UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sobre métodos topológicos em combinatória e geometria

Leandro Vicente Mauri

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Leandro Vicente Mauri

Sobre métodos topológicos em combinatória e geometria

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
Abril de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M454s

Mauri, Leandro Vicente
Sobre métodos topológicos em combinatória e geometria / Leandro Vicente Mauri; orientadora Denise de Mattos. -- São Carlos, 2019.
161 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Métodos topológicos em combinatória e geometria. 2. Conjectura de Kneser. 3. Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado. 4. Teorema Topológico de Tveberg. 5. join de espaços. I. Mattos, Denise de, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Leandro Vicente Mauri

On topological methods in combinatorics and geometry

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
April 2019

À minha companheira Bruna e meus familiares, em especial, minha mãe Silvia, minha irmã Giseli e meus avós Vicente e Nita.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é de minha autoria, mas os méritos não são apenas meus. É chegada a hora de agradecer às pessoas que ajudaram a torná-lo possível.

Agradeço a Deus, pelas oportunidades e pessoas boas que colocou em meu caminho.

À companheira e grande amor Bruna, por todo o apoio que tem me dado desde a graduação e durante o mestrado. Por ouvir minhas preocupações, por partilhar angústias e celebrar conquistas. Grande companheira nesta nossa jornada acadêmica em São Carlos. Amo você!

À minha família, meus pais e avós que sempre valorizaram e incentivaram meus estudos, assim como minha irmã Giseli, a qual foi uma referência para o sonho de estudar em uma universidade pública. Aos meus tios Ovaldir e Malena, assim como meus primos, que sempre se preocuparam e demonstraram orgulho na minha trajetória acadêmica. Agradeço a toda minha família por valorizar a carreira de matemático, em uma sociedade em que certas profissões relacionadas ao meio acadêmico são mais dotadas de status, o que leva muitas pessoas pelo senso comum a desvalorizar algumas carreiras.

À minha orientadora Denise de Mattos, que tem me acompanhado desde o início da graduação. Sua dedicação e competência foram fontes de inspiração fundamentais neste trabalho. Sem esquecer do professor do Edivaldo Lopes dos Santos, o qual possui as mesmas qualidades da professora Denise e contribuiu muito para este trabalho. A amizade e o conhecimento que vocês transmitiram-me neste período é algo que vou levar para toda vida.

Por cinco vezes fui medalhista de ouro da OBMEP e as oportunidades que tive por estas conquistas foram a semente da minha paixão pela matemática. Desta forma, gostaria de agradecer a todos as pessoas que tornaram possível o grande projeto que é a OBMEP (Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), ao então ministro da educação na época Fernando Haddad e ao ex-presidente Lula, os quais sempre estiveram presentes nas cerimônias de premiação incentivando os alunos das escolas públicas a seguirem carreira acadêmica, assim como investindo em um acesso mais democrático à universidade, o que transformou a vida de milhões de brasileiros, inclusive a minha.

Com as oportunidades oferecidas pelo OBMEP, tive contato com três grandes professoras, que foram fundamentais para que eu pudesse consolidar minha escolha pela matemática. Muito obrigado, professoras Ires Dias, Yuriko Baldin e Margarete Baptistini.

Agradeço ao ICMC pela excelente formação, e a todos seus funcionários, em especial, ao

ex-jardineiro Luiz, pelas conversas e pela amizade que construimos. A todos os professores que fizeram parte da minha formação, em especial, aos professores Oziride Manzoli Neto, Leandro Fiorini Aurichi, Eduardo Tengan, Farid Tari, Nivaldo Grulha, Paulo Dattori, Behrooz Mirzaii, entre outros grandes mestres deste instituto.

Aos professores da banca examinadora, pelas leituras e correções.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro durante o primeiro semestre do mestrado. Agradeço à FAPESP, Processo 2017/08020-1, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financeiro.

"Eu creio em um futuro grandioso para o Brasil, porque a nossa alegria é maior do que a nossa dor, a nossa força é maior do que a nossa miséria, a nossa esperança é maior do que o nosso medo." (Luiz Inácio Lula da Silva)

RESUMO

MAURI, V. L. **Sobre métodos topológicos em combinatória e geometria**. 2019. 161 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

O objetivo geral deste trabalho consiste na abordagem de resultados em combinatória e geometria discreta, os quais podem ser obtidos como aplicações da Topologia Algébrica, dentre eles, a conjectura de Kneser (Teorema de Lovász-Kneser), o Teorema de Van Kampen-Flores e generalizações destes resultados entre outros. O objetivo principal do trabalho consiste em desenvolver um estudo detalhado de métodos topológicos em combinatória e geometria visando a demonstração destes importantes resultados.

Palavras-chave: métodos topológicos em combinatória e geometria, Conjectura de Kneser, Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado, Teorema Topológico de Tveberg, *join* de espaços.

ABSTRACT

MAURI, V. L. **On topological methods in combinatorics and geometry**. 2019. 161 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The general objective of this work consists in the approach of the results in combinatorics and discrete geometry, which can be proved as an of the Algebraic Topology, among them, the Kneser's conjecture (Lovász-Kneser Theorem), Van-Kampen- Flores Theorem and their generalizations, and others. The main objective is to develop a detailed study of topological methods in combinatorics and geometry to prove these important results.

Keywords: topological methods in combinatorics and geometry, Kneser's conjecture, Generalized Van-Kampen-Flores Theorem, Topological Tveberg Theorem, *join* spaces.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – p- simplexos padrão. 28
Figura 2 – Faces de um 2- simplexo. 29
Figura 3 – Decomposição de um 2-simplexo. 31
Figura 4 – 0 e 1- dimensional complexos simpliciais. 32
Figura 5 – Exemplos que mostram a estrutura de um 2- dimensional complexo simplicial. 32
Figura 6 – Exemplo de k- esqueleto. 34
Figura 7 – S^1 como fronteira de um 2-simplexo. 34
Figura 8 – Triangulações de superfícies conhecidas. 35
Figura 9 – Crosspolytopes. 35
Figura 10 – Representação de um 2- simplexo. 36
Figura 11 – Representação de $\mathbb{R}_{3,4}$. 37
Figura 12 – Contra exemplo para a volta do Corolário 2.3.16. 40
Figura 13 – Grafo K_5. 41
Figura 14 – Curva momento no plano e intersecções. 43
Figura 15 – Exemplo de *poset face*. 44
Figura 16 – Exemplo de subdivisão baricêntrica. 45
Figura 17 – Exemplo de produto cartesiano e *join* de simplexos. 46
Figura 18 – Exemplo de *join*. 47
Figura 19 – Representação da afirmação da Proposição 2.6.9. 48
Figura 20 – Exemplo de mergulho do produto cartesiano no *join*. 51
Figura 21 – Projeção $\pi : U \to B^n$. 55
Figura 22 – Exemplo para o caso $n = 2$. 57
Figura 23 – Exemplo de triangulações antipodalmente simétricas na fronteira. 59
Figura 24 – Exemplo do Lema de Tucker no caso $n = 2$. 60
Figura 25 – Exemplos de *politopos alvo* e *alvo truncado*. 80
Figura 26 – Pizza dividida entre quatro pessoas. 86
Figura 27 – Exemplo de colar e de divisões entre dois ladrões. 87
Figura 28 – Exemplo de colar em que d cortes são necessários. 88
Figura 29 – Figura ilustrando a demonstração do Teorema do colar. 89
Figura 30 – Exemplo de tentativa de fazer um *"arco-íris"*. 89
Figura 31 – Grafo de Petersen. 95
Figura 32 – Ilustração do hemisfério aberto $H(x)$ e do *equador de x*. 97
Figura 33 – Exemplo que ilustra a definição de A_i, para $i \in [d]$. 97

Figura 34 – Ilustração da cobertura de (3.197). 98
Figura 35 – 2-colorações de ciclos C_n. 100
Figura 36 – Ilustração da coloração azul-vermelho. 101
Figura 37 – Ilustração do Exemplo 3.3.64. 102
Figura 38 – Ilustração da afirmação do Lema de Gale. 102
Figura 39 – Ilustração da equivalência da afirmação com o Lema de Gale. 103
Figura 40 – ω_1, ω_2, ..., ω_{2k+d} indexados conforme a ordem do paramêtro t. 104
Figura 41 – Exemplo de rotação do hiperplano h. 105
Figura 42 – Exemplo de rotação do hiperplano h. 105
Figura 43 – Pontos de W_{OFF} se alternam entre **preto** e **branco**. 106
Figura 44 – $\mathrm{SG}_{5,2}$ é um subgrafo induzido do Grafo de Petersen $\mathrm{KG}_{5,2}$. 107
Figura 45 – Desenho do grafo G em S^2. 111
Figura 46 – Grafo G e seu produto deletado $G^{\times}$. 112
Figura 47 – Desenho f de K_5. 114
Figura 48 – Modificação de f para g. 115
Figura 49 – Modificação do desenho f de forma que os vértices fiquem ordenados no círculo unitário. 116
Figura 50 – Desenho $f = f_0$. 117
Figura 51 – Desenho f_1. 118
Figura 52 – Desenho f_2. 118
Figura 53 – Desenho f_3. 119
Figura 54 – Desenho f_4. 119
Figura 55 – Desenho f_5. 120
Figura 56 – Desenho f_6. 120
Figura 57 – Desenho f de K_5. 121
Figura 58 – Desenho g de $K_{3,3}$. 122
Figura 59 – Desenho g de K obtido a partir do desenho f da subdivisão H. 123
Figura 60 – Subdivisão das arestas e e e'. 124
Figura 61 – Exemplo do complexo caixa $B(C_3)$. 127
Figura 62 – Ilustração da composição $\pi \circ \varphi|_{||B(K_m)||}$ para o caso $m = 3$. 129
Figura 63 – Exemplos da definição de dual combinatorial de Alexander. 135
Figura 64 – Ilustração do Lema 5.1.14. 136
Figura 65 – Triangulação do plano projetivo com seis vértices. 138
Figura 66 – Ilustração do isomorfismo $\mathrm{K}_{\Delta}^{*q} \simeq (\Theta_q)^{*(N+1)}$. 140
Figura 67 – $||E_1\mathbb{Z}_3|| = ||\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3|| = ||K_{3,3}||$. 145
Figura 68 – Exemplo da definição de subcomplexos inevitáveis para uma função. 149

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^n$ — espaço euclidiano

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ — n-espaço projetivo real

$|A|$ — cardinalidade do conjunto A

$[n]$ — conjunto $\{1, \cdots, n\}$

$X * Y$ — *join*

X/A — espaço topológico X quocientado por A

$t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus \cdots \oplus t_nx_n$ — ponto do *join*

$||\Delta||$ — poliedro do complexo simplicial Δ

$||f||$ — extensão afim de f

$\Delta^{\leq k}$ — k-esqueleto de Δ

$sd(K)$ — subdivisão baricêntrica de K

$V(\sigma)$ — conjunto de vértices do simplexo σ

e_i — vetor $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, onde 1 está na i-ésima posição

$\dim \sigma$ — dimensão do simplexo σ

$\sqcup$ — união disjunta

$\mathrm{dist}(x, F)$ — distância de x ao conjunto F

$\binom{X}{k}$ — conjunto dos subconjuntos de X com k elementos

A^C — conjunto complementar de A

$\mathrm{supp}\ (x)$ — suporte do ponto x

σ^N — complexo simplicial dado por todas as faces de um N-simplexo σ

l_1 — norma l_1

S^n — esfera n-dimensional

$\mathscr{P}(X)$ — conjunto das partes de X

$\bigcup K$ — união de todos os conjuntos de K

$\Diamond^n$ — complexo simplicial dado no Exemplo 2.3.7

$♖_{m,n}$ — complexo simplicial do tabuleiro de xadrez

$\overline{W}$ — fecho topológico de W

γ — curva momento

$\lfloor x \rfloor$ — função piso

$\lceil x \rceil$ — função teto

$\simeq$ — tipo de homotopia

A — aplicação antipodal

B^n — bola fechada de raio 1 em $\mathbb{R}^n$

$B(x,r)$ — bola de centro x e raio r

$|| \, ||$ — norma euclidiana

$|| \, ||_\infty$ — norma do máximo

$C_p(X;R)$ — p-ésimo R-módulo livre gerado pelos p-simplexos singulares de X

$H_p(X;R)$ — p-ésimo R-módulo de homologia de X

$deg(f)$ — grau de uma aplicação $f : S^n \to S^n$

$\pi_1(Y, y_0)$ — grupo fundamental de Y com ponto base $y_0 \in Y$

$\tilde{f}$ — levantamento de f

U — parte superior de B^n, isto é, $U = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in B^n;\ x_{n+1} \geq 0\}$

λ^d — medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$

$L^1(\mu)$ — conjunto das funções Lebesgue integráveis em relação a medida μ

I — intervalo $[0,1]$

K_m — grafo completo com m vértices

$K_{m,n}$ — grafo bipartido

$\chi(G)$ — número cromático de G

x_v — ponto no desenho associado ao vértice x do grafo

α_e — curva simples no desenho associada a aresta e do grafo

$G^\times$ — produto deletado do grafo G

∂X — fronteira de X

∂ — operador bordo

δ — operador cobordo

$C^i(G^\times; \mathbb{Z}_2)$ — cocadeia simétrica de G

φ_f — função definida a partir do desenho $f = (x, \alpha)$ de um grafo

$\mathfrak{o}(G)$ — classe de obstrução do grafo G

$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X)$ — $\mathbb{Z}_2$-índice do espaço topológico X

$\mathrm{KG}(\mathscr{F})$ — grafo de Kneser do sistema direto $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$

$\mathrm{KG}_{n,k}$ — grafo de Kneser do sistema direto $\binom{[n]}{k} \subset \mathscr{P}([n])$

$\mathrm{SG}_{n,k}$ — grafo de Schrijver induzido de $\mathrm{KG}_{n,k}$

$\langle\ ,\ \rangle$ — produto interno

C_n — grafo cíclico de n vértices

$\mathrm{cd}_m(\mathscr{F})$ — defeito de m-coloração do hipergrafo $(X, \mathscr{F})$

$\binom{[n]}{k}_s$ — conjunto dos subconjuntos s-estáveis

(x, α) — desenho de um grafo

$X \overset{\mathbb{Z}_2}{\not\to} Y$ — significa que não existe $\mathbb{Z}_2$ aplicação entre X e Y

$\mathrm{B}(G)$ — complexo caixa do grafo G

$X *_\Delta X$ — (duplo) *join* deletado

K_Δ^{*2} — (duplo) *join* deletado de um complexo simplicial K

K^* — dual combinatorial de Alexander do complexo simplicial K

$\mathrm{Bier}_n(K)$ — esfera de Bier definida como $K *_\Delta K$, onde $K \subset \mathscr{P}([n])$

K_Δ^* — *join* deletado de k-folhas de K

Θ_q — complexo simplicial dado por q pontos

K^{*n} — n- *join* de K

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ — espaço vetorial das matrizes $m \times n$ com entradas reais

$\mathbb{E}$ — subespaço vetorial das matrizes cuja soma das entradas em cada linha é zero

$\mathbb{E}'$ — subespaço vetorial das matrizes cujas linhas tem entrada constante

$E_N G$ — G-espaço $G^{*(N+1)} = (\Theta_{|G|})^{*(N+1)}$

$\mathbb{V}^G$ — conjuntos dos elementos fixos pela G-ação em $\mathbb{V}$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 23

2 COMPLEXOS SIMPLICIAIS E *JOINS* 27
2.1 Complexos simpliciais geométricos 27
2.2 Triangulações 34
2.3 Complexos simpliciais abstratos 35
2.4 Dimensão de realizações geométricas 40
2.5 Complexos simpliciais e *Posets* 44
2.6 *Joins* 46

3 O TEOREMA DE BORSUK-ULAM E SUAS APLICAÇÕES DIRETAS 53
3.1 Teorema de Borsuk-Ulam 53
3.2 A demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam 65
3.3 Aplicações diretas do Teorema de Borsuk-Ulam 74
3.3.1 Teorema do sanduíche de presunto 74
3.3.2 Teorema do colar e multipartições coloridas 86
3.3.3 Conjectura de Kneser 92

4 TEORIA DOS GRAFOS E TOPOLOGIA 109
4.1 O Teorema de Hanani-Tutte 109
4.2 Limitantes inferiores para o número cromático 125

5 PROBLEMAS DE MERGULHO 131
5.1 Teorema de Van-Kampen-Flores 131
5.2 Teorema Topológico de Tveberg 138
5.3 Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado 149

REFERÊNCIAS 159

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Recentemente, Métodos Topológicos em Combinatória têm se tornado cada vez mais elaborados através da utilização, com sucesso, de ferramentas sofisticadas da Topologia Algébrica, permitindo assim a abordagem de importantes resultados em Combinatória e Geometria Discreta neste contexto. A Conjectura de Kneser, formulada por Martin Kneser em 1955 e provada por László Lovász em 1978 (LOVÁSZ, 1978), é considerada um marco do início do uso de métodos topológicos em problemas combinatoriais.

Um grafo é um par $G = (V,E)$, onde V é um conjunto (o conjunto de vértices) e $E \subset \binom{V}{2}$ é o conjunto de arestas, onde $\binom{V}{2}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de V de cardinalidade exatamente 2. Denotamos por $[n]$ o conjunto finito $\{1,2,...,n\}$. Uma k-coloração de um grafo $G = (V,E)$ é uma função $c : V \to [k]$ tal que $c(u) \neq c(v)$, sempre que $\{u,v\} \in E$. O número cromático de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro k tal que G possui uma k-coloração.

Sejam X um conjunto finito e $F \subset \mathscr{P}(X)$ um sistema de conjuntos. O grafo de Kneser de F, denotado por $\mathrm{KG}(F)$, tem F como o seu conjunto de vértices. Dois conjuntos $F_1, F_2 \in F$ são adjacentes se, e somente se, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Denotaremos por $\mathrm{KG}_{n,k}$ o grafo de Kneser do sistema $\mathscr{F} = \binom{[n]}{k}$ (todos os subconjuntos contendo k elementos de $[n]$). Assim, o Teorema de Lovász-Kneser pode ser enunciado como segue.

Teorema de Lovász-Kneser (Teorema 3.3.52). Para todo $k > 0$ e $n \geq 2k-1$, o número cromático do grafo de Kneser $\mathrm{KG}_{n,k}$ é igual a $n-2k+2$.

Teoremas sobre mergulho, o que inclui planaridade de grafos, podem ser demonstrados através de ferramentas topológicas. O Teorema de Van-Kampen-Flores (KAMPEN, 1933) é um exemplo típico deste tipo de problema.

Teorema de Van-Kampen-Flores (Teorema 5.1.17). Para todo $d \geq 1$, o complexo simplicial $K = (\sigma^{2d+2})^{\leq d}$, isto é, o d-esqueleto do $(2d+2)$-dimensional simplexo, não pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^{2d}$. Mais precisamente, para qualquer função contínua $f : ||K|| \to \mathbb{R}^{2d}$, as

imagens de duas faces disjuntas de K se intersectam.

Observemos que, no caso $d = 1$, o Teorema de Van-Kampen-Flores afirma que K_5 não é planar.

O Teorema de Van-Kampen-Flores possui ainda a seguinte generalização, provada independentemente por Sarkaria (SARKARIA, 1991a) e Volovikov (VOLOVIKOV, 1996b).

Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado (Teorema 5.3.7) Sejam $r \geq 2$ uma potência de primo, $d \geq 1$, $N \geq N_1 = (r-1)(d+2)$, e $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil$. Então, para qualquer função contínua $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$, existem r faces de σ^N, $\tau_1, \ldots, \tau_r$, duas a duas disjuntas, com dim $\tau_i \leq k$, para todo $1 \leq i \leq r$, tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap \ldots \cap f(||\tau_r||) \neq \emptyset.$$

A Conjectura Topológica de Tveberg, enunciada a seguir, é um dos grandes problemas desta linha de pesquisa e deu origem ao Teorema Topológico de Tveberg.

Conjectura Topológica de Tveberg (Conjectura 5.2.1) Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros e $N = (d+1)(r-1)$. Para cada aplicação contínua $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$, existem r faces disjuntas $F_1, F_2, \ldots, F_r$ de σ^N tais que:

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap \ldots \cap f(||F_r||) \neq \emptyset.$$

Esta conjectura foi provada, no caso $r = 2$, por Bajmóczy e Bárány em 1979 (BAJMÓCZY; BÁRÁNY, 1979) e ficou conhecida como o **Teorema de Radon** (Teorema 5.1.10). No caso em que r é um primo, foi provada por Bárány, Schlosman e Szücs em 1981 (BÁRÁNY; SHLOSMAN; SZÜCS, 1981). Volovikov (VOLOVIKOV, 1996b) e Özadin (ÖZADIN, 1987) (independentemente) mostraram que a conjectura é verdadeira para o caso em que r é uma potência de primo. Tal resultado se tornou conhecido como o Teorema Topológico de Tveberg (Teorema 5.2.2). No entanto, a conjectura não é válida no caso geral, como mostrou Florian Frick em (FRICK, 2015).

Estes teoremas são resultados clássicos dessa recente aplicação de métodos topológicos em Combinatória e serviram de motivação para que tais métodos pudessem ser explorados na solução de problemas em Teoria de Grafos e Problemas de Mergulho. O objetivo deste trabalho é exibir diferentes aplicações do método topológico na solução destes problemas.

O trabalho está organizado como segue.

O Capítulo 2, intitulado *Complexos simpliciais e Joins* define estas duas estruturas e apresenta suas propriedades. Os conceitos desenvolvidos aqui serão utilizados durante todo o texto, tornando este primeiro capítulo um desenvolvimento de pré-requisitos. A referência principal deste capítulo é (MATOUSEK, 2008).

No Capítulo 3 é apresentado o Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2) em seis versões, as quais provamos serem todas equivalentes. Posteriormente, enunciamos o Lema de Tucker

(Teorema 3.1.6), uma afirmação combinatorial que provamos ser equivalente ao Teorema de Borsuk-Ulam. Logo em seguida foi introduzido o Lema de Greene, um resultado ainda mais forte e necessário na demonstração do Teorema de Lovász-Kneser (Teorema 3.3.52). Também dedicamos uma seção inteira para a demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam, demonstração esta que utiliza homologia singular como principal ferramenta e tem como referência (HATCHER, 2002). Ainda neste capítulo, exibimos as primeiras aplicações de métodos topológicos em geometria e combinatória, as quais utilizam diretamente o Teorema de Borsuk-Ulam. O Teorema do sanduíche de presunto (Teorema 3.3.11) é apresentado em três versões diferentes, porém a versão para medidas é apresentada como um Teorema ainda mais forte, o Teorema do hambúrguer (Teorema 3.3.19), recentemente demonstrado por Mikio Kano e Jan Kynčl em (KANO; KYNČL, 2018). Também foram temas de estudo as multipartições coloridas e o Teorema do colar (Teorema 3.3.28). Como últimas aplicações diretas, demonstramos o Teorema de Lovász-Kneser (Teorema 3.3.52), e em seguida o Lema de Gale (Teorema 3.3.65), fundamental na demonstração do Teorema de Schrivjer (Teorema 3.3.71).

O Capítulo 4 é dedicado às aplicações de métodos topológicos em Teoria dos Grafos. Na primeira seção, cuja referência é (LONGUEVILLE, 2012), é provado o Teorema de Hanani-Tutte (Teorema 4.1.31) que fornece um condição suficiente para que um grafo seja planar. A segunda seção foi baseada em (MATOUSEK, 2008) e seu objetivo é provar os Teoremas 4.2.18 e 4.2.20, os quais exibem limitantes inferiores para o número cromático de um grafo G.

O quinto e último capítulo é dedicado aos Problemas de Mergulho. Na primeira seção é exibida uma demonstração para o Teorema de Van-Kampen-Flores (Teorema 5.1.17). Na seção seguinte é demonstrado o Teorema Topológico de Tveberg (Teorema 5.2.2). A referência principal das duas primeiras seções é (LONGUEVILLE, 2012). Finalizando o capítulo, é desenvolvida na terceira seção a prova do Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado (Teorema 5.3.7), cuja refêrencia é (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014).

CAPÍTULO

2

COMPLEXOS SIMPLICIAIS E *JOINS*

Neste capítulo, introduziremos conceitos preliminares que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho: os complexos simpliciais (responsáveis por estabelecer uma conexão entre geometria e combinatória) e os *joins* (um produto de espaços topológicos com propriedades importantes que o produto usual geralmente não satisfaz). Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em (MATOUSEK, 2008).

2.1 Complexos simpliciais geométricos

Definição 2.1.1. Sejam $v_0, v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^d$. Dizemos que estes pontos são *geometricamente dependentes* se existem $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}^d$, não todos nulos tais que $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i = 0$ e $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$. Caso contrário, $v_0, v_1, ..., v_k$ são chamados *geometricamente independentes* .

Exemplo 2.1.2. Pela definição acima:

(1) Dois pontos $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ são geometricamente independentes se $v_0 \neq v_1$.

(2) Três pontos $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ são geometricamente independentes se não são colineares.

(3) Quatro pontos $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ são geometricamente independentes se eles não são coplanares.

(4) Mais geralmente, $k+1$ pontos $v_0, v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^k$ são geometricamente independentes se todos não pertencem a um mesmo hiperplano.

O lema a seguir nos fornece uma visão geométrica mais clara da definição de $(k+1)$ pontos serem geometricamente independentes.

Lema 2.1.3. São equivalentes:

(1) $v_0, v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^d$ são geometricamente independentes.

(2) Os k vetores $v_1 - v_0, ..., v_k - v_0$ são linearmente independentes.

(3) $(1, v_0), (1, v_1), ..., (1, v_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$ são linearmente independentes.

A seguir definiremos simplexo, o objeto que compõe os complexos simpliciais.

Definição 2.1.4. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^d$ é chamado *convexo* se para quaisquer $x, y \in C$ o segmento $xy = \{tx + (1-t)y \; ; \; t \in [0,1]\}$ está contido em C.

O *fecho convexo* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é a intersecção de todos os conjuntos convexos contendo X. O *fecho convexo* de um conjunto X será denotado por $conv(X)$.

Definição 2.1.5. Um k- simplexo σ é o fecho convexo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ de $(k+1)$ pontos geometricamente independentes. Os pontos de A são chamados *vértices* de σ e denotados por $V(\sigma)$. A *dimensão* de σ é definida como sendo $|V(\sigma)| - 1 = k$ e denotada por $dim\ \sigma$.

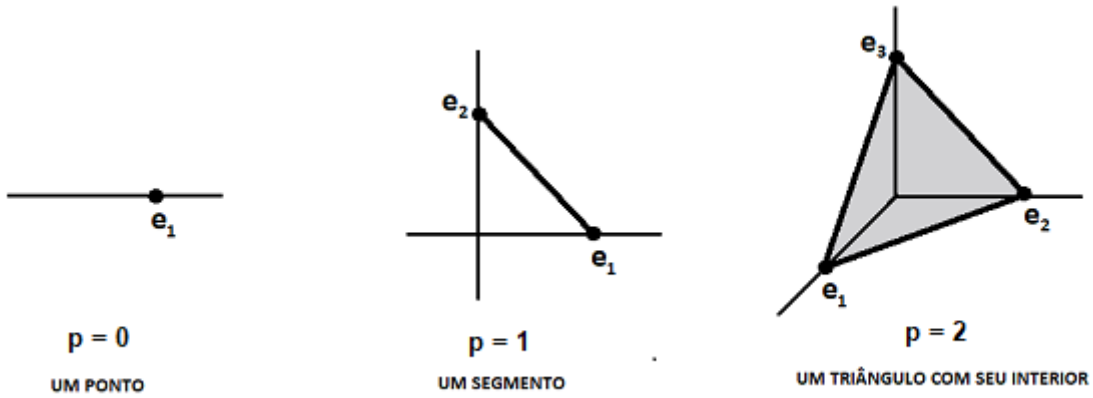
Observação 2.1.6. Note que cada k- simplexo (simplexo k-dimensional) tem $k+1$ vértices.

Observação 2.1.7. Usaremos a denominação k- simplexo quando quisermos especificar a sua dimensão. Quando não for preciso especificar sua dimensão, escreveremos simplesmente simplexo.

Exemplo 2.1.8. Os exemplos mais famosos de simplexos são os p- simplexos padrão. O p-simplexo padrão é o simplexo σ o qual é fecho convexo do conjunto $A = \{e_1, ..., e_{p+1}\}$, onde $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ tem todas as coordenadas nulas, exceto a i-ésima coordenada que tem valor igual a 1.

Veja na figura abaixo os p-simplexos padrão para $p = 0, 1, 2$.

Figura 1 – p- simplexos padrão.



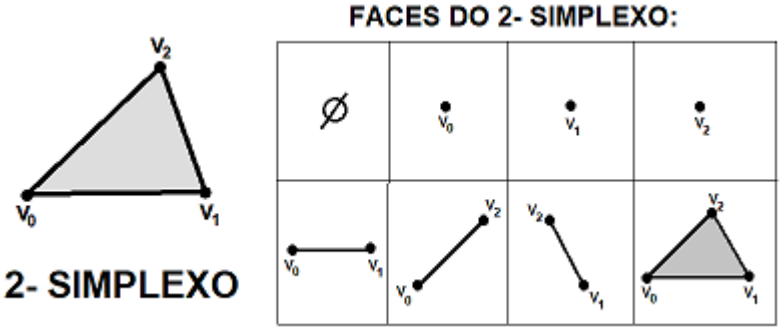
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.1.9. Uma *face* de um k-simplexo σ é o fecho convexo de um subconjunto de vértices de σ.

Observação 2.1.10. Seja σ um k- simplexo cujo conjunto de vértices é A. Claramente $\emptyset \subset A$ para qualquer que seja A, logo o fecho convexo do conjunto vazio também é uma face de σ. O fecho convexo de $\emptyset$ é obviamente $\emptyset$ e, assim, pela definição o conjunto vazio é uma face de qualquer simplexo σ.

Exemplo 2.1.11. Considere o triângulo da Figura 2 (2- simplexo). Temos 3 vértices, logo temos $2^3 = |\mathscr{P}(\{v_0, v_1, v_2\})| = 8$ faces.

Figura 2 – Faces de um 2- simplexo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 2.1.12. A palavra face pode nos levar erroneamente a considerar somente as faces de dimensão $k-1$ (como os segmentos do triângulo do exemplo anterior). Assim, é importante destacar que a nossa definição de face é bem mais geral, pois como foi mostrado no exemplo, todo o triângulo, os pontos e o vazio também são faces e não somente os segmentos.

Definição 2.1.13. Seja σ um simplexo. O *interior relativo* de σ é obtido de σ removendo todas suas faces com dimensão menor que $dim\ \sigma$.

Proposição 2.1.14. Seja σ um n- simplexo. Podemos decompor σ como a união disjunta do interior das faces de σ, isto é:

$$\sigma = \bigsqcup_{F \subset V(\sigma)} int(conv(F)), \tag{2.1}$$

onde $int(conv(F))$ é o interior relativo do simplexo $conv(F)$.

Demonstração. Suponha $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ um n-simplexo.

Assim, $V(\sigma) \subset \mathbb{R}^d$ é o conjunto de $(n+1)$ pontos geometricamente independentes.

Note que para cada $F \subset V(\sigma)$, onde $|F| = k \leq n$ temos que:

$$conv(F) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i\, x_i \ ; \ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, k \ \ e \ \ \{x_1, \ldots, x_k\} = F \right\}. \tag{2.2}$$

Mais ainda:

$$int(conv(F)) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i\, x_i \ ; \ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1, \quad t_i > 0, \ \forall i = 1,...,k \ \ e \ \ \{x_1,...,x_k\} = F \right\}. \tag{2.3}$$

Assim:

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} t_i\, x_i \ ; \ \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \ \forall i = 1,...,n+1 \ \ e \ \ \{x_1,...,x_{n+1}\} = A \right\}. \tag{2.4}$$

Logo, podemos identificar todos os pontos de σ com uma $(n+1)$- upla $(t_1,...,t_{n+1})$ da seguinte forma:

$$x \in \sigma \longmapsto (t_1,...,t_{n+1}), \text{ onde } x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i\, x_i, \text{ com } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1. \tag{2.5}$$

Agora vamos provar a igualdade (2.1).

A inclusão $\bigsqcup_{F \subset V(\sigma)} int(conv(F)) \subset \sigma$ é imediata.

Para mostrar que $\sigma \subset \bigsqcup_{F \subset V(\sigma)} int(conv(F))$, dado $x \in \sigma$, onde x é identificado com a $(n+1)$- upla $(t_1,...,t_{n+1})$, tome o subconjunto $F_x = \{\ x_i \in V(\sigma)\ /\ t_i \neq 0\} \subset V(\sigma)$.

Então $x = \sum_{i=1}^{k} t_i\, x_i$, onde $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ e $t_i > 0$, $\forall\ i = 1,...,k$ e $F_x = \{x_1,...,x_k\}$ e portanto $x \in int\ (conv\ (F_x))$.

Falta mostrar que a união é disjunta.

Suponha $x \in int\ (conv\ (F))$ e $x \in int\ (conv\ (F'))$, com $F, F' \subset V(\sigma)$ e $F \neq F'$.

Temos, para $k, k' \leq n$:

$$x = \sum_{i=1}^{k} t_i\ \ x_i\ \ , \ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1, \quad t_i > 0, \ \forall i = 1,...,k, \tag{2.6}$$

$$x = \sum_{i=1}^{k'} t'_i\ \ y_i\ \ , \ \sum_{i=1}^{k'} t'_i = 1, \quad t'_i > 0, \ \forall i = 1,...,k', \tag{2.7}$$

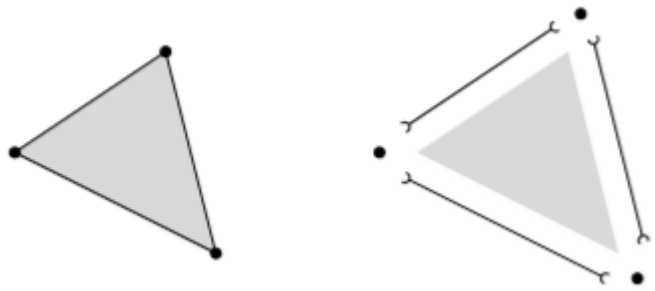
$$\text{onde } \ F = \{x_1,...,x_k\} \ \text{ e } \ F' = \{y_1,...,y_{k'}\}. \tag{2.8}$$

Como $F \neq F'$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 \in F \backslash F'$ e assim temos duas $(n+1)$- uplas distintas para o mesmo $x \in \sigma$, o que é um absurdo. □

Exemplo 2.1.15. Veja na Figura 3 o esquema da decomposição de um triângulo (2-simplexo).

Definição 2.1.16. Um *complexo simplicial* é uma família não vazia Δ de simplexos que satisfazem as duas condições seguintes:

Figura 3 – Decomposição de um 2-simplexo.



Fonte: Matousek (2008, pg. 8).

(C.S. 1) Seja $\sigma \in \Delta$, então toda face de σ está em Δ.

(C.S. 2) Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$, então a intersecção $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é uma face de σ_1 e de σ_2 ao mesmo tempo.

A *dimensão* de um complexo simplicial Δ é a maior dimensão de um simplexo que está na família Δ, isto é $dim\ (\Delta) = max\ \{dim\ \ \sigma\ ;\ \sigma \in \Delta\}$.

O *conjunto de vértices* de Δ , denotado por $V(\Delta) = \{x\ ;\ x \in V(\sigma)$ e $\sigma \in \Delta\}$ é o conjunto de todos os vértices dos simplexos da família Δ.

Observação 2.1.17. Para qualquer complexo simplicial Δ temos $\emptyset \in \Delta$, pois como Δ é uma família não vazia, existe um simplexo $\sigma \in \Delta$ e, como vimos na Observação 2.1.10, $\emptyset$ é uma face de σ e pela condição **(C.S. 1)** da Definição 2.1.16 segue que $\emptyset \in \Delta$.

Quando o complexo simplicial contém somente o conjunto vazio, isto é, $\Delta = \{\emptyset\}$, definimos $dim\ (\Delta) = -1$.

Observação 2.1.18. Neste texto trataremos apenas de complexos simpliciais finitos, isto é, quando o conjunto Δ é finito. Os complexos simpliciais finitos serão suficientes para nossas aplicações em combinatória e geometria.

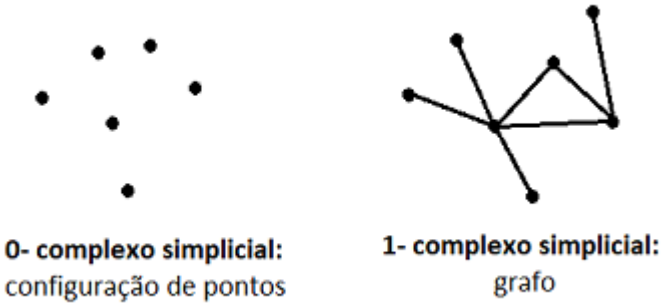
Exemplo 2.1.19. 0-dimensional complexo simplicial é uma configuração de pontos e um 1-dimensional complexo simplicial é um grafo. Veja a Figura 4.

Exemplo 2.1.20. Na Figura 5 temos um exemplo de um 2- dimensional complexo simplicial e dois exemplos que não satisfazem as condições de complexo simplicial.

Definição 2.1.21. A união de todos os simplexos de Δ é chamada *poliedro* de Δ e será denotado por $||\Delta||$.

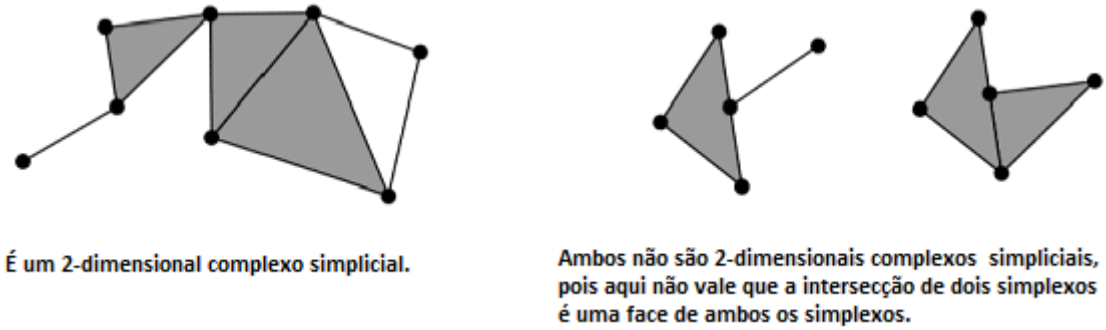
Observação 2.1.22. Como vimos na Proposição 2.1.14, temos uma partição do interior das faces para qualquer simplexo σ. Assim, o interior de todos os simplexos de um complexo simplicial Δ também formam uma partição do poliedro $||\Delta|| = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} int\ (\sigma)$.

Figura 4 – 0 e 1- dimensional complexos simpliciais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5 – Exemplos que mostram a estrutura de um 2- dimensional complexo simplicial.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 9).

Definição 2.1.23. Seja Δ um complexo simplicial. Como já observamos, temos a partição

$$||\Delta|| = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} int(\sigma). \tag{2.9}$$

Assim, dado um ponto $x \in ||\Delta||$, existe um único simplexo $\sigma \in \Delta$ tal que $x \in int\ (\sigma)$. Tal simplexo é chamado o *suporte* de x e será denotado por $supp\ (x)$. Em outras palavras:

$$supp(x) = \{\sigma;\ \text{ onde } \ x \in int(\sigma) \ \text{ e } \ \sigma \in \Delta\}. \tag{2.10}$$

Lema 2.1.24. O conjunto de todas as faces de um simplexo é um complexo simplicial.

Demonstração. Um n- simplexo $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ é o fecho convexo de um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^d$ geometricamente independente, onde $|V| = n+1$.

Note que todas as faces de σ são da forma $conv\ (F)$, onde $F \subset V$ e, portanto, o que o lema afirma é que a família $\Delta = \{\ conv(F)\ ;\ F \subset V\}$ é um complexo simplicial.

Vamos então mostrar que Δ é complexo simplicial.

Primeiramente note que $\Delta \neq \emptyset$, pois $\emptyset = conv\ (\emptyset) \in \Delta$ (já que $\emptyset \subset V$).

Para verificar a Propriedade **(C.S. 1)** da Definição 2.1.16, seja $\sigma \in \Delta$, $\sigma = conv\ (F)$, para algum $F \subset V$ e $V(\sigma) = F$. Logo, uma face de σ é da forma $conv\ (G)$, para $G \subset V(\sigma) = F$ e como $G \subset F \subset V$, segue que $G \subset V$ e assim toda face de σ está em Δ.

Verificação da Propriedade **(C.S.2)** da 2.1.16: sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$. Então, $\sigma_1 = conv\ (F)$ e $\sigma_2 = conv\ (G)$, para $F, G \subset V$.

Basta mostrar que:

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = conv(F) \cap conv(G) = conv(F \cap G), \tag{2.11}$$

pois $F \cap G \subset V$ e $F \cap G \subset F, G$, logo $\sigma_1 \cap \sigma_2$ será face de σ_1 e σ_2.

Vamos mostrar a igualdade (2.11).

A inclusão $conv\ (F \cap G) \subset conv\ (F) \cap conv\ (G)$ é imediata

Para mostrar que $conv\ (F) \cap conv\ (G) \subset conv\ (F \cap G)$, seja $x \in conv\ (F) \cap conv\ (G)$. Então:

$$x = \sum_{u \in F} \alpha_u\, u, \ \ com \ \sum_{u \in F} \alpha_u = 1 \ \ e \ \ \alpha_u \geq 0, \ \ \forall u \in F. \tag{2.12}$$

$$x = \sum_{v \in G} \beta_v\, v, \ \ com \ \sum_{v \in G} \beta_v = 1 \ \ e \ \ \beta_v \geq 0, \ \ \forall v \in G. \tag{2.13}$$

Assim:

$$0 = x - x = \sum_{u \in F} \alpha_u\, u - \sum_{v \in G} \beta_v\, v = \sum_{w \in F \cap G} (\alpha_w - \beta_w)\, w + \sum_{u \in F \setminus G} \alpha_u\, u + \sum_{v \in G \setminus F} \beta_v\, v. \tag{2.14}$$

Como $F \cup G \subset V$ é geometricamente independente e $F \cup G = (F \cap G) \sqcup (F \setminus G) \sqcup (G \setminus F)$ temos que:

$$\alpha_w - \beta_w = 0, \ \ \forall w \in F \cap G, \tag{2.15}$$

$$\alpha_u = 0, \ \ \forall u \in F \setminus G, \tag{2.16}$$

$$\beta_v = 0, \ \ \forall v \in G \setminus F. \tag{2.17}$$

Logo:

$$x = \sum_{u \in F} \alpha_u\, u = \sum_{w \in F \cap G} \alpha_w\, w + \sum_{u \in F \setminus G} \alpha_u\, u = \sum_{w \in F \cap G} \alpha_w\, w. \tag{2.18}$$

Também, $\sum_{u \in F} \alpha_u = 1$ implica que $\sum_{w \in F \cap G} \alpha_w + \sum_{u \in F \setminus G} \alpha_u = 1$ e, assim, $\sum_{w \in F \cap G} \alpha_w = 1$. Claramente, $\alpha_w \geq 0$, $\forall w \in F \cap G$.

Assim:

$$x = \sum_{w \in F \cap G} \alpha_w\, w, \ \ \text{com} \ \sum_{w \in F \cap G} \alpha_w = 1 \ \ \text{e} \ \ \alpha_w \geq 0 \ \ , \ \ \forall w \in F \cap G. \tag{2.19}$$

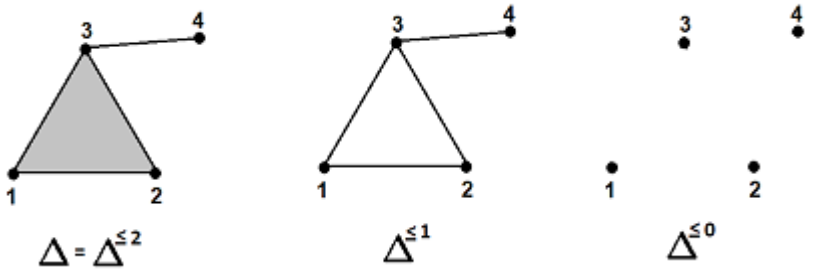
Portanto $x \in conv\ (F \cap G)$. □

Observação 2.1.25. Seja σ um n-dimensional simplexo. O complexo simplicial consistindo de todas as faces de σ será denotado por σ^n. Então, $||\sigma^n||$ é um n-simplexo (geométrico).

Definição 2.1.26. Dado um complexo simplicial Δ, um *subcomplexo simplicial* $\Delta' \subset \Delta$ é um subconjunto $\Delta' \subset \Delta$ o qual também é um complexo simplicial.

Exemplo 2.1.27. Um exemplo de subcomplexo que será recorrente ao longo deste trabalho é o k- esqueleto de um complexo simplicial Δ. Este subcomplexo será denotado por $\Delta^{\leq k}$ e consiste dos simplexos de Δ com dimensão no máximo k. Na Figura 6 temos um exemplo de um 2-dimensional complexo simplicial e todos os seus respectivos k-esqueletos ($k = 0, 1$ e 2).

Figura 6 – Exemplo de k- esqueleto.



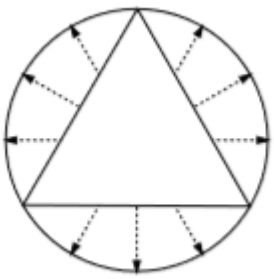
Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Triangulações

Definição 2.2.1. Seja X um espaço topológico. Se existir um complexo simplicial Δ tal que o poliedro $||\Delta||$ é homeomorfo a X, então Δ é chamado uma *triangulação* de X.

Exemplo 2.2.2. Uma triangulação para S^{n-1} consiste da fronteira de um n- simplexo, isto é, o complexo simplicial σ^n sem os pontos $x \in \sigma^n$ cujo suporte é o próprio n- simplexo. Para visualizar este homeomorfismo basta utilizar projeção central, como na Figura 7.

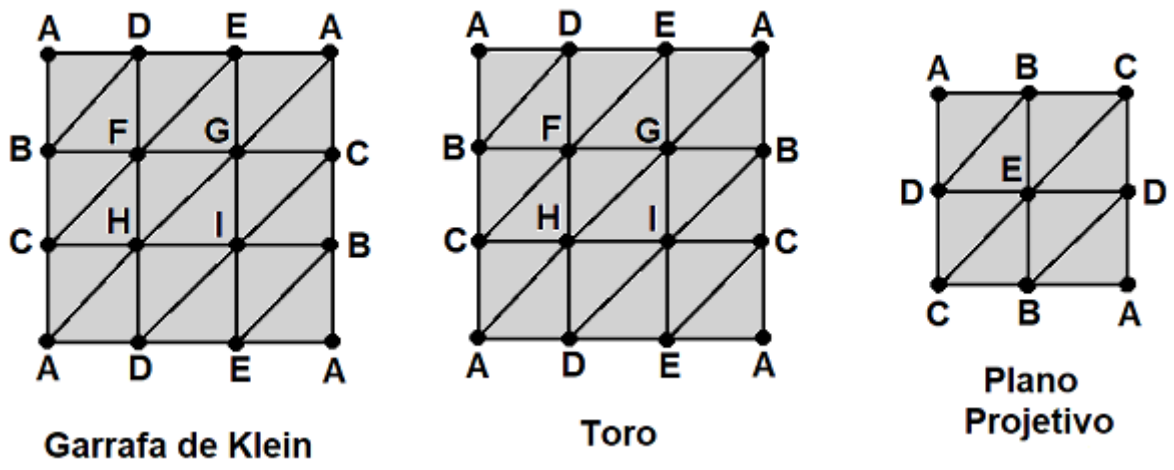
Figura 7 – S^1 como fronteira de um 2-simplexo.



Fonte: Matousek (2008, pg. 10).

Exemplo 2.2.3. As triangulações do toro, garrafa de Klein e plano projetivo, estão representadas na Figura 8 (importante enfatizar aqui que não podemos realizar essas triangulações em $\mathbb{R}^2$). Assim, nem todo 2- dimensional complexo simplicial pode ser realizado no plano.

