

---

# O problema de Kakeya

***Pedro Alberto Rey Jimenez***

---



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Pedro Alberto Rey Jimenez**

## O problema de Kekeya

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Igor Mencattini

**USP – São Carlos**  
**Maio de 2016**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R456p      Rey, Pedro  
            O problema de Kakeya / Pedro Rey; orientador  
            Igor Mencattini. -- São Carlos, 2016.  
            76 p.

            Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
            em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas  
            e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

            1. Análise Harmônica. 2. Teoria da medida. I.  
            Mencattini, Igor, orient. II. Título.

**Pedro Alberto Rey Jimenez**

## The Keakeya problem

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Igor Mencattini

**USP – São Carlos**  
**May 2016**



La verdadera profesión del hombre es  
encontrar el camino hacia sí mismo.  
-"Siddharta". Herman Hesse.





---

## AGRADECIMENTOS

---

*Existe uma palavra na lingua Zulú, UBUNTU que significa "eu sou porque nós somos", a qual quero citar pois sem o apoio de todos os meus próximos, entre eles minha Família, meus amigos e professores este trabalho não seria possível.*

---

## Resumo

---

O intuito da presente dissertação é o estudo do chamado problema de Kakeya. Mais precisamente, depois introduzir todos os pré-requisitos necessários, demonstraremos a conjectura de Kakeya no caso de  $\mathbb{R}^2$ , destacando que o caso geral dessa conjectura, que afirma que cada conjunto de Kakeya de  $\mathbb{R}^n$  possui dimensão de Hausdorff igual a  $n$ , é ainda um problema aberto.

**Palavras-chave:** Kakeya, Besicovitch.

---

## Abstract

---

In this dissertation we study the so called Kakeya problem. More precisely, after introducing all the necessary prerequisites, our main goal will be to give a proof of the the Kakeya conjecture in the case of  $\mathbb{R}^2$ , whose general case, stating that every Kakeya set in  $\mathbb{R}^n$  has Hausdorff dimension equal to  $n$ , is still an open problem.

**Keywords:** Kakeya, Besicovitch.



---

## Sumário

---

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1	Espaços de Medida . . . . .	6
1.2	Medida exterior e teorema de Carathéodory . . . . .	7
1.3	Medida Exterior Métrica . . . . .	8
1.4	Espaços $L^p$ . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Conjunto de Besicovitch</b>	<b>12</b>
2.1	Construção do conjunto de Besicovitch . . . . .	14
2.1.1	A árvore de Perron . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Problema de Kakeya</b>	<b>22</b>
3.1	Construção de um conjunto de Kakeya com medida arbitria- mente pequena . . . . .	25
3.1.1	Conexões de Pål . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Medida e dimensão de Hausdorff</b>	<b>28</b>
4.1	Medida de Hausdorff . . . . .	29
4.1.1	Definições equivalentes da dimensão de Hausdorff . . . . .	43
4.1.2	Cálculo da dimensão de Hausdorff . . . . .	44

<b>5</b>	<b>Conjectura de Kakeya</b>	<b>51</b>
5.1	Função Maximal de Kakeya . . . . .	52
5.2	Conjectura de Kakeya em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	65
5.2.1	Preliminares . . . . .	65
<b>A</b>	<b>Teorema de Vitali</b>	<b>73</b>

---

## Introdução

---

Em 1917, o matemático japonês Soichi Kakeya propôs o seguinte problema :

*Qual é a menor área de uma região do plano, que contém um segmento de linha de comprimento igual a 1, que pode ser rotacionado continuamente em  $180^\circ$  sem sair da região?*

Em 1920, entre uma seleção de questões sobre geometria, foi publicada a pergunta de Kakeya na revista *The American Mathematical Monthly* [14]. Tal questão seria nomeada depois como o problema de Kakeya. A restrição do problema de Kakeya a conjuntos convexos levou os matemáticos M. Fujiwara e S. Kakeya [4] a conjecturar que o triângulo equilátero de altura igual a 1 era o candidato para resolver a questão. Porém eles não apresentaram nenhuma prova. Somente um ano depois o matemático húngaro Julius Pál [5] demonstrou que a conjectura anterior era verdadeira. Removendo a hipótese de convexidade, o problema de Kakeya continuou aberto. Não obstante, foi conjecturado que o hipocicloide de três pontas era a tão procurada resposta [1].

Em paralelo aos trabalhos supracitados, o matemático russo A. S. Besicovitch estudava um problema parecido ao de Kakeya, mas sob a perspectiva de uma área de pesquisa diferente. O objetivo era, para qualquer função Riemann integrável de  $\mathbb{R}^2$ , encontrar um par de eixos ortogonais tais que a integral iterada sobre esses eixos existisse [1]. Besicovitch encontrou uma função para a qual essa afirmação não é verdadeira. Este contraexemplo é apresentado no Capítulo 2. Este trabalho foi publicado em 1919, ao mesmo tempo que a guerra civil na Rússia havia limitado as comunicações com o resto do mundo. Foi por esta razão que Besicovitch

não tomou conhecimento do problema de Kakeya (1917) até ter deixado a Rússia. No Capítulo 3, expõe-se a solução dada por Besicovitch (com uma grande contribuição de Julius Pàl) para o problema de Kakeya. Esta solução consistiu em modificar a construção do conjunto usado como contraexemplo no problema já mencionado. Esses conjuntos passaram a ser conhecidos como conjuntos de Kakeya.

No Capítulo 4, introduzimos a ideia de dimensão, que é necessária para entender a estrutura dos conjuntos de Kakeya. Previamente, Besicovitch perguntou se era possível construir um conjunto de Kakeya no plano de dimensão de Hausdorff menor que 2. Em 1971, R. Davis provou que todo conjunto de Kakeya do plano deve ter dimensão de Hausdorff exatamente 2 [10]. Saber se os conjuntos de Kakeya de  $\mathbb{R}^d$  tem dimensão de Hausdorff  $d$  é ainda um problema aberto e a hipótese de que isto é verdadeiro é conhecida como a conjectura de Kakeya (veja Capítulo 5).



# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

---

### 1.1 Espaços de Medida

**Definição 1.1.1.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  é uma coleção de subconjuntos  $\mathcal{M}$  de  $X$  tais que

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ,
- (b)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ ,
- (c)  $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$  (onde  $A^c$  denota o complementar de  $A$ ).

**Definição 1.1.2.** Seja  $X$  um conjunto com uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ . Uma medida em  $\mathcal{M}$ , ou em  $(X, \mathcal{M})$ , é uma função  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  satisfazendo:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- ii) Se  $E_1, E_2, \dots$  é uma família enumerável de conjuntos disjuntos de  $\mathcal{M}$ , então:

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{M}$  uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ . Então,

- O par  $(X, \mathcal{M})$  é dito um espaço mensurável e os conjuntos de  $\mathcal{M}$  são chamados conjuntos mensuráveis.
- Se  $\mu$  é uma medida em  $(X, \mathcal{M})$ , a terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é chamada espaço de medida.

**Definição 1.1.3.** Dado um espaço de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $N \in \mathcal{M}$  é chamado nulo se  $\mu(N) = 0$ .

Pela subaditividade, a união enumerável de conjuntos nulos é nulo. Se uma afirmação vale para todo ponto  $x \in X - N$ , onde  $N$  é conjunto nulo, dizemos que ela vale quase sempre (abreviado q.s.) ou para quase todo  $x \in X$ .

## 1.2 Medida exterior e teorema de Carathéodory

Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{P}(X)$  a família de todos os subconjuntos de  $X$ . Uma medida exterior  $\mu_*$  sobre  $X$  é uma função

$$\mu_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

tal que

- (i)  $\mu_*(\emptyset) = 0$ .
- (ii) Se  $E_1 \subset E_2$ , então  $\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$ .
- (iii) Se  $E_1, E_2, \dots$  é uma família enumerável de conjuntos, então

$$\mu_* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n).$$

**Definição.** Um subconjunto  $E$  de  $X$  é chamado Carathéodory mensurável, ou simplesmente mensurável, se

$$\mu_*(E) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A), \quad \forall A \subset X. \quad (1.1)$$

Um fato notável derivado da definição dada em (1.1) é resumido no seguinte teorema.

**Teorema 1.2.1.** *Dada uma medida exterior  $\mu_*$  em  $X$ , a coleção  $\mathcal{M}$  de conjuntos Carathéodory mensuráveis é uma  $\sigma$ -álgebra. Além disso,  $\mu_*$  restrita a  $\mathcal{M}$  é uma medida.*

*Demonstração.* Veja [3]. □

### 1.3 Medida Exterior Métrica

Se  $X$  é dotado de uma “função distância” ou “métrica”, existe uma classe particular de medidas exteriores que induzem medidas sobre a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos de  $X$ .

**Definição 1.3.1.** Um espaço métrico é um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $d$  uma função  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaz:

$$\mathbf{M1)} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y .$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X.$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X.$$

Se  $(X, d)$  é um espaço métrico, em  $X$  é definida uma topologia. A saber, a topologia gerada pelas bolas abertas

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} .$$

Dizemos que  $\mathcal{O} \subset X$  é aberto se, para qualquer  $x \in \mathcal{O}$ , existe  $r > 0$  tal que a bola aberta  $B_r(x)$  está contida em  $\mathcal{O}$ .

Finalmente, sobre um espaço métrico podemos definir a  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $B_X$ , que é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém os conjuntos abertos de  $X$ . Os elementos de  $B_X$  são chamados conjuntos de Borel ou Borelianos.

**Definição.** Dados dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $(X, d)$ , a distância entre  $A$  e  $B$  é definida por

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

**Definição.** Uma medida exterior  $\mu_*$  em  $X$  é chamada métrica se:

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X) : d(A, B) > 0. \quad (1.2)$$

**Teorema 1.3.2.** Se  $\mu_*$  é uma medida exterior métrica em  $(X, d)$ , os Borelianos de  $X$  são mensuráveis, e  $\mu_*$  restrita à  $B_X$  é uma medida.

*Demonstração.* Pela definição de  $B_X$  é suficiente provar que todo conjunto fechado em  $X$  é Carathéodory mensurável. Portanto, seja  $F$  um fechado em  $X$  e  $A$  um subconjunto de  $X$  com  $\mu_*(A) < \infty$ . Para cada  $n > 0$ , seja

$$A_n = \left\{ x \in F^c \cap A : d(x, F) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

é claro que  $A_n \subset A_{n+1}$  pois se  $x \in A_n$ ,  $d(x, F) \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$  então  $x \in A_{n+1}$ . Dado que  $F$  é fechado notemos  $F^c \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  (\*). De fato, se  $x \in F^c \cap A$  e como  $\bar{F} = F$  temos  $d(x, F) > 0$  assim podemos tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x, F) \geq \frac{1}{n_0}$ . Logo,  $x \in A_{n_0}$  ou seja  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Além disso, se  $x \in F \cap A$  e  $d(x, y) < 1/n$  então pela propriedade (M3) de  $d$

$$d(y, F) \leq d(x, y) + d(x, F) < 1/n + 0$$

logo,  $y \notin A_n$ . Assim,  $d(F \cap A, A_n) \geq 1/n > 0$ . Por outro lado,  $A \supset (F \cap A) \cup A_n$ . Portanto,

$$\mu_*(A) \geq \mu_*((F \cap A) \cup A_n) \stackrel{(1.2)}{=} \mu_*(F \cap A) + \mu_*(A_n). \quad (1.3)$$

Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_*(A_n) = \mu_*(F^c \cap A).$$

De fato, seja  $B_n = A_{n+1} \cap A_n^c$ , notemos que

$$d(B_{n+1}, A_n) \geq 1/n(n+1) > 0. \quad (1.4)$$

Pois se  $d(B_{n+1}, A_n) < 1/n(n+1)$ , ou seja  $d(x, F) \leq 1/n$ ,  $d(x, y) < 1/n(n+1)$  e  $y \in A_n$ , então

$$d(y, F) \leq d(x, y) + d(x, F) < 1/n(n+1) + 1/n+1 = 1/n.$$

Logo,  $y \notin A_n$  (absurdo). Pela definição de  $B_n$ , obtemos  $A_{2k+1} \supset B_{2k} \cup A_{2k-1}$  e por (1.4) se segue

$$\mu_*(A_{2k+1}) \geq \mu_*(B_{2k} \cup A_{2k-1}) \stackrel{(1.2)}{=} \mu_*(B_{2k}) + \mu_*(A_{2k-1}).$$

Da mesma forma,

$$\mu_*(A_{2k-1}) \geq \mu_*(B_{2k-2} \cup A_{2k-3}) = \mu_*(B_{2k-2}) + \mu_*(A_{2k-3})$$

indutivamente,

$$\mu_*(A_{2k+1}) \geq \sum_{j=1}^k \mu_*(B_{2j}) + \mu_*(A_1)$$

em particular,

$$\mu_*(A_{2k+1}) \geq \sum_{j=1}^k \mu_*(B_{2j}).$$

Por um argumento similar temos

$$\mu_*(A_{2k}) \geq \sum_{j=1}^k \mu_*(B_{2j-1}).$$

Já que  $\mu_*(A_n) \leq \mu_*(A) < \infty$  para todo  $n$ , encontramos que as séries  $\sum_{j=1}^k \mu_*(B_{2j-1})$  e  $\sum_{j=1}^k \mu_*(B_{2j})$  são convergentes (\*\*). Por outro lado, de (\*)

$$A_n \subset F^c \cap A \subset A_n \cup \left( \bigcup_{j=n+1}^{\infty} B_j \right) \quad \forall n$$

Daí que,

$$\mu_*(A_n) \leq \mu_*(F^c \cap A) \leq \mu_*(A_n) + \mu_*\left( \bigcup_{j=n+1}^{\infty} B_j \right)$$

$$\mu_*(A_n) \leq \mu_*(F^c \cap A) \leq \mu_*(A_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_*(B_j).$$

Sabemos de (\*\*\*) que quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_*(B_j) \rightarrow 0$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_*(A_n) = \mu_*(F^c \cap A).$$

Por fim de (1.3) e a linha anterior, concluímos que  $F$  é Carathéodory mensurável, isto é

$$\mu_*(F) \geq \mu_*(F \cap A) + \mu_*(F^c \cap A).$$

□

## 1.4 Espaços $L^p$

**Definição 1.4.1.** Seja  $(X, \mu)$  um espaço de medida. Dado  $1 \leq p < \infty$ , denotamos por  $L^p(X, \mu)$  o espaço de todas as funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -mensuráveis tais que  $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ . Para o caso  $p = \infty$  dizemos que  $f \in L^\infty(X, \mu)$  se e somente se

$$\sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{|f| \geq \lambda\}) > 0\} < \infty.$$

denotaremos  $L^p(X, \mu)$  simplesmente como  $L^p(X)$ . Para uma função em  $L^p(X, \mu)$  com  $1 \leq p < \infty$  definimos

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} = \|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

e para uma função em  $L^\infty(X, \mu)$  definimos

$$\|f\|_{L^\infty(X, \mu)} = \|f\|_\infty := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{|f| \geq \lambda\}) > 0\}.$$

## CAPÍTULO 2

---

### Conjunto de Besicovitch

---

**Definição 2.0.2.** Um conjunto de Besicovitch é um conjunto compacto  $E \subset \mathbb{R}^d$  de medida de Lebesgue nula que contém um segmento de linha de comprimento igual a 1 em qualquer direção, isto é

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1} \exists x \in E : x + t\xi \in E \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

onde  $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ . Em torno de 1917 o matemático russo, Abram Samoilovitch Besicovitch formulou o seguinte problema:

*Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Riemann integrável. É possível encontrar um sistema de coordenadas ortogonais  $(u, v)$  tais que a função  $g(u) = \int f(u, v) dv$  exista para todo  $u$ , seja Riemann integrável e que a integração iterada com respeito a  $u$  e  $v$  seja igual à integral de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$  ?*

Em 1919, Besicovitch provou que existe uma função para a qual isto não é verdadeiro. Seu contraexemplo é baseado na existência de um conjunto compacto de medida nula que contém segmentos de linha de comprimento igual a 1 em qualquer direção; tal conjunto foi chamado de conjunto de Besicovitch .

**Teorema. (Critério de Lebesgue)** Sejam  $S$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  limitado e

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujos pontos de descontinuidade formam um conjunto de medida de Lebesgue nula. Então  $f$  é Riemann integrável em  $S$ .

O contraexemplo de Besicovitch usa o exemplo clássico da integral de Riemann:

**Exemplo.** A função característica dos números racionais em  $[0, 1]$

$$\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

$\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$  é não integrável.

Agora, podemos descrever a função descoberta por Besicovitch, que foi apresentada no artigo [1]. Por enquanto, assumamos a existência de conjuntos de Besicovitch, a construção de tais conjuntos será explicada posteriormente.

Sejam  $E$  um conjunto de Besicovitch,  $(x, y)$  um sistema de coordenadas ortogonais,  $F_0 = \{(x, y) \in E \text{ e } x \in \mathbb{Q} \text{ ou } y \in \mathbb{Q}\}$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in F_0, \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin F_0. \end{cases}$$

Sendo o conjunto de pontos de descontinuidade de  $f$  contido num conjunto de medida nula, pelo critério de Lebesgue, segue-se que  $f$  é Riemann integrável. Além disso, como  $F_0$  é denso e enumerável em qualquer segmento de linha contido em  $E$ , segue-se que  $f$  não pode ser avaliada por uma integral iterada em qualquer sistema de coordenadas ortogonal. De fato, dado um sistema de coordenadas ortogonais  $(u, v)$  existe um segmento contido em  $E$ , digamos  $v = c$ , tal que  $f$  não é Riemann integrável pelas mesmas razões do exemplo anterior; os pontos  $(u, c)$  tais que  $f(u, c) = 1$  é denso no segmento de linha. Por isso, a soma superior e inferior de Riemann não convergem em nenhuma partição do plano, logo a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(u) = f(u, c)$  não é Riemann integrável.



## 2.1 Construção do conjunto de Besicovitch

Nesta seção descreve-se a construção do conjunto de Besicovitch. Esta construção ([1]) foi modificada várias vezes. Em 1928, Perron simplificou a prova de Besicovitch. Seguido de Rademacher (1962), Shoenberg (1962), Besicovitch novamente (1963) e Fisher (1971). Abaixo apresentaremos a prova simplificada dada por Besicovitch e Perron.

### 2.1.1 A árvore de Perron

A árvore de Perron é um conjunto de medida arbitrariamente pequena que contém segmentos de linha de comprimento igual a 1 em todas direções num setor de  $60^\circ$ . Tomando 5 cópias de uma árvore de Perron e rotacionando cada uma delas  $60^\circ$  em relação ao conjunto anterior obteremos um conjunto de medida arbitrariamente pequena, que contém segmentos de linha em qualquer direção.

A construção começa com um triângulo equilátero de altura  $h \geq 1$  que obviamente contém segmentos de linha de comprimento igual a 1 em todas as direções num setor de  $60^\circ$ . Dividindo-o em subtriângulos menores e superpondo-os de uma certa forma, podemos reduzir a área consideravelmente, ainda preservando os segmentos de linha, como ilustrado na Figura 2.3. O lema e teorema seguinte tornam a idéia anterior mais precisa.

Nesta seção  $|A|$  denota a área do conjunto  $A$ , isto é, a medida 2-dimensional de Lebesgue de  $A$ .

