PRINCÍPIO DA ESTABILIDADE REDUZIDA

DANTE MACHADO E SILVA

José Gaspar Ruas Filho

– Orientador –

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos – USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Matemática.

São Carlos

1993

Abstract

In this work we study the stability properties of equilibria of a particular differential equation bifurcating near the origin. Our main purpose is to analyse the principle of reduced stability. The bifurcation function obtained by applying the Liapunov-Schmidt reduction is used to discuss the qualitative and quantitative behavior of the equilibrium points of the original problem.

Resumo

Nesse trabalho estudamos propriedades de estabilidade dos equilíbrios de uma equação diferencial particular bifurcados numa vizinhança da origem. Nosso objetivo principal é analisar o princípio da estabilidade reduzida. A função de bifurcação obtida aplicando a redução de Liapunov-Schmidt é usada para discutir o comportamento dos pontos de equilíbrio do problema original.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho pela orientação desse trabalho.
- Ao Prof. Dr. Luiz Antônio Favaro e à Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas pelos exemplos inequívocos de que integridade profissional e solidariedade podem caminhar juntas.
- À amiga Profa. Sueli Mieko Tanaka pela constante disposição em colaborar.
- Aos amigos por tornarem menos árduo o cumprimento dessa tarefa.

Esse trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Notações e Definições	4
1.2 Teoremas Fundamentais	6
1.3 Método de Redução de Liapunov-Schmidt	7
2 Resultados Abstratos	11
3 O Princípio da Estabilidade Reduzida	24
Bibliografia	32

Introdução

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{z} = Z(z, \lambda) \quad (0.1)$$

onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, λ é um pequeno parâmetro em um espaço de Banach Λ , $Z = (X, Y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é de classe C^k , com k suficientemente grande, e $Z(0, 0) = 0$. Nossa hipótese principal será que a linearização $L_0 = D_z Z(0, 0)$ na origem tem a forma

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_0 \end{bmatrix}, \quad (0.2)$$

onde $\tilde{L}_0 = D_y Y(0, 0, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é um operador estável, isto é, todos os seus autovalores têm parte real estritamente negativa. Isso implica que $\tilde{L}_0$ é invertível, e que 0 é um autovalor semi-simples de L_0 , com multiplicidade n .

Estaremos interessados nas propriedades de estabilidade dos equilíbrios de (0.1) bifurcados numa vizinhança da origem. Para estudar tais equilíbrios escrevemos a equação $Z(z, \lambda) = 0$ na forma:

$$(a) \quad X(x, y, \lambda) = 0 \quad (b) \quad Y(x, y, \lambda) = 0, \quad (0.3)$$

e aplicamos a redução de Liapunov-Schmidt. Como $\tilde{L}_0 = D_y Y(0, 0, 0)$ é invertível, podemos usar o teorema da função implícita para obter $y = y^*(x, \lambda)$ como solução de (0.3.b), isto é, $Y(x, y^*(x, \lambda), \lambda) = 0$ para $|x|, |\lambda|$ pequenos. Introduzindo as aplicações $z^* : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $F : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por:

$$z^*(x, \lambda) = (x, y^*(x, \lambda)), F(x, \lambda) = X(z^*(x, \lambda), \lambda) \quad (0.4)$$

o problema se reduz à equação de bifurcação

$$F(x, \lambda) = 0. \quad (0.5)$$

Mais precisamente temos o seguinte

Teorema 1. Todos os equilíbrios (z, λ) de (0.1) em uma vizinhança suficientemente pequena da origem pertencem à variedade

$$M_{LS} = \{(z^*(x, \lambda), \lambda) \mid (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda\}. \quad (0.6)$$

Além disso, se (x, λ) é suficientemente pequeno, então $(z^*(x, \lambda), \lambda)$ é um equilíbrio de (0.1) se e somente se (x, λ) é um equilíbrio do sistema reduzido

$$\dot{x} = F(x, \lambda). \quad (0.7)$$

Como o Teorema 1 estabelece uma relação bijetora entre os equilíbrios de (0.1) e os equilíbrios da equação reduzida (0.7), é razoável perguntar se existe alguma relação entre as propriedades de estabilidade de tais equilíbrios correspondentes. Um resultado satisfatório seria o seguinte:

Princípio da Estabilidade Reduzida. Se (x, λ) é um equilíbrio hiperbólico de (0.7) em uma vizinhança suficientemente pequena da origem, então $(z^*(x, \lambda), \lambda)$ é um equilíbrio hiperbólico de (0.1) e as variedades instáveis correspondentes têm a mesma dimensão.

Para o caso de bifurcação em autovalor simples, isto é, quando $n = 1$, o princípio é verdadeiro; isso se segue, entre outros, do trabalho, desenvolvido num contexto mais geral, de Oliveira e Hale [3].

Quando $n \geq 2$ o princípio, em geral, não é válido, como mostra o seguinte contra-exemplo devido a Vegas [4]. Considere o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & \lambda^3 \\ -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda^3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix}, \quad (0.8)$$

que tem a forma (0.1) com $n = 2$, $m = 1$ e $\Lambda = \mathbb{R}$. A origem $(0,0,0)$ é estável para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Como o sistema reduzido correspondente tem

a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^4 & \lambda + \lambda^6 \\ -\lambda + \lambda^2 & \lambda^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (0.9)$$

temos que $(0,0)$ é instável para $\lambda > 0$ pequeno. Concluimos, então, que o princípio da estabilidade reduzida não se verifica ao longo do ramo de solução $\{(0, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Como veremos, a razão para isso acontecer é que os autovalores do operador linear (0.9) têm a forma $\pm\lambda_i + 0(\lambda^2)$, “próximos demais” do eixo imaginário. É possível mostrar que, se tivermos algum controle sobre a distância dos autovalores ao eixo imaginário, a situação acima não ocorrerá.

No artigo [4] são consideradas condições adicionais que implicam a validade do princípio. Contudo, nosso objeto de estudo será a abordagem feita por Vanderbauwhede [1] e que difere consideravelmente da anterior. Provaremos que existe uma relação simples entre a “parte importante” da linearização de (0.1) num equilíbrio, e a linearização de (0.7) no equilíbrio correspondente. Essa relação fornece algumas indicações sobre o domínio de validade do princípio de estabilidade reduzida; dela se poderá também obter a maioria dos resultados posteriores.

No primeiro capítulo apresentamos algumas definições e resultados básicos, tais como o teorema da função implícita, o teorema da aplicação aberta, o teorema da decomposição de um espaço vetorial e o método de redução de Liapunov-Schmidt.

No capítulo 2, provamos alguns resultados acerca de perturbação do espectro de operadores lineares sobre espaços vetoriais de dimensão finita.

Finalmente, no capítulo 3, aplicamos os resultados abstratos obtidos no capítulo anterior ao problema da validade do princípio da estabilidade reduzida.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos as notações, definições e resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores. Algumas demonstrações omitidas podem ser encontradas na bibliografia mencionada.

1.1 Notações e Definições

Sejam X e Y espaços de Banach e $A : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Indicamos por $\mathcal{N}(A)$ e $R(A)$ o núcleo e a imagem de A , respectivamente. O símbolo $\mathcal{L}(X, Y)$ denotará o conjunto das aplicações lineares contínuas de X em Y , munido da norma

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\|; x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Quando $X = Y$, o símbolo usado será $\mathcal{L}(X)$ e para o espectro de A , escreveremos $\sigma(A)$. Estaremos interessados em espectro de operadores em espaços de dimensão finita e, neste caso, $\sigma(A)$ é o conjunto de autovalores de A .

Definição: O *Índice de Riesz* γ de um autovalor λ de A é o menor inteiro γ tal que os sistemas

$$(A - \lambda I)^\gamma x = 0 \quad \text{e} \quad (A - \lambda I)^{\gamma+1} x = 0$$

têm as mesmas soluções.

Definição: Um autovalor λ é *semi-simples* se suas multiplicidades algébrica e geométrica forem iguais. Nesse caso $\gamma = 1$.

Definição: Os subespaços U e S de X são ditos, respectivamente, *subespaços instável e estável* de $A \in \mathcal{L}(X)$ se U é gerado por $v^1, \dots, v^{n-k}$ e S por $v^{n-k+1}, \dots, v^n$, onde $v^1, \dots, v^{n-k}$ são autovetores generalizados associados aos autovalores de A que têm parte real positiva e $v^{n-k+1}, \dots, v^n$ os autovetores generalizados associados aos autovalores que têm parte real negativa.