Figura 8 – Triangulações de superfícies conhecidas.



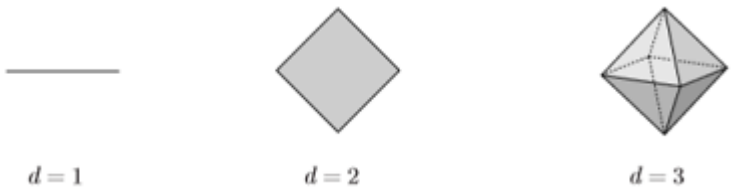
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.2.4. O *d- dimensional crosspolytope* é o fecho convexo

$$conv\ \{e_1, -e_1, ..., e_d, -e_d\}$$

dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^d$ e seus opostos.

Figura 9 – Crosspolytopes.



Fonte: Matousek (2008, pg. 11).

Também podemos definir como sendo a bola unitária em relação à norma:

$$l_1 : \{x \in \mathbb{R}^d : ||x||_1 \leq 1\ \}.$$

2.3 Complexos simpliciais abstratos

O complexo simplicial abstrato é a versão combinatorial do complexo simplicial geométrico, ou seja, temos duas descrições do mesmo objeto matemático e podemos usar aquela que for mais conveniente para determinada situação. Nesta seção vamos explorar como obter a versão combinatorial a partir da versão geométrica e vice-versa, além de introduzir as aplicações simpliciais.

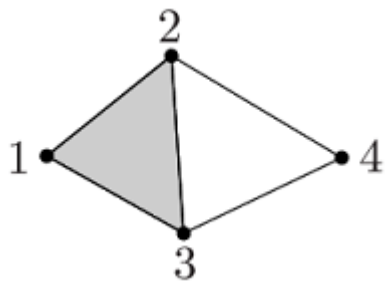
Definição 2.3.1. Um *complexo simplicial abstrato* é um par (V,K), onde V é um conjunto e $K \subset \mathscr{P}(V)$ é um sistema hereditário de subconjuntos de V, isto é, temos que se $F \in K$ e $G \subset F$ então $G \in K$ (em particular, $\emptyset \in K$ quando $K \neq \emptyset$). Os elementos de K são chamados *simplexos (abstratos)*. Definimos a *dimensão* de K como $dim\ (K) = max\ \{|F|-1 : F \in K\}$.

Observação 2.3.2. Assumiremos que $V = \bigcup K$, e vamos escrever somente K ao invés de (V,K), onde V já fica implícito que é igual a $\bigcup K$.

Cada complexo simplicial geométrico determina um complexo simplicial abstrato. De fato, dado um complexo simplicial geométrico Δ, sua versão combinatorial (V,K) consiste dos pontos de V como sendo os vértices de Δ, isto é, $V \overset{def}{=} V(\Delta)$ e o simplexos abstratos de K como sendo os conjuntos $V(\sigma) \subset V \overset{def}{=} V(\Delta)$ de vértices, onde $\sigma \in \Delta$.

Exemplo 2.3.3. Para o 2- simplexo geométrico da Figura 10, temos o complexo simplicial abstrato $K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}\}$.

Figura 10 – Representação de um 2- simplexo.



Fonte: Matousek (2008, pg. 14).

Definição 2.3.4. Seja K um complexo simplicial abstrato. Um complexo simplicial geométrico Δ é chamado *realização geométrica* de K se os vértices de Δ estão em correspondência biunívoca com os pontos de K, e os simplexos de Δ estão em correspondência biunívoca com os subconjuntos de K, que consistem nos pontos identificados com os vértices do simplexo geométrico.

Observação 2.3.5. No Exemplo 2.3.3, o complexo simplicial representado na Figura 10 é a representação geométrica do complexo simplicial abstrato K.

Proposição 2.3.6. Todo complexo simplicial abstrato K finito admite uma realização geométrica.

Demonstração. Seja K um complexo simplicial abstrato com $|V|$ vértices. Defina $n \overset{def}{=} |V|-1$.

Tome $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um n- simplexo. Pelo Lema 2.1.24, σ^n é um complexo simplicial. Vamos identificar o conjunto de vértices V com os vértices do n- dimensional simplexo σ^n. Agora, vamos definir um subcomplexo $\Delta \subset \sigma^n$ por $\Delta = \{\ conv\ (F) : F \in K\ \}$, onde os vértice já

estão devidamente identificados. Claramente, o complexo simplicial abstrato associado a este complexo simplicial geométrico é K e, portanto, Δ é a realização geométrica de K. $\square$

Exemplo 2.3.7. Vamos denotar por $\Diamond^{n-1}$ o complexo simplicial abstrato com conjunto de vértices $V(\Diamond^{n-1}) = [2] \times [n]$, onde $F \subset V(\Diamond^{n-1})$ é um simplexo, se não existe $i \in [n]$ tal que $(1,i),(2,i) \in F$.

Fazendo as associações:

$$(1,i) \mapsto +e_i \qquad \text{e} \qquad (2,i) \mapsto -e_i, \ \forall i \in [n], \tag{2.20}$$

identificamos $\Diamond^{n-1}$ como bordo do n- dimensional *crosspolytope*.

Logo:

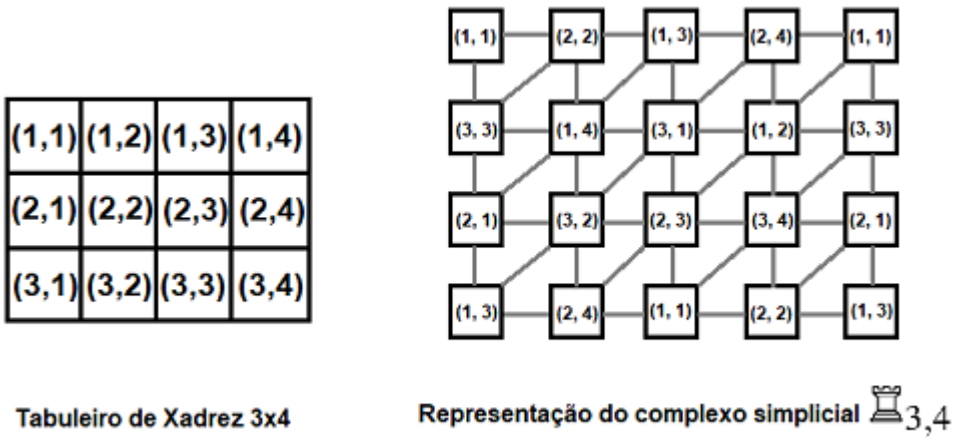
$$||\Diamond^{n-1}|| \text{ é homeomorfo a } S^{n-1}. \tag{2.21}$$

Definição 2.3.8 (Mergulho topológico)**.** Uma função contínua injetora $f : X \to Y$ é dita um *mergulho topológico* se f induz um homeomorfismo entre X e $f(X)$, onde $f(X)$ é o subespaço topológico com a topologia de subespaço de Y.

Exemplo 2.3.9. O *complexo simplicial do tabuleiro de xadrez*, denotado por $\♖_{m,n}$ tem os quadradinhos 1×1 de um tabuleiro $m \times n$ como vértices, e os simplexos são os subconjuntos de quadradinhos 1×1 em que quaisquer dois quadradinhos nunca estão na mesma linha ou coluna.

Na Figura 11 temos uma representação de $\♖_{3,4}$. Temos que $||\♖_{3,4}||$ é homeomorfo ao Toro, isto é, $\♖_{3,4}$ é uma triangulação do Toro e não pode ser realizada em $\mathbb{R}^2$, pois neste caso existiria um mergulho topológico do Toro em $\mathbb{R}^2$, o que é um absurdo.

Figura 11 – Representação de $\♖_{3,4}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nosso próximo passo é definir as aplicações simpliciais, que estabelecerão uma conexão entre combinatória e topologia.

Definição 2.3.10. Sejam K e L dois complexos simpliciais. Uma *aplicação simplicial* de K em L é uma aplicação $f : V(K) \to V(L)$ que leva simplexos em simplexos, isto é, $f(F) \in L$ sempre que $F \in K$. Uma aplicação simplicial bijetiva cuja inversa também é uma aplicação simplicial é chamada um *isomorfismo* de complexos simpliciais abstratos. Se existe um isomorfismo entre os complexos simpliciais K e L, eles são chamados *isomorfos*, e escrevemos $K \cong L$.

Observação 2.3.11. Note que cada k- simplexo $\sigma \in K$ é levado para um l- simplexo $f(\sigma) \in L$, onde $l \leq k$, pois $l = |V(f(\sigma))| - 1 = |f(V(\sigma))| - 1 \leq |V(\sigma)| - 1 = k$.

Definição 2.3.12. Sejam Δ_1 e Δ_2 complexos simpliciais geométricos, K_1 e K_2 seus respectivos complexos simpliciais abstratos, e $f : V(K_1) \to V(K_2)$ uma aplicação simplicial de K_1 em K_2. Definiremos a *aplicação extensão afim* de f,

$$||f|| : ||\Delta_1|| \to ||\Delta_2|| \tag{2.22}$$

estendendo f linearmente nos interiores relativos dos simplexos de Δ_1, da seguinte maneira: se $\sigma = supp\ (x) \in \Delta_1$ é o suporte de x, os vértices de σ são $v_0, ..., v_k$, e $x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i$ com $\alpha_0, ..., \alpha_k > 0$ e $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$, definimos:

$$||f||(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(v_i). \tag{2.23}$$

Observação 2.3.13. Note que $||f||$ é bem definida, pois sendo f uma aplicação simplicial, o conjunto de vértices $\{f(v_0), ..., f(v_k)\}$ é sempre o conjunto de vértices de um simplexo em Δ_2.

Lema 2.3.14. Seja Δ um complexo simplicial e X um espaço topológico. A função $f : ||\Delta|| \to X$ é contínua se, e somente se $f_{|\sigma} : \sigma \to X$ é contínua, para todo $\sigma \in \Delta$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $\sigma \in \Delta$, temos que $\sigma \subset ||\Delta||$ é um subespaço, então obviamente $f_{|\sigma} : \sigma \to X$ é contínua, pois $f : ||\Delta|| \to X$ é contínua.

($\Leftarrow$) Note que:

$$||\Delta|| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma. \tag{2.24}$$

Seja C fechado de X. Pela hipótese, para qualquer $\sigma \in \Delta$, $(f_{|\sigma})^{-1}(C) = \sigma \cap f^{-1}(C)$ é fechado.

Temos:

$$f^{-1}(C) = \left[\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma\right] \bigcap f^{-1}(C) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma \cap f^{-1}(C). \tag{2.25}$$

Logo, $f^{-1}(C)$ é fechado, pois é união finita de fechados. $\square$

Proposição 2.3.15. Sejam K_1 e K_2 complexos simpliciais abstratos, Δ_1 e Δ_2 seus respectivos complexos simpliciais geométricos. Seja $f : V(K_1) \to V(K_2)$ uma aplicação simplicial, então $||f|| : ||\Delta_1|| \to ||\Delta_2||$ é contínua. Se f é injetora, então $||f||$ é injetora, e se f é um isomorfismo, então $||f||$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Seja $\sigma \in \Delta_1$, onde $V(\sigma) = \{v_0, ..., v_k\}$, então

$$||f||_{|\sigma} : \sigma \to ||\Delta_2||;$$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i \mapsto \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(v_i). \tag{2.26}$$

é claramente contínua e, pelo Lema 2.3.14, segue que $||f||$ é contínua.

Suponhamos f injetora e sejam $x, y \in ||\Delta_1||$ tais que $||f||(x) = ||f||(y)$.

Suponhamos ainda que:

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i, \quad onde \quad V(supp(x)) = \{v_0, ..., v_k\}; \tag{2.27}$$

$$y = \sum_{j=0}^{k'} \beta_j v'_j, \quad onde \quad V(supp(y)) = \{v'_0, ..., v'_{k'}\}. \tag{2.28}$$

Segue que:

$$||f||(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(v_i) \quad e \quad ||f||(y) = \sum_{j=0}^{k'} \beta_j f(v'_j). \tag{2.29}$$

Se $||f||(x) = ||f||(y)$, então $\{f(v_0), ..., f(v_k)\} = \{f(v'_0), ..., f(v'_{k'})\}$. Como f é injetora por hipótese, temos $k = k'$ e $\{v_0, ..., v_k\} = \{v'_1, ..., v'_k\}$. Assim podemos supor, sem perda de generalidade, $v_i = v'_i$ e segue que:

$$||f||(x) = ||f||(y) \text{ o que implica } \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(v_i). \tag{2.30}$$

Como f é aplicação simplicial, $\{f(v_0), ..., f(v_k)\}$ é um k- simplexo, logo $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 0, 1, ..., k$, e assim $x = y$.

Suponhamos f isomorfismo. É imediato que $||f|| : ||\Delta_1|| \to ||\Delta_2||$ é contínua.

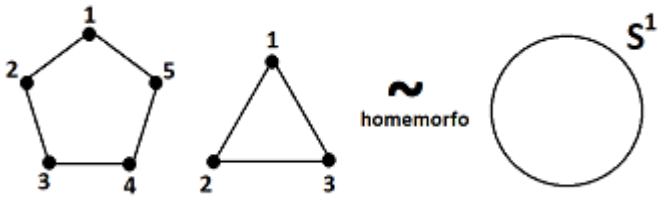
Pela hipótese, $f^{-1} : K_2 \to K_1$ também é aplicação simplicial e, assim, a aplicação $||f^{-1}|| : ||\Delta_2|| \to ||\Delta_1||$ é contínua. Basta notar que $||f||^{-1} = ||f^{-1}||$.

Assim, $||f||$ e $||f||^{-1}$ são contínuas e, portanto, $||f||$ é homeomorfismo. □

Corolário 2.3.16. Sejam K_1 e K_2 dois complexos simpliciais abstratos, Δ_1 e Δ_2 seus respectivos complexos simpliciais geométricos. Se K_1 e K_2 são isomorfos, então $||\Delta_1||$ e $||\Delta_2||$ são homeomorfos.

Observação 2.3.17. A volta do Corolário 2.3.16 não vale. Na Figura 12 temos um contraexemplo, pois ambos os poliedros dos complexos geométricos são homeomorfos à S^1 mas os complexos simpliciais têm cardinalidades distintas (3 e 5) e, portanto, não existe bijeção entre eles.

Figura 12 – Contra exemplo para a volta do Corolário 2.3.16.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4 Dimensão de realizações geométricas

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que qualquer d- dimensional complexo simplicial tem uma realização geométrica em $\mathbb{R}^{2d+1}$. Isso significa um resultado mais preciso sobre a realização geométrica de um complexo simplicial em comparação àquela exibida na demonstração da Proposição 2.3.6. Mais adiante, com o Teorema de Van Kampen-Flores (Teorema 5.1.17) veremos que este é um resultado otimizado, pois o d- dimensional complexo simplicial $(\sigma^{2d+2})^{\leq d}$ não tem realização geométrica em $\mathbb{R}^{2d}$.

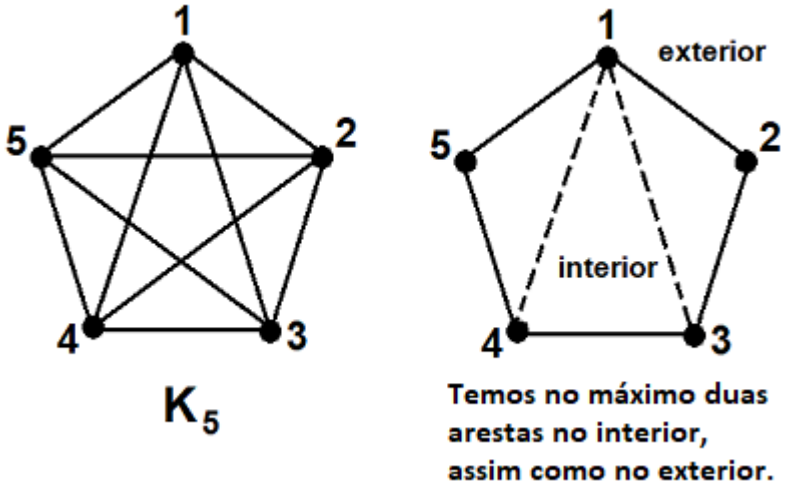
Para $d = 1$, o que iremos demonstrar é que todo grafo pode ser representado em $\mathbb{R}^3$. Para efeito de motivação ao resultado principal desta seção, iremos demonstrar que o grafo K_5 não é um grafo planar, isto é, não pode ser representado em $\mathbb{R}^2$ e, assim, o resultado se mostra, já nesse caso, um importante resultado.

Exemplo 2.4.1. Suponhamos que K_5 possui uma representação no plano. Claramente, existe um ciclo de comprimento 5 em K_5. Divida o plano em interior e exterior deste ciclo (isto é possível pelo Teorema 2.4.2). Tanto no exterior quanto no interior teremos no máximo duas arestas em cada parte (note que o plano é homeomorfo a $S^2 \setminus \{S\}$, onde S denota o pólo sul e ficará fácil visualizar, porque temos no máximo duas arestas no exterior). Assim, teremos no máximo $5+2+2 = 9 < 10$ arestas, o que é um absurdo.

Teorema 2.4.2 (Teorema da curva de Jordan)**.** ((MUNKRES, 2000),Theorem 63.4, pg.390) Seja C uma curva fechada em S^2. Então C separa S^2 em exatamente duas componentes conexas W_1 e W_2. Além disso, C é fronteira de W_1 e W_2 ao mesmo tempo, isto é, $C = \overline{W_i} - W_i$, para $i = 1, 2$.

Primeiramente, vamos enunciar e provar os seguintes resultados.

Figura 13 – Grafo K_5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lema 2.4.3. Seja K um complexo simplicial. Se $f : V(K) \to \mathbb{R}^d$ é uma aplicação injetiva tal que $f(F \cup G)$ é geometricamente independente, para quaisquer F, $G \in K$. Então, a associação:

$$F \mapsto \sigma_F \overset{def}{=} conv(F) \tag{2.31}$$

fornece uma realização geométrica de K em $\mathbb{R}^d$.

Demonstração. Claramente **(C.S. 1)** é satisfeita, pois toda face de σ_F, para $F \in K$ é da forma $conv(G)$, onde $G \subset F$ e, portanto, $conv(G) = \sigma_G$, para $G \in K$.

Vamos verificar **(C.S. 2)**: sejam σ_F, σ_G, para F, $G \in K$. Como $f(F \cup G)$ é geometricamente independente por hipótese, como na demonstração do Lema 2.1.24, temos:

$$\sigma_F \cap \sigma_G = \sigma_{F \cap G}. \tag{2.32}$$

Como $\sigma_{F \cap G}$ é face de σ_F e σ_G, pois $F \cap G \subset F$ e $F \cap G \subset G$, segue que $\sigma_F \cap \sigma_G$ é face de σ_F e σ_G. □

Definição 2.4.4. A *curva momento* γ em $\mathbb{R}^d$ é dada por

$$\gamma = \{\gamma(t) = (t, t^2, ..., t^d) \in \mathbb{R}^d;\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^d. \tag{2.33}$$

Lema 2.4.5. Dado um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^d$, H intersecta a curva momento em no máximo d pontos. Consequentemente, qualquer conjunto de $d+1$ pontos distintos em γ é geometricamente independente. Mais ainda, se γ intersecta um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^d$ em d pontos distintos, em cada intersecção γ atravessa para o outro lado de H.

Demonstração. Um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^d$ tem equação do tipo:

$$H = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d;\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d = b\}, \tag{2.34}$$

onde $(a_1, ..., a_d) \neq (0, ..., 0)$.

Se um ponto $\gamma(t)$ de γ está em H, então $a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_dt^d = b$.

Logo, o conjunto $\{t \in \mathbb{R};\ \gamma(t) \in H\}$ consiste das raízes do polinômio:

$$p(t) = a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_dt^d - b = \left(\sum_{i=1}^{d} a_it_i\right) - b. \tag{2.35}$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, como $deg(p) \leq d$, o polinômio p tem no máximo d raízes e, então, a intersecção de γ com H tem no máximo d pontos.

Suponhamos que γ intersecta H em d pontos distintos. Então, $p(t)$ tem d raízes distintas, isto é,

$$p(t) = a_d.(t - r_1).(t - r_2)...(t - r_d), \quad a_d \neq 0, \tag{2.36}$$

onde $r_i \neq r_j$, para $i,\ j \in \{1, 2, ..., d\}$ e $i \neq j$.

Para mostrar que γ atravessa para o outro lado de H em cada intersecção $\gamma(r_i)$, devemos mostrar que $p(t)$ está crescendo ou decrescendo ao redor daquele ponto, o que significa $p'(r_i) \neq 0$.

De fato,

$$p(t) \quad = \quad [a_d.(t - r_i)].\left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d}(t - r_j)\right]. \tag{2.37}$$

Então:

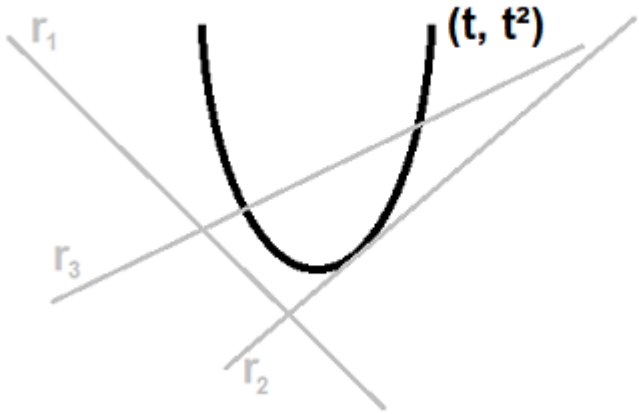
$$p'(t) \quad = \quad a_d.\left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d}(t - r_j)\right] + [a_d.(t - r_i)].\left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d}(t - r_j)\right]'. \tag{2.38}$$

Logo,

$$p'(r_i) = a_d.\left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d}(r_i - r_j)\right] \neq 0, \tag{2.39}$$

pois todas as raízes são distintas. □

Figura 14 – Curva momento no plano e intersecções.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.4.6. No caso $d = 2$, o que o Lema 2.4.5 nos afirma é que qualquer reta intersecta a curva momento $\gamma = \{(t,t^2);\ t \in \mathbb{R}\}$ em no máximo dois pontos (todos os casos são mostrados na Figura 14) e quando intersecta em dois pontos, a curva momento atravessa os semiplanos definidos pela reta.

Teorema 2.4.7 (Realização geométrica)**.** Seja K um d- dimensional complexo simplicial. Então, K tem uma realização geométrica em $\mathbb{R}^{2d+1}$.

Demonstração. Defina uma aplicação $f : V(K) \to \mathbb{R}^{2d+1}$ tal que cada vértice de K é associado a um ponto distinto da curva momento γ em $\mathbb{R}^{2d+1}$.

Assim, se provarmos a condição do Lema 2.4.3, teremos uma realização geométrica de K em $\mathbb{R}^{2d+1}$.

Dados F, $G \in K$ temos:

$$|F \cup G| \leq |F| + |G| \leq (d+1) + (d+1) = 2d+2. \tag{2.40}$$

Pelo Lema 2.4.5, $2d+2 = (2d+1)+1$ pontos em γ são geometricamente independentes, logo $f(F \cup G)$ é geometricamente independente, pois $|f(F \cup G)| \leq 2d+2$ e a condição do Lema 2.4.3 está verificada. □

A seguir temos um resultado interessante, o qual segue do Teorema 2.4.7, sobre mergulho topológico de uma superfície fechada (compacta e sem bordo) em um espaço Euclideano. Para isto, precisamos do Teorema de Radó, enunciado a seguir:

Definição 2.4.8. Uma *triangularização* para uma superfície M é uma triangulação Δ de M, onde Δ é um 2- dimensional complexo simplicial que satisfaz a seguinte condição: se $\sigma \in \Delta$, existe $\tau \in \Delta$ um 2-simplexo tal que $\sigma \subset \tau$.

Teorema 2.4.9 (Teorema de Radó)**.** (RADÓ, 1925) Toda superfície fechada pode ser triangularizada.

Teorema 2.4.10. Toda superfície fechada pode ser mergulhada topologicamente em $\mathbb{R}^5$.

Demonstração. Seja M uma superfície fechada, então pelo Teorema de Radó (Teorema 2.4.9) M tem uma triangularização Δ. Então, $||\Delta||$ é homeomorfo a M e pelo Teorema 2.4.7 temos uma realização geométrica de Δ em $\mathbb{R}^5$ e, consequentemente, um mergulho topológico de M em $\mathbb{R}^5$. □

2.5 Complexos simpliciais e *Posets*

Nesta seção, estudaremos a correspondência entre complexos simpliciais finitos e posets finitos.

Definição 2.5.1. Um conjunto parcialmente ordenado, ou simplesmente *poset (partially ordered set)*, é um par $(P, \preceq)$, onde P é um conjunto não vazio e $\preceq$ é uma relação de ordem, ou seja, uma relação binária reflexiva, transitiva e antissimétrica.

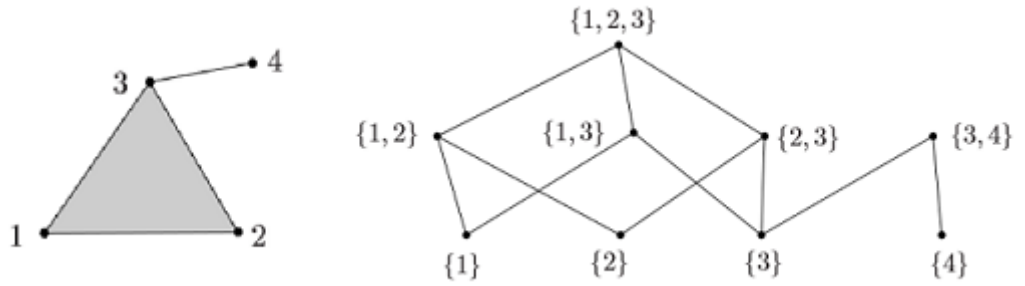
Observação 2.5.2. Frequentemente, denotaremos o *poset* $(P, \preceq)$ apenas como P, omitindo a relação de ordem.

Definição 2.5.3. O *complexo ordem* de um poset P é o complexo simplicial $\Delta(P)$, cujos vértices são os elementos de P e cujos simplexos são todas as cadeias (isto é, subconjuntos ordenados $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, onde $x_1 \preceq x_2 \preceq ... \preceq x_k$) em P.

Definição 2.5.4. O *poset face* de um complexo simplicial K é o *poset* $P(K)$, o qual é o conjunto de todos os simplexos não vazios de K ordenados pela relação de inclusão.

Exemplo 2.5.5. Na Figura 15 temos um complexo simplicial e seu respectivo *poset face*.

Figura 15 – Exemplo de *poset face*.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 18).

Definição 2.5.6. Dado um complexo simplicial K, o complexo simplicial

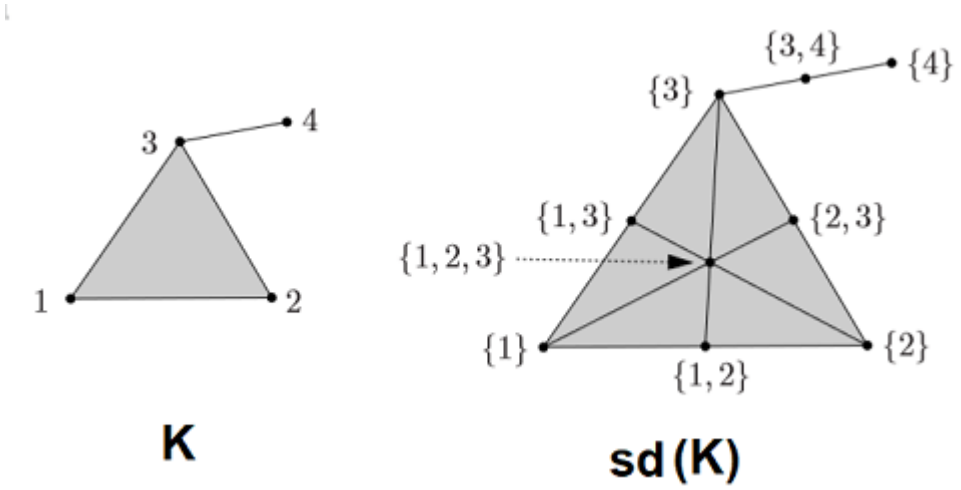
$$sd(K) \stackrel{def}{=} \Delta(P(K)) \tag{2.41}$$

(isto é, o complexo ordem do *poset face de K)* é chamado *subdivisão baricêntrica* de K.

Observação 2.5.7. Mais explicitamente, os vértices de $sd(K)$ são os simplexos não vazios de K, e os simplexos de $sd(K)$ são as cadeias dos simplexos de K ordenados pela inclusão.

Dada uma realização geométrica de K, construímos a partir dela uma realização geométrica de $sd(K)$, colocando o vértice de $\sigma \in K$ no seu centro de gravidade (como na Figura 16). A partir dessa realização geométrica, como é sugestivo na Figura 16, temos $||K||$ homeomorfo a $||sd(K)||$.

Figura 16 – Exemplo de subdivisão baricêntrica.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 18).

Definição 2.5.8. Sejam $(P_1, \preceq_1)$ e $(P_2, \preceq_2)$ *posets*. Uma aplicação $f : P_1 \to P_2$ é chamada *monótona* se $x \preceq_1 y$ implica $f(x) \preceq_2 f(y)$.

Proposição 2.5.9. Cada aplicação monótona $f : P_1 \to P_2$ entre *posets* é também uma aplicação simplicial $f : V(\Delta(P_1)) \to V(\Delta(P_2))$.

Demonstração. Inicialmente note $f : V(\Delta(P_1)) \to V(\Delta(P_2))$ está bem definida, pois $V(\Delta(P_1)) = P_1$ e $V(\Delta(P_2)) = P_2$.

Vamos mostrar agora que f é, de fato, uma aplicação simplicial: seja $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in \Delta(P_1)$, onde $x_1 \preceq_1 x_2 \preceq_1 ... \preceq_1 x_k$.

Então:

$f(\{x_1, x_2, ..., x_k\}) = \{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)\}$, onde vale $f(x_1) \preceq_2 f(x_2) \preceq_2 ... \preceq_2 f(x_k)$,

pois f é monótona.

Logo, $f(\{x_1, x_2, ..., x_k\}) = \{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)\} \in \Delta_2$. □

Proposição 2.5.10. Sejam K_1 e K_2 complexos simpliciais, e Δ_1, Δ_2 seus respectivos complexos simpliciais geométricos. Consideremos uma aplicação arbitrária f que associa cada simplexo $F \in K_1$ a um simplexo $f(F) \in K_2$ e suponha que se $F' \subset F$, então $f(F') \subset f(F)$. Assim, f pode ser considerada como uma aplicação simplicial de $sd(K_1)$ em $sd(K_2)$, e induz uma aplicação contínua $||f|| : ||\Delta_1|| \to ||\Delta_2||$.

Demonstração. Vamos mostrar que $f : sd(K_1) \to sd(K_2)$ é aplicação simplicial. Seja $\{F_1, F_2, ..., F_k\} \in sd(K_1)$, isto é, $F_1, F_2, ..., F_k \in K_1$ e $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_k$.

Por hipótese, $f(F_1), f(F_2), ..., f(F_k) \in K_2$ e $f(F_1) \subset f(F_2) \subset ... \subset f(F_k)$.

Logo, $f(\{F_1, F_2, ..., F_k\}) = \{f(F_1), f(F_2), ..., f(F_k)\} \in sd(K_2)$ e, portanto, f é aplicação simplicial.

Temos a aplicação extensão afim $||f|| : ||sd(K_1)|| \to ||sd(K_2)||$ e como $||\Delta_1||$ é homeomorfo a $||sd(K_1)||$ e $||\Delta_2||$ é homeomorfo a $||sd(K_2)||$, é induzida uma aplicação:

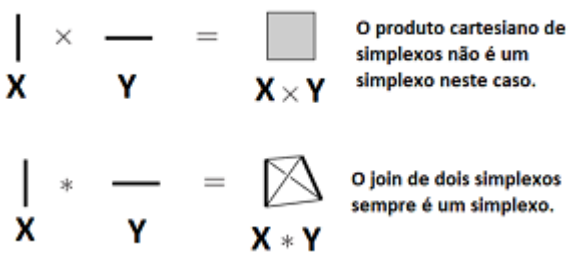
$$||f|| : ||\Delta_1|| \to ||\Delta_2||. \tag{2.42}$$

□

2.6 *Joins*

O produto cartesiano $X \times Y$ de dois espaços topológicos X e Y também é um espaço topológico, porém o produto de dois simplexos de dimensão ao menos 1 não é um simplexo (veja Figura 17). Introduziremos uma operação em que o produto de dois simplexos é um simplexo, chamada *join* e denotada por $*$. Assim, podemos definir o *join* de dois complexos simpliciais, obtendo um novo complexo simplicial.

Figura 17 – Exemplo de produto cartesiano e *join* de simplexos.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 73 e 74).

Definição 2.6.1. Sejam K e L dois complexos simpliciais. O *join* $K * L$ é o complexo simplicial com conjunto de vértices $V(K) \uplus V(L) \overset{def}{=} V(K) \times \{1\} \cup V(L) \times \{2\}$ e conjunto de simplexos $\{F \uplus G\,;\, F \in K,\, G \in L\}$.

Observação 2.6.2. Dado um complexo simplicial K, temos o *n- join* de K, denotado por K^{*n}, onde o conjunto de vértices é $V(K) \times \{1\} \cup \ldots \cup V(K) \times \{n\}$ e conjunto de simplexos $\{F_1 \uplus F_2 \uplus \ldots \uplus F_n;\, F_1, F_2, \ldots, F_n \in K\}$.

Exemplo 2.6.3. Seja o 0- simplexo σ^0, que consiste de um ponto. Temos que $\sigma^0 * \sigma^0$ é um segmento, mais geralmente, temos $(\sigma^0)^{*n}$ isomorfo a σ^{n-1} e, consequentemente, $\sigma^k * \sigma^l$ isomorfo a σ^{k+l+1}, pois $\sigma^k * \sigma^l = (\sigma^0)^{*(k+1)} * (\sigma^0)^{*(l+1)} = (\sigma^0)^{*(k+l+2)} = \sigma^{k+l+1}$.

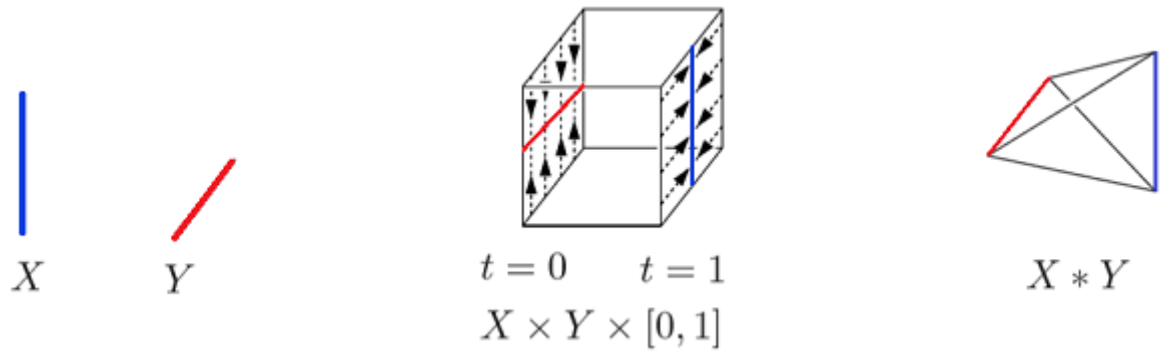
Exemplo 2.6.4. Seja $D_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ um complexo simplicial correspondendo a um espaço discreto de 2 pontos. Note que $||D_2||$ é homeomorfo a S^0. Vamos analisar o *n-join* D_2^{*n}.

O conjunto de vértices pode ser identificado com $[2] \times [n]$ e um subconjunto do conjunto de vértices é um simplexo se não contém $(1,i)$ e $(2,i)$ para algum $i \in [n]$ ao mesmo tempo. Logo, D_2^{*n} é o complexo simplicial $\Diamond^{n-1}$ (veja Exemplo 2.3.7). Temos $||\Diamond^{n-1}||$ homeomorfo a S^{n-1} e, portanto, $||D_2^{*n}||$ é homeomorfo a S^{n-1}.

Definição 2.6.5. Sejam X e Y espaços topológicos. O *join* $X * Y$ é o espaço quociente $\dfrac{X \times Y \times [0,1]}{\approx}$, onde a relação de equivalência $\approx$ é dada por $(x,y,0) \approx (x',y,0)$, para todo $x,x' \in X$ e $y \in Y$ e $(x,y,1) \approx (x,y',1)$, para todo $x \in X$ e $y,y' \in Y$.

Exemplo 2.6.6. Sejam X e Y dois simplexos de dimensão 1. Veja na Figura 18 como obter o *join* $X * Y$.

Figura 18 – Exemplo de *join*.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 75).

Exemplo 2.6.7. Pelo Exemplo 2.6.4, temos que $||D_2^{*n}||$ é homeomorfo a $||\Diamond^{n-1}||$ e, assim, $(S^0)^{*n}$ é homeomorfo a S^{n-1}. Consequentemente, $S^k * S^l$ é homeomorfo a S^{k+l+1}.

Exemplo 2.6.8. Dado um espaço topológico X, o *cone* de X, denotado por *cone* (X) e definido como sendo o espaço quociente $(X \times [0,1])/(X \times \{1\})$, pode ser identificado pelo *join* do espaço X com o espaço de um ponto $\{p\}$, isto é, *cone* (X) é homeomorfo a $X * \{p\}$.

A *suspensão* de X, denotada, por *susp* (X), e definida como sendo o espaço quociente $(X \times [0,1])/(X \times \{0\}, X \times \{1\})$, pode ser identificada pelo *join* do espaço X com S^0, isto é, *susp* (X) é homeomorfo a $X * S^0$.

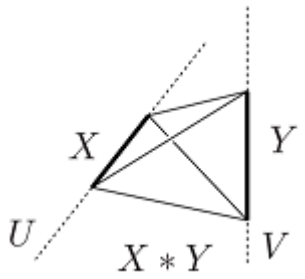
Uma interpretação geométrica do *join* é dada pela proposição a seguir.

Proposição 2.6.9. Suponha que X e Y sejam subespaços de um mesmo espaço Euclideano e que $X \subset U$ e $Y \subset V$, onde U e V são subespaços afim de algum $\mathbb{R}^n$ tais que $U \cap V = \emptyset$ e *conv* $(U \cup V)$ tem dimensão $dim\ U + dim\ V + 1$. Suponha também que X e Y sejam limitados. Então, $X * Y$ é homeomorfo ao espaço:

$$Z \overset{def}{=} \{\, tx + (1-t)y\ ;\ \ t \in [0,1],\ \ x \in X,\ \ y \in Y\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{2.43}$$

isto é, a união de todos os segmentos conectando um ponto de X a um ponto de Y.

Figura 19 – Representação da afirmação da Proposição 2.6.9.



Fonte: Matousek (2008, pg. 75).

Demonstração. Basta tomar a aplicação conínua $X \times Y \times [0,1] \to Z$ dada por

$$(x,y,t) \mapsto tx + (1-t)y. \tag{2.44}$$

Esta aplicação induz o homeomorfismo

$$\frac{X \times Y \times [0,1]}{\approx} \to Z. \tag{2.45}$$

□

A seguir enunciaremos um lema que nos auxiliará a demonstrar uma importante propriedade sobre complexos simpliciais, dada pelo Teorema 2.6.11.

Lema 2.6.10. Sejam U e V dois subespaços afim de algum $\mathbb{R}^d$ tais que $U \cap V = \emptyset$ e a dimensão de $conv\ (U \cup V)$ é $dim\ U + dim\ V + 1$. Suponha $A \subset U$ e $B \subset V$ geometricamente independentes. Então, $A \cup B$ é geometricamente independente. Mais ainda, a união de todos os segmentos conectando um ponto de $conv(A)$ a um ponto de $conv(B)$ é o simplexo $conv(A \cup B)$.

Demonstração. Defina $dim\ (U) = n \leq d$ e $dim\ (V) = m \leq d$.

Podemos supor $A = \{x_1, ..., x_k\}$, com $k \leq n+1$ e $B = \{y_1, ..., y_{k'}\}$, com $k' \leq m+1$. Assim, existem $x_{k+1}, ..., x_{n+1} \in U$ e $y_{k'+1}, ..., y_{m+1} \in V$ tais que:

$$conv\ (\{x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{n+1}\}) = U \ \ e \ \ conv\ (\{y_1, ..., y_{k'}, y_{k'+1}, ..., y_{m+1}\}) = V. \tag{2.46}$$

Como $U \cap V = \emptyset$, temos $A \cap B = \emptyset$ e segue que $A \cup B = \{x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_{k'}\}$ tem $k + k'$ elementos.

Suponha que $A \cup B$ não seja geometricamente independente, o que significa:

$$dim\ (\ conv(\{x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_{k'}\})\ ) < k + k' - 1. \tag{2.47}$$

Logo,

$$dim\ (conv(U \cup V)) = dim\ (\ conv(\{x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{n+1}, y_1, ..., y_{k'}, y_{k'+1}, ..., y_{m+1}\})\ ) \leq$$

$$dim\ (\ conv(\{x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_{k'}\})\ ) + dim\ (\ conv(\{x_{k+1}, ..., x_{n+1}, y_{k'+1}, ..., y_{m+1}\})\ ) + 1 <$$

$$(k + k' - 1) + [(n+1) - k + (m+1) - k' - 1] + 1 = n + m + 1. \tag{2.48}$$

Assim, $dim\ (conv(U \cup V)) < n + m + 1$, o que é um absurdo.

Agora vamos provar a segunda afirmação do lema. Note que

$$conv\ (A) \ = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \ ; \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \ e \ \alpha_i \geq 0, \ i = 1, ..., k \right\} \ \text{ e} \tag{2.49}$$

$$conv\ (B) \ = \left\{ \sum_{j=1}^{k'} \beta_j y_j \ ; \ \sum_{j=1}^{k'} \beta_j = 1 \ e \ \beta_j \geq 0, \ j = 1, ..., k' \right\}. \tag{2.50}$$

A união de todos os segmentos conectando um ponto de $conv(A)$ a um ponto de $conv(B)$, que chamaremos de Z, é dada por:

$$Z = \{\ sx + (1-s)y\ ;\ s \in [0,1],\ x \in conv(A),\ y \in conv(B)\} =$$

$$\left\{ s.\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \right) + (1-s).\left(\sum_{j=1}^{k'} \beta_j y_j \right) \ ; \ s \in [0,1]\ ,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{j=1}^{k'} \beta_j = 1 \ e \ \alpha_i, \beta_j \geq 0 \right\}, \tag{2.51}$$

onde $i = 1, ..., n+1$ e $j = 1, ..., m+1$.

Como $s.\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) + (1-s).\left(\sum_{j=1}^{k'} \beta_j\right) = s + (1-s) = 1$, por 2.51 temos que Z é o simplexo $conv\ (A \cup B)$. □

Teorema 2.6.11. Sejam K e L complexos simpliciais. Então, $||K * L||$ é homeomorfo a $||K|| * ||L||$.

Demonstração. Sejam K e L complexos simpliciais. Então, existem subespaços afim $U, V \subset \mathbb{R}^d$, para algum d, onde $U \cap V = \emptyset$ e $dim(conv\ (U \cup V)) = dim\ U + dim\ V + 1$ tais que $V(K) \subset U$ e $V(L) \subset V$ são geometricamente independentes.

Assim, como $K * L = \{F \uplus G\ ;\ F \in K,\ G \in L\}$, segue que

$$||K * L|| = \{x \in conv(F \cup G)\ ;\ F \in V(K),\ G \in V(L)\} \tag{2.52}$$

e, pelo Lema 2.6.10, $||K * L||$ é homeomorfo à união de todos os segmentos conectando um ponto de $||K||$ a um ponto de $||L||$. Pela Proposição 2.6.9, $||K|| * ||L||$ também é homeomorfo à união de todos os segmentos conectando um ponto de $||K||$ a um ponto de $||L||$. Logo, $||K|| * ||L||$ é homeomorfo a $||K * L||$. □

Observação 2.6.12. Um ponto do *join* $X * Y$ formalmente é dado por uma classe de equivalência $[(x, y, t)]$, onde $x \in X$, $y \in Y$ e $t \in [0, 1]$. Vamos denotar este ponto por $tx \oplus (1-t)y$. Analogamente, um ponto do *n-join* X^{*n} é dado por $t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus \cdots \oplus t_nx_n$, onde $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e $t_1, t_2, ..., t_n$ são números reais não-negativos tais que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Note que a notação $tx \oplus (1-t)y$ não é uma combinação convexa dos pontos x e y. De fato, se $X = Y$ e $a, b \in X$, com $a \neq b$, temos que $\frac{1}{2}a \oplus \frac{1}{2}b = [(a, b, \frac{1}{2})] \neq [(b, a, \frac{1}{2})] = \frac{1}{2}b \oplus \frac{1}{2}a$ em X^{*2}, mas $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ na combinação convexa.

Definição 2.6.13. Sejam $f : X_1 \to X_2$ e $g : Y_1 \to Y_2$ aplicações contínuas. Então, o *join* destas aplicações, denotado por $f * g$ é a aplicação:

$$f * g : X_1 * Y_1 \to X_2 * Y_2, \tag{2.53}$$

dada por

$$tx \oplus (1-t)y \mapsto tf(x) \oplus (1-t)g(y), \tag{2.54}$$

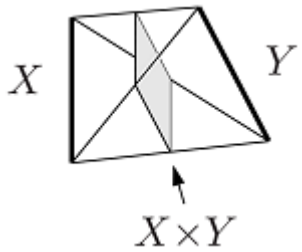
ou, equivalentemente,

$$[(x, y, t)] \mapsto [(f(x), g(y), t)]. \tag{2.55}$$

Observação 2.6.14. Sendo $f : X_1 \to X_2$ e $g : Y_1 \to Y_2$ aplicações contínuas, então $f * g : X_1 * Y_1 \to X_2 * Y_2$ também é contínua.

Observação 2.6.15. O produto cartesiano $X \times Y$ pode ser mergulhado topologicamente em $X * Y$ por $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y$ (veja na Figura 20 o exemplo para $X = Y = \sigma^1$). Analogamente, o produto cartesiano X^n pode ser mergulhado em X^{*n} por $(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \frac{1}{n}x_1 \oplus \frac{1}{n}x_2 \oplus ... \oplus \frac{1}{n}x_n$.

Figura 20 – Exemplo de mergulho do produto cartesiano no *join*.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 77).

CAPÍTULO

3

O TEOREMA DE BORSUK-ULAM E SUAS APLICAÇÕES DIRETAS

Neste capítulo será enunciado o Teorema de Borsuk-Ulam, a principal ferramenta topológica em combinatória e geometria deste trabalho. O Teorema será apresentado em diferentes afirmações (algumas combinatoriais), as quais provaremos serem todas equivalentes à afirmação inicial. Em seguida, introduziremos ferramentas para demonstrar a veracidade do teorema e aplicaremos o mesmo em problemas combinatoriais e geométricos, tais como o Teorema do sanduíche de presunto, o Teorema do colar , a Conjectura de Kneser, entre outros. As principais referências deste capítulo são (MATOUSEK, 2008) e (HATCHER, 2002).

3.1 Teorema de Borsuk-Ulam

Definição 3.1.1. A função contínua $A : S^n \to S^n$ definida por $A(x) = -x$, $\forall x \in S^n$ é chamada *aplicação antipodal*. O ponto $-x \in S^n$ é chamado o *antípoda* de $x \in S^n$.

A seguir, introduzimos o Teorema de Borsuk-Ulam em seis afirmações equivalentes.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** Para todo $n \geq 0$, as afirmações a seguir são equivalentes e verdadeiras:

(BU 1a) Dada uma aplicação contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

(BU 1b) Dada uma aplicação contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ a qual preserva pontos antípodas, isto é, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in S^n$, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.