**Lema 2.1.1.** *Seja  $T$  um triângulo com altura  $h$  igual a 1 e comprimento de base igual a  $2b$  sobre uma linha  $L$ . Podemos dividir o triângulo em dois subtriângulos  $T_1$  e  $T_2$  e fazendo uma translação de  $T_2$  de  $2(1 - \alpha)b$  no eixo horizontal com direção negativa, para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ , formamos uma figura  $S$  que consiste em um triângulo  $T'$  semelhante à  $T$  onde  $|T'| = \alpha^2 |T|$  e dois triângulos auxiliares  $A_1, A_2$  (Figura 2.1). Para esta construção a área de  $S$  é dada por:*

$$|S| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) |T|.$$

*Demonstração.* Da geometria elementar, temos  $|T| = bh$ . O comprimento da base de  $T'$  é

$$2b - 2(1 - \alpha)b = 2\alpha b,$$

e dado que  $T'$  é semelhante com  $T$ , sua altura deve ser  $h$ , multiplicada pelo mesmo fator que a base, ou seja  $\alpha h$ . Logo, a área de  $T'$  é

$$|T'| = \frac{1}{2} [(2\alpha b)(\alpha h)] = \alpha^2(bh) = \alpha^2 |T|.$$

Para calcular a área dos triângulos  $A_1$  e  $A_2$  desenhamos uma linha paralela à linha de base de forma que passe pelo ponto de interseção entre  $A_1$  e  $A_2$  (Figura 2.2). Portanto, temos quatro triângulos  $A_{1u}, A_{1l}, A_{2u}, A_{2l}$ . Novamente por geometria elementar temos que  $A_{1u}$  é semelhante à  $T_1$  com razão  $1 - \alpha$  e  $A_{2u}$  é semelhante à  $T_2$  também com razão  $1 - \alpha$ . Além disso,  $A_{2l}$  é congruente com  $A_{1u}$ , e  $A_{1l}$  é congruente com  $A_{2u}$ . Segue então que os quatro triângulos têm comprimento de base  $(1 - \alpha)b$  e altura  $(1 - \alpha)h$ , assim

$$|A_{u1}| = |A_{l1}| = |A_{u2}| = |A_{l2}| = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 bh = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 |T|$$

e como  $|S| = |T'| + |A_1| + |A_2|$  temos

$$|S| = \alpha^2 |T| + 4 \left( \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 |T| \right) = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) |T|.$$

□

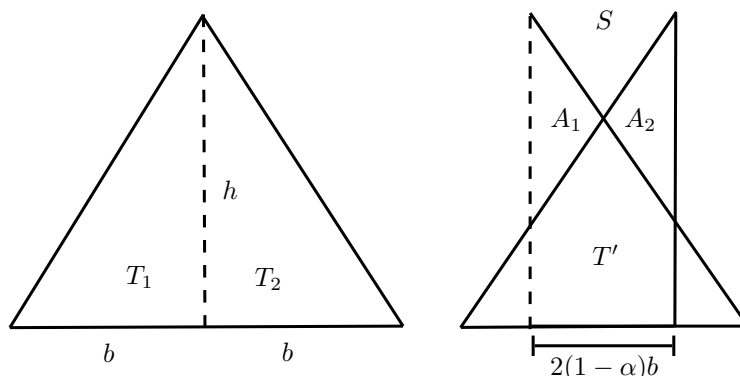


Figura 2.1: Descrição do Lema 2.1.1

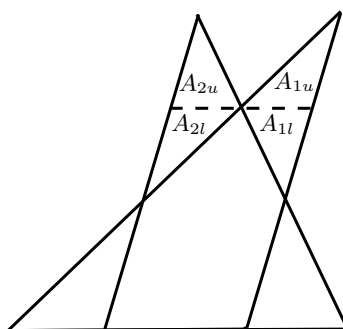


Figura 2.2: Semelhança de Triângulos

Este processo elementar é um dos principais componentes na construção do conjunto de Besicovitch. Chamaremos triângulos como  $T'$  o “tronco” e os triângulos como  $A_1, A_2$  os “galhos”. A “árvore” que criaremos terá um tronco fino e muitos galhos minúsculos.

**Teorema 2.1.2.** *Seja  $T$  qualquer triângulo com base sobre uma linha  $L$ . Se dividirmos a base de  $T$  em  $2^k$  segmentos iguais e unirmos por meio de um segmento de linha os pontos de divisão com o ponto oposto obtemos subtriângulos  $T_1, T_2, \dots, T_{2^k}$  e escolhendo  $k$  suficientemente grande, podemos transladar os subtriângulos até superpô-los de forma que a nova figura  $S$  tenha área arbitrariamente pequena (Figura 2.3). Além disso, se  $V$  é aberto tal que  $T \subset V$  então  $S \subset V$ .*

*Demonstração.* Dividimos o triângulo  $T$  em  $2^k$  subtriângulos de igual comprimento de base, como descreve a Figura 2.3. Começamos considerando os triângulos consecutivos  $T_{2i}$  e  $T_{2i-1}$  para  $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ . Dado que cada par de triângulos compartilham um lado, podemos aplicar o Lema 2.1.1 a cada par, até obter  $2^{k-1}$  novas figuras  $S_1^1, S_2^1, \dots, S_{2^{k-1}}^1$ . Cada  $S_i^1$  (arvorezinha) consiste de um tronco  $T_i^1$  (semelhante  $T_{2i} \cup T_{2i-1}$ ) com  $|T_i^1| = \alpha^2 |T_{2i} \cup T_{2i-1}|$  ( $\blacklozenge$ ) e os galhos  $A_{2i}^1, A_{2i-1}^1$ . O coeficiente  $\alpha$  é fixado ao longo da construção (será especificado depois). Pelo Lema 2.1.1, a nova figura  $S_i^1$  tem área

$$|S_i^1| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) |T_{2i-1} \cup T_{2i}|.$$

O seguinte passo (passo 2) consiste em trabalhar consecutivamente com os  $S_i^1$ . Notemos que para cada  $i$  temos que um lado do triângulo  $T_{2i-1}^1$  é paralelo e de igual comprimento ao lado oposto de  $T_{2i}^1$ . Assim, podemos transladar os  $S_i^1$  tal que os  $2^{k-1}$  troncos formem um tronco composto, o qual é semelhante ao triângulo original  $T$ . De fato, para  $1 \leq i \leq 2^{k-2}$  translademos  $S_{2i}^1$  rumo  $S_{2i-1}^1$  para obter  $2^{k-2}$  árvores  $S_i^2$ . O tronco  $T_i^2$  de cada  $S_i^2$  pelo Lema 2.1.1 tem área

$$|T_i^2| = \alpha^2 |T_{2i}^1 \cup T_{2i-1}^1| \stackrel{(\blacklozenge)}{=} \alpha^2 \alpha^2 |T_{4i} \cup T_{4i-1} \cup T_{4i-2} \cup T_{4i-3}| = \frac{\alpha^4}{2^{k-2}} |T|.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{2^{k-2}} |T_i^2| = \alpha^4 |T|.$$

Observando a semelhança entre os galhos e o tronco obtemos que a área dos galhos de  $\bigcup_{i=1}^{2^{k-2}} S_i^2$  não é maior que  $2(1 - \alpha)\alpha^2 |T|$ , se segue

$$\sum_{i=1}^{2^{k-2}} |S_i^2| \leq (\alpha^4 + 2(1 - \alpha)^2 \alpha^2) |T| \leq (\alpha^4 + 2(1 - \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)^2 \alpha^2) |T|.$$

No passo  $r$  ( $2 \leq r \leq k$ ) transladamos as árvores  $S_i^{r-1}$  ( $1 \leq i \leq 2^{k-r}$ ) como se descreve no passo 2 até obter  $2^{k-r}$  novas árvores  $S_1^r, \dots, S_{2^{k-r}}^r$ . Em cada passo, a soma das áreas dos troncos dos  $S_i^r$  terá um fator  $\alpha^2$  a mais e os galhos terão área não maior que  $2(1 - \alpha)^2 \alpha^{2r-2} |T|$ . Finalmente, obtemos a árvore de Perron

$S_1^k = S$ , a qual satisfaz

$$|S| \leq (\alpha^{2k} + 2(1 - \alpha)^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{2i}) |T|,$$

onde

$$2(1 - \alpha)^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{2i} \leq 2(1 - \alpha)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i} = \frac{2(1 - \alpha)^2}{1 - \alpha^2} = 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \stackrel{\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)}{<} 2(1 - \alpha).$$

Portanto,

$$|S| \leq \left( \alpha^{2k} + 2(1 - \alpha) \right) |T|.$$

Tomando  $\alpha$  perto de 1 e escolhendo  $k$  suficientemente grande podemos fazer o fator  $\alpha^{2k} + 2(1 - \alpha)$  arbitrariamente pequeno.

Seja  $\varepsilon > 0$  e  $V$  aberto tal que  $T \subset V$ . Observe que fixando a posição do triângulo  $T_1$  ao longo da construção anterior, nenhum dos triângulos  $T_2, \dots, T_{2^k}$  se moverá (em relação à  $T_1$ ) mais do que o comprimento da base do triângulo  $T$ . Portanto, se dividimos  $T$  em subtriângulos de comprimento de base menor que  $\varepsilon$  e aplicando a construção anterior nesses triângulos obtemos um conjunto  $S'$  de área arbitrariamente pequena. De fato, seja  $x \in S'$  então  $x$  está na translação de algum  $T_i$  que tem comprimento de base não maior que  $\varepsilon$ . Logo, a distância percorrida (translação) por  $T_i$  até sua posição original (dentro de  $T$ ) não é maior que  $\varepsilon$ . Assim,  $d(x, T) < \varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon < \frac{d(T, V^c)}{2}$  obtemos que  $x \in V$  e dado que  $x$  foi arbitrário temos que  $S' \subset V$ .  $\square$

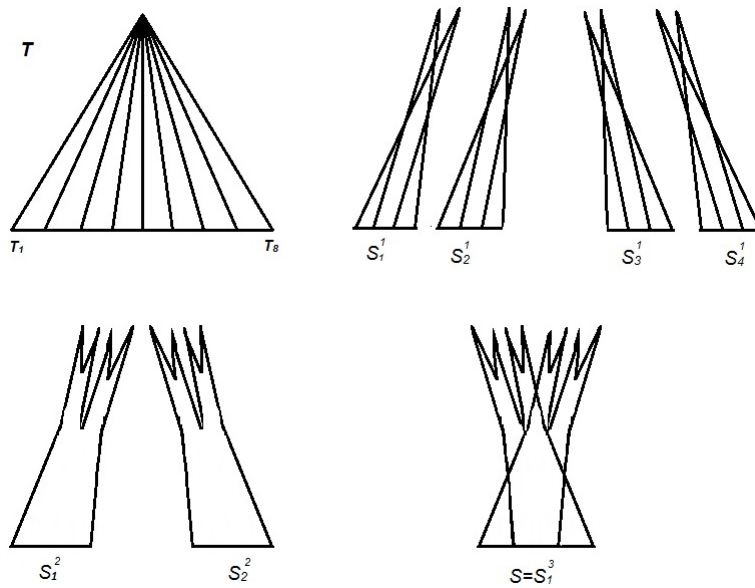


Figura 2.3: Descrição do Teorema 2.1.2 ( $k = 3$ )

**Teorema 2.1.3.** *Para todo  $n \geq 2$ , existe um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^d$  de medida de Lebesgue nula que contém segmentos de linha de comprimento igual a 1 em todas direções.*

*Demonstração.* Para  $n = 2$ , construímos um conjunto  $F_1$  de medida nula que contém um segmento de linha em todas direções num setor de  $60^\circ$ . Fazendo cópias de  $F_1$ , rotacionando-as como se descreve no começo da seção e tomando a união delas, obtemos o conjunto desejado.

Sejam  $S_0$  um triângulo equilátero de altura  $h$  igual a 1 e  $V_0$  aberto que contém  $S_0$  tal que  $|\bar{V}_0| \leq 2|S_0|$  (onde  $\bar{V}$  denota o fecho de  $V$ ). Aplicando a construção descrita no Teorema 2.1.2 a  $S_0$  obtemos a figura  $S_1 \subset V_0$  com  $|S_1| \leq 2^{-2}$  (podemos tomar a área de  $S_1$  tão pequena como queiramos). Dado que  $S_1$  é a união finita de triângulos, existe um conjunto aberto  $V_1$  tal que  $S_1 \subset V_1 \subset V_0$  e  $|\bar{V}_1| \leq 2|S_1|$ . Analogamente reaplicamos o teorema a  $S_{i-1}$  obtendo a figura  $S_i$  a qual satisfaz

$$|S_i| \leq 2^{-i-1} \tag{2.1}$$

e existe  $V_i$  aberto tal que

$$S_i \subset V_i \subset V_{i-1} \text{ e } |\bar{V}_i| \leq 2|S_i|. \quad (2.2)$$

Seja

$$F_1 := \bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{V}_i.$$

É claro que  $F_1$  é não vazio pois é a intersecção de uma sequência decrescente de conjuntos compactos  $\bar{V}_i$ . Provemos que este conjunto fechado tem medida de Lebesgue nula. De fato,

$$|F_1| = \lim_{i \rightarrow \infty} |\bar{V}_i| \stackrel{(2.2)}{\leq} \lim_{i \rightarrow \infty} 2|S_i| \stackrel{(2.1)}{\leq} \lim_{i \rightarrow \infty} 2 \cdot 2^{-i-1} = 0.$$

Assim, só resta provar que  $F_1$  contém segmentos de linhas em qualquer direção num setor de  $60^\circ$ . Sabemos que cada  $S_i$  e logo cada  $\bar{V}_i$  contém um segmento de linha de comprimento igual a 1 em qualquer direção  $\phi$  (sem perda de generalidade tomemos o setor  $0 \leq \phi \leq 60^\circ$ ). Seja  $l_i(t) = m_i t + b_i$  segmento de linha de comprimento igual a 1 com direção  $\phi_i$  onde  $\tan \phi_i = m_i$  e  $l_i \subset \bar{V}_i$ . Como  $\{\bar{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência decrescente temos que para  $j$  fixado  $l_i \subset \bar{V}_j$  onde  $i \geq j$  e dado que  $\bar{V}_j$  é compacto, temos que a sequência  $\{l_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  contém uma subsequência  $\{l_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a um segmento  $l(t) = mt + b$  de comprimento igual a 1 e com direção  $\phi$  ( $m = \tan \phi$ ), pois  $b + tm = \lim_{i_k \rightarrow \infty} m_{i_k} t + b_{i_k}$ . Dado que para cada  $j$  temos  $l_i \subset \bar{V}_j$  se  $i \geq j$  assim  $l \subset \bar{V}_j$  para cada  $j$  pois os  $\bar{V}_j$  são fechados. Portanto

$$l \subset \bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{V}_i = F_1.$$

Para  $n > 2$  tome  $F_1$  o conjunto de Besicovitch de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $B \subseteq \mathbb{R}^{d-2}$  a bola centrada no origem de raio  $\frac{1}{2}$ . Afirmamos que o conjunto  $F = F_1 \times B$  é um conjunto de Besicovitch de  $\mathbb{R}^d$ . De fato, é claro que a medida de  $F$  é nula pois a medida de  $F_1$  é nula também. Notemos que  $F$  contém segmento de linha em cada direção. Dado  $\xi \in S^{d-1}$ , escrevemos

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d).$$

Se  $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$  o resultado é imediato pois  $B$  claramente contém segmentos de linha em qualquer direção. Agora, se  $(\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0)$ , por hipótese de  $F_1$ , sabemos que existe um segmento de comprimento igual a 1 com direção  $(\xi_1, \xi_2) \in S^1$ . Podemos escrever o segmento  $l_\xi$  como

$$l_\xi = \left\{ (a_1, a_2) + t(\xi_1, \xi_2) : t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\},$$

onde  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ . Já que o conjunto  $l_\xi \times B$  está contido em  $F$ , o segmento

$$l'_\xi = \left\{ (a_1, a_2, 0, \dots, 0) + t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}$$

está contido em  $F$  e claramente está na direção  $\xi$ . □

*Observação 2.1.4.* Como vimos no Teorema 2.1.3 é possível construir o conjunto de Besicovitch para  $n \geq 2$ . Não obstante, nem todo conjunto de Besicovitch é necessariamente formado pelo produto cartesiano de dois conjuntos, onde um deles é um conjunto Besicovitch  $F \subset \mathbb{R}^2$ . De fato, aplicando a ideia original de Besicovitch numa pirâmide de  $\mathbb{R}^3$  eventualmente obteremos uma árvore de Perron de três dimensões e após fazer as devidas analogias para  $\mathbb{R}^3$  por fim teremos o conjunto desejado. Na seguinte imagem se mostram as três primeiras etapas da construção.

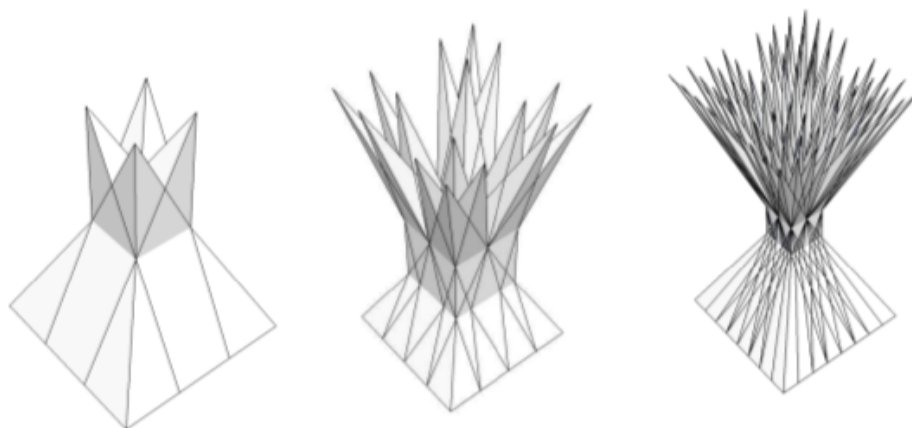


Figura 2.4: Árvore de Perron em  $\mathbb{R}^3$   
Fonte: Veja [16].



## CAPÍTULO 3

---

### Problema de Kakeya

---

**Definição.** Uma agulha é um segmento de linha de comprimento igual a 1.

**Definição.** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$ .  $F$  é um conjunto de Kakeya se é possível rotacionar continuamente  $180^\circ$  uma agulha dentro de  $F$ , isto é, se existe uma aplicação contínua  $l : t \mapsto l(t)$  onde  $t \in [0, 1]$  e  $l(t) \subset F$  é uma agulha para todo  $t$ .

Ao mesmo tempo que Besicovicht, em 1917, o matemático Japonês Soichi Kakeya fez uma pergunta parecida à de Besicovicht, a saber:

*Qual é a menor área de uma região do plano que contém uma agulha, que pode ser rotacionada continuamente em  $180^\circ$  sem sair da região?*

Nos artigos [2] e [4] se conjectura que o conjunto convexo de menor área que soluciona a pergunta de Kakeya é o triângulo equilátero de altura unitária (com área  $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$ ) (Figura 3.2). Tal conjectura só foi provada em 1920 pelo matemático húngaro Julius Pál [5]. Retirada a hipótese de convexidade, conjecturou-se que o deltoide de três pontos ou hipocicloide (Figura 3.3), que tem área  $\frac{\pi}{8} \approx 0.39$  é o conjunto que soluciona a pergunta de Kakeya. Porém, a conjectura não foi provada e assim o problema continuou aberto.