Dizer que U e S são, respectivamente, subespaços instável e estável de A equivale a dizer que

$$W = U \oplus S,$$

U e S invariantes por A , e

$$\sigma(A/U) = \{\lambda \in \sigma(A); \operatorname{Re} \lambda > 0\}$$

e

$$\sigma(A/S) = \{\lambda \in \sigma(A); \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Definição: $L \in \mathcal{L}(X)$ é um *operador hiperbólico* se o espectro de L é disjunto do eixo imaginário.

Definição: Um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial é um *equilíbrio hiperbólico* se os autovalores da matriz jacobiana correspondente tiverem parte real não nula.

1.2 Teoremas Fundamentais

Teorema da Função Implícita - Sejam X, Y e Z espaços de Banach e $f : A \rightarrow Z$ uma aplicação contínua de um aberto A de $X \times Y$ em Z . Suponha que a derivada parcial de f em relação a y , $D_y f$, seja contínua em A . Se $(x_0, y_0) \in A$ é tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e $D_y f(x_0, y_0)$ é um homeomorfismo linear de Y sobre Z , então existem vizinhanças U de x_0 em X e V de y_0 em Y , e uma aplicação contínua $y^* : U \rightarrow V$ tal que

- (i) $U \times V \subset A$
- (ii) Para cada $(x, y) \in U \times V$, temos $f(x, y) = 0$ se e somente se $y = y^*(x)$.
- (iii) Se f é de classe C^k em A , então y^* também é de classe C^k em U .

Teorema da Aplicação Aberta [5] - Seja f uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach X sobre um espaço de Banach Y ; para todo conjunto aberto $U \subset X$, $f(U)$ é aberto em Y .

Corolário: Seja f uma aplicação linear biunívoca e contínua de um espaço de Banach X sobre um espaço de Banach Y ; então f é um homeomorfismo.

Teorema da Decomposição de um Espaço Vetorial [6] - Seja $f(t)$ um polinômio, e suponhamos que $f = f_1 f_2$, onde f_1 e f_2 são polinômios de grau ≥ 1 , tendo máximo divisor comum igual a 1. Seja $A : V \rightarrow V$ um operador do espaço vetorial V sobre o corpo K , e suponhamos que $f(A) = 0$. Escrevemos $W_1 =$ núcleo de $f_1(A)$ e $W_2 =$ núcleo de $f_2(A)$. Nessas condições, V é a soma direta de W_1 e W_2 , subespaços de V invariantes por A .

1.3 Método de Redução de Liapunov-Schmidt

Nesta seção descrevemos, sob hipóteses bem gerais, o método de Liapunov-Schmidt. A nossa referência principal é Vanderbauwhede [2].

Sejam X, Z e Λ espaços de Banach, Ω uma vizinhança aberta da origem em X , e ω uma vizinhança aberta da origem em Λ . Seja $M : \Omega \times \omega \subset X \times \Lambda \rightarrow Z$ uma aplicação de classe C^1 , tal que $M(0, 0) = 0$. Queremos estudar o conjunto solução da equação.

$$M(x, \lambda) = 0. \quad (1.1)$$

Defina:

$$L = D_x M(0, 0)$$

Se L é um isomorfismo, então é consequência imediata do teorema da função implícita que numa vizinhança de $(0, 0)$ em $X \times \Lambda$ a equação (1.1) terá um único ramo de soluções da forma $\{(x^*(\lambda), \lambda); \lambda \in \text{uma vizinhança da origem em } \Lambda\}$. Isso implica que $\lambda = 0$ não é ponto de bifurcação em $x=0$. Por essa razão vamos restringir nossa atenção ao caso em que L não é um isomorfismo.

Vamos, de fato, requerer mais de L . Nossa hipótese básica será:

(H_1) $R(L)$ é fechado, e $\mathcal{N}(L)$ e $R(L)$ possuem suplementos topológicos, respectivamente, em X e Z , isto é, existem subespaços M e N tais que:

$$X = M \oplus \mathcal{N}(L) \quad \text{e} \quad Z = N \oplus R(L)$$

e

$$\begin{array}{ll} M \times \mathcal{N}(L) & \rightarrow X \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 + x_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} N \times R(L) & \rightarrow Z \\ (z_1, z_2) & \mapsto z_1 + z_2 \end{array}$$

são homeomorfismos.

1.3.1 - Teorema [7]: Um subespaço fechado M de um espaço de Banach X tem um suplemento topológico se e somente se existe uma projeção $P \in \mathcal{L}(X)$ tal que $M = R(P)$. Então $X = M \oplus N$, onde $N = \mathcal{N}(P)$.

1.3.2 - Teorema [7]: Seja M um subespaço fechado do espaço de Banach X . Se M tem codimensão finita, então M tem um suplemento topológico em X .

Definição: Sejam X e Z espaços de Banach, e $L \in \mathcal{L}(X, Z)$. Então L é um *operador de Fredholm* quando

- (i) $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$.
- (ii) $R(L)$ é fechado.
- (iii) $\text{codim} R(L) < \infty$.

Um caso, particularmente interessante, em que (H_1) é satisfeita é o caso em que:

$$(H'_1) \quad L \text{ é um operador de Fredholm.}$$

Não apenas (H'_1) implica (H_1) , mas (H'_1) tem uma importante vantagem sobre a hipótese geral (H_1) : sob a hipótese (H'_1) o resultado da redução de Liapunov-Schmidt será um número finito de equações escalares com um número finito de incógnitas, e dependendo do parâmetro λ .

1.3.3 - Lema: Assuma (H_1) . Então existem projeções contínuas $P \in \mathcal{L}(X)$ e $Q \in \mathcal{L}(Z)$ tais que

$$R(P) = \mathcal{N}(L), \quad \mathcal{N}(Q) = R(L)$$

e a restrição de L a $\mathcal{N}(P)$ possui inversa contínua

$$K : R(L) \rightarrow \mathcal{N}(P)$$

Prova: A existência das projeções P e Q segue dos teoremas 1.3.1 e 1.3.2. A restrição de L a $\mathcal{N}(P)$ é uma bijeção linear contínua entre espaços de Banach. Logo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, possui inversa contínua $K : R(L) \rightarrow \mathcal{N}(P)$. $\square$

Podemos escrever $x \in \Omega$ na forma $x = u + v$, onde $u = Px \in \mathcal{N}(L) = X_P$ e $v = (I - P)x \in \mathcal{N}(P) = X_{I-P}$ (em geral, se $P \in \mathcal{L}(X)$ é uma projeção, escrevemos X_P no lugar da imagem $R(P)$ de P). Então podemos reescrever $M(x, \lambda) = 0$ na forma:

$$\begin{cases} (I - Q)M(u + v, \lambda) = 0 \\ QM(u + v, \lambda) = 0 \end{cases}$$

1.3.4 - Lema: Assuma (H_1) . Então existirão U, V, ω_0 vizinhanças da origem, em X_P, X_{I-P}, Λ , respectivamente, e uma aplicação continuamente diferenciável $v^* : U \times \omega_0 \rightarrow V$ tal que:

- (i) Para cada $(u, v, \lambda) \in U \times V \times \omega_0$, $(I - Q)M(u + v, \lambda) = 0$ está satisfeita se e somente $v = v^*(u, \lambda)$
- (ii) $v^*(0, 0) = 0$
- (iii) $D_u v^*(0, 0) = 0$

Prova: A aplicação $\Psi : X_P \times X_{I-P} \times \Lambda \rightarrow R(L)$, definida numa vizinhança da origem por

$$\Psi(u, v, \lambda) = (I - Q)M(u + v, \lambda)$$

é continuamente diferenciável, $\Psi(0, 0, 0) = 0$ e $D_v \Psi(0, 0, 0) = L|_{\mathcal{N}(P)}$ é, pelo lema 1.3.3, um isomorfismo entre $\mathcal{N}(P)$ e $R(L)$. Então o resultado segue do teorema da função implícita. $\square$

O resultado do lema anterior nos permite definir as aplicações de classe C^1 :

$$\begin{aligned} x^* : U \times \omega_0 &\rightarrow \Omega \\ (u, \lambda) &\mapsto u + v^*(u, \lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F : U \times \omega_0 &\rightarrow R(Q) \\ (u, \lambda) &\mapsto QM(u + v^*(u, \lambda), \lambda) = M(u + v^*(u, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

Então:

$$x^*(0, 0) = 0, \quad D_u x^*(0, 0) = I_{\mathcal{N}(L)}$$

e

$$F(0, 0) = 0, \quad D_u F(0, 0) = 0.$$

O teorema seguinte resume o resultado principal de redução de Liapunov-Schmidt.

