpha = \alpha_k, k = 0, 1, \dots$*

Prova: A sequência $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ corresponde aos valores de α para os quais um par de autovalores conjugados cruza o eixo imaginário. Sua monotonicidade segue da ordenação das partes reais dos λ'_k s, dada no Lema 2.5, e da monotonicidade da parte real de λ com respeito a α .

Uma vez que o espectro de uma equação diferencial linear com retardamento tem infinitos autovalores à esquerda do eixo imaginário, temos que $\alpha_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

O teorema 2.1 é agora uma consequência imediata das seguintes afirmações as quais seguem diretamente dos lemas e observações anteriores:

(i) Os autovalores imaginários puros $\lambda_k = \lambda_k(\alpha_k) \neq 0, k = 0, 1, \dots$ são simples e, para qualquer k fixado, os autovalores $\lambda_j \neq \lambda_k, \bar{\lambda}_k$ satisfazem $\lambda_j \neq m\lambda_k$, para todo inteiro m .

(ii) $\frac{d}{d\alpha}[\Re(\lambda_k(\alpha))]|_{\alpha=\alpha_k} \neq 0. \diamond$

Teorema 2.2. *Se (H.1) é satisfeita, a equação*

$$x'(t) = \beta F(x(t-1)), \quad \beta > 0 \quad (2.11)$$

tem uma bifurcação de Hopf em cada valor $\beta = k\pi, k = 1, 2, \dots$.

Prova: Como a equação característica da parte linear da equação (2.11) é precisamente a equação (2.3), segue que a prova do Teorema 2.2 nada mais é do que uma repetição dos argumentos anteriores. $\diamond$

Capítulo 3

Soluções Periódicas

Neste capítulo provamos a existência de soluções periódicas não triviais de (E) , para uma certa classe de aplicações F , para $\alpha >$ algum α_0 positivo. Isso é feito mostrando que um certo operador de retorno definido pelo fluxo num cone do espaço de fase $C([-1, 0], \mathbf{R}^2)$, tem ponto fixo não trivial.

A maior dificuldade desse procedimento se deve ao fato de que a origem é um ponto fixo, correspondente à solução periódica trivial, conhecido “a priori”. Essa dificuldade é contornada usando um teorema de ponto fixo, Teorema 1.9, que depende do conceito de ejetividade e garante a existência de pontos fixos não nulos.

O objeto de interesse central a partir de agora é a família (E) .

Dada $\phi \in C = C([-1, 0], \mathbf{R}^2)$, seja $x(\cdot; \phi)$ a solução de (E) definida em $[-1, \infty)$ tal que $x|_{[-1, 0]} = \phi$. É conveniente termos as equações (E) também escritas na forma:

$$x_1'(t) = -x_1(t) + \alpha F_1(x(t-1)) \quad (Ea)$$

$$x_2'(t) = -x_2(t) + \alpha F_2(x(t-1)) \quad (Eb)$$

Além da hipótese $(H.1)$ assumida no capítulo 2, consideremos também neste capítulo a hipótese

$$(H.2) \quad \text{Existe } M > 0 \text{ tal que } |F(x)| \leq M, \forall x \in \mathbf{R}^2.$$

O subconjunto fechado e convexo de C ,

$$K = \{\phi \in C \mid e^\theta \phi_j(\theta) \text{ não decrescentes em } [-1, 0], j = 1, 2; \phi_1(-1) = 0, \phi_2(-1) \geq 0\} \quad (3.1)$$

é de importância decisiva neste capítulo. Embora não tiremos vantagem disto, salientamos que K satisfaz as condições da definição de cone, isto é, K é um subconjunto fechado e convexo do espaço de Banach C , $\lambda K \subset K$ se $\lambda \geq 0$ e $K \cap (-K) = \{0\}$.

Teorema 3.1. *Seja $\alpha_0 = (1+b^2) \tan b$, com b univocamente definido por $b \tan b = 1$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Se as hipóteses (H.1) e (H.2) estão satisfeitas, então para todo $\alpha > \alpha_0$, a equação (E) tem uma solução periódica não trivial $x(., \phi)$, $\phi \in K$, com período $T > 4$.*

A prova deste teorema é baseada na existência de pontos fixos não triviais de um operador $A : K \rightarrow K$, obtido acompanhando-se o fluxo da equação (E), isto é,

$$A\phi = \begin{cases} x_\tau(., \phi), \phi \in K \setminus \{0\}, \text{ para algum } \tau = \tau(\phi) > 0 \\ 0, \phi = 0 \end{cases}$$

Essa estratégia depende do Teorema 1.9 e é a evolução de uma idéia devida à Jones [5].

Provamos, a seguir, alguns lemas que permitem definir tal operador de retorno e conduzem à ejetividade da origem.

Lema 3.1. *Se F é uma função limitada, então qualquer solução $x(., \phi)$, $\phi \in C$, da equação (E) é limitada para $t \geq -1$.*

Prova: Da equação (E), segue que

$$x(t).x'(t) = -|x(t)|^2 + \alpha x(t).F(x(t-1))$$

onde “.” representa o produto escalar do R^2 .

Assim,

$$\begin{aligned} x(t).x'(t) &\leq -|x(t)|^2 + \alpha |x(t)| |F(x(t-1))| \\ &= -|x(t)| [|x(t)| - \alpha |F(x(t-1))|] \leq -|x(t)| [|x(t)| - \alpha M], t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde M é dado na hipótese (H.2).

Seja $N > \alpha M$. Se para algum $t_0 \geq 0$, $|x(t_0)| \geq N$, (3.2) implica que

$$x(t_0).x'(t_0) \leq -N[N - \alpha M] < 0. \quad (3.3)$$

Portanto $\forall N > \alpha M, \exists \tau \geq 0$ tal que $x(t) \in B_N$ para $t \geq \tau$, o que completa a prova. $\diamond$

Da prova do Lema 3.1 segue que se $x(t; \phi)$ é solução periódica de (E) então $|x(t; \phi)| \leq \alpha M, \forall t \in \mathbb{R}$.

Daqui em diante indicamos por Q_1 e Q_2 o primeiro e o quarto quadrantes do plano x_1x_2 , isto é,

$$Q_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

$$Q_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}.$$

Lema 3.2. *Suponhamos que as hipóteses (H.1) e (H.2) estão satisfeitas. Então, existe uma função contínua $t_1 : K \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ tal que $x_1(t_1(\phi); \phi) > 0, x(t; \phi) \in Q_1$ se $0 \leq t \leq t_1(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_2)$ se $t_1(\phi) < t < t_1(\phi) + \delta$ para qualquer $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

Prova: Suponhamos que para alguma $\phi \in K \setminus \{0\}$, não exista $t_1 \geq 0$ tal que $x(t; \phi) = x(t) \in Q_1$ para $0 \leq t \leq t_1, x_1(t_1) > 0, x_2(t_1) = 0$.

De $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in K \setminus \{0\}$, segue que $(\phi_1(0), \phi_2(0)) \neq (0, 0)$.