Devido ao isolamento da Rússia do mundo oriental por causa da guerra civil russa (1917-1923), Besicovitch foi avisado do problema de Kakeya só quando deixou

a Rússia. Depois que o problema chegou a ele, este percebeu que com só uma modificação na sua construção do conjunto de Besicovitch (Capítulo 2) junto com o truque de Pàl, denominado conexões de Pàl, obteria que dado qualquer número maior que zero, por muito pequeno que seja, era possível construir uma região planar de área menor a tal número a qual contém uma agulha que pode ser rotacionada continuamente  $180^\circ$  e voltar a sua posição original, provando assim que a conjectura da Hipocicloide era falsa. Posteriormente descreveremos em detalhe a construção do conjunto de Kakeya de medida arbitrariamente pequena. A seguir, apresentaremos alguns exemplos de tais conjuntos.

## Exemplos

1. Obviamente um círculo de diâmetro um (Fig. 3.1) é um conjunto de Kakeya. Se tomarmos o ponto médio de um segmento que passa pelo centro do círculo e rotacionarmos tal segmento em  $360^\circ$  ao redor desse ponto, o segmento sempre estará dentro do círculo.

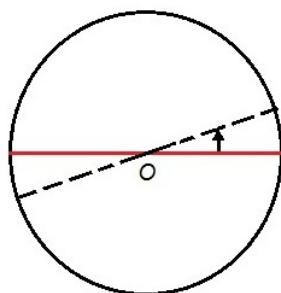


Figura 3.1: Círculo de diâmetro igual a 1.

2. O triângulo equilátero  $ABC$  de altura um é um conjunto de Kakeya. De fato, colocando a agulha (em vermelho na figura 3.2) sobre o lado  $AC$  de forma que algum ponto extremo da agulha coincida com  $A$ , assim poderemos rotacioná-la em  $60$  graus na direção de  $AB$ ; após deslocamos a agulha ao longo de  $AB$  até atingir o ponto  $B$ , em seguida rotacionamos ao redor de  $B$  em direção de  $BC$  e assim sucessivamente. Teremos então que a agulha foi rotacionada continuamente em  $360^\circ$  sem sair do triângulo.

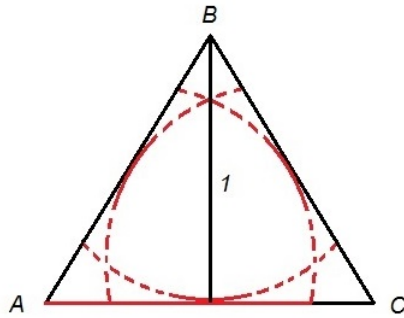


Figura 3.2: Triângulo equilátero de altura igual a 1.

3. A hipocicloide de três pontos inscrito num círculo de diâmetro  $\frac{3}{2}$  é um conjunto de Kakeya. Notemos que a reta tangente em qualquer ponto  $M$  do hipocicloide junta outros dois pontos  $A$  e  $B$  da figura, tais que a distância entre eles é igual a 1. Portanto, se deixamos uma extremidade do segmento percorrer o hipocicloide enquanto o segmento continue tocando a figura, temos que a outra extremidade do segmento também se moverá no hipocicloide e assim o segmento de comprimento unitário rotacionará  $360^\circ$  e sempre estará dentro da figura.

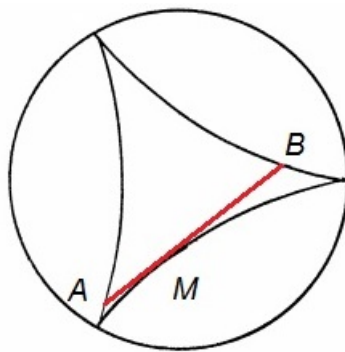


Figura 3.3: Hipocicloide.

### 3.1 Construção de um conjunto de Kakeya com medida arbitrariamente pequena

Primeiramente, descrevemos a ferramenta principal para construir o conjunto de Kakeya, as chamadas conexões de Pàl.

#### 3.1.1 Conexões de Pàl

A ideia de Pàl consistiu em notar que é possível mover continuamente um segmento de linha do plano a qualquer posição paralela à posição inicial. Tudo isso num conjunto de medida arbitrariamente pequena. Formalizaremos a ideia anterior no seguinte lema.

**Lema 3.1.1.** *Sejam  $L_1$  e  $L_2$  duas retas paralelas no plano. Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um conjunto  $E$  que contém  $L_1$  e  $L_2$ , com  $|E| < \varepsilon$ , tal que uma agulha pode ser movida continuamente de  $L_1$  a  $L_2$  sem sair de  $E$ .*

*Demonstração.* Tome  $x_1$  e  $x_2$  pontos em  $L_1$  e  $L_2$  respectivamente e seja  $E$  o conjunto que consiste de  $L_1$ ,  $L_2$ , do segmento  $M$  que junta  $x_1$  e  $x_2$  e dos setores circulares  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) que se encontram entre  $L_i$  e  $M$  centrados em  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) (Figura 3.4). Assim

$$|E| = |L_1 \cup L_2 \cup M \cup S_1 \cup S_2| = |S_1 \cup S_2| = 2|S_1|.$$

onde  $|S_1| = \frac{\pi\theta}{360}$  (área de um setor circular de raio 1) e  $\theta$  dado em graus. Vejamos que a área total de  $E$  pode ser tão pequena como se desejar; isto tomando  $x_1$  e  $x_2$  suficientemente afastados. De fato, sabemos que  $\theta = \sin^{-1} \frac{k}{d(x_1, x_2)}$  onde  $k = d(L_1, L_2)$ . Logo, tomando  $d(x_1, x_2) = \frac{k}{\arcsin \frac{\varepsilon}{2}}$  obtemos que

$$|E| = 2 \frac{\pi\theta}{360} = \frac{\pi\varepsilon}{360} < \varepsilon.$$

Além disso, a agulha com ponto extremo  $x_1$  pode ser movida de  $L_1$  a  $L_2$ , isto por uma rotação no setor  $S_1$ , seguido de uma translação ao longo de  $M$  e finalmente

por uma rotação no setor  $S_2$ . □

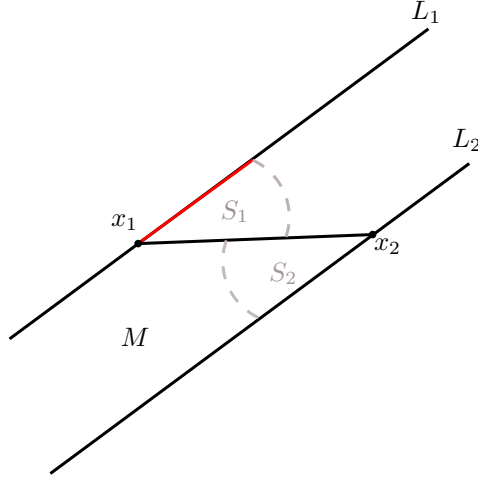


Figura 3.4: Descrição do Lema 3.1.1

**Teorema 3.1.2.** *Dado  $\varepsilon > 0$ , existe um conjunto  $E$  com  $|E| < \varepsilon$ , no qual uma agulha pode ser rotacionada continuamente  $180^\circ$  sem sair de  $E$ .*

*Demonstração.* Seja  $T$  um triângulo equilátero de altura igual a 1, com base sobre uma reta  $L$ . Aplicamos o Teorema 2.1.2 ao triângulo  $T$  para obter uma figura  $S_k$ , que é união de  $m = 2^k$  subtriângulos e  $|S_k| < \frac{\varepsilon}{6}$ . Sabemos que  $S_k$  contém agulhas em todas direções num setor de  $60^\circ$ . Agora, tomando 3 cópias de  $S_k$  e rotacionando-as apropriadamente, obtemos um conjunto  $E_0$  que contém agulhas em todas direções num setor de  $180^\circ$  e  $|E_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Precisaremos do Lema 3.1.1 para transladar a agulha entre as três componentes. De fato, como  $E_0$  é união de  $3m$  subtriângulos  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq 3m$  e para cada  $i$ , um lado do triângulo  $T_i$  é paralelo a um lado do triângulo  $T_{i+1}$ , segue pelo Lema 3.1.1 que existe um conjunto  $N_i$  tal que  $|N_i| < \frac{\varepsilon}{6m}$ , que se o adicionamos a  $E_0$ , poderemos transladar continuamente a agulha de  $T_i$  a  $T_{i+1}$ . Seja  $E := \bigcup_{i=1}^{3(m-1)} N_i \cup E_0$ . Pela construção anterior podemos rotacionar continuamente uma agulha  $180^\circ$  em  $E$  e

$$|E| < 3(m-1) \frac{\varepsilon}{6m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, obtemos o conjunto desejado. □

**Proposição 3.1.3.** *Todo conjunto de Kakeya  $F \subset \mathbb{R}^2$  tem área estritamente maior que zero [6].*

*Demonstração.* Seja  $F \subset \mathbb{R}^2$  conjunto de Kakeya. Pela definição, existe uma função contínua  $l : t \mapsto l(t)$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $l(t) \subset F$  é uma agulha. Podemos parametrizar cada agulha como:

$$l(t) = \left\{ (x(t) + s \cos \omega(t), y(t) + s \sin \omega(t)) : s \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\},$$

onde  $x, y, \omega : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  são funções contínuas.

Dado que, qualquer função contínua definida num conjunto compacto é uniformemente contínua temos que em particular, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x(t) - x(t')|, |y(t) - y(t')|, |\omega(t) - \omega(t')| < 0.0001 \quad (3.1)$$

sempre e quando  $t, t' \in [0, 1]$  com  $|t - t'| \leq \delta$ .

Observe que  $\omega(t)$  não pode ser uma função constante, de outra forma a agulha não rotacionaria. Logo, existem  $t_0, t_1 \in [0, 1]$  com  $|t_0 - t_1| \leq \delta$  e  $\omega(t_0) \neq \omega(t_1)$ . Assuma sem perda de generalidade que  $t_0 < t_1$  e  $x(t_0) = y(t_0) = \omega(t_0)$ . Seja  $a \in [-0.4, 0.4]$  número real. De (3.1) obtemos que para todo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , a agulha  $l(t)$  intercepta a linha vertical  $x = a$  em algum ponto  $(a, y_a(t))$ . E como  $l(t) \subset F$ , tal ponto também deve estar em  $F$ . Além disso,  $y_a(t)$  é contínua em  $t$ . Assim, pelo Teorema do valor intermediário, para todo  $c$  dentro do intervalo  $I$  formado entre  $(a, y_a(t_0))$  e  $(a, y_a(t_1))$  existe  $t$  tal que  $c = (a, y_a(t)) \in F$ . Portanto,

$$\bigcup_{a \in [-0.4, 0.4]} (a, y_a(t)) = [-0.4, 0.4] \times I = F_0 \subset F$$

sendo a área de  $F_0$  um número positivo. □

## CAPÍTULO 4

---

### Medida e dimensão de Hausdorff

---

Começamos este capítulo com a seguinte pergunta:

#### O que é dimensão?

Conjuntos como um ponto, uma linha ou o interior de um quadrado são objetos matemáticos, os quais podemos entender intuitivamente usando o senso comum e não temos problemas em dizer que suas dimensões são zero, um e dois respectivamente. Não obstante, atribuir dimensão a um conjunto arbitrário (aqui consideramos, por simplicidade, só subconjuntos da reta real, do plano ou mais geral do espaço euclidiano  $n$ -dimensional) de forma natural (chamamos esta correspondência uma função dimensão), nunca é uma tarefa trivial.

Esclarecemos o significado da correspondência natural mencionada no parágrafo anterior. Para um conjunto arbitrário  $X \subset \mathbb{R}^d$  a dimensão de  $X$ , que será denotada por  $\dim X$ , satisfaz as seguintes condições:

(1) Para o conjunto  $\{p\}$ ,  $\dim\{p\} = 0$ , para o intervalo unitário  $I^1$ ,  $\dim I^1 = 1$ , em geral, para um cubo  $m$ -dimensional  $I^m$ ,  $\dim I^m = m$ .

(2) (Monotocidade) Se  $X \subset Y$ ,

$$\dim X \leq \dim Y.$$

(3) (Estabilidade enumerável) Se  $\{X_j\}$  uma sequência de conjuntos fechados de  $\mathbb{R}^d$ , então:

$$\dim \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \right) = \sup_{j \geq 1} \dim X_j.$$

(4) (Invariância) Se  $\psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$  é um homeomorfismo então:

$$\dim \psi(X) = \dim X, \forall X \subset \mathbb{R}^d.$$

## 4.1 Medida de Hausdorff

Apresentaremos nesta seção a medida de Hausdorff, que é um outro exemplo de medida definida em  $\mathbb{R}^d$ . A medida de Hausdorff é utilizada quando se pretende medir o volume de regiões de  $\mathbb{R}^d$  que possuem fronteiras “complicadas” que não poderiam ser mensurados com outra medida, como a de Lebesgue, por exemplo. Isso vem do fato de que a medida de Lebesgue utiliza aproximações com intervalos ou retângulos ou em geral, com caixas, para medir subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e de  $\mathbb{R}^d$  respectivamente. Pelo contrário, a medida de Hausdorff utilizará conjuntos arbitrários de diâmetro finito no lugar caixas, por exemplo.

Do ponto de vista teórico, apesar da definição de medida de Hausdorff ser diferente da definição de medida de Lebesgue, podemos encará-la como uma generalização desta última, visto que é provado que elas são “equivalentes” em condições que serão explicitadas posteriormente. Além disso, usando a medida de Hausdorff pode-se introduzir uma noção de dimensão, que possui a característica notável de admitir valores não necessariamente inteiros, em outras palavras, é possível termos objetos de dimensões intermediárias entre 0 e 1, por exemplo.

Antes de definir a medida de Hausdorff, ressaltamos que tal medida pode ser definida em conjuntos mais gerais que o  $\mathbb{R}^d$  e que, portanto, sua definição e suas características (e conseqüentemente sua teoria em si) são bem mais abstratas que a da medida de Lebesgue.

Primero consideremos medida exterior, definida em termos de coberturas, a qual restringida aos conjuntos de Borel será a desejada medida de Hausdorff.



**Definição.** Seja  $E$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ . A medida exterior  $\alpha$ -dimensional de Hausdorff de  $E$  é definida por

$$m_\alpha^*(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam } F_k \leq \delta, \forall k \right\}.$$

Onde  $\text{diam } S$  é o diâmetro do conjunto  $S$ , isto é,  $\text{diam } S = \sup \{|x - y| : x, y \in S\}$ .

Em outras palavras, para cada  $\delta > 0$  consideramos coberturas de  $E$  por famílias enumeráveis (arbitrárias) de conjuntos com diâmetro menor que  $\delta$ , logo tomamos o ínfimo das somas  $\sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } F_k)^\alpha$  sobre tais coberturas. Assim, definimos  $m_\alpha^*(E)$  como o limite desses ínfimos quando  $\delta$  tende a 0. Consideremos a quantidade

$$H_\alpha^\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \text{diam } F_k \leq \delta, \forall k \right\}.$$

Vejamos as seguintes observações das definições anteriores:

*Observação 4.1.1.* Na definição de  $H_\alpha^\delta(E)$ , as coberturas finitas também estão inclusas, o caso extremo será que o conjunto  $E$  seja sua própria cobertura. Esta definição depende só do diâmetro de cada  $\{F_k\}$  e nada tem a ver a forma como  $E$  é coberto.

*Observação 4.1.2.* (i)  $H_\alpha^\delta(E) \in [0, \infty]$ . (ii)  $H_\alpha^\delta(E)$  é crescente quando  $\delta$  decresce. De fato, para (i) note que se a série  $\sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } F_k)^\alpha$  diverge tomamos o valor do ínfimo que será  $\infty$ . Para (ii), consideremos as famílias de coberturas  $A_{\delta_1}$  e  $A_{\delta_2}$  de  $E$ :

$$A_{\delta_1} = \left\{ \{F_k\} \subset \mathbb{R} : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \text{ e } \text{diam } F_k \leq \delta_1 \right\}$$

$$A_{\delta_2} = \left\{ \{F_k\} \subset \mathbb{R} : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \text{ e } \text{diam } F_k \leq \delta_2 \right\}.$$

Se  $\delta_1 < \delta_2$  então toda cobertura de  $A_{\delta_1}$  é cobertura de  $A_{\delta_2}$ . Logo,  $A_{\delta_1} \subset A_{\delta_2}$ . Assim,

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } F_{k, \delta_2})^\alpha \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } F_{k, \delta_1})^\alpha \right\}.$$

Ou seja,  $H_{\alpha}^{\delta_2}(E) \leq H_{\alpha}^{\delta_1}(E)$ .

*Observação 4.1.3.* A Observação (4.1.2) implica que o limite

$$m_{\alpha}^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\alpha}^{\delta}(E) = \sup_{\delta > 0} H_{\alpha}^{\delta}(E) \quad (4.1)$$

existe sempre. Porém, poderia ser infinito. De (4.1) notemos que,  $H_{\alpha}^{\delta}(E) \leq m_{\alpha}^*(E)$  para todo  $\delta > 0$ .

Quando definimos a medida exterior  $m_{\alpha}^*(E)$  é importante exigir que os conjuntos das famílias de coberturas  $\{F_k\}$  tenham diâmetro arbitrariamente pequeno; esta é a razão da definição  $m_{\alpha}^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\alpha}^{\delta}(E)$ . Tal exigência, que não é necessária na medida de Lebesgue, é essencial pois garante a característica básica estabelecida na **Propriedade iii** (abaixo). De fato, defina a “medida” 1-dimensional  $\tilde{m}_1$  como:

$$\tilde{m}_1 = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \text{diam } F_k, \quad E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Esta é parecida com a medida exterior 1-dimensional  $m_{\alpha}^*$ ,  $\alpha = 1$ , exceto que não se restringe o tamanho dos diâmetros de  $\{F_k\}$ . Suponha  $I_1$  e  $I_2$  segmentos unitários disjuntos em  $\mathbb{R}^d$ , com  $d \geq 2$  e  $I_1 = I_2 + h$ , onde  $|h| < \varepsilon$ . Então observe que  $\tilde{m}_1(I_1) = \tilde{m}_1(I_2) = 1$ , pois  $I_1$  e  $I_2$  são unitários. Por outro lado,  $\tilde{m}_1(I_1 \cup I_2) \leq 1 + \varepsilon$ . Portanto

$$\tilde{m}_1(I_1 \cup I_2) < \tilde{m}_1(I_1) + \tilde{m}_1(I_2) \quad \text{quando } \varepsilon < 1;$$

Daí que  $\tilde{m}_1$  não satisfaz **iii**.

Começamos com a lista de propriedades satisfeitas pela medida exterior de Hausdorff.

**Propriedade i (Monotocidade)** Se  $E_1 \subset E_2$ , então  $m_{\alpha}^*(E_1) \leq m_{\alpha}^*(E_2)$ .

*Demonstração.* É direto da Observação (4.1.2) pois se  $E_1 \subset E_2$  então toda cobertura de  $E_2$  é também cobertura de  $E_1$ .  $\square$

**Propriedade ii (Sub-aditividade)**  $m_{\alpha}^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_{\alpha}^*(E_j)$  e  $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ .

*Demonstração.* Suponha  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ . Se  $m_{\alpha}^*(E_j) = \infty$  para algum  $j$ , então se obtém a desigualdade. logo suponha  $m_{\alpha}^*(E_j) < \infty$  para todo  $j$ . Daí que, dado  $\varepsilon > 0$  existe cobertura  $\{F_{j,k}\}_k$  de  $E_j$  tal que  $\text{diam } F_{j,k} < \delta$  e

$$\sum_k^{\infty} (\text{diam } F_{j,k})^{\alpha} \leq H_{\alpha}^{\delta}(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}. \quad (4.2)$$

Agora,  $\{F_{j,k}\}_{j,k}$  é cobertura de  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$  pois  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} F_{j,k}$ . Segue-se da definição de  $H_{\alpha}^{\delta}(E)$  que

$$H_{\alpha}^{\delta}(E) \leq \sum_j \sum_k (\text{diam } F_{j,k})^{\alpha} \stackrel{(4.2)}{\leq} \sum_j \left( H_{\alpha}^{\delta}(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right),$$

portanto,

$$H_{\alpha}^{\delta}(E) \leq \sum_j H_{\alpha}^{\delta}(E_j) + \varepsilon,$$

sendo  $\varepsilon$  arbitrário e tomando  $\delta \rightarrow 0$ , temos que  $m_{\alpha}^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_{\alpha}^*(E_j)$ .  $\square$

**Propriedade iii** Se  $d(E_1, E_2) > 0$ , então  $m_{\alpha}^*(E_1 \cup E_2) = m_{\alpha}^*(E_1) + m_{\alpha}^*(E_2)$ .

*Demonstração.* É suficiente provar que

$$m_{\alpha}^*(E_1 \cup E_2) \geq m_{\alpha}^*(E_1) + m_{\alpha}^*(E_2),$$

pois a outra desigualdade se obtém da **Propriedade ii**. De fato, tome  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(E_1, E_2) > \varepsilon$ . Considere qualquer cobertura  $F_1, F_2, \dots$ , de  $E_1 \cup E_2$  de diâmetro menor que  $\delta$  onde  $\delta < \varepsilon$ , seja

$$F'_j = E_1 \cap F_j \quad \text{e} \quad F''_j = E_2 \cap F_j.$$

Daí que  $\{F'_j\}$  e  $\{F''_j\}$  são coberturas de  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente e  $F'_j \cap F''_j = \emptyset$  (pois  $\delta < \varepsilon$ ) para todo  $j$ . Portanto,

$$\sum_j (\text{diam } F'_j)^{\alpha} + \sum_i (\text{diam } F''_i)^{\alpha} \leq \sum_k (\text{diam } F_k)^{\alpha}.$$

Tomando o ínfimo sobre as coberturas e fazendo  $\delta \rightarrow 0$  obtemos a desigualdade desejada.  $\square$

Neste ponto, notamos que  $m_\alpha^*$  satisfaz todas as propriedades de medida exterior métrica discutida no Capítulo 1. Portanto, aplicando o Teorema 1.3.2 temos que  $m_\alpha^*$  é uma medida sobre os Borelianos. Escrevemos  $m_\alpha$  para denotar tal medida. A medida  $m_\alpha$  será chamada a medida  $\alpha$ -dimensional de Hausdorff.

**Propriedade iv** Se  $\{E_j\}$  é uma família enumerável disjunta de Borelianos, e  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ , então

$$m_\alpha(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m_\alpha(E_j).$$

**Propriedade v** A medida de Hausdorff é invariante por translações

$$m_\alpha(E + h) = m_\alpha(E) \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

e rotações

$$m_\alpha(rE) = m_\alpha(E),$$

onde  $r$  é uma rotação em  $\mathbb{R}^d$ . Além disso,

$$m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E) \quad \forall \lambda > 0.$$

*Demonstração.* As conclusões da **Propriedade v** seguem-se observando que o diâmetro de um conjunto  $S$  é invariante por translações e rotações, e satisfaz  $\text{diam}(\lambda S) = \lambda \text{diam}(S)$  para  $\lambda > 0$ .  $\square$

**Propriedade vi**  $m_0(E)$  conta o número de pontos de  $E$ , enquanto  $m_1(E) = m(E)$  para todo Boreliano  $E \subset \mathbb{R}$ . (Aqui  $m$  denota a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$ ).

*Demonstração.* A primeira parte é trivial pois se  $E$  é finito, i.e.,  $\#(E) = n$  temos  $\sum_{k=1}^n (\text{diam } F_k)^0 = n$ . Por último, notemos que em uma dimensão todo conjunto de diâmetro  $\delta$  está contido num intervalo de comprimento  $\delta$ , e como para os intervalos seus comprimentos são iguais a sua medida de Lebesgue temos a igualdade desejada.  $\square$

*Observação.* Em geral, a medida  $d$ -dimensional de Hausdorff em  $\mathbb{R}^d$  multiplicada por um fator constante é igual a medida  $d$ -dimensional de Lebesgue.

**Propriedade vii** Se  $E$  é Boreliano de  $\mathbb{R}^d$  e  $m(E)$  é sua medida de Lebesgue, então  $c_d m_d(E) = m(E)$  para alguma constante  $c_d$  que depende só da dimensão  $d$ .

*Demonstração.* A constante  $c_d$  é igual a  $m(B)/(\text{diam } B)^d$ , para a bola unitária  $B$ ; note que o raio é o mesmo para todas as bolas  $B$  em  $\mathbb{R}^d$ , logo  $c_d = v_d/2^d$  (onde  $v_d$  denota o volume da bola unitária). Provemos primeiro a propriedade no caso quando,  $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ . Uma propriedade particular desta norma é que todo conjunto limitado  $U \subset \mathbb{R}^d$  está contido numa  $\|\cdot\|_\infty$ -bola com diâmetro igual ao de  $U$ . De fato, para  $i = 1, \dots, d$  seja  $a_i = \inf \{x_i : x \in U\}$  e  $b_i = \sup \{x_i : x \in U\}$ . Então  $\text{diam } U = \max_{1 \leq i \leq d} (b_i - a_i)$  e  $U$  está contido na caixa equilateral (ou  $\|\cdot\|_\infty$ -bola) com esse diâmetro.

Seja agora  $E \subset \mathbb{R}^d$  e  $\{U_i\}$  uma cobertura de  $E$  com  $\text{diam } U_i < \delta$ . Sem aumentar  $\sum_i (\text{diam } U_i)^d$  pela observação anterior podemos assumir que os  $U_i$  são caixas. Então

$$\sum_i (\text{diam } U_i)^d = \sum_i m(U_i) \geq m\left(\bigcup U_i\right) \geq m(E),$$

tomando ínfimo e  $\delta \rightarrow 0$  obtemos  $m_d(E) \geq m(E)$ .

Para a estimativa contrária notemos que cada caixa equilátera  $W$  cujos lados tem comprimento  $l$  pode ser decomposta, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , em  $(2^k)^n$  pequenas caixas  $W_i$  de lado de comprimento  $l2^{-k}$ . Para  $\delta > 0$  escolha  $k$  tal que  $l2^{-k} < \delta$ . É claro que essas caixas formam uma cobertura de  $W$  e

$$\sum_i (\text{diam } W_i)^d = (l2^{-k})^n (\text{número de pequenas caixas}) = l^n = m(W),$$

isto implica  $m_d(W) \leq m(W)$  para toda caixa equilateral. A mesma desigualdade segue para todos os abertos e assim, finalmente, para os Borelianos. Portanto,  $m_d(E) = m(E)$  se a norma é a do máximo. Para o caso geral precisaremos de uma análise mais profunda. A primeira observação da prova anterior implica que o volume de qualquer conjunto limitado é no máximo igual ao volume de uma bola com diâmetro igual. Esta “Desigualdade Isodiamétrica” é também verdadeira

para qualquer norma, como veremos no Teorema 4.1.5 que será consequência da desigualdade de Brunn-Minkowski.  $\square$

**Teorema 4.1.4. (Desigualdade de Brunn-Minkowski)** Para quaisquer dois subconjuntos compactos  $A, B$  de  $\mathbb{R}^d$  temos:

$$m(A+B)^{\frac{1}{d}} \geq m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}}.$$

*Demonstração.* Dado que  $m$  é invariante por translações podemos deslocar os conjuntos livremente sem mudar a validade da afirmação.

1. Primeiro, tratemos o caso especial quando  $A$  e  $B$  são caixas com lados paralelos aos eixos e lados de comprimentos  $a_1, a_2, \dots, a_d$  e  $b_1, b_2, \dots, b_d$ , respectivamente. Então  $A+B = \{x+y : x \in A, y \in B\}$  é uma caixa com lados de comprimento  $a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_d+b_d$ . Portanto, devemos provar que

$$\prod_{i=1}^d (a_i + b_i)^{\frac{1}{d}} \geq \prod_{i=1}^d a_i^{\frac{1}{d}} + \prod_{i=1}^d b_i^{\frac{1}{d}} \quad \forall a_i, b_i \geq 0.$$

Dividindo a equação anterior por  $\prod_{i=1}^d (a_i + b_i)^{\frac{1}{d}}$  então

$$1 \geq \frac{\prod_{i=1}^d a_i^{\frac{1}{d}}}{\prod_{i=1}^d (a_i + b_i)^{\frac{1}{d}}} + \frac{\prod_{i=1}^d b_i^{\frac{1}{d}}}{\prod_{i=1}^d (a_i + b_i)^{\frac{1}{d}}}$$

tomando  $\alpha_i = a_i/(a_i+b_i)$  obtemos que a desigualdade anterior é equivalente a

$$1 \geq \prod_{i=1}^d \alpha_i^{\frac{1}{d}} + \prod_{i=1}^d (1 - \alpha_i)^{\frac{1}{d}}.$$

De fato, pela desigualdade  $(c_1 \cdot c_2 \cdots c_d)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d c_i$ , para  $c_i \geq 0$ , temos a estimativa desejada

$$\prod_{i=1}^d \alpha_i^{\frac{1}{d}} + \prod_{i=1}^d (1 - \alpha_i)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \alpha_i + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (1 - \alpha_i) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d 1 = 1.$$

2. Agora suponha que  $A$  e  $B$  sejam cada um a união de  $k$  e  $m$ , respectivamente

caixas que são quase disjuntas. Aqui dois conjuntos  $C$  e  $D$  são chamados quase disjuntos se sua interseção está contida num hiperplano.

Vamos dar uma demonstração por indução sobre  $k$  e  $m$ . O caso  $k = m = 1$  já foi provado. Assuma assim que  $k \geq 2$ . Pelo fato de  $A$  ser união de caixas quase disjuntas podemos decompor  $A$  usando um hiperplano em dois conjuntos  $A'$  e  $A''$  tais que o número de caixas que possuem é menor que  $k$ . Inclusive, podemos assumir que tal hiperplano é paralelo a  $\{x_d = 0\} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$  e tomando um deslocamento apropriado temos

$$A' \subset \{x_d \geq 0\}, A'' \subset \{x_d \leq 0\}.$$

Seja  $r := \frac{m(A')}{m(A)} \in (0, 1)$  (\*) pois  $m(A') < m(A)$ . A seguir, divida o conjunto  $B$  em dois conjuntos quase disjuntos  $B'$  e  $B''$  tais que

$$\frac{m(B')}{m(B)} = r. (**)$$

Além disso, por outro deslocamento podemos supor

$$B' \subset \{x_d \geq 0\}, B'' \subset \{x_d \leq 0\}.$$

Daí que  $A + B$  contém  $(A' + B') \cup (A'' + B'')$  e os dois conjuntos entre parênteses são quase disjuntos. Assim

$$m(A + B) \geq m(A' + B') + m(A'' + B'').$$

Notemos também que  $A'$  e  $B'$  possuem um número de caixas menor que  $k$  e  $m$  respectivamente (igual para  $A''$  e  $B''$ ). Portanto, pela hipótese de indução

$$\begin{aligned} m(A + B) &\geq m(A' + B') + m(A'' + B'') \\ &\geq \left[ m(A')^{\frac{1}{d}} + m(B')^{\frac{1}{d}} \right]^d + \left[ m(A'')^{\frac{1}{d}} + m(B'')^{\frac{1}{d}} \right]^d \\ &\stackrel{(*)}{=} \stackrel{(**)}{=} r \left[ m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \right]^d + \left[ m(A'')^{\frac{1}{d}} + m(B'')^{\frac{1}{d}} \right]^d. \end{aligned}$$

De (\*) e (\*\*) temos que  $m(A'') = (1 - r)m(A)$  pois  $m(A) = m(A') + m(A'')$  (aná-

logo para  $B''$ ). Logo,

$$\begin{aligned} m(A+B) &\geq r \left[ m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \right]^d + (1-r) \left[ m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \right]^d \\ &= \left[ m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \right]^d. \end{aligned}$$

Que é a desigualdade desejada.

**3.** Suponha que  $A$  e  $B$  são conjuntos abertos. Então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe união de cubos quase disjuntos  $A_\varepsilon$  e  $B_\varepsilon$  tal que  $A_\varepsilon \subset A$  e  $B_\varepsilon \subset B$ , com  $m(A) \leq m(A_\varepsilon) + \varepsilon$  e  $m(B) \leq m(B_\varepsilon) + \varepsilon$  (Veja [2]). Dado que  $A+B \supset A_\varepsilon + B_\varepsilon$  temos

$$m(A+B)^{\frac{1}{d}} \geq m(A_\varepsilon + B_\varepsilon)^{\frac{1}{d}} \stackrel{\text{Caso 2}}{\geq} m(A_\varepsilon)^{\frac{1}{d}} + m(B_\varepsilon)^{\frac{1}{d}} \geq (m(A) - \varepsilon)^{\frac{1}{d}} + (m(B) - \varepsilon)^{\frac{1}{d}},$$

tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos a prova. Agora vejamos o caso quando  $A$  e  $B$  são compactos arbitrários. Notemos que  $A+B$  é compacto e que se definimos  $A_n = \{x : d(x, A) < \frac{1}{n}\}$ , então  $A_n$  é aberto, e  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Da mesma forma definimos  $B_n$  e  $(A+B)_n$  e observe que  $A+B \subset A_n + B_n \subset (A+B)_{2n}$ . De fato, considere pontos  $a_n \in A_n$  e  $b_n \in B_n$ . Temos que

$$d(a_n, A) < \frac{1}{n} \Rightarrow \inf \{|a_n - x| : x \in A\} < \frac{1}{n}.$$

Analogamente,  $\inf \{|b_n - y| : y \in B\} < \frac{1}{n}$ . Como  $A$  e  $B$  são compactos, existem  $\bar{x} \in A$  e  $\bar{y} \in B$  tais que  $\inf \{|a_n - x| : x \in A\} = |a_n - \bar{x}|$  e  $\inf \{|b_n - y| : y \in B\} = |b_n - \bar{y}|$ . Logo

$$d(a_n + b_n, X+Y) \leq |(a_n + b_n) - (\bar{x} + \bar{y})| \leq |a_n - \bar{x}| + |b_n - \bar{y}| < \frac{2}{n}.$$

Isto é,  $a_n + b_n \in (A+B)_{2n}$  e portanto  $A_n + B_n \subset (A+B)_{2n}$ . Assim

$$\begin{aligned} m(A+B)^{\frac{1}{d}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} m((A+B)_n)^{\frac{1}{d}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n + B_n)^{\frac{1}{d}} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( m(A_n)^{\frac{1}{d}} + m(B_n)^{\frac{1}{d}} \right) = m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}}. \end{aligned}$$

□



A seguir, apresentamos nossa principal aplicação da desigualdade de Brunn-Minkowski que é a desigualdade isodiamétrica para qualquer norma em  $\mathbb{R}^d$ .

**Teorema 4.1.5.** *Seja  $\|\cdot\|$  uma norma em  $\mathbb{R}^d$  e seja  $C$  um conjunto limitado Lebesgue mensurável. Então o volume de  $C$  é no máximo igual ao volume de uma  $\|\cdot\|$ -bola com diâmetro igual ao de  $C$ .*

*Demonstração.* Pela definição de diâmetro  $\text{diam}C = \sup\{\|x - y\| : x, y \in C\}$  temos que  $C - C = \{x - y : x, y \in C\}$  está contido na bola  $B(0, \text{diam}C)$  assim

$$m(C - C) \leq m(B(0, \text{diam}C)) = 2^d m(B(0, \frac{\text{diam}C}{2})).$$

Por outro lado, pela desigualdade de Brunn-Minkowski

$$m(C - C) \geq \left[ m(C)^{\frac{1}{d}} + m(-C)^{\frac{1}{d}} \right]^d = 2^d m(C).$$

Portanto,  $m(C) \leq m(B(0, \frac{\text{diam}C}{2}))$  e como  $B(0, \frac{\text{diam}C}{2})$  tem diâmetro igual ao do  $C$ , obtemos a prova do teorema.  $\square$

Agora estamos em condições de provar a desigualdade  $c_d m_d(E) \geq m(E)$  da **Propriedade vii**, considerando qualquer norma de  $\mathbb{R}^d$ . De fato, seja  $\{U_i\}$  uma cobertura enumerável de  $E$  tal que  $\text{diam}U_i < \delta$ . Pelo Teorema 4.1.5 temos

$$m(U_i) \leq m(B(0, \frac{\text{diam}U_i}{2})) = \frac{(\text{diam}U_i)^d}{2^d} m(B) = c_d (\text{diam}U_i)^d \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Logo,

$$c_d \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}U_i)^d \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \geq m(E).$$

Portanto,  $c_d H_d^\delta(E) \geq m(E)$ . Tomando  $\delta \rightarrow 0$  obtemos a desigualdade desejada.

Para provar a desigualdade contrária, dado  $\varepsilon > 0$ , considere  $E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$  tal que  $\sum_{i \in \mathbb{N}} m(R_i) < m(E) + \varepsilon$  ( $\star$ ).