1.3.5 - Teorema: Assuma (H_1) . Sejam U, V e ω_0 vizinhanças dadas pelo Lema 1.3.4. Sejam x^* e F as aplicações definidas acima. Então, para todo $u \in U$, $x \in U \times V \subset X$ e $\lambda \in \omega_0$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $Px = u$ e $M(x, \lambda) = 0$;
- (ii) $x = x^*(u, \lambda)$ e $F(u, \lambda) = 0$.

Conclusão: O Teorema 1.3.5 nos dá uma relação entre o conjunto solução de $M(x, \lambda) = 0$ e o conjunto solução de $F(u, \lambda) = 0$, ambos restritos a vizinhanças apropriadas da origem. Como $u \in \mathcal{N}(L)$ e $F(u, \lambda) \in R(Q)$, isso é uma redução considerável, tanto no domínio quanto na imagem de operadores não lineares. No caso de (H'_1) estar satisfeita, $F(u, \lambda) = 0$ é um problema de dimensão finita: para cada $\lambda \in \omega_0$, $F(u, \lambda) = 0$ é equivalente a m equações escalares com n incógnitas escalares, onde $n = \dim \mathcal{N}(L)$ e $m = \text{codim} R(L)$.

Capítulo 2

Resultados Abstratos

Seja W um espaço vetorial (real ou complexo) de dimensão finita, e sejam U e V subespaços tais que $W = U \oplus V$. A essa decomposição de W associamos as projeções canônicas $P_1 : W \rightarrow U$ e $P_2 : W \rightarrow V$; ainda denotamos por $J_1 : U \rightarrow W$ e $J_2 : V \rightarrow W$ as imersões canônicas.

Para cada $L \in \mathcal{L}(W)$ seja

$$L_{ij} = P_i L J_j \quad (i, j = 1, 2); \quad (2.1)$$

logo L pode ser representado pela matriz bloco $(L_{ij})_{i,j=1,2}$.

Para cada $A \in \mathcal{L}(U, V)$, seja $\Delta(A) \in \mathcal{L}(W)$ dada por

$$\Delta(A) = I_W + J_2 A P_1; \quad (2.2)$$

como $P_1 = \begin{bmatrix} I_U & 0 \end{bmatrix}$ e $J_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_V \end{bmatrix}$, $\Delta(A)$ tem a forma de bloco triangular $\Delta(A) = \begin{bmatrix} I_U & 0 \\ A & I_V \end{bmatrix}$.

Analogamente, para cada $B \in \mathcal{L}(V, U)$ definimos $\tilde{\Delta}(B)$ por

$$\tilde{\Delta}(B) = I_W + J_1 B P_2; \quad (2.3)$$

tendo, portanto, $\tilde{\Delta}(B)$ a forma $\hat{\Delta}(B) = \begin{bmatrix} I_U & B \\ 0 & I_V \end{bmatrix}$.

Tanto $\Delta(A)$ quanto $\tilde{\Delta}(B)$ são invertíveis, com $\Delta(A)^{-1} = \Delta(-A)$ e $\tilde{\Delta}(B)^{-1} = \tilde{\Delta}(-B)$.

Seja agora $K \in \mathcal{L}(W)$ tal que $K_{21} = 0$ e $K_{12} = 0$, isto é, K tem a forma de bloco diagonal: $K = \text{diag}(K_{11}, K_{22})$. Nosso primeiro lema afirma que se $K_{11} \in \mathcal{L}(U)$ e $K_{22} \in \mathcal{L}(V)$ têm espectros disjuntos, então podemos colocar cada $L \in \mathcal{L}(W)$, próximo de K , em uma forma diagonal similar, por meio de uma transformação semelhante que usa operadores da forma $\Delta(A)$ e $\tilde{\Delta}(B)$. Para enunciar o lema introduzimos a aplicação $\chi : \mathcal{L}(W) \times \mathcal{L}(U, V) \times \mathcal{L}(V, U) \rightarrow \mathcal{L}(W)$ definida por

$$\chi(L, A, B) = \tilde{\Delta}(-B)\Delta(-A)L\Delta(A)\tilde{\Delta}(B). \quad (2.4)$$

Lema 1: Seja $K \in \mathcal{L}(W)$ tal que $K_{21} = 0, K_{12} = 0$, e $\sigma(K_{11}) \cap \sigma(K_{22}) = \emptyset$. Então existe uma vizinhança Ω de K em $\mathcal{L}(W)$, e aplicações de classe $C^\infty : A^* : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$ e $B^* : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V, U)$, com $A^*(K) = 0$ e $B^*(K) = 0$, tais que, para cada $L \in \Omega$, temos

$$\chi_{21}(L, A^*(L), B^*(L)) = 0 \quad , \quad \chi_{12}(L, A^*(L), B^*(L)) = 0. \quad (2.5)$$

Prova: Como $\chi(L, 0, 0) = L$, temos que $\chi_{21}(K, 0, 0) = K_{21} = 0$ e $\chi_{12}(K, 0, 0) = K_{12} = 0$. Além disso temos, para todo $A \in \mathcal{L}(U, V)$ e $B \in \mathcal{L}(V, U)$, que

$$\begin{aligned} \chi_{21}(K, A, B) &= P_2 \chi(K, A, B) J_1 \\ &= P_2 (I_W - J_1 B P_2) (I_W - J_2 A P_1) K (I_W + J_2 A P_1) (I_W + J_1 B P_2) J_1 \\ &= (P_2 - A P_1) K (J_1 + J_2 A) \\ &= -A K_{11} + K_{22} A \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \chi_{12}(K, A, B) &= (P_1 - B P_2 + B A P_1) K (J_2 + J_1 B + J_2 A B) \\ &= -B K_{22} + K_{11} B + B A K_{11} B - B K_{22} A B. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\chi_{21}(K, A, 0) = -AK_{11} + K_{22}A, \quad \chi_{21}(K, 0, B) = 0$$

e

$$\chi_{12}(K, A, 0) = 0, \quad \chi_{12}(K, 0, B) = -BK_{22} + K_{11}B.$$

Donde

$$D_A\chi_{21}(K, 0, 0).A = -AK_{11} + K_{22}A, \quad D_B\chi_{21}(K, 0, 0).B = 0$$

e

$$D_A\chi_{12}(K, 0, 0).A = 0, \quad D_B\chi_{12}(K, 0, 0).B = -BK_{22} + K_{11}B.$$

Agora, $D_A\chi_{21}(K, 0, 0)$ é uma aplicação linear em $\mathcal{L}(U, V)$, isto é, $D_A\chi_{21}(K, 0, 0) : \mathcal{L}(U, V) \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$; mostraremos que $D_A\chi_{21}(K, 0, 0)$ é um automorfismo, provando que seu núcleo é trivial. Se $D_A\chi_{21}(K, 0, 0).A = 0$, então $K_{22}A = AK_{11}$. Mais que isso: para todo $n \geq 1$

$$K_{22}^n A = AK_{11}^n. \quad (2.6)$$

Vamos mostrar que (2-6) vale, usando indução sobre n . Suponha que $K_{22}^\ell A = AK_{11}^\ell$, com $\ell \geq 1$. Então

$$\begin{aligned} K_{22}^{\ell+1} A &= K_{22}(K_{22}^\ell A) = K_{22}(AK_{11}^\ell) = (K_{22}A)K_{11}^\ell = (AK_{11})K_{11}^\ell \\ &= AK_{11}^{\ell+1}, \text{ como queríamos.} \end{aligned}$$

Se $m_2(s)$ é o polinômio característico de K_{22} , então (2-6) implica que

$$m_2(K_{22})A = Am_2(K_{11}). \quad (2.7)$$

De fato, seja $m_2(s) = (-1)^n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$, com $n \geq 1$; logo

$$\begin{aligned}
m_2(K_{22})A &= [(-1)^n K_{22}^n + a_{n-1} K_{22}^{n-1} + \dots + a_1 K_{22} + a_0 I_V] A \\
&= (-1)^n K_{22}^n A + a_{n-1} K_{22}^{n-1} A + \dots + a_1 K_{22} A + a_0 A \\
&= (-1)^n A K_{11}^n + a_{n-1} A K_{11}^{n-1} + \dots + a_1 A K_{11} + a_0 A \\
&= A [(-1)^n K_{11}^n + a_{n-1} K_{11}^{n-1} + \dots + a_1 K_{11} + a_0 I_U] \\
&= A m_2(K_{11})
\end{aligned}$$