(BU 2a) Não existe aplicação contínua $f : S^n \to S^{n-1}$ preservando pontos antípodas.

(BU 2b) Não existe uma aplicação contínua $f : B^n \to S^{n-1}$ preservando pontos antípodas na fronteira, isto é, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in S^{n-1} = \partial B^n$, onde $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x|| \leq 1\}$.

(LS-c) (**LUSTERNIK; SCHNIRELMAN, 1930**) Para qualquer cobertura $F_1, ..., F_{n+1}$ de S^n por $(n+1)$ conjuntos fechados, existe pelo menos um conjunto F_i contendo um par de pontos antípodas, isto é, $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$, onde $-F_i = \{-x;\ x \in S^n\}$ é o conjunto dos pontos antípodas de F_i.

(LS-o) (**LUSTERNIK; SCHNIRELMAN, 1930**) Para qualquer cobertura $U_1, ..., U_{n+1}$ de S^n por $(n+1)$ conjuntos abertos, existe pelo menos um conjunto U_i contendo um par de pontos antípodas, isto é, $U_i \cap (-U_i) \neq \emptyset$.

Inicialmente, demonstraremos a equivalência das seis afirmações do teorema.

Demonstração das equivalências do Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2). Primeiramente, vamos demonstrar que **(BU 1a)**, **(BU 1b)** e **(BU 2a)** são equivalentes.

(BU 1a) $\Rightarrow$ **(BU 1b)** Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua preservando pontos antípodas.

Pela hipótese, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Como f preserva pontos antípodas, temos $f(-x) = -f(x)$, logo $f(x) = f(-x) = -f(x)$, o que implica $f(x) = 0$.

(BU 1b) $\Rightarrow$ **(BU 1a)** Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Defina $g : S^n \to \mathbb{R}^n$, pela expressão $g(x) = f(x) - f(-x)$, para todo $x \in S^n$.

Temos, para todo $x \in S^n$,

$$g(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -g(x), \tag{3.1}$$

logo g preserva pontos antípodas.

Pela hipótese, existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$. Assim:

$$0 = g(x) = f(x) - f(-x) = 0 \text{ , o que implica } f(x) = f(-x). \tag{3.2}$$

(BU 1b) $\Rightarrow$ **(BU 2a)** Suponha que exista uma aplicação contínua $f : S^n \to S^{n-1}$ que preserva pontos antípodas. Como $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, podemos considerar a inclusão $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ e tomar a composta $i \circ f : S^n \to \mathbb{R}^n$, a qual é uma aplicação contínua preservando pontos antípodas que não se anula em nenhum ponto, o que contraria a hipótese.

(BU 2a) $\Rightarrow$ **(BU 1b)** Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua preservando pontos antípodas. Suponha que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in S^n$, defina $g : S^n \to S^{n-1}$ por $g(x) = \frac{f(x)}{||f(x)||}$, $\forall x \in S^n$. Então, g está bem definida, pois $f(x) \neq 0$, $\forall x \in S^n$, e g é contínua. Além disto, g preserva pontos antípodas, o que contradiz **(BU 2a)**.

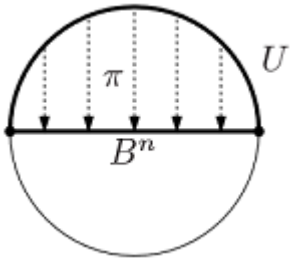
Assim, provamos que as três primeiras afirmações (**(BU 1a)**, **(BU 1b)** e **(BU 2a)**) são equivalentes. Em seguida, provaremos a equivalência entre **(BU 2a)** e **(BU 2b)**, o que implicará a equivalência das quatro primeiras afirmações.

(BU 2b) $\Rightarrow$ **(BU 2a)** Seja $U = \{(x_1,...,x_{n+1}) \in S^n;\ x_{n+1} \geq 0\}$. Inicialmente, note que a projeção $\pi : U \to B^n$ dada por:

$$(x_1,...,x_{n+1}) \mapsto (x_1,...,x_n) \tag{3.3}$$

é um homeomorfismo.

Figura 21 – Projeção $\pi : U \to B^n$.



Fonte: Matousek (2008, pg. 24).

Suponha que exista uma aplicação contínua $f : S^n \to S^{n-1}$ preservando pontos antípodas. Defina $g : B^n \to S^{n-1}$ por $g(x) = f(\pi^{-1}(x))$, $\forall x \in B^n$.

Então, $g = f \circ \pi^{-1}$ é contínua, pois é composição de funções contínuas.

Mostremos que g preserva pontos antípodas na fronteira. De fato, se $(x_1,...,x_n) \in \partial B^n$, então $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ e, portanto, $\pi^{-1}(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_n,0)$. Assim, $\forall (x_1,...,x_n) \in \partial B^n$:

$$\begin{aligned} g(x_1,...,x_n) &= f(\pi^{-1}(x_1,...,x_n)) = f(x_1,...,x_n,0), \\ g(-x_1,...,-x_n) &= f(\pi^{-1}(-x_1,...,-x_n)) = f(-x_1,...,-x_n,0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como f preserva pontos antípodas, temos $f(x_1,...,x_n,0) = -f(-x_1,...,-x_n,0)$. Logo, $g(x_1,...,x_n) = -g(-x_1,...,-x_n)$ e, portanto, g preserva pontos antípodas em $\partial B^n = S^{n-1}$, o que contradiz **(BU 2b)**.

(BU 2a) $\Rightarrow$ **(BU 2b)** Suponha que exista $g : B^n \to S^{n-1}$ uma aplicação contínua preservando pontos antípodas em $\partial B^n = S^{n-1}$. Defina $f : S^n \to S^{n-1}$ da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} g(\pi(x)), & \text{se} \quad x \in U, \\ -g(\pi(-x)), & \text{se} \quad x \in -U. \end{cases}$$

Vamos mostrar que f está bem definida. Note que se $x \in -U$, então $-x \in U$, logo $-g(\pi(-x))$ está bem definido. Resta mostrar que $g(\pi(x)) = -g(\pi(-x))$, $\forall x \in U \cap (-U)$.

Se $(x_1,...,x_{n+1}) \in U \cap (-U)$, então $x_{n+1} = 0$ e temos:

$$(x_1,...,x_{n+1}) = (x_1,...,x_n,0), \text{ onde } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1. \tag{3.5}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(\pi(x_1,...,x_n,0)) &= g(x_1,...,x_n), \text{ onde } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1; \\ -g(\pi(-x_1,...,-x_n,0)) &= -g(-x_1,...,-x_n), \text{ onde } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como $\forall\ (x_1,...,x_{n+1}) \in U \cap (-U)$ satisfaz $(x_1,...,x_{n+1}) = (x_1,...,x_n,0)$, com $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, então $(x_1,...,x_n,0) \in \partial B^n = S^{n-1}$. Temos que g preserva pontos antípodas em $\partial B^n = S^{n-1}$, logo:

$$\begin{aligned} &g(\pi(x_1,...,x_n,0)) = g(x_1,...,x_n) = -g(-x_1,...,-x_n) = \\ &-g(\pi(-x_1,...,-x_n,0)),\ \ \forall (x_1,...,x_n,0) \in \partial B^n = S^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, f está bem definida e é contínua pelo Lema da Colagem (Lema 3.1.3), já que U e $-U$ são fechados.

Lema 3.1.3 (Lema da colagem)**.** ((MUNKRES, 2000), Theorem 3.18, pg.108) Seja $X = A \cup B$ um espaço topológico, onde A e B são fechados. Sejam $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$, então a função $h : X \to Y$ definida por $h(x) = f(x)$, se $x \in A$ e $h(x) = g(x)$, se $x \in B$ é contínua.

Falta mostrar que f preserva pontos antípodas e, assim, teremos $f : S^n \to S^{n-1}$ contínua preservando pontos antípodas, o que é uma contradição.

Seja $(x_1,...,x_{n+1}) \in S^n$, sem perda de generalidade podemos supor que $(x_1,...,x_{n+1}) \in U$ (o caso $(x_1,...,x_{n+1}) \in -U$ é análogo). Temos $(-x_1,...,-x_{n+1}) \in -U$, então:

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_{n+1}) &= g(\pi(x_1,...,x_{n+1})) = g(x_1,...,x_n), \\ f(-x_1,...,-x_{n+1}) &= -g(\pi(-(-x_1,...,-x_{n+1}))) = -g(x_1,...,x_n). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto, $f(x_1,...,x_{n+1}) = -f(-x_1,...,-x_{n+1})$, logo f preserva pontos antípodas, o que é uma contradição.

Agora vamos mostrar que **(LS-c)** implica **(BU 2a)** e **(BU 1a)** implica **(LS-c)**.

(BU 1a) $\Rightarrow$ **(LS-c)** Dada uma cobertura $F_1,...,F_{n+1}$ de S^n por $n+1$ conjuntos fechados, definimos uma função $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

$$x \mapsto (\text{dist}(x,F_1),...,\text{dist}(x,F_n)), \tag{3.9}$$

onde $\text{dist}(x,F_i)$ denota a distância do ponto $x \in S^n$ ao conjunto F_i, para cada $i \in [n]$.

Cada função coordenada é contínua, logo f é contínua.

Por hipótese, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x) = y$, isto é:

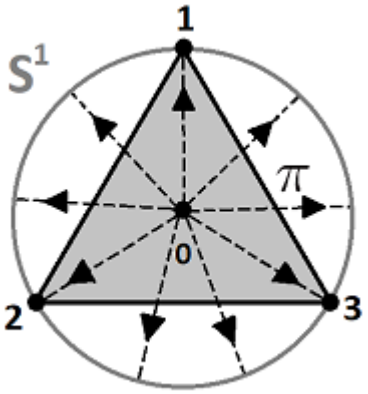
$$f(x) = (\text{dist}(x,F_i))_{i=1}^n = y = (\text{dist}(-x,F_i))_{i=1}^n = f(-x). \tag{3.10}$$

Se a i-ésima coordenada de y é igual a zero, então $\text{dist}(x, F_i) = 0$ e $\text{dist}(-x, F_i) = 0$, logo, como F_i é fechado, segue que $x, -x \in F_i$. Se todas as coordenadas de y são não nulas, então x e $-x$ não estão em $F_1 \cup ... \cup F_n$, o que implica que $x, -x \in F_{n+1}$, pois $F_1 \cup ... \cup F_{n+1} = S^n$.

(LS-c) $\Rightarrow$ **(BU 2a)** Suponha que exista $f : S^n \to S^{n-1}$ contínua preservando pontos antípodas. Vamos construir uma cobertura $F_1, ..., F_{n+1}$ de conjuntos fechados para S^n tal que nenhum deles contém um par de pontos antípodas, o que contradiz **(LS-c)**.

Para isso, considere um n- simplexo em $\mathbb{R}^n$ (contendo 0 no seu interior) e projete as $(n-1)$-dimensionais faces radialmente de 0 em S^{n-1}, como na Figura 22.

Figura 22 – Exemplo para o caso $n = 2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam $F_1, ..., F_{n+1}$ as $(n+1)$ faces do n- simplexo, com dimensão $(n-1)$, obtidas pela projeção radial.

Então, $f^{-1}(F_1), ..., f^{-1}(F_{n+1})$ é uma cobertura de S^n por $(n+1)$ conjuntos fechados, onde nenhum deles contém um par de pontos antípodas. De fato, seja $x \in S^n$ tal que $x, -x \in f^{-1}(F_i)$ para algum F_i. Segue que $f(x), f(-x) \in F_i$ e como f preserva pontos antípodas, temos $f(-x) = -f(x)$ e, assim, $f(x), -f(x) \in F_i$, o que é uma contradição, pois uma $(n-1)$-dimensional face de um n-simplexo não contém nenhum par de pontos antípodas.

Para finalizar, mostraremos que **(LS- c)** e **(LS- o)** são equivalentes.

(LS- c) $\Rightarrow$ **(LS- o)** Basta mostrar que para toda cobertura aberta $U_1, ...U_{n+1}$ de S^n existe uma cobertura fechada $F_1, ..., F_{n+1}$ de S^n tal que $F_i \subset U_i$, para todo $i = 1, ..., n+1$, pois por hipótese existirá $x \in S^n$ tal que $x, -x \in F_i$ para algum i e, portanto, $x, -x \in U_i$.

Seja $x \in S^n$, então $x \in U_i$, para algum i. Tome uma vizinhança aberta V_x tal que $x \in V_x$ e $\overline{V_x} \subset U_i$. Assim, temos uma cobertura $\bigcup_{x \in S^n} V_x = S^n$ e como S^n é compacta, existe uma subcobertura finita $V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_k}$ de S^n. Desta subcobertura finita obtemos a cobertura fechada $F_1, ..., F_{n+1}$,

onde F_k, para todo $k \in [n+1]$ é dado por:

$$F_k = \left\{ \bigcup_{j \in J_k} \overline{V_{x_j}} \text{ ; onde } J_k = \{j \text{ ; } \overline{V_{x_j}} \subset U_k\} \text{ para } k = 1, ..., n+1 \right\}. \tag{3.11}$$

Note que para cada $k \in [n+1]$, F_k é fechado, pois é união finita de fechados.

Por hipótese, existe $x \in S^n$ tal que x, $-x \in F_i$, para algum $i \in [n+1]$. Logo, por (3.11) segue que $x, -x \in U_i$, como queríamos demonstrar.

(LS- o) $\Rightarrow$ **(LS- c)** Dada uma cobertura fechada $F_1, ..., F_{n+1}$ de S^n, para cada $\varepsilon > 0$ definimos uma cobertura aberta $U_1^\varepsilon, ..., U_{n+1}^\varepsilon$, onde:

$$U_i^\varepsilon = \{x \in S^n \text{ ; } \operatorname{dist}(x, F_i) < \varepsilon\}. \tag{3.12}$$

Dada uma sequência (ε_j) tal que $\varepsilon_j \to 0$, temos por hipótese que:

$$\text{para cada } j, \text{ existe } x_j \in S^n \text{ tal que } \operatorname{dist}(x_j, F_i) < \varepsilon_j \text{ e } \operatorname{dist}(-x_j, F_i) < \varepsilon_j, \text{ para algum } i = 1, ..., n+1. \tag{3.13}$$

Assim, obtemos uma sequência $x_0, x_1, x_2, ..., x_j, ... \in S^n$ tal que $\operatorname{dist}(x_j, F_i) < \varepsilon_j$ e $\operatorname{dist}(-x_j, F_i) < \varepsilon_j$, para algum i e, portanto, algum F_i aparece infinitas vezes nesta sequência, logo, sem perda de generalidade, podemos supor o mesmo fechado F_i para todo j.

Note que

$$\lim_{j \to \infty} dist(x_j, F_i) = 0 \text{ e } \lim_{j \to \infty} dist(-x_j, F_i) = 0. \tag{3.14}$$

Como S^n é compacta, segue que a sequência (x_j) admite uma subsequência convergente (x_{n_j}).

Assim:

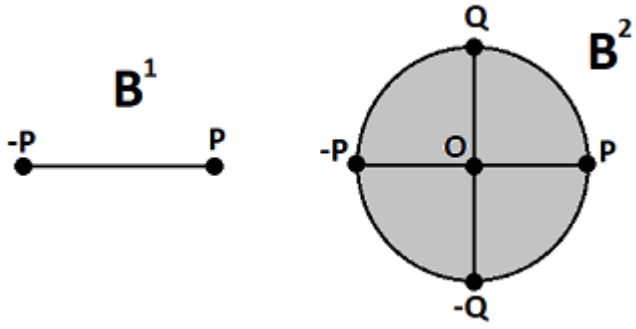
$$(x_{n_j}) \to x \text{ e } (-x_{n_j}) \to -x. \tag{3.15}$$

Como F_i é fechado, segue que $x, -x \in F_i$, como queríamos demonstrar. □

A seguir apresentaremos uma versão combinatorial do Teorema de Borsuk-Ulam, conhecida como Lema de Tucker .

Definição 3.1.4. Seja T uma triangulação (finita, isto é, tem finitos simplexos) da bola n-dimensional B^n. Dizemos que T é uma *triangulação antipodalmente simétrica na fronteira de* B^n se o conjunto de simplexos de T contidos em $S^{n-1} = \partial B^n$ é uma triangulação de S^{n-1} e é antipodalmente simétrica, isto é, se $\sigma \subset S^{n-1}$ é um simplexo de T, então $-\sigma$ também é um simplexo de T, onde $-\sigma = A(\sigma)$ e $A : S^{n-1} \to S^{n-1}$ é a aplicação antipodal.

Figura 23 – Exemplo de triangulações antipodalmente simétricas na fronteira.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.1.5. Na Figura 23, temos as triangulações antipodalmente simétricas na fronteira $T_1 = \{\emptyset, \{P\}, \{-P\}, \{P, -P\}\}$ e $T_2 = \{\emptyset, \{O\}, \{P\}, \{-P\}, \{Q\}, \{-Q\}, \{O,P\}, \{O,Q\}, \{O,-P\}, \{O,-Q\}, \{Q,P\}, \{P,-Q\}, \{-Q,-P\}, \{-P,Q\}, \{O,P,Q\}, \{O,Q,-P\}, \{O,-P,-Q\}, \{O,P,-Q\}\}$ para B^1 e B^2, respectivamente.

Teorema 3.1.6 (Lema de Tucker)**.** Seja T uma triangulação de B^n antipodalmente simétrica na fronteira de B^n. Tome:

$$\lambda : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, ..., +n, -n\} \tag{3.16}$$

um *etiquetamento* dos vértices de T que satisfaz:

$$\lambda(-v) = -\lambda(v), \ \forall v \in \partial B^n \cap V(T), \tag{3.17}$$

isto é, preserva pontos antípodas na fronteira de B^n.

Então, existe pelo menos um 1-simplexo (aresta) de T que é complementar , isto é, seus dois vértices estão etiquetados por números opostos, k e $-k$.

A Figura 24 ilustra o Lema de Tucker no caso $n = 2$.

Podemos reformular o Lema de Tucker, de forma a obter o teorema a seguir.

Observação 3.1.7. Note que podemos identificar o complexo simplicial $\Diamond^{n-1}$ do Exemplo 2.3.7 com o conjunto de vértices $V(\Diamond^{n-1}) = \{+1, -1, +2, -2, ..., +n, -n\}$, através da identificação:

$$+i \mapsto (1, i) \ \text{ e } \ -i \mapsto (2, i), \text{ para todo } i \in [n]. \tag{3.18}$$

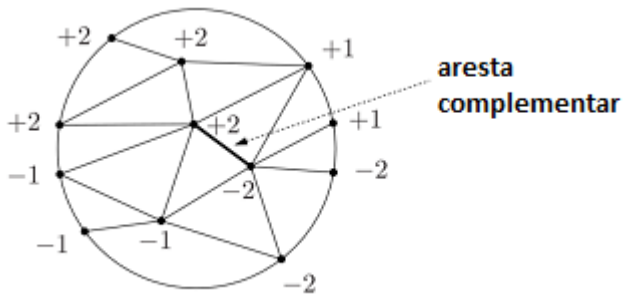
Assim, $F \subset V(\Diamond^{n-1})$ é um simplexo de $\Diamond^{n-1}$ se não existe $i \in [n]$ tal que $+i, -i \in F$.

Teorema 3.1.8 (Lema de Tucker reformulado)**.** Seja T uma triangulação de B^n antipodalmente simétrica na fronteira de B^n. Então, não existe uma aplicação simplicial:

$$\lambda : V(T) \to V(\Diamond^{n-1}) \tag{3.19}$$

preservando pontos antípodas na fronteira de B^n.

Figura 24 – Exemplo do Lema de Tucker no caso $n = 2$.



Fonte: Matousek (2008, pg.34).

A seguir provaremos que as duas formulações (Teoremas 3.1.6 e 3.1.8) são equivalentes.

Equivalência entre os Teoremas 3.1.6 e 3.1.8. Note que $V(\Diamond^{n-1}) = \{+1,-1,+2,-2,...,+n,-n\}$ e T é uma triangulação antipodalmente simétrica na fronteira de B^n por hipótese, em ambos os teoremas.

(Teorema 3.1.6 $\Rightarrow$ Teorema 3.1.8): Suponha por absurdo que exista uma aplicação simplicial:

$$\lambda : V(T) \to V(\Diamond^{n-1}) = \{+1,-1,+2,-2,...,+n,-n\} \tag{3.20}$$

preservando pontos antípodas na fronteira de B^n.

Então, λ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1.6 e, portanto, existe um 1-simplexo σ (aresta) de T tal que $\lambda(V(\sigma)) = \{+i,-i\}$, para algum $i \in \{1,...,n\}$.

Como λ é aplicação simplicial por hipótese, devemos ter $\lambda(V(\sigma)) \in \Diamond^{n-1}$, isto é, $\{+i,-i\} \in \Diamond^{n-1}$. Porém, por definição sabemos que $\{+i,-i\} \notin \Diamond^{n-1}$, para todo $i \in \{1,...,n\}$, e temos uma contradição.

(Teorema 3.1.8 $\Rightarrow$ Teorema 3.1.6):

Suponha por absurdo que o Teorema 3.1.6 não seja válido. Então, existe um etiquetamento:

$$\lambda : V(T) \to \{+1,-1,+2,-2,...,+n,-n\} \tag{3.21}$$

preservando pontos antípodas na fronteira de B^n tal que todo 1- simplexo (aresta) de T não tem seus vértices etiquetados com números opostos k e $-k$.

Se provarmos que:

$$\lambda : V(T) \to V(\Diamond^{n-1}) = \{+1,-1,+2,-2,...,+n,-n\} \tag{3.22}$$

é uma aplicação simplicial preservando pontos antípodas na fronteira de B^n, temos uma contradição com a hipótese de que o Teorema 3.1.8 é válido.

A aplicação λ preserva pontos antípodas na fronteira de B^n, pois λ é um etiquetamento preservando pontos antípodas na fronteira de B^n. Para provar que λ é aplicação simplicial, tome $\sigma \in T$ e note que $\lambda(V(\sigma)) \subset \{+1,-1,+2,-2,...,+n,-n\}$ não contém $+i$ e $-i$ ao mesmo tempo, para todo $i = 1,...,n$, pois caso contrário existiria uma aresta de σ com vértices etiquetados por números opostos. Assim, $\lambda(V(\sigma)) \in \Diamond^{n-1}$ por definição, e segue que λ é aplicação simplicial. □

Provaremos agora que o Lema de Tucker é equivalente ao Teorema de Borsuk-Ulam. Para isso, podemos considerar qualquer uma das versões (Teorema 3.1.6 ou Teorema 3.1.8) como o Lema de Tucker, pois já provamos que são equivalentes. .

*Equivalência entre o Lema de Tucker e a afirmação **(BU 2b)** do Teorema 3.1.2.* (Teorema 3.1.2 **(BU 2b)** $\Rightarrow$ Lema de Tucker): Seja T uma triangulação de B^n antipodalmente simétrica na fronteira de B^n.

Suponha por absurdo que exista uma aplicação simplicial

$$\lambda : V(T) \to V(\Diamond^{n-1}) \tag{3.23}$$

preservando pontos antípodas na fronteira de B^n, o que contraria o Teorema 3.1.8 (Lema de Tucker).

Sua extensão canônica

$$||\lambda|| : ||T|| \to ||\Diamond^{n-1}|| \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad ||\lambda|| : B^n \to S^{n-1} \tag{3.24}$$

é contínua e também preserva pontos antípodas na fronteira de B^n, pois λ é aplicação simplicial preservando pontos antípodas na fronteira de B^n. Assim, λ contradiz o Teorema 3.1.2 **(BU 2b)**.

(Lema de Tucker $\Rightarrow$ Teorema 3.1.2 **(BU 2b)**): Assumindo a existência de $f : B^n \to S^{n-1}$ contínua preservando pontos antípodas na fronteira de B^n, vamos construir uma triangulação T de B^n antipodalmente simétrica na fronteira de B^n e um etiquetamento

$$\lambda : V(T) \to \{+1,-1,+2,-2,...,+n,-n\} \tag{3.25}$$

preservando pontos antípodas na fronteira de B^n, o que contradiz o Teorema 3.1.6 (Lema de Tucker).

Note que podemos escolher T uma triangulação de B^n antipodalmente simétrica na fronteira, na qual todo simplexo de T tem diâmetro no máximo δ, onde δ será determinado a seguir.

Denotemos $||y||_\infty = max\ \{\ y_i\ \ ;\ \ i = 1,...,n\}$, para $y \in \mathbb{R}^n$. Tome $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e note que para todo $y \in S^{n-1}$ temos $||y||_\infty \leq \varepsilon$. De fato, se $||y||_\infty < \varepsilon$, então

$$||y|| = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < n.\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1, \tag{3.26}$$

o que contradiz a hipótese de que $y \in S^{n-1}$.

Como toda função contínua com domínio compacto é uniformemente contínua, temos que existe $\delta > 0$ tal que dados dois pontos $x, x' \in B^n$, com

$$||x - x'||_\infty < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x')||_\infty < 2\varepsilon. \tag{3.27}$$

Este é δ que limita os diâmetros dos simplexos de T.

Defina a função:

$$\lambda : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, ..., +n, -n\}, \tag{3.28}$$

um etiquetamento dos vértices de T que satisfaz $\lambda(-v) = -\lambda(v)$, $\forall v \in \partial B^n \cap V(T)$.

Primeiramente, tome:

$$k : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, ..., +n, -n\}, \tag{3.29}$$

dada por:

$$k(v) \stackrel{def}{=} min\{\ i\ ;\ |f(v)_i| \geq \varepsilon\}, \tag{3.30}$$

onde $f(v)_i$ denota a i- ésima coordenada de $f(v) \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Em seguida, defina:

$$\lambda(v) = \begin{cases} +k(v), & \text{se} \quad f(v)_{k(v)} > 0, \\ -k(v), & \text{se} \quad f(v)_{k(v)} < 0. \end{cases}$$

Sendo $f : B^n \to S^{n-1}$ uma função preservando pontos antípodas em $\partial B^n = S^{n-1}$, vamos provar que:

$$\lambda(-v) = -\lambda(v),\ \forall v \in \partial B^n = S^{n-1}. \tag{3.31}$$

Inicialmente, note que dado $v \in \partial B^n \cap V(T)$, temos $k(v) = k(-v)$, pois f preserva pontos antípodas na fronteira de B^n, logo $|f(v)_i| = |f(-v)_i|$, para todo $i = 1, ..., n$ e segue que $k(v) = k(-v)$ por definição.

Se $\lambda(-v) = +k(-v)$, então $\lambda(v) = -k(v)$ e, portanto:

$$\lambda(-v) = +k(v) = -(-k(v)) = -\lambda(v). \tag{3.32}$$

Por outro lado, se $\lambda(-v) = -k(-v)$, então $\lambda(v) = +k(v)$ e, portanto:

$$\lambda(-v) = -k(-v) = -k(v) = -\lambda(v). \tag{3.33}$$

Pelo Teorema 3.1.6 (Lema de Tucker), existe um 1-simplexo (aresta) σ em T, com $V(\sigma) = \{v, v'\}$ e

$$i = \lambda(v) = -\lambda(v') > 0, \quad \text{para algum} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.34}$$

Assim, devemos ter:

$$f(v)_i \geq \varepsilon, \text{ onde } f(v)_i > 0 \quad \text{e} \quad f(v')_i \leq -\varepsilon, \text{ onde } f(v')_i < 0. \tag{3.35}$$

Logo $||f(v) - f(v')||_\infty > 2\varepsilon$, mas $v, v' \in \sigma$, onde σ é simplexo de T e, portanto,

$||v - v'||_\infty < \delta$ por construção.

Assim, temos $v, v' \in B^n$, onde $||v - v'||_\infty < \delta$ e $||f(v) - f(v')||_\infty > 2\varepsilon$, o que é uma contradição. □

O lema a seguir é uma versão mais geral das versões **(LS-c)** e **(LS-o)** do Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2). Essa versão será utilizada nas aplicações combinatoriais mais adiante.

Lema 3.1.9. (GREENE, 2002) Seja $A_1, \ldots, A_{n+1}$ uma cobertura de S^n por $(n+1)$ conjuntos, onde cada um deles é um aberto ou um fechado de S^n. Então, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução em t, onde t é o número de fechados da cobertura.

Para o caso $t = 0$, o lema segue do Teorema de Borsuk- Ulam (Teorema 3.1.2 **(LS-o)**).

Suponha $0 < t < n+1$ e que o lema seja verdadeiro para toda cobertura com menos de t fechados. Vamos provar que, nessas condições, o lema segue para toda cobertura com exatamente t fechados e, indutivamente, o lema é verdadeiro, para todo $0 \leq t \leq n+1$.

Suponha $A_1, \ldots, A_{n+1}$ uma cobertura de S^n com exatamente t fechados. Podemos considerar A_j um fechado com $A_j \cap (-A_j) \neq \emptyset$ (caso contrário o lema estará provado) e segue que diam $(A_j) = 2 - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$.

De fato, suponha diam $(A_j) \geq 2$, então diam $(A_j) = 2$, pois $A_j \subset S^n$ e diam $(S^n) = 2$.

Tome uma sequência (ε_m), onde:

$$\varepsilon_m \to 0 \text{ e } \varepsilon_m > 0, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Sendo diam $(A_j) = 2$, para todo $m \in \mathbb{N}$ existem $x_m, y_m \in A_j$ tais que:

$$\text{dist}(x_m, y_m) > 2 - \varepsilon_m. \tag{3.37}$$

O conjunto A_j é fechado de S^n e, portanto, é fechado em um compacto e, conquentemente, é compacto. Sendo A_j compacto, existem subsequências:

$$(x_{m_k}) \subset (x_m) \text{ e } (y_{m'_k}) \subset (y_m), \tag{3.38}$$

tais que (x_{m_k}) e $(y_{m'_k})$ são convergentes para x e y em S^n, respectivamente. Como A_j é fechado, temos $x, y \in A_j$.

Além disso:

$$\text{dist}(x_{m_k}, y_{m'_k}) \longrightarrow 2 \quad \text{e} \quad \text{dist}(x_{m_k}, y_{m'_k}) \longrightarrow \text{dist}(x,y). \tag{3.39}$$

Logo, $\text{dist}(x,y) = 2$ e, portanto, $y = -x$. Assim $x, -x \in A_j$, o que contraria $A_j \cap (-A_j) \neq \emptyset$.

Defina o conjunto:

$$U = \left\{ x \in S^n \; ; \; \text{dist}(x, A_j) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \tag{3.40}$$

O conjunto U é aberto, pois para cada $x \in U$, temos que dist $(x, A_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, e assim, tomando $\lambda_x = \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2}$ dist (x, A_j), segue que $B(x, \lambda_x) \subset A_j$. Logo:

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, \lambda_x) \tag{3.41}$$

é união de abertos, logo é um aberto.

O conjunto U não pode ser fechado, pois nesse caso $\{U, S^n \setminus U\}$ seria uma cisão de S^n, o que contradiz o fato de que S^n é conexa.

Além disso, U não possui pontos antípodas. De fato, suponha que exista $x \in U$ tal que $-x \in U$. Então, existem $y, z \in A_j$ tais que:

$$\text{dist}(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \text{dist}(-x,z) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.42}$$

Logo:

$$\text{dist}(x,-x) \leq \text{dist}(x,y) + \text{dist}(y,z) + \text{dist}(z,-x) < \frac{\varepsilon}{2} + (2-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 2, \tag{3.43}$$

o que é um absurdo.

Note que como $A_j \subset U$, então $A_1, ..., A_{j-1}, U, A_{j+1}, ..., A_{n+1}$ é uma cobertura de S^n com exatamente $(t-1)$ fechados e o restante dos conjuntos abertos. Por hipótese de indução, um dos conjuntos $A_1, ..., A_{j-1}, U, A_{j+1}, ..., A_{n+1}$ deve possuir um par de pontos antípodas. Como já mostramos, U não possui um par de pontos antípodas, então um dos conjuntos $A_1, ..., A_{j-1}, A_{j+1}, ..., A_{n+1}$ possui um par de pontos antípodas. Assim, da cobertura inicial $A_1, ..., A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, ..., A_{n+1}$, existe A_i, para algum $i \in \{1, ..., j-1, j+1, ..., n\}$ tal que $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$. □

3.2 A demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam

Nesta seção, vamos desenvolver a teoria necessária e demonstrar o Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2). A referência principal desta seção é (HATCHER, 2002), de onde foram expandidos e adaptados os resultados, de forma a tornar a leitura mais linear.

Definição 3.2.1. Dado um espaço topológico X e R um anel com identidade, denotamos por $C_*(X;R) = \{C_p(X;R);\partial_p\}_{p\geq 0}$ o complexo de cadeias de X, onde para cada $p \geq 0$, $C_p(X;R)$ é o R-módulo livre gerado pelos p-simplexos singulares de X. A sequência de homologia singular associada ao espaço topológico X é denotada por $H_*(X;R) = \{H_p(X;R);\partial_p\}_{p\geq 0}$ e é obtida através do complexos de cadeias $C_*(X;R) = \{C_p(X;R);\partial_p\}_{p\geq 0}$.

Proposição 3.2.2. Sejam X um espaço topológico e $\varphi : R_1 \to R_2$ um homomorfismo de anéis. A aplicação de cadeias $\varphi_\# : C_*(X;R_1) \to C_*(X;R_2)$, para cada $n \geq 0$, dada por:

$$\begin{aligned} (\varphi_\#)_n : C_n(X;R_1) &\to C_n(X;R_2) \\ \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\sigma_i\right) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \varphi(\alpha_i)\sigma_i\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

é uma aplicação de cadeias, isto é:

$$\partial_n^{R_2} \circ (\varphi_\#)_n = (\varphi_\#)_{n-1} \circ \partial_n^{R_1}\ ,\ \ n \geq 0, \tag{3.45}$$

onde $\partial^{R_1} = (\partial_i^{R_1})_{i\geq 0}$ e $\partial^{R_2} = (\partial_i^{R_2})_{i\geq 0}$ denotam os operadores bordo de $C_*(X;R_1)$ e $C_*(X;R_2)$, respectivamente.

Além disso, $\varphi_\#$ induz uma aplicação $\varphi_* : H_*(X;R_1) \to H_*(X;R_2)$ natural, isto é, dados Y espaço topológico e $f : X \to Y$ contínua, para qualquer $n \geq 0$, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} H_n(X;R_1) \arrow[r, "(f_*)_n^{R_1}"] \arrow[d, "(\varphi_*)_n^X"'] & H_n(Y;R_1) \arrow[d, "(\varphi_*)_n^Y"] \\ H_n(X;R_2) \arrow[r, "(f_*)_n^{R_2}"'] & H_n(Y;R_2) \end{tikzcd} \tag{3.46}$$

comuta, ou seja,

$$(\varphi_*)_n^Y \circ (f_*)_n^{R_1} = (f_*)_n^{R_2} \circ (\varphi_*)_n^X\ ,\ n \geq 0. \tag{3.47}$$

Observação 3.2.3. Quando $X = Y$ usaremos simplesmente a notação $(\varphi_*)_n$ para a aplicação $(\varphi_*)_n^X = (\varphi_*)_n^Y$.

Definição 3.2.4 (Grau de $f : S^n \to S^n$ contínua)**.** Seja $f : S^n \to S^n$ uma aplicação contínua. Então f induz um homomorfismo

$$(f_*)_n : H_n(S^n;R) \to H_n(S^n;R). \tag{3.48}$$

Como $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, então $(f_*)_n$ pode reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} (f_*)_n : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \alpha x \end{aligned} \tag{3.49}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{Z}$.

O número $\alpha \in \mathbb{Z}$ é chamado *grau* de f e denotado por $deg(f)$.

A Proposição 3.2.5 fornece algumas propriedades sobre o grau $deg(f)$ que serão utilizadas mais adiante.

Proposição 3.2.5. ((HATCHER, 2002), Properties (b) and (c) of degree, pg.134) Sejam f, $g : S^n \to S^n$ funções contínuas. Temos:

(1) $deg(f) = 0$, se a função f não é sobrejetora; (3.50)

(2) Se f e g são homotópicas, então $deg(f) = deg(g)$. (3.51)

Lema 3.2.6. Seja $f : S^n \to S^n$ com $deg(f) = k$ e R um anel com identidade. Então, $(f_*)_n^R : H_n(S^n;R) \to H_n(S^n;R)$ é dada por:

$$(f_*)_n^R(x) = k.x = \underbrace{x + \ldots + x}_{k \text{ vezes}}, \ \forall x \in H_n(S^n;R). \tag{3.52}$$

Demonstração. Dado $\alpha \in R$ qualquer, defina $\varphi_m : \mathbb{Z} \to R$ o homomorfismo de aneis dado por:

$$\varphi_\alpha(m) = m.\alpha = \underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{m \text{ vezes}}, \ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.53}$$

Como visto na Proposição 3.2.2, dado o homomorfismo de anéis $\varphi_\alpha : \mathbb{Z} \to R$, o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "(f_*)_n^{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "(\varphi_{\alpha*})_n"'] & H_n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[d, "(\varphi_{\alpha*})_n"] \\ H_n(S^n;R) \arrow[r, "(f_*)_n^R"'] & H_n(S^n;R) \end{tikzcd} \tag{3.54}$$

comuta, isto é:

$$(\varphi_{\alpha*})_n \circ (f_*)_n^{\mathbb{Z}} = (f_*)_n^R \circ (\varphi_{\alpha*})_n, \ \ n \geq 0. \tag{3.55}$$

Temos $H_n(S^n;\mathbb{Z})$ isomorfo à $\mathbb{Z}$ e $H_n(S^n;R)$ isomorfo à R, logo existem isomorfismos:

$$\Psi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to H_n(S^n;\mathbb{Z}) \quad \text{e} \quad \Psi_R : R \to H_n(S^n;R). \tag{3.56}$$

Note que como $deg\ (f) = k$, então para o gerador $1 \in \mathbb{Z}$; temos que $\Psi_{\mathbb{Z}}(1)$ é gerador de $H_n(S^n;\mathbb{Z})$.

Assim:

$$\Psi_{\mathbb{Z}}^{-1} \circ (f_*)_n^{\mathbb{Z}} \circ \Psi_{\mathbb{Z}}(1) = k \text{ , ou equivalentemente } (f_*)_n^{\mathbb{Z}} \circ \Psi_{\mathbb{Z}}(1) = \Psi_{\mathbb{Z}}(k) = k.\Psi_{\mathbb{Z}}(1). \quad (3.57)$$

Dado $x \in H_n(S^n;R)$, tome $\alpha = \Psi_R^{-1}(x) \in R$, isto é:

$$\Psi_R(\alpha) = x \text{ , ou equivalentemente } x = \alpha.\ \Psi_R(1_R). \quad (3.58)$$

De (3.54), aplicando em $\Psi_{\mathbb{Z}}(1) \in H_n(S^n;\mathbb{Z})$ temos:

$$(f_*)_n^R \circ (\varphi_{\alpha *})_n\ (\Psi_{\mathbb{Z}}(1)) = (\varphi_{\alpha *})_n \circ (f_*)_n^{\mathbb{Z}}\ (\Psi_{\mathbb{Z}}(1)) \overset{\text{def } \varphi_\alpha}{\Longrightarrow}$$

$$(f_*)_n^R\ (\ \alpha.\varphi_\alpha(\Psi_{\mathbb{Z}}(1))\ ) = (\varphi_{\alpha *})_n\ (\ (f_*)_n^{\mathbb{Z}}\ (\Psi_{\mathbb{Z}}(1))\ ) \overset{(3.57)}{\Longrightarrow}$$

$$(f_*)_n^R\ (\ \alpha.\Psi_R(1_R))\ ) = (\varphi_{\alpha *})_n\ (\ k.(\Psi_{\mathbb{Z}}(1))\ ) \overset{(3.58)}{\Longrightarrow}$$

$$(f_*)_n^R\ (x) = k.\ (\varphi_{\alpha *})_n\ (\ (\Psi_{\mathbb{Z}}(1))\ ) \overset{\text{def } \varphi_\alpha}{\Longrightarrow}$$

$$(f_*)_n^R\ (x) = k.(\ \alpha.(\Psi_R(1_R))\ ) \overset{(3.58)}{\Longrightarrow}$$

$$(f_*)_n^R\ (x) = k.x,\ \ \forall x \in H_n(S^n;R). \quad (3.59)$$

□

Corolário 3.2.7. Seja $f : S^n \to S^n$ contínua. Então, $deg\ (f)$ é ímpar se, e somente se,

$$(f_*)_n^{\mathbb{Z}_2} : H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \to H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \text{ é isomorfismo.} \quad (3.60)$$

Demonstração. No Lema 3.2.6, tome $R = \mathbb{Z}_2$ e $k = deg\ (f)$, temos:

$$(f_*)_n^{\mathbb{Z}_2}(x) = k.x,\ \ \forall x \in H_n(S^n;\mathbb{Z}_2). \quad (3.61)$$

Como $H_n(S^n;\mathbb{Z}_2)$ é um $\mathbb{Z}_2$- módulo, temos:

$$k.x = \begin{cases} x, & \text{se} \quad k \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se} \quad k \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.62)$$

Logo:

$$(f_*)_n^{\mathbb{Z}_2}(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad k \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se} \quad k \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.63)$$

Assim, se k é ímpar, $(f_*)_n^{\mathbb{Z}_2} = Id_{H_n(S^n;\mathbb{Z}_2)}$ é um isomorfismo. Reciprocamente, se $(f_*)_n^{\mathbb{Z}}$ é um isomorfismo, então devemos ter $(f_*)_n^{\mathbb{Z}_2} = Id_{H_n(S^n;\mathbb{Z}_2)}$ e, portanto, k é ímpar. □

Proposição 3.2.8. ((HATCHER, 2002), Proposition 1.33 , pg.61) Seja $p : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ um espaço de recobrimento e $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ uma aplicação contínua entre espaços com ponto base, onde Y é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Então, um levantamento $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ de f existe se, e somente se $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$.

Proposição 3.2.9. ((HATCHER, 2002), Proposition 1.34 , pg.62) Sejam $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento e $f : Y \to X$ uma função contínua com dois levantamentos $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ que coincidem em um ponto, isto é, existe $y \in Y$ tal que $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$. Então, se Y é conexo, temos $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Proposição 3.2.10. Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento duplo. Dado um k-simplexo singular $\sigma : \Delta^k \to X$, existem exatamente dois levantamentos distintos $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 : \Delta^k \to \tilde{X}$ de σ.

Demonstração. Dado $x \in \Delta^k$, fixe os espaços com ponto base (Δ^k, x) e $(X, \sigma(x))$.

Sendo p um recobrimento duplo, temos $p^{-1}(\sigma(x)) = \{x_1, x_2\}$, onde $x_1 \neq x_2$.

Como Δ^k é contrátil, temos $\pi_1(\Delta^k, x) = \{0\}$, logo pela Proposição 3.2.8, para cada $i = 1, 2$ existe um levantamento $\tilde{\sigma}_i : (\Delta^k, x) \to (\tilde{X}, x_i)$ de σ.

Temos Δ^k conexo, logo pela Proposição 3.2.9, $\tilde{\sigma}_1$ e $\tilde{\sigma}_2$ serão os únicos levantamentos distintos de σ. □

Vamos construir um caso especial da sequência *transfer*, apenas para recobrimento duplo.

Definição 3.2.11 (Sequência *transfer*)**.** Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento duplo de X. Definimos a aplicação de cadeias $\tau = (\tau)_n : C_*(X; \mathbb{Z}_2) \to C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2)$, para cada $n \geq 0$, dada por:

$$\begin{gathered} \tau_n : C_n(X; \mathbb{Z}_2) \to C_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \\ \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma_i \right) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i [(\tilde{\sigma_i})_1 + (\tilde{\sigma_i})_2] \right), \end{gathered} \tag{3.64}$$

onde $(\tilde{\sigma_i})_1, (\tilde{\sigma_i})_2 : \Delta^n \to \tilde{X}$ são exatamente os dois levantamentos de $\sigma : \Delta^n \to X$ dados pela Proposição 3.2.10.

Também podemos definir a aplicação de cadeias $p_\# : C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \to C_*(X; \mathbb{Z}_2)$, para cada $n \geq 0$, dada por:

$$\begin{gathered} (p_\#)_n : C_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \to C_n(X; \mathbb{Z}_2) \\ \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma_i \right) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (p \circ \sigma_i) \right) \end{gathered} \tag{3.65}$$

Destas aplicações de cadeias, obtemos a seguinte sequência exata curta de complexos de cadeias e aplicações de cadeias:

$$0 \longrightarrow C_*(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_\#} C_*(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0, \tag{3.66}$$

que induz uma sequência exata longa em homologia:

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\tau_*)_n} H_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(p_*)_n} H_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\tau_*)_{n-1}} \ldots \quad (3.67)$$

onde Δ_n é o homomorfismo conectante.

A sequência exata longa em homologia dada em (3.67) é chamada a sequência *transfer* do espaço de recobrimento duplo $p : \tilde{X} \to X$.

A proposição a seguir é o resultado chave da demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2).

Proposição 3.2.12. Se $f : S^n \to S^n$ contínua é uma função ímpar, então $deg\ (f)$ é ímpar.

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.7, a proposição é equivalente a demonstrar que:

$$(f_*)_n : H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \to H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \quad (3.68)$$

é um isomorfismo.

Considere a sequência *transfer* do espaço de recobrimento duplo do n- espaço real projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$:

$$\begin{aligned} p : S^n &\to \mathbb{R}\mathrm{P}^n \ , n \geq 1 \\ x &\mapsto [x] \qquad\qquad . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Temos:

$$\begin{aligned} &\ldots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\tau_*)_n} H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(p_*)_n} H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta_n} \\ &H_{n-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\tau_*)_{n-1}} 0 \longrightarrow \ldots \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\ldots \longrightarrow 0 \xrightarrow{(p_*)_i} H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \quad (3.71)$$

$$\ldots \longrightarrow H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\tau_*)_0} H_0(S^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(p_*)_0} H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \quad (3.72)$$

Pelos Teoremas 3.2.13 e 3.2.14 a seguir, todos os $\mathbb{Z}_2$-módulos da sequência *transfer* são triviais ou isomorfos a $\mathbb{Z}_2$.

Teorema 3.2.13. ((GREENBERG; HARPER, 1980), (15.5) Corollary, pg.84) Dado R um anel com identidade, a homologia de S^n, $n \geq 1$, para cada $q \geq 0$, é dada por:

$$H_q(S^n;R) = \begin{cases} R, & \text{se} \quad q = n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.73)$$

Teorema 3.2.14. ((GREENBERG; HARPER, 1980), (19.27) Theorem, pg.121) Dado R um anel comutativo com identidade, a homologia do n- espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ é dada por:

$$H_q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;R) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad q > n, \\ R_2, & q \text{ par e } 1 < q \leq n, \\ \frac{R}{2R}, & q \text{ impar e } 1 \leq q \leq n-1, \\ R, & q = 0 \text{ e } q = n \text{ se } n \text{ é impar.} \end{cases} \tag{3.74}$$

onde $R_2 = \varphi^{-1}(\{0\})$, para o R-homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : R &\to R \\ x &\mapsto 2x = x + x. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Em (3.72) temos que $(p_*)_0$ é um isomorfismo, pois S^n e $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ são conexos por caminhos, $\forall n \geq 1$, logo $Im\ (\tau_*)_0 = 0$ e, portanto, $(\tau_*)_0 = 0$. Também, $Im(\Delta_1) = ker(\tau_*)_0 = H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2)$, logo Δ_1 é sobrejetora, e como todos os $\mathbb{Z}_2$-módulos são triviais ou isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, segue que Δ_1 é isomorfismo. Na linha (3.71), temos $ker(\Delta_i) = 0$ e $Im(\Delta_i) = ker(p_*)_i = H_{i-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2)$ e, portanto, Δ_i é isomorfismo, para $1 < i < n$. Já na linha (3.70), temos $0 = Im(\Delta_{n+1}) = ker(\tau_*)_n$, logo:

$$(\tau_*)_n : H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \to H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \tag{3.76}$$

é um homomorfismo injetor entre $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2$, logo um isomorfismo.

Isto implica que $(p_*)_n = 0$, e como $(\tau_*)_{n-1} = 0$, temos que Δ_n é isomorfismo. Logo Δ_i é isomorfismo para todo $i \geq 1$.