Notamos que para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\delta > 0$  é possível encontrar uma bola fechada  $B_i$

contida em  $R_i$  tal que  $\text{diam} B_i \leq \delta$ . De fato, seja  $x \in R_i$  e  $\delta > 0$ , tome

$$s = \min \left\{ \delta, \frac{d(x, \partial R_i)}{2} \right\}.$$

onde  $\partial R_i$  denota a fronteira de  $R_i$ . Daí que a bola com centro em  $x$  e diâmetro  $s$ ,  $B_i$  está contida em  $R_i$  e  $\text{diam} B_i < \delta$ . Segue-se que, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , as bolas fechadas contidas em  $R_i$  de diâmetro menor que um  $\delta > 0$  formam uma classe de Vitali  $\mathcal{J}$  (ver Definição A.0.12 no apêndice) para  $R_i$ . Pelo teorema de Vitali (Teorema A.0.13 do apêndice), existe uma sequência disjunta de bolas  $(B_{i,j})_j$  em  $R_i$  com  $\text{diam} B_{i,j} < \varepsilon'$ , tal que  $m_d(R_i - \bigcup_j B_{i,j}) = 0 \Rightarrow H_d^{\varepsilon'}(R_i - \bigcup_j B_{i,j}) = 0$  ( $\blacktriangle$ ). Já que  $m$  se define também para os Borelianos, temos

$$\sum_j m(B_{i,j}) = m\left(\bigcup_j B_{i,j}\right) \leq m(R_i). \quad (4.3)$$

Assim

$$\begin{aligned} H_d^{\varepsilon'}(E) &\leq \sum_i H_d^{\varepsilon'}(R_i) = \sum_i \left( H_d^{\varepsilon'} \left( \left( \bigcup_j B_{i,j} \right) \cup R_i - \bigcup_j B_{i,j} \right) \right) \\ &\leq \sum_i H_d^{\varepsilon'} \left( \bigcup_j B_{i,j} \right) + H_d^{\varepsilon'} \left( R_i - \bigcup_j B_{i,j} \right) \\ &\stackrel{(\blacktriangle)}{\leq} \sum_i H_d^{\varepsilon'} \left( \bigcup_j B_{i,j} \right) + 0 \leq \sum_i \sum_j H_d^{\varepsilon'}(B_{i,j}) \\ &\leq \sum_i \sum_j (\text{diam} B_{i,j})^d. \end{aligned}$$

Agora, sabemos que  $m(B) = m(B_1)r^d$  onde  $B$  é uma bola de  $\mathbb{R}^d$  de raio  $r$  e  $B_1$  é a bola unitária. Daí que  $m(B) = m(B_1)2^d(\text{diam} B)^d \geq m(B_1)\frac{(\text{diam} B)^d}{2^d}$ . Então  $(\text{diam} B)^d \leq \frac{2^d}{m(B_1)}m(B) = c_d^{-1}m(B)$ . Logo

$$\begin{aligned} H_d^{\varepsilon'}(E) &\leq \sum_i \sum_j (\text{diam} B_{i,j})^d \leq \sum_i \sum_j c_d^{-1}m(B_{i,j}) \\ &\stackrel{(4.3)}{\leq} c_d^{-1} \sum_i m(R_i) \stackrel{(\star)}{\leq} c_d^{-1}(m(E) + \varepsilon) \end{aligned}$$

Portanto, tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\varepsilon' \rightarrow 0$  obtemos  $m_d(E) \leq c_d^{-1}m(E)$ . Concluindo a prova da **Propriedade vii**.

**Propriedade vii'** Se  $E$  é Boreliano de  $\mathbb{R}^d$  e  $m(E)$  é sua medida de Lebesgue, então  $m_d(E) \approx m(E)$ , isto é,

$$c_d m_d(E) \leq m(E) \leq 2^d c_d m_d(E).$$

*Demonstração.* Pela definição de medida de Lebesgue para qualquer  $\varepsilon$ , existe  $\delta > 0$  e uma cobertura de  $E$  por bolas  $\{B_j\}$  tal que  $\text{diam } B_j < \delta$  e

$$\sum_j^\infty m(B_j) \leq m(E) + \varepsilon. \quad (4.4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} H_d^\delta(E) &\leq \sum_j (\text{diam } B_j)^d \\ &= c_d^{-1} \sum_j m(B_j) \stackrel{(4.3)}{\leq} c_d^{-1} (m(E) + \varepsilon), \end{aligned}$$

tomando  $\delta$  e  $\varepsilon$  tendendo a 0, obtemos  $c_d m_d(E) \leq m(E)$ . Para a outra desigualdade seja  $E \subset \bigcup_j^\infty F_j$  onde  $\{F_j\}$  é cobertura de  $E$  com

$$\sum_j (\text{diam } F_j)^d \leq m_d(E) + \varepsilon. \quad (4.5)$$

Podemos encontrar bolas fechadas num ponto de  $F_j$  de forma que  $F_j \subset B_j$  para cada  $j$  e  $\text{diam } B_j = 2 \text{diam } F_j$ . De fato, tome  $x \in F_j$  e seja  $\text{diam } F_j = s$ . Considere a bola com centro em  $x$  e raio  $s$ , então se  $y \in F_j$ ,  $|y - x| \leq s$ , logo  $y \in B_j$ . Daí que  $\text{diam } B_j = 2 \text{diam } F_j$ . Pela definição,

$$E \subset \bigcup_j^\infty F_j \subset \bigcup_j^\infty B_j \Rightarrow m(E) \leq \sum_j m(B_j).$$

Assim

$$\begin{aligned} m(E) &\leq \sum_j m(B_j) = \sum_j c_d (\text{diam } B_j)^d \\ &= 2^d c_d \sum (\text{diam } F_j)^d \\ &\stackrel{(4.4)}{\leq} 2^d c_d (m_d(E) + \varepsilon) \end{aligned}$$

tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos por fim  $m(E) \leq 2^d c_d m_d(E)$ .  $\square$

**Propriedade viii** Se  $m_\alpha^*(E) < \infty$  e  $\beta > \alpha$ , então  $m_\beta^*(E) = 0$ . Também, se  $m_\alpha^*(E) > 0$  e  $\beta < \alpha$ , então  $m_\beta^*(E) = \infty$ .

*Demonstração.* Seja  $\{F_k\}$  cobertura de  $E$  e  $\delta > 0$  com  $\text{diam } F_k \leq \delta$ . Suponha  $\beta - \alpha > 0$  e notemos que

$$(\text{diam } F_k)^\beta = (\text{diam } F_k)^{\beta-\alpha} (\text{diam } F_k)^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha} (\text{diam } F_k)^\alpha.$$

Consequentemente,

$$H_\beta^\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} H_\alpha^\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} m_\alpha^*(E).$$

Dado que  $m_\alpha^*(E) < \infty$  e  $\beta - \alpha > 0$ , encontramos tomando  $\delta \rightarrow 0$  que  $m_\beta^*(E) = 0$ . Similarmente, supondo  $m_\alpha^*(E) > 0$  e  $\beta < \alpha$  obtemos que  $m_\beta^*(E) = \infty$ .  $\square$

**Teorema 4.1.6.** Para todo  $E \subset \mathbb{R}^d$  existe  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$m_\beta(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta > \alpha \\ \infty & \text{se } \beta < \alpha. \end{cases} \quad (4.6)$$

*Demonstração.* Provemos primeiro que  $m_\alpha(\mathbb{R}^d) = 0$  se  $\alpha > d$ . De fato, pela invariância de  $m_\alpha$  por translações e rotações, somado ao fato de  $\mathbb{R}^d$  poder ser escrito como união disjunta de cubos, é suficiente mostrar que  $m_\alpha([0, 1]^d) = 0$  se  $\alpha - d > 0$  (\*). Dado  $\varepsilon > 0$ , vemos que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $[0, 1]^d$  pode ser coberto

por  $(2^k)^d$  cubos  $C_i$  de lado de comprimento igual  $2^{-k}$ . Tome  $k$  de forma que  $2^{-k} < \varepsilon$  (\*\*). Assim

$$\begin{aligned} H_\alpha^\varepsilon([0, 1]^d) &\leq \sum_{i=1}^{2^{kd}} (\text{diam } C_i)^\alpha = \sum_{i=1}^{2^{kd}} (\sqrt{d}2^{-k})^\alpha \\ &= (\sqrt{d}2^{-k})^\alpha 2^{kd} \stackrel{(**)}{<} (\sqrt{d})^\alpha \varepsilon^{\alpha-d} \end{aligned}$$

Por (\*) temos tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  que  $m_\alpha([0, 1]^d) = 0$ .

Voltando à demonstração tome  $\gamma = d + 1$  e notamos, pela prova anterior, que  $m_\gamma(E) = 0$  pois  $E \subset \mathbb{R}^d$ . Da **Propriedade viii**,  $m_s(E) = 0$  para todo  $s \geq \gamma$ . Assim, seja  $\alpha = \inf \{ \beta : m_\beta(E) = 0 \}$ . Daí que  $m_s(E) = 0$  para todo  $s > \alpha$ . Seja  $s < \alpha$ , provemos que  $m_s(E) = \infty$ . De fato, se  $r \in (s, \alpha)$ , da definição de  $\alpha$ ,  $m_r(E) > 0$ . Novamente pela **Propriedade viii**,  $m_s(E) = \infty$ . Portanto, podemos concluir que existe  $\alpha$  que satisfaz (4.6).  $\square$

**Corolário 4.1.7.** *Sejam*

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \inf \{ \beta : m_\beta(E) = 0 \} \\ \alpha_1 &= \sup \{ \beta : m_\beta(E) = \infty \} \end{aligned}$$

então  $\alpha_0 = \alpha_1$ .

*Demonstração.* De fato, seja  $\alpha > \alpha_0$ , então  $m_\alpha(E) = 0$ . Se  $\alpha < \alpha_0$  então  $m_\alpha(E) = \infty$ . Segue-se que,  $\alpha_0$  é uma cota superior do conjunto  $\{ \beta : m_\beta(E) = \infty \}$ . Portanto,  $\alpha_1 \leq \alpha_0$ . Da mesma forma se obtém que  $\alpha_1 \geq \alpha_0$ . Logo,  $\alpha_0 = \alpha_1$ .  $\square$

Pelo Teorema (4.1.6) e pelo Corolário (4.1.7), temos que dado  $E$  Boreliano de  $\mathbb{R}^d$ , existe um único  $\alpha$  tal que satisfaz (4.6) e que é dado por

$$\alpha = \sup \{ \beta : m_\beta(E) = \infty \} = \inf \{ \beta : m_\beta(E) = 0 \}.$$

Neste caso dizemos que  $E$  tem **dimensão de Hausdorff**  $\alpha$ , e escrevemos  $\alpha = \dim E$ . No valor crítico  $\alpha$ , a quantidade  $m_\alpha(E)$  sempre satisfaz  $0 \leq m_\alpha(E) \leq \infty$ .

Notamos que se  $E$  é limitado, a desigualdade anterior é estrita, isto é,  $0 < m_\alpha(E) < \infty$ .

**Proposição 4.1.8.** *A dimensão de Hausdorff satisfaz as propriedades de função dimensão[veja pág. 29-30].*

*Demonstração.* **(1)** Como  $m_0(\{p\}) = 1$  para  $p \in \mathbb{R}^d$ , então  $\dim\{p\} = 0$ . Se  $I^1$  um intervalo unitário,  $m_1(I^1) = 1$  então  $\dim I^1 = 1$ . Se  $I^r$  é um cubo unitario então  $0 < m_r(I^r) = \text{volume}(I^r) < \infty$  logo  $\dim I^r = r$ .

**(2)** Seja  $A \subset B$  então  $m_\alpha(A) \leq m_\alpha(B)$  para todo  $\alpha \geq 0$ . Daí que

$$\inf \{ \alpha : m_\alpha(A) = 0 \} \leq \inf \{ \alpha : m_\alpha(B) = 0 \}.$$

Ou seja,  $\dim A \leq \dim B$ .

**(3)** Se  $A = \bigcup A_i$ ,  $m_\alpha(A_i) \leq m_\alpha(A) \leq \sum m_\alpha(A_i) \forall i (*)$ . Se  $\alpha < \sup \dim A_i$ , assim existe  $j$  tal que  $\alpha < \dim A_j$ , portanto de  $(*)$ ,  $m_\alpha(A_j) = \infty = m_\alpha(A)$  e da definição de dimensão  $\alpha \leq \dim A$  para todo  $\alpha$  com  $\alpha < \sup \dim A_i$ , o que implica que  $\dim A \geq \sup \dim A_i$ . Se  $\sup \dim A_i < \alpha$ ,  $m_\alpha(A_i) = 0$  para todo  $i$  e por  $(*)$   $m_\alpha(A) = 0$ , portanto  $\dim A \leq \alpha$  para todo  $\alpha$  com  $\alpha > \sup \dim A_i$ , o que implica que  $\dim A \leq \sup \dim A_i$ .  $\square$

### 4.1.1 Definições equivalentes da dimensão de Hausdorff

Considere uma cobertura por bolas  $\{B_i\}$  para  $F$  e defina

$$B_s^\delta(F) = \left\{ \sum |B_i|^s : F \subset \bigcup_i B_i \text{ e } \text{diam} B_i \leq \delta \right\}.$$

Assim, obtemos uma medida  $B_s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} B_s^\delta(F)$  e uma “dimensão” que pula de  $\infty$  a 0. Nota-se que dado que as bolas estão contidas nas coberturas arbitrárias temos  $m_s(F) \leq B_s(F)$ . Além disso, se  $\{U_i\}$  é uma cobertura de  $F$  tal que  $\text{diam} U_i \leq \delta$ , então  $\{B_i\}$  é uma cobertura de  $F$  tal que  $\text{diam} B_i \leq 2\delta$ , onde  $B_i$  é alguma bola que contém  $U_i$  e de raio  $\text{diam} U_i$ . Portanto,  $\sum (\text{diam} B_i)^s \leq \sum (2 \text{diam} U_i)^s = 2^s \sum (\text{diam} U_i)^s$ , o qual implica tomando ínfimo em ambos lados

que  $B_s^{2\delta}(F) \leq 2^s H_s^\delta(F)$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , obtemos  $m_s(F) \leq B_s(F) \leq 2^s m_s(F)$ . Daí que os valores de  $s$  para o qual  $B_s$  e  $m_s$  pulam de  $\infty$  a 0 são os mesmos, isto é, as dimensões definidas pelas duas medidas são iguais.

### 4.1.2 Cálculo da dimensão de Hausdorff

Em geral é muito difícil determinar tanto a dimensão de Hausdorff quanto encontrar a medida de Hausdorff de um conjunto dado. Nós encerramos este capítulo com um exemplo onde determinamos a medida e dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor.

**Exemplo 4.1.9. (Conjunto de Cantor)** O conjunto de Cantor  $K$  do terço médio é construído da seguinte forma: considere o intervalo  $E_0 = [0, 1]$  em  $\mathbb{R}$ , deste intervalo retire o seu terço médio (aberto). Daí obtemos  $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$  de onde retiramos o terço médio de cada um dos intervalos de  $E_1$ , continuamos assim este processo e obtemos na  $i$ -ésima etapa  $2^i$  intervalos fechados de comprimento  $\frac{1}{3^i}$ . O conjunto de Cantor é então  $K = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$  (veja figura abaixo).

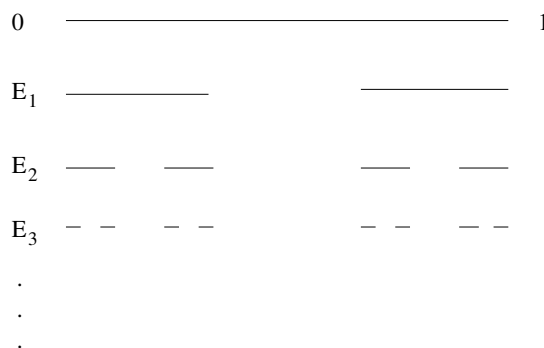


Figura 4.1: Construção do Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor tem dimensão  $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$  e  $m_\alpha(K) = 1$ . De fato, provemos que  $0 < m_\alpha(K) < \infty$ . Considere  $E^n$ , onde  $E^n = \{E_1^n, \dots, E_{2^n}^n\}$  e os  $E_k^n, k = 1, \dots, 2^n$ , são os intervalos fechados restantes da  $n$ -ésima etapa de construção do conjunto de Cantor. Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $n$  suficientemente grande tal que  $\text{diam } E_i^n = \frac{1}{3^n} < \varepsilon$ . Assim

$$H_\alpha^\varepsilon(K) \leq \sum_{i=1}^{2^n} (\text{diam } E_i^n)^\alpha = 2^n (3^{-n})^\alpha.$$

entretanto,  $\alpha$  satisfaz  $3^\alpha = 2$ , portanto  $2^n (3^{-n})^\alpha = 1$  e por isso  $m_\alpha(K) \leq 1 < \infty$ . Para a outra desigualdade, a qual consiste em provar que  $0 < m_\alpha(K)$ , precisamos de uma ideia adicional. Consideraremos a função de Cantor-Lebesgue  $F$  a qual mapeia sobrejetivamente  $K$  no intervalo  $[0, 1]$ . A chave desta função é que ela satisfaz certa condição que nos mostrará a dimensão do conjunto de Cantor.

**Definição 4.1.10.** Uma função  $f$  definida num conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $E$  se existe  $M > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in E.$$

Em geral, uma função  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz com expoente  $\gamma$  se

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\gamma \quad \forall x, y \in E.$$

**Lema 4.1.11.** *Suponha uma função  $f$  definida num compacto  $E$  que satisfaz a condição de Lipschitz com expoente  $\gamma$ . Então*

$$(i) \ m_\beta(f(E)) \leq M^\beta m_\alpha(E) \text{ se } \beta = \alpha/\gamma.$$

$$(ii) \ \dim f(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim E.$$

*Demonstração.* Como  $E$  é compacto, para qualquer cobertura  $\{F_k\}$  de  $E$  existe uma cobertura finita de  $E$ , portanto  $m_\alpha(E) < \infty$ . Suponha  $\{F_k\}$  uma família finita de conjuntos que cobrem  $E$  e  $\text{diam } F_k < \varepsilon$ . Daí que se  $U_k := f(E \cap F_k)$  então  $\{U_k\}$  cobre  $f(E)$ . Além disso, notemos pela condição de Lipschitz com expoente  $\gamma$  que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\gamma \leq M(\text{diam } F_k)^\gamma \quad \forall k \text{ e } \forall x, y \in E \cap F_k.$$

Então

$$\text{diam } U_k \leq M(\text{diam } F_k)^\gamma \quad \forall k.$$

Segue-se  $(\text{diam } U_k)^{\alpha/\gamma} \leq M^{\alpha/\gamma} (\text{diam } F_k)^\alpha$ . Logo

$$\sum_k (\text{diam } U_k)^{\alpha/\gamma} \leq M^{\alpha/\gamma} \sum_k (\text{diam } F_k)^\alpha.$$



Assim

$$H_\beta^\varepsilon(f(E)) \leq M^\beta H_\alpha^\varepsilon(E),$$

fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos (i). Para (ii), suponha  $\beta_0 > \frac{1}{\gamma}\alpha_0$  onde  $\alpha_0 = \dim E$  e  $\beta_0 = \dim f(E)$ . Então da definição de dimensão  $m_{\frac{1}{\gamma}\alpha_0}(f(E)) = \infty$ . Por outro lado, de (i)

$$m_{\frac{1}{\gamma}\alpha_0}(f(E)) \leq M^{\frac{1}{\gamma}\alpha_0} m_{\alpha_0}(E)$$

mas  $m_{\alpha_0}(E) < \infty$  logo  $m_{\frac{1}{\gamma}\alpha_0}(f(E)) < \infty$ . O que é uma contradição. Portanto,  $\beta_0 \leq \frac{1}{\gamma}\alpha_0$ .  $\square$

*Observação.* A seguir tratamos com a função de Cantor-Lebesgue, a qual explicaremos brevemente no Apêndice A.