Agora $m_2(K_{22}) = 0$, pois $m_2(s)$ é polinômio característico de K_{22} e $m_2(K_{11}) \in \mathcal{L}(U)$ é invertível, uma vez que os espectros de K_{22} e K_{11} são disjuntos. Explicando melhor; seja $m_2(s) = (\lambda_1 - s) \dots (\lambda_n - s)$, $n \geq 1$. Então $m_2(K_{11}) = (\lambda_1 I_U - K_{11}) \dots (\lambda_n I_U - K_{11})$ e $\det m_2(K_{11}) = \det(\lambda_1 I_U - K_{11}) \dots \det(\lambda_n I_U - K_{11})$. Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ formam o espectro de K_{22} , e os espectros de K_{22} e K_{11} são disjuntos, segue-se que $\det(\lambda_i I - K_{11}) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Portanto $\det m_2(K_{11}) \neq 0$ e $m_2(K_{11})$ é invertível.

Sendo assim, $m_2(K_{22})A = A m_2(K_{11})$ implica que $A = 0$.

Analogamente, mostra-se que $D_B \chi_{12}(K, 0, 0)$ é um automorfismo sobre $\mathcal{L}(V, U)$.

O lema segue, então, da aplicação do teorema da função implícita às equações:

$$\begin{cases} \chi_{21}(L, A, B) = 0 \\ \chi_{12}(L, A, B) = 0. \end{cases}$$

□

Para referências posteriores, observamos que $\chi_{21}(L, A, B)$ não depende explicitamente de B , sendo dada por:

$$\begin{aligned}
\chi_{21}(L, A, B) &= (P_2 - A P_1) L (J_1 + J_2 A) \\
&= L_{21} + L_{22} A - A (L_{11} + L_{12} A);
\end{aligned} \tag{2.8}$$

portanto, para todo $L \in \Omega$. temos:

$$L_{21} + L_{22} A^*(L) - A^*(L) (L_{11} + L_{12} A^*(L)) = 0. \tag{2.9}$$

Segue do lema 1 que $\chi(L, A^*(L), B^*(L)) = \text{diag}(\Phi(L), \tilde{\Phi}(L))$ onde $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$ e $\tilde{\Phi} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V)$ são definidas por:

$$\Phi(L) = \chi_{11}(L, A^*(L), B^*(L)) , \quad \tilde{\Phi}(L) = \chi_{22}(L, A^*(L), B^*(L)). \quad (2.10)$$

Como:

$$\begin{aligned} \chi_{11}(L, A, B) &= (P_1 - BP_2 + BAP_1)L(J_1 + J_2A) \\ &= L_{11} + L_{12}A - B(L_{21} + L_{22}A) + BA(L_{11} + L_{12}A), \end{aligned}$$

e, pela igualdade (2-9)

$$A^*(L)(L_{11} + L_{12}A^*(L)) = L_{21} + L_{22}A^*(L)$$

então, para todo $L \in \Omega$:

$$\chi_{11}(L, A^*(L), B^*(L)) = L_{11} + L_{12}A^*(L) - B^*(L)(L_{21} + L_{22}A^*(L)) + B^*(L)(L_{21} + L_{22}A^*(L))$$

ou seja

$$\Phi(L) = L_{11} + L_{12}A^*(L), \quad \forall L \in \Omega. \quad (2.11)$$

Ainda, como $\chi(L, A, B)$ é obtida de L por uma transformação semelhante, ambas têm o mesmo espectro. Em particular, temos:

$$\sigma(L) = \sigma(\Phi(L)) \cup \sigma(\tilde{\Phi}(L)) , \quad \forall L \in \Omega \quad (2.12)$$

Corolário 1: Para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ de K em $\mathcal{L}(W)$ tal que, para $L \in \Omega_\epsilon$, os espectros de $\Phi(L)$ e $\tilde{\Phi}(L)$ estão contidos numa ϵ -vizinhança de $\sigma(K_{11})$ e $\sigma(K_{22})$ respectivamente. Em particular, se ϵ é suficientemente pequeno, então $\sigma(\Phi(L)) \cap \sigma(\tilde{\Phi}(L)) = \emptyset$ para $L \in \Omega_\epsilon$.

Prova: Se $R > 0$ é tal que $\|K\| < R$, então $R - \|K\| > 0$ e podemos assumir que, para todo $L \in \Omega : \|L - K\| < R - \|K\|$. $\|L\| = \|L - K + K\| \leq \|L - K\| + \|K\|$

$+ \|K\| < R - \|K\| + \|K\| = R$. Em resumo: $\|L\| < R$, para todo $L \in \Omega$; então $\sigma(L)$, e por (2-12) também $\sigma(\Phi(L))$ e $\sigma(\tilde{\Phi}(L))$, estão contidos em um disco D de raio R e centro na origem em $\mathbb{C}$. De fato, seja u um autovetor unitário de L associado ao autovalor α . Segue daí que $R > \|Lu\| = \|\alpha u\| = |\alpha|$; portanto, os autovalores de L , $\Phi(L)$ e $\tilde{\Phi}(L)$ estão contidos no referido disco D .

Sejam $\omega_{1,\epsilon}$ e $\omega_{2,\epsilon}$ ϵ -vizinhanças de, respectivamente, $\sigma(K_{11})$ e $\sigma(K_{22})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq R$ e $\lambda \notin \omega_{1,\epsilon}$, então $K_{11} - \lambda I_U \in \mathcal{L}(U)$ é invertível; como $\Phi(L)$ depende continuamente de L , e $\Phi(K) = K_{11}$, segue-se, pela continuidade do determinante, que existem vizinhança V_λ de λ em $\mathbb{C}$ e $\delta_\lambda > 0$ tais que, se $\|\Phi(L) - K_{11}\| < \delta_\lambda$ e $\mu \in V_\lambda$, então $\Phi(L) - \mu I_U$ é invertível.

Consideremos a cobertura $\{V_\lambda, \lambda \in D - \omega_{1,\epsilon}\}$ de $D - \omega_{1,\epsilon}$ e seja, pela compacidade de $D - \omega_{1,\epsilon}$, $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$ uma cobertura finita. Seja $\delta = \min\{\delta_{\lambda_1}, \dots, \delta_{\lambda_n}\}$; se $\|\Phi(L) - K_{11}\| < \delta$ e $\mu \in D - \omega_{1,\epsilon}$, então $\mu \in V_{\lambda_j}$ para algum j e, portanto, $\Phi(L) - \mu I_U$ é invertível para todo L próximo de K e todo μ próximo de λ . Como $\sigma(\Phi(L)) \subset D$, segue-se que $\sigma(\Phi(L)) \subset \omega_{1,\epsilon}$. Analogamente, mostra-se que $\sigma(\tilde{\Phi}(L)) \subset \omega_{2,\epsilon}$.

Por fim, vamos mostrar que se ϵ é suficientemente pequeno, então $\sigma(\Phi(L)) \cap \sigma(\tilde{\Phi}(L)) = \emptyset$, para $L \in \Omega_\epsilon$. Como $\sigma(K_{11})$ e $\sigma(K_{22})$ são compactos, é possível tomar $\epsilon > 0$ tal que $d(\sigma(K_{11}), \sigma(K_{22})) = 2\epsilon$. Se $\mu \in \sigma(\Phi(L)) \cap \sigma(\tilde{\Phi}(L))$, então $d(\mu, \sigma(K_{11})) < \epsilon$ e $d(\mu, \sigma(K_{22})) < \epsilon$. Segue daí que $d(\sigma(K_{11}), \sigma(K_{22})) < 2\epsilon$. Contradição. $\square$

Corolário 2: Seja $K \in \mathcal{L}(W)$ hiperbólico. Então existe uma vizinhança Ω e K em $\mathcal{L}(W)$ tal que cada $L \in \Omega$ é hiperbólico. Além disso, as dimensões dos subespaços estável e instável de L coincidem com as dimensões dos subespaços estável e instável de K .