Consideremos $\phi_2(0) > 0$. Observemos que não há perda de generalidade em considerar também que $\phi_1(0) > 0$, se não, tomamos a condição inicial $\psi = x_\tau(\cdot; \phi)$ para um conveniente $\tau > 0$.

A equação (Ea) e a hipótese (H.1) implicam $x_1(t) \geq \phi_1(0)e^{-t} > 0$ enquanto $x(t-1)$ permanecer no primeiro quadrante Q_1 ; portanto $x(t; \phi)$ não sai de Q_1 pelo eixo x_2 .

Se assumirmos que $x(t) \in Q_1, -1 \leq t < \infty$, a equação (Eb) e a hipótese (H.1) implicam que $x_2'(t) \leq -x_2(t) \leq 0$, ou seja, $x_2(t)$ é não crescente e, portanto, devemos ter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \eta \geq 0$$

Se $\eta > 0, \exists \bar{t} > 0$ tal que $x_2(t) > \frac{\eta}{2}$ para $t \geq \bar{t}$ e então, por (Eb),

$$x_2(t) \leq x_2(\bar{t}) - \frac{\eta}{2}(t - \bar{t}), t \geq \bar{t}$$

o que implica que $x_2(t)$ se torna negativa num tempo finito e isto contradiz o fato que $x(t) \in Q_1, -1 \leq t < \infty$. Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0 \quad (3.4)$$

Afirmamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0 \quad (3.5)$$

Mostremos primeiramente que não podemos ter $x_1(t) \rightarrow \xi > 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Como $F_1(\xi, 0) = 0$, se $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \xi > 0$, segue da equação (Ea) que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1'(t) = -\xi < 0$, assim $x_1(t)$ fica negativa a partir de um tempo finito, e isso contradiz o fato de que $x(t) \in Q_1, -1 \leq t < \infty$.

Pelo Lema 3.1, $|x_1(t)| < N$ para algum $N > 0$.

Suponhamos, por um momento, que (3.5) não seja verdade. Então, existe $\xi \in R$ tal que $0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \inf x_1(t) < \xi < \lim_{t \rightarrow \infty} \sup x_1(t) \leq N < \infty$ e uma sequência $(t_n) \rightarrow \infty, n = 1, 2, \dots$, com $x_1(t_n) = \xi, x_1'(t_n) \geq 0$, o que é uma contradição já que por (Ea),

$$x_1'(t_n) = -\xi + \alpha F_1(x_1(t_n - 1), x_2(t_n - 1)) \rightarrow -\xi \text{ quando } t_n \rightarrow \infty.$$

Assim vale (3.5) e portanto, sempre que $x(t; \phi)$ permanecer em Q_1 para $t \geq 0$, as equações (3.4) e (3.5) dão que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; \phi) = 0 \quad (3.6)$$

A hipótese (H.1) implica que $F_2(0, x_2) = 0$, de modo que a expansão de Taylor de $F_2(x)$ próximo à origem é

$$F_2(x) = -x_1 + x_1[ax_1 + bx_2 + O(|x|^2)]$$

quando $x \rightarrow 0$, e isto implica que dado $0 < \delta < 1$, existe uma vizinhança V do zero no $\mathbf{R}^2$ tal que se $x \in V, x_1 > 0$,

$$F_2(x) < (-1 + \delta)x_1 \quad (3.7)$$

Por (3.6), não há perda de generalidade em assumir $x(t; \phi) \in V \cap Q_1$, para $-1 \leq t < \infty, x_1(-1) > 0$, caso contrário tomamos como condição inicial $\psi = x_\tau(\cdot; \phi)$ para $\tau > 0$ suficientemente grande.

Como (Eb) é equivalente a

$$x_2(t) = \phi_2(t), \quad t \in [-1, 0]$$

$$x_2(t) = x_2(0)e^{-t} + \alpha \int_0^t e^{s-t} F_2(x(s-1)) ds, \quad t \geq 0$$

segue por (3.7) que

$$\begin{aligned} x_2(n+1) &= x_2(0)e^{-n-1} + \alpha \int_0^{n+1} e^{s-n-1} F_2(x(s-1)) ds < \\ &< x_2(0)e^{-n-1} - \alpha(1-\delta) \int_0^{n+1} e^{s-n-1} x_1(s-1) ds = \\ &= x_2(0)e^{-n-1} - \alpha(1-\delta)e^{-n} \int_0^{n+1} e^{s-1} x_1(s-1) ds. \end{aligned}$$

Já que $e^{s-1}x_1(s-1)$ é uma função não decrescente de s para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} x_2(n+1) &< x_2(0)e^{-n-1} - \alpha(1-\delta)e^{-n} \int_0^{n+1} e^{-1} x_1(-1) ds \\ &= e^{-n-1} [x_2(0) - (n+1)\alpha(1-\delta)x_1(-1)] \end{aligned}$$

o que implica que $x_2(t)$ se torna negativa num tempo finito, uma contradição.

Portanto $\exists t_1 \geq 0$ tal que

$$x(t; \phi) \in Q_1 \text{ para } 0 \leq t \leq t_1, x_1(t_1; \phi) > 0, x_2(t_1; \phi) = 0.$$

Como $\phi_2(0) > 0$ então $t_1 > 0$ e $x_1(t_1 - 1) > 0$ tomando, se necessário, uma condição inicial $\psi = x_\tau(., \phi)$ para um $\tau > 0$ conveniente.

Assim, segue da equação (Eb) que $x(t; \phi)$ atravessa transversalmente o semi-eixo horizontal no instante $t = t_1$ e definimos $t_1(\phi) = t_1$.

Se $\phi_2(0) = 0$ é fácil ver que existe $0 \leq \tau < 1$ tal que $x_2(t) \equiv 0, x_1(t) > 0$ para $-1 < t \leq \tau$. Neste caso, a solução $x(t; \phi)$ deixa Q_1 no instante $t = \tau$, tangencialmente, e $t_1(\phi) = \tau$.

A continuidade de t_1 segue do Teorema da Continuidade em relação às Condições Iniciais, Teorema 1.2. $\diamond$

Lema 3.3. *Seja $G \subset C$ aberto, $0 \in G$. Existe uma vizinhança V de 0 em C tal que $\forall \phi \in V \cap K, \phi \neq 0$, tem-se $x_t(., \phi) \in G$ para $0 \leq t \leq t_1(\phi) + 1$.*

Prova: É suficiente provar que dado $G \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $0 \in G$, existe uma vizinhança V de 0 em C tal que se $\phi \in V \cap K, \phi \neq 0$ então $x(t; \phi) \in G$ para $-1 \leq t \leq t_1(\phi) + 1$.

Admitindo que vale tal afirmação para $t \in [-1, t_1(\phi)]$, como F é contínua, $F(0) = 0$, segue das equações (Ea), (Eb) e hipótese (H.1) que

$$(e^t x_1(t))' \leq \alpha e^t \epsilon$$

$$(e^t x_2(t))' \geq -\alpha e^t \epsilon,$$

com $t \in [t_1(\phi), t_1(\phi) + 1]$, para qualquer $\epsilon > 0$, desde que $|x(t; \phi)|$ seja suficientemente pequeno em $[-1, t_1(\phi)]$.