**Lema 4.1.12.** *A função de Cantor-Lebesgue  $F$  sobre  $K$  satisfaz a condição de Lipschitz com expoente  $\gamma = \log 2 / \log 3$ .*

*Demonstração.* A função  $F$  foi construída como o limite de uma sequência de funções  $\{F_n\}$  lineares por partes. A função  $F_n$  cresce no máximo  $2^{-n}$  em cada intervalo de comprimento  $3^{-n}$ , isto é,  $|F_n(x) - F_n(y)| \leq 2^{-n}$  para todo  $x, y \in I_{3^{-n}}$ . Assim, a inclinação de  $F_n$ , digamos  $m$  é igual  $F_n(x) - F_n(y) / 3^{-n}$ . Portanto,

$$m \leq \frac{2^{-n}}{3^{-n}} \Leftrightarrow |F_n(x) - F_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y|.$$

Além disso, as sequências satisfazem  $|F(x) - F_n(x)| \leq 1/2^n$ . Usando as últimas estimativas junto com a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F_n(x) - F_n(y)| + |F(x) - F_n(x)| + |F(y) - F_n(y)| \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{2}{2^n} \leq 2 \left( \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Tendo fixado  $x$  e  $y$ , podemos minimizar o lado direito da desigualdade escolhendo  $n$  de forma que ambos termos tenham a mesma magnitude. De fato, tomando  $n$  de forma que  $1 \leq 3^n |x - y|$  e  $3^n |x - y| \leq 3$  (isto é possível já que  $|x - y| \leq 1/3^n$ )

vejamos que a primeira desigualdade implica

$$1^\gamma \leq (3^n)^\gamma |x - y|^\gamma$$

e como  $3^\gamma = 2$  temos  $1/2^n \leq |x - y|^\gamma$ . Assim

$$|F(x) - F(y)| \leq 2(3|x - y|^\gamma + |x - y|^\gamma) \leq M|x - y|^\gamma.$$

□

Continuando com o Exemplo 4.1.9, lembremos que o objetivo era provar  $0 < m_\alpha(K)$ . De fato, tomando  $E = K$ ,  $f$  a função de Cantor-Lebesgue,  $\alpha = \gamma = \log 2 / \log 3$  e aplicando os dois lemas anteriores temos

$$1 = m_1([0, 1]) \leq M^\beta m_\alpha(K).$$

Então,  $0 < m_\alpha(K) < \infty$ . Ou seja  $\dim K = \log 2 / \log 3$ . Provemos agora que a medida  $\log 2 / \log 3$ -dimensional Hausdorff de  $K$  é exatamente 1.

*Afirmção.* Se  $\mathcal{J} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  é uma coleção de intervalos cobrindo  $K$  então

$$1 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } U_i)^\alpha. \quad (4.7)$$

*Demonstração.* Basta provar (4.7) para qualquer coleção finita de intervalos, os quais têm seus pontos extremos fora de  $K$ . (▲) De fato, suponha primeiro que para qualquer coleção finita que cobre  $K$  tenha-se (4.7). Seja  $\mathcal{J} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma cobertura por intervalos de  $K$ , tal que  $\text{diam } U_i < \delta_1$  e  $\varepsilon > 0$  é fixado. Defina  $\tilde{\mathcal{J}} = \{\tilde{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma cobertura associada a  $\mathcal{J}$ , tal que para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{U}_i$  é um intervalo aberto,  $\text{diam } \tilde{U}_i < \delta_2$ ,  $U_i \subseteq \tilde{U}_i$  e

$$(\text{diam } \tilde{U}_i)^\alpha < (\text{diam } U_i)^\alpha + \frac{\varepsilon}{2^i}. \quad (4.8)$$

Dado que  $K$  é compacto, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^N \tilde{U}_{i_k}.$$

Pela hipótese ( $\blacktriangle$ ) temos

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{k=1}^N (\text{diam } \tilde{U}_{i_k})^\alpha \\ &\stackrel{(4.8)}{\leq} \sum_{k=1}^N \left( (\text{diam } U_{i_k})^\alpha + \frac{\varepsilon}{2^{i_k}} \right) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N (\text{diam } U_{i_k})^\alpha \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^\alpha. \end{aligned}$$

Já que  $\varepsilon$  é arbitrário temos

$$1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^\alpha.$$

Para a outra parte, ( $\blacklozenge$ ) suponha que os extremos dos intervalos  $U_i$ , com  $1 \leq i \leq N$  estão contidos no complementar de  $K$  e que em dita situação a estimativa (4.7) é certa. Seja  $\varepsilon > 0$ . Se os extremos de cada  $U_i$  estão fora de  $K$  não temos nada a fazer. Agora, se não, como todos os pontos de  $K$  estão em  $E_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , temos a possibilidade de encontrar dois intervalos de  $E_j$  para algum  $j \in \mathbb{N}$  que contenham cada um dos extremos de  $U_i$  e que sejam de comprimento tão pequeno quanto seja necessário. Portanto, fixada qualquer quantidade  $\eta > 0$ , podemos deslocar os extremos de  $U_i$  menos que  $\eta$  e assim deixá-los fora de  $K$ . Com o anterior podemos conseguir outra coleção finita de intervalos  $\{V_i\}_{i=1}^N$  tais que  $U_i \subseteq V_i$  e

$$(\text{diam } V_i)^\alpha < (\text{diam } U_i)^\alpha + \frac{\varepsilon}{N}. \quad (4.9)$$

Agora por (♦) temos

$$\begin{aligned}
 1 &\leq \sum_{k=1}^N (\text{diam } V_i)^\alpha \\
 &\stackrel{(4.9)}{\leq} \sum_{k=1}^N \left( (\text{diam } U_i)^\alpha + \frac{\varepsilon}{N} \right) \\
 &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N (\text{diam } U_i)^\alpha
 \end{aligned}$$

e dado que  $\varepsilon$  é arbitrário, temos

$$1 \leq \sum_{k=1}^N (\text{diam } U_i)^\alpha.$$

A seguir, provaremos que para qualquer cobertura finita por intervalos de  $K$ , se obtém (4.7), onde os extremos de cada intervalo estão fora de  $K$ . De fato, cada intervalo  $U_i$  pode ser escrito da forma:

$$U_i = I \cup C \cup I' \tag{4.10}$$

onde  $C$  é um intervalo no complementar de  $K$  e os intervalos  $I$  e  $I'$  são os maiores contidos em  $U_i$ . Portanto, da decomposição feita em (4.10) temos

$$\text{diam } I \leq \text{diam } C \text{ e } \text{diam } I' \leq \text{diam } C.$$

De (4.10) temos também que,

$$(\text{diam } U_i)^\alpha = (\text{diam } I + \text{diam } C + \text{diam } I')^\alpha.$$

Sabemos que para qualquer intervalo do conjunto  $E_j$  é verdade que o segmento médio extraído na construção de  $K$ , mede  $3^{-j}$ , igual aos dois restantes (que é o

caso extremo no qual os dois intervalos  $I$  e  $I'$  considerados foram iguais). Assim

$$\begin{aligned} (\text{diam} I + \text{diam} C + \text{diam} I')^\alpha &\geq \left( \text{diam} I + \frac{1}{2} (\text{diam} I + \text{diam} I') + \text{diam} I' \right)^\alpha \\ &= \left( \frac{3}{2} (\text{diam} I + \text{diam} I') \right)^\alpha \\ &\stackrel{3^\alpha=2}{=} 2 \left( \frac{1}{2} (\text{diam} I + \text{diam} I') \right)^\alpha \end{aligned}$$

e sendo  $\varphi(t) = t^\alpha$  função côncava para  $\alpha < 1$  temos

$$\begin{aligned} (\text{diam} U_i)^\alpha &\geq 2 \frac{1}{2} ((\text{diam} I)^\alpha + (\text{diam} I')^\alpha) \\ &= (\text{diam} I)^\alpha + (\text{diam} I')^\alpha. \end{aligned}$$

Depois de um número finito de passos, podemos substituir cada  $U_i$  em (4.7) por intervalos de comprimento  $3^{-j}$  sem acrescentar o valor da soma. Estes intervalos continuam sendo uma cobertura de  $K$ , portanto eles devem conter os intervalos que formam  $E_j$ , assim

$$1 = \sum_{l=1}^{2^j} 3^{-j\alpha} \leq \sum_{k=1}^N (\text{diam} U_k)^\alpha.$$

□

Da afirmação anterior obtemos que  $m_\alpha(K) \geq 1$  e pelo fato de  $m_\alpha(E) \leq 1$  (provado acima) temos  $m_\alpha(K) = 1$ .

## CAPÍTULO 5

---

### Conjectura de Kakeya

---

Nesta seção estudaremos o principal resultado deste trabalho, que concerne em responder a pergunta: Qual é o tamanho dos conjuntos de Kakeya? para entender o significado do “Tamanho” existem vários caminhos, entre eles o clássico, que consiste em estimar a dimensão de Hausdorff dos conjuntos de Kakeya. Como vimos na seção anterior tal dimensão fornece uma forma para quantificar o tamanho de um conjunto, como a medida de Lebesgue faz. Dizemos que um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^d$  tem dimensão inteira quando a dimensão de Hausdorff dele é  $d$ . Para citar alguns exemplos de conjuntos de dimensão inteira lembremos que por definição, todo subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  com medida de Lebesgue positiva tem dimensão inteira, mas também como vimos no exemplo 4.1.9 existem conjuntos de medida nula e dimensão inteira.

Para evitar confusões doravante usaremos a seguinte definição para denotar os conjuntos de Kakeya.

**Definição 5.0.13.** Um conjunto de Kakeya é um conjunto compacto  $E \subset \mathbb{R}^d$  que contém um segmento de linha de comprimento igual a 1 em qualquer direção, isto é

$$\forall \xi \in S^{d-1} \exists x \in \mathbb{R}^d : x + t\xi \in E \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

**Conjectura 5.0.14. (Conjectura de Kakeya)** *Todo conjunto de Kakeya de  $\mathbb{R}^d$  tem dimensão inteira.*

Vimos na seção 2.1 a construção de um conjunto de Kakeya de  $\mathbb{R}^d$  que, como sabemos, se expressa como um produto cartesiano. A seguir provaremos que tais conjuntos satisfazem a Conjectura 5.0.14. De fato, a seguinte desigualdade provada por Marstrand[8] fornece um argumento para estimar a dimensão de Hausdorff dos conjuntos antes mencionados.

**Teorema 5.0.15. (Marstrand).** *Sejam  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $F \subseteq \mathbb{R}^m$ . Então*

$$\dim(E \times F) \geq \dim(E) + \dim(F).$$

*Demonstração.* Veja [9] pág 101. □

Agora, do Teorema 4.1.6 sabemos que para qualquer subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^d$  temos que  $\dim E \leq d$ . Assim, para estimar a dimensão de Hausdorff de um conjunto de  $\mathbb{R}^d$  é suficiente estimar o limitante inferior. Para nosso caso, Considere  $G = F \times B$  onde  $F$  é conjunto de Kakeya de  $\mathbb{R}^2$  e  $B \subset \mathbb{R}^{d-2}$  é uma bola centrada no origem de raio  $\frac{1}{2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \dim G &\geq \dim F + \dim B \\ &\geq 2 + d - 2 \end{aligned}$$

Portanto,  $\dim G = d$ .

*Observação.* Na prova anterior, se usou o fato dado por Davies[10], que todo conjunto de Kakeya de  $\mathbb{R}^2$  tem dimensão 2. Vamos mostrar tal resultado com técnicas mais avançadas de análise. Isto, com o propósito de introduzir o leitor no contexto do estudo atual da conjectura.

## 5.1 Função Maximal de Kakeya

A seguir, estudaremos uma versão mais forte da conjectura de Kakeya. Esta, formulada em termos de funções maximais. Veremos que limitações na norma de tais

funções implicaram limitações inferiores na dimensão de Haudorff dos conjuntos de Kakeya. Agora, é natural se perguntar o que são funções maximais? Bom, funções maximais são em essência média de operadores, isto é, elas fazem a média de uma função sobre certa coleção de domínios e logo tomam o maior dessas médias. Os domínios que nos interessam são os tubos finos que formalmente se definem como se segue:

**Definição 5.1.1.** Sejam  $a \in \mathbb{R}^d$ ,  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$  e  $\delta > 0$ , se define o tubo unitário  $T_e^\delta(a)$  na direção de  $e$  centrado em  $a$  como

$$T_e^\delta(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |x - (a + te)| \leq \delta \text{ onde } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\},$$

ou equivalentemente

$$T_e^\delta(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |\langle x - a, e \rangle| \leq \frac{1}{2}, |(x - a)^\perp| \leq \delta \right\}$$

onde  $x^\perp = x - \langle x, e \rangle e$ .

Notemos da definição anterior que

$$|T_e^\delta(a)| = C\delta^{d-1}. \quad (5.1)$$

*Observação.* Usaremos a notação  $|E|$  para referirmos a medida de Lebesgue de  $E$  no espaço correspondente sem notar explicitamente a dimensão.

**Definição 5.1.2. (Função maximal de Kakeya)** Seja  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ , definimos a função maximal de Kakeya  $f_\delta^* : \mathbb{S}^{d-1} \mapsto \mathbb{R}$  da seguinte forma

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f(y)| dy,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os tubos de comprimento igual a 1 na direção  $e$  e de largura  $\delta$  e integrando com respeito a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$ .

Esta definição dada por Bourgain [11] é o princípio para uma reformulação da



conjectura de Kakeya como veremos depois. Por enquanto, vejamos algumas proposições e observações importantes da definição anterior.

1. A exigência  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  é simplesmente para assegurar a boa definição de  $f^*_\delta$ . De fato, estaremos interessados principalmente em funções contidas num espaço menor como são os espaços  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .
2. A função maximal é o supremo de uma média de operadores sobre tubos de uma direção dada, logo em particular não é um operador linear.
3. A localização dos tubos no espaço não é importante pois a operação de integração precisa calcular a média somente na interseção formada pelos tubos e o suporte da  $f$ .

Como adiantamos no começo da seção, a função maximal nos dá uma forma de medir os conjuntos de Kakeya. Para isso, teremos que considerar a função maximal como um operador atuando sobre funções do espaço  $L^p$ , chamemos de  $K_\delta$  onde  $K_\delta(f) = f^*_\delta$ . O estudo está focado em limitar a norma do operador de Kakeya  $K_\delta$  por alguma quantidade que dependerá do tamanho do espaço  $d$ , o tamanho dos tubos para os quais fazemos média sobre  $\delta$  e o valor de  $p$ . De fato, quando consideramos o operador  $K_\delta$  aplicado a funções do espaço  $L^p(\mathbb{R}^d)$  e queremos estimar a norma de  $f^*_\delta$  em  $L^q(\mathbb{S}^{d-1})$ , entende-se que desejamos algo assim

$$\|f^*_\delta\|_{L^q(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \mathbf{C}_\delta(d, p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{C}_\delta(d, p)$  é uma constante que depende somente de  $d$  e  $p$  para um  $\delta$  fixo. Mas, é natural se perguntar para que valores de  $p$  é prudente fazer alguma estimativa.

As proposições seguintes nos colocam no caminho correto para estimar a norma do operador de Kakeya. Notações empregadas a seguir são:  $A \lesssim B$  a qual significa (e se lê  $A$  é comparável com  $B$ ), que existe uma constante  $C$  tal que  $A \leq CB$ .  $A \sim B$  significa que  $X \lesssim Y \lesssim X$ . A dependência de parâmetros pode ser expressa em subíndices, isto é,  $X \lesssim_k Y$  o que é equivalente a dizer  $X \leq C_k Y$ . Esta notação é muito importante pois às vezes não é necessário enfatizar nas constantes; usualmente só precisaremos saber que tais constantes não dependem das variáveis que são o objeto de comparação.

**Proposição 5.1.3.** *O operador de Kakeya  $K_\delta$  é um operador sublinear limitado que mapeia  $L^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$  e  $L^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ , isto é:*

(a) *Limitação do tipo  $(\infty, \infty)$*

$$\|f_\delta^*\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

(b) *Limitação do tipo  $(1, \infty)$*

$$\|f_\delta^*\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} \lesssim \frac{1}{\delta^{d-1}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

*Demonstração.* Pela definição é claro que  $K_\delta$  é sublinear. Para a parte (a), notemos que

$$|f_\delta^*(e)| = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f(y)| dy \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty,$$

assim, tomando supremo sobre os  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$  se obtém a desigualdade. Para (b), observe que

$$\begin{aligned} |f_\delta^*(e)| &= \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy = \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \|f\|_1 \\ &\stackrel{(5.1)}{=} C \frac{1}{\delta^{d-1}} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|f_\delta^*\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} \lesssim \frac{1}{\delta^{d-1}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Além dos casos onde  $p = \infty$  e  $p = 1$ , podemos nos perguntar se a família de operadores (pois existe um operador para cada  $\delta$ ) está limitada de  $L^p(\mathbb{R}^d)$  a  $L^q(\mathbb{S}^{d-1})$  uniformemente em  $\delta$ . Como uma forma de simplificar o problema, aplicamos o operador sobre funções particulares com o fim de ver quais limitantes são ótimos para se conjecturar.

**Proposição 5.1.4.** Para qualquer  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $n \geq 2$  e  $p < \infty$ , não existe estimativa da forma

$$\|f_\delta^*\|_q \leq C \|f\|_p \quad \forall \delta > 0 \text{ e } \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d). \quad (5.3)$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $\delta$ .

*Demonstração.* Do Capítulo 2, sabemos que existe um conjunto de Kakeya  $K \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $|K| = 0$ . Seja  $E^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, K) < \delta\}$  e defina  $f = \mathcal{X}_{E^\delta}$  ( $\mathcal{X}_{E^\delta}$  é a função característica definida sobre  $E^\delta$ ). É claro que  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Então

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f(y)| dy = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} |T_e^\delta(a) \cap E^\delta|.$$

Agora, dado que para todo  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$  existe  $a \in \mathbb{R}^d$  tal que  $L = \{a + te : t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\} \subset K$  e como  $T_e^\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, L) < \delta\}$  temos que  $T_e^\delta(a) \subset E^\delta$ . Logo

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} |T_e^\delta(a) \cap E^\delta| \geq 1,$$

para todo  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Por outro lado, da Proposição 5.1.3 temos

$$|f_\delta^*(e)| \leq \|f_\delta^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty = \|\mathcal{X}_{E^\delta}\|_\infty = 1,$$

assim, obtemos que  $f_\delta^*(e) = 1$  para todo  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Portanto,  $\|f_\delta^*\|_q = |\mathbb{S}^{d-1}| \sim_d 1$  para todo  $\delta > 0$ . Também note que

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{X}_{E^\delta}(y)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = |E^\delta|^{\frac{1}{p}}.$$

Suponha que a desigualdade (5.3) seja verdadeira então teríamos que

$$1 \lesssim C |E^\delta|^{\frac{1}{p}},$$

e como  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f\|_p = \lim_{\delta \rightarrow 0} |E^\delta|^{\frac{1}{p}} = |K|^{\frac{1}{p}} = 0$  com  $p < \infty$ . Assim, a equação (5.3) não seria possível.  $\square$

De forma que a desigualdade (5.2) seja possível é necessário que  $C_\delta(d, p) \rightarrow \infty$  quando  $\delta \rightarrow 0$  como sugere a proposição anterior. Em outras palavras, devemos considerar o caso  $p = q$  e ver se é possível mostrar uma limitação do tipo  $\delta^{-\varepsilon}$  uniformemente em  $\delta$ , isto é:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon : \|f_\delta^*\|_p \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p. \quad (5.4)$$

Não obstante, a limitação anterior também não é possível para um valor de  $p$  em particular. Considere a função  $f = \mathcal{X}_{B(0, \delta)}$ . Como para  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$  o tubo  $T_e^\delta(0)$  contém  $B(0, \delta)$  temos que

$$f_\delta^*(e) = \frac{|B(0, \delta)|}{|T_e^\delta(0)|} \sim_n \delta,$$

e assim,

$$\|f_\delta^*\|_p \sim_n \delta.$$

Por outro lado,

$$\|f\|_p \sim_n \delta^{\frac{n}{p}}.$$

Portanto, a desigualdade (5.4) precisa que para todo  $\varepsilon > 0$

$$\delta \lesssim_\varepsilon \delta^{\frac{n}{p} - \varepsilon},$$

e todo  $\delta > 0$ , o que não é possível se  $p < n$ . Mas precisamente, notemos que  $\delta \lesssim_\varepsilon \delta^{\frac{n}{p} - \varepsilon}$  implica que  $\delta^{1 - (\frac{n}{p} - \varepsilon)} \leq C_\varepsilon$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $p < p(\varepsilon) = \frac{p}{\varepsilon + 1}$  y fazendo  $\delta \rightarrow 0$  obtemos que  $C_\varepsilon = \infty$ .