Prova: Seja $m(s)$ o polinômio característico de K . Temos $m(s) = m_1(s)m_2(s)$,

onde m_1 e m_2 são primos entre si, e para $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$ se $m_1(s) = 0$ e $\operatorname{Re} s < 0$ se $m_2(s) = 0$. Tomando $U = \mathcal{N}(m_1(K))$ e $V = \mathcal{N}(m_2(K))$, temos, pelo teorema da decomposição de um espaço vetorial, que U e V são K -invariantes e $U \oplus V = W$; mostremos que U é o subespaço instável de K e V o estável, ou seja, que

$$\sigma(K/V) = \{\lambda \in \sigma(K) \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\} \quad \text{e} \quad \sigma(K/U) = \{\lambda \in \sigma(K) \mid \operatorname{Re} \lambda > 0\}.$$

Seja $\lambda \in \sigma(K/U)$ e tomemos $u \in U, u \neq 0$, tal que $Ku = \lambda u$. Então $m_1(K)u = 0$; como $m_1(K)u = m_1(\lambda)u$, concluímos que $m_1(\lambda) = 0$ e $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Reciprocamente, seja $\lambda \in \sigma(K)$ tal que $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e $u \in W, u \neq 0$, tal que $Ku = \lambda u$. Então $m_1(\lambda) = 0$ e, portanto, $m_1(K)u = 0$, ou seja, $u \in U$ e $\lambda \in \sigma(K/U)$. De forma análoga, mostramos que V é o subespaço estável de K .

Tomando U e V da forma acima, o resultado desejado segue do lema 1 e do corolário 1. □

Corolário 3: Seja 0 um autovalor semi-simples de $K \in \mathcal{L}(W)$, com $\operatorname{Re} \lambda < 0$ se $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$. Seja $U = \mathcal{N}(K)$.

Então existe uma vizinhança Ω de K em $\mathcal{L}(W)$, e uma aplicação $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$, de classe C^∞ , com $\Phi(K) = 0$, tal que $L \in \Omega$ é hiperbólico se e somente se $\Phi(L)$ é hiperbólico. Quando esse é o caso, os subespaços instáveis de L e $\Phi(L)$ têm a mesma dimensão.

Prova: Se $U = \mathcal{N}(K)$ e $V = R(K)$, e sendo 0 um autovalor semi-simples, então $W = U \oplus V, K_{11} = 0, K_{21} = 0, K_{12} = 0$, e existe $\delta > 0$ tal que $\operatorname{Re} \lambda \leq -2\delta$ para todo $\lambda \in \sigma(K_{22})$. Usando o lema 1 podemos definir $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$ e $\tilde{\Phi} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(V)$ por (2-10); pelo corolário 1 podemos tomar Ω suficientemente pequeno tal que, para todo $L \in \Omega$, temos $\operatorname{Re} \lambda < -\delta$ se $\lambda \in \sigma(\tilde{\Phi}(L))$ e $|\lambda| < \delta$ se $\lambda \in \sigma(\Phi(L))$. Isso prova o corolário. □

Lema 2: Seja 0 um autovalor semi-simples de $K \in \mathcal{L}(W)$, $U = \mathcal{N}(K)$ e $V = R(K)$. Então existe uma vizinhança Ω de K em $\mathcal{L}(W)$, e uma única aplicação $C^* : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$, de classe C^∞ , com $C^*(K) = 0$, tal que, para todo $L \in \Omega$, temos:

$$P_2 L \Delta(C^*(L)) J_1 = 0. \quad (2.13)$$

Prova: Como $P_2 L \Delta(0) J_1 = L_{21}$, temos que $P_2 K \Delta(0) J_1 = 0$. Além disso, para todo $C \in \mathcal{L}(U, V)$, temos

$$\begin{aligned} P_2 K \Delta(C) J_1 &= P_2 K (I_W + J_2 C P_1) J_1 \\ &= K_{22} C. \end{aligned}$$

Logo $D_C P_2 L \Delta(C) J_1$, em $L = K$ e $C = 0$, aplicada em $H \in \mathcal{L}(U, V)$ é $K_{22} H$, isto é, $D_C P_2 L \Delta(C) J_1(K, 0) \cdot H = K_{22} H$. Como K_{22} é invertível, $K_{22} H = 0$ implica $H = 0$. Portanto, $D_C P_2 L \Delta(C) J_1(K, 0)$ é um automorfismo.

Como na prova do Lema 1, aplica-se agora o teorema da função implícita à equação $P_2 L \Delta(C) J_1 = 0$. $\square$

Usando o lema 2 definimos $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$ por

$$\Psi(L) = P_1 L \Delta(C^*(L)) J_1 = L_{11} + L_{12} C^*(L). \quad (2.14)$$

Nosso próximo lema fornece a relação entre $\Phi(L)$ e $\Psi(L)$; essa relação será a chave da análise do princípio da estabilidade reduzida a ser feita no próximo capítulo.

Lema 3: Sob as condições do Lema 2, sejam $\Phi(L)$ e $\Psi(L)$ como definidos em (2-11) e (2-14). Então temos, para uma vizinhança Ω de K suficientemente pequena

$$\Phi(L) = \eta(L) \Psi(L) \quad , \quad \forall L \in \Omega \quad , \quad (2.15)$$

onde $\eta : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$ é de classe C^∞ tal que

$$\eta(K) = I_U \quad , \quad D_L \eta(K) = 0. \quad (2.16)$$

Prova: Para cada $L \in \Omega$, tomemos $D^*(L) = A^*(L) - C^*(L)$; como

$$\Phi(L) - \Psi(L) = L_{12}(A^*(L) - C^*(L))$$

então

$$\Phi(L) = \Psi(L) + L_{12}D^*(L) \quad , \quad \forall L \in \Omega. \quad (2.17)$$

Podemos reescrever (2-9) da seguinte forma

$$L_{21} + L_{22}A^*(L) = A^*(L)\Phi(L) \quad , \quad (2.18)$$

enquanto (2-13) toma a forma

$$\begin{aligned} P_2L\Delta(C^*(L))J_1 &= P_2L(I_W + J_2C^*(L)P_1)J_1 \\ &= L_{21} + L_{22}C^*(L) = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Subtraindo (2-19) de (2-18), obtemos:

$$L_{22}D^*(L) = A^*(L)\Phi(L)$$

ou seja

$$D^*(L) = L_{22}^{-1}A^*(L)\Phi(L). \quad (2.20)$$

Substituindo (2-20) em (2-17), temos:

$$\Phi(L) = \Psi(L) + L_{12}L_{22}^{-1}A^*(L)\Phi(L)$$

ou seja

$$(I_U - L_{12}L_{22}^{-1}A^*(L))\Phi(L) = \Psi(L)$$

ou ainda

$$\Phi(L) = \left(I_U - L_{12}L_{22}^{-1}A^*(L)\right)^{-1}\Psi(L).$$

Isso nos dá (2-15) com

$$\eta(L) = \left(I_U - L_{12} L_{22}^{-1} A^*(L) \right)^{-1}. \quad (2.21)$$

Como K_{22} é invertível, $K_{12} = 0$ e $A^*(K) = 0$, segue-se que todas as inversas usadas existem para L numa vizinhança de K suficientemente pequena, e que (2-16) vale. $\square$

Lema 4: Sob as condições do Lema 2, seja $\Omega_1 \subset \Omega$ uma vizinhança de K e $\omega \subset \mathcal{L}(W)$ uma vizinhança de I_W , tal que $TL \in \Omega$ para cada $(T, L) \in \omega \times \Omega_1$. Então existe uma aplicação $\rho : \omega \times \Omega_1 \rightarrow \mathcal{L}(U)$, com $\rho(I_W, L) = I_U$ para todo $L \in \Omega_1$, $\rho \in C^\infty$, tal que

$$\Phi(TL) = \rho(T, L)\Phi(L) \quad , \quad \forall (T, L) \in \omega \times \Omega_1. \quad (2.22)$$

Prova: Como, pelo Lema 3 temos $\Phi(L) = \eta(L)\Psi(L)$ e $\Phi(TL) = \eta(TL)\Psi(TL)$, com $\eta(L)$ e $\eta(TL)$ invertíveis, é suficiente mostrar que existe uma aplicação $\tilde{\rho} : \omega \times \Omega_1 \rightarrow \mathcal{L}(U)$, $\tilde{\rho} \in C^\infty$, com $\tilde{\rho}(I_W, L) = I_U$ tal que

$$\Psi(TL) = \tilde{\rho}(T, L)\Psi(L), \forall (T, L) \in \omega \times \Omega_1. \quad (2.23)$$