Como $f : S^n \to S^n$ é uma função contínua ímpar, podemos definir a função contínua:

$$\begin{aligned} \overline{f} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n &\to \mathbb{R}\mathrm{P}^n \\ [x] &\mapsto [f(x)] \end{aligned} \tag{3.77}$$

a qual satisfaz $p \circ f = \overline{f} \circ p$.

Para qualquer $k \geq 0$, o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\tau_k"] \arrow[d, "(\overline{f}_\#)_k"] & C_k(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(p_\#)_k"] \arrow[d, "(f_\#)_k"] & C_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\overline{f}_\#)_k"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\tau_k"'] & C_k(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(p_\#)_k"'] & C_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.78}$$

De fato, vamos provar que:

$$(f_\#)_k \circ \tau_k = \tau_k \circ (\overline{f}_\#)_k \ \ , k \geq 0 \tag{3.79}$$

$$(\overline{f}_\#)_k \circ (p_\#)_k = (p_\#)_k \circ (\overline{f}_\#)_k \ , \ \ k \geq 0. \tag{3.80}$$

Prova de (3.79): basta mostrar que a afirmação é verdadeira para um elemento da base de $C_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2)$, isto é, um k-simplexo singular $\sigma : \Delta^k \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Temos:

$$(f_\#)_k \circ \tau_k(\sigma) \overset{\text{def}\tau_k}{=} (f_\#)_k(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) = f \circ \tilde{\sigma}_1 + f \circ \tilde{\sigma}_2, \tag{3.81}$$

onde $\tilde{\sigma}_1$ e $\tilde{\sigma}_2$ são os levantamentos de σ.

Por outro lado:

$$\tau_k \circ (\overline{f}_\#)_k(\sigma) = \tau_k(\overline{f} \circ \sigma) \overset{\text{def}\tau_k}{=} \widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_1 + \widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_2, \tag{3.82}$$

onde $\widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_1$ e $\widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_2$ são levantamentos de $\overline{f} \circ \sigma$.

Queremos mostrar que:

$$f \circ \tilde{\sigma}_1 + f \circ \tilde{\sigma}_2 = \widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_1 + \widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_2. \tag{3.83}$$

Note que $f \circ \tilde{\sigma}_i$ e $\widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_i$ são levantamentos de $\overline{f} \circ \sigma : \Delta^k \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, para $i = 1, 2$. De fato:

$$p \circ \widetilde{(\overline{f} \circ \sigma)}_i = \overline{f} \circ \sigma \text{ por definição e} \tag{3.84}$$

$$p \circ (f \circ \tilde{\sigma}_i) = (p \circ f) \circ \tilde{\sigma}_i = (\overline{f} \circ p) \circ \tilde{\sigma}_i = \overline{f} \circ (p \circ \tilde{\sigma}_i) = \overline{f} \circ \sigma_i. \tag{3.85}$$

A igualdade (3.83) segue do fato de que em ambos os lados dessa igualdade temos a soma dos dois levantamentos distintos de $\overline{f} \circ \sigma$, dados pela Proposição 3.2.10, uma vez que Δ^k é conexo.

Prova de (3.80): de maneira análoga, basta mostrar para um elemento da base de $C_k(S^n;\mathbb{Z}_2)$, isto é, um k-simplexo singular $\sigma : \Delta^k \to S^n$. Temos:

$$\begin{aligned} (\overline{f}_\#)_k \circ (p_\#)_k(\sigma) = (\overline{f}_\#)_k(p \circ \sigma) = \overline{f} \circ (p \circ \sigma) = \\ (\overline{f} \circ p) \circ \sigma = (p \circ f) \circ \sigma = (p_\#)_k(f \circ \sigma) = (p)_k \circ (f_\#)_k(\sigma) \end{aligned} \tag{3.86}$$

Assim, existem os homomorfismos induzidos $f_* : H_*(S^n;\mathbb{Z}_2) \to H_*(S^n;\mathbb{Z}_2)$ e $(\overline{f})_* : H_*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \to H_*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2)$, e segue da naturalidade do homomorfismo conectante, que o seguinte diagrama é comutativo para todo $k \geq 0$.

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(\tau_*)_k"] \arrow[d, "(\overline{f}_*)_k"] & H_k(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(p_*)_k"] \arrow[d, "(f_*)_k"] & H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\Delta_k"] \arrow[d, "(\overline{f}_*)_k"] & H_{k-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\overline{f}_*)_{k-1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(\tau_*)_k"'] & H_k(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(p_*)_k"'] & H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\Delta_k"'] & H_{k-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd} \tag{3.87}$$

Vamos mostrar que:

$$(\overline{f}_*)_k : H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \to H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \tag{3.88}$$

é isomorfismo, para todo $k \geq 0$.

A prova será feita por indução sobre k. Para $k = 0$, temos que

$$(\overline{f}_*)_0 : H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \to H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \tag{3.89}$$

é isomorfismo, pois $\overline{f} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ é uma função contínua entre dois espaços topológicos conexos por caminhos.

Suponha que:

$$(\overline{f}_*)_k : H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \to H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \text{ seja um isomorfismo.} \tag{3.90}$$

Mostremos que

$$(\overline{f}_*)_{k+1} : H_{k+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \to H_{k+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \tag{3.91}$$

é isomorfismo.

De fato, de (3.87) temos que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{k+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\Delta_{k+1}"] \arrow[d, "(\overline{f}_*)_{k+1}"] & H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "(\overline{f}_*)_k"] \\ H_{k+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\Delta_{k+1}"] & H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \end{tikzcd} \tag{3.92}$$

isto é,

$$(\overline{f}_*)_k \circ \Delta_{k+1} = \Delta_{k+1} \circ (\overline{f}_*)_{k+1}. \tag{3.93}$$

Como já vimos, todos os homomorfismos conectantes são isomorfismos, logo:

$$(\overline{f}_*)_{k+1} = \Delta_{k+1}^{-1} \circ (\overline{f}_*)_k \circ \Delta_{k+1} \text{ é um isomorfismo.} \tag{3.94}$$

Também, do diagrama (3.87), temos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(\tau_*)_n"] \arrow[d, "(\overline{f}_*)_n"] & H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "(f_*)_n"] \\ H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "(\tau_*)_n"'] & H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \end{tikzcd} \tag{3.95}$$

isto é,

$$(\tau_*)_n \circ (\overline{f}_*)_n = (f_*)_n \circ (\tau_*)_n. \tag{3.96}$$

Como já foi mostrado, $(\tau_*)_n$ e $(\overline{f}_*)_n$ são isomorfismos, logo:

$$(f_*)_n = (\tau_*) \circ (\overline{f}_*)_n \circ (\tau_*)_n^{-1} \text{ é um isomorfismo,} \tag{3.97}$$

como queríamos demonstrar. □

Agora, usando a Proposição 3.2.12, podemos concluir o objetivo desta seção.

Demonstração da afirmação ***(BU 1a)*** *do Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2).* Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Defina $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = f(x) - f(-x)$, $\forall x \in S^n$.

Note que a função g é ímpar. De fato, sendo $x \in S^n$ temos:

$$g(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -g(x). \tag{3.98}$$

O Teorema agora é equivalente a demonstrar que existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$, o que implicará que existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Suponha que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in S^n$. Assim, podemos definir:

$$\begin{aligned} G : S^n &\to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{g(x)}{||g(x)||} \end{aligned} \tag{3.99}$$

Como g é uma função ímpar, segue que G também é uma função ímpar. Logo, a função

$$G\big|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1} \tag{3.100}$$

também é uma função ímpar e segue da Proposição 3.2.12 que $deg\ (G|_{S^{n-1}})$ é ímpar.

Por outro lado, $G|_{S^{n-1}}$ é homotópica a uma função constante. De fato, note que $G|_U$ é uma estensão de $G|_{S^{n-1}}$, onde $U = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n\ ;\ \ x_{n+1} \geq 0\}$. Assim, definimos a homotopia:

$$\begin{aligned} H : S^{n-1} \times [0,1] &\to S^{n-1} \\ (x,t) &\mapsto G|_U(\pi^{-1}(tx)), \end{aligned} \tag{3.101}$$

onde:

$$\begin{aligned} \pi : U &\to B^n \\ (x_1, ..., x_{n+1}) &\mapsto (x_1, ..., x_n), \end{aligned} \tag{3.102}$$

é o mesmo homeomorfismo de (3.3).

Temos que H é contínua e satisfaz, $\forall x \in S^n$:

$$H(x,0) = G|_U(\pi^{-1}(0)) \quad \text{e} \quad H(x,1) = G|_U(\pi^{-1}(x)) = G|_U(x,0) = G|_{S^{n-1}}(x). \tag{3.103}$$

Logo, $G|_{S^{n-1}} \simeq k$, onde $k : S^{n-1} \to S^{n-1}$ é a função constante igual a $G(\pi^{-1}(0))$.

Pela Proposição 3.2.5 (1), segue que $deg\ (k) = 0$, pois k não é sobrejetora, e por (2) da mesma proposição, segue que $deg(G|_{S^{n-1}}) = deg(k)$, pois $G|_{S^{n-1}} \simeq k$. Logo, $deg\ (G|_{S^{n-1}}) = deg(k) = 0$, o que é uma contradição. $\square$

3.3 Aplicações diretas do Teorema de Borsuk-Ulam

Nesta seção, vamos apresentar problemas combinatoriais e geométricos que podem ser resolvidos de maneira relativamente rápida utilizando o Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2).

3.3.1 Teorema do sanduíche de presunto

De acordo com (BEYER; ZARDECKI, 2004), o teorema que conhecemos como Teorema do sanduíche de presunto surgiu como o Problema 123 do Livro Escocês (MAULDIN, 1981), um livro de problemas elaborado por matemáticos poloneses durante as duas guerras mundiais. O problema foi proposto por Hugo Steinhauss, porém foi formulado para $d = 3$, como segue.

> "Dados três conjuntos no espaço Euclideano, cada um deles com medida de Lebesgue exterior finita, então, existe um hiperplano que bissecta os três conjuntos ao mesmo tempo, isto é, separa cada um dos três conjuntos em duas partes de medida igual."

A primeira prova deste teorema é creditada à Stefan Banach.

Para formalizar o teorema, precisaremos introduzir alguns conceitos de Teoria da medida, os quais foram baseados em (RUDIN, 1987).

Definição 3.3.1 (σ-*álgebra*)**.** Seja X um conjunto. Uma coleção $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X é chamada uma σ-*álgebra de* X se satisfaz as seguintes condições:

(I) $X \in \mathscr{A}$;

(II) Se $A \in \mathscr{A}$, então $A^C \in \mathscr{A}$, onde $A^C = X \setminus A$;

(III) Se $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, com $A_i \in \mathscr{A}$, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$, então $A \in \mathscr{A}$.

Se $\mathscr{A}$ é uma σ- álgebra de X, então $(X, \mathscr{A})$ é chamado *espaço mensurável* e os elementos $A \in \mathscr{A}$ são os *conjuntos mensuráveis* em $(X, \mathscr{A})$.

Teorema 3.3.2 ((RUDIN, 1987), 1.10 Theorem , pg.12)**.** Se $\mathscr{F}$ é uma coleção de subconjuntos de X, então existe uma menor σ-álgebra $\mathscr{A}^*$ em X, tal que $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}^*$. Isto é, existe uma σ-álgebra $\mathscr{A}^*$ tal que para toda σ-álgebra $\mathscr{A}$ de X tal que $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ temos $\mathscr{A}^* \subset \mathscr{A}$.

Definição 3.3.3 (σ-*álgebra de Borel*)**.** Seja X um espaço topológico. A menor σ-álgebra $\mathscr{B}$ de X tal que todo conjunto aberto de X pertence a $\mathscr{B}$ é chamada σ- *álgebra de Borel* de X. Os conjuntos de $\mathscr{B}$ são chamados *conjuntos de Borel* de X.

Observação 3.3.4. A existência da σ- álgebra de Borel para qualquer espaço topológico X segue do Teorema 3.3.2, tomando $\mathscr{F} = \tau_X$, onde τ_X é a topologia do espaço topológico X.

Definição 3.3.5 (*Medida positiva*)**.** Uma *medida positiva* é uma função *contável aditiva*

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty], \tag{3.104}$$

onde $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra. Isto significa que se $\{A_i\}_i$ é uma coleção contável disjunta de elementos de $\mathscr{A}$, então:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{3.105}$$

Para evitar trivialidades, vamos assumir que $\mu(A) < +\infty$, para algum $A \in \mathscr{A}$.

Se $\mu(A) < +\infty$, para todo $A \in \mathscr{A}$, a medida positiva μ é chamada *finita*.

Definição 3.3.6 (*Medida de Borel*)**.** Seja X um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Uma medida positiva

$$\mu : \mathscr{B} \to [0, +\infty], \tag{3.106}$$

onde $\mathscr{B}$ é a σ-álgebra de Borel de X, é chamada *medida de Borel* de X.

Definição 3.3.7 (*Absolutamente contínua*)**.** Sejam

$$\mu, \lambda : \mathscr{A} \to [0, +\infty] \tag{3.107}$$

medidas positivas. Dizemos que λ é *absolutamente contínua em relação à* μ, se $\lambda(A) = 0$, para todo $A \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A) = 0$.

Definição 3.3.8 (*Medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}^d$)**.** Seja a *medida exterior* (medida definida em $\mathscr{P}(X)$, para algum conjunto X e não em uma σ-álgebra de X qualquer) dada por:

$$\begin{aligned} \lambda^{d*} : \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) &\to [0, +\infty] \\ E &\mapsto \lambda^{d*}(E), \text{ onde:} \end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\lambda^{d*}(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} vol(C_k) \; ; \; C_k \text{ é um cubo } d\text{-dimensional }, \forall k \in \mathbb{N}, \text{ e } E \subset \sum_{k=1}^{\infty} C_k \right\} \tag{3.109}$$

A σ-álgebra $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis é dada por:

$$\mathscr{L} = \left\{ E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \; ; \; \lambda^{d*}(E) = \lambda^{d*}(E \cap A) + \lambda^{d*}(E \cap A^C), \;\; \forall A \subset \mathbb{R}^d \right\} \tag{3.110}$$

Assim, definimos a *medida de Lebesgue* em $\mathbb{R}^d$ por:

$$\begin{aligned} \lambda^d : \mathscr{L} &\to [0, +\infty] \\ E &\mapsto \lambda^{d*}(E). \end{aligned} \tag{3.111}$$

Exemplo 3.3.9. Um exemplo de medida de Borel finita em $\mathbb{R}^d$ pode ser dado tomando um compacto $A \subset \mathbb{R}^d$ e definindo:

$$\begin{aligned} \mu : \mathscr{B} &\to [0, +\infty] \\ X &\mapsto \lambda^d(X \cap A). \end{aligned} \tag{3.112}$$

Temos a seguinte relação entre os conjuntos Borel-mensuráveis e Lebesgue-mensuráveis.

Teorema 3.3.10. ((RUDIN, 1987), 2.20 Theorem, pg.50) Todo conjunto Borel-mensurável é Lebesgue-mensurável. Isto é:

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{L}. \tag{3.113}$$

Teorema 3.3.11 (Teorema do sanduíche de presunto para medidas)**.** ((MATOUSEK, 2008), Theorem 3.1.1, pg.47) Sejam $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_d$ medidas finitas de Borel em $\mathbb{R}^d$ absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue λ^d. Então, existe um hiperplano $h = \{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \langle a, x \rangle = b\} \subset R^d$, onde $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\mu_i(h^+) = \tfrac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d), \text{ para } i = 1, 2, ..., d, \tag{3.114}$$

onde $h^+ = \{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \langle a, x \rangle > b\}$ denota um dos semi-espaços abertos definidos por h.

Observação 3.3.12. As medidas finitas de Borel $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_d$ em $\mathbb{R}^d$, absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue λ^d serão chamadas de *distribuição de massa* em $\mathbb{R}^d$.

Observação 3.3.13. Note que como μ_i é abolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue λ^d, para todo $i = 1, 2, ..., d$, temos $\mu_i(h) = 0$, para qualquer hiperplano h. E assim, $\mu_i(h^-) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d)$, onde $h^- = \{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \langle a, x \rangle < b\}$, pois $h^+ \sqcup h^- \sqcup h = \mathbb{R}^d$ e μ_i é contável aditiva.

Observação 3.3.14. Mostraremos uma versão mais geral do Teorema do sanduíche de presunto. Essa versão foi publicada recentemente como uma homenagem a Ferran Hurtado e Jiří Matoušek e recebeu o nome de Teorema do hambúrguer.

Definição 3.3.15. ((MATOUSEK, 2008), pg. xii) Um *politopo convexo* é o fecho convexo de um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^d$.

Observação 3.3.16. Todo politopo convexo pode ser expresso como intersecção de finitos semi-espaços. Reciprocamente, se a intersecção de finitos semi-espaços for limitada, então ela é um politopo convexo.

Definição 3.3.17 (*Medidas balanceadas*)**.** Sejam $r \geq d$ inteiros positivos e $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ medidas finitas de Borel em $\mathbb{R}^d$. Dizemos que $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ são *balanceadas* em um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^d$, se para todo $i \in [r]$, temos:

$$\mu_i(X) \leq \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=1}^{r} \mu_j(X). \tag{3.115}$$

Teorema 3.3.18 (Teorema da convergência dominada)**.** ((RUDIN, 1987), 1.34 Theorem, pg.26) Seja μ uma medida positiva. Suponhamos que $\{f_n\}$ seja uma sequência de funções complexas mensuráveis em X tal que:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{3.116}$$

existe para quase todo ponto $x \in X$, isto é, o conjunto $A \subset X$, onde não existe o limite de (3.116) é tal que $\mu(A) = 0$. Se existe uma função $g \in L^1(\mu)$ (conjunto das funções mensuráveis que são Lebesgue integráveis em relação à medida μ) tal que:

$$|f_n(x)| \leq g(x)\ ,\ \ n = 1,2,3,\ldots\ ;\ x \in X, \tag{3.117}$$

então, $f \in L^1(\mu)$ (isto é, f é Lebesgue integrável em relação a medida μ),

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0, \tag{3.118}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu. \tag{3.119}$$

Teorema 3.3.19 (Teorema do hambúrguer)**.** (KANO; KYNČL, 2018) Seja $d \geq 2$ um inteiro. Sejam $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{d+1}$ medidas finitas de Borel em $\mathbb{R}^d$ absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue λ^d. Defina:

$$\omega_i = \mu_i(\mathbb{R}^d), \text{para } i \in [d+1] \quad \text{e} \quad \omega = \min\{\omega_i\ ;\ i \in [d+1]\}. \tag{3.120}$$

Suponhamos que $\sum_{j=1}^{d+1} \omega_j = 1$ e $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{d+1}$ sejam balanceadas em $\mathbb{R}^d$. Então, existe um hiperplano $h \subset \mathbb{R}^d$ tal que para cada um dos semi-espaços $H \in \{h^+, h^-\}$ definidos por h, as medidas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{d+1}$ são balanceadas em H e

$$\sum_{j=1}^{d+1} \mu_j(H) \geq \min\left\{\tfrac{1}{2}, 1 - d\omega\right\} \geq \tfrac{1}{(d+1)}. \tag{3.121}$$

Mais ainda, definindo $t = \min\left\{\frac{1}{(2d)}, \frac{1}{d} - \omega\right\}$ e assumindo que $\omega_{d+1} = \omega$, o vetor $(\mu_1(H), \mu_2(H), \ldots, \mu_{d+1}(H))$ é uma combinação convexa dos vetores $(t, t, \ldots, t, 0)$ e $(\omega_1 - t, \omega_2 - t, \ldots, \omega_d - t, \omega_{d+1})$, para $H \in \{h^+, h^-\}$.

Demonstração. A prova do Teorema do hambúrguer segue a ideia da prova do Teorema 3.3.11 dada em ((MATOUSEK, 2008), 3.1.1 Theorem, pg. 48).

O espaço de todos os semi-espaços abertos de $\mathbb{R}^d$ e o conjunto vazio contém uma topologia natural e é homeomorfo à esfera S^d. Vamos utilizar a parametrização a seguir.

Seja $u = (u_0, u_1, ..., u_d) \in S^d$, isto é, $u_0^2 + u_1^2 + ... + u_d^2 = 1$. Se $|u_0| < 1$, então ao menos uma das coordenadas $u_1, u_2, ..., u_d$ é não nula, logo podemos definir os subespaços:

$$H^-(u) = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \; ; \; u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_dx_d < u_0\}, \tag{3.122}$$

$$H^+(u) = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \; ; \; u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_dx_d > u_0\}. \tag{3.123}$$

Note que as fronteiras de $H^+(u)$ e $H^-(u)$ são iguais. Mais especificamente, são o mesmo hiperplano, o qual denotaremos por $h(u)$.

Para os pontos $u \in S^d$ tais que $|u_0| = 1$, isto é, $u = (1, 0, 0, ..., 0)$ e $(-1, 0, 0, ..., 0)$, definimos:

$$H^-(1, 0, 0, ..., 0) = \mathbb{R}^d \; , \quad H^+(1, 0, 0, ..., 0) = \emptyset; \tag{3.124}$$

$$H^-(-1, 0, 0, ..., 0) = \emptyset \; , \quad H^+(-1, 0, 0, ..., 0) = \mathbb{R}^d. \tag{3.125}$$

Note que pontos antípodas em S^d correspondem a semi-espaços abertos complementares, isto é:

$$H^-(u) = H^+(-u) \; , \; \forall u \in S^d. \tag{3.126}$$

Definimos a função:

$$f = (f_1, f_2, ..., f_{d+1}) : S^d \to \mathbb{R}^{d+1}, \tag{3.127}$$

na qual cada função coordenada é dada por:

$$f_i(u) = \mu_i(H^-(u)). \tag{3.128}$$

A função f é contínua. Para isso, basta que cada função coordenada $f_i : S^d \to \mathbb{R}$ seja contínua para todo $i \in [d+1]$.

Seja $i \in [d+1]$ qualquer. Para mostrar que cada f_i é contínua, basta mostrar que dada uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset S^d$ convergindo para $u \in S^d$ (isto é, $u_n \to u$), tem-se:

$$f_i(u_n) \longrightarrow f_i(u) \text{ ou, equivalentemente, } \; \mu_i(H^-(u_n)) \longrightarrow \mu_i(H^-(u)). \tag{3.129}$$

Assim, para n suficientemente grande, temos que:

$$x \in H^-(u_n) \text{ se, e somente se } x \in H^-(u). \tag{3.130}$$

Definimos $g_n = \chi_{H^-(u_n)}$ e $g = \chi_{H^-(u)}$, onde $\chi_{H^-(u_n)}$ é a função característica do semi-espaço aberto $H^-(u_n)$, e $\chi_{H^-(u)}$ é a função característica do semi-espaço aberto $H^-(u)$.

Logo, por (3.129), temos que:

$$g_n(x) \longrightarrow g(x) \; , \; \forall x \notin \partial H^-(u). \tag{3.131}$$

Como $\partial H^-(u) = h(u)$ é um hiperplano e μ_i é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, temos $\mu_i(H^-(u)) = 0$ e segue que:

$$g_n \longrightarrow g \text{ , em quase todo ponto.} \tag{3.132}$$

Como $|g_n(x)| \leq 1$, $n \geq 1$, para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$ e $g_n \longrightarrow g$, em quase todo ponto por (3.132), podemos aplicar o Teorema da convergência dominada (Teorema 3.3.18). Portanto:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n \, d\mu_i \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\mu_i \text{ ou, equivalentemente, } \mu_i(H^-(u_n)) \longrightarrow \mu_i(H^-(u)). \tag{3.133}$$

Portanto, vale (3.129) e segue que f_i é contínua, para todo $i \in [d+1]$.

Como $\omega_i = \mu_i(\mathbb{R}^d)$, para todo $i \in [d+1]$, temos que:

$$Im\,(f) \subset B \text{ , onde } B = \prod_{i=1}^{d+1} [0, \omega_i]. \tag{3.134}$$

Note que a função f leva pontos antípodas de S^d em pontos simétricos em relação ao centro $b = \left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, ..., \frac{\omega_{d+1}}{2}\right) \in B$.

Defina o *politopo alvo* como sendo o subconjunto de pontos $y = (y_1, y_2, ..., y_{d+1}) \in B$ satisfazendo as desigualdades:

$$y_i \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d+1} y_j \text{ e } \omega_i - y_i \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d+1} (\omega_j - y_j). \tag{3.135}$$

Note que este politopo convexo é definido como sendo a intersecção de $2d+2$ semi-espaços.

Definimos também o *politopo alvo truncado* como sendo o subconjunto de pontos $y = (y_1, y_2, ..., y_{d+1}) \in B$ do *politopo alvo* que satisfaz as desigualdades:

$$\min\left\{\tfrac{1}{2}, 1 - d\omega\right\} \leq y_1 + y_2 + ... + y_{d+1} \leq 1 - \min\left\{\tfrac{1}{2}, 1 - d\omega\right\}. \tag{3.136}$$

Já este politopo convexo é a intersecção de $2d+4$ semi-espaços.

Para se ter uma ideia geométrica mais clara dessas definições, veja na Figura 25 os *politopos alvo* e *alvo truncado*, para $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$ e $d = 2$.

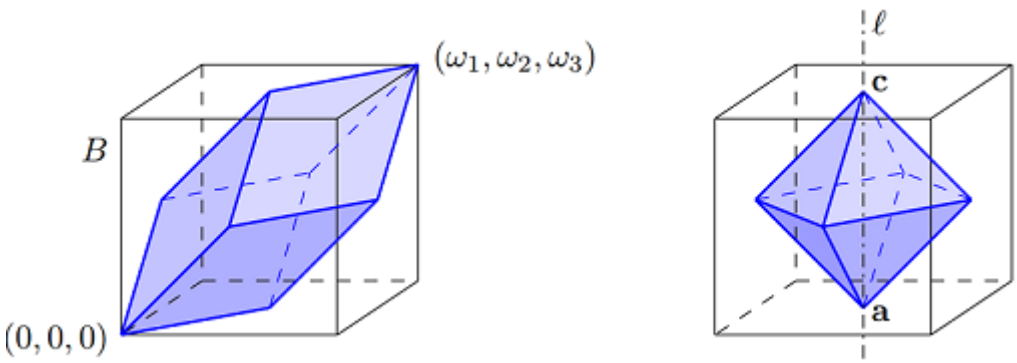
Agora, o teorema se reduz a provar que a imagem de f intersecta o *politopo alvo truncado*, pois assim existiria $u \in S^d$ tal que:

$$f(u) = (\mu_1(H^-(u)), \mu_2(H^-(u)), ..., \mu_{d+1}(H^-(u))) \text{ pertence ao } \textit{politopo alvo truncado.} \tag{3.137}$$

Das desigualdades (3.135) e (3.137), temos que:

$$\mu_i(H^-(u)) \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d+1} \mu_j(H^-(u)) \quad \text{e} \tag{3.138}$$

Figura 25 – Exemplos de *politopos alvo* e *alvo truncado*.



Fonte: Kano e Kynčl (2018).

$$\mu_i(H^+(u)) = \omega_i - \mu_i(H^-(u)) \leq \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d+1}(\omega_j - \mu_j(H^-(u))) = \sum_{j=1}^{d+1}\mu_j(H^+(u)). \tag{3.139}$$

As desigualdades (3.138) e (3.139) implicam que as medidas $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{d+1}$ são balanceadas tanto em $H^-(u)$ quanto em $H^+(u)$.

Das desigualdades (3.136) e (3.137), temos

$$\min\left\{\tfrac{1}{2}, 1 - d\omega\right\} \leq \mu_1(H^-(u)) + \mu_2(H^-(u)) + \cdots + \mu_{d+1}(H^-(u)) \quad \text{e} \tag{3.140}$$

$$\mu_1(H^-(u)) + \mu_2(H^-(u)) + \cdots + \mu_{d+1}(H^-(u)) \leq 1 - \min\left\{\tfrac{1}{2}, 1 - d\omega\right\}. \tag{3.141}$$

A desigualdade (3.140) garante que a desigualdade (3.121) do enunciado do Teorema do hambúrguer é satisfeita para o semi-espaço aberto $H = H^-(u)$. Já a desigualdade (3.141) implica que a desigualdade (3.121) vale para o semi-espaço aberto $H^+(u)$, pois é equivalente a:

$$\sum_{j=1}^{d+1}\mu_j(H^+(u)) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{d+1}\mu_j(H^-(u))\right) \geq \min\left\{\tfrac{1}{2}, 1 - d\omega\right\}. \tag{3.142}$$

Assim, $h(u)$ é o hiperplano procurado.

Definimos a função:

$$\begin{aligned} g : S^d &\to \mathbb{R}^{d+1} \\ u &\mapsto f(u) - b. \end{aligned} \tag{3.143}$$

Note que g é contínua e preserva pontos antípodas, isto é:

$$g(-u) = -g(u)\ ,\ \forall u \in S^d. \tag{3.144}$$

Claramente, $b = \left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, ..., \frac{\omega_{d+1}}{2}\right)$ satisfaz (3.135) e (3.136) e, portanto, b pertence ao *politopo alvo truncado*.

Então, se $0 \in Im\,(g)$, existe $u \in S^d$ tal que $g(u) = 0$ e, assim, $f(u) = b$ pertence ao *politopo alvo truncado*. Portanto, o hiperplano $h(u)$ satisfaz as condições desejadas no teorema.

Suponhamos que $0 \notin Im\,(g)$. Então, podemos definir:

$$\tilde{g} : S^d \to S^d \tag{3.145}$$

$$u \mapsto \frac{g(u)}{||g(u)||}. \tag{3.146}$$

Como g preserva pontos antípodas, segue que $\tilde{g}$ preserva pontos antípodas.

Pela Proposição 3.2.12, segue que $\tilde{g}$ tem grau ímpar, logo $\tilde{g}$ é sobrejetora.

O fato de $\tilde{g}$ ser sobrejetora significa que $Im\,(g)$ intersecta toda reta de $\mathbb{R}^{d+1}$ que passa pela origem, ou equivalentemente, $Im\,(f)$ intersecta toda reta de $\mathbb{R}^{d+1}$ passando por b. Portanto, para mostrar que $Im\,(f)$ intersecta o *politopo alvo truncado*, basta encontrar uma reta l passando por b tal que $l \cap B$ está contido no *politopo alvo truncado*.

Sem perda de generalidade podemos supor que:

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq ... \geq \omega_{d+1} = \omega. \tag{3.147}$$

Seja t como definido no enunciado do Teorema do hamburguer, isto é:

$$t = \min\left\{\tfrac{1}{(2d)}, \tfrac{1}{d} - \omega_{d+1}\right\}. \tag{3.148}$$

Definimos l como sendo a reta em $\mathbb{R}^{d+1}$ que contém os pontos a e c definidos a seguir.

$$a = (t, t, ..., t, 0) \quad \text{e} \quad c = (\omega_1 - t, \omega_2 - t, ..., \omega_d - t, \omega_{d+1}). \tag{3.149}$$

Por hipótese as medidas μ_1, μ_2, ... , μ_{d+1} são balanceadas em $\mathbb{R}^d$ e $\sum_{j=1}^{d+1} \omega_j = 1$, logo:

$$\omega_i \leq \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d+1} \omega_j = \frac{1}{d}, \quad \forall i \in [d+1]. \tag{3.150}$$

Assim, de (3.150) e de $\sum_{j=1}^{d+1} \omega_j = 1$, segue que:

$$\omega_d + \omega_{d+1} = 1 - (\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{d-1}) \geq 1 - \tfrac{1}{d}.(d-1) = \tfrac{1}{d}. \tag{3.151}$$

Como $\omega_d \geq \omega_{d+1}$, segue de (3.151) que:

$$\omega_d + \omega_{d+1} \geq \frac{1}{d} \Longrightarrow 2\omega_d \geq \omega_d + \omega_{d+1} \geq \tfrac{1}{d} \Longrightarrow$$

$$\omega_d \geq \tfrac{1}{(2d)} \geq t = \min\left\{\tfrac{1}{(2d)}, \tfrac{1}{d} - \omega_{d+1}\right\}. \tag{3.152}$$

Logo, de (3.147) e (3.152) segue que:

$$t \leq \omega_d \leq \omega_i, \quad \text{e} \quad \omega_i - t \geq 0, \ \forall i \in [d]. \tag{3.153}$$

Segue de (3.153) que $a = (t, t, ..., t, 0)$ e $c = (\omega_1 - t, \omega_2 - t, ..., \omega_d - t, \omega_{d+1})$ pertencem a $B = \prod_{i=1}^{d+1} [0, \omega_i]$.

Além, disso a e c são simétricos em relação a b, isto é, $\frac{a+c}{2} = b$. Desse fato, as desigualdades (3.135) para a e c são as mesmas.

A partir da desigualdade $(\omega_1 - t) + (\omega_2 - t) + ... + (\omega_d - t) + \omega_{d+1} = 1 - dt \geq d\omega_{d+1}$ valem as desigualdades (3.135) para a e c. Por outro lado, da desigualdade $dt \leq 1 - dt$ valem as desigualdades (3.136) para a e c. Logo, por definição a e c pertencem ao politopo alvo truncado e, portanto, a intersecção de l com B está contida no politopo alvo truncado, pois este é convexo.

Vamos agora mostrar como podemos trocar o argumento do grau de $\tilde{g}$ utilizando o Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2 **(BU 1b)**).

Seja π_l a projeção de $\mathbb{R}^{d+1}$ na direção da reta l no subespaço ortogonal a l, o qual pode ser identificado com $\mathbb{R}^d$.

Definimos:

$$\begin{aligned} g' : S^d &\to \mathbb{R}^d \\ u &\mapsto \pi_l(g(u)). \end{aligned} \tag{3.154}$$

A aplicação g' preserva pontos antípodas e pelo Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2 **(BU 1b)**) existe $u \in S^d$ tal que $g'(u) = 0$, o que significa que $f(u) \in l$. □

Observação 3.3.20. Note que, em particular, se tomarmos $\mu_{d+1} \equiv 0$ como a medida nula, obtemos o Teorema do sanduíche de presunto para medidas (Teorema 3.3.11) como consequência. O Teorema 3.3.19 foi nomeado Teorema do hambúrguer pelo fato de possuir mais ingredientes (mais distribuições de massa) se comparado a um sanduíche de presunto.

A próxima versão do Teorema do sanduíche de presunto é uma versão para conjuntos finitos de pontos. Como corolário dessa versão, obtemos uma nova versão, com hipóteses adicionais que nos fornecerão um "corte do sanduíche"mais bem definido. Tal versão será extremamente útil na demonstração do Teorema do Colar (Teorema 3.3.28).

Definição 3.3.21. Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto finito de pontos. Dizemos que um hiperplano $h \subset \mathbb{R}^d$ *bissecta* o conjunto A se:

$$\begin{aligned} |h^+ \cap A| &\leq \lfloor \tfrac{1}{2}|A| \rfloor = \text{máx}\left\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq \tfrac{1}{2}|A|\right\} \text{ e} \\ |h^- \cap A| &\leq \lfloor \tfrac{1}{2}|A| \rfloor = \text{máx}\left\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq \tfrac{1}{2}|A|\right\}. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Definição 3.3.22. Seja $A \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto finito. Dizemos que o conjunto A está em *posição geral* se não existem $d+1$ pontos distintos em A que pertencem a um mesmo hiperplano.

Exemplo 3.3.23. Três pontos colineares não estão em posição geral em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.3.24 (Teorema do sanduíche de presunto para conjuntos finitos de pontos)**.** ((MATOUSEK, 2008), Theorem 3.1.2,pg. 48) Sejam $A_1, A_2, ..., A_d \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos finitos de pontos. Então, existe um hiperplano h que bissecta $A_1, A_2, ..., A_d$ simultaneamente.

Demonstração. A ideia para provar esse teorema consiste em trocar os pontos de A_i por bolas abertas suficientemente pequenas centradas nos pontos de A_i, a partir daí aplicamos o Teorema do sanduíche de presunto para medidas (Teorema 3.3.11). Vamos separar o teorema em três casos, de acordo com os subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_d$.

Caso 1: A cardinalidade de A_i é ímpar, para todo $i \in [d]$ e $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d$ está em posição geral.

Definimos o conjunto A_i^ε apartir de A_i, para $i \in [d]$, trocando cada ponto de A_i pela bola aberta centrada nesse ponto com raio ε.

Como $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d$ está em posição geral, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que dadas $d+1$ bolas abertas de $\bigsqcup_{i=1}^{d} A_i^\varepsilon$, não existe um hiperplano $h \subset R^d$ que as intersecta simultaneamente.

Defina, para $i \in [d]$:

$$\begin{aligned} \mu_i : \mathscr{B} &\to [0, +\infty] \\ X &\mapsto \lambda^d(X \cap A_i^\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.156}$$

Aplicando o Teorema do sanduíche de presunto para medidas (Teorema 3.3.11) para as medidas $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_d$ definidas em (3.156), segue que existe um hiperplano h tal que:

$$\lambda^d\left(h^+ \cap A_i^\varepsilon\right) = \mu_i(h^+) = \mu_i(h^-) = \lambda^d\left(h^- \cap A_i^\varepsilon\right), \ \ i \in [d], \tag{3.157}$$

isto é, h divide todo A_i^ε em duas partes com a mesma medida de Lebesgue.

Como A_i^ε possui um número ímpar de bolas abertas para todo $i \in [d]$ e h divide A_i^ε em duas partes com a mesma medida de Lebesgue, então h deve intersectar ao menos uma bola aberta de cada A_i^ε. Logo, h intersecta no mínimo d bolas abertas. Mas por construção, $\varepsilon > 0$ foi tomado de tal forma que h não intersecta $d+1$ bolas abertas de $\bigsqcup_{i=1}^{d} A_i^\varepsilon$, portanto, h intersecta exatamente d bolas, uma de cada A_i^ε, para $i \in [d]$.

Assim, como o hiperplano h divide cada A_i^ε em duas partes com a mesma medida de Lebesgue e intersecta somente uma bola aberta de A_i^ε, então h passa pelo centro dessa bola

intersectada. As outras $|A_i|-1$ bolas abertas de A_i^ε estão $\frac{|A_i|-1}{2} = \lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ contidas em h^+ e $\frac{|A_i|-1}{2} = \lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ contidas em h^-. Em particular, seus centros (os pontos de A_i) também estão contidos em h. Isto implica que h bissecta A_i, para todo $i \in [d]$.

Caso 2: A cardinalidade de $|A_i|$ é ímpar, para todo $i \in [d]$, mas $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_d$ não está necessariamente em posição geral.

Usaremos um argumento de perturbação. Para todo $\eta > 0$, podemos perturbar o conjunto A_i, tal que cada ponto de A_i não é movido a uma distância maior do que η e assim obter um novo conjunto finito de pontos $A_{i,\eta}$ de maneira que $A_{1,\eta} \sqcup A_{2,\eta} \sqcup \ldots \sqcup A_{d,\eta}$ está em posição geral.

Pelo *Caso 1*, existe um hiperplano h_η que bissecta todos os conjuntos $A_{1,\eta}, A_{2,\eta}, \ldots, A_{d,\eta}$ simultaneamente. Vamos escrever:

$$h_\eta = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \langle a_\eta, x \rangle = b_\eta \right\}, \text{ para algum } a_\eta \in S^d. \tag{3.158}$$

Desta forma, quando $\eta_k \to 0$, temos (b_{η_k}) uma sequência limitada, isto é, existe $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e limitado tal que $(b_{\eta_k}) \subset I$. Agora, tome a sequência $(a_{\eta_k}, b_{\eta_k}) \in S^d \times I$. Como $S^d \times I$ é compacto, existe uma subsequência:

$$(a_{\eta_{k_j}}, b_{\eta_{k_j}}) \in S^d \times I \text{ tal que } (a_{\eta_{k_j}}, b_{\eta_{k_j}}) \to (a,b) \in \mathbb{R}^{d+1}. \tag{3.159}$$

.

Defina:

$$h = \{ x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \langle a, x \rangle = b \}. \tag{3.160}$$

O hiperplano h definido em (3.160) é um hiperplano que bissecta $A_1, A_2, \ldots, A_d$ simultaneamente.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}^d$ um ponto tal que $dist(x,h) = \delta > 0$. Então, existe j suficientemente grande tal que $\text{dist}(x, h_{\eta_{k_r}}) \geq \frac{1}{2}\delta$, para todo $r \geq j$. Logo, se existem m pontos de A_i em um dos semi-espaços abertos H determinados por h, estes m pontos irão pertencer a um semi-espaço aberto $H_{\eta_{k_j}}$ determinado por $h_{\eta_{k_j}}$, para j suficientemente grande. Portanto, se para algum $i \in [d]$ existirem mais de $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ pontos de A_i em um dos semi-espaços abertos H determinados por h, existirão mais de $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ pontos de $A_{i,\eta}$ em h_{η_j}, o que é uma contradição.

Caso 3: Este é o caso geral. Suponhamos que dentre os conjuntos finitos de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_d$ possa existir $i \in [d]$ tal que $|A_i|$ é ímpar.

Defina $A_i' = A_i$, se $|A_i|$ for ímpar. E se $|A_i|$ for par, escolha um ponto $p_i \in A_i$ e defina $A_i' = A_i \setminus \{p_i\}$. Neste caso, obtemos A_1', A_2', ... A_d' tais que $|A_i'|$ é ímpar, para $i \in [d]$.

Considerando $A_1', A_2', \ldots, A_d'$ e aplicando o *Caso 2*, obteremos h um hiperplano que bissecta $A_1', A_2', \ldots, A_d'$. Note que este hiperplano h também bissecta $A_1, A_2, \ldots, A_d$. De fato, se $|A_i|$ for ímpar, temos $A_i' = A_i$ e não há o que fazer. E se $|A_i|$ for par, como cada semi-espaço aberto H

determinado por h possui no máximo $\lfloor \frac{1}{2}|A_i'| \rfloor = \lfloor \frac{1}{2}(|A_i|-1) \rfloor = \frac{1}{2}|A_i|-1$ pontos de A_i, mesmo que $p_i \in H$, teríamos no máximo $\left(\frac{1}{2}|A_i|-1\right)+1 = \frac{1}{2}|A_i| = \lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ pontos de A_i em H, logo h bissecta $A_1, A_2, ..., A_d$. □

Corolário 3.3.25 (Teorema do sanduíche de presunto, versão para posição geral)**.** ((MATOUSEK, 2008), 3.1.3 Corollary, pg.49) Sejam $A_1, A_2, ..., A_d \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos finitos de pontos tais que $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d$ está em posição geral. Então, existe um hiperplano h que bissecta $A_1, A_2, ..., A_d$ simultaneamente, tal que para todo $i \in [d]$, temos exatamente $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ pontos de A_i em cada semi-espaço aberto determinado por h e no máximo um ponto de A_i pertence a h.

Demonstração. A ideia da prova é aplicar o Teorema 3.3.24 e perturbar o hiperplano h obtido, de forma a obtermos um novo hiperplano que satisfaz as condições do Corolário 3.3.25 .

Tome h o hiperplano dado na demonstração do Teorema 3.3.24, o qual bissecta $A_1, A_2, ..., A_d$ simultaneamente. O que impede h de ser o hiperplano que procuramos no enunciado do corolário é o fato de que um conjunto A_i de cardinalidade par pode ter mais de um ponto pertencendo a h e, portanto, vamos perturbar h de modo que ele satisfaça as condições desejadas.

Realizando uma mudança no sistema de coordenadas, podemos tomar h como sendo o plano horizontal, isto é:

$$h = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \; ; \; x_d = 0\}. \tag{3.161}$$

Defina $B = (A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d) \cap h$. Note que B consiste de no máximo d pontos geometricamente independentes.

Vamos adicionar $d - |B|$ pontos em B, de forma a obter um subconjunto $C \subset h$ tal que C consiste de d pontos geometricamente independentes.

O que faremos a seguir é perturbar o hiperplano h, obtendo um novo hiperplano h', onde:

$$(A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d) \cap h^+ \subset h'^+ \;\text{ e }\; (A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d) \cap h^- \subset h'^-. \tag{3.162}$$

Além disso, deslocaremos os pontos de A_i, para $|A_i|$ par, para baixo (h^-) ou para cima (h'^+), de modo que h' seja o hiperplano desejado.

A partir de C construiremos um novo conjunto $C' = \{a'; \; a \in C\}$, onde a' é definido da seguinte forma: se $a \in C \setminus B$ é um dos novos $(d - |B|)$ pontos adicionados, ou se $a \in A_i$, onde $|A_i|$ é ímpar, definimos $a = a'$. Por outro lado, se $a \in A_i$, onde $|A_i|$ é par, definimos:

$$a' = \begin{cases} a + \varepsilon e_d, & \text{se quisermos colocar} \quad a \in h'^-, \\ a - \varepsilon e_d, & \text{se quisermos colocar} \quad a \in h'^+. \end{cases} \tag{3.163}$$

Note que podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que os d pontos de C' sejam geometricamente independentes e são válidas as inclusões de (3.162). Defina h' o hiperplano determinado pelos d pontos geometricamente independentes de C'. Este será o hiperplano procurado. □

Exemplo 3.3.26 (Dividindo uma pizza para quatro pessoas)**.** Seja μ uma distribuição de massa no plano. Existem dois hiperplanos h_1 e h_2 que dividem o plano em quatro regiões:

$$H_1 = h_1^+ \cap h_2^+, \;\; H_2 = h_1^+ \cap h_2^-, \;\; H_3 = h_1^- \cap h_2^+ \;\text{ e }\; H_4 = h_1^- \cap h_2^- \tag{3.164}$$

com igual distribuição de massa, isto é:

$$\mu(H_1) = \mu(H_2) = \mu(H_3) = \mu(H_4) = \tfrac{1}{4}\mu(\mathbb{R}^2). \tag{3.165}$$

Tome η uma outra distribuição de massa qualquer no plano. Temos μ, η distribuições de massa no plano e, pelo Teorema do sanduíche de presunto para medidas (Teorema 3.3.11), existe h_1 um hiperplano tal que:

$$\mu(h_1^+) = \tfrac{1}{2}\mu(\mathbb{R}^d) = \mu(h_1^-). \tag{3.166}$$

Defina as distruições de massa λ_1 e λ_2 dadas por:

$$\lambda_1(X) = \mu(X \cap h_1^+) \;\text{ e }\; \lambda_2(X) = \mu(X \cap h_1^-), \;\text{ para }\; X \in \mathscr{L}. \tag{3.167}$$

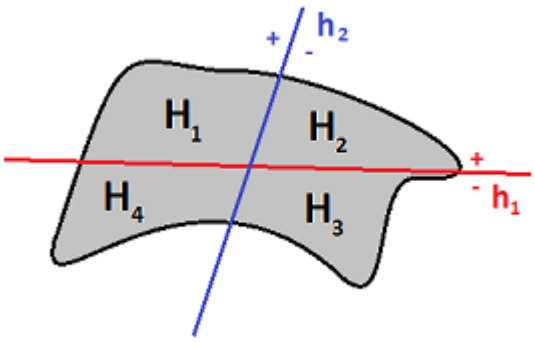
Novamente, pelo Teorema do sanduíche de presunto para medidas (Teorema 3.3.11), dadas as distribuições de massa λ_1 e λ_2, existe um hiperplano h_2 tal que:

$$\lambda_1(h_2^+) = \lambda_1(h_2^-) = \tfrac{1}{2}\lambda_1(\mathbb{R}^d) = \tfrac{1}{2}\mu(h_1^+) \;\text{ e }\; \lambda_2(h_2^+) = \lambda_2(h_2^-) = \tfrac{1}{2}\lambda_2(\mathbb{R}^d) = \tfrac{1}{2}\mu(h_1^-). \tag{3.168}$$

Assim, h_1 e h_2 serão os hiperplanos procurados.

Uma interpretação para este problema é pensar em uma pizza (não necessariamente aquela tradicional, pode ser um pizza em formato de ★ ou ♣ por exemplo) e com apenas dois cortes podemos dividi-la igualmente entre quatro pessoas.