Sabemos que a função  $f_\delta^*$  tem como domínio um conjunto compacto. Mas quando é visto como um operador ele toma funções com domínio  $\mathbb{R}^d$  e as mapeia em funções com domínio em  $\mathbb{S}^{d-1}$ . A seguir, veremos que o comportamento do operador de Kakeya está determinado pelo modo de atuar em funções definidas localmente. De fato, a seguinte proposição mostra que a equação (5.2) é um problema local.

**Proposição 5.1.5.** *Sejam  $p \geq n$  e  $B(0, 1)$  a bola  $d$ -dimensional centrada na origem e raio 1. Se (5.2) é verdadeira para toda  $f \in L^p$  com suporte contido em*

$B(0,1)$ , então (5.2) é verdadeira para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  com  $\mathbf{C}_\delta(p,d)$  substituída por  $C_0\mathbf{C}_\delta(p,d)$  para alguma constante  $C_0$ .

O seguinte lema será importante no sentido de simplificar a prova da proposição.

**Lema 5.1.6.** *Sejam  $p \geq n$  e  $C$  uma constante. Se (5.2) é verdadeira para toda  $f \in L^p$  com suporte contido em  $B(0,1)$ , então (5.2) é verdadeira para toda  $f \in L^p$  com suporte contido em  $B(a,C)$  para todo  $a \in \mathbb{R}^d$  e  $\mathbf{C}_\delta(p,d)$  substituída por  $C_1\mathbf{C}_\delta(p,d)$  para alguma constante  $C_1$ .*

*Demonstração.* Seja  $f \in L^p$ ,  $a \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\text{supp}(f) \subset B(a,C)$ . Por definição

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} f(y) dy.$$

Se fazemos a substituição  $Cx + a = y$ ,  $y \in \text{supp}(f)$  na integral e definimos  $f_U(x) = f(Cx + a)$  temos que  $\text{supp}(f_U) \subset B(0,1)$  (★) e também

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{C}{|T_e^\delta(a)|} \int_{\frac{1}{C}(T_e^\delta(a)-a)} f_U(x) dx.$$

Agora, é claro que o tubo  $\frac{1}{C}(T_e^\delta(a)-a)$  está contido no tubo  $(T_e^\delta(a) - \frac{a}{C})$ . Assim

$$\begin{aligned} f_\delta^*(e) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{C}{|T_e^\delta(a)|} \int_{\frac{1}{C}(T_e^\delta(a)-a)} f_U(x) dx \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{C}{|T_e^\delta(a)|} \int_{(T_e^\delta(a) - \frac{a}{C})} f_U(x) dx \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{C}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} f_U(x) dx \\ &\sim (f_U)_\delta^*(e). \end{aligned}$$

Logo,  $\|f_\delta^*\|_p \lesssim \|(f_U)_\delta^*\|_p$ . Portanto, de (★) e a hipótese da proposição temos

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*\|_p &\lesssim \|(f_U)_\delta^*\|_p \\ &\leq \mathbf{C}_\delta(d,p) \|f_U\|_p \\ &\sim \mathbf{C}_\delta(d,p) \|f\|_p \end{aligned}$$

pois  $\|f_U\|_p \sim \|f\|_p$ . □

*Demonstração da Proposição 5.1.5.* Tome  $\mathbb{R}^d = \bigcup_{\tilde{m}} Q_{\tilde{m}}$ , onde  $Q_{\tilde{m}} = \prod_{j=1}^d [m_j, m_j + 1]$  e  $\tilde{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$ . Seja  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  arbitrária e defina  $f_{\tilde{m}}(x) = f(x) \chi_{Q_{\tilde{m}}}(x)$  tal que

$$f(x) = \sum_{\tilde{m}} f_{\tilde{m}}(x) \quad q.s. \quad (5.5)$$

A medida usada é a medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^d$ . É importante também falar o porquê da igualdade em (5.5) não representar ambiguidades. É claro que ela é verdadeira em toda parte no interior de algum  $Q_{\tilde{m}}$ . Mas o lado direito de (5.5), é um múltiplo constante de  $f(x)$ , o qual só depende da dimensão  $d$  sempre e quando  $x$  estiver na fronteira de algum  $Q_{\tilde{m}}$  (ou na interseção de número finito de cubos). Fixe  $p \geq n$  e suponha (5.2) verdadeira para toda  $f \in L^p$  com suporte  $\text{supp}(f) \subset B(0, 1)$ . Fixe  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Notemos pela definição de  $f_{\delta}^*$  (definição de supremo) existe  $T_e^{\delta}(a)$  tal que

$$f_{\delta}^*(e) \leq \frac{2}{|T_e^{\delta}(a)|} \int_{T_e^{\delta}(a)} f(x) dx \stackrel{(5.5)}{=} \frac{2}{|T_e^{\delta}(a)|} \int_{T_e^{\delta}(a)} \sum_{\tilde{m}} f_{\tilde{m}}(x) dx \quad (5.6)$$

Agora, como  $T_e^{\delta}(a) \subset \mathbb{R}^d$ , deve existir  $\tilde{m}_0 \in \mathbb{Z}^d$  tal que  $T_e^{\delta}(a) \cap Q_{\tilde{m}_0} \neq \emptyset$ . E pelo fato de  $T_e^{\delta}(a)$  ter comprimento igual a 1, observe que  $T_e^{\delta}(a) \cap Q_{\tilde{m}} = \emptyset$  para todo cubo que não esteja adjacente a  $Q_{\tilde{m}_0}$ . Em símbolos

$$T_e^{\delta}(a) \cap Q_{\tilde{m}} \neq \emptyset, \forall \tilde{m} \in \mathbb{Z}^d \text{ tal que } Q_{\tilde{m}_0} \cap Q_{\tilde{m}} \neq \emptyset. \quad (5.7)$$

Como vimos na equação (5.5), só existe um número finito de múltíndices  $\tilde{m}$  que satisfazem a relação (5.7) para um  $\tilde{m}_0$  fixo e este dependendo só da dimensão  $d$ . Assim, estudamos o operador examinando um número finito de  $f_{\tilde{m}}(x)$ . Logo (5.6) é igual a

$$\frac{1}{|T_e^{\delta}(a)|} \int_{T_e^{\delta}(a)} \sum_{\tilde{m}}^* f_{\tilde{m}}(x) dx \leq \sum_{\tilde{m}}^* (f_{\tilde{m}})_{\delta}^*(e).$$

Onde  $\sum_{\tilde{m}}^*$  denota uma soma finita de índices  $\tilde{m}$  que satisfazem (5.7). Aplicando a

desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{m}}^* (f_{\tilde{m}})_\delta^*(e) &\leq \left( \sum_{\tilde{m}}^* 1^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \sum_{\tilde{m}}^* |(f_{\tilde{m}})_\delta^*(e)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim_d \left\| (f_{\tilde{m}})_\delta^*(e) \right\|_{L^p(\mathbb{Z}^d)}. \end{aligned}$$

Onde  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ . Notemos que a condição (5.7) desapareceu. Assim, a desigualdade anterior junto com (5.6) nos dá

$$f_\delta^*(e) \lesssim_d \left\| (f_{\tilde{m}})_\delta^*(e) \right\|_{L^p(\mathbb{Z}^d)},$$

tomando em ambos lados da desigualdade a norma em  $L^p$  e elevando à  $p$  potência obtemos

$$\begin{aligned} \left\| f_\delta^* \right\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}^p &\lesssim_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{\tilde{m}} |(f_{\tilde{m}})_\delta^*(e)|^p de \\ &\lesssim_d \sum_{\tilde{m}} \left\| (f_{\tilde{m}})_\delta^* \right\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}^p. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Só resta usar a hipótese da proposição às  $f_{\tilde{m}}$  mas isto não é possível pois o suporte delas não está contido na bola unitária. Para remediar esta dificuldade notemos que se fixarmos qualquer  $\tilde{m}$ ,  $f_{\tilde{m}}$  tem suporte em  $Q_{\tilde{m}}$  e  $Q_{\tilde{m}} \subset B(a, K)$  para algum  $a \in \mathbb{R}^d$  e alguma constante  $K$ . Mais especificamente, devemos tomar  $K$  de forma que a  $d$ -bola contenha o  $d$ -cubo unitário, isto se consegue fazendo  $K > \sqrt{d}$ . Agora, aplicando o Lema 5.1.6 obtemos

$$\sum_{\tilde{m}} \left\| (f_{\tilde{m}})_\delta^* \right\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}^p \lesssim \sum_{\tilde{m}} \mathbf{C}_\delta(d, p)^p \left\| (f_{\tilde{m}}) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p = \mathbf{C}_\delta(d, p)^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p.$$

Combinando isto com (5.8) prova-se a proposição.

□

**Conjectura 5.1.7. (Conjectura da função maximal de Kakeya)** Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $C_\varepsilon$  tal que

$$\left\| f_\delta^* \right\|_d \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_d$$

para toda  $f \in L^d(\mathbb{R}^d)$  e todo  $\delta > 0$ .

Como adiantamos, a Conjectura 5.1.7 implica a Conjectura 5.0.14. O Teorema 5.1.9 estabelece tal afirmação. Mas antes, mostraremos um lema geométrico que simplifica a demonstração do teorema mencionado e que fala sobre a interseção de bolas e tubos.

**Lema 5.1.8.** *Sejam  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$  e  $L_e$  um segmento de linha de comprimento igual a 1 na direção de  $e$ , centrado em  $a \in \mathbb{R}^d$ . Considere um conjunto finito de bolas  $B_j = B(x_j, r_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$  tal que  $2^{-k} \leq r_j \leq 2^{-(k-1)}$ . Então,*

$$\left| L_e \cap \left( \bigcup_j B_j \right) \right| \geq \alpha \Rightarrow \left| T_e^{2^{-k}}(a) \cap \left( \bigcup_j B(x_j, 2r_j) \right) \right| \geq \alpha \left| T_e^{2^{-k}}(a) \right|.$$

*Demonstração.* Consideremos o caso de uma só bola,  $B$  com centro  $x$  e raio  $2^{-k} \leq r \leq 2^{-(k-1)}$  tal que

$$|B \cap L_e| \geq \alpha. \quad (5.9)$$

Seja  $Z$  conjunto formado por todos os pontos do tubo  $T_e^{2^{-k}}$  tais que projetados ortogonalmente sobre  $L_e$  estão em  $L_e \cap B$  (região cinza).

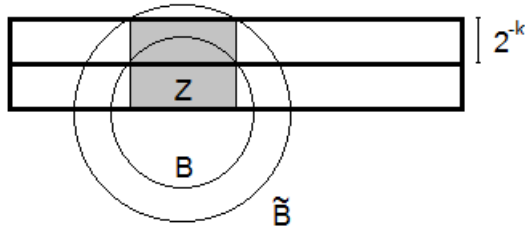


Figura 5.1: Descrição do Lema 5.1.8

Sejam  $y \in Z$  e  $\tilde{y}$  o ponto resultante de projetar ortogonalmente  $y$  sobre  $L_e$ . Daí que

$$\begin{aligned} |y - x| &\leq |y - \tilde{y}| + |\tilde{y} - x| \\ &\leq 2^{-k} + r \leq r + r = 2r. \end{aligned}$$



Então a bola  $B(x, 2r)$  contém a região  $Z$ , logo  $Z \subset T_e^{2^{-k}} \cap B(x, 2r)$ . Portanto

$$\left| T_e^{2^{-k}} \cap B(x, 2r) \right| \geq |Z| = 2 \cdot 2^{-k} |B \cap L_e| \stackrel{(5.9)}{\geq} 2 \cdot 2^{-k} \alpha = \left| T_e^{2^{-k}} \right| \alpha.$$

Agora, suponha que existem  $B_1, \dots, B_m$  bolas tais que

$$|B_i \cap L_e| \geq \alpha_i.$$

Denotemos  $\tilde{B}_i = B(x_i, 2r_i)$ . Definimos como no caso passado os conjuntos  $Z_i \subset T_e^{2^{-k}}$  para cada  $i$ . Por hipótese do lema temos

$$\left| L_e \cap \left( \bigcup_i B_i(x_i, r_i) \right) \right| \geq \alpha.$$

Podemos deduzir apartir da figura 5.1 que

$$\left| T_e^{2^{-k}} \cap \left( \bigcup_i Z_i \right) \right| \geq \alpha \left| T_e^{2^{-k}} \right|. \quad (5.10)$$

Por outro lado, do primeiro caso temos que

$$\left( T_e^{2^{-k}} \cap Z_i \right) \subseteq T_e^{2^{-k}} \cap \tilde{B}_i,$$

e assim

$$\left| T_e^{2^{-k}} \cap \left( \bigcup_i \tilde{B}_i \right) \right| \geq \left| T_e^{2^{-k}} \cap \left( \bigcup_i Z_i \right) \right|,$$

finalmente de (5.10),

$$\left| T_e^{2^{-k}} \cap \left( \bigcup_i \tilde{B}_i \right) \right| \geq \alpha \left| T_e^{2^{-k}} \right|.$$

□

**Teorema 5.1.9.** *Se é verdadeira a estimativa*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon : \|f_\delta^*\|_p \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p$$

Para  $p < \infty$  então os conjuntos de Kakeya de  $\mathbb{R}^d$  tem dimensão inteira.

*Demonstração.* Seja  $K$  conjunto de Kakeya de  $\mathbb{R}^d$ . Pela definição de dimensão de Haudorff, devemos provar que para todo  $\alpha < d$  se satisfaz que  $H_\alpha(K) > 0$ . Lembre-se que  $H_\alpha^\delta(K) \leq H_\alpha(K)$  para todo  $\delta > 0$ . Assim, é suficiente provar que  $H_\alpha^\delta(K) > 0$  para todo  $\delta > 0$ .

Fixe  $\alpha < d$ . Para cada  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$  sabemos que existe um segmento de linha de comprimento igual a 1 em direção de  $e$  contido em  $K$ ; denote-se por  $L_e$  e seja  $a_e$  seu ponto médio. Fixe também uma cobertura de  $K$  por bolas  $B(x_j, r_j)$  com  $r_j \leq 1$ . Defina para cada  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$J_m = \left\{ j : 2^{-m} \leq r_j \leq 2^{-(m-1)} \right\}.$$

Podemos assumir que  $J_m$  é finito para todo  $m$  pois de outra forma teríamos para algum  $z$  que

$$\sum_j r_j^\alpha \geq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j \in J_m} (2^{-m})^\alpha \geq \#(J_z) (2^{-m})^\alpha = \infty,$$

ou seja,  $H_\delta^\alpha(K) = \infty$  para  $\delta \geq 2^{-(m-2)}$  (absurdo). Defina

$$S_m = \left\{ e \in \mathbb{S}^{d-1} : \left| L_e \cap \left( \bigcup_{j \in J_m} B_j \right) \right| \geq \frac{c}{m^2} \right\},$$

onde  $c < \frac{6}{\pi^2}$ . Afirmamos que  $\mathbb{S}^{d-1} = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ . Para provar isto, suponha que existe  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$  e  $e \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ . Logo, é verdade que  $|L_e \cap (\bigcup B_j)| < \frac{c}{m^2}$  para todo  $m$  e assim

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| L_e \cap \left( \bigcup_{j \in J_m} B_j \right) \right| \leq c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < 1,$$

mas por outro lado,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| L_e \cap \left( \bigcup_{j \in J_m} B_j \right) \right| \geq \left| \bigcup_{m=1}^{\infty} \left( L_e \cap \left( \bigcup_{j \in J_m} B_j \right) \right) \right| = \left| L_e \cap \left( \bigcup_j B_j \right) \right| = |L_e| = 1.$$

Agora, defina  $F_m = \bigcup_{j \in J_m} B(x_j, 2r_j)$  e seja  $f = \mathcal{X}_{F_m}$ . Se  $e \in S_m$  temos pelo Lema

5.1.8

$$\left| T_e^{2^{-m}}(a_e) \cap F_m \right| \geq \frac{c}{m^2} \left| T_e^{2^{-m}}(a_e) \right|. \quad (5.11)$$

A seguir estimamos a norma  $L^p$  de  $f_{2^{-m}}^*$ . Para isso notemos primeiro que

$$\begin{aligned} f_{2^{-m}}^*(e) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^{2^{-m}}(a)|} \int_{T_e^{2^{-m}}(a)} f(y) dy \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^{2^{-m}}(a)|} \left| T_e^{2^{-m}}(a) \cap F_m \right| \\ &\geq \frac{1}{|T_e^{2^{-m}}(a_e)|} \left| T_e^{2^{-m}}(a_e) \cap F_m \right| \\ &\stackrel{(5.11)}{\geq} \frac{c}{m^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|f_{2^{-m}}^*\|_p \geq \left( \int_{S_m} |f_{2^{-m}}^*(e)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{c}{m^2} \mu(S_m)^{\frac{1}{p}}, \quad (5.12)$$

onde  $\mu$  é a medida de superfícies sobre  $\mathbb{S}^{d-1}$  (veja Apêndice A). Por outro lado, da hipótese do teorema temos que para todo  $\varepsilon > 0$

$$\|f_{2^{-m}}^*\|_p \leq C_\varepsilon (2^{-m})^{-\varepsilon} \|f\|_p \lesssim_d C_\varepsilon 2^{m\varepsilon} \left( \#(J_m) \frac{1}{2^{(k-1)d}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.13)$$

Pois,  $\|f\|_p = |F_m|^{\frac{1}{p}}$  e  $|F_m| \leq \sum_{j \in J_m} |B(x_j, 2r_j)| \lesssim_d \left( \#(J_m) \frac{1}{2^{(k-1)d}} \right)$ . Juntando (5.12) e (5.13) obtemos

$$\mu(S_m) \leq m^{2p} C_\varepsilon^p \#(J_m) 2^{m\varepsilon p - (k-1)d} \lesssim_{\varepsilon, d, p} 2^{-m(d-2p\varepsilon)}. \quad (5.14)$$

Na segunda desigualdade da equação anterior usamos o fato que  $m^{2p} \leq C_{\varepsilon p} 2^{m\varepsilon p}$ .