De fato, tendo em vista o lema 3, podemos reescrever (2-23) na forma

$$\eta^{-1}(TL)\Phi(TL) = \tilde{\rho}(T, L)\eta^{-1}(L)\Phi(L)$$

ou

$$\Phi(TL) = \eta(TL)\tilde{\rho}(T, L)\eta^{-1}(L)\Phi(L), \quad \text{como queríamos.}$$

Fixe $(T, L) \in \omega \times \Omega_1$, e faça $M = TL$ e $D^* = C^*(M) - C^*(L)$. De (2-13) e (2-14) obtemos:

$$P_2 L(I_W + J_2 C^*(L) P_1) J_1 = 0$$

$$\Psi(L) = P_1 L(I_W + J_2 C^*(L) P_1) J_1.$$

Daí vêm as relações

$$\Psi(L) = P_1 L(J_1 + J_2 C^*(L)) \quad , \quad P_2 L(J_1 + J_2 C^*(L)) = 0 \quad (2.24)$$

e

$$\Psi(TL) = P_1 M(J_1 + J_2 C^*(M)), P_2 M(J_1 + J_2 C^*(M)) = 0. \quad (2.25)$$

De (2-25) obtemos:

$$\begin{aligned} P_2 M(J_1 + J_2 C^*(M)) &= M_{21} + M_{22} C^*(M) \\ &= M_{21} + M_{22} (C^*(L) + D^*) \\ &= M_{21} + M_{22} C^*(L) + M_{22} D^* = 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M_{22} D^* &= -M_{21} - M_{22} C^*(L) \\ &= -P_2 M J_1 - P_2 M J_2 C^*(L) \\ &= -P_2 M (J_1 + J_2 C^*(L)). \end{aligned}$$

Usando $I_W = J_1 P_1 + J_2 P_2$, vem

$$\begin{aligned} M_{22} D^* &= -P_2 T (J_1 P_1 + J_2 P_2) L (J_1 + J_2 C^*(L)) \\ &= -T_{21} P_1 L (J_1 + J_2 C^*(L)) - T_{22} P_2 L (J_1 + J_2 C^*(L)) \\ &= -T_{21} \Psi(L); \end{aligned}$$

como M_{22} é invertível se Ω é suficientemente pequeno, segue-se que

$$D^* = -M_{22}^{-1} T_{21} \Psi(L).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Psi(TL) &= P_1 M(J_1 + J_2(C^*(L) + D^*)) \\
&= P_1 M J_1 + P_1 M J_2 C^*(L) + P_1 M J_2 D^* \\
&= P_1 M(J_1 + J_2 C^*(L)) + M_{12} D^* \\
&= P_1 T(J_1 P_1 + J_2 P_2) L(J_1 + J_2 C^*(L)) + M_{12} D^* \\
&= (P_1 T J_1 P_1 + P_1 T J_2 P_2) L(J_1 + J_2 C^*(L)) + M_{12} D^* \\
&= T_{11} P_1 L(J_1 + J_2 C^*(L)) + T_{12} P_2 L(J_1 + J_2 C^*(L)) + M_{12} D^* \\
&= T_{11} \Psi(L) + M_{12} D^* \\
&= T_{11} \Psi(L) + M_{12} (-M_{22}^{-1} T_{21} \Psi(L)) \\
&= (T_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} T_{21}) \Psi(L).
\end{aligned}$$

Isso prova o lema. □

Concluimos esse capítulo com uma versão abstrata de um resultado devido a Vegas [4].

Teorema 2: Seja $K \in \mathcal{L}(W)$ como no corolário 3. Então existe, para todo $r > 0$, uma vizinhança Ω_r de K em $\mathcal{L}(W)$ tal que se $L \in \Omega_r$ e

$$|\operatorname{Re} \lambda| > r \parallel \Psi(L) \parallel, \quad \forall \lambda \in \sigma(\Psi(L)), \quad (2.26)$$

então tanto L quanto $\Psi(L)$ são hiperbólicos, e as dimensões de seus subespaços instáveis são as mesmas.

Prova: Seja H o conjunto de todos os $M \in \mathcal{L}(U)$ tais que M é hiperbólico. Pelo corolário 2, H é aberto em $\mathcal{L}(U)$, e a aplicação $d : H \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $M \in H$ a dimensão de seu subespaço instável é contínua; e como a imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo, então a aplicação d é constante em cada componente conexa de H .

Para cada $r > 0$, seja H_r o conjunto de todos os $M \in \mathcal{L}(U)$ tais que $|\operatorname{Re} \lambda| > r \parallel M \parallel$ para todo $\lambda \in \sigma(M)$; logo $H_r \subset H$. Se $S = \{M \in \mathcal{L}(U) \mid \parallel M \parallel = 1\}$, então

$H_r \cap S$ é um subconjunto compacto de H . Se $N \in H_r \cap S$, pela continuidade da composição de aplicações lineares $(M_1, M_2) \mapsto M_1 M_2$, existem vizinhanças ω_{r_N} de I_U em $\mathcal{L}(U)$ e V_N de N em $\mathcal{L}(U)$ tais que, se $\eta \in \omega_{r_N}$ e $M \in V_N$, então $\eta.M \in H$.

Consideremos a cobertura $\{V_N, N \in \overline{H}_r \cap S\}$ de $\overline{H}_r \cap S$ e seja, pela compacidade de $\overline{H}_r \cap S$, uma subcobertura finita $V_{N_1}, \dots, V_{N_n}$; considere também $\omega_r = \cap \omega_{r_{N_i}}, i=1, \dots, n$. Segue-se daí que existe uma vizinhança ω_r de I_U em $\mathcal{L}(U)$ tal que, para todo $\eta \in \omega_r$ e para todo $M \in \overline{H}_r \cap S$, temos $\eta.M \in H$.

Multiplicando por um escalar positivo, ou seja, substituindo a esfera S definida acima por outra de raio conveniente, concluímos que, para todo $\eta \in \omega_r$ e todo $M \in H_r$, temos $\eta.M \in H$. Além disso, podemos assumir que ω_r é conexo; então, fixando $M \in H_r$, o conjunto $\{\eta.M \mid \eta \in \omega_r\}$ é conexo, e daí $d(\eta.M) = d(M), \forall \eta \in \omega_r$.

Seja agora Ω_r o conjunto de todos os $L \in \Omega \subset \mathcal{L}(W)$ tais que $\eta(L) \in \omega_r$, onde $\eta : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$ é a aplicação dada pelo lema 3. Se $L \in \Omega_r$ e $\Psi(L) \in H_r$, então, pelo visto acima, tanto $\Psi(L)$ quanto $\Phi(L) = \eta(L)\Psi(L)$ pertencem a H e $d(\Phi(L)) = d(\Psi(L))$. Pelo corolário 3, isso prova o teorema. $\square$

Capítulo 3

O Princípio da Estabilidade Reduzida

Retornamos, agora, ao problema descrito na introdução. Por simplicidade de formulação assumiremos que o sistema (0.1) é de classe C^∞ , embora todos os nossos resultados continuem valendo se (0.1) for de classe C^k , com k suficientemente grande. Pelo teorema 1 todos os equilíbrios de (0.1) próximos da origem têm a forma $(z^*(x, \lambda), \lambda)$ para algum $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$. As propriedades de estabilidade de tal equilíbrio são determinadas pelo espectro do operador

$$L(x, \lambda) = D_z Z(z^*(x, \lambda), \lambda) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}). \quad (3.1)$$

A aplicação $L : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ é de classe C^∞ , e se tomamos $W = \mathbb{R}^{n+m}$, $U = \mathbb{R}^n$ e $V = \mathbb{R}^m$, então $L(0, 0) = L_0$ satisfaz as hipóteses impostas sobre K no corolário 3 e no teorema 2.