Figura 26 – Pizza dividida entre quatro pessoas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.2 Teorema do colar e multipartições coloridas

Nesta seção, apresentaremos problemas geométricos e combinatoriais para os quais o uso de ferramentas topológicas tem sido extremamente útil, além de fornecerem demonstrações muito elegantes.

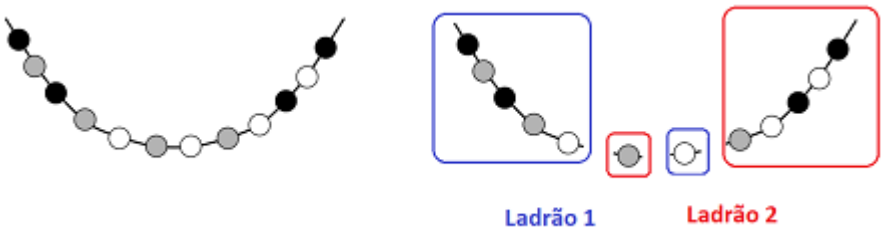
O Teorema do colar consiste no seguinte problema de divisão descrito a seguir.

> Dois ladrões roubaram um valioso colar de pedras preciosas. Existem d tipos de pedras preciosas e uma quantidade par de cada tipo de pedra, podendo assim ser repartido de forma a dar a mesma quantidade de pedras de cada tipo para ambos os ladrões. A divisão seria muito simples, porém eles querem fazer o menor número de cortes possíveis no colar, pois este é feito de platina e a cada corte feito eles estão diminuindo o valor pelo qual podem vender essa platina.

Neste problema estamos considerando um colar aberto (isto é, homeomorfo a $(0,1)$) como na Figura 27, não um colar fechado (homeomorfo a S^1).

Exemplo 3.3.27. No colar da Figura 27 temos três tipos de pedras e podemos fazer uma divisão entre os ladrões com apenas três cortes.

Figura 27 – Exemplo de colar e de divisões entre dois ladrões.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg.54).

Queremos saber em uma situação geral, isto é, em um colar aberto com d tipos de pedras e um número par de cada tipo delas, qual o número mínimo de cortes que faria uma divisão igualitária, independentemente das posições das pedras.

Inicialmente note que se tivermos d tipos de pedras, com $2k$ pedras de cada tipo agrupadas em d blocos com todas as $2k$ pedras do mesmo tipo, assim como Figura 28, serão necessários pelo menos d cortes para fazer a divisão (ao menos um em cada bloco de pedras do mesmo tipo).

O Teorema do colar diz que essa situação é extrema, ou seja, com d tipos de pedras podemos fazer a divisão em no máximo d cortes, qualquer que seja a distribuição das pedras.

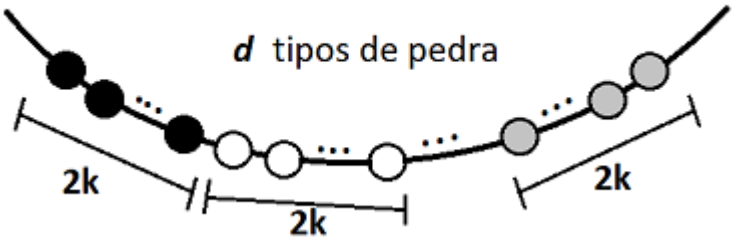
Considerando que temos uma quantidade par de pedras de cada tipo, o Teorema do colar pode ser enunciado como segue.

Teorema 3.3.28. (Teorema do colar, (MATOUSEK, 2008), 3.2.2 Theorem, pg.54) Qualquer colar (aberto) com d tipos de pedras pode ser dividido entre dois ladrões usando no máximo d cortes.

Demonstração. Podemos considerar o colar como a curva momento:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \tag{3.169}$$

Figura 28 – Exemplo de colar em que d cortes são necessários.



Fonte: Elaborada pelo autor.

dada por $\gamma(t) = (t, t^2, ..., t^d)$.

Suponha que o colar possua n pedras. Defina:

$$A_i = \{\gamma(k) \text{ ; a } k\text{-ésima pedra é do } i \text{ -ésimo tipo, } k = 1, 2, ..., n\}. \tag{3.170}$$

Aqui, os pontos de A_i são as pedras do i-ésimo tipo.

Como $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d \subset Im\,(\gamma)$, segue pelo Lema 2.4.5 que a união está em posição geral. Logo, podemos aplicar o Corolário 3.3.25 e concluir que existe um hiperplano h que bissecta todo A_i, para $i \in [d]$. Assim, como $|A_i|$ é par, para todo $i \in [d]$, h é disjunto de $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d$ e

$$|h^+ \cap A_i| = \frac{|A_i|}{2} = |h^- \cap A_i| \text{ , para todo } i \in [d]. \tag{3.171}$$

Pelo Lema 2.4.5, h não intersecta (corta) a curva momento (colar) em mais de d pontos, ou seja, o colar é cortado no máximo d vezes pelo hiperplano h.

Agora, por (3.171), considerando os cortes realizados pelo hiperplano h, basta dar as pedras que estão em h^+ para um dos ladrões, e as pedras que estão em h^- para o outro ladrão.

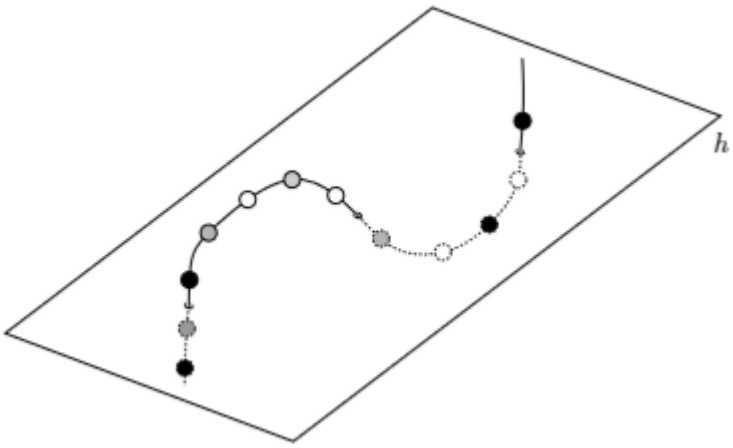
□

Surpreendentemente, apesar de ser um problema com enunciado puramente combinatorial, todas as provas conhecidas do Teorema do colar utilizam topologia.

Um tipo de problema geométrico-combinatorial em que as ferramentas topológicas têm se mostrado extremamente úteis são as multipartições coloridas, como veremos a seguir.

Teorema 3.3.29. (AKIYAMA; ALON, 1989) Sejam $d \geq 2$ e $n \geq 2$ naturais. Considere os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_d$ de n pontos cada, em posição geral em $\mathbb{R}^d$; imagine que os pontos de A_1 são azuis, os pontos de A_2 são vermelhos, etc. (Cada A_i tem sua prória cor). Então, os pontos da união $A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d$ podem ser particionados em *"arco-íris"* d-uplas (cada d-upla contém um ponto de cada cor) com fechos convexos disjuntos.

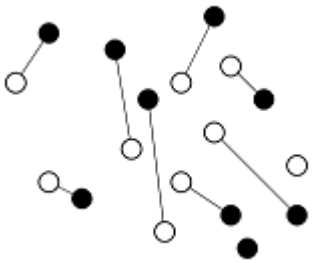
Figura 29 – Figura ilustrando a demonstração do Teorema do colar.



Fonte: Matousek (2008, pg.55).

Exemplo 3.3.30. Na Figura 30 temos um exemplo de tentativa frustrada de realização do *"arco-íris"*, para $n = 9$ e $d = 2$.

Figura 30 – Exemplo de tentativa de fazer um *"arco-íris"*.



Fonte: Matousek (2008, pg.54).

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n.

Para o caso inicial $n = 2$, pelo Corolário 3.3.25, existe h um hiperplano que bissecta $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_d$ de forma que:

$$|h^+ \cap A_i| = 1 \text{ e } |h^- \cap A_i| = 1 \text{ , para todo } i \in [d]. \tag{3.172}$$

Assim, como $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_d$ está em posição geral, o fecho convexo dos d pontos em cada semi-espaço aberto determinado por h é um $(d-1)$- dimensional simplexo com cada vértice em um A_i. Logo, temos o *"arco-íris"* formado pelos dois fechos convexos:

$$\text{conv}(\{x\,;\, x \in (A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_d) \cap h^+\}) \text{ e } \text{conv}(\{x\,;\, x \in (A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_d) \cap h^-\}). \tag{3.173}$$

Agora vamos mostrar o passo indutivo. Dado $m \geq 2$, suponhamos o teorema válido para todo $n < m$. Vamos dividir em dois casos, como segue.

Se m é impar, pelo Corolário 3.3.25 existe um hiperplano h que bissecta cada A_i, para $i \in [d]$ e contém exatamente um ponto de cada cor (isto é, de cada A_i). Assim, em cada semi-espaço aberto determinado por h, temos $\frac{m-1}{2}$ pontos de cada A_i e d pontos em h, um de cada A_i.

Tome o d-simplexo formado pelos pontos em h e aplique o teorema para $n = \frac{m-1}{2} < m$ em cada um dos semi-espaços abertos determinados por h. Como h^+ e h^- são convexos e $h^+ \cap h^- = \emptyset$, segue que o teorema vale para $n = m$.

Se m é par, pelo Corolário 3.3.25 existe um hiperplano h que bissecta cada A_i, para $i \in [d]$ e é disjunto de $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_d$. Assim, cada semi-espaço aberto determinado por h contém exatamente $\frac{m}{2}$ pontos de cada A_i. Aplicando o teorema para $n = \frac{m}{2} < m$ nos semi-espaços abertos como no caso anterior, temos que o teorema segue para $n = m$. □

Existe a tentativa de generalizar o Teorema 3.3.29, a qual dá origem à seguinte conjectura.

Conjectura 3.3.31. Sejam $r \geq d \geq 3$ e $n \geq 2$ inteiros. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_r$ conjuntos disjuntos em $\mathbb{R}^d$. Suponhamos que não existam $d+1$ pontos de $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_r$ em um mesmo hiperplano, $\sum_{i=1}^{r} |X_i| = dn$, e $|X_i| \leq n$, para qualquer $i \in [r]$. Então, existem n simplexos $(d-1)$- dimensionais disjuntos, onde os d vértices de cada d-simplexo são pontos de d conjuntos distintos X_i.

O caso planar, isto é, $d = 2$ já foi resolvido, como afirma o teorema a seguir.

Teorema 3.3.32. (KANO; SUZUKI; UNO, 2013) Sejam $r \geq 3$ e $n \geq 2$ inteiros. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_r$ r conjuntos disjuntos de pontos no plano. Suponhamos que não existam três pontos de:

$$X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_r \tag{3.174}$$

colineares, $\sum_{i=1}^{r} |X_i| = 2n$, e $|X_i| \leq n$, para qualquer $i \in [r]$. Então, existe uma correspondência perfeita sem cruzamentos em $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_r$, onde cada aresta conecta dois pontos de conjuntos distintos X_i e X_j.

No mesmo artigo em que Mikio Kano e Jan Kynčl demonstram o Teorema do hambúrguer (Teorema 3.3.19), é apresentada uma versão discreta do Teorema do hambúrguer (Teorema 3.3.36), a qual é utilizada para demonstrar um caso particular da Conjectura 3.3.31 para o caso $r = d+1$, o qual é enunciado a seguir.

Observação 3.3.33. Para o caso $n = 1$ temos trivialidades nos Teoremas 3.3.29 e 3.3.32 e na Conjectura 3.3.31, por essa razão foi enunciado $n \geq 2$. De fato, no Teorema 3.3.29 temos um único *"arco-íris"* d-upla com um ponto de cada cor, enquanto no Teorema 3.3.32 temos apenas dois conjuntos X_i e X_j distintos com um único ponto cada, os quais formam a única aresta da correspondência. Na Conjectura 3.3.31, os d pontos de $\bigsqcup_{i=1}^{r} X_i$ formam um único $(d-1)$-dimensional simplexo, onde os d vértices são pontos de d conjuntos distintos X_i.

Definição 3.3.34. Dizemos que os conjuntos de pontos $X_1, X_2, ..., X_r$ são *balanceados* em um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ se para qualquer $i \in [r]$, temos:

$$|S \cap X_i| \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{r} |S \cap X_j|. \tag{3.175}$$

Teorema 3.3.35. (KANO; KYNČL, 2018) Sejam $d \geq 2$ e $n \geq 2$ inteiros. Sejam $X_1, X_2, ..., X_{d+1}$ $d+1$ conjuntos disjuntos de pontos em $\mathbb{R}^d$. Suponhamos que não existam $d+1$ pontos de $X_1 \sqcup X_2 \sqcup ... \sqcup X_{d+1}$ em um mesmo hiperplano, $\sum_{i=1}^{d+1} |X_i| = dn$, e $|X_i| \leq n$, para cada $i \in [d+1]$. Então, existem n simplexos $(d-1)$- dimensionais disjuntos, onde os vértices de cada simplexo são pontos de d conjuntos distintos X_i.

Agora, enunciamos a versão discreta do Teorema do hambúrguer e a seguir faremos a demonstração do Teorema 3.3.35.

Teorema 3.3.36 (Versão discreta do Teorema do hambúrguer)**.** (KANO; KYNČL, 2018) Sejam $d \geq 2$ e $n \geq 2$ inteiros. Sejam $X_1, X_2, ..., X_{d+1}$ $d+1$ conjuntos disjuntos de pontos balanceados em $\mathbb{R}^d$. Suponhamos que não existam $d+1$ pontos de $X_1 \sqcup X_2 \sqcup ... \sqcup X_{d+1}$ em um mesmo hiperplano e que $\sum_{i=1}^{d+1} |X_i| = dn$. Então, existe um hiperplano h disjunto com $X_1 \sqcup X_2 \sqcup ... \sqcup X_{d+1}$ tal que para cada semi-espaço aberto H determinado por h, os conjuntos $X_1, X_2, ..., X_{d+1}$ são balanceados em H e $\sum_{i=1}^{d+1} |H \cap X_i|$ é um inteiro positivo múltiplo de d.

Demonstração do Teorema 3.3.35. Fixado $d \geq 2$ um inteiro qualquer, mostraremos o resultado por indução em n, utilizando o Teorema 3.3.36.

Vamos provar o caso inicial $n = 2$. Por hipótese, $X_1, X_2, ..., X_{d+1}$ são $d+1$ conjuntos disjuntos de pontos em $\mathbb{R}^d$ tais que:

$$\sum_{i=1}^{d+1} |X_i| = 2d \ \text{ e } \ |X_i| \leq 2 \text{ , para todo } i \in [d+1]. \tag{3.176}$$

Pelo Teorema 3.3.36, existe um hiperplano h tal que $\sum_{i=1}^{d+1} |H \cap X_i|$ é um inteiro positivo múltiplo de d, para $H \in \{h^+, h^-\}$. Como $\sum_{i=1}^{d+1} |X_i| = 2d$, segue que:

$$\sum_{i=1}^{d+1} |H \cap X_i| = d \text{ , para } H \in \{h^+, h^-\}. \tag{3.177}$$

Logo, como $X_1, X_2, ..., X_{d+1}$ é balanceado em $H \in \{h^+, h^-\}$ temos:

$$|H \cap X_i| \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d+1} |H \cap X_j| = 1 \text{ , para } i \in [d+1]. \tag{3.178}$$

Portanto, cada X_i tem um ponto em H, para $H \in \{h^+, h^-\}$. Agora basta tomar o d-simplexo cujos vértices são os pontos de $h^+ \cap (X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_{d+1})$ e o d- simplexo cujos vértices são os pontos de $h^- \cap (X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_{d+1})$.

Para o passo indutivo, note que pelo Teorema 3.3.36, existe um hiperplano h que divide $\mathbb{R}^d$ em dois semi-espaços h^+ e h^-, onde cada um deles tem dk pontos, $1 \leq k \leq n-1$ e exatamente k pontos de cada X_i. Assim, por hipótese de indução podemos aplicar o teorema em $h^+ \subset \mathbb{R}^d$ e $h^- \subset \mathbb{R}^d$ separadamente, e como $h^+ \cap h^- = \emptyset$, o teorema segue. □

3.3.3 Conjectura de Kneser

A Conjectura de Kneser, proposta em 1955 por Martin Kneser, é anunciada a seguir.

> "Sejam k e n números naturais, $k \leq n$; seja N um conjunto com n elementos, N_k o conjunto de todos os subconjuntos de N com exatamente k elementos; seja f uma aplicação de N_k em M com a propriedade de que $f(K_1) \neq f(K_2)$ se a intersecção $K_1 \cap K_2$ é vazia; seja $m(k,n,f)$ o número de elementos de M, e $m(k,n) = \min_f m(k,n,f)$. Prove que para k fixado, existem números $m_0 = m_0(k)$ e $n_0 = n_0(k)$ tais que $m(k,n) = n - m_0$ para $n \geq n_0$, onde $m_0(k) \geq 2k-2$ e $n_0(k) \geq 2k-1$, ambas desigualdades provavelmente seguem com igualdade."
>
> Martin Kneser.

Em 1978, Lázló Lovász deu a primeira prova para a Conjectura de Kneser utilizando métodos topológicos e esta é considerada o marco do início de uma nova área: a topologia combinatória (vide (LONGUEVILLE, 2004)). Esta subseção foi baseada em (MATOUSEK, 2008).

Inicialmente, vamos introduzir algumas definições básicas de teoria dos grafos.

Definição 3.3.37 (Grafo)**.** Um *grafo* finito G é um par (V,E), onde $V \neq \emptyset$ é um conjunto finito e $E \subset \binom{V}{2}$ é um subconjunto do conjunto formado por todos os subconjuntos de V com dois elementos. Os elementos de V são chamados vértices de G e os elementos de E são chamados *arestas* de G.

Observação 3.3.38. Estaremos interessados apenas em grafos finitos, por isso a definição apenas neste caso.

Exemplo 3.3.39. Dois exemplos importantes de grafos são o grafo completo de m vértices, denotado por K_m e o grafo bipartido completo $K_{m,n}$, onde m,$n \geq 1$ são inteiros.

O grafo K_m é o grafo com m vértices com todas as arestas possíveis, isto é:

$$K_m = \left([m], \binom{[m]}{2}\right). \tag{3.179}$$

O grafo bipartido $K_{m,n}$ é dado por:

$$K_{m,n} = \left([m] \times \{1\} \sqcup [n] \times \{2\} \ , \ \left\{ \{(x,1),(y,2)\} \in \binom{[m] \times \{1\} \sqcup [n] \times \{2\}}{2} \ ; \ x \in [m] \text{ e } y \in [n] \right\} \right).$$

Definição 3.3.40 (Subgrafo)**.** Seja $G = (V,E)$ um grafo. Um grafo $H = (V',E')$ é um *subgrafo* de G se:

$$V' \subset V \quad \text{e} \quad E' \subset \binom{V'}{2} \cap E. \tag{3.180}$$

Dado um subconjunto $S \subset V$ de vértices, o *subgrafo induzido de G no subconjunto S* é o grafo:

$$G[S] = (S, \{\{u,v\} \in E \ ; \ u,v \in S\}). \tag{3.181}$$

Exemplo 3.3.41. Seja $G = ([4], \mathscr{P}([4])) = K_4$. Temos que $H = ([3], \{\{1,2\},\{2,3\}\})$ é um subgrafo de G, mas o subgrafo induzido de G em $[3]$ é $G[[3]] = ([3], \mathscr{P}([3])) = K_3$.

Definição 3.3.42 (Homomorfismo de grafos)**.** Sejam $G = (V(G),E(H))$ e $H = (V(H),E(H))$ grafos. Um *homomorfismo de grafos* entre G e H, denotado por $\varphi : G \to H$, é uma função:

$$\varphi : V(G) \to V(H) \tag{3.182}$$

que preserva arestas, isto é, dado $\{u,v\} \in E(G)$, temos:

$$\varphi(\{u,v\}) = \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(H). \tag{3.183}$$

O homomorfismo $\varphi : G \to H$ é um *isomorfismo de grafos* se $\varphi : V(G) \to V(H)$ é uma bijeção tal que:

$$\{u,v\} \in E(G) \text{ se, e somente se } \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(H). \tag{3.184}$$

Observação 3.3.43. A partir de agora, quando nos referirmos a um grafo, estaremos falando deste a menos de isomorfismos, ou seja, K_m por exemplo, não precisa necessariamente ter $V(K_m) = [m]$, mas tem que ser isomorfo ao grafo de (3.179).

Definição 3.3.44 (n-coloração de um grafo)**.** Uma *n-coloração de um grafo G* é uma função:

$$\chi : V(G) \to [n], \tag{3.185}$$

onde cada aresta de G tem vértices associados a valores distintos, isto é, dado $\{u,v\} \in E(G)$, temos $\chi(u) \neq \chi(v)$.

Observação 3.3.45. Note que pela Definição 3.3.44, temos que uma n-coloração χ do grafo G é, resumidamente, um homomorfismo de grafos $\varphi : G \to K_m$.

Definição 3.3.46 (Número cromático de um grafo)**.** Seja G um grafo. Definimos o *número cromático de* G, denotado por $\chi(G)$, como sendo o menor número natural $n \geq 1$ tal que existe uma n-coloração de G, isto é:

$$\chi(G) = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ ; \ \text{existe uma } n\text{-coloração } \chi : V(G) \to [n]\}. \tag{3.186}$$

Vamos traduzir a Conjectura de Kneser em linguagem de teoria dos grafos. Tome $N = [n]$, escrevemos $\binom{[n]}{k}$ ao invés de N_k para denotar a coleção de todos os subconjuntos de $[n]$ com k elementos. Assim, defina um grafo G no qual os vértices são os subconjuntos de $\binom{[n]}{k}$ e eles estão conectados por uma aresta se, e somente se, são disjuntos. Desta forma, f é uma coloração do grafo G, onde M é o conjunto de cores e o que Kneser pergunta é sobre o número cromático $\chi(G)$.

Esta tradução para a linguagem de teoria dos grafos motiva a definição a seguir.

Definição 3.3.47 (Grafo de Kneser)**.** Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto finito e $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ um *sistema do conjunto* X. O *Grafo de Kneser* de $\mathscr{F}$, denotado por $\mathrm{KG}(\mathscr{F})$, tem $\mathscr{F}$ como conjunto de vértices e dois conjuntos $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ são conectados por uma aresta se, e somente se, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Em símbolos:

$$\mathrm{KG}(\mathscr{F}) = (\mathscr{F}, \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathscr{F}, F_1 \cap F_2 = \emptyset\}). \tag{3.187}$$

Denotaremos por $\mathrm{KG}_{n,k}$ o Grafo de Kneser do sistema $\mathscr{F} = \binom{[n]}{k}$ (subconjuntos de $[n]$ com k elementos).

Exemplo 3.3.48. Tome $n = 7$ e $k = 3$. Os subconjuntos $\{1,2,4\}$, $\{3,5,7\} \in \binom{[7]}{3}$ estão conectados por uma aresta, pois $\{1,2,4\} \cap \{3,5,7\} = \emptyset$. Por outro lado, $\{1,3,5\}$, $\{1,2,7\} \in \binom{[7]}{3}$ não estão conectados por uma aresta, pois $\{1,3,5\} \cap \{1,2,7\} = \{1\} \neq \emptyset$.

Exemplo 3.3.49. A seguir, apresentamos alguns exemplos de Grafo de Kneser.

(1) Para todo $n \geq 1$, $\mathrm{KG}_{n,1}$ é o grafo completo K_n, para o qual $\chi(K_n) = n$.

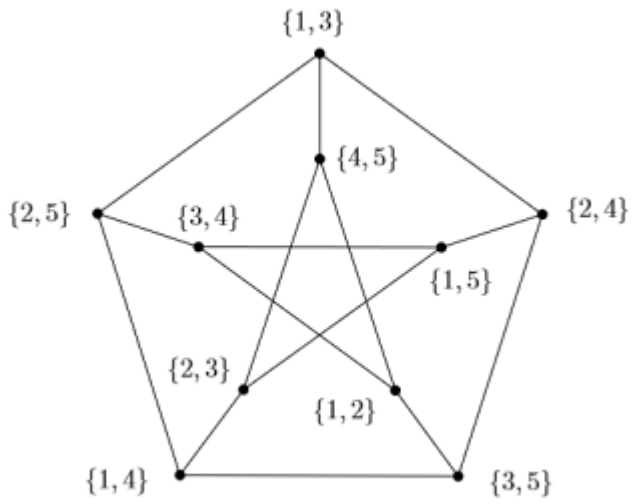
(2) Para todo $k \geq 1$, $\mathrm{KG}_{2k-1,k}$ é um grafo sem arestas, pois se existissem $F_1, F_2 \in \binom{[2k-1]}{k}$ conectados por uma aresta, teríamos $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, logo $|F_1 \sqcup F_2| = 2k$, o que é uma contradição com o fato de que $F_1 \sqcup F_2 \subset [2k-1]$. Assim, podemos colorir todos os vértices de $\mathrm{KG}_{2k-1,k}$ com uma única cor, logo $\chi(\mathrm{KG}_{2k-1,k}) = 1$.

(3) Para todo $k \geq 1$, em $\mathrm{KG}_{2k,k}$ todo vértice $A \in \binom{[2k]}{k}$ é conectado somente ao seu complementar A^C, isto é:

$$\mathrm{KG}_{2k,k} = \left(\binom{[2k]}{k}, \left\{ \{A, A^C\}; \ A \in \binom{[2k]}{k} \right\} \right). \tag{3.188}$$

Assim, podemos colorir $\mathrm{KG}_{2k,k}$ com duas cores, basta atribuir cores diferentes para subconjuntos complementares. Logo, $\chi(\mathrm{KG}_{2k,k}) = 2$.

Figura 31 – Grafo de Petersen.



Fonte: Matousek (2008, pg.58).

(4) $\mathrm{KG}_{5,2}$ é o famoso *Grafo de Petersen*, o qual é muito usado em teoria dos grafos para contra-exemplos. Veja na Figura 31.

O conceito de Grafo de Kneser se mostra ainda mais importante pelo fato de que todo grafo pode ser escrito dessa forma.

Teorema 3.3.50. Todo grafo finito G é isomorfo a um Grafo de Kneser.

Demonstração. Seja $G = (V,E)$ um grafo finito. Sem perda de generalidade podemos supor $G = [n]$ e $E \subset \binom{[n]}{2}$, para algum $n \geq 1$.

Defina:

$$X = [n] \sqcup \{X_B;\ B \in E^C\},\ \text{onde } X_F \neq X_{F'}, \text{para } F,F' \in \binom{[n]}{2} \text{ e } F \neq F'. \tag{3.189}$$

Cada X_B como definido anteriormente representa uma aresta do grafo complementar a G, isto é (V,E^C).

Definimos o sistema direto $\mathscr{F}$ do conjunto X por:

$$\mathscr{F} = \{V_1, V_2, ..., V_n\},\ \text{onde } V_i = \{i\} \sqcup \left\{X_B;\ i \in B \text{ e } B \in E^C\right\},\ \text{para todo } i \in [n]. \tag{3.190}$$

Note que, para cada $i \in [n]$, V_i é um conjunto que contém o próprio i e todas as representações de arestas de (V,E^C) que conectam i a outro vértice.

Assim, temos o isomorfismo de grafos:

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathrm{KG}(\mathscr{F}) \\ i &\mapsto V_i \end{aligned} \tag{3.191}$$

De fato, φ é um isomorfismo de grafos, pois $i, j \in [n]$, $i \neq j$ estão conectados por uma aresta se, e somente se, $\{i, j\} \in E$.Por outro lado, $\{\varphi(i), \varphi(j)\} = \{V_i, V_j\}$ é uma aresta se, e somente se, $V_i \cap V_j = \emptyset$. Mas note que a intersecção é vazia se, e somente se, $\{i, j\} \notin E^C$, isto é $\{i, j\} \in E$. □

Observação 3.3.51. Para grafos infinitos pode ser feita uma prova semelhante do Teorema 3.3.50 , apenas fazendo adaptações necessárias.

Podemos reformular a Conjectura de Kneser como segue.

Teorema 3.3.52 (Teorema de Lovász-Kneser, (LOVÁSZ, 1978))**.** Sejam $k > 0$ e $n \geq 2k-1$. Então, o número cromático do Grafo de Kneser $\mathrm{KG}_{n,k}$ é $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) = n-2k+2$.

Demonstração. Para demonstrar o resultado basta provar as seguintes desigualdades:

$$\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) \leq n-2k+2 \text{ e} \tag{3.192}$$

$$\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) \geq n-2k+2. \tag{3.193}$$

.

Para mostrar a desigualdade (3.192), basta exibir uma $(n-2k+2)$- coloração do Grafo de Kneser $\mathrm{KG}_{n,k}$. Defina:

$$\chi : \binom{[n]}{k} \to [n-2k+2], \tag{3.194}$$

onde $\chi(F) = \min\{\min(F), n-2k+2\}$, para todo $F \in \binom{[n]}{k}$.

A função χ é uma coloração para $\mathrm{KG}_{n,k}$. De fato, sejam F, $F' \in \binom{[n]}{k}$ tais que $\{F, F'\}$ é uma aresta de $\mathrm{KG}_{n,k}$ (isto é, $F \cap F' = \emptyset$) tais que $\chi(F) = i = \chi(F')$. Se $i < n-2k+2$, então $i \in F$ e $i \in F'$, logo $i \in F \cap F'$, o que contraria o fato de que $F \cap F' = \emptyset$. Por outro lado, se $i = n-2k+2$, então F, $F' \subset \{n-2k+2, ..., n\}$, e como $F \cap F' = \emptyset$, temos $|F \sqcup F'| = 2k$. Mas como $|\{n-2k+2, ..., n\}| = 2k-1$, temos uma contradição.

Para mostrar a desigualdade (3.193), observamos que todas as demonstrações de um limitante inferior para o número cromático $\chi(\mathrm{KG}_{n,k})$ são topológicas, ou imitam as provas topológicas. A apresentada aqui foi proposta por Joshua Greene (vide (GREENE, 2002)) e utilizará o Lema 3.1.9.

Para mostrar que $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) \geq n-2k+2$, vamos supor que exista uma d- coloração de $\mathrm{KG}_{n,k}$, na qual $d = n-2k+1$, o que resultará em uma contradição.

Tome $X \subset S^d$ um conjunto de n pontos em posição geral, isto é, não existe um hiperplano $h \subset \mathbb{R}^{d+1}$ tal que h contém mais de d pontos de X.

Podemos identificar os n pontos de X com o conjunto $[n]$ e, consequentemente, identificamos $\binom{X}{k}$ com $\binom{[n]}{k}$.

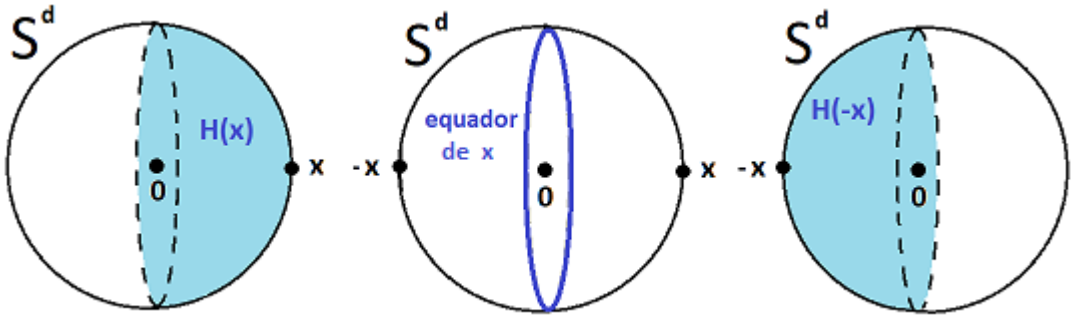
Suponha que exista uma d- coloração χ de $\mathrm{KG}_{n,k}$.

Definimos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_d \subset S^d$ da seguinte forma: $x \in A_i$, para $i \in [d]$ se, e somente se, existe $F \in \binom{X}{k}$ tal que $\chi(F) = i$ e $F \subset H(x)$, onde $H(x)$ é o hemisfério aberto definido por:

$$H(x) = \{y \in S^d; \langle x, y \rangle > 0\}. \tag{3.195}$$

.

Figura 32 – Ilustração do hemisfério aberto $H(x)$ e do *equador de x*.



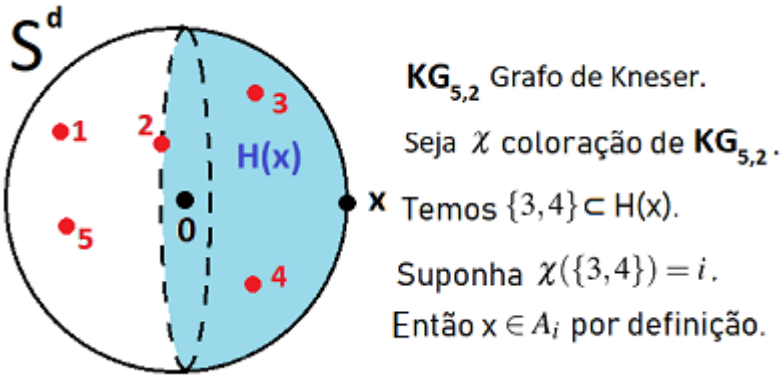
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 3.3.53. O *equador de x* é definido como sendo:

$$\textit{equador de } x = \{y \in S^d;\ \langle x, y \rangle = 0\}. \tag{3.196}$$

O exemplo da Figura 33 ilustra a definição do conjunto A_i, $i \in [d]$, para o caso $(n,k) = (5,2)$.

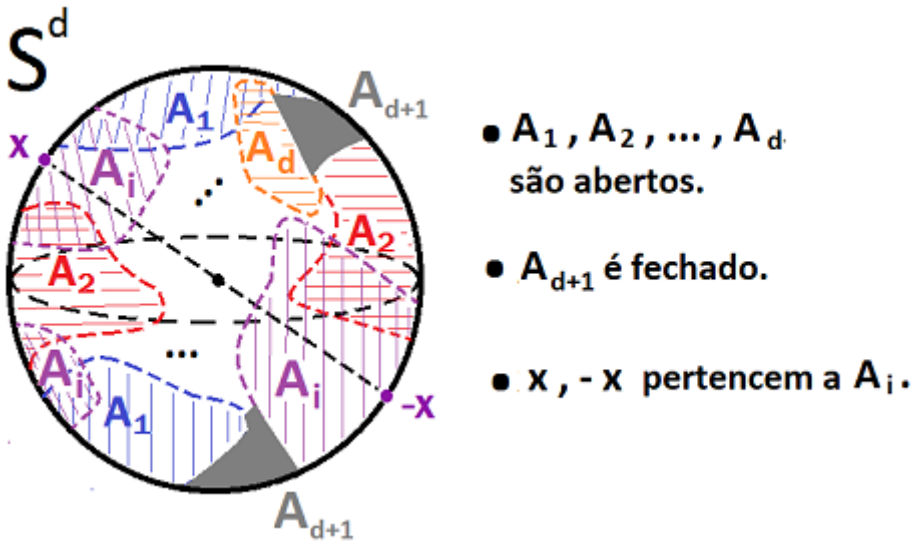
Figura 33 – Exemplo que ilustra a definição de A_i, para $i \in [d]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, definimos $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_d)$.

Figura 34 – Ilustração da cobertura de (3.197).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que $A_1, A_2, \ldots, A_d$ são abertos e A_{d+1} é fechado. Pela definição de A_{d+1}, segue que:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_d \cup A_{d+1} = S^d \quad \text{é uma cobertura de abertos e fechados para } S^d. \tag{3.197}$$

Assim, pelo Lema 3.1.9, existe $x \in S^d$ e $i \in [d+1]$ tal que $x, -x \in A_i$. Consideremos os casos $i \leq d$ e $i = d+1$, como segue.

Se $i \leq d$, então existiriam $F, F' \in \binom{X}{k}$ tais que $F \subset H(x)$, $F' \subset H(-x)$ e $\chi(F) = i = \chi(F')$. Assim, como $H(x) \cap H(-x) = \emptyset$ (veja Figura 32), temos $F \cap F' = \emptyset$ e, portanto, $\{F, F'\}$ é uma aresta de $\mathrm{KG}_{n,k}$ tal que $\chi(F) = \chi(F')$, o que contradiz a hipótese de que χ é uma coloração.

Se $i = d+1$, então $x, -x \in A_{d+1}$ e isto significa que $H(x)$ e $H(-x)$ contêm no máximo $k-1$ pontos cada, pois caso contrário existiria $F \in \binom{X}{k}$ tal que $F \subset H(x)$ (analogamente, $F \subset H(-x)$) e assim $x \in A_{\chi(F)}$ (analogamente, $-x \in A_{\chi(F)}$), onde $\chi(F) \leq d$ e, portanto, $x, -x \notin A_{d+1}$. Assim, como $H(x) \sqcup H(-x) \sqcup$ *equador de* $x = S^d$ (veja Figura 32), temos que o *equador de* x contém no mínimo:

$$(n-2)(k-1) = n - 2k + 2 = d + 1 \text{ pontos}, \tag{3.198}$$

logo o hiperplano $h = \{y \in \mathbb{R}^{d+1};\ \langle x, y \rangle = 0\}$ contém no mínimo $d+1$ pontos de X, o que contradiz o fato de que $X \subset S^d$ está em posição geral. □

A seguir, introduziremos algumas definições e provaremos o Teorema de Dol'nikov, o qual implica o Teorema de Lovász-Kneser (Teorema 3.3.52).

Definição 3.3.54. Um *hipergrafo* é um par (V, E), onde $V \neq \emptyset$ é um conjunto de vértices e $E \subset \mathscr{P}(V)$ são as arestas (que podem ter mais de dois pontos segundo essa definição).

Observação 3.3.55. Um grafo $G = (V,E)$ é, em particular, um hipergrafo, no qual $E \subset \binom{V}{2} \subset \mathscr{P}(V)$.

Exemplo 3.3.56. $G_1 = ([4],\{1\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,4\})$ é um hipergrafo, mas não um grafo, pois nem todas suas arestas possuem dois elementos, mas $G_2 = ([4],\{1,4\}\},\{2,3\},\{3,4\})$ é um hipergrafo que é, em particular, um grafo.

Definição 3.3.57. Seja $(X,\mathscr{F})$ um hipergrafo. Uma *m- coloração* é uma função:

$$\chi : X \to [m] \tag{3.199}$$

tal que nenhum subconjunto $F \in \mathscr{F}$ é monocromático, isto é:

$$|\chi(F)| > 1,\ \forall F \in \mathscr{F}. \tag{3.200}$$

O *número cromático do hipergrafo* $(X,\mathscr{F})$, denotado por $\chi(X,\mathscr{F})$ (ou simplesmente $\chi(\mathscr{F})$) é o menor $m \geq 1$ tal que existe uma m-coloração de $(X,\mathscr{F})$.

Se existe uma m- coloração para o hipergrafo $(X,\mathscr{F})$, dizemos que ele é *m-colorável*.

Observação 3.3.58. Estamos interessados principalmente em 2-colorações de hipergrafos.

Definição 3.3.59. Seja $(X,\mathscr{F})$ um hipergrafo. Definimos o *defeito de m-coloração*, denotado por $cd_m(\mathscr{F})$, como sendo a menor cardinalidade de um conjunto $Y \subset X$ tal que "retiramos"os vértices de Y e o hipergrafo induzido é m-colorável. Em outras palavras:

$$cd_m(\mathscr{F}) = \min\{|Y|;\ (X \setminus Y, \{F \in \mathscr{F};\ F \cap Y = \emptyset\}) \text{ é } m\text{-colorável.}\} \tag{3.201}$$

Exemplo 3.3.60. Seja C_n o ciclo com n vértices. Então:

$$cd_2(C_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ for par,} \\ 1, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

A Figura 35 ilustra a justificativa para os valores de $cd_2(C_n)$.

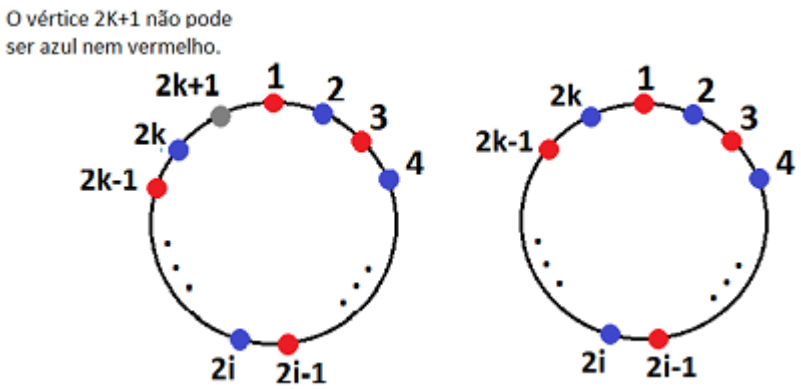
Exemplo 3.3.61. Dado o hipergrafo $G = ([4],\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\})$ (o qual não é um grafo em particular) , temos $cd_2(G) = 1$, pois $2,3$ e 4 devem possuir cores diferentes de 1, mas se todos eles tiverem a mesma cor, teremos $\{2,3,4\}$ monocromático. Basta retirar o vértice 1 e colorir $\{2,3,4\}$ com duas cores distintas.

Agora, estamos em condições de enunciar e provar o resultado a seguir.

Teorema 3.3.62 (Teorema de Dol'nikov, (DOL'NIKOV, 1981))**.** Seja $\mathscr{F}$ um sistema de um conjunto X (ou simplesmente $(X,\mathscr{F})$ um hipergrafo). Então:

$$\chi(\mathrm{KG}(\mathscr{F})) \geq cd_2(\mathscr{F}). \tag{3.202}$$

Figura 35 – 2-colorações de ciclos C_n.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Defina $d = \chi(\mathrm{KG}(\mathscr{F}))$. Seguiremos a ideia da prova do Teorema de Lovász-Kneser (Teorema 3.3.52).

Identificamos $\mathscr{F}$ no conjunto $X \subset S^d$, onde X está em posição geral (não temos $d+1$ pontos de X em um mesmo hiperplano).

Definimos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_d$ como segue. Para $i \in [d]$:

$$A_i = \left\{ x \in S^d;\ \text{ existe } F \in \mathscr{F} \text{ tal que } F \subset H(x) \text{ e } \chi(F) = i \right\}. \tag{3.203}$$

Por fim definimos $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_d)$.

Claramente $A_1, A_2, \ldots, A_d$ são abertos e A_{d+1} é fechado. Logo, como

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots . A_d \cup A_{d+1} = S^d, \tag{3.204}$$

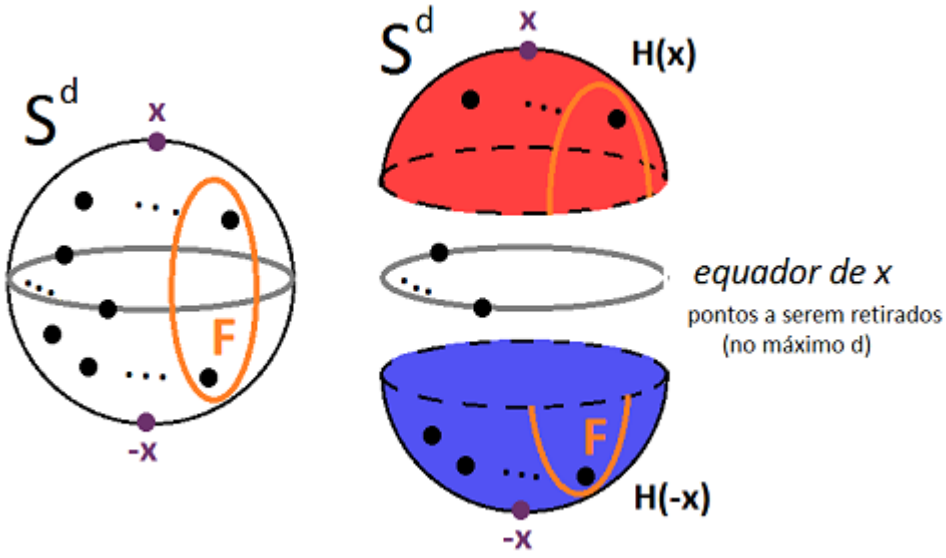
podemos aplicar o Lema 3.1.9 e concluir que existe $x \in S^d$ tal que $x, -x \in A_i$ para algum $i \in [d+1]$.

Se $i \leq d$, existiriam $F, F' \in \mathscr{F}$ tais que $F \subset H(x)$, $F' \subset H(-x)$ e $\chi(F) = i = \chi(F')$. Isso é uma contradição, pois $F \cap F' = \emptyset$ e, portanto, $\{F, F'\}$ é uma aresta de $\mathrm{KG}(\mathscr{F})$ e eles não poderiam ter a mesma cor. Segue que $i = d+1$.

Como $x, -x \in A_{d+1}$, todo $F \in \mathscr{F}$ não está contido inteiramente em $H(x)$ nem em $H(-x)$. Se retirarmos o conjunto Y dos pontos de X que estão no *equador de* x (no máximo d pontos, pois X está em posição geral), podemos colorir os pontos de X que estão em $H(x)$ de vermelho e os pontos de X que estão em $H(-x)$ de azul, como ilustra a Figura 36.

Esta é uma 2-coloração do hipergrafo $(X \setminus Y, \{F \in \mathscr{F};\ F \cap Y = \emptyset\})$, pois dado $F \in \mathscr{F}$; $F \cap Y = \emptyset$, o conjunto F deve conter pontos de $H(x)$ e $H(-x)$ (azuis e vermelhos), pois $F \subset H(x)$ ou $F \subset H(-x)$ contraria o fato de que $x \in A_{d+1}$.

Figura 36 – Ilustração da coloração azul-vermelho.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, retirando os pontos de Y, onde $|Y| \leq d$, obtemos uma 2-coloração. Logo,

$$cd_2(\mathscr{F}) \leq d = \chi(\mathrm{KG}(\mathscr{F})).$$

□

Observação 3.3.63. O Teorema de Dol'nikov implica no Teorema de Lovász-Kneser. De fato: consideremos o hipergrafo $(X, \mathscr{F})$, onde $X = [n]$ e $\mathscr{F} = \binom{[n]}{k}$. Se retirarmos um conjunto Y de $n-2k+1$ pontos, $X \setminus Y$ tem $2k-1$ pontos. Suponhamos uma 2-coloração para $\left(X \setminus Y, \{F;\ F \in \binom{X \setminus Y}{k}\}\right)$. Pelo menos k pontos de $X \setminus Y$ têm a mesma cor e este é um conjunto monocromático, logo $cd_2(\mathscr{F}) \geq n-2k+2$ e provamos a desigualdade (3.193). A demonstração da desigualdade (3.192) requer apenas uma $(n-2k+2)$-coloração, como na demonstração do Teorema de Lovász-Kneser.

O Teorema de Dol'nikov, apesar de implicar no Teorema de Lovász-Kneser, pode fornecer uma informação não muito relevante como veremos no exemplo a seguir.

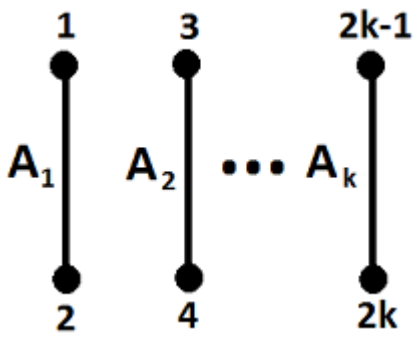
Exemplo 3.3.64. Seja $k \geq 0$ um inteiro positivo suficientemente grande. Defina $n = 2k$ e $\mathscr{F}$ o sistema direto de $[n]$ dado por:

$$\mathscr{F} = \{A_i = \{2i-1, 2i\};\ i \in [k]\}. \tag{3.205}$$

Note que $\mathrm{KG}(\mathscr{F})$ é um grafo 2-colorável, basta atribuir uma cor para os vértices pares e outra cor para os vértices ímpares. Logo $cd_2(\mathscr{F}) = 0$. Por outro lado, $\mathrm{KG}(\mathscr{F})$ é isomorfo ao grafo completo com k vértices, pois $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ são k conjuntos disjuntos. Assim $\chi(\mathrm{KG}(\mathscr{F})) = k$.