Essas desigualdades implicam que $0 \leq x_1(t; \phi) \leq \alpha \epsilon$ e $-\alpha \epsilon \leq x_2(t; \phi) \leq 0$ para $t \in [t_1(\phi), t_1(\phi) + 1]$.

Suponhamos então que a afirmação não seja verdadeira para $t \in [-1, t_1(\phi)]$. Então existe retângulo aberto

$$R = \{(x_1, x_2) \mid -\eta_1 < x_1 < l, -\eta_2 < x_2 < m\} \ni (0, 0)$$

tal que para alguma sequência (ϕ_n) , $\phi_n \in K \setminus \{0\}$, $\phi_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, $\exists(t_n)$, $-1 \leq t_n \leq t_1(\phi_n)$ com $x(t_n; \phi_n) \in \partial R$, $n = 1, 2, \dots$.

Sejam $x_n(t) = x(t; \phi_n)$, $x_{1n}(t) \geq 0$ e $x_{2n}(t) \geq 0$ enquanto $x_n(t)$ pertencer ao primeiro quadrante Q_1 . Além disso, $x_{2n}(t)$ é decrescente se $\phi_{2n}(0) > 0$ ou $x_{2n}(t) \equiv 0$ se $\phi_{2n}(0) = 0$ para $0 \leq t \leq t_1(\phi_n)$.

Assim, $x_n(t) \in [0, l] \times [0, q_n]$, $-1 \leq t \leq t_n$, onde $q_n = \|\phi_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Consequentemente, $x_1(t_n; \phi_n) = l$ para $n = 1, 2, \dots$.

A continuidade de F_1 e $F_1(x_1, 0) \equiv 0$ implicam que $\lim_{x_2 \rightarrow 0} F_1(x_1, x_2) = 0$ uniformemente em $x_1, 0 \leq x_1 \leq l$.

Assim podemos escrever, enquanto $x_n(t) \in [0, l] \times [0, q_n]$,

$$\begin{aligned} x_{1n}(t) &= \phi_{1n}(0)e^{-t} + \alpha e^{-t} \int_0^t e^s F_1(x_n(s-1)) ds \leq \\ &\leq q_n e^{-t} + \alpha e^{-t} M_n [e^t - 1] \\ &\leq q_n e^{-t} + \alpha M_n [1 - e^{-t}] \end{aligned}$$

onde $M_n = \sup\{F_1(x) \mid x \in [0, l] \times [0, q_n]\}$.

Segue disto que $x_1(t_n; \phi_n) < q_n + \alpha M_n < l$ para n suficientemente grande, o que contradiz a escolha de ϕ_n . $\diamond$

Dada $\phi \in K \setminus \{0\}$, seja $\psi = x_{t_1(\phi)+1}(\cdot; \phi)$ e observemos que, para $-1 \leq \theta \leq 0$,

$$(e^\theta \psi(\theta))' = \alpha e^\theta F(x(t_1(\phi) + \theta; \phi)). \quad (3.8)$$

Uma vez que $x(t_1(\phi) + \theta; \phi) \in Q_1$, para $-1 \leq \theta \leq 0$, a relação (3.8) e a hipótese (H.1) implicam que $e^\theta \psi_1(\theta)$ é não decrescente e $e^\theta \psi_2(\theta)$ é não crescente.

Assim, se R é a rotação

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $RK := \{R\phi \mid \phi \in K\}$, essas propriedades de $e^\theta \psi(\theta)$ implicam que $\psi \in RK$.

Podemos então, definir a aplicação

$$\begin{aligned} A_1 : K &\longrightarrow RK \\ A_1\phi &= x_{t_1(\phi)+1}(\cdot; \phi), \quad \phi \neq 0 \\ A_1 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lema 3.4. *A aplicação $A_1 : K \rightarrow RK$ é completamente contínua.*

Prova: A continuidade de t_1 e da solução de (E) em relação às condições iniciais garantem a continuidade de A_1 em $K \setminus \{0\}$. Em $\phi = 0$ a continuidade segue do Lema 3.3.

Seja $\bar{B}_\delta$ uma bola fechada em C e $V = K \cap \bar{B}_\delta$. Então

$$A_1(V) = \{x_{t_1(\phi)+1}(\cdot; \phi) \mid \phi \in V \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$$

Os mesmos argumentos da prova do Lema 3.1 implicam que $A_1(V)$ é limitado por $\max\{\alpha M; \delta\}$.

A equicontinuidade de $A_1(V)$ segue da limitação uniforme das derivadas que, por sua vez, é uma consequência da continuidade do campo vetorial $H : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definido por $H(u, v) = -u + \alpha F(v)$. $\diamond$

Destacamos que as hipóteses assumidas até agora possuem uma simetria rotacional, de modo que podemos repetir todos os passos da construção de A_1 , através dos Lemas 3.2, 3.3 e 3.4 com adaptações óbvias, para definir as funções contínuas $\phi \rightarrow t_j(\phi)$ de $R^{j-1}(K \setminus \{0\})$ em $[0, \infty)$, $j = 2, 3, 4$ e dessas funções obter as funções completamente contínuas

$$A_j : R^{j-1}K \longrightarrow R^j K, \quad j = 2, 3, 4.$$

Agora, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} A : K &\longrightarrow R^4 K = K \\ A(\phi) &= (A_4 \circ A_3 \circ A_2 \circ A_1)(\phi). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se para cada $\phi \in K \setminus \{0\}$ chamarmos de $\tau(\phi)$ o instante para o qual $A(\phi) = x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi)$, segue imediatamente da construção de A que

$$\tau(\phi) = t_1(\phi) + t_2(A_1\phi) + t_3(A_2A_1\phi) + t_4(A_3A_2A_1\phi) + 4 \quad (3.10)$$

O último termo, “4”, aparece nesta expressão em virtude do efeito do retardamento a cada vez que a solução $x(t; \phi)$ cruza um eixo coordenado.

Portanto, de acordo com o Lema 3.2 e da expressão (3.10) segue a continuidade da função

$$\tau : K \setminus \{0\} \longrightarrow [4, \infty).$$

A figura 3.1 ilustra uma situação típica do processo descrito.

Figura 3.1

O lema seguinte é consequência imediata do Lema 3.3 e das simetrias das nossas hipóteses.

Lema 3.5. *Seja $G \subset C$ aberto, $0 \in G$. Existe uma vizinhança V de 0 em C tal que se $\phi \in V \cap K$, $\phi \neq 0$ então $x_t(\cdot; \phi) \in G$ para $0 \leq t \leq \tau(\phi)$.*

Lema 3.6. *Existe um conjunto fechado convexo $K \subset C$, $0 \in K$, e uma função contínua $\tau : K \setminus \{0\} \rightarrow [4, \infty)$ tal que a função*

$$\begin{aligned} A : K &\longrightarrow C \\ A(\phi) &= x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi), \quad \phi \in K \setminus \{0\} \\ A(0) &= 0, \end{aligned}$$

é completamente contínua e $AK \subset K$.