Por outro lado, as propriedades de estabilidade de um equilíbrio (x, λ) da equação reduzida (0.7) são determinadas pelo operador

$$G(x, \lambda) = D_x F(x, \lambda) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n). \quad (3.2)$$

Usando a definição de $F(x, \lambda)$ e a notação do capítulo 2 encontramos:

$$\begin{aligned} G(x, \lambda) &= D_z X(z^*(x, \lambda), \lambda) \cdot D_x z^*(x, \lambda) \\ &= D_x X(x, y^*(x, \lambda), \lambda) + D_y X(x, y^*(x, \lambda), \lambda) \cdot D_x y^*(x, \lambda) \\ &= L_{11}(x, \lambda) + L_{12}(x, \lambda) \cdot D_x y^*(x, \lambda). \end{aligned} \quad (3.3)$$

A diferenciação da equação que define $y^*(x, \lambda)$, ou seja, da equação $Y(x, y^*(x, \lambda), \lambda) = 0$ nos dá

$$\begin{aligned} D_x Y(x, y^*(x, \lambda), \lambda) + D_y Y(x, y^*(x, \lambda), \lambda) \cdot D_x y^*(x, \lambda) \\ = L_{21}(x, \lambda) + L_{22}(x, \lambda) \cdot D_x y^*(x, \lambda) = 0, \quad \forall (x, \lambda). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Comparando (3.4) com (2.13) e usando a unicidade a que se refere o Lema 2, concluímos que

$$D_x y^*(x, \lambda) = C^*(L(x, \lambda)), \quad (3.5)$$

e, por conseguinte

$$G(x, \lambda) = \Psi(L(x, \lambda)) \quad (3.6)$$

para todo (x, λ) numa vizinhança da origem suficientemente pequena. Aplicando o corolário 3 e o Lema 3 à família de operadores $\{L(x, \lambda) \mid (x, \lambda) \in \Omega\}$ obtemos o resultado abaixo em que escrevemos $\Phi(x, \lambda)$ no lugar de $\Phi(L(x, \lambda))$ e $\eta(x, \lambda)$ no de $\eta(L(x, \lambda))$.

Teorema 3- Sob o assumido na introdução, existe uma vizinhança Ω da origem em $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ e uma aplicação $\eta : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, de classe C^∞ , satisfazendo

$$\eta(0, 0) = I, D_x \eta(0, 0) = 0, D_\lambda \eta(0, 0) = 0, \quad (3.7)$$

e tal que vale o seguinte:

Se $(x, \lambda) \in \Omega$ é um ponto de equilíbrio de (0.7), e $G(x, \lambda) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é definido por (3.2), então o equilíbrio correspondente $(z^*(x, \lambda), \lambda)$ de (0.1) é hiperbólico se e somente se o operador

$$\Phi(x, \lambda) = \eta(x, \lambda)G(x, \lambda) \quad (3.8)$$

é hiperbólico; além disso, se esse é o caso então a dimensão da variedade instável de $(z^*(x, \lambda), \lambda)$ é igual à dimensão do subespaço instável de $\Phi(x, \lambda)$.

Quando $n = 1$, $\Phi(x, \lambda)$, $\eta(x, \lambda)$ e $G(x, \lambda)$ podem ser identificados com escalares reais, e como $\eta(0, 0) = 1$ a relação (3.8) implica que

$$\text{sgn} \Phi(x, \lambda) = \text{sgn} G(x, \lambda), \quad (3.9)$$

para todo (x, λ) suficientemente pequeno. Desse resultado, pode-se deduzir o princípio de transferência de estabilidade. Usando nossa terminologia temos:

Corolário 4: Sob as condições da introdução, seja 0 um autovalor simples de L_0 ; ou seja, temos $n = 1$. Então o princípio da estabilidade reduzida vale para todos os equilíbrios bifurcados numa vizinhança, suficientemente pequena, da origem.

Para o caso geral, podemos aplicar o teorema 2 para obter regiões próximas da origem em $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ onde vale o princípio:

Teorema 4: Sob as condições do teorema 3 existe, para todo $r > 0$, uma vizinhança $\Omega_r \subset \Omega$ da origem em $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ tal que o princípio da estabilidade reduzida vale para todos os equilíbrios $(x, \lambda) \in \Omega_r$ da equação reduzida (0.7) que satisfazem

$$|\text{Re} \mu| > r \|G(x, \lambda)\|, \quad \forall \mu \in \sigma(G(x, \lambda)). \quad (3.10)$$

Resultados mais detalhados podem ser obtidos se restringirmos nossa atenção a ramos de equilíbrios que dependem de um parâmetro escalar ϵ e que passam pelo

ponto de bifurcação. Segue-se um resultado.

Teorema 5 - Sob as condições do Teorema 3, seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto com $0 \in J$, e sejam $\hat{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\hat{\lambda} : J \rightarrow \Lambda$ aplicações de classe C^∞ , tais que

$$F(\hat{x}(\epsilon), \hat{\lambda}(\epsilon)) = 0, \forall \epsilon \in J, (\hat{x}(0), \hat{\lambda}(0)) = (0, 0). \quad (3.11)$$

Considere

$$G(\epsilon) = D_x F(\hat{x}(\epsilon), \hat{\lambda}(\epsilon)), \forall \epsilon \in J, \quad (3.12)$$

e suponha que existe $k \geq 1$ tal que

$$\frac{d^j G}{d\epsilon^j}(0) = 0, \quad 0 \leq j < k, \quad \frac{d^k G}{d\epsilon^k}(0) \in H, \quad (3.13)$$

onde H é o conjunto de operadores hiperbólicos $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in J$ com $|\epsilon| < \epsilon_0$ e $\epsilon \neq 0$, tanto $(\hat{x}(\epsilon), \hat{\lambda}(\epsilon))$ quanto $(z^*(\hat{x}(\epsilon), \hat{\lambda}(\epsilon)), \hat{\lambda}(\epsilon))$ são equilíbrios hiperbólicos de (0.7) e (0.1) respectivamente, e suas variedades instáveis têm a mesma dimensão.

Prova: Pelo Teorema 3, $(z^*(\hat{x}(\epsilon), \hat{\lambda}(\epsilon)))$ será um equilíbrio hiperbólico se e somente se

$$\Phi(\epsilon) = \eta(\epsilon)G(\epsilon) \quad (3.14)$$

é hiperbólico, onde $\eta(\epsilon) = \eta(\hat{x}(\epsilon), \hat{\lambda}(\epsilon))$ é tal que

$$\eta(0) = I, \quad \frac{d\eta}{d\epsilon}(0) = 0. \quad (3.15)$$

Pela fórmula de Taylor temos que:

$$G(\epsilon) = G(0) + \epsilon \frac{dG}{d\epsilon}(0) + \dots + \frac{\epsilon^k}{k!} \frac{d^k G}{d\epsilon^k}(0) + r_k(\epsilon)$$

com

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{r_k(\epsilon)}{\epsilon^k} = 0.$$

Fazendo

$$G_k(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{k!} \frac{d^k G}{d\epsilon^k}(0) + \frac{r_k(\epsilon)}{\epsilon^k} & \text{se } \epsilon \neq 0 \\ \frac{1}{k!} \frac{d^k G}{d\epsilon^k}(0) & \text{se } \epsilon = 0 \end{cases}$$

segue-se de nossas hipóteses que $G(\epsilon) = \epsilon^k G_k(\epsilon)$, com $G_k : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞ e $G_k(0) \in H$. Então (3.14) implica $\Phi(\epsilon) = \epsilon^k \Phi_k(\epsilon)$, com $\Phi_k(\epsilon) = \eta(\epsilon) G_k(\epsilon)$; em particular, temos $\Phi_k(0) = G_k(0) \in H$. Segue-se do corolário 2 que tanto $G_k(\epsilon)$ quanto $\Phi_k(\epsilon)$ serão hiperbólicos para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, e que seus subespaços instáveis têm a mesma dimensão que o subespaço instável de $G_k(0)$. Isso prova o teorema. $\square$

O resultado do teorema 5 pode ser generalizado para situações onde $G_k(0)$ tem um autovalor zero, como se segue.

Teorema 6- Sob as condições do teorema 5, suponha que existe uma aplicação $S : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, de classe C^∞ , tal que $S(\epsilon)$ é invertível para todo $\epsilon \in J$, e tal que

$$S^{-1}(\epsilon) G(\epsilon) S(\epsilon) = \text{diag}(\epsilon^{j_1} G_1(\epsilon), \epsilon^{j_2} G_2(\epsilon), \dots, \epsilon^{j_\ell} G_\ell(\epsilon)), \quad (3.16)$$

com $\ell \geq 1, j_1 > j_2 > \dots > j_\ell > 0$, e $G_k : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_k})$ ($1 \leq k \leq \ell$) é uma aplicação de classe C^∞ tal que $G_k(0)$ é hiperbólico e $n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n$.

Então a conclusão do teorema 5 vale.