Agora, como  $\alpha < d$ , tome  $\varepsilon$  de tal forma que  $\alpha < d - 2\varepsilon p$  e note

$$\begin{aligned}
 \sum_j r_j^\alpha &\geq \sum_j r_j^{d-2\varepsilon p} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j \in J_m} r_j^{d-2\varepsilon p} \\
 &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j \in J_m} 2^{-m(d-2\varepsilon p)} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m(d-2\varepsilon p)} \#(J_m) \\
 &\stackrel{(5.14)}{\gtrsim} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(S_m) \geq c_{\varepsilon, d, p} |\mathbb{S}^{d-1}| := c > 0
 \end{aligned}$$

A constante da última desigualdade não depende da cobertura de  $E$ , logo  $H_\alpha^\delta(K) > 0$  para todo  $\delta > 0$ .  $\square$

## 5.2 Conjectura de Kakeya em $\mathbb{R}^2$

Nesta seção provaremos a Conjectura 5.1.7 em  $\mathbb{R}^2$  e com ajuda do Teorema 5.1.9 concluiremos que os conjuntos de Kakeya em  $\mathbb{R}^2$  tem dimensão de Hausdorff 2. O primeiro a tratar e provar a conjectura foi Cordoba[12]. Porém, apresentaremos a prova dada por Bougain[11], a qual expõe técnicas de análise de Fourier. Adotamos tal demonstração pelas conformidades do trabalho. A seguir, introduzimos alguns resultados e propriedades elementares da análise de Fourier que serão de utilidade na prova dos teoremas e lemas centrais da seção.

### 5.2.1 Preliminares

**Definição 5.2.1.** Dada uma função  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  definimos sua transformada de Fourier  $\hat{f}$  como

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

**Proposição 5.2.2.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Então vale*

1.  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ .
2. Se  $h(x) = f(x-a)$  com  $a \in \mathbb{R}$  então  $\hat{h}(\xi) = e^{-2\pi ia\xi} \hat{f}(\xi)$ .
3. Se  $h(x) = f(ax)$  com  $a \in \mathbb{R}$  então  $\hat{h}(\xi) = a^{-d} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$ .
4.  $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$  onde  $f * g$  denota a convolução entre  $f$  e  $g$  definida como

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy.$$

5. Se  $T$  é uma transformação linear inversível então

$$\widehat{f \circ T} = |\det(T)|^{-1} \hat{f} \circ T^{-1}$$

(Se a transformação  $T$  é ortogonal então  $\widehat{f \circ T} = \hat{f} \circ T$ ).

A prova da Proposição 4.2.14 é omitida pois os pontos 1,2,3,4 e 5 são resultados muito bem conhecidos, para isso veja [3].

**Proposição 5.2.3.** *Se  $f$  e  $g$  estão em  $L^2(\mathbb{R}^d)$*

1. (Plancherel)

$$\int f\bar{g} = \int \hat{f}\bar{\hat{g}}.$$

2.  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ .
3.  $\|f * g\|_\infty \leq \|\hat{f}\hat{g}\|_1$ .

*Demonstração.* O ponto 1 é um resultado conhecido nesta teoria e que pode ser encontrado em qualquer texto. Observe que o ponto 2 é consequência imediata do ponto 1. Para 3, considere  $f$  e  $g$  em  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Defina a função  $h(y) = \overline{g(x-y)}$ .

Então

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{h(y)}dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi)}d\xi \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi x\xi}\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \right| \\
&\leq \int |\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)|dy = \|\hat{f}\hat{g}\|_1,
\end{aligned}$$

usamos Plancherel (terceira linha) e ponto 2 da Proposição 4.2.14 (quarta linha).

□

**Definição 5.2.4.** Uma função  $f$  está na classe de Schwartz  $S(\mathbb{R}^d)$  se é infinitamente diferenciável e todas suas derivadas decrescem rápido no infinito, isto é,

$$\left\| x^\alpha D^\beta f(x) \right\|_\infty < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d.$$

**Teorema 5.2.5.** A transformada de Fourier é um isomorfismo linear  $S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$ .

**Teorema 5.2.6.** O operador de Kakeya satisfaz

$$\|K_\delta f\|_2 \leq C \left( \log \left( \frac{1}{\delta} \right) \right)^{1/2} \|f\|_2,$$

para todo  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ .

*Demonstração.* (Bourgain) Podemos supor que  $f$  é uma função não negativa. De fato, afirmamos que se (5.2) é verdadeira para qualquer função não negativa  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  então (5.2) é verdadeira para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Sabemos que  $\|f\|_p =$

$\|f\|_p$  para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e pela definição 5.1.2 temos também que  $\|f_\delta^*\|_p = \|f_\delta^*\|_p$ . Portanto,

$$\|f_\delta^*\|_p = \|f_\delta^*\|_p \leq C_\delta(d, p) \|f\|_p = C_\delta(d, p) \|f\|_p.$$

Na desigualdade da equação anterior usamos a hipótese da afirmação. Voltando à prova do teorema, defina para cada  $0 < \delta < 1$  e  $e \in \mathbb{S}^1$  a função

$$\varphi_\delta^e(x) := \frac{\mathcal{X}_{T_e^\delta(0)}(x)}{\delta}.$$

A função anterior é muito importante pois esta permite definir o operador de Kakeya em termos de uma convolução de funções suaves, o que por sua vez também fornece com ajuda da teoria de Fourier uma melhor análise de tal operador. De fato,

$$\begin{aligned} f_\delta^*(e) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\delta} \int_{T_e^\delta(a)} f(x) dx \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{T_e^\delta(0)}(y) f(y-a) dy \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\varphi_\delta^e * f)(a). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Agora, tomamos uma função  $\phi$  na classe de Schwartz  $S(\mathbb{R})$  tal que  $\hat{\phi}$  tenha suporte compacto contido em  $[-M, M]$  para algum  $M > 0$  e  $\phi(x) \geq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| \leq 1$ . Um exemplo de tal função é a conhecida função de Gauss dada por  $\phi(x) = ce^{-\frac{x^2}{4}}$  onde  $c$  é uma constante. A seguir, defina  $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  como

$$\psi(x_1, x_2) := \frac{1}{\delta} \phi(x_1) \phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right).$$

Seja  $e_1 = (1, 0)$ . Afirmamos que  $\varphi_\delta^{e_1} \leq \psi$ . Para isso, note que se  $x = (x_1, x_2) \notin T_{e_1}^\delta(0)$ , então  $\varphi_\delta^{e_1}(x) = 0 \leq \psi(x)$ . Por outro lado, se  $x \in T_{e_1}^\delta(0)$ , então  $|x_1|, |x_2| \leq 1$  e assim  $\phi(x_1) \geq 1$  e  $\phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \geq 1$ . Logo,

$$\psi(x) = \frac{1}{\delta} \phi(x_1) \phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \geq \frac{1}{\delta} \geq \varphi_\delta^{e_1}(x).$$

Portanto, aplicando a não negatividade de  $f$  e (5.15) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_{\delta}^{e_1}(x) f(x-a) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x) f(x-a) dx \\ f_{\delta}^*(e_1) &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\psi * f)(a). \end{aligned}$$

Seja  $r_e$  a rotação que envia o vetor  $e \in \mathbb{S}^1$  (arbitrário) a  $e_1$ . Defina  $\psi_e = \psi \circ r_e$  e notemos que  $\varphi_{\delta}^e \leq \psi_e$ , isto, pelos mesmos argumentos que foram explicados anteriormente. Assim,

$$f_{\delta}^*(e) \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\psi_e * f)(a) = \|\psi_e * f\|_{\infty}.$$

Segue-se da Propriedade 5.2.3 item 3 que

$$\begin{aligned} f_{\delta}^*(e) &\leq \|\hat{\psi} \hat{f}\|_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)| |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)|^{\frac{1}{2}} (1+|\xi|)^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(\xi)| \frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|^{\frac{1}{2}}}{(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}} d\xi. \end{aligned}$$

Dado que  $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$ , podemos aplicar Cauchy-Schwartz na linha anterior, obtendo assim

$$f_{\delta}^*(e) \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)| (1+|\xi|) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

(I) (II)

Estimemos a integral (II). Da definição de  $\psi$  se deduz

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x_1) \frac{1}{\delta} \phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) e^{-2\pi i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(\delta x_2), \end{aligned}$$



daí que o suporte de  $\psi$  está contido num tubo do tipo  $[-M, M] \times [-\frac{M}{\delta}, \frac{M}{\delta}]$ . Além disso,  $r_e$  é uma transformação ortogonal, segue-se da Propriedade 5.5.2 item 5 que  $\hat{\psi}_e = \hat{\psi} \circ r_e$ . Ou seja,  $\hat{\psi}_e$  e  $\hat{\psi}$  tem o mesmo suporte, isto é, um tubo  $MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0)$  de lados  $2M$  e  $2\frac{M}{\delta}$ . Outra nota importante é o Teorema 5.2.5 que estabelece: se  $\phi \in S(\mathbb{R})$  então  $\hat{\phi} \in S(\mathbb{R})$ . Em particular,  $\|\hat{\phi}\|_{\infty} \leq K < \infty$ . Igualmente para  $\hat{\psi}_e$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi &\leq \int_{MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0)} \frac{K}{1+|\xi|} d\xi \\ &\lesssim \int_{-\frac{M}{\delta}}^{\frac{M}{\delta}} \int_{-M}^M \frac{d\xi}{1+|\xi|}. \end{aligned}$$

Tomando coordenadas polares  $(\xi_1, \xi_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi &\lesssim \int_{-\frac{M}{\delta}}^{\frac{M}{\delta}} \frac{dr}{1+r} \\ &\lesssim \int_0^{\frac{M}{\delta}} \frac{dr}{1+r} = \log\left(1 + \frac{M}{\delta}\right), \end{aligned}$$

como tomamos  $\delta < 1$  temos que  $\log\left(\frac{1}{\delta}\right) > 0$ . Desta forma, podemos afirmar que  $\log\left(1 + \frac{M}{\delta}\right) \lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right)$ . O resultado anterior junto com a equação (5.16) nos da

$$f_{\delta}^*(e) \lesssim \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)| (1+|\xi|) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I})$$

Apliquemos na equação anterior a norma de  $L^2(\mathbb{S}^1)$ , isto é

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*(e)\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 &\lesssim \log \left( \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{S}^1} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)| (1+|\xi|) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) de \right) \\ &= \log \left( \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|) |\hat{f}(\xi)|^2 \left( \int_{\mathbb{S}^1} |\hat{\psi}_e(\xi)| de \right) d\xi \right). \end{aligned} \quad (\Gamma)$$

Estimemos a integral  $(\Gamma)$ . Observe que se  $\int_{\mathbb{S}^1} |\hat{\psi}_e(\xi)| de \lesssim \frac{1}{1+|\xi|}$ , obteríamos pela Propriedade 5.2.3 item 2 a desigualdade desejada. De fato, sabemos que o suporte de  $\hat{\psi}_e(\xi)$  está contido num tubo  $MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0)$ . Seja  $\xi \in \mathbb{R}^2$  fixo. Notemos que se  $|\xi| \leq M$  então

$$|supp(\hat{\psi}_e(\xi))| = \left| \left\{ e \in \mathbb{S}^1 : \xi \in MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0) \right\} \right| = |\mathbb{S}^1| \lesssim \frac{1}{1+|\xi|}.$$

Ao contrário, se  $|\xi| > \frac{M}{\delta}$ , então  $\xi \notin MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0)$  para todo  $e \in \mathbb{S}^1$  e assim obtém-se trivialmente que  $|supp(\hat{\psi}_e(\xi))| \lesssim \frac{1}{1+|\xi|}$ . Seja o caso quando  $M < |\xi| \leq \frac{M}{\delta}$ , então para garantir que  $\xi \in MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0)$  para algum  $e$ , os vetores  $\xi$  e  $e$  devem ser quase ortogonais. Mais precisamente, pela definição dos tubos, temos

$$MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^2 : |\langle \zeta, e \rangle| \leq M, |\langle \zeta, v \rangle| \leq \frac{M}{\delta} \text{ para todo } v \perp e \right\}.$$

Podemos rotacionar nosso sistema de forma que  $\xi$  esteja no primeiro eixo de coordenadas, isto é,  $\xi = (\xi_1, 0)$ . Agora, aplicando a definição anterior do tubo, notemos que

$$\begin{aligned} \left\{ e \in \mathbb{S}^1 : \xi \in MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0) \right\} &= \left\{ e : |\langle \xi, e \rangle| \leq M, |\langle \xi, v \rangle| \leq \frac{M}{\delta} \forall v \perp e \right\} \\ &= \left\{ e : \left| \left\langle \frac{\xi}{|\xi|}, e \right\rangle \right| \leq \frac{M}{|\xi|}, \left| \left\langle \frac{\xi}{|\xi|}, v \right\rangle \right| \leq \frac{M}{\delta|\xi|} \forall v \perp e \right\} \end{aligned}$$

Notemos também que a segunda desigualdade na equação anterior é trivial; de

fato, para todo  $e \in \mathbb{S}^1$  e  $v \perp e$ , tem-se que

$$\left| \left\langle \frac{\xi}{|\xi|}, v \right\rangle \right| \leq \left| \frac{\xi}{|\xi|} \right| |v| = 1 \leq \frac{M}{\delta |\xi|},$$

pois  $|\xi| \leq \frac{M}{\delta}$ . Assim,

$$\left\{ e \in \mathbb{S}^1 : \xi \in MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0) \right\} = \left\{ e : |e_1| \leq \frac{C}{|\xi|} \right\},$$

onde  $e = (e_1, e_2)$ . Isto define um subconjunto de  $\mathbb{S}^1$  o qual descreve uma pequena parte da circunferência que tem como comprimento igual a algo comparável com  $\frac{1}{|\xi|}$ . Assim, tal subconjunto está limitado por  $\frac{1}{|\xi|} \lesssim \frac{1}{|\xi|+1}$  pois  $|\xi| \gtrsim 1$ . Portanto,

$$\left| \left\{ e \in \mathbb{S}^1 : \xi \in MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0) \right\} \right| \lesssim \frac{1}{1+|\xi|},$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2$  fixado. Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\hat{\psi}_e(\xi)| de \lesssim |\text{supp}(\hat{\psi}_e(\xi))| = \left| \left\{ e \in \mathbb{S}^1 : \xi \in MT_e^{\frac{1}{\delta}}(0) \right\} \right| \lesssim \frac{1}{1+|\xi|}.$$

Ou seja,

$$\|f_{\delta}^*(e)\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 \lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)| d\xi = \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \|f\|_2^2,$$

como adiantamos, a última igualdade é devida à Propriedade 5.2.3 item 2.  $\square$

## APÊNDICE A

---

### Teorema de Vitali

---

**Definição A.0.7.** Seja  $E$  um subconjunto de um espaço métrico  $(X, d)$ . Seja  $\Phi$  uma classe de subconjuntos de  $X$  tais que para todo  $\varepsilon > 0$  e  $x \in E$  existe algum  $U \in \Phi$  com  $x \in U$  e  $\text{diam} U < \varepsilon$ . Então a família  $\Phi$  é chamada uma classe de Vitali pra  $E$ .

**Teorema A.0.8. (Cobertura de Vitali)** Sejam  $E \subset X$  e  $\Phi$  uma classe de Vitali para  $E$  consistindo de conjuntos fechados de  $E$ . Então existe uma sequência (finita ou infinita)  $(U_i)$  de elementos disjuntos de  $\Phi$  tais que para cada  $\alpha \geq 0$  temos que:;

$$\sum_i (\text{diam} U_i)^\alpha = \infty \text{ ou } m_\alpha(E - \bigcup_i U_i) = 0.$$

**Definição A.0.9. (Medida de Superfície)** Sejam  $\|\cdot\|$  norma em  $\mathbb{R}^d$  e  $\sigma$  medida dimensional de Lebesgue. Defina

$$\mu(E) = d\sigma((0, 1] \times E),$$

para todo  $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}}$ . Esta medida  $\mu_{d-1} : \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{d-1}} \mapsto [0, \infty]$  é chamada a medida de superfícies sobre  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

## Função de Cantor-Lebesgue

É uma função contínua  $F : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  que é crescente e  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$  mas  $F'(x) = 0$  quase sempre. Ela obtida da seguinte construção:

Considere o conjunto triádico de Cantor  $K \subset [0, 1]$  descrito no Exemplo 4.1.9 e lembrese que

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k,$$

onde cada  $E_k$  é união disjunta de  $2^k$  intervalos fechados. Sejam  $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  e  $F_1(x)$  uma função contínua crescente em  $[0, 1]$  que satisfaz:  $F_1(0) = 0$ ,  $F_1(x) = 1/2$  se  $1/3 \leq x \leq 2/3$ ,  $F_1(1) = 1$  e  $F_1$  é linear em  $E_1$ . Similarmente, seja  $F_2(x)$  contínua e crescente, tal que

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ 1/4 & \text{se } 1/9 \leq x \leq 2/9, \\ 1/2 & \text{se } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 3/4 & \text{se } 7/9 \leq x \leq 8/9, \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

e  $F_2$  é linear em  $E_2$ .

Este proceso produz uma sequência de funções contínuas e crescentes  $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n-1}.$$

Portanto,  $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge uniformemente a uma função contínua  $F$  chamada a função de **Cantor-Lebesgue**. Pela construção,  $F$  é crescente,  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ , e  $F$  é constante em cada intervalo del complemento do conjunto de Cantor.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] A. S. Besicovitch, *Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions*, J. Soc. Phys.-Math. (Perm') 2 (1919), 105-123.
- [2] S. Kakeya, *Some problems on minima and maxima regarding ovals*, Tôhoku Science Reports, 6 (1917), 71-88.
- [3] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton University Press, 2005.
- [4] M. Fujiwara, S. Kakeya, *On some problems of maxima and minima for the curve of constant breadth and the in-revolvable curve of the equilateral triangle*, Tôhoku Mathematical Journal 11 (1917), 92-110.
- [5] J. Pál, *Ein Minimumproblem für Ovale*, Math. Annalen 83, 311–319.
- [6] T. Tao *Lectures notes 1 for 247A*, <http://www.math.ucla.edu/~Tao/247a.1.06f/notes1.dvi>
- [7] Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, Jun Kigami, *Mathematics of Fractals*, American Mathematical Society, Volume 167, 1997.
- [8] J. M. Marstrand, *The dimension of Cartesian product sets*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 50 (1954), 198–202. MR MR0060571 (15,691g).
- [9] K. J. Falconer, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Second edition, John Wiley & Sons Ltd. (2003).
- [10] R.O. Davies, *Some remarks on the Kakeya problem*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 69 (1971), 417–421.

- 
- [11] J. Bourgain, *Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis*, Geometric and Functional Analysis 1 (1991), 147–187.
- [12] Antonio Cordoba, *The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers*, Amer. J. Math. 99 (1977), no. 1, 1–22. MR MR0447949 (56 #6259).
- [13] Thomas Wolff, *Recent work connected with the Kakeya problem*, Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 129–162. MR MR1660476 (2000d:42010).
- [14] W. A. Hurwitz. *New questions*. The American Mathematical Monthly, 27(6):256, 1920.
- [15] Markus Furtner, *The Kakeya problem*. Disponível em: <<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lerdos/Stud/furtner.pdf>>. Acesso setembro de 2015.
- [16] Oliver Barrowclough, *The Kakeya problem*. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/269333847\\_The\\_Kakeya\\_Problem](https://www.researchgate.net/publication/269333847_The_Kakeya_Problem)>. Acesso novembro de 2015.