Prova: Consequência imediata do Lema 3.4 e observações após a sua prova. $\diamond$

Relembramos agora a decomposição do espaço de fase como uma soma direta, $C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, associada a um autovalor λ da equação característica (2.2). Uma apresentação completa deste assunto é encontrada em [4, cap7], aqui apenas recordamos alguns fatos que são relevantes para o nosso problema específico.

Assumimos $\alpha > \alpha_0 := (1 + b^2) \tan b$, onde b é univocamente definido em $[0, \frac{\pi}{2}]$ pela relação $b \tan b = 1$. Portanto, segundo discussão após a prova do Lema 2.5, podemos escolher um autovalor λ de (L) , com $\Re(\lambda) > 0$ que é simples. Além disso, tomamos λ tal que $0 < \Im(\lambda) < \frac{\pi}{2}$.

A equação (L) , linearizada de (E) em torno da origem, é um caso particular da equação

$$y'(t) = L(y_t) \tag{3.11}$$

onde $L : C \rightarrow \mathbf{R}^2$, $L(\phi) = -\phi(0) + B(\alpha)\phi(-1)$.

Seja $\eta(\theta)$, $\theta \in [-1, 0]$, matriz de ordem 2 definida por

$$\eta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = -1; \\ B(\alpha), & -1 < \theta < 0; \\ -I + B(\alpha), & \theta = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Então para qualquer $\phi \in C$,

$$L(\phi) = \int_{-1}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta).$$

Seja G o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ definido pelas soluções de (3.11),

$$T(t)\phi = y_t(\cdot; \phi), \quad \phi \in C, \quad t \geq 0.$$

Então, λ é um autovalor simples de G e o subespaço P_λ é precisamente o autoespaço generalizado 1- dimensional associado a λ , $M_\lambda(G)$.

Se G^* é o operador adjunto formal de G , λ é também autovalor de G^* e seu autoespaço generalizado $M_\lambda(G^*)$ é 1- dimensional.

Seja $C^* = C([0, 1], \mathbf{R}^{2*})$, onde $\mathbf{R}^{2*}$ é o plano dos vetores linhas. A forma bilinear de $C^* \times C$ dada por

$$\langle \psi, \phi \rangle := \psi(0) \cdot \phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta) [d\eta(\theta)] \phi(\xi) d\xi \quad (3.13)$$

$\psi \in C^*, \phi \in C$, “.” significando produto escalar do $\mathbf{R}^2$, aparece de maneira natural na decomposição de C .

Se u é uma solução não trivial de $\Delta(\lambda)u = 0$, com $\Delta(\lambda) := (\lambda + 1)I - B(\alpha)e^{-\lambda}$ dado em (2.1), e o vetor linha v é uma solução não trivial de $v\Delta(\lambda) = 0$, então as funções $\rho(t) := e^{\lambda t}u$, $t \in [-1, 0]$ e $\sigma(s) := ve^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$, geram $M_\lambda(G)$ e $M_\lambda(G^*)$ respectivamente.

Além disso, relembramos que se $\phi \in C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$ é decomposto como $\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}$ então sua componente ϕ^{P_λ} em P_λ é dada por

$$\phi^{P_\lambda} = \langle \sigma, \phi \rangle \rho \quad (3.14)$$

Lema 3.7. *Para qualquer constante $a, 0 < a < \alpha M$,*

$$\inf\{\|\pi_\lambda(x_t)\| \mid x_t = x_t(\cdot; \phi), \phi \in K, \|\phi\| = a, 0 \leq t \leq \tau(\phi)\} > 0.$$

A prova deste lema segue dos cinco lemas subsequentes.

Observemos que, se $\phi \in K$,

$$\|\phi\| \geq d \Rightarrow |\phi(0)| \geq de^{-1} \quad (3.15)$$

como consequência de $e^t |\phi(t)|$ ser não decrescente.

Os três próximos lemas descrevem um certo comportamento das soluções $x(\cdot; \phi)$ de (E), dando uma estimativa inferior positiva para $x_1(t_1(\phi); \phi)$ (t_1 definido no Lema 3.2) uniforme em $\phi \in K, \|\phi\| \geq d$.

Se k e σ são suficientemente pequenos, a figura 3.2 fornece uma visão geométrica útil no entendimento de alguns passos das provas.

Figura 3.2

Lema 3.8. *Seja $d > 0$. Então existem $k > 0, \sigma > 0$ tais que $\forall \phi \in K, \|\phi\| \geq d$, $\phi_1(0) \leq \sigma$, existe $\tau_1 = \tau_1(\phi) > 0$ satisfazendo $x_1(\tau_1; \phi) > \sigma$ e $x_2(t; \phi) \geq k$ para $t \in [0, \tau_1]$.*

Prova: Da hipótese (H.1) segue que a expansão de Taylor de $F_2(x)$ perto da origem é

$$F_2(x) = -x_1 + x_1[ax_1 + bx_2 + O(|x|^2)] \text{ quando } x \rightarrow 0.$$

Assim, dado $0 < \eta < 1$, existe vizinhança V de 0 em $\mathbf{R}^2$ tal que se $x \in V, x_1 > 0$

$$F_2(x) < (-1 + \eta)x_1 \tag{3.16}$$

Seja ξ tão pequeno de modo que $R = \{(x_1, x_2) \mid -\xi < x_1 < \xi, -\xi < x_2 < \xi\}$ esteja contido em V .

Definimos:

$$k := \min \left\{ \frac{d}{4e^3}, \xi \right\}. \quad (3.17)$$

Como $x_2 F_1(x) > 0$, $x_2 \neq 0$, então

$$\exists \sigma' > 0 \mid (x_1, x_2) \in Q_1, x_2 \geq k \Rightarrow F_1(x_1, x_2) \geq \max \left\{ \sigma', \frac{\sigma'}{\alpha} \right\} \quad (3.18)$$

Como $x_1 F_2(x) < 0$, $x_1 \neq 0$, da continuidade de $F_2(x)$ segue que

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \varepsilon < \frac{d}{4\alpha e^3}, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid (x_1, x_2) \in Q_1, x_1 \leq \delta(\varepsilon) \\ \Rightarrow -\varepsilon \leq F_2(x_1, x_2) < 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seja:

$$\sigma := \min \left\{ \frac{\delta(\varepsilon)}{e}, \frac{\sigma'}{2}, k \right\} \quad (3.20)$$

Segue de (3.19), (3.20) e da equação (Eb),

$$x_2(t; \phi) \geq [\phi_2(0) + \alpha\varepsilon]e^{-t} - \alpha\varepsilon, \quad t \in [0, 1].$$

Além disso $\phi_2(0) \geq \frac{d}{2e}$ pois $\phi_1(0) \leq \sigma$ e $\|\phi\| \geq d$.