Assim, o que Teorema de Dol'nikov afirma nesse caso é que $k = \chi(\mathrm{KG}(\mathscr{F})) \geq cd_2(\mathscr{F}) = 0$ para k suficientemente grande. Esse exemplo mostra uma certa imprecisão quanto à força do resultado de maneira geral.

Figura 37 – Ilustração do Exemplo 3.3.64.

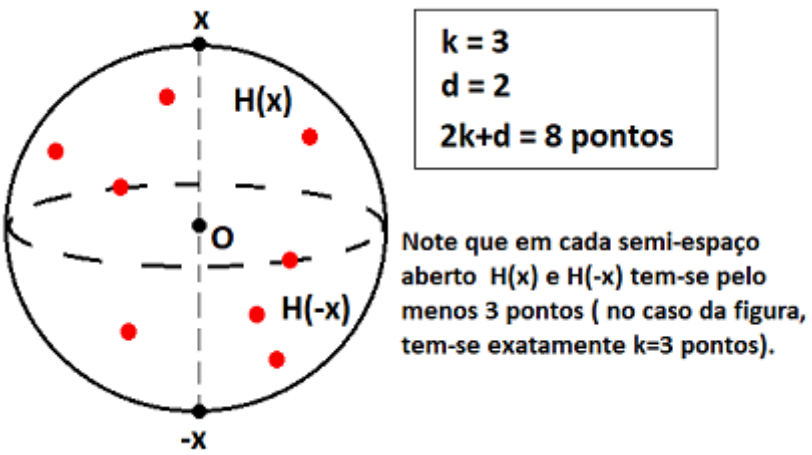


Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos agora enunciar e provar o Lema de Gale, que além de ser um interessante problema geométrico-combinatorial, é também ferramenta essencial para a demonstração do Teorema de Schrijver, que nos dá o número cromático de certos subgrafos induzidos do grafo de Kneser $\mathrm{KG}_{n,k}$ (os chamados grafos de Schrijver $\mathrm{SG}_{n,k}$).

Teorema 3.3.65 (Lema de Gale, (GALE, 1956))**.** Para qualquer $d \geq 0$ e qualquer $k \geq 1$, existe um conjunto $X \subset S^d$ de $2k+d$ pontos tal que qualquer hemisfério aberto de S^d contém ao menos k pontos de X.

Figura 38 – Ilustração da afirmação do Lema de Gale.



Fonte: Elaborada pelo autor.

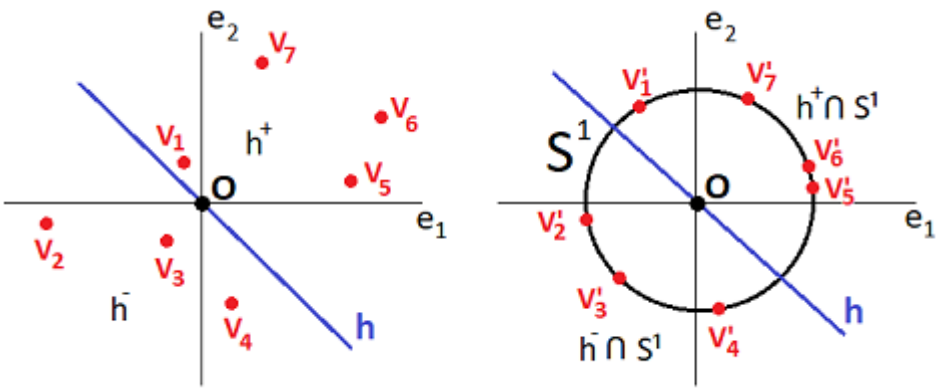
Demonstração. Vamos provar a seguinte afirmação equivalente ao Lema de Gale.

Existem $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+d} \in \mathbb{R}^{d+1}$ não nulos, tais que para todo hiperplano $h \subset \mathbb{R}^{d+1}$ passando pela origem em $\mathbb{R}^{d+1}$ existem pelo menos k pontos tanto em h^+ quanto em h^-, isto é:

$$|h^+ \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k+d}\}| \geq k \quad \text{e} \quad |h^- \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k+d}\}| \geq k. \tag{3.206}$$

Esta afirmação é de fato equivalente ao Lema de Gale, basta associar $v_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ ao vetor unitário $v_i' = \frac{v_i}{||v_i||} \in S^d$ e cada semi-espaço aberto h^+, h^- aos hemisférios abertos $h^+ \cap S^d$ e $h^- \cap S^d$, respectivamente. Veja na Figura 39 um exemplo dessa associação para $d = 1$.

Figura 39 – Ilustração da equivalência da afirmação com o Lema de Gale.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, basta construir tais pontos $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+d} \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Consideremos a curva momento $\overline{\gamma}$ contida no hiperplano $x_1 = 1$, isto é:

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \; ; \; x_1 = 1\}. \tag{3.207}$$

Essa curva momento $\overline{\gamma} \subset \{(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \; ; \; x_1 = 1\}$ é dada por:

$$\overline{\gamma} \overset{def}{=} \{(1, t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^{d+1} \; ; \; t \in \mathbb{R}\}. \tag{3.208}$$

Devemos escolher $2k+d$ pontos distintos $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2k+d} \in \overline{\gamma}$ na curva momento, indexados de acordo com a ordem na qual aparecem na curva momento segundo o paramêtro $t \in \mathbb{R}$. Assim, podemos tomar:

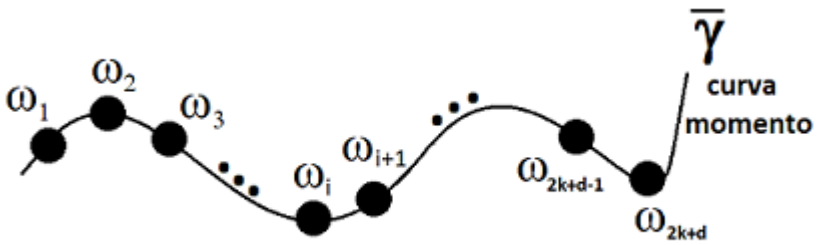
$$\omega_i = \overline{\gamma}(i), \text{ para } i \in [2k+d]. \tag{3.209}$$

Os pontos $\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2k}$ são chamados *pares* e os pontos $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2k+1}$ são chamados *ímpares*.

Defina $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+d} \in \mathbb{R}^{d+1}$ da seguinte forma:

$$v_i = (-1)^i \omega_i, \text{ para } 1 \leq i \leq 2k+d. \tag{3.210}$$

Figura 40 – ω_1, ω_2, ..., ω_{2k+d} indexados conforme a ordem do paramêtro t.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que $v_i \neq 0$, para todo $i \in [2k+d]$, pois $v_i \in \{(x_1, x_2, ..., x_{2k+d}) \in \mathbb{R}^{d+1} \; ; \; x_1 = 1\}$.

Falta mostrar que estes $2k+d$ pontos satisfazem a condição de que para todo hiperplano $h \subset \mathbb{R}^{d+1}$ passando pela origem, existem ao menos k pontos tanto em h^+ quanto em h^-.

Seja $h \subset \mathbb{R}^{d+1}$ um hiperplano arbitrário. Note que:

$$v_i \in h^+ \iff \omega_i \in h^+ \text{ para } i \text{ par ou } -\omega_i \in h^+, \text{ para } i \text{ ímpar.} \tag{3.211}$$

$$v_i \in h^- \iff \omega_i \in h^- \text{ para } i \text{ par ou } -\omega_i \in h^+, \text{ para } i \text{ ímpar.} \tag{3.212}$$

Pelo Lema 2.4.5, qualquer hiperplano $h \subset \mathbb{R}^{d+1}$ passando pela origem intersecta $\overline{\gamma}$ em no máximo d pontos e se existem d interseções, então $\overline{\gamma}$ atravessa para o outro semi-espaço aberto definido por h em cada intersecção.

Note que dado um hiperplano $h \subset \mathbb{R}^{d+1}$ passando pela origem , podemos movê-lo continuamente de modo que ele contenha exatamente d pontos de $W = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{2k+d}\}$ e continue passando pela origem, sem que nenhum ponto de W atravesse para o outro semi-espaço aberto durante o movimento.

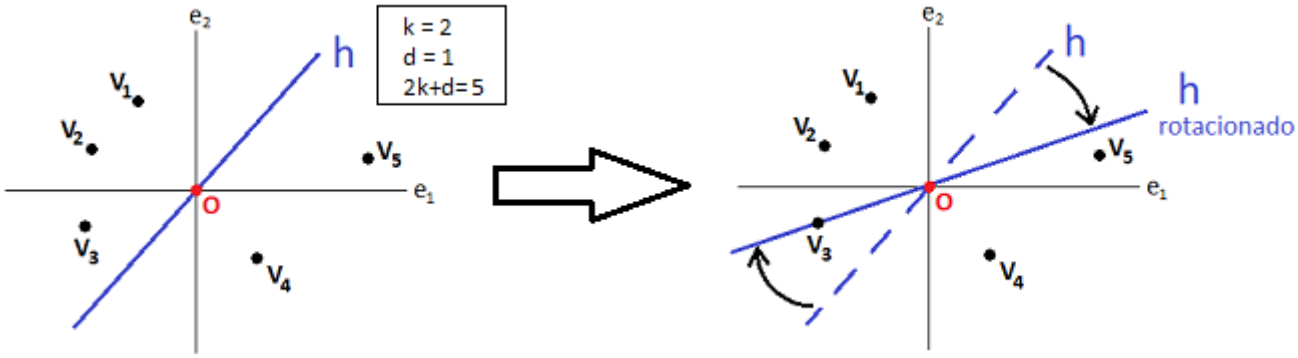
Isto é, de fato, possível pois se h contém $j < d$ pontos de W, fixamos estes j pontos e a origem O e rotacionamos h em torno destes $j+1$ pontos fixos (cujo fecho convexo forma um j-simplexo, pois $W \subset \overline{\gamma}$) até o hiperplano encontrar um novo ponto de W.

Assim, o novo hiperplano h rotacionado mantém os j pontos iniciais de W e intersecta pelo menos mais um ponto de W, mas não intersecta mais de d pontos no total, pois $W \subset \overline{\gamma}$ e pelo Lema 2.4.5 não existem mais de d pontos de $\overline{\gamma}$ em um mesmo hiperplano. Além disso, como a rotação é interrompida quando h intersecta o primeiro ponto de $W \setminus h$, segue que nenhum ponto atravessa para o outro semi-espaço aberto durante o movimento. Portanto, basta continuar o processo até que $|W \cap h| = d$

Nas Figuras 41 e 42 temos exemplos desse processo de rotação do hiperplano h.

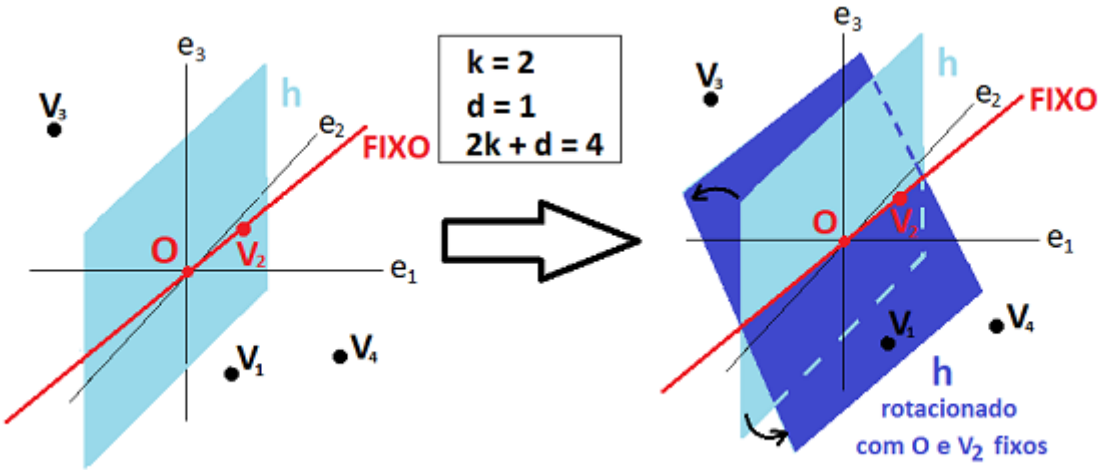
Então, podemos supor que h intersecta W em exatamente d pontos, logo h intersecta $\overline{\gamma}$ em exatamente d pontos, onde todos são pontos de W.

Figura 41 – Exemplo de rotação do hiperplano h.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 42 – Exemplo de rotação do hiperplano h.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja W_{ON} o conjunto de pontos de h que pertencem a W, isto é, $W_{ON} = W \cap h$. Defina $W_{OFF} = W \setminus W_{ON}$.

Logo $W = W_{ON} \sqcup W_{OFF}$, onde $|W_{ON}| = d$ e então $|W_{OFF}| = 2k$.

Pelo Lema 2.4.5, $\overline{\gamma}$ atravessa para o outro semi-espaço aberto a cada ponto de W_{ON}.

Vamos colorir os $2k$ pontos de W_{OFF} de **preto** ou **branco**, como segue.

$$\omega_i \in W_{OFF} \text{ é } \textbf{preto} \text{ se, e somente se } \omega_i \in h^+ \text{ e } i \text{ é par ou } \omega_i \in h^- \text{ e } i \text{ é ímpar.} \tag{3.213}$$

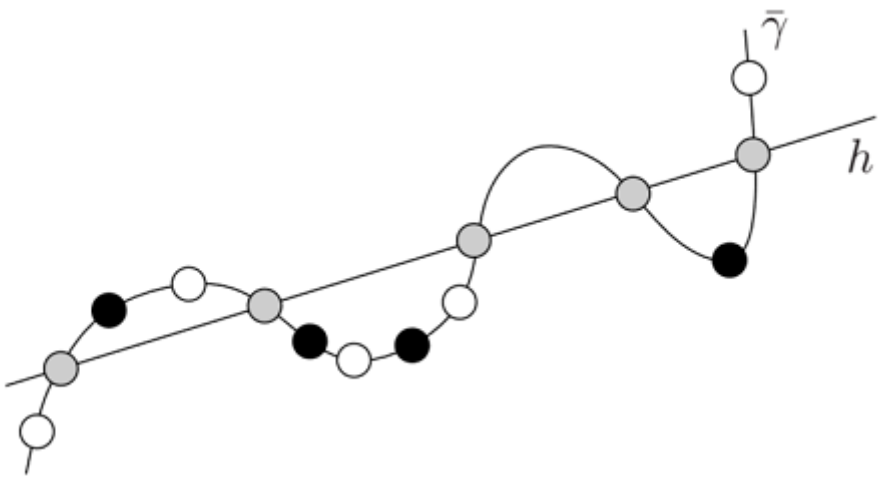
$$\omega_i \in W_{OFF} \text{ é } \textbf{branco} \text{ se, e somente se } \omega_i \in h^- \text{ e } i \text{ é par ou } \omega_i \in h^+ \text{ e } i \text{ é ímpar.} \tag{3.214}$$

Em outras palavras, de (3.211) e (3.212), segue que $\omega_i \in W_{OFF}$ é **preto** se, e somente se $v_i \in h^+$ e $\omega_i \in W_{OFF}$ é **branco** se, e somente se $v_i \in h^-$.

Assim, para provar o Lema de Gale, é suficiente mostrar que k pontos de W_{OFF} são **pretos** e k pontos de W_{OFF} são **brancos**.

Para mostrar isso, note que se omitirmos os d pontos de W_{ON} em $\overline{\gamma}$, os pontos de W se alternam entre **preto** e **branco** ao longo de $\overline{\gamma}$, e daí teremos k pontos de cada cor em W_{OFF}. Veja a Figura 43.

Figura 43 – Pontos de W_{OFF} se alternam entre **preto** e **branco**.



Fonte: Matousek (2008, pg.66).

De fato, sejam ω e ω' pontos consecutivos de W_{OFF} ao longo de $\overline{\gamma}$, com j pontos de W_{ON} entre eles.

Se j é par, então ω e ω' estão no mesmo semi-espaço aberto e têm paridades distintas, logo ω e ω' têm cores distintas.

Se j é ímpar, então ω e ω' estão em semi-espaços abertos distintos, mas a paridade deles é a mesma, logo ω e ω' têm cores distintas. □

Definição 3.3.66. Seja $S \in \binom{[n]}{k}$ um subconjunto de $[n]$ com k elementos. O subconjunto S é chamado *s-estável* se para quaisquer $i, j \in S$ distintos, temos:

$$s \leq |i-j| \leq n-s. \tag{3.215}$$

Denotamos o conjunto dos subconjuntos *s-estáveis* de S por:

$$\binom{[n]}{k}_s = \left\{ S \in \binom{[n]}{k} \; ; \; S \text{ é } s\text{-}estável \right\} \tag{3.216}$$

Observação 3.3.67. Quando $S \in \binom{[n]}{k}_2$, dizemos simplesmente que S é *estável* ao invés de dizer que S é 2-*estável*. Note que um subconjunto S é estável se não possui números adjacentes, isto é, se $i \in S$, então $i+1 \notin S$ e se $n \in S$, então $1 \notin S$. Um subconjunto S pode ser interpretado como um subconjunto de vértices do grafo C_n sem vértices adjacentes.

Exemplo 3.3.68. Tome $n = 6$. Temos:

$$\{1,3\} \in \binom{[6]}{2}_2, \text{ mas } \{1,6\} \notin \binom{[6]}{2}_2. \tag{3.217}$$

$$\{2,4,6\} \in \binom{[6]}{3}_2, \text{ mas } \{1,3,4\} \notin \binom{[6]}{3}_2. \tag{3.218}$$

$$\{1,4\} \in \binom{[6]}{2}_3, \text{ mas } \{2,4\} \notin \binom{[6]}{2}_3. \tag{3.219}$$

Definição 3.3.69 (Grafo de Schrijver)**.** Sejam $n \geq 2k \geq 0$ inteiros. O *Grafo de Schrijver* $\mathrm{SG}_{n,k}$ é o subgrafo induzido de $\mathrm{KG}_{n,k}$ com conjunto de vértices $\binom{[n]}{k}_2$, isto é:

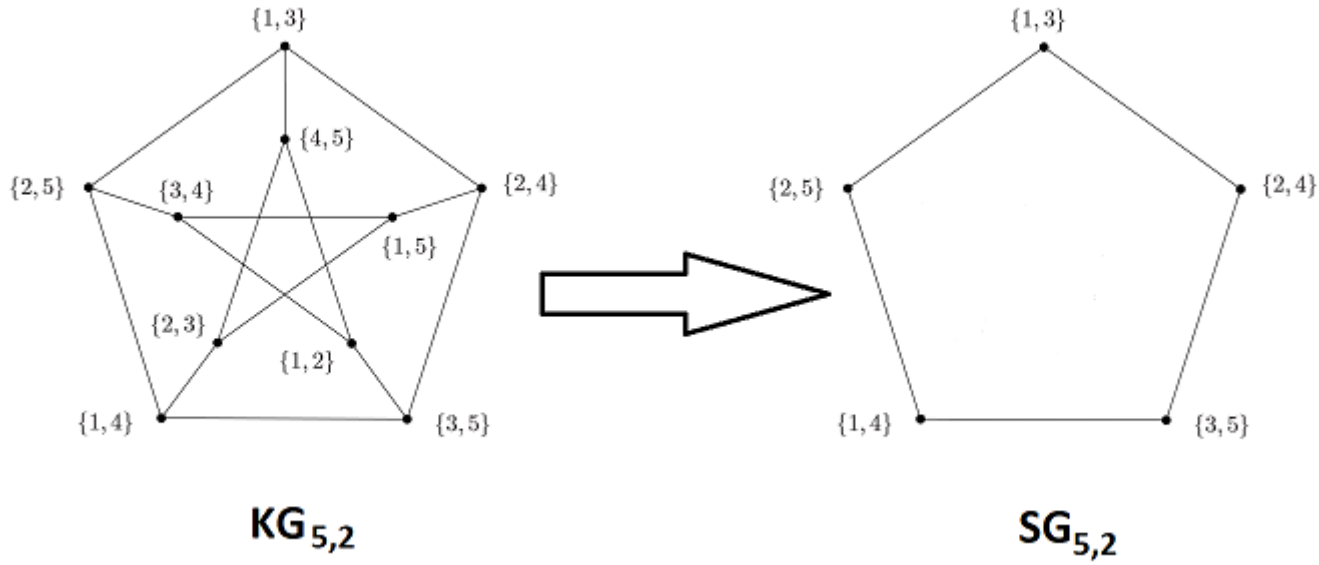
$$\mathrm{SG}_{n,k} = \left(\binom{[n]}{k}_2, \left\{ \{F,G\} \in \binom{\binom{[n]}{k}_2}{2} \; ; \; F \cap G = \emptyset \right\} \right). \tag{3.220}$$

Exemplo 3.3.70. (1) Para qualquer $n \geq 0$, $\mathrm{SG}_{n,1}$ é isomorfo ao grafo completo K_n.

(2) Para qualquer $n \geq 0$, existem apenas dois subconjuntos $S \in \binom{[2n]}{n}_2$: o subconjunto $P \subset [2n]$ dos números pares e o subconjunto $I \subset [2n]$ dos números ímpares. Como $P \cap I = \emptyset$, segue que $\mathrm{SG}_{2n,n}$ é isomorfo a K_2.

(3) $\mathrm{SG}_{5,2} = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,5\}\}$ é um subgrafo induzido do Grafo de Petersen $\mathrm{KG}_{5,2}$, cujo conjunto de vértices é $\binom{[5]}{2}_2$. Veja a Figura 44.

Figura 44 – $\mathrm{SG}_{5,2}$ é um subgrafo induzido do Grafo de Petersen $\mathrm{KG}_{5,2}$.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg.58).

Note que $\chi(\mathrm{KG}_{5,2}) = 3 = \chi(\mathrm{SG}_{5,2})$. Este fato é exatamente o que afirma o Teorema de Schrijver a seguir.

Teorema 3.3.71 (Teorema de Schrijver, (SCHRIJVER, 1978))**.** Para todos $n \geq 2k \geq 0$, temos que os números cromáticos de $\mathrm{KG}_{n,k}$ e $\mathrm{SG}_{n,k}$ satisfazem:

$$\chi(\mathrm{SG}_{n,k}) = \chi(\mathrm{KG}_{n,k}) = n - 2k + 2. \tag{3.221}$$

Demonstração. Defina $d = n - 2k$.

Como $n = 2k + d$, podemos aplicar o Lema de Gale (Teorema 3.3.65) e obter um subconjunto contendo $2k + d$ pontos $X \subset S^d$ tal que qualquer hemisfério aberto de S^d contém ao menos k pontos de X.

Identifique X com $[n]$ e, consequentente $\binom{X}{k}_2$ com $\binom{[n]}{k}_2$.

Claramente $\chi(\mathrm{SG}_{n,k}) \leq \chi(\mathrm{KG}_{n,k})$, pois $\mathrm{SG}_{n,k}$ é subgrafo de $\mathrm{KG}_{n,k}$. Logo:

$$\chi(\mathrm{SG}_{n,k}) \leq n - 2k + 2. \tag{3.222}$$

Falta mostrar que $\chi(\mathrm{SG}_{n,k}) \geq n - 2k + 2$. Para mostrar essa desigualdade, suponhamos que exista uma $(n - 2k + 1)$-coloração de $\mathrm{SG}_{n,k}$:

$$\chi : X \to [n - 2k + 1]. \tag{3.223}$$

Note que $d = n - 2k + 1$ e defina os conjuntos abertos $A_1, A_2, \ldots, A_{d+1} \subset S^d$ como na demonstração do Teorema de Lovász-Kneser (Teorema 3.3.52), ou seja: $x \in A_i$, para $i \in [d]$ se, e somente se, existe $F \in \binom{[n]}{k}_2$ tal que $\chi(F) = i$ e $F \subset H(x)$.

Temos $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{d+1} = S^d$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, o hemisfério aberto $H(x)$ contém um subconjunto F de k pontos (todos pretos ou todos brancos), como vimos na demonstração do Lema de Gale (Teorema 3.3.65). Da forma como foram definidos preto e branco, um subconjunto $F \in \binom{X}{k}$ com todos os k pontos da mesma cor é estável, logo $x \in A_{\chi(F)}$.

Logo, pela versão **(LS-o)** do Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2) existe $x \in S^d$ tal que $x, -x \in A_i$ para algum $i \in [d+1]$. Logo, existem $F, F' \in \binom{X}{k}_2$ tais que $F \subset H(x)$, $F' \subset H(-x)$ e $\chi(F) = i = \chi(F')$. Assim, como $H(x) \cap H(-x) = \emptyset$, segue que:

$$\chi(F) = \chi(F') \ , \ F \cap F' = \emptyset, \text{ para } F, F' \in \binom{X}{k}_2. \tag{3.224}$$

Logo, (3.224) é uma contradição com a hipótese de que χ é uma $(n - 2k + 1)$-coloração de $\mathrm{SG}_{n,k}$. $\square$

CAPÍTULO

4

TEORIA DOS GRAFOS E TOPOLOGIA

Neste capítulo, obteremos resultados sobre Teoria dos Grafos através de métodos topológicos. Na primeira seção demonstraremos o Teorema de Hanani-Tutte (Teorema 4.1.31), sobre planaridade de um grafo, utilizando cohomologia simétrica. Na segunda seção obteremos limitantes inferiores para o número cromático de um grafo utilizando os conceitos de $\mathbb{Z}_2$- índice e k-conexidade. As principais referências deste capítulo são (LONGUEVILLE, 2012) e (MATOUSEK, 2008).

4.1 O Teorema de Hanani-Tutte

O Teorema de Hanani-Tutte afirma que se um grafo G tem um desenho em que dadas duas arestas independentes (não tem vértice em comum) elas se intersectam um número par de vezes, então G é planar. Utilizaremos ferramentas de Topologia Algébrica para demonstrar este teorema, que essencialmente é um teorema de teoria dos grafos. A referência desta seção é (LONGUEVILLE, 2012), cujo texto foi inspirado nos artigos (TUTTE, 1970) e (SARKARIA, 1991b).

Inicialmente vamos formalizar o conceito de desenho de um grafo G, conforme (LONGUEVILLE, 2012).

Definição 4.1.1 (Superfície fechada)**.** Uma superfície S é *fechada* se S é compacta e sem bordo.

Definição 4.1.2 (Curva simples)**.** Uma *curva simples* α na superfície fechada S é uma função suave:

$$\alpha : [0,1] \to S, \tag{4.1}$$

que é injetiva no seu interior, isto é:

$$\alpha(s) \neq \alpha(t) \text{ , para todos } s,t \in (0,1) \text{ tais que } s \neq t. \tag{4.2}$$

Os pontos $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ são chamados *pontos finais* da curva simples α.

Dados $x, y \in S$, uma x, y-*curva* é uma curva simples α tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

Definição 4.1.3 (Desenho de um grafo)**.** Seja G um grafo. Um *desenho do grafo* G é dado por duas aplicações:

$$x \longmapsto x_v \text{ , onde } x \text{ é um vértice de } G \text{ e } x_v \in S; \tag{4.3}$$

$$e \longmapsto \text{Im } \alpha_e \subset S \text{ , onde } e \text{ é uma aresta de } G \text{ e } \alpha_e \text{ uma curva simples em } S; \tag{4.4}$$

que satisfazem as seguintes condições:

(1) As imagens de vértices distintos são distintas, isto é, $x_u \neq x_v$, para $x \neq v$;

(2) Para cada aresta $e = \{u, v\}$, a curva associada α_e é uma $x_u, x_v -$ curva;

(3) Dadas duas arestas distintas $e \neq f$, o conjunto de intersecções das curvas associadas

α_e e α_f é finito, isto é, $\{x \in S \text{ ; existem } r, s \in (0,1) \text{ tais que } \alpha_e(r) = \alpha_f(s) = x\}$ é finito.

(4) Não existem intersecções triplas, isto é, dadas três arestas distintas e, f e g , o conjunto

$\{x \in S \text{ ; existem } r, s, t \in (0,1) \text{ tais que } \alpha_e(r) = \alpha_f(s) = \alpha_g(t) = x\} = \emptyset$; e

(5) Intersecções são sempre transversais, nunca tangenciais, isto é, os vetores tangentes de duas curvas associadas a arestas, as quais se intersectam em um plano, sempre geram todo o plano.

O desenho do grafo G será denotado por (x, α), representando as duas aplicações.

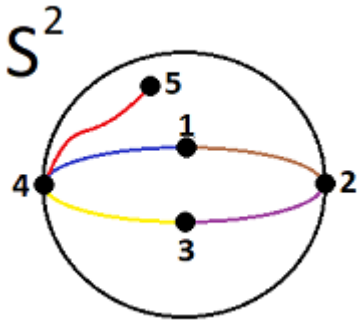
Observação 4.1.4. No caso da superfície fechada S^2, podemos projetar o desenho no plano $\mathbb{R}^2$ via projeção estereográfica.

Definição 4.1.5 (Grafo planar)**.** Seja G um grafo. O grafo G é chamado *planar* se existe um desenho (x, α) de G na superfície fechada S^2, onde (x, α) não tem intersecções de arestas, isto é, dadas duas arestas e, f de G, temos:

$$\{x \in S \text{ ; existem } r, s \in (0,1) \text{ tais que } \alpha_e(r) = \alpha_f(s) = x\} = \emptyset. \tag{4.5}$$

Exemplo 4.1.6. Tome o grafo $G = ([5], \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}\})$. Na Figura 45 temos uma ilustração de um desenho de G em S^2, onde curvas simples associadas a arestas distintas estão representadas por cores distintas. Assim, como G tem um desenho em S^2, segue da Definição 4.1.5 que G é planar.

Figura 45 – Desenho do grafo G em S^2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Formalizado o conceito de desenho de um grafo G, vamos definir o objeto a ser utilizado na construção da cohomologia simétrica: o produto deletado de um grafo.

Definição 4.1.7 (Produto deletado de um grafo)**.** Seja $G = (V,E)$ um grafo, onde $E \subset \binom{V}{2}$ e $V \cap E = \emptyset$. Defina o *produto deletado de* G por:

$$G^{\times} = \left\{ (\sigma,\tau)\ ;\ \sigma,\tau \in \binom{V}{1} \sqcup E\ ,\ \sigma \cap \tau = \emptyset \right\}. \tag{4.6}$$

Isto é, pares de vértices distintos, pares com uma aresta e um vértice que não pertence a esta aresta e pares com duas arestas independentes.

Denotaremos $\{v\} \in \binom{V}{1}$ simplesmente por v e as arestas $\{u,v\} \in E$ serão denotadas simplesmente por uv.

Observação 4.1.8. Se visualizarmos o grafo G como um complexo simplicial, temos a função dimensão:

$$\dim \sigma = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \sigma \in \binom{V}{1}, \\ 1, & \text{se} \quad \sigma \in E. \end{cases} \tag{4.7}$$

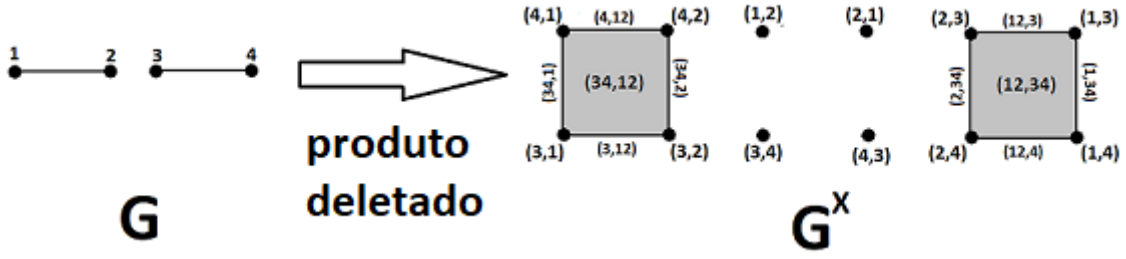
Podemos estender a função dimensão para o produto deletado $G^{\times}$ da seguinte forma:

$$\dim\,(\sigma,\tau) = \dim \sigma + \dim \tau. \tag{4.8}$$

Visualizando (σ,τ) como o produto $\sigma \times \tau$, podemos obter um vértice, uma aresta ou um quadrado.

Exemplo 4.1.9. Tomando o grafo $G = ([4],\{\{1,2\},\{3,4\}\})$, temos como elementos de $G^{\times}$ os pontos $(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)$ e $(4,3)$; as arestas $(4,12),(34,2),(3,12),(34,1),(12,3),(1,34),(12,4)$ e $(2,34)$ e os quadrados $(34,12)$ e $(12,34)$. A Figura 46 ilustra o grafo G e seu produto deletado $G^{\times}$.

Figura 46 – Grafo G e seu produto deletado $G^{\times}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir do produto deletado $G^{\times}$, construiremos uma cohomologia que será chamada cohomologia simétrica.

Inicialmente, note que existe uma $\mathbb{Z}_2$- ação livre μ no produto deletado $G^{\times}$, definida por

$$(\sigma,\tau) \overset{\mu}{\mapsto} (\tau,\sigma). \tag{4.9}$$

Definição 4.1.10 (Cadeias (grupos))**.** Para cada $i \geq 0$, defina a *cadeia* $C_i(G^{\times};\mathbb{Z}_2)$ como o $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial gerado pelos elementos (células) de dimensão i.

Definição 4.1.11 (Operadores bordo)**.** Definimos os *operadores bordo da cohomologia simétrica* $\partial : C_i(G^{\times};\mathbb{Z}_2) \to C_{i-1}(G^{\times};\mathbb{Z}_2)$ nas bases da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial(uv,x) = (u,x)+(v,x)\ ,\ \partial(x,uv) = (x,u)+(x,v), \text{ quando } i=1\ , \text{ e} \\ \partial(uv,xy) = (u,xy)+(v,xy)+(uv,x)+(uv,y), \text{ quando } i=2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Para $i > 2$, como $C_i(G^{\times};\mathbb{Z}_2) = 0$, temos $\partial = 0$.

Exemplo 4.1.12. No Exemplo 4.1.9, o grupo de cadeia $C_2(G^{\times};\mathbb{Z}_2)$ é o grupo:

$$C_2(G^{\times};\mathbb{Z}_2) = \{\alpha.(12,34)+\beta.(34,12)\ ;\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_2\}. \tag{4.11}$$

Definição 4.1.13 (Cocadeias Simétricas)**.** Para cada $i \geq 0$, a *cocadeia simétrica* $C^i(G^{\times};\mathbb{Z}_2)$ é definida como o conjunto de aplicações lineares que são invariantes com respeito à $\mathbb{Z}_2$- ação μ, isto é:

$$C^i(G^{\times};\mathbb{Z}_2) = \{\varphi : C_i(G^{\times};\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2\ ;\ \varphi(\sigma,\tau) = \varphi(\tau,\sigma)\ , \text{ para todo } (\sigma,\tau) \in G^{\times} \text{ de dim } i\}. \tag{4.12}$$

Definição 4.1.14 (Operadores cobordo da cohomologia simétrica)**.** Para cada $i \geq 0$, definimos o *operador cobordo da cohomologia simétrica* $\delta : C^i(G^\times;\mathbb{Z}_2) \to C^{i+1}(G^\times;\mathbb{Z}_2)$ como segue:

$$\begin{aligned} \delta : C^i(G^\times;\mathbb{Z}_2) &\to C^{i+1}(G^\times;\mathbb{Z}_2) \\ \varphi &\mapsto \delta(\varphi) = \varphi \circ \partial \end{aligned} \tag{4.13}$$

Notação: Um elemento de $Im(\delta)$ será chamado *cobordo*.

Observação 4.1.15. Então, temos uma sequência de cohomologia:

$$0 \longrightarrow H^0(G^\times;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\overline{\delta}} H^1(G^\times;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\overline{\delta}} H^2(G^\times;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\overline{\delta}} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \tag{4.14}$$

Note que $H^2(G^\times;\mathbb{Z}_2) = \frac{C^2(G^\times;\mathbb{Z}_2)}{\delta(C^1(G^\times;\mathbb{Z}_2))}$.

Observação 4.1.16. Vamos fixar notações para os elementos da base das cocadeias simétricas $C^1(G^\times;\mathbb{Z}_2)$ e $C^2(G^\times;\mathbb{Z}_2)$.

Inicialmente, considere as cocadeias características:

$$[uv,x](\sigma,\tau) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \sigma = uv \text{ e } \tau = x, \text{ ou } \sigma = x \text{ e } \tau = uv, \\ 0, & \qquad\qquad \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.15}$$

e

$$[uv,xy](\sigma,\tau) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \sigma = uv \text{ e } \tau = xy, \text{ ou } \sigma = xy \text{ e } \tau = uv, \\ 0, & \qquad\qquad \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.16}$$

Note que os elementos da base de $C^1(G^\times;\mathbb{Z}_2)$ são as funções características $[uv,x]$, nas quais uv é uma aresta e x não pertence à aresta uv. Por outro lado, os elementos da base de $C^2(G^\times;\mathbb{Z}_2)$ são as funções características $[uv,xy] = [xy,uv]$, para todo par de arestas uv e xy independentes, ou seja, não têm vértices em comum.

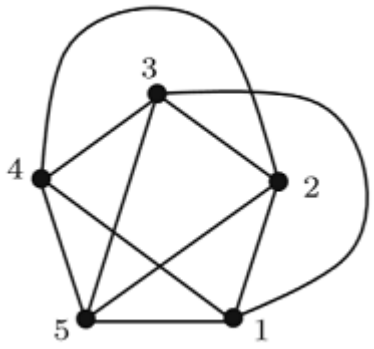
Definição 4.1.17 (Função φ_f)**.** Seja $f = (x,\alpha)$ um desenho de G. Então f define uma cocadeia simétrica

$$\varphi_f : C_2(G^\times;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2, \tag{4.17}$$

dada por $\varphi_f(\sigma,\tau) = |Im(\alpha_\sigma) \cap Im(\alpha_\tau)| \mod 2$. para geradores $(\sigma,\tau) \in C_2(G^\times;\mathbb{Z}_2)$, isto é, a paridade do número de cruzamentos das arestas σ e τ no desenho f.

Exemplo 4.1.18. Seja f o desenho de K_5 da Figura 47. Neste caso, temos $\varphi_f = [13,24] + [14,25] + [14,35]$.

Figura 47 – Desenho f de K_5.



Fonte: Longueville (2012, pg.133).

Definição 4.1.19 (*Classe de obstrução*)**.** Definimos a *classe de obstrução de um grafo G*, $\mathfrak{o}(G) \in H^2(G^\times;\mathbb{Z}_2)$, por $\mathfrak{o}(G) = [\varphi_f]$, onde f é um desenho arbitrário de G.

Observação 4.1.20. Note que, a princípio, a classe de obstrução $\mathfrak{o}(G)$ não está bem definida, a menos que:

$$[\varphi_f] = [\varphi_g] \text{ , para quaisquer desenhos } f \text{ e } g \text{ de } G. \tag{4.18}$$

As próximas proposições (Proposição 4.1.21 e Proposição 4.1.22) garantirão a boa definição da classe de obstrução $\mathfrak{o}(G)$. Mais ainda, todo elemento da classe $\mathfrak{o}(G)$ pode ser obtido a partir de um desenho f de G, isto é, uma função φ_f. O Corolário 4.1.23 afirma exatamente este fato.

Proposição 4.1.21. Para todo desenho f de G e para qualquer $\psi \in C^1(G^\times;\mathbb{Z}_2)$, existe um desenho g de G tal que $\varphi_g = \varphi_f + \delta(\psi)$.

Demonstração. Para mostrar que dado um desenho f de G e $\psi \in C^1(G^\times;\mathbb{Z}_2)$, existe um desenho g de G tal que $\varphi_g = \varphi_f + \delta(\psi)$, basta mostrar que o resultado é válido para um elemento ψ da base de $C^1(G^\times;\mathbb{Z}_2)$, isto é, $\psi = [uv,x]$, para uv uma aresta e x um vértice que não pertence à aresta uv.

Vamos calcular o cobordo de um elemento da base $[uv,x] \in C^1(G^\times;\mathbb{Z}_2)$, como segue:

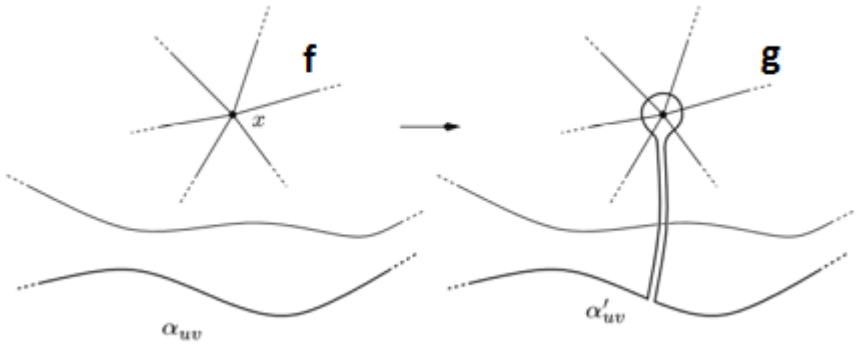
$$\delta([uv,x])(\sigma,\tau) = [uv,x](\partial(\sigma,\tau)) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \sigma = uv \text{ e } x \in \tau, \text{ ou } x \in \sigma \text{ e } \tau = uv, \\ 0, & \qquad\qquad \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Em outras palavras, $\delta([uv,x])$ é igual a 1 nos pares (σ,τ), onde σ e τ são ambas arestas, das quais uma é igual a uv e x é um vértice da outra.

A adição de $\delta([uv,x])$ à função φ_f pode ser interpretada geometricamente. O desenho g de G tal que $\varphi_g = \varphi_f + \delta([uv,x])$ pode ser obtido, como ilustra a Figura 48, através de um

pequeno tubo que contorna o vértice x em uma vizinhança suficientemente pequena, de modo que $\delta([uv,x])$ acrescente um número par de cruzamentos de uv com outras arestas ao longo do tubo, e acrescente 1 ao número de cruzamentos de uv com arestas que têm x como vértice, logo o desenho g faz exatamente com que $\varphi_g = \varphi_f + \delta(\psi)$.

Figura 48 – Modificação de f para g.



Fonte: Longueville (2012, pg.113).

□

Proposição 4.1.22. Se f e g são desenhos de G, então φ_f e φ_g diferem por um cobordo, isto é, φ_f e φ_g definem a mesma classe de cohomologia.

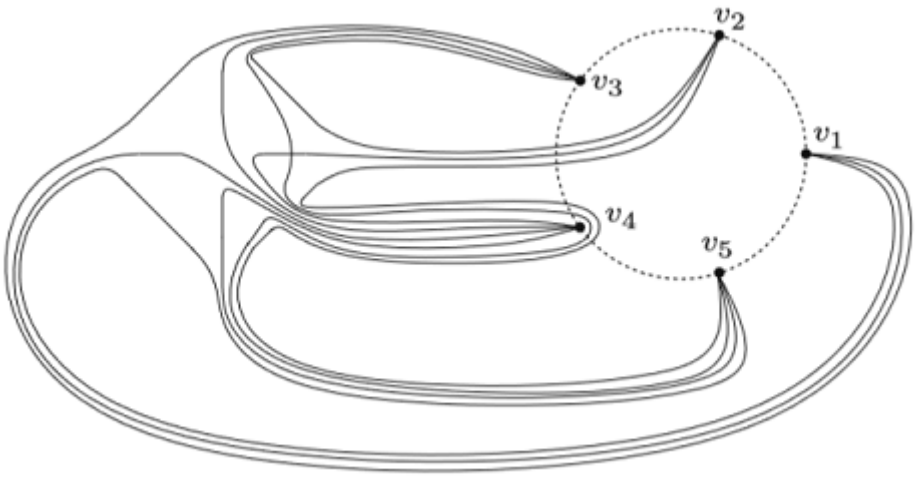
Demonstração. Inicialmente vamos ordenar os vértices de G, $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$. Por transitividade, basta mostrar a afirmação para um desenho f qualquer e o desenho g, onde os n vértices de G estão distribuidos em ordem no sentido anti-horário em um círculo unitário e as arestas são os segmentos de reta unindo os vértices.

Note que dado um desenho f qualquer, podemos fazer uma modificação no desenho de forma que os vértices de G, $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ estejam posicionados em um círculo unitário em sentido anti-horário e este desenho preserve as intersecções entre arestas, o que implica que a função φ_f não é alterada. Veja na Figura 49 como fazer esta modicação no desenho f.

Agora que os vértices dos desenhos f e g estão nas mesmas posições e φ_f não foi alterada, vamos mostrar que tomando uma aresta $\{u,v\}$ de G e fazendo o processo de "endireitamento"desta aresta no desenho f, de forma que ela se torne o segmento de reta que une os vértices u e v, exatamentamente como no desenho g, teremos que a função do novo desenho f' obtido, com a aresta $\{u,v\}$ "endireitada"difere de φ_f por um cobordo, isto é, $\varphi_{f'} - \varphi_f \in Im(\delta)$. Assim, provado este fato, repetindo o processo de "endireitamento"para todas as arestas de G, teremos que $\varphi_f - \varphi_g \in \mathrm{Im}(\delta)$, como queríamos demonstrar.

Durante o processo de "endireitamento"da aresta $\{u,v\}$ podem acontecer três tipos de situações que afetam as intersecções de arestas independentes no novo desenho f' e podem,

Figura 49 – Modificação do desenho f de forma que os vértices fiquem ordenados no círculo unitário.



Fonte: Longueville (2012, pg.115).

consequentemente, alterar a função associada ao desenho, isto é, podemos ter $\varphi_f - \varphi_{f'} \neq 0$. São estes casos:

(1) A aresta $\{u,v\}$ ultrapassa uma intersecção tangencial. Neste caso, um par de intersecções aparece ou desaparece, e como as funções φ_f, $\varphi_{f'}$ têm contradomínio $\mathbb{Z}_2$ essa ultrapassagem não altera a função e segue que $\varphi_f = \varphi_{f'}$.

(2) A intersecção de $\{u,v\}$ ultrapassa a intersecção de outras duas arestas independentes. Nesta situação, um par de intersecções apenas troca a ordem da intersecção, e essa ultrapassagem não altera a função e, portanto, $\varphi_f = \varphi_{f'}$.

(3) A aresta $\{u,v\}$ ultrapassa um vértice $x \in V(G)$. Note que mudam as intersecções da aresta $\{u,v\}$ com as arestas independentes a $\{u,v\}$ que têm x como vértice. As arestas que tinham intersecção com $\{u,v\}$ agora não tem mais e as que não tinham passam a ter. Assim, de (4.19), segue que $\varphi_{f'} = \varphi_f + \mathrm{Im}\,(\delta([uv,x]))$.

Logo, em qualquer um dos casos anteriores, temos que $\varphi_f - \varphi_{f'} \in \mathrm{Im}\,(\delta)$.

Vamos mostrar um exemplo deste processo de "endireitamento"de $\{u,v\}$ em figuras, onde indicamos as intersecções da aresta do lado direito das ilustrações. A Figura 50 representa o desenho inicial $f = f_0$. Na Figura 51, cujo desenho é denotado f_1, temos um exemplo do caso (1), onde um par de intersecções aparece após a aresta $\{u,v\}$ ultrapassar uma intersecção tangencial. As Figuras 52 e 53, que ilustram os desenhos f_2 e f_3 respectivamente, representam o caso (2), onde as intersecções apenas trocam de posições. A Figura 54, ilustrando o desenho f_4 é um exemplo do caso (1) onde um par de intersecções desaparece. Note que:

$$\varphi_f = \varphi_{f_1} = \varphi_{f_2} = \varphi_{f_3} = \varphi_{f_4}. \tag{4.20}$$

Na Figura 55, cujo desenho é f_5, a aresta $\{u,v\}$ ultrapassa o vértice x, como no caso (3).