Prova: Devemos mostrar que para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno tanto $G(\epsilon)$ quanto $\Phi(\epsilon) = \eta(\epsilon)G(\epsilon)$ são hiperbólicos e têm a mesma dimensão para seus subespaços instáveis. Aplicando a $\Phi(\epsilon)$ e $\eta(\epsilon)$ a mesma transformação semelhante aplicada a $G(\epsilon)$ em (3.16), podemos assumir que $G(\epsilon)$ tem a forma diagonal dada pelo membro direito de (3.16). Explicando melhor:

$$\begin{aligned} S^{-1}(\epsilon)\Phi(\epsilon)S(\epsilon) &= S^{-1}(\epsilon)\eta(\epsilon)G(\epsilon)S(\epsilon) \\ &= (S^{-1}(\epsilon)\eta(\epsilon)S(\epsilon))(S^{-1}(\epsilon)G(\epsilon)S(\epsilon)). \end{aligned}$$

Usaremos o método de indução sobre ℓ (= número de blocos de $G(\epsilon)$). Para $\ell = 1$ o teorema 6 se reduz ao teorema 5. Suponha agora que $\ell > 1$.

Então temos:

$$G(\epsilon) = \epsilon^{j_t} L(\epsilon) \quad , \quad \Phi(\epsilon) = \epsilon^{j_t} M(\epsilon), \quad (3.17)$$

com

$$L(\epsilon) = \text{diag}(\hat{G}_1(\epsilon) \quad , \quad G_\ell(\epsilon)), \quad (3.18)$$

$$\hat{G}_1(\epsilon) = \text{diag}(\epsilon^{j_1-j_t} G_1(\epsilon), \dots, \epsilon^{j_{t-1}-j_t} G_{t-1}(\epsilon)) \quad (3.19)$$

e

$$M(\epsilon) = \eta(\epsilon)L(\epsilon). \quad (3.20)$$

O operador $K = L(0) = M(0)$ tem a forma $K = \text{diag}(0, G_\ell(0))$, com $G_\ell(0)$ hiperbólico. Então o Lema 1 implica que

$$\sigma(M(\epsilon)) = \sigma(\Phi_1(\epsilon)) \cup \sigma(\hat{\Phi}_1(\epsilon)), \quad (3.21)$$

com $\Phi_1(0) = K_{11} = 0$ e $\hat{\Phi}_1(0) = K_{22} = G_\ell(0)$. Pelo corolário 2, $\hat{\Phi}_1(\epsilon)$ é hiperbólico para ϵ pequeno, e a dimensão de seu subespaço instável é igual à dimensão dos

subespaços instáveis de $G_t(0)$ e $G_t(\epsilon)$. Ademais, como $L(\epsilon)$ já tem a forma de bloco diagonal requerida pelo Lema 1, segue-se de (3-20) e do Lema 4 que

$$\Phi_1(\epsilon) = \eta_1(\epsilon)\tilde{G}_1(\epsilon), \quad (3.22)$$

com $\eta_1(\epsilon) = \rho(\eta(\epsilon), L(\epsilon))$; de (3.15) e lembrando que $\rho(I, L) = I$, segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_1(0) &= \rho(\eta(0), L(0)) \\ &= \rho(I, L(0)) \\ &= I \end{aligned}$$

e

$$\frac{d\eta_1}{d\epsilon}(0) = D_{\eta}\rho(\eta(0), L(0)) \cdot \frac{d\eta}{d\epsilon}(0) + D_L\rho(\eta(0), L(0)) \cdot \frac{dL}{d\epsilon}(0) = 0$$

pois $\frac{d\eta}{d\epsilon}(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} D_L\rho(\eta(0), L(0)) \cdot L &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\eta(0), L(0) + hL) - \rho(\eta(0), L(0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(I, L(0) + hL) - \rho(I, L(0))}{h} \\ &= 0, \quad \forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, podemos concluir que para $\epsilon \neq 0$ tanto $\Phi_1(\epsilon)$ quanto $\tilde{G}_1(\epsilon)$ são hiperbólicos, e que seus subespaços instáveis têm a mesma dimensão. Combinando esses resultados e multiplicando por $\epsilon^{j\epsilon}$, concluímos a prova. $\square$

Quando, na situação do teorema 5, $G_k(0)$ tem algum autovalor não nulo no eixo imaginário, então a estrutura multiplicativa de (3.14) não pode ser utilizada como na prova do teorema 6. O que ainda assim temos é que

$$\Phi_k(\epsilon) = G_k(\epsilon) + 0(\epsilon^2), \quad (3.23)$$

que segue de $\eta(\epsilon) = I + 0(\epsilon^2)$ (ver (3.15)). Em vários casos é possível usar (3.23) para obter a validade do princípio da estabilidade reduzida.

Suponha, por exemplo, que $\pm i\omega$ ($\omega \neq 0$) são autovalores semi-simples de $G_k(0) = \Phi_k(0)$, com multiplicidade $\tilde{n}$. Então podemos usar a teoria do capítulo 2 para isolar um operador $\tilde{G}_k(\epsilon) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\tilde{n}})$ cujo espectro coincide com a parte do espectro de $G_k(\epsilon)$ próximo de $i\omega$. Analogamente, o espectro de $\Phi_k(\epsilon)$ próximo de $i\omega$ será determinado pelo operador $\tilde{\Phi}_k(\epsilon) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\tilde{n}})$.

Usando (3.23), teremos:

$$\tilde{G}_k(\epsilon) = i\omega I + \epsilon \tilde{G}_{k,1}(\epsilon), \tilde{\Phi}_k(\epsilon) = i\omega I + \epsilon \tilde{\Phi}_{k,1}(\epsilon) \quad (3.24)$$

com $\tilde{G}_{k,1}(\epsilon) = \tilde{\Phi}_{k,1}(\epsilon)$. Portanto, se $\tilde{G}_{k,1}(0)$ é hiperbólico, então também $\tilde{G}_k(\epsilon)$ e $\tilde{\Phi}_k(\epsilon)$ serão hiperbólicos para $\epsilon \neq 0$. Se as condições mencionadas são satisfeitas para todos os autovalores de $G_k(0)$ no eixo imaginário, então vale o princípio da estabilidade reduzida.

Se $\tilde{G}_{k,1}(0)$ não é hiperbólico, então a interferência do termo $0(\epsilon^2)$ em (3.23) pode acarretar a não validade do princípio da estabilidade reduzida. Isso é precisamente o que ocorre no contra-exemplo dado na introdução. Substituindo λ por ϵ , temos

$$G_1(\epsilon) = \begin{bmatrix} \epsilon^3 & 1 + \epsilon^5 \\ -1 + \epsilon & \epsilon^3 \end{bmatrix};$$

os autovalores de $G_1(\epsilon)$ têm a forma:

$$\mu(\epsilon) = \pm i\sqrt{1 - \epsilon} + 0(\epsilon^2).$$

Como esses autovalores estão no eixo imaginário até a primeira ordem em ϵ , estamos numa situação em que o princípio não é mais válido. (De fato, como foi mostrado, não é válido).

Para finalizar, vale dizer que não encontramos na bibliografia condições mais gerais que impliquem a validade do princípio da estabilidade reduzida.

Bibliografia

- [1] Vanderbauwhede, A. *Stability of Bifurcating Equilibria and the Principle of Reduced Stability*. In: Salvadori L. Bifurcation Theory and Applications. Berlin, Spring-Verlag, 1984. p. 209-23 (Lecture Notes in Math., 1057).
- [2] _____. *Local Bifurcation and Symmetry*. London, Pitman, 1982. (Research Notes in Math., 75).
- [3] Oliveira, J.C.; Hale, J.K. Dynamic Behavior from Bifurcation Equations. *Tôhoku Math. J.*, v.32, n.4, p.577-92, 1980.
- [4] Vegas, J.M. *Linear Stability of Bifurcating Branches of Equilibria*. In: Knobloch, H.W.; Schmitt, K. Equadiff 82 Berlin, Spring-Verlag, 1983. p. 625-31 (Lecture Notes in Math., 1017).
- [5] Hönig, C.S. *Análise Funcional e Aplicações*. São Paulo, IME-USP, 1970.
- [6] Lang, S. *Álgebra Linear*. São Paulo, Edgar Blücher, 1971.
- [7] Köthe, G. *Topological Vector Spaces I*. Berlin, Spring-Verlag, 1969. (GMW, 159).