Assim:

$$x_2(t; \phi) \geq \left[\frac{d}{2e} + \alpha\varepsilon \right] e^{-t} - \alpha\varepsilon, \quad t \in [0, 1].$$

A função $E(t) := \left[\frac{d}{2e} + \alpha\varepsilon \right] e^{-t} - \alpha\varepsilon$ é uma função decrescente em $[0, 1]$ e $E(1) > \frac{d}{4e^3} \geq k$.

Portanto

$$x_2(t; \phi) > k, \quad t \in [0, 1].$$

O Lema 3.2 garante a existência de um primeiro instante $\hat{t} > 1$ para o qual $x_2(\hat{t}; \phi) = k$ e $x_2(t; \phi) > k$ para $0 \leq t < \hat{t}$.

Suponhamos por um momento que $x_1(t) \leq \sigma$ para todo $t \in [0, \hat{t}]$. Então $x_1(t-1) \leq \sigma$ e $\leq \delta(\varepsilon)$, $t \in [0, \hat{t}]$, e portanto $-\varepsilon \leq F_2(x_1, x_2) < 0$.

Repetindo o argumento anterior segue que

$$x_2(t; \phi) \geq E(t), \quad t \in [0, \hat{t}].$$

Como $E(2) > \frac{d}{4e^3} \geq k$, temos que $\hat{t} > 2$.

Por (Ea) e (3.18) segue agora, para $t \in [1, 2]$,

$$x_1'(t) \geq -\sigma + \alpha \max\{\sigma', \frac{\sigma'}{\alpha}\} \geq -\sigma + \max\{2\alpha\sigma, 2\sigma\} \geq \sigma$$

Assim, $x_1(2) > \sigma$, o que é uma contradição.

Isto garante a existência de $\tau_1 \in (0, \hat{t}]$ de acordo com o enunciado. $\diamond$

Lema 3.9. *Admitamos as hipóteses do Lema 3.8 e sejam k e σ definidos em (3.17) e (3.20), respectivamente. Se, para $\phi \in K$, a solução $x(t; \phi)$ de (E) satisfaz $x_1(\tau_1; \phi) > \sigma$, $x_2(\tau_1; \phi) \geq k$ para algum $\tau_1 \geq 0$, então $\exists \tau_2 = \tau_2(\phi) > 0$ tal que $x_1(t; \phi) > \sigma e^{-1}$ para $t \in [\tau_1, \tau_2]$, $0 < x_2(\tau_2; \phi) < k$.*

Prova: Como $x_1(\tau_1; \phi) > \sigma$, segue de (Ea) que $x_1(t; \phi) > \sigma e^{-1}$, $t \in [\tau_1, \tau_1 + 1]$.

Se $0 < x_2(t; \phi) < k$ para algum $t \in [\tau_1, \tau_1 + 1]$, definimos τ_2 como sendo tal t .

Suponhamos, então, que $x_2(t; \phi) \geq k$ para todo $t \in [\tau_1, \tau_1 + 1]$.

Seja $\tilde{t} = \tilde{t}(\phi) \geq \tau_1 + 1$ o instante t para o qual $x_2(t; \phi) = k$ e $0 < x_2(t + \varepsilon; \phi) < k$, $\forall \varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

A equação (Ea) e as expressões (3.18) e (3.20) implicam que

$$x_1'(t) \geq -x_1(t) + \sigma e^{-1}, \quad t \in [\tau_1 + 1, \tilde{t} + 1]$$

e então

$$x_1(t) > \sigma e^{-1}, \quad \forall t \in [\tau_1 + 1, \tilde{t} + 1]$$

Consequentemente, existe τ_2 de acordo com o enunciado. $\diamond$

Lema 3.10. *Admitamos as hipóteses do Lema 3.8 e sejam k e σ definidos em (3.17) e (3.20), respectivamente. Então $\exists c > 0$ tal que para $\phi \in K$ e $x(t; \phi)$ solução de (E) satisfazendo $x_1(\tau_2; \phi) > \sigma e^{-1}$, $0 < x_2(\tau_2; \phi) < k$ para algum $\tau_2 \geq 0$ se tem $x_1(t_1; \phi) \geq c$, com $t_1 = t_1(\phi)$ definido no Lema 3.2.*

Prova: Se $x_1(t; \phi) > \sigma e^{-1}$ em algum intervalo $(t_1 - \delta, t_1)$ definimos $c := \sigma e^{-1}$.

Suponhamos, então, que isto não aconteça e seja $\bar{t} = \bar{t}(\phi)$, $\tau_2 < \bar{t} < t_1$ o último instante t para o qual $x_1(t; \phi) = \sigma e^{-1}$.

Admitindo $t_1 > \bar{t} + 1$, segue da equação (Eb) e de (3.16),

$$x_2(t; \phi) \leq e^{-(t-\bar{t}-1)} x_2(\bar{t} + 1) + \alpha(-1 + \eta) e^{-t} \int_{\bar{t}+1}^t e^s x_1(s - 1; \phi) ds$$

para $t \in [\bar{t} + 1, t_1 + 1]$.

Como $e^t x_1(t)$ é monótona crescente em Q_1 ,

$$x_2(t; \phi) \leq e^{-(t-\bar{t}-1)} [k + \alpha(-1 + \eta) \sigma e^{-1} (t - \bar{t} - 1)].$$

O segundo membro desta desigualdade se anula no instante τ definido por

$$\tau = \frac{ke}{\alpha(1 - \eta)\sigma} + \bar{t} + 1. \quad (3.21)$$

Da equação (Ea),

$$x_1(t; \phi) \geq \sigma e^{-(t-\bar{t}+1)}, t \in [\bar{t}, t_1 + 1] \quad (3.22)$$

Como $t_1 \leq \tau$, segue de (3.21) e (3.22) que $x_1(t_1; \phi) \geq c$ onde

$$c := \sigma e^{\left(-2 + \frac{ke}{\alpha(-1+\eta)\sigma}\right)}$$

Se $t_1 \leq \bar{t} + 1$, a desigualdade (3.22) implica que

$$x_1(t_1; \phi) \geq \sigma e^{-2} > c. \diamond$$

Lema 3.11. *Seja $d > 0$. Existe $c > 0$ tal que se $\phi \in K$, $\|\phi\| \geq d$, então $x_1(t_1; \phi) \geq c$ e $x_1(t; \phi) \geq ce^{-1}$ para $t \in [t_1, t_1 + 1]$, com $t_1 = t_1(\phi) \geq 0$ definido no Lema 3.2.*

Prova: Basta provar a primeira parte do Lema, já que a segunda segue trivialmente da primeira e da equação (Ea).

Se $\phi_2(0) > 0$, é consequência dos Lemas 3.8, 3.9 e 3.10.

Se $\phi_2(0) = 0$ então $\phi_1(0) \geq de^{-1}$, já que $\|\phi\| \geq d$.

Além disso, $t_1 \in [0, 1]$ e por (Ea), $x_1(t_1; \phi) \geq de^{-2}$. $\diamond$

O lema seguinte é parte substancial da prova do Lema 3.7.