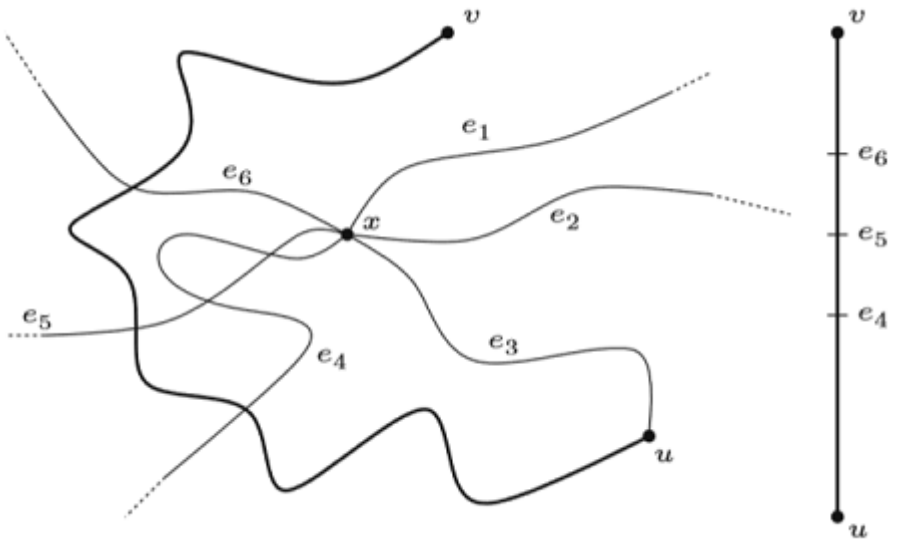
Logo:

$$\varphi_{f_5} = \varphi_{f_4} + \delta([uv,x]) = \varphi_f + \delta([uv,x]). \tag{4.21}$$

Finalmente, a Figura 56, que ilustra o desenho f_6, apenas finaliza o processo de "endireitamento"de $\{u,v\}$, mas nenhum dos três casos descritos anteriormente acontece. Assim, concluímos que neste exemplo:

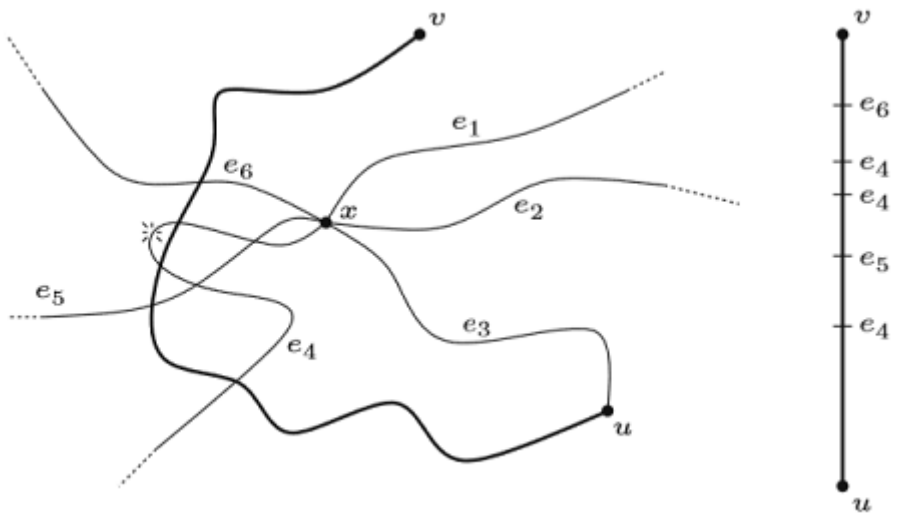
$$\varphi_{f_6} = \varphi_f + \delta([uv,x]). \tag{4.22}$$

Figura 50 – Desenho $f = f_0$.



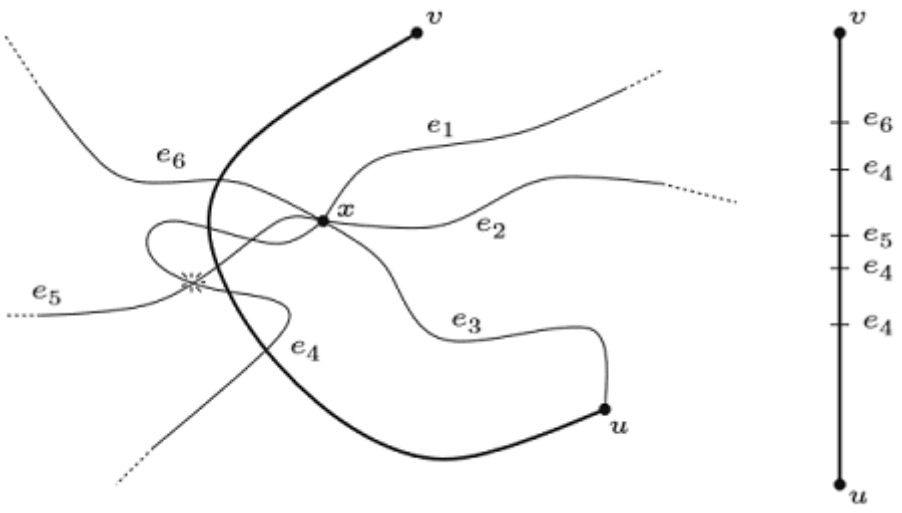
Fonte: Longueville (2012, pg.115).

Figura 51 – Desenho f_1.



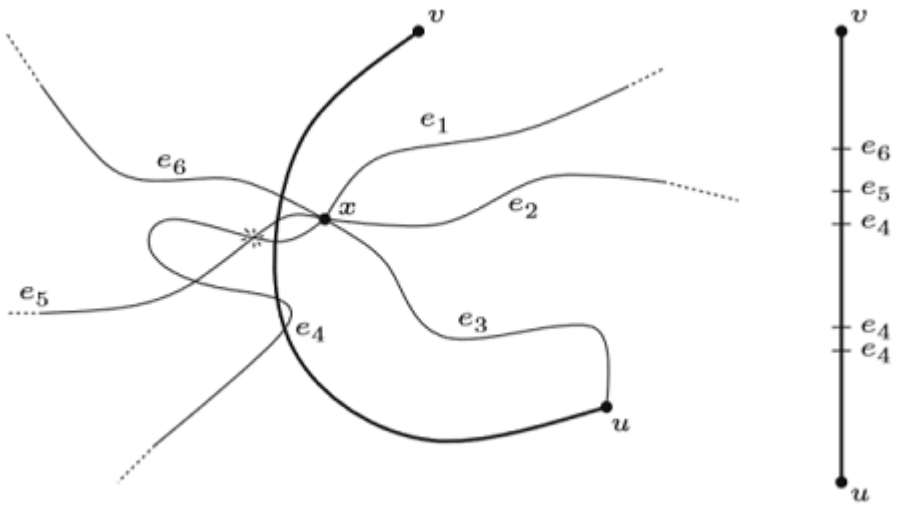
Fonte: Longueville (2012, pg.116).

Figura 52 – Desenho f_2.



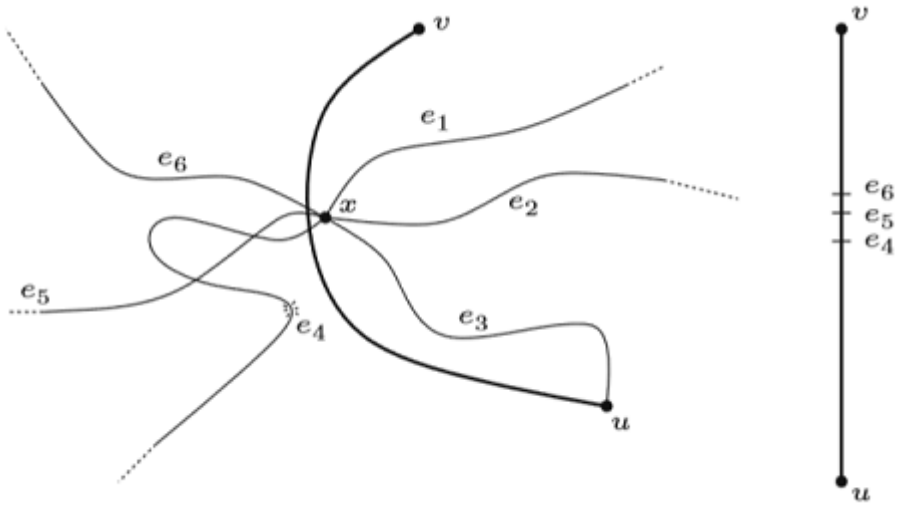
Fonte: Longueville (2012, pg.116).

Figura 53 – Desenho f_3.



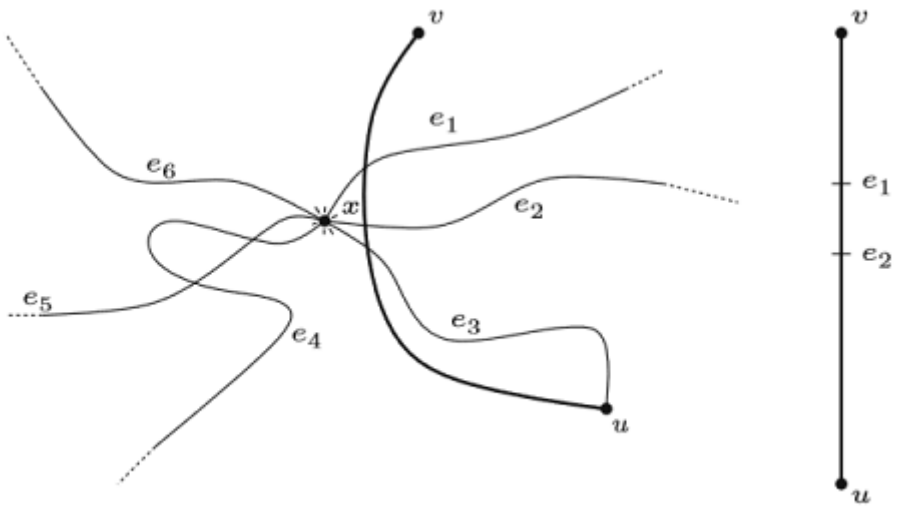
Fonte: Longueville (2012, pg.117).

Figura 54 – Desenho f_4.



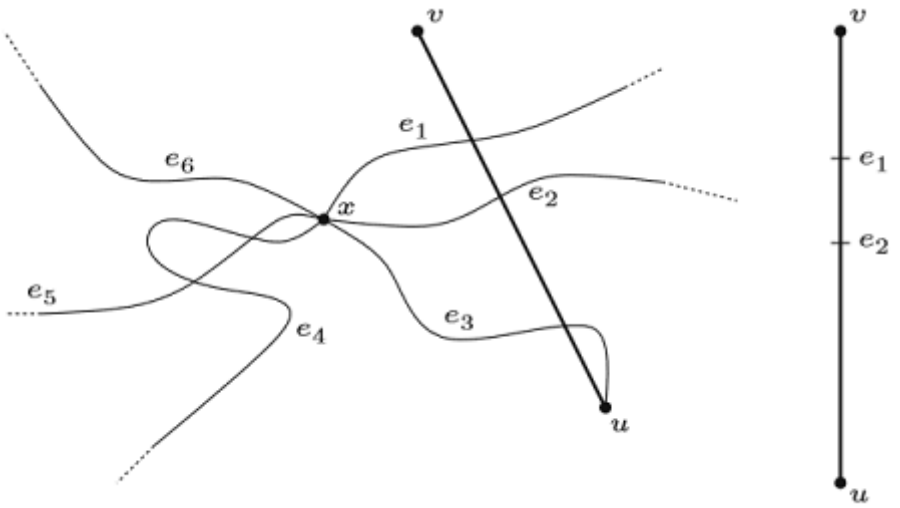
Fonte: Longueville (2012, pg.117).

Figura 55 – Desenho f_5.



Fonte: Longueville (2012, pg.118).

Figura 56 – Desenho f_6.



Fonte: Longueville (2012, pg.118).

□

Corolário 4.1.23. Dado um grafo G, a classe de obstrução $\mathfrak{o}(G)$ está bem definida e todo elemento $\psi \in \mathfrak{o}(G)$ é obtido a partir de um desenho, isto é, $\psi = \varphi_f$, para algum desenho f de G.

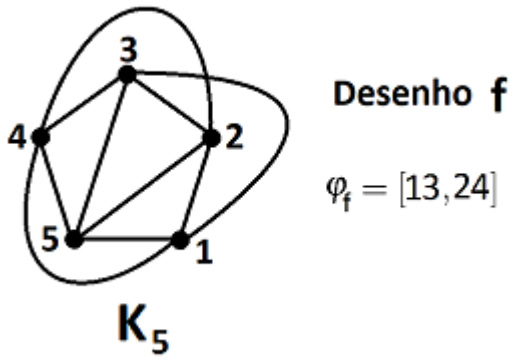
Demonstração. A Proposição 4.1.22 garante que $\mathfrak{o}(G)$ está bem definida e a Proposição 4.1.21 garante que todo elemento $\psi \in \mathfrak{o}(G)$ é obtido apartir de um desenho, isto é, $\psi = \varphi_f$. para algum desenho f de G. □

O Lema a seguir afirma que as classes de obstrução dos grafos K_5 e $K_{3,3}$ são não nulas. Isto será fundamental para utilizarmos o Teorema de Kuratowski (Teorema 4.1.29) na demonstração do Teorema 4.1.30.

Lema 4.1.24. As classes de obstrução $\mathfrak{o}(K_5)$ e $\mathfrak{o}(K_{3,3})$ não são nulas.

Demonstração. Tome o desenho f de K_5 dado pela Figura 47.

Figura 57 – Desenho f de K_5.



Fonte: Adaptada de Longueville (2012, pg.119).

Suponha $\mathfrak{o}(K_5) = 0$, então $[\varphi_f] = 0$, logo $\varphi_f \in Im\ \delta$.

Agora, vamos analisar um elemento de $Im\ \delta$.

Denote $\{i, j, k, l, m\} = [5]$ e temos que a imagem de um elemento da base de $C^1(K_5^{\times}; \mathbb{Z}_2)$ (dado por $[ij, k]$ de forma geral) é:

$$\delta([ij, k]) = [ij, kl] + [ij, km]. \tag{4.23}$$

Segue que todo elemento de $Im\ \delta \in C^2(K_5^{\times}; \mathbb{Z}_2)$ é dado pela soma de uma quantidade par de elementos da base de $C^2(K_5^{\times}; \mathbb{Z}_2)$, isto é:

$$Im\ \delta = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \psi_i \ ;\ \psi_i \text{ pertence à base de } C^2(K_5^{\times}; \mathbb{Z}_2),\ m \text{ é par}, \psi_i \neq \psi_j\ ,\ \forall i, j \in [m]\ ,\ i \neq j \right\}. \tag{4.24}$$

Assim, $\varphi_f = [13, 24] \notin \text{Im}\ \delta$, pois é soma de uma quantidade ímpar de elementos da base de $C^2(K_5^{\times}; \mathbb{Z}_2)$.

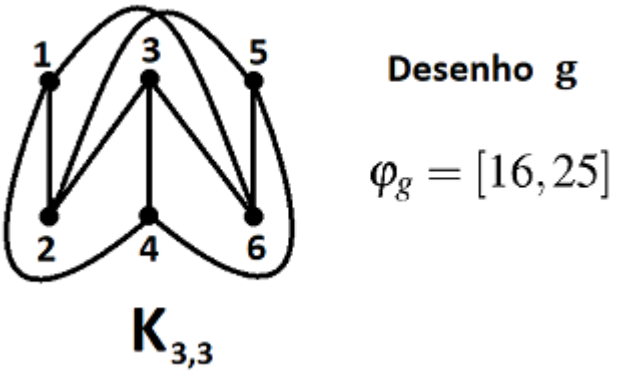
Portanto, $\mathfrak{o}(K_5) = [\varphi_f] \neq 0$.

Tome o desenho g de $K_{3,3}$ dado pela Figura 58.

Suponhamos que $\mathfrak{o}(K_{3,3}) = 0$, então devemos ter $[\varphi_g] = 0$, isto é, $\varphi_g \in \text{Im}\ \delta$.

Agora, vamos analisar um elemento de Im δ.

Figura 58 – Desenho g de $K_{3,3}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Denotaremos por $\{p_a, p_b, p_c, i_a, i_b, i_c\} = [6]$ os vértices de $K_{3,3}$, onde p_a, p_b, p_c são os vértices pares e i_a, i_b, i_c são os vértices ímpares.

Note que as arestas de $K_{3,3}$ são as que unem um vértice par com um vértice ímpar.

Dado um elemento da base de $C^1(K_{3,3}^{\times}; \mathbb{Z}_2)$ (de forma geral dado por $[p_a i_b, p_c]$ou $[p_a i_b, i_c]$, isto é, uma aresta unindo par com ímpar e um vértice par (ou ímpar).

Temos:

$$\begin{aligned} \delta([p_a i_b, p_c]) &= [p_a i_b, p_c i_a] + [p_a i_b, p_c i_b], \\ \delta([p_a i_b, i_c]) &= [p_a i_b, i_c p_b] + [p_a i_b, i_c p_c]. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Segue que todo elemento de $Im\ \delta \in C^2(K_{3,3}^{\times}; \mathbb{Z}_2)$ é dado pela soma de uma quantidade par de elementos da base de $C^2(K_{3,3}^{\times}; \mathbb{Z}_2)$, isto é:

$$Im\ \delta = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \psi_i \ ;\ \psi_i \text{ pertence à base de } C^2(K_{3,3}^{\times}; \mathbb{Z}_2)\ ,\ m \text{ é par}, \psi_i \neq \psi_j\ ,\ \forall i, j \in [m]\ ,\ i \neq j \right\}. \tag{4.26}$$

Assim, $\varphi_g = [16, 24] \notin \text{Im}\ \delta$, pois é a soma de uma quantidade ímpar de elementos da base de $C^2(K_{3,3}^{\times}; \mathbb{Z}_2)$.

Portanto, $\mathfrak{o}(K_{3,3}) = [\varphi_g] \neq 0$. □

Os resultados a seguir também serão fundamentais para demonstrarmos o Teorema 4.1.30.

Definição 4.1.25 (Subdivisão de um grafo)**.** Dado $G = (V, E)$ um grafo. Uma *subdivisão H do grafo G* é um grafo obtido a partir de G apenas acrescentando vértices nas arestas do grafo G. Para visualizar esta definição, temos na Figura 59, que H é uma subdivisão de K.

Definição 4.1.26 (*minor topológico*)**.** Seja G um grafo. Um grafo H é chamado *minor topológico* de G se contém um subgrafo de G isomorfo a H.

Lema 4.1.27. Seja H um subgrafo de G. Se $\mathfrak{o}(H) \neq 0$, então $\mathfrak{o}(G) \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{o}(G) = 0$.

Então, existe um desenho f de G tal que $\varphi_f = 0$.

Denotemos por g o desenho de H obtido pela restrição do desenho f ao subgrafo H de G.

Temos $\varphi_g = 0$, pois $\varphi_g(e,e') = \varphi_f(e,e') = 0$, para quaisquer arestas e,e' do subgrafo H de G.

Logo $\mathfrak{o}(H) = [\varphi_g] = 0$, o que contradiz a hipótese. □

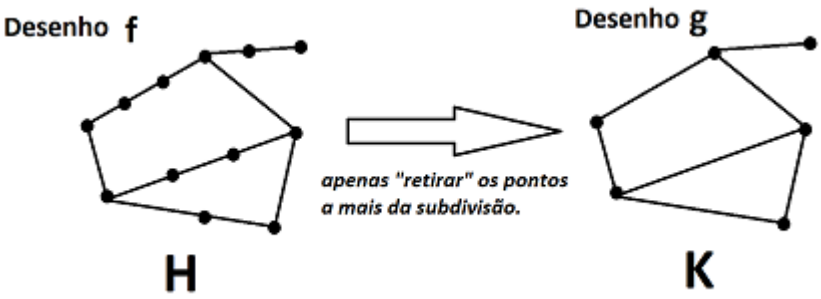
Lema 4.1.28. Seja H subdivisão do grafo K. Se $\mathfrak{o}(K) \neq 0$, então $\mathfrak{o}(H) \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{o}(H) = 0$.

Logo, existe um desenho f de H tal que $\varphi_f = 0$.

Através do desenho f de H obtemos um desenho g de K de maneira óbvia, como indicado na Figura 59 (apenas retirando os vértices a mais na subdivisão).

Figura 59 – Desenho g de K obtido a partir do desenho f da subdivisão H.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostraremos que $\varphi_g = 0$, o que implicará $\mathfrak{o}(K) = [\varphi_g] = 0$.

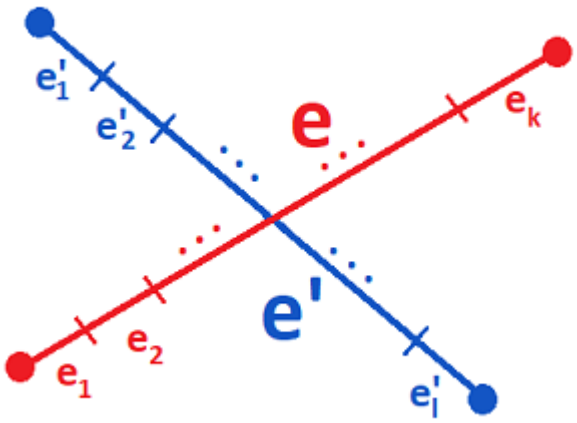
Sejam e,e' arestas de K que são subdivididas em caminhos $e_1,e_2,..,e_k$ e $e'_1,e'_2,...,e'_l$ em H (como ilustra a Figura 60).

Assim:

$$\varphi_g(e,e') = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \varphi_f(e_i,e'_j) = 0. \tag{4.27}$$

Logo, $\mathfrak{o}(K) = [\varphi_g] = 0$. □

Figura 60 – Subdivisão das arestas e e e'.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, estamos em condições de demonstrar o Teorema que fornece uma condição necessária e suficiente para determinar se um grafo G é planar através da classe de obstrução $\mathfrak{o}(G)$. Como consequência deste Teorema, demonstraremos o resultado principal desta seção: o Teorema de Hanani-Tutte.

Teorema 4.1.29 (Kuratowski, 1930)**.** Um grafo G é planar se, e somente se, os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são um *minor topológico* de G.

Teorema 4.1.30. A classe de obstrução $\mathfrak{o}(G)$ é zero se, e somente se, G é planar.

Demonstração. Se G é planar, existe um desenho f de G sem intersecções de arestas, logo $\varphi_f = 0$. Portanto, $\mathfrak{o}(G) = [\varphi_f] = 0$.

Suponhamos que G não seja planar. Então, pelo Teorema de Kuratowski (Teorema 4.1.29) existe um subgrafo H de G tal que H é subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ (isto é, K_5 ou $K_{3,3}$ é um *minor topológico* de H).

Como H é subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ e $\mathfrak{o}(K_5) \neq 0 \neq \mathfrak{o}(K_{3,3})$, segue do Lema 4.1.28 que $\mathfrak{o}(H) \neq 0$.

Como H é subgrafo de G e $\mathfrak{o}(H) \neq 0$, temos pelo Lema 4.1.27 que $\mathfrak{o}(G) \neq 0$, o que contradiz a hipótese. □

Teorema 4.1.31 (Hanani-Tutte)**.** Se um grafo G tem um desenho em que dadas duas arestas independentes elas se intersectam um número par de vezes, então G é planar.

Demonstração. Seja f um desenho de G tal que dadas duas arestas independentes elas se intersectam um número par de vezes. Então, por definição, temos $\varphi_f = 0$.

Logo $\mathfrak{o}(G) = [\varphi_f] = 0$ e pelo Teorema 4.1.30 o grafo G é planar. □

4.2 Limitantes inferiores para o número cromático

Nesta seção vamos exibir limitantes para o número cromático de um grafo G. Estes limitantes serão obtidos através dos conceitos de $\mathbb{Z}_2$-índice do complexo caixa do grafo G e k-conexidade do poliedro do complexo vizinhança do grafo G, definidos também nesta seção. A seção foi baseada em (MATOUSEK, 2008).

Definição 4.2.1 ($\mathbb{Z}_2$*-espaço*)**.** Um $\mathbb{Z}_2$*-espaço* é um par (X,ν) onde X é um espaço topológico e $\nu : X \to X$ é um homeomorfismo (que será chamado de $\mathbb{Z}_2$*-ação*) tal que $\nu \circ \nu = Id_X$.

A $\mathbb{Z}_2$- ação ν é chamada *livre* se $\nu(x) \neq x$, para todo $x \in X$.

Quando ν é uma $\mathbb{Z}_2$- ação livre dizemos que o $\mathbb{Z}_2$-espaço (X,ν) é *livre*.

Definição 4.2.2 ($\mathbb{Z}_2$ *-aplicação*)**.** Se (X,ν) e (Y,ω) são $\mathbb{Z}_2$-espaços, uma $\mathbb{Z}_2$*-aplicação*

$$f : (X,\nu) \to (Y,\omega) \tag{4.28}$$

é uma função contínua $f : X \to Y$ que comuta com respeito às $\mathbb{Z}_2$-ações, isto é, para todo $x \in X$ temos:

$$f(\nu(x)) = \omega(f(x)) \text{ ou seja } f \circ \nu = \omega \circ f. \tag{4.29}$$

Em outras palavras, o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nu"'] & Y \arrow[d, "\omega"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{4.30}$$

Exemplo 4.2.3. (1) O $\mathbb{Z}_2$-espaço (S^n,A), onde $A : S^n \to S^n$, $A(x) = -x$, $\forall x \in S^n$ é a aplicação antipodal. Como $x \neq -x$, $\forall x \in S^n$ segue que A é uma $\mathbb{Z}_2$-ação livre, logo (S^n,A) é um $\mathbb{Z}_2$-espaço livre.

(2) O $\mathbb{Z}_2$-espaço $(\mathbb{R}^n,A)$, onde $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ é a aplicação antipodal. Neste caso, A não é $\mathbb{Z}_2$-ação livre, pois $A(0) = 0$.

Observação 4.2.4. Dado (X,ν) um $\mathbb{Z}_2$-espaço, quando estiver implícito qual é a $\mathbb{Z}_2$-ação ν denotaremos o $\mathbb{Z}_2$-espaço simplesmente por X. No caso do Exemplo 4.2.3 *(1)*, vamos denotar a partir de agora apenas por S^n, pois estaremos sempre considerando a $\mathbb{Z}_2$-ação A (aplicação antipodal).

Definição 4.2.5 ($\mathbb{Z}_2$*-índice*)**.** Seja (X,ν) um $\mathbb{Z}_2$-espaço. O $\mathbb{Z}_2$- *índice* de X, denotado por $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X)$ é o menor número natural $n \geq 0$ tal que existe uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação $f : X \to S^n$, isto é:

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \overset{def}{=} \min\{n \in \mathbb{N}\,;\ \text{existe uma } \mathbb{Z}_2\text{-aplicação } f : X \to S^n\}. \tag{4.31}$$

Exemplo 4.2.6. Note que o Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 3.1.2 versão **BU 2a**) afirma exatamente que para todo $n \geq 0$ não existe $\mathbb{Z}_2$-aplicação entre S^n e S^{n-1}, logo $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n) \geq n$. Como Id_{S^n} é uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação, logo:

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n) = n. \tag{4.32}$$

Proposição 4.2.7 (*Propriedades do $\mathbb{Z}_2$-índice*)**.** ((MATOUSEK, 2008), 5.3.2 Proposition, pg.96)

(1) Se $X \leq_{\mathbb{Z}_2} Y$ (existe uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação entre X e Y), então $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(Y)$. Em outras palavras,

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) > \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(Y) \text{ implica } X \overset{\mathbb{Z}_2}{\not\to} Y. \tag{4.33}$$

(2) $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n) = n$, para todo $n \geq 0$ (aqui a $\mathbb{Z}_2$-ação em S^n é a aplicação antipodal).

(3) $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X * Y) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) + \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(Y) + 1$.

(4) Se X é $(n-1)$- conexo, então $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \geq n$.

(5) Se K é um $\mathbb{Z}_2$- complexo simplicial livre (ou $\mathbb{Z}_2$- complexo celular) de dimensão n, então $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K) \leq n$.

Definição 4.2.8 (*Vizinhança comum*)**.** Seja G um grafo. Dado um sunconjunto de vértices $A \subset V(G)$, definimos a *vizinhança comum de A* como sendo o subconjunto de vértices que estão conectados a todos os vértices de A. Em outras palavras:

$$\text{CN}(A) = \{v \in V(G);\ \{a,v\} \in E(G) \text{ para todo } a \in A\} \subset V(G) \setminus A. \tag{4.34}$$

Observação 4.2.9. $\text{CN}(A) \subset V(G) \setminus A$, porque $\{a,a\} \notin E(G)$, logo não vale para todo $a \in A$.

Definição 4.2.10 ($G[A_1,A_2]$ *é completo*)**.** Sejam $A_1, A_2 \subset V(G)$, onde $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dizemos que $G[A_1,A_2]$ *é completo* se todo vértice de A_1 é conectado com A_2 em G e vice-versa. Isto é, $G[A_1,A_2]$ é um subgrafo bipartido induzido em G por A_1 e A_2.

Definição 4.2.11. O *complexo caixa* de um grafo G é um $\mathbb{Z}_2$- complexo livre $\text{B}(G)$ com conjunto de vértices $V(G) \uplus V(G) = V(G) \times [2]$ e os seguintes simplexos: B(G)={ $\text{A}_1 \uplus A_2$; $A_1, A_2 \subset V(G), A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $G[A_1,A_2]$ é completo, $CN(A_1) \neq \emptyset \neq CN(A_2)$} .(4.34)

A $\mathbb{Z}_2$-ação ν de $\text{B}(G)$ é dada pela mudança das duas cópias dos conjuntos de vértices.

$$(v,1) \mapsto (v,2) \quad \text{e} \quad (v,2) \mapsto (v,1) \ \text{, para todo } v \in V(G). \tag{4.35}$$

Observação 4.2.12. Quando A_1 ou A_2 é vazio, basta que o conjunto não vazio tenha o conjunto de vizinhos em comum não vazio.

Quando $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ a condição $\text{CN}(A_1) \neq \emptyset \neq \text{CN}(A_2)$ é supérflua, pois como $G[A_1,A_2]$ é completo, então os vértices de A_1 e A_2 estão conectados e $\emptyset \neq A_1 = \text{CN}(A_2)$ e $\emptyset \neq A_2 = \text{CN}(A_1)$.

Observação 4.2.13. O $\mathbb{Z}_2$- complexo é livre, pois

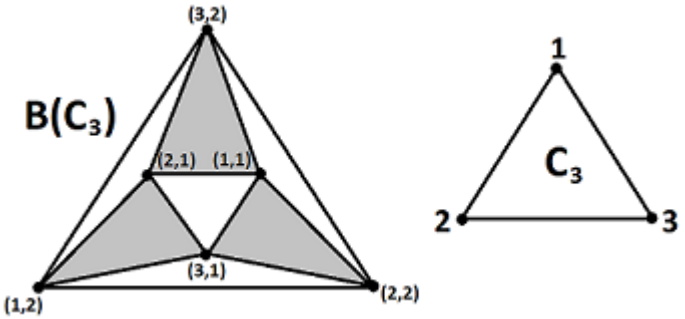
$$\nu(A_1 \uplus A_2) = \nu((A_1,1) \cup (A_2,2)) = (A_1,2) = A_2 \uplus A_1 \cup (A_2,1). \tag{4.36}$$

Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, temos $A_1 \neq A_2$ e, consequentemente:

$$\nu(A_1 \uplus A_2) = A_2 \uplus A_1 \neq A_1 \uplus A_2. \tag{4.37}$$

Exemplo 4.2.14. A Figura 61 ilustra o complexo caixa do grafo C_3.

Figura 61 – Exemplo do complexo caixa $B(C_3)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos utilizar a definição de complexo caixa (Definição 4.2.11) e definir o funtor covariante como segue.

Definição 4.2.15 (*Funtor covariante B*)**.** O *funtor covariante B* sai da categoria de grafos e homomorfismos de grafos e vai para a categoria de $\mathbb{Z}_2$-espaços e $\mathbb{Z}_2$-aplicações. Em outras palavras:

$$B : (\text{Grafos, homomorfismos de grafos}) \to (\mathbb{Z}_2\text{-espaços}, \mathbb{Z}_2\text{-aplicações}). \tag{4.38}$$

Este funtor é definido por:

$$\begin{aligned} &G \mapsto \mathrm{B}(G), \text{ onde } \mathrm{B}(G) \text{ é como definido na Definição 4.2.11 ,} \\ &(f : G \to H) \longmapsto (\ B(f) : V(\mathrm{B}(G)) \to V(B(H))\ ), \end{aligned} \tag{4.39}$$

onde $B(f) : V(\mathrm{B}(G)) \to V(B(H))$ é dada por:

$$B(f)(v,j) = (f(v), j), \text{ para todo } v \in V(G) \text{ e } j \in [2]. \tag{4.40}$$

Lema 4.2.16. $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||B(K_m)||) \leq m-2$.

Demonstração. Pela Definição 4.2.11, temos:

$$B(K_m) = \{A_1 \uplus A_2 \ ; \ A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ e } \mathrm{CN}(A_1) \neq \emptyset \neq \mathrm{CN}(A_2)\}. \tag{4.41}$$

Inicialmente, note que para o grafo completo K_m, temos:

$$\mathrm{CN}(A_1) = [m] \setminus A_1 \quad \text{e} \quad \mathrm{CN}(A_2) = [m] \setminus A_2. \tag{4.42}$$

Assim, o complexo caixa $\mathrm{B}(K_m)$ é o complexo simplicial cujo conjunto de vértices é $[m] \times \{2\}$ e os simplexos são os subconjuntos $F \subset [m] \times \{2\}$, onde não existe $i \in [m]$ tal que $(i,1)$, $(i,2) \in F$, com exceção aos subconjuntos $[m] \times \{1\}$ e $[m] \times \{2\}$, pois não satisfazem a condição $\mathrm{CN}(A_1) \neq \emptyset \neq \mathrm{CN}(A_2)$ de (4.42).

Assim, o complexo caixa $\mathrm{B}(K_m)$ pode ser identificado como:

$$\Diamond^{m-1} \setminus \{[m] \times \{1\}, [m] \times \{2\}\}. \tag{4.43}$$

Assim, $||\mathrm{B}(K_m)||$ é homeomorfo a $||\Diamond^{m-1} \setminus \{[m] \times \{1\}, [m] \times \{2\}\}||$, que por sua vez é homorfo a S^{m-1} menos duas bolas abertas disjuntas.

Considere a projeção radial com centro na origem $\varphi : \mathbb{R}^m \to S^{m-1}$ e $||\Diamond^{m-1}|| \subset \mathbb{R}^m$ como no Exemplo 2.3.7, mas rotacionado de forma que os baricentros dos simplexos $\{+1,+2,+3\}$ e $\{-1,-2,-3\}$ são levados por φ nos pólos norte $N = (0,\ldots,0,1)$ e sul $S = (0,\ldots,0,-1)$, respectivamente. Tome $\pi : S^{m-1} \to S^{m-2}$ a projeção dada por:

$$\begin{aligned} \pi : S^{m-1} &\to S^{m-2} \\ (x_1,\ldots,x_{m-1},x_m) &\longmapsto \frac{(x_1,\ldots,x_{m-1})}{||(x_1,\ldots,x_{m-1})||} \end{aligned} \tag{4.44}$$

Na Figura 62, ilustramos a composição $\pi \circ \varphi|_{||B(K_m)||}$ para o caso $m = 3$ e, claramente, temos $\pi \circ \varphi : ||\mathrm{B}(K_m)|| \to S^{m-2}$ uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação.

Sendo $\pi \circ \varphi|_{||B(K_m)||}$ uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação, segue que:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{B}(K_m)||) \leq m-2. \tag{4.45}$$

□

Lema 4.2.17. ((MATOUSEK, 2008), 5.9.5 Lemma, pg. 125) Dado um grafo G, podemos construir um $\mathbb{Z}_2$- complexo $L(G)$ tal que:

(1) $||\mathrm{L}(G)||$ é um retrato por deformação de $||\mathrm{N}(G)||$.

(2) $||\mathrm{L}(G)|| \overset{\mathbb{Z}_2}{\to} ||\mathrm{B}(G)||$.

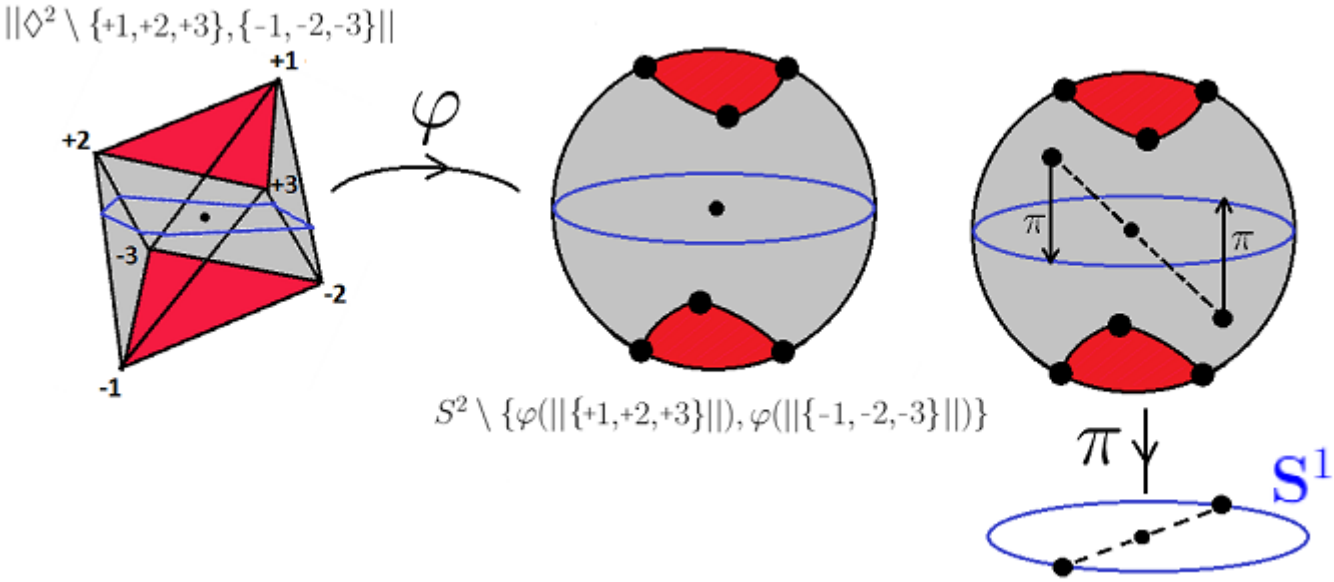
Teorema 4.2.18. Seja G um grafo. Temos:

$$\chi(G) \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{B}(G)||) + 2. \tag{4.46}$$

Demonstração. Seja $m = \chi(G)$. Então, existe um homomorfismo de grafos:

$$f : G \to K_m. \tag{4.47}$$

Figura 62 – Ilustração da composição $\pi \circ \varphi|_{||B(K_m)||}$ para o caso $m = 3$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o funtor covariante B, temos a $\mathbb{Z}_2$-aplicação simplicial:

$$\mathrm{B}(f) : \mathrm{B}(G) \to \mathrm{B}(K_m), \tag{4.48}$$

a qual dá origem à $\mathbb{Z}_2$-aplicação:

$$||\mathrm{B}(f)|| : ||\mathrm{B}(G)|| \to ||\mathrm{B}(K_m)||. \tag{4.49}$$

Pelo Lema 4.2.16, temos $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathrm{B}(K_m)) \leq m-2$, assim existe uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação $\varphi : ||\mathrm{B}(K_m)|| \to S^{m-2}$ e, portanto,

$$\varphi \circ \mathrm{B}(f) : \mathrm{B}(G) \to S^{m-2} \tag{4.50}$$

é uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação.

Logo,

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{B}(G)||) \leq m-2 \Rightarrow \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{B}(G)||)+2 \leq m = \chi(G). \tag{4.51}$$

□

A seguir, definiremos o conceito de k-conexidade.

Definição 4.2.19 (k-conexo)**.** Um espaço topológico X é chamado k-conexo se toda função contínua $f : S^d \to X$ pode ser estendida a uma função contínua $\overline{f} : B^{d+1} \to X$, isto é:

$$f(x) = \overline{f}(x)\ , \forall x \in S^d. \tag{4.52}$$

Teorema 4.2.20. Seja G um grafo. Se o poliedro do complexo vizinhança $||\mathrm{N}(G)||$ é k-conexo, então:

$$\chi(G) \geq k+3. \tag{4.53}$$

Demonstração. Por hipótese, $||\mathrm{N}(G)||$ é k-conexo e, pelo Lema 4.2.17, $||\mathrm{L}(G)||$ é retrato por deformação de $||\mathrm{N}(G)||$, logo $||\mathrm{L}(G)||$ é k- conexo.

De fato, sendo $||\mathrm{L}(G)|| \subset ||\mathrm{N}(G)||$ um retrato por deformação, existe uma homotopia:

$$H : ||\mathrm{N}(G)|| \times [0,1] \to ||\mathrm{N}(G)|| \tag{4.54}$$

tal que:

$$\begin{aligned} H(x,0) = x = \mathrm{Id}_{||\mathrm{N}(G)||}(x), \quad H(y,t) = y, \ \forall y \in ||\mathrm{L}(G)||, \forall t \in [0,1] \ , \\ \text{e } \ H(x,1) = f(x), \ \forall x \in ||\mathrm{N}(G)||, \text{ onde } \mathrm{Im}(f) \subset ||\mathrm{L}(G)||. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Assim, sendo $g : S^d \to ||\mathrm{L}(G)||$ uma função contínua e como $||\mathrm{L}(G)|| \subset ||\mathrm{N}(G)||$ podemos tomar $g_0 : S^d \to ||\mathrm{N}(G)||$, onde $g(x) = g_0(x)$, $\forall x \in S^d$. Como $||\mathrm{N}(G)||$ é k-conexo, existe uma extensão $\overline{g_0} : B^{d+1} \to ||\mathrm{N}(G)||$ de g_0. Assim, tome:

$$\overline{g} = f \circ \overline{g_0} : B^{d+1} \to ||\mathrm{L}(G)||. \tag{4.56}$$

Note que $\overline{g}$ está bem definida, pois de (4.55) temos $\mathrm{Im}(f) \subset ||\mathrm{L}(G)||$. Também, temos que $\overline{g} = f \circ \overline{g_0}$ estende g, pois dado $x \in S^d$, temos:

$$\overline{g}(x) = f \circ \overline{g_0}(x) = f(\overline{g_0}(x)) = f(g(x)) \overset{(4.55)}{=} g(x). \tag{4.57}$$

Portanto, $||\mathrm{L}(G)||$ é k-conexo. Pela Proposição 4.2.7 *(3)*, temos que:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{L}(G)||) \geq k+1. \tag{4.58}$$

Segue do Lema 4.2.17 *(2)* que $||\mathrm{L}(G)|| \overset{\mathbb{Z}_2}{\to} ||\mathrm{B}(G)||$, logo:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{L}(G)||) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{L}(G)||). \tag{4.59}$$

Pelo Teorema 4.2.18, temos:

$$\chi(G) \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{B}(G)||) + 2. \tag{4.60}$$

Então, de (4.59), (4.58) e (4.60) temos:

$$\chi(G) \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{B}(G)||) + 2 \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{L}(G)||) + 2 \geq (k+1) + 2 \geq k+3. \tag{4.61}$$

□

CAPÍTULO

5

PROBLEMAS DE MERGULHO

Neste capítulo, vamos demonstrar Teoremas sobre mergulho utilizando ferramentas topológicas. Inicialmente, trataremos do clássico Teorema de Van-Kampen-Flores ((KAMPEN, 1933), (FLORES, 1933)). Na segunda seção, demonstraremos o Teorema Topológico de Tveberg ((VOLOVIKOV, 1996b), (ÖZADIN, 1987)) para o caso de potências de primos, o qual será utilizado na demonstração da versão mais geral do Teorema de Van-Kampen-Flores: o Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado ((SARKARIA, 1991a), (VOLOVIKOV, 1996b)).

5.1 Teorema de Van-Kampen-Flores

Nesta seção, demonstraremos o Teorema de Van-Kampen-Flores (Teorema 5.1.17) utilizando conceitos como esfera de Bier e dual combinatorial de Alexander. Também utilizando estes conceitos, ao fim desta seção vamos exibir uma prova combinatorial de que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ não pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^3$. Os resultados foram baseados em (LONGUEVILLE, 2012).

Definição 5.1.1 ((Duplo) *join* deletado de espaços topológicos)**.** Seja X um espaço topológico. O *(duplo) join deletado de* X, denotado por $X *_\Delta X$ é definido por

$$X *_\Delta X = X * X \setminus \left\{ \tfrac{1}{2}x \oplus \tfrac{1}{2}x \; ; \; x \in X \right\} \tag{5.1}$$

Definição 5.1.2 ((Duplo) *join* deletado de complexos simpliciais)**.** Seja K um complexo simplicial. O *(duplo) join deletado de* K é definido como sendo o complexo simplicial:

$$K_\Delta^{*2} = \{\tau_1 \uplus \tau_2 \; ; \; \tau_1, \tau_2 \in K \; , \; \tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset\} \subset K * K. \tag{5.2}$$

Em ambas as definições podemos tornar o (duplo) *join* deletado em um $\mathbb{Z}_2$- espaço livre adicionando a $\mathbb{Z}_2$-aplicação que faz a "mudança de coordenadas".

Definição 5.1.3. Seja X espaço topológico. Definimos o $\mathbb{Z}_2$*-espaço livre dado pelo (duplo) join deletado de* X como sendo o $\mathbb{Z}_2$-espaço livre $(X *_\Delta X, \mu_X)$, onde $\mu_X : X *_\Delta X \to X *_\Delta X$ é uma

$\mathbb{Z}_2$-aplicação que faz as mudanças de coordenadas, isto é:

$$\mu_X(tx_1 \oplus (1-t)x_2) = (1-t)x_2 \oplus t_1x_1 \ , \ \forall tx_1 \oplus (1-t)x_2 \in X *_\Delta X. \tag{5.3}$$

Definição 5.1.4. Seja K um complexo simplicial. Definimos o $\mathbb{Z}_2$- *espaço livre dado pelo (duplo) join deletado de* K como sendo o $\mathbb{Z}_2$-espaço livre (K^{*2}_Δ, μ_K) onde $\mu_K : K^{*2}_\Delta \to K^{*2}_\Delta$ é uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação livre que faz as mudanças de coordenadas, isto é

$$\mu_k(\tau_1 \uplus \tau_2) = \mu_K(\tau_1 \times \{1\} \sqcup \tau_2 \times \{2\}) = \tau_2 \times \{1\} \sqcup \tau_1 \times \{2\} = \tau_2 \uplus \tau_1. \tag{5.4}$$

Proposição 5.1.5. Sejam X e Y espaços topológicos. Se X pode ser mergulhado em Y, então existe um $\mathbb{Z}_2$-aplicação entre $(X *_\Delta X, \mu_X)$ e $(Y *_\Delta Y, \mu_Y)$.

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ um mergulho. Defina:

$$\begin{aligned} f^{*2} : X * X &\to Y * Y \\ tx_1 \oplus (1-t)x_2 &\longmapsto tf(x_1) \oplus (1-t)f(x_2). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Como f é injetora, se $x_1 \neq x_2$, onde $x_1, x_2 \in X$, temos:

$$f^{*2}\left(\tfrac{1}{2}x_1 \oplus \tfrac{1}{2}x_2\right) = \tfrac{1}{2}f(x_1) \oplus \tfrac{1}{2}f(x_2) \notin \left\{\tfrac{1}{2}y \oplus \tfrac{1}{2}y \ ; \ y \in Y\right\} \tag{5.6}$$

Logo, podemos definir:

$$\begin{aligned} f^{*2}_\Delta : X * X \setminus \{\tfrac{1}{2}x \oplus \tfrac{1}{2}x \ ; \ x \in X\} &\to Y * Y \setminus \{\tfrac{1}{2}y \oplus \tfrac{1}{2}y \ ; \ y \in Y\} \\ tx_1 \oplus (1-t)x_2 &\mapsto tf(x_1) \oplus (1-t)f(x_2) \end{aligned} \tag{5.7}$$

A aplicação $f^{*2}_\Delta : X *_\Delta X \to Y *_\Delta Y$ é uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação. De fato, seja $tx_1 \oplus (1-t)x_2 \in X *_\Delta X$, temos:

$$\begin{aligned} f^{*2}_\Delta(\mu_X(tx_1 \oplus (1-t)x_2)) = f^{*2}_\Delta((1-t)x_2 \oplus tx_1) = (1-t)f(x_2) \oplus tf(x_1) = \\ \mu_Y(tf(x_1) \oplus (1-t)f(x_2)) = \mu_Y(f^{*2}_\Delta(tx_1 \oplus (1-t)x_2)). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Isto é, $f^{*2}_\Delta \circ \mu_X = \mu_Y \circ f^{*2}_\Delta$.