Lema 3.12. *Para qualquer constante real $d, 0 < d < \alpha M$,*

$m = \inf\{|\langle \sigma, x_t \rangle| \mid x_t = x_t(\cdot; \phi), \phi \in K, d \leq \|\phi\| \leq \alpha M, 0 \leq t \leq t_1(\phi) + 1\} > 0$.

Prova: Tomando a solução $v = (1, -i)$ da equação $v\Delta(\lambda) = 0$, $\sigma(s) = (1, -i)e^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$ e $\eta(\theta) = (\eta_{ij}(\theta))$ satisfazendo (3.12) segue de (3.13),

$$\langle \sigma, x_t \rangle = x_1(t) - ix_2(t) + \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda(\xi+1)} [x_2(t+\xi) + ix_1(t+\xi)] d\xi$$

Suponhamos $m = 0$. Então existem sequências $\phi_n \in K, d \leq \|\phi_n\| \leq \alpha M, t_n \in [0, t_1(\phi_n) + 1], n = 1, 2, \dots$ tais que se $x(t; \phi_n) = x_n(t) = (x_{1n}(t), x_{2n}(t))$,

$$\langle \sigma, x_{n_{t_n}} \rangle = x_{1n}(t_n) - ix_{2n}(t_n) + \alpha \int_{-1}^0 e^{-\lambda(\xi+1)} [x_{2n}(t_n+\xi) + ix_{1n}(t_n+\xi)] d\xi \quad (3.23)$$

tende a zero, quando n tende a ∞ .

Tomando $\lambda = a + bi$ com $a > 0, 0 < b < \frac{\pi}{2}$, a expressão acima é equivalente a

$$\begin{aligned} \langle \sigma, x_{n_{t_n}} \rangle &= x_{1n}(t_n) + \alpha \int_{-1}^0 e^{-a(\xi+1)} [x_{2n}(t_n+\xi) \cos b(\xi+1) + x_{1n}(t_n+\xi) \sin b(\xi+1)] d\xi \\ &+ i \left\{ -x_{2n}(t_n) + \alpha \int_{-1}^0 e^{-a(\xi+1)} [x_{1n}(t_n+\xi) \cos b(\xi+1) - x_{2n}(t_n+\xi) \sin b(\xi+1)] d\xi \right\} \end{aligned}$$

Como $d \leq \| \phi_n \| \leq \alpha M$, segue da prova do Lema 3.1 que $|x_n(t)| \leq \alpha M$ para $t \geq -1$ e para qualquer n .

Assim, $x_n(t_n)$ é convergente, tomando uma subsequência, se necessário.

Seja $(L_1, L_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{1n}(t_n), x_{2n}(t_n))$.

Pelos Lemas 3.8 à 3.11, podemos afirmar que L_1 e L_2 não são simultaneamente nulos.

Se $L_1 > 0, L_2 \geq 0, \Re < \sigma, x_{n_{t_n}} >$ fica positiva e longe do zero para n suficientemente grande e se $L_1 = 0, L_2 > 0, \Im < \sigma, x_{n_{t_n}} >$ fica negativa e longe do zero para n suficientemente grande, e temos uma contradição, em ambos os casos.

Analisemos, então, o caso $L_2 < 0$.

É claro que $L_1 > 0$ já que, para n suficientemente grande, $t_1(\phi_n) \leq t_n \leq t_1(\phi_n) + 1$ e pelo Lema 3.11, $x_1(t_n; \phi_n) \geq ce^{-1}$.

Assim, na expressão (3.23), para n suficientemente grande,

$$\begin{cases} x_{1n}(t_n) > \frac{L_1}{2} \\ x_{2n}(t_n) < \frac{L_2}{2} \end{cases} \quad (3.24)$$

$p_n(\xi) = x_{2n}(t_n + \xi) + ix_{1n}(t_n + \xi), \xi \in [-1, 0]$, é uma curva no plano complexo no setor $re^{i\theta}$ com $0 \leq \theta \leq \pi, r \geq 0$ e $e^{-\lambda(\xi+1)}, \xi \in [-1, 0]$, está situada no setor $z = re^{i\theta}$ com $r \geq e^{-a}$ e $-\frac{\pi}{2} < -b \leq \theta \leq 0$.

O integrando $e^{-\lambda(\xi+1)}p_n(\xi)$ tem argumento $\theta_n(\xi)$, $-\frac{\pi}{2} < -b \leq \theta_n(\xi) \leq \pi$.

Tomando

$$\tilde{\theta}_n = \max \{ \arg e^{-\lambda(\xi+1)}p_n(\xi) \mid \xi \in [-1, 0] \},$$

prova-se que a curva $e^{-\lambda(\xi+1)}p_n(\xi), \xi \in [-1, 0]$, está situada inteiramente no semi-plano determindo pela reta com coeficiente $\tilde{\theta}_n$, o qual contém o semi-eixo real positivo.

Se $0 \leq \tilde{\theta}_n \leq \frac{\pi}{2}$, então

$$\langle \sigma, x_{n_{t_n}} \rangle \not\rightarrow 0$$

já que $e^{-\lambda(\xi+1)}p_n(\xi)$ tem parte real não negativa e vale (3.24).

Se $\frac{\pi}{2} < \tilde{\theta}_n < \pi$, definindo $\omega_n = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}_n$, o mesmo argumento anterior implica que

$$e^{i\omega_n} < \sigma, x_{n_{t_n}} > \not\rightarrow 0,$$

do que segue o resultado. $\diamond$

Observemos que vale a mesma afirmação do Lema 3.12 se substituirmos K pelas rotações $R^j K$ e o intervalo $[0, t_1(\phi) + 1]$ por $[t_j(\phi) + 1, t_{j+1}(\phi) + 1]$, $j = 1, 2, 3$, respectivamente, o que é justificado pela simetria rotacional.

Prova do Lema 3.7: Seja $0 < a < \alpha M$.

O Lema 3.12 implica que

$$\inf \{ |\langle \sigma, x_t \rangle| \mid x_t = x_t(\cdot; \phi), \phi \in K, \|\phi\| = a, 0 \leq t \leq t_1(\phi) + 1 \} > 0.$$

Pelo Lema 3.11, sabemos que $\exists d_1 > 0$ tal que

$$\|x_{t_1(\phi)+1}(\cdot; \phi)\| \geq d_1, \forall \phi \in K, \|\phi\| = a.$$

Além disso, pelo Lema 3.1,

$$\alpha M \geq \|x_{t_1(\phi)+1}(\cdot; \phi)\|, \forall \phi \in K, \|\phi\| = a.$$

Então, pelo Lema 3.12,

$$\inf \{ |\langle \sigma, x_t \rangle| \mid x_t = x_t(\cdot; \phi), \phi \in K, \|\phi\| = a, 0 \leq t \leq t_2(\phi) + 1 \} > 0.$$

O resultado segue por procedimento análogo nos intervalos $[t_2(\phi) + 1, t_3(\phi) + 1]$, $[t_3(\phi) + 1, \tau(\phi)]$. $\diamond$

Prova do Teorema 3.1: Mostremos que a aplicação $A = A_4 \circ A_3 \circ A_2 \circ A_1 : K \rightarrow K$, definida após a prova do Lema 3.4, tem um ponto fixo não trivial para $\alpha > \alpha_0$, onde α_0 está especificado no enunciado do teorema.

Precisamos apenas mostrar que A verifica as hipóteses do Teorema 1.9, o que é feito por simples combinação dos resultados de lemas anteriores e observações.

Podemos, de acordo com a discussão após a prova do Lema 2.5, escolher um autovalor da equação (L) , $\lambda = a + bi$, tal que $a > 0$ e $0 < b < \frac{\pi}{2}$.

O Lema 3.6 mostra que a aplicação A de K em K é completamente contínua.

As observações seguintes ao Lema 3.4 nos dão que a aplicação $\phi \in K \setminus \{0\} \rightarrow \tau(\phi) \in [4, \infty)$ tal que $A\phi = x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi)$ é contínua e, segundo o Lema 3.5 satisfaz a hipótese (iv) do Lema 1.4.

A hipótese (iii) do Lema 1.4 é garantida pelo Lema 3.7.

Portanto, o Lema 1.4 assegura que 0 é um ponto fixo ejetivo de A .

Consideremos no Teorema 1.9 o cone K e a aplicação $A = A_4 \circ A_3 \circ A_2 \circ A_1 : K \rightarrow K$. Seja $N > \alpha M$, onde M é um limitante para a função F e, suponhamos que $\phi \in K$, $\|\phi\| = N$ e $A\phi = \lambda\phi$.

Então

$$x(\tau(\phi) + \theta; \phi) = \lambda\phi(\theta) \quad \forall \theta, -1 \leq \theta \leq 0.$$

Escolhamos $\theta \in [-1, 0]$ para o qual $|\phi(\theta)| = N > \alpha M$.

Como na prova do Lema 3.1, segue que $\lambda < 1$.

O Teorema é agora, consequência imediata do Teorema 1.9. $\diamond$

Capítulo 4

Exemplos

Damos neste capítulo quatro exemplos onde aplicamos os resultados vistos nos capítulos 2 e 3. No primeiro exemplo fazemos uma aplicação do Teorema 2.2. No segundo, uma aplicação dos Teoremas 2.1 e 3.1. No terceiro exemplo mostramos que a classe de funções F para a qual o Teorema 3.1 é aplicado é bastante geral. Com base no exemplo 4, onde o Teorema 3.1 também é aplicado, destacamos a generalidade dessa classe apresentando um procedimento através do qual novos exemplos podem ser criados.

Exemplo 1

A equação escalar

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)]; \quad \alpha > 0,$$

foi estudada, nos anos 50, por E. Wright [9], a partir de quando muito esforço foi dedicado para este tipo de problema e inúmeras aplicações foram feitas, com significativa ênfase em ciências biológicas.

Um estudo sobre as bifurcações de Hopf e a existência de soluções periódicas não nulas dessa equação pode ser encontrado em [4, capítulo 11, §4].

Se $x(\phi, \alpha)$ é a solução dessa equação por ϕ e se $\phi(0) > -1$, podemos provar que $x(\phi, \alpha)(t) > -1$, $t \geq 0$.

Motivados pelo estudo feito por E. Wright, analisemos a seguinte equação planar:

$$\begin{cases} y_1'(t) = \alpha y_2(t-1) [1 + y_1(t)] \\ y_2'(t) = -\alpha y_1(t-1) [1 + y_2(t)], \quad \alpha > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Se $y(\cdot; \phi, \alpha) = (y_1(\cdot; \phi, \alpha), y_2(\cdot; \phi, \alpha))$ é solução de (4.1) por $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ e se $\phi_j(0) > -1$, $j = 1, 2$, podemos provar que $y_j(t; \phi, \alpha) > -1$, $t \geq 0$, $j = 1, 2$. Em outras palavras, o conjunto $\{\phi \in C \mid \phi_j(\theta) > -1, j = 1, 2, -1 \leq \theta \leq 0\}$ é positivamente invariante sob o operador solução $T(t)$, $t \geq 0$.

De fato, mostremos que sob as hipóteses acima, $y_1(t) > -1$ para $t \geq 0$.

Multiplicando a primeira equação de (4.1), pelo fator integrante $e^{-\alpha \int_0^t y_2(s-1)ds}$, obtemos:

$$\left[(1 + y_1(t)) e^{-\alpha \int_0^t y_2(s-1)ds} \right]' = 0.$$

Uma integração de 0 à t nos leva à:

$$y_1(t) = -1 + (1 + y_1(0)) e^{\alpha \int_0^t y_2(s-1)ds},$$

ou seja, $y_1(t) > -1$ para $t \geq 0$.

Podemos mostrar de modo inteiramente análogo que $y_2(t) > -1$, $t \geq 0$.

Considerando a solução de (4.1), $(y_1(t), y_2(t))$, restrita ao aberto $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1, y_2 > -1\}$, faz sentido a seguinte mudança de variáveis:

$$x_i = \ln(1 + y_i), \quad i = 1, 2,$$

que transforma (4.1) em:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha [e^{x_2(t-1)} - 1] \\ x_2'(t) = -\alpha [e^{x_1(t-1)} - 1] \end{cases} \quad (4.2)$$

Observemos que (4.2) é uma equação da forma $x'(t) = \alpha F(x(t-1))$, $\alpha > 0$ com

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= e^{x_2} - 1 \\ F_2(x_1, x_2) &= -e^{x_1} + 1 \end{aligned}$$

Temos que $x_2 F_1(x_1, x_2) = x_2(e^{x_2} - 1) > 0$, se $x_2 \neq 0$, já que $e^{x_2} > 1$ se $x_2 > 0$ e $e^{x_2} < 1$ se $x_2 < 0$.

Do mesmo modo, temos que $x_1 F_2(x_1, x_2) = x_1(-e^{x_1} + 1) < 0$, se $x_1 \neq 0$.

Além disso $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_2}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -e^{x_1}$. Portanto, $\delta_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0, 0) = 1$ e $\delta_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0, 0) = -1$. Assim, a hipótese (H.1) está satisfeita. Logo, de acordo com o Teorema 2.2, a equação (4.2) tem uma bifurcação de Hopf em cada valor $\alpha = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$.

Como a aplicação

$$\begin{aligned} U : \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1, y_2 > -1\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ U_1(y_1, y_2) &= \ln(1 + y_1) \\ U_2(y_1, y_2) &= \ln(1 + y_2) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo e $y(t) = U^{-1}x(t)$ temos que o mesmo resultado vale para (4.1).

Exemplo 2

Consideremos a seguinte equação planar:

$$\begin{cases} y_1'(t) = [-\ln(1 + y_1(t)) + \alpha \arctan y_2(t-1)](1 + y_1(t)) \\ y_2'(t) = [-\ln(1 + y_2(t)) - \alpha \arctan y_1(t-1)](1 + y_2(t)), \alpha > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Como no exemplo 1, podemos provar que o conjunto $\{\phi \in C \mid \phi_j(\theta) > -1, j = 1, 2, -1 \leq \theta \leq 0\}$ é positivamente invariante sob o operador solução $T(t), t \geq 0$.