Logo, $f^{*2}_\Delta : X *_\Delta X \to Y *_\Delta Y$ é uma $\mathbb{Z}_2$- aplicação. □

Proposição 5.1.6. $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^d *_\Delta \mathbb{R}^d) \leq d$.

Demonstração. Vamos definir uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^d *_\Delta \mathbb{R}^d &\longrightarrow S^d \\ tx \oplus (1-t)y &\longmapsto \frac{t\tilde{x} - (1-t)\tilde{y}}{||t\tilde{x} - (1-t)\tilde{y}||}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde se $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, temos $\tilde{x} = (1, x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

De fato, g é uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação, pois tomando $tx \oplus (1-t)y \in \mathbb{R}^d *_\Delta \mathbb{R}^d$ qualquer, temos:

$$g(\mu_{\mathbb{R}^d}(tx \oplus (1-t)y)) = g((1-t)y \oplus tx) = \frac{(1-t)\tilde{y} - t\tilde{x}}{||(1-t)\tilde{y} - t\tilde{x}||},$$
$$A(g(tx \oplus (1-t)y)) = A\left(\frac{(1-t)\tilde{x} - t\tilde{y}}{||(1-t)\tilde{x} - t\tilde{y}||}\right) = \frac{(1-t)\tilde{y} - t\tilde{x}}{||(1-t)\tilde{y} - t\tilde{x}||}, \tag{5.10}$$

onde $A : S^d \to S^d$ é a aplicação antipodal.

Logo, $g \circ \mu_{\mathbb{R}^d} = A \circ g$.

Sendo $g : \mathbb{R}^d *_\Delta \mathbb{R}^d \longrightarrow S^d$ uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação, temos $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^d *_\Delta \mathbb{R}^d) \leq d$. □

Lema 5.1.7. Seja $K = \mathscr{P}([n+1]) = \{\tau \,;\, \tau \subset [n+1]\}$ o complexo simplicial representando um n-simplexo e suas faces. Existe uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação:

$$\Psi : (||K *_\Delta K||, \mu_K) \to (||\Diamond^n||, A), \tag{5.11}$$

onde $\Diamond^n$ é o n-dimensional *crosspolitope* e A é a aplicação antipodal. Em particular, $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_\Delta K||) = n$.

Demonstração. Temos o seguinte $\mathbb{Z}_2$-isomorfismo de complexos simpliciais:

$$\varphi : K *_\Delta K \to \Diamond^n$$
$$\tau_1 \uplus \tau_2 \mapsto \{e_i \,;\, i \in \tau_1\} \sqcup \{-e_i \,;\, i \in \tau_2\}. \tag{5.12}$$

Claramente, φ é um isomorfismo, pois temos que $\tau_1 \uplus \tau_2 \in K *_\Delta K$ se, e somente se, $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$.

Além disso, φ é uma $\mathbb{Z}_2$-aplicação. De fato, para qualquer $\tau_1 \uplus \tau_2 \in K *_\Delta K$, temos:

$$\varphi(\mu_K(\tau_1 \uplus \tau_2)) = \varphi(\tau_2 \uplus \tau_1) = \{e_i \,;\, i \in \tau_2\} \sqcup \{-e_i \,;\, i \in \tau_1\} =$$
$$A(\{e_i \,;\, i \in \tau_1\} \sqcup \{-e_i \,;\, i \in \tau_2\}) = A(\varphi(\tau_1 \uplus \tau_2)). \tag{5.13}$$

Segue também que:

$$\psi = ||\varphi|| : (||K *_\Delta K||, \mu_K) \to (||\Diamond^n||, A) \tag{5.14}$$

é um $\mathbb{Z}_2$-isomorfismo, logo $(||K *_\Delta K||, \mu_K)$ e $(||\Diamond^n||, A)$ são $\mathbb{Z}_2$-isomorfos.

Em particular, temos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_\Delta K||) = n$, pois $||\Diamond^n||$ é $\mathbb{Z}_2$-isomorfo a S^n através do $\mathbb{Z}_2$-isomorfismo:

$$\Pi : ||\Diamond^n|| \to S^n \tag{5.15}$$
$$x \mapsto ||x||.$$

□

Lema 5.1.8. Sejam K e L complexos simpliciais. Então:

$$(K*L)^{*2}_{\Delta} \text{ é isomorfo a } K^{*2}_{\Delta} * L^{*2}_{\Delta}. \tag{5.16}$$

Demonstração. Basta tomar o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : (K*L)^{*2}_{\Delta} &\to K^{*2}_{\Delta} * L^{*2}_{\Delta} \\ (\sigma_1 \uplus \tau_1) \uplus (\sigma_2 \uplus \tau_2) &\mapsto (\sigma_1 \uplus \sigma_2) \uplus (\tau_1 \uplus \tau_2). \end{aligned} \tag{5.17}$$

□

Proposição 5.1.9. Seja K um complexo simplicial. Se $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_{\Delta} K||) > d$, então para qualquer função contínua $f : ||K|| \to \mathbb{R}^d$ existem duas faces disjuntas τ_1, τ_2 de K tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap f(||\tau_2||) \neq \emptyset. \tag{5.18}$$

Demonstração. Suponha que exista uma função contínua $f : ||K|| \to \mathbb{R}^d$ tal que dados τ_1, τ_2 duas faces de K disjuntas, temos que:

$$f(||\tau_1||) \cap f(||\tau_2||) \neq \emptyset. \tag{5.19}$$

Considere $\psi : ||K*K|| \to ||K|| * ||K||$ o homeomorfismo obtido no Teorema 2.6.11 e $i : ||K *_{\Delta} K|| \hookrightarrow ||K*K||$ a inclusão.

Temos a seguinte composição de $\mathbb{Z}_2$-aplicações:

$$||K *_{\Delta} K|| \xrightarrow{i} ||K*K|| \xrightarrow{\psi} ||K|| * ||K|| \xrightarrow{||f^{*2}||} ||\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d|| \,. \tag{5.20}$$

Por hipótese, sendo $x_1 \in ||\tau_1||$, $x_2 \in ||\tau_2||$ e $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, logo $\text{Im}(f^{*2}) \subset \mathbb{R}^d *_{\Delta} \mathbb{R}^d$ e podemos considerar a composição de aplicações de (5.20) como:

$$||K *_{\Delta} K|| \xrightarrow{i} ||K*K|| \xrightarrow{\psi} ||K|| * ||K|| \xrightarrow{||f^{*2}||} ||\mathbb{R}^d *_{\Delta} \mathbb{R}^d|| \,. \tag{5.21}$$

Logo,

$$||f^{*2}|| \circ \psi \circ i : ||K *_{\Delta} K|| \longrightarrow ||\mathbb{R} *_{\Delta} \mathbb{R}^d|| \text{ é uma } \mathbb{Z}_2 \text{ aplicação.} \tag{5.22}$$

Como $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathbb{R}^d *_{\Delta} \mathbb{R}^d||) \leq d$, pelo Lema 5.1.6, segue que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_{\Delta} K||) \leq d$, o que contraria a hipótese. □

Teorema 5.1.10 (Teorema de Radon)**.** (BAJMÓCZY; BÁRÁNY, 1979) Para qualquer função contínua $f : ||\sigma^{d+1}|| \to \mathbb{R}^d$, existem duas faces τ_1, τ_2 de σ^{d+1} tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap f(||\tau_2||) \neq \emptyset. \tag{5.23}$$

Demonstração. Claramente, o complexo simplicial $K = \mathscr{P}([2d+2]) = \{\tau\ ;\ \tau \subset [2d+3]\}$ é isomorfo ao complexo simplicial σ^{d+1}.

Assim, pelo Lema 5.1.7, temos:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\sigma^{d+1} *_\Delta \sigma^{d+1}||) = \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_\Delta K||) = d+1 > d. \tag{5.24}$$

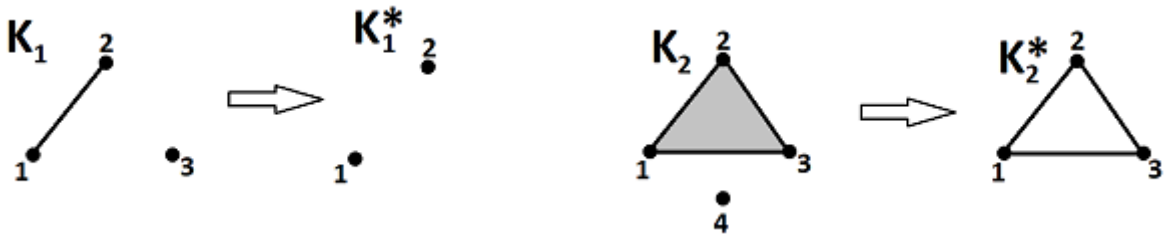
Portanto, pela Proposição 5.1.9 o Teorema segue. □

Definição 5.1.11 (*Dual combinatorial de Alexander*)**.** Seja $K \subset \mathscr{P}([n])$ um subcomplexo próprio. O *dual combinatorial de Alexander* K^* *de* K é dado pelos complementares de subconjuntos que não são faces de K, isto é:

$$K^* = \{\tau \subset [n]\ ;\ [n] \setminus \tau \notin K\}. \tag{5.25}$$

Exemplo 5.1.12. Tomando $K_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}\}$ e $K_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{4\}\}$, temos $K_1^* = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ e $K_2^* = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ como vemos na Figura 63.

Figura 63 – Exemplos da definição de dual combinatorial de Alexander.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lema 5.1.13. ((LONGUEVILLE, 2012), Lemma 4.12, pg. 102) Para qualquer subcomplexo próprio $K \subset \mathscr{P}([n])$, temos:

$$\{t_0 \subset t_1 \subset \cdots \subset t_l\} \in \mathrm{sd}(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\}) \tag{5.26}$$

se, e somente se,

$$\{[n] \setminus t_l \subset [n] \setminus t_{l-1} \subset \cdots \subset [n] \setminus t_0\} \text{ é disjunto de } \mathrm{sd}(K) \subset \mathrm{sd}(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\}). \tag{5.27}$$

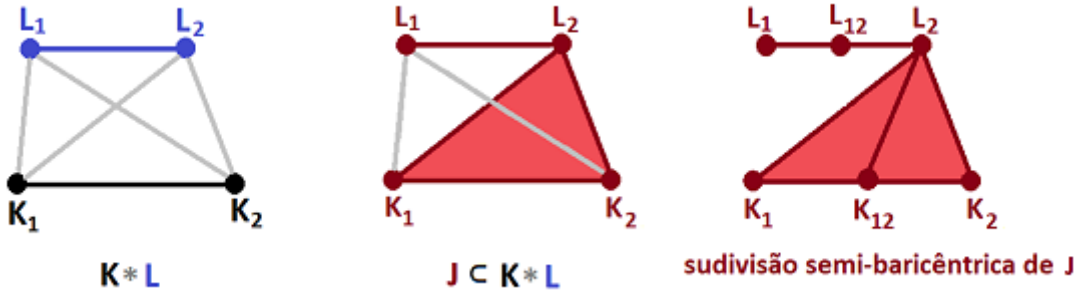
Lema 5.1.14. ((LONGUEVILLE, 2012), Lemma 4.13, pg. 103) Sejam $K \subset \mathscr{P}([n])$ e $L \subset \mathscr{P}([m])$ dois complexos simpliciais abstratos, e seja J um subcomplexo do *join* $K * L$. Então, J e o complexo simplicial abstrato dado por:

$$\{s * t\ ;\ s \in \mathrm{sd}(\mathscr{P}(\sigma)), t \in \mathrm{sd}(\mathscr{P}(\tau)), \sigma * \tau \in J\} \subset \mathrm{sd}(K) * \mathrm{sd}(L), \tag{5.28}$$

possuem a mesma realização geométrica.

O complexo de (5.28) é chamado a *subdivisão semi-baricêntrica de* J *com respeito a* $K * L$.

Figura 64 – Ilustração do Lema 5.1.14.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 5.1.15 (*Esfera de Bier*)**.** Dado um subcomplexo $K \subset \mathscr{P}([n])$, definimos a *esfera de Bier*: $\mathrm{Bier}_n(K)$, como o *join* deletado de K com seu dual combinatorial de Alexander, isto é:

$$\mathrm{Bier}_n(K) = K *_\Delta K^* = \{\sigma * \tau \; ; \; \sigma \in K \; , \; \tau \in K^* \; , \; \sigma \cap \tau = \emptyset\}. \tag{5.29}$$

Proposição 5.1.16. Dado um subcomplexo $K \subset \mathscr{P}([n])$, a realização geométrica de sua esfera de Bier, $||\mathrm{Bier}_n(K)||$ é uma $(n-2)$-esfera. Mais precisamente, a subdivisão semi-baricêntrica de $\mathrm{Bier}_n(K)$ com respeito a $K * K^*$ é isomorfa a $\mathrm{sd}(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\})$, isto é, a subdivisão semi-baricêntrica da fronteira do $(n-1)$- dimensional simplexo.

Demonstração. A subdivisão semi-baricêntrica de $\mathrm{Bier}_n(K) = K *_\Delta K^*$ com respeito a $K * K^*$ dada pelo Lema 5.1.14 é o complexo J, onde:

$$J = \{s * t \; ; \; s \in \mathrm{sd}(\mathscr{P}(\sigma)) \; , t \in \mathrm{sd}(\mathscr{P}(\tau)) \; , \; \sigma * \tau \in \mathrm{Bier}_n(K) = K *_\Delta K^*\} \subset \mathrm{sd}(K) * \mathrm{sd}(K^*).$$

Logo, J é da forma:

$$J = \{(s_1 \subset \ldots \subset s_k) * (t_1 \subset \ldots \subset t_l) \; ; \; \emptyset \neq s_i \subset \sigma \; , \; \emptyset \neq t_j \subset \tau \; , \; \sigma \in K \; , \; [n] \setminus \tau \notin K \; , \; \sigma \subset [n] \setminus \tau\}.$$

Temos J isomorfo a complexo simplicial sd $(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\})$, via o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : J &\longrightarrow \mathrm{sd}(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\}) \\ (s_1 \subset \ldots \subset s_k) * (t_1 \subset \ldots \subset t_l) &\longmapsto (s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset [n] \setminus t_l \subset \ldots \subset [n] \setminus t_1) \end{aligned} \tag{5.30}$$

A aplicação φ é bem definida e injetiva, pois $s_k \subset \sigma \subset [n] \setminus \tau \subset [n] \setminus t_l \subset [n]$. Também é injetora, pois dado $u_1 \subset \ldots \subset u_m \in \mathrm{sd}(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\})$, defina:

$$u_0 = \emptyset \text{ e } u_{m+1} = [n], \text{ e } k \geq 0 \text{ o maior inteiro tal que } u_k \in K. \tag{5.31}$$

Então, podemos definir $\sigma = u_k \in K$ e $\tau = [n] \setminus u_{k+1} \notin K^*$, pois $[n] \setminus \tau = u_{k+1} \notin K$. Defina $s_1 = u_1$, ..., $s_k = u_k$ e $t_1 = [n] \setminus u_m$, ..., $t_{m-k} = [n] \setminus u_{k+1}$, e temos:

$$(s_1 \subset \ldots \subset s_k) * (t_1 \subset \ldots \subset t_l) \in J, \tag{5.32}$$

onde

$$\varphi((s_1 \subset \ldots \subset s_k) * (t_1 \subset \ldots \subset t_l)) = u_1 \subset \ldots \subset u_m. \tag{5.33}$$

Assim, como J e $\mathrm{sd}(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\})$ são isomorfos como complexos simpliciais, $||J||$ é homeomorfo a $||\mathrm{sd}(\mathscr{P}([n]) \setminus \{[n]\})||$, logo:

$$||\mathrm{Bier}_n(K)|| \text{ e } S^{n-2} \text{ são homeomorfos.} \tag{5.34}$$

□

Teorema 5.1.17 (*Teorema de Van-Kampen-Flores*)**.** Seja $K = (\sigma^{2d+2})^{\leq d}$, isto é:

$$K = \{\sigma \; ; \; \sigma \subset [2d+3] \; , \; |\sigma| \leq d+1\}. \tag{5.35}$$

Não existe um mergulho de $||K||$ em $\mathbb{R}^{2d}$, isto é, para qualquer função contínua

$$f : ||K|| \to \mathbb{R}^{2d}, \tag{5.36}$$

a imagem de dois simplexos disjuntos se intersecta.

Demonstração. Pela Proposição 5.1.9, basta mostrar que $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_\Delta K||) > 2d$. Vamos utilizar a esfera de Bier de K para mostrar este fato.

Vamos calcular o dual combinatorial de Alexander K^* :

$$\begin{aligned} K^* \overset{def}{=} \{\tau \subset [2d+3] \; , \; [2d+3] \setminus \tau \notin K\} = \\ \{\tau \subset [2d+3] \; , \; |[2d+3] \setminus \tau| \geq d+2\} = \\ \{\tau \subset [2d+3] \; , \; |[\tau| \leq d+1\} = K. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Assim,

$$K *_\Delta K = K *_\Delta K^* = \mathrm{Bier}_{2d+3}(K).$$

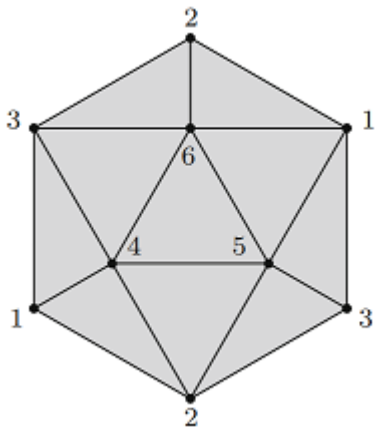
Pela Proposição 5.1.16, temos $||\mathrm{Bier}_{2d+3}(K)||$ homeomorfo a S^{2d+1}, logo:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||\mathrm{Bier}_{2d+3}(K)||) = \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^{2d+1}) = 2d+1. \tag{5.38}$$

Logo, $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_\Delta K||) = 2d+1 > 2d$, como queríamos demonstrar. □

Para finalizar a seção, como aplicação do conceito de esferas de Bier, vamos demonstrar que o plano projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ não pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^3$.

Figura 65 – Triangulação do plano projetivo com seis vértices.



Fonte: Longueville (2012, pg.105).

Exemplo 5.1.18. Tome o complexo simplicial abstrato $K \subset \mathscr{P}([6])$ dado pelos simplexos:

$$\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,5,6\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{3,4,6\},\{4,5,6\}$$

e suas faces.

A realização geométrica do poliedro $||K||$ (como mostra a Figura 65) é homeomorfa ao plano projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

Vamos analisar o dual combinatorial de Alexander K^*.

Note que K possui todas as arestas, isto é, $\binom{[6]}{2} \subset K$, assim como K^* também possui todas, pois K não contém nenhum simplexo de cardinalidade quatro. Quanto aos simplexos de cardinalidade três, uma simples verificação nos mostra que $\sigma \in K$ se, e somente se, $[6] \setminus \sigma \notin K$ para todo $\sigma \in \binom{[6]}{3}$. Apartir dessas informações, temos que $K = K^*$.

Logo,

$$K *_\Delta K = K *_\Delta K^* = \mathrm{Bier}_6(K). \tag{5.39}$$

Pela Proposição 5.1.16, temos que $||\mathrm{Bier}_6(K)||$ é homeomorfo a S^4, e por (5.39) temos $||K *_\Delta K||$ homeomorfo a $||\mathrm{Bier}_6(K)||$. Logo, $||K *_\Delta K||$ é homeomorfo a S^4 e segue que:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(||K *_\Delta K||) = \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^4) = 4. \tag{5.40}$$

Portanto, pela Proposição 5.1.9 e (5.40), segue que $||K|| = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ não pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^3$.

5.2 Teorema Topológico de Tveberg

A seguir, enunciamos a Conjectura Topológica de Tveberg, proposta pelo matemático norueguês Helge Tveberg em 1966.

Conjectura 5.2.1 (Conjectura Topológica de Tveberg)**.** Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros e $N = (d+1)(r-1)$. Para cada aplicação contínua $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$, existem r faces disjuntas $F_1, F_2, ..., F_r$ de σ^N tais que:

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap ... \cap f(||F_r||) \neq \emptyset. \tag{5.41}$$

Note que, para o caso $r = 2$, a conjectura se resume ao Teorema de Radon (Teorema 5.1.10), o qual foi provado por Bajmóczy e Barány em 1979 (BAJMÓCZY; BÁRÁNY, 1979). O caso em que r é um número primo foi provado por Barány, Schlosman e Szücs em 1981 (BÁRÁNY; SHLOSMAN; SZÜCS, 1981); já quando r é uma potência de primo, Volovikov (VOLOVIKOV, 1996b) e Özadin (ÖZADIN, 1987) exibiram demonstrações de forma independente. A conjectura permaneceu em aberto para r qualquer até 2015, quando Florian Frick mostrou que esta não é válida para o caso geral (FRICK, 2015).

A Conjectura Topológica de Tveberg (Conjectura 5.2.1) considerando r uma potência de primo, demonstrada por Volovikov e Özadin, será o resultado principal a ser demonstrado nesta seção, o qual será chamado Teorema Topológico de Tveberg. Esta seção foi baseada em (LONGUEVILLE, 2012).

Teorema 5.2.2 (Teorema Topológico de Tveberg)**.** Sejam $d \geq 1$, $q = p^r$ uma potência de primo e $N = (d+1)(q-1)$. Dada uma função contínua $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ qualquer, existem q faces de σ^N, $\tau_1, ..., \tau_q$ duas a duas disjuntas tais que suas imagens se intersectam, isto é:

$$f(||\tau_1||) \cap ... \cap f(||\tau_q||) \neq \emptyset. \tag{5.42}$$

Definição 5.2.3 (*Join* deletado de k folhas)**.** Seja K um complexo simplicial abstrato. O *join deletado de k folhas de K*, denotado por K_Δ^{*q} é definido por:

$$K_\Delta^{*q} = \{\tau_1 \uplus ... \uplus \tau_q \; ; \; \tau_1, ..., \tau_q \in K, \; \forall i, j \in [q] \text{ temos que } \tau_i \cap \tau_j = \emptyset\}. \tag{5.43}$$

Estaremos interessados no caso $K = \Theta_q$, onde Θ_q é o complexo simplicial com q vértices, isto é,

$$\Theta_q = \{\emptyset, \{s_1\}, ..., \{s_q\}\}. \tag{5.44}$$

Lema 5.2.4. Sejam $q \geq 1$, $N \geq 0$ e $K = \mathscr{P}([N+1])$. Temos :

$$K_\Delta^{*q} \simeq (\Theta_q)^{*(N+1).} \tag{5.45}$$

Demonstração. Basta tomar o isomorfismo:

$$\varphi : K_\Delta^{*q} \to (\Theta_q)^{*(N+1)} \tag{5.46}$$

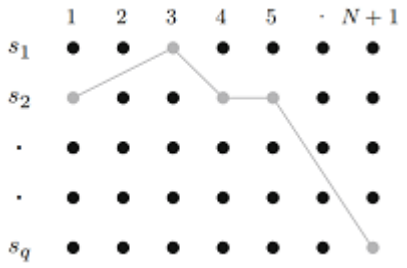
$$\tau_1 \uplus ... \uplus \tau_q \mapsto \sigma_1 \uplus ... \uplus \sigma_{N+1}, \tag{5.47}$$

onde, para todo $i \in [N+1]$, definimos:

$$\sigma_i = \begin{cases} \{s_j\}, & \text{se} \quad i \in \tau_j, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que σ_i está bem definido, pois como $\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q \in K_\Delta^{*q}$, cada $i \in [N+1]$ pode pertencer a no máximo um τ_j, logo $\sigma_i = \{s_j\}$, se $i \in \tau_j$, para algum $j \in [N+1]$, ou $\sigma_i = \emptyset$, caso contrário.

Figura 66 – Ilustração do isomorfismo $\mathrm{K}_\Delta^{*q} \simeq (\Theta_q)^{*(N+1)}$.



Fonte: Longueville (2012, pg.108).

A Figura 66 ilustra o isomorfismo φ. Note que para $\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q$ onde $\tau_1 = \{3\}, \tau_2 = \{1,4,5\}, \tau_q = \{N+1\}$ e $\tau_i = \emptyset$, para os τ_i's restantes, temos $\varphi(\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q) = \sigma_1 \uplus \ldots \uplus \sigma_{N+1}$, onde $\sigma_1 = \sigma_4 = \sigma_5 = \{s_2\}$, $\sigma_3 = \{s_1\}$, $\sigma_{N+1} = \{s_q\}$ e $\sigma_i = \emptyset$, para os σ_i's restantes.

Claramente, φ é aplicação simplicial, pois dado $\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q \in K_\Delta^{*q}$ temos $\varphi(\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q) = \sigma_1 \uplus \ldots \uplus \sigma_{N+1} \in (\Theta_q)^{*(N+1)}$, pois $\sigma_1 \uplus \ldots \uplus \sigma_{N+1} \in (\Theta_q)^{*(N+1)}$, para quaisquer $\sigma_1, \ldots, \sigma_{N+1} \in \Theta_q$.

A aplicação φ é injetora: suponha $\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q \neq \tau_1' \uplus \ldots \uplus \tau_q'$ simplexos distintos em K_Δ^{*q}. Por definição, existe $j \in [q]$ tal que $\tau_j \neq \tau_j'$, assim existe $k \in [N+1]$ tal que podemos supor, sem perda de generalidade, $k \in \tau_j$ e $k \notin \tau_j'$. Portanto, $\sigma_k = \{s_j\}$ e $\sigma_k' \neq \{s_j\}$. Logo, $\varphi(\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q) \neq \varphi(\tau_1' \uplus \ldots \uplus \tau_q')$.

A aplicação φ é sobrejetora: dado $\sigma_1 \uplus \ldots \uplus \sigma_{N+1} \in (\Theta_q)^{*(N+1)}$, defina, para todo $i \in [q]$:

$$\tau_i = \{k \,;\, \{s_i\} = \sigma_k\} \subset [N+1]. \tag{5.48}$$

Temos $\varphi(\tau_1 \uplus \ldots \uplus \tau_q) = \sigma_1 \uplus \ldots \uplus \sigma_{N+1}$. □

Teorema 5.2.5 (Teorema de Cayley)**.** Seja G um grupo. Então, existe um subgrupo de $\mathrm{Sym}(G) = \{f : G \to G \,;\, f \text{ é bijeção}\}$ que é isomorfo a G.

Demonstração. Tome o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathrm{Sym}(G) \\ g &\mapsto f_g : G \to G, \end{aligned} \tag{5.49}$$

onde $f_g : G \to G$ é definida por $f_g(x) = gx$, $\forall x \in G$.

φ é homomorfismo, pois dados $g, h \in G$, $\forall x \in G$ temos:

$$[\varphi(gh)](x) = (gh)x = g(hx) = \varphi_g(hx) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = [\varphi_g \circ \varphi_h](x). \tag{5.50}$$

Logo,

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h), \quad \forall g, h \in G. \tag{5.51}$$

Afirmação: $\varphi(G)$ é subgrupo de G.

Prova da Afirmação: Temos $\varphi(G) = \{f_g : G \to G \; ; \; g \in G\}$.

Dados $g, h \in G$, temos $f_g \circ f_h = f_{gh}$ e $(f_g)^{-1} = f_{g^{-1}}$, logo a operação $\circ$ é fechada em $\varphi(G)$ e existe o elemento inverso, para todo elemento em $\varphi(G)$. Logo $\varphi(G)$ é subgrupo de $\mathrm{Sym}(G)$.

Se provarmos que φ é injetora, teremos que G e $\varphi(G)$ serão isomorfos, portanto $\varphi(G)$ será um subgrupo de $\mathrm{Sym}(G)$ isomorfo a G.

De fato, φ é injetora. Suponha $g, h \in G$ tais que $g \neq h$, logo $\varphi(g) = f_g \neq f_h = \varphi(h)$, pois:

$$f_g(1_G) = g1_G = g \neq h = h1_G = f_h(1_G). \tag{5.52}$$

□

Proposição 5.2.6. Seja $\mathbb{E} \subset M_{m\times n}(\mathbb{R})$ subespaço vetorial das matrizes $m \times n$ cuja soma das entradas em cada linha é nula, isto é:

$$\mathbb{E} = \left\{ (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \; ; \; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \text{ para todo } i = 1, ..., m \right\}. \tag{5.53}$$

Seja $\mathbb{E}' \subset M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o subespaço vetorial das matrizes cujas linhas têm entradas constantes, isto é:

$$\mathbb{E}' = \left\{ (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \; ; \; a_{i1} = \cdots = a_{in}, \text{ para todo } i = 1, ..., m \right\}. \tag{5.54}$$

Temos:

(1) $\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}' = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(2) $\mathbb{E} = \mathbb{E}'^{\perp}$, onde o produto interno de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é o usual:

$$\langle A, B \rangle_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(AB^t) = \sum_{i=1}^{m} (AB^t)_{ii} \text{ , para quaisquer } A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

(3) $\dim \mathbb{E} = m(n-1)$ e $\dim \mathbb{E}' = m$.

Demonstração. (1) Basta mostrar que $\mathbb{E}+\mathbb{E}' = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{E}\cap\mathbb{E}' = 0$.

Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Para cada $i \in [m]$, defina:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{e} \quad c_i = \frac{s_i}{n}. \tag{5.55}$$

Agora definimos as matrizes $B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ por:

$$\begin{aligned} B = (b_{ij}) \ \text{ tal que } \ b_{ij} = a_{ij} - c_i \ ; \\ C = (c_{ij}) \ \text{ tal que } \ c_{ij} = c_i. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Note que $B \in \mathbb{E}$, pois para cada $i \in [m]$, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - c_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} c_i = s_i - n\, c_i = s_i - n\left(\frac{s_i}{n}\right) = s_i - s_i = 0. \tag{5.57}$$

Note ainda que que $C \in \mathbb{E}'$, pois:

$$c_{i1} = c_{i2} = \cdots = c_{in} = c_i \ , \ i = 1, 2, ..., m. \tag{5.58}$$

Finalmente, temos $A = B + C$, pois:

$$(b_{ij}) + (c_{ij}) = (a_{ij} - c_i) + (c_i) = (a_{ij}). \tag{5.59}$$

Como $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ foi tomado de maneira arbitrária, temos que $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{E}+\mathbb{E}'$ e como a inclusão $\mathbb{E}+\mathbb{E}' \subset M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é imediata, segue que $\mathbb{E}+\mathbb{E}' = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Seja $M = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $M \in \mathbb{E}\cap\mathbb{E}'$.

Para cada $i \in [m]$, devemos ter:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \ , \text{ pois } M = (a_{ij}) \in \mathbb{E}; \\ a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} \ , \text{ pois } M = (a_{ij}) \in \mathbb{E}'. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Seja a_{ij} uma entrada qualquer de M. De (5.60) temos que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0$ e de (5.60) temos que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = n\, a_{ij}$, logo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = n\, a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0. \tag{5.61}$$

Logo, $M = (a_{ij}) = 0$. Portanto, $\mathbb{E}\cap\mathbb{E}' = 0$.

(2) Devemos mostrar que:

$$\mathbb{E}'^{\perp} = \{A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})\ ;\ \langle A,B\rangle_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(AB^t) = 0\ ,\ \text{para todo } B \in \mathbb{E}'\} = \mathbb{E}. \tag{5.62}$$

Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathbb{E}'$, isto é, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ são quaisquer e $b_{i1} = b_{i2} = \cdots = b_{in} = b_i$, para todo $i = 1,...,m$. Assim, podemos visualizar A e B^t como em (5.63).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B^t = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_i & \dots & b_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_i & \dots & b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_i & \dots & b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_i & \dots & b_m \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

Para cada $i \in [m]$, temos:

$$(AB^t)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_i = b_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right). \tag{5.64}$$

Logo:

$$\langle A,B\rangle_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(AB^t) = \sum_{i=1}^{m}(AB^t)_{ii} \overset{(5.64)}{=} \sum_{i=1}^{m}\left(b_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)\right). \tag{5.65}$$

Temos $\mathbb{E}'^{\perp} \subset \mathbb{E}$. De fato, dado $A = (a_{ij}) \in \mathbb{E}'^{\perp}$, para cada $k \in [m]$, temos $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$, pois tomando $B \in \mathbb{E}'$ onde $b_k = 1$ e $b_j = 0$, para $j \neq k$, devemos ter $\langle A,B\rangle_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(AB^t) = 0$, isto é:

$$\begin{aligned} \langle A,B\rangle_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = 0 \Rightarrow \langle A,B\rangle_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(AB^t) \overset{(5.65)}{=} \sum_{i=1}^{m}\left(b_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)\right) = \\ b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 0. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Logo, por definição de $\mathbb{E}$, temos que $A \in \mathbb{E}$ e como $A \in \mathbb{E}'^{\perp}$ foi tomado de maneira arbitrária, segue a inclusão desejada.

Temos $\mathbb{E} \subset \mathbb{E}'^{\perp}$. De fato, para cada $k \in [m]$, por definição:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 0. \tag{5.67}$$

Logo, para $B \in \mathbb{E}'$ temos:

$$\langle A,B\rangle_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} \overset{(5.65)}{=} \sum_{i=1}^{m}\left(b_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i.0 = 0. \tag{5.68}$$

Portanto $A \in \mathbb{E}'^{\perp}$ e, como $A \in \mathbb{E}$ foi tomado arbitrário, a inclusão segue.

(3) De fato, $\dim \mathbb{E}' = n$, pois uma base para $\mathbb{E}'$ é dada por $\{A_1, ..., A_n\}$, onde:

$$A_k = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.69}$$

Assim, $\dim \mathbb{E}' = n$.

Como $\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}' = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, temos:

$$\dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{E}' = \dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim \mathbb{E} + n = mn \Rightarrow \dim \mathbb{E} = m(n-1). \tag{5.70}$$

□

Definição 5.2.7 (G-espaço $||E_N G||$)**.** Seja G um grupo finito. Considere G como um 0- dimensional complexo simplicial, isto é, $G \simeq \Theta_{|G|}$. Dado $N \geq 1$ um inteiro, defina o complexo simplicial de $(N+1)$ folhas $E_N G$ por:

$$E_N G = \underbrace{G * G * ... * G}_{N+1}. \tag{5.71}$$

O poliedro de $||E_N G||$ é dado por:

$$||E_N G|| = \left\{ (g_0 t_0, ..., g_N t_N) \; ; \; \sum_{i=0}^{N} t_i = 1 \; , \; g_i \in G \; , \; t_i \geq 0 \; , \; i = 0, 1, ..., N \right\}. \tag{5.72}$$

O poliedro $||E_N G||$ é um G-espaço compacto munido da G- ação dada por:

$$g(h_0 t_0, ..., h_N t_N) = ((g_0 h_0) t_0, ..., (g_N h_N) t_N) \; , \forall g \in G \text{ e } \forall (h_0 t_0, ..., h_N t_N) \in ||E_N G||. \tag{5.73}$$

Exemplo 5.2.8. Sejam $N \geq 0$ e $G = \mathbb{Z}_2$. Então:

$$E_N \mathbb{Z}_2 = \underbrace{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * ... * \mathbb{Z}_2}_{N+1} = \{\sigma_1 \uplus ... \uplus \sigma_{N+1} \; ; \text{ onde } \sigma_i = \{+s_i\} \text{ ou } \{-s_i\} \text{ ou } \emptyset \; , \forall i \in [N+1]\},$$

onde consideramos o i-ésimo fator $\mathbb{Z}_2$ de $E_N \mathbb{Z}_2$ como $\{\{+s_i\}, \{-s_i\}, \emptyset\}$, onde $\{+s_i\}$ e $\{-s_i\}$ representam $+1$ e -1 em $\mathbb{Z}_2$, para $i = 0, 1, ..., N+1$.

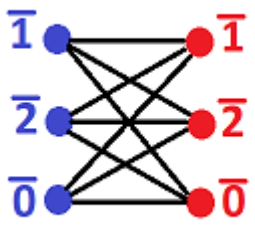
Temos o isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : E_N \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \{A \in \mathscr{P}(S) \; ; \; \nexists \, i \in [N+1] \text{ tal que } \{+i, -i\} \subset A\} \overset{def}{=} \Diamond^N \\ \sigma_1 \uplus ... \uplus \sigma_{N+1} &\longmapsto \{+i \; ; \; \sigma_i = \{+s_i\}\} \sqcup \{-i \; ; \; \sigma_i = \{-s_i\}\}, \end{aligned} \tag{5.74}$$

onde $S = \{+1, -1, ..., +(N+1), -(N+1)\}$.

Logo, $||E_N \mathbb{Z}_2||$ é homeomorfo a $||\Diamond^N||$ e, portanto, homeomorfo a S^N.

Figura 67 – $||E_1\mathbb{Z}_3|| = ||\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3|| = ||K_{3,3}||$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 5.2.9. Tome $G = \mathbb{Z}_3$ e $N = 1$, temos $E_1\mathbb{Z}_3$ é isomorfo ao grafo bipartido $K_{3,3}$.

Logo, $||E_1\mathbb{Z}_3|| = ||\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3|| = ||K_{3,3}||$ e, pelo Teorema de Kuratowski (Teorema 4.1.29) temos que $||E_1\mathbb{Z}_3||$ não pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^2$.

Definição 5.2.10 (Propriedade Borsuk-Ulam para grupos)**.** Seja G um grupo. Dizemos que o grupo G tem a *propriedade Borsuk-Ulam* se para qualquer $N \geq 1$, dado um G-espaço $\mathbb{V}$, o qual é um N- dimensional espaço vetorial real normado satisfazendo as condições:

(1) A G-ação preserva a norma, isto é, $||gx|| = ||x||$, $\forall g \in G$, $\forall x \in \mathbb{V}$;
(2) $\mathbb{V}^G = \{x \in \mathbb{V}\ ;\ gx = x\ ,\ \forall g \in G\} = \{0\}$. ,

temos que toda G-aplicação:

$$f : ||E_N G|| \to \mathbb{V} \tag{5.75}$$

possui um zero, isto é,

$$\exists\, x \in ||E_N G|| \text{ tal que } f(x) = 0. \tag{5.76}$$

Teorema 5.2.11 ((ÖZADIN, 1987), (VOLOVIKOV, 1996a), (SARKARIA, 2000))**.** Sejam $p \geq 2$ um primo e $r \geq 1$. O grupo $G = (\mathbb{Z}_p)^r$ tem a propriedade Borsuk-Ulam.

Demonstração do Teorema de Tveberg (Teorema 5.2.2). Considere o d-dimensional subespaço real afim:

$$\mathbb{A}^d = \{(x_1, ..., x_{d+1})^t \in \mathbb{R}^{d+1}\ ;\ x_1 + ... + x_{d+1} = 1\}, \tag{5.77}$$

o qual é homeomorfo a $\mathbb{R}^d$.

Sem perda de generalidade podemos supor:

$$f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{A}^d. \tag{5.78}$$

A partir de f podemos induzir a aplicação:

$$\begin{aligned} \overline{f} : ||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}|| &\to \mathbb{R}^{(d+1)\times q} \simeq M_{(d+1)\times q}(\mathbb{R}) \\ (t_1x_1,...,t_qx_q) &\longmapsto (\ t_1f(x_1)\ ,\ ...\ ,\ t_qf(x_q)\ ) \in (\mathbb{A}^d)^q \subset M_{(d+1)\times q}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5.79}$$

Isto é, $\overline{f}$ leva cada ponto de $||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}||$ em uma matriz de q colunas, cada uma sendo um vetor de $\mathbb{A}^d$.

A função $\overline{f}$ é uma Sym (q)-aplicação,onde $q = p^r$, p primo, considerando a Sym (q)-ação como as permutações entre as q entradas de $||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}||$ e as q colunas de $M_{(d+1)\times q}(\mathbb{R})$, isto é, dado $\sigma \in \text{Sym}(q)$, temos:

$$\sigma(t_1x_1,...,t_qx_q) = (t_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(q)}x_{\sigma(q)}) \text{ em } ||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}||; \tag{5.80}$$

$$\sigma(\ y_1,\ ...\ ,\ y_q\ ) = (\ y_{\sigma(1)},\ ...\ ,\ y_{\sigma(q)}\ ) \text{ em } M_{(d+1)\times q}(\mathbb{R}). \tag{5.81}$$

Logo, $\forall (t_1x_1,...,t_qx_q) \in ||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}||$ e $\sigma \in$ Sym (q) temos:

$$\begin{aligned} \overline{f}(\sigma(t_1x_1,...,t_qx_q)) = \overline{f}((t_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(q)}x_{\sigma(q)})) &= (\ t_{\sigma(1)}f(x_{\sigma(1)})\ ,\ ...\ ,\ t_{\sigma(q)}f(x_{\sigma(q)})\ ) \\ &= \sigma(\ t_1f(x_1)\ ,\ ...\ ,\ t_qf(x_q)\ ) = \sigma(\ \overline{f}(t_1x_1,...,t_qx_q)\ ). \end{aligned} \tag{5.82}$$

Portanto, $\overline{f}$ é uma Sym (q)-aplicação, com $q = p^r$, p primo.

Pelo Teorema de Cayley (Teorema 5.2.5), existe um subgrupo G de Sym (q) tal que G é isomorfo a $(\mathbb{Z}_p)^r$, pois $|(\mathbb{Z}_p)^r| = p^r = q$, p primo.

Como $\overline{f}$ é Sym (q)-aplicação, segue que $\overline{f}$ é uma G-aplicação.

Podemos identificar os elementos de G através da bijeção:

$$\varphi : G \to [q]\ , \tag{5.83}$$

onde podemos , sem perda de generalidade, que $\varphi(1_G) = 1$.

O grupo Sym (q) preserva a norma em $||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}||$, logo como G é subgrupo de Sym (q), segue que G preserva a norma em $||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}||$. De fato, Sym (q) preserva a norma, pois apenas troca colunas de posições e as entradas da matriz apenas trocam de lugar. Assim, a norma:

$$M = (a_{ij}) \Rightarrow ||M|| = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{d+1}(a_{ij})^2 \tag{5.84}$$

e a ação de Sym (q) não é alterada pela Sym(q)-ação.

Vamos provar agora que $\mathbb{E}^G = \{0\}$.

O subgrupo G isomorfo a $(\mathbb{Z}_p)^r$ obtido através da demonstração do Teorema de Cayley (Teorema 5.2.5), pode ser identificado em Sym(q) utilizando a bijecão φ de (5.83), isto é, cada

$f_g : G \to G$, com $g \in G$ fixado, onde $f_g(x) = gx$, $\forall x \in G$ pode ser identificado em $\mathrm{Sym}(q)$ como:

$$\begin{aligned} f'_g : [q] &\longrightarrow [q] \\ y = \varphi(x) &\longmapsto \varphi(g\varphi^{-1}(y)) = \varphi(gx). \end{aligned} \tag{5.85}$$

Seja $y \in \mathbb{E}^G$, onde $y = (y_1, ..., y_q)$. Dado $i \in [q]$ qualquer, tome:

$$g = \varphi^{-1}(i). \tag{5.86}$$

Como $y \in \mathbb{E}^G$, por definição:

$$f'_g y = y. \tag{5.87}$$

Note que a coluna identificada com 1 troca com a coluna identificada com $\varphi(g\varphi^{-1}(1))$, logo, de (5.87), temos :

$$y_1 = y_{\varphi(g\varphi^{-1}(1))} \Rightarrow y_1 = y_{\varphi(g1_G)} = y_{\varphi(g)} \overset{(5.86)}{=} y_i. \tag{5.88}$$

Assim, como $i \in [q]$ foi tomado de forma arbitrária, temos:

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_q. \tag{5.89}$$

Temos $y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbb{E}$ e, pela definição de $\mathbb{E}$ (5.53), em todas as linhas da matriz y a somatória das entradas é nula. Assim, para todo $j \in [d+1]$ fixado:

$$\sum_{i=1}^{d+1} y_{ij} = 0 \overset{(5.89)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{d+1} y_{1j} = (d+1)y_{1j} = 0 \Rightarrow y_{1j} = 0. \tag{5.90}$$

Portanto, $y_{1j} = 0$, $\forall j \in [d+1]$ e, segue que $y_1 = 0$. Da igualdade (5.89) temos:

$$y = (y_1, ..., y_q) = (y_1, ..., y_1) = (0, ..., 0) = 0. \tag{5.91}$$

Defina a projeção ortogonal:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{(d+1)\times q} \overset{(5.2.6)}{=} \mathbb{E}' \oplus \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ x + y &\longmapsto y. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Como $\mathbb{E}' \oplus \mathbb{E} = \mathbb{R}^{(d+1)\times q}$ temos, da Proposição 5.2.6, que π está bem definida e, claramente, é uma G-aplicação (pois é $\mathrm{Sym}(q)$ - aplicação). Assim:

$$\pi \circ \overline{f} : ||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}|| \overset{(5.2.4)}{=} ||E_N G|| \longrightarrow \mathbb{E} \tag{5.93}$$

é uma G-aplicação.

Como G é isomorfo a $(\mathbb{Z}_p)^r$, segue pelo Teorema 5.2.11 que G tem a propriedade Borsuk-Ulam. Como $\mathbb{E}$ é tal que G preserva a norma em $||\mathscr{P}([N+1])^{*q}_{\Delta}||$ e $\mathbb{E}^G = \{0\}$, temos que a G-aplicação

$$\pi \circ \overline{f} : ||E_N G|| \longrightarrow \mathbb{E} \tag{5.94}$$

possui um zero $(t_1x_1, ..., t_qx_q) \in ||E_N G||$, isto é,

$$\pi \circ \overline{f}(t_1x_1, ..., t_qx_q) = 0. \tag{5.95}$$

Note que $\pi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{E}'$, isto é, o subespaço vetorial das matrizes com linhas constantes.

Temos $x_1 \in ||\tau_1||, ..., x_q \in ||\tau_q||$, onde $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$, $\forall i, j \in [q]$ são faces disjuntas duas a duas.

Como $\pi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{E}'$, segue que:

$$\overline{f}(t_1x_1, ..., t_qx_q) = (t_1 f(x_1)\ ,\ ...\ ,\ t_q f(x_q)) \in \mathbb{E}'. \tag{5.96}$$

Assim, pela definição de $\mathbb{E}'$ temos:

$$t_1 f(x_1) = \cdots = t_q f(x_q) \in \mathbb{A}^d. \tag{5.97}$$

Pela igualdade (5.97) é claro que as $(d+1)$- coordenadas em cada $t_i f(x_i) \in \mathbb{A}^d$ devem ser iguais e, pela definição de $\mathbb{A}^d$, (ver (5.77)) segue que a soma das $(d+1)$- coordenadas em $t_i f(x_i) \in \mathbb{A}^d$ é igual a t_i, para todo $i \in [q]$. Assim:

$$t_1 = \cdots = t_q. \tag{5.98}$$

Como $\sum_{i=1}^{q} t_i = 1$, segue de (5.98) que:

$$t_i = \frac{1}{d}\ \text{, para todo } i \in [q]. \tag{5.99}$$

Logo, das igualdades (5.97) e (5.98) segue que

$$\frac{1}{q} f(x_1) = \cdots = \frac{1}{q} f(x_q). \tag{5.100}$$

Portanto:

$$f(x_1) = \cdots = f(x_q), \tag{5.101}$$

onde $x_1 \in ||\tau_1||, ..., x_q \in ||\tau_q||$, com $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$, $\forall i, j \in [q]$ são faces disjuntas duas a duas.

Assim, $\tau_1, ..., \tau