Considerando a solução de (4.3), $(y_1(t), y_2(t))$, restrita ao aberto $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1, y_2 > -1\}$, a mesma mudança de variáveis:

$$x_i = \ln(1 + y_i), \quad i = 1, 2,$$

transforma (4.3) em:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + \alpha \arctan(e^{x_2(t-1)} - 1) \\ x_2'(t) = -x_2(t) - \alpha \arctan(e^{x_1(t-1)} - 1), \quad \alpha > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Observemos que (4.4) é uma equação planar da forma

$$x'(t) = -x(t) + \alpha F(x(t-1)), \quad \alpha > 0$$

com

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= \arctan(e^{x_2} - 1) \\ F_2(x_1, x_2) &= -\arctan(e^{x_1} - 1) \end{aligned}$$

É fácil ver que a hipótese (H.1) está satisfeita. Logo, de acordo com o Teorema 2.1, existe uma sequência $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots \rightarrow \infty$ tal que a equação (4.4) tem uma bifurcação de Hopf em $\alpha = \alpha_k$, $k = 0, 1, \dots$.

Além disso, $F(x_1, x_2) = (\arctan(e^{x_2} - 1), -\arctan(e^{x_1} - 1))$ é limitada e, então, pelo Teorema 3.1, se $\alpha_0 = (1+b^2) \tan b$, com b univocamente definido por $b \tan b = 1$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$, temos que para todo $\alpha > \alpha_0$ a equação (4.4) tem uma solução periódica não trivial $x(\cdot; \phi)$, $\phi \in K$ com período $T > 4$, onde K é o cone definido em (3.1).

Observando que $y(t) = U^{-1}x(t)$ onde U é o difeomorfismo definido no exemplo 1, temos que os mesmos resultados estabelecidos para a equação (4.4) valem também para (4.3).

Exemplo 3

Uma análise cuidadosa mostra que a classe de funções F para a qual o Teorema 3.1 é aplicado é bastante geral. Em primeiro lugar observemos que, retirando a condição de limitação, as hipóteses são obviamente verificadas no caso linear, $\tilde{F}(x) = (x_2, -x_1)$, no qual a equação (E) é reduzida ao sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + \alpha x_2(t-1) \\ x_2'(t) = -x_2(t) - \alpha x_1(t-1) \end{cases}$$

Isto sugere um modo de criar exemplos pelo truncamento da função $\tilde{F}$. Este processo pode ser realizado preservando qualquer grau de regularidade. Contudo, podemos seguramente ignorar isto, uma vez que a diferenciabilidade C^3 requerida para F é apenas necessária perto da origem, onde os termos mais baixos da expansão de Taylor dominam.

O exemplo que passamos a construir faz uso das idéias acima.

Seja F a função definida como segue:

$$\begin{aligned} F_j(x) &= \tilde{F}_j(x), \quad \text{se } |x_i| \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \\ F_1(x) &= \frac{x_2}{|x_2|}, \quad \text{se } |x_2| \geq 1 \\ F_2(x) &= -\frac{x_1}{|x_1|}, \quad \text{se } |x_1| \geq 1. \end{aligned}$$

Neste exemplo, temos que além da hipótese (H.1) estar satisfeita, F é limitada, logo vale (H.2).

Portanto, o Teorema 3.1 é válido.

Observemos que nos exemplos anteriores, cada componente de F é independente de uma das variáveis x_1 e x_2 .

No exemplo a seguir as componentes de F dependem efetivamente das duas variáveis x_1 e x_2 e F satisfaz as hipóteses (H.1) e (H.2).

Exemplo 4:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + \frac{2\alpha e^{x_1(t-1)+x_2(t-1)} \arctan x_2(t-1)}{1+e^{x_1(t-1)+x_2(t-1)}} \\ x_2'(t) = -x_2(t) - \frac{2\alpha e^{x_1(t-1)-x_2(t-1)} \arctan x_1(t-1)}{1+e^{x_1(t-1)-x_2(t-1)}}, \quad \alpha > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

A equação (4.5) é, obviamente, do tipo (E), onde F foi construída segundo o critério geral abaixo que, na verdade, descreve um procedimento para a criação de novos exemplos.

Se $G_j(x)$ é uma função de classe C^3 , limitada, positiva, $G_j(0,0) = 1$, $j = 1, 2$, e se $\tilde{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1, então a função F cujas componentes

são $F_j = \tilde{F}_j G_j$, $j = 1, 2$, satisfaz as hipóteses (H.1) e (H.2), garantindo a validade dos teoremas 2.1 e 3.1 para a equação (E).

De fato, temos que: $x_2 F_1(x) = x_2 \tilde{F}_1(x) G_1(x) > 0$, se $x_2 \neq 0$, já que $\tilde{F}$ satisfaz (H.1) e G_1 é positiva.

Do mesmo modo, $x_1 F_2(x) = x_1 \tilde{F}_2(x) G_2(x) < 0$, se $x_1 \neq 0$.

Além disso,

$$\delta_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0, 0) = \tilde{F}_1(0, 0) \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(0, 0) + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_2}(0, 0) G_1(0, 0) = 1,$$

uma vez que $\tilde{F}_1(0, 0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_2}(0, 0) = 1$, $G_1(0, 0) = 1$ e $\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(0, 0) \in \mathbb{R}$.

Do mesmo modo,

$$\delta_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0, 0) = -1.$$

Assim, a hipótese (H.1) é válida.

Como $F_j = \tilde{F}_j G_j$, $j = 1, 2$, é imediato que F é limitada e portanto satisfaz (H.2).

Referências

- 1 BAPTISTINI, M.T.Z. *Soluções periódicas de uma equação diferencial no plano com retardamento e continuação global*. São Carlos, 1990. p.26-34. (Tese - Doutorado - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo).
- 2 BROWDER, F. A further generalization of the Schauder fixed point theorem. *Duke Math.*, 32: 575-578, 1965.
- 3 CHOW, S.N. & HALE, J.K. Periodic solutions of autonomous equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 66: 495-506, 1978.
- 4 HALE, J.K. *Theory of functional differential equations*. 1ª edição. New York, Springer-Verlag, 1977. 365p.
- 5 JONES, G. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1+f(x)]$. *J.Math. Anal. Appl.*, 5: 435-450, 1962.
- 6 NUSSBAUM, R. Periodic solutions of nonautonomous functional differential equations. In: FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS and APPROXIMATIONS of FIXED POINTS, eds H.O. Peitgen and H.O. Walther, *Lecture Notes in Mathematics 730* (Berlin: Springer, 1979).
- 7 ONUCHIC, N. Equações diferenciais com retardamento. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 8ª, Poços de Caldas, 1971. Livro... Poços de Caldas, IMPA, 1971. 85p.
- 8 TÁBOAS, P.Z. Periodic solutions of a planar delay equation. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 116A: 85-101, 1990.
- 9 WRIGHT, E. A nonlinear difference-differential equation. *J. Reine Angew Math.*, 194: 66-87, 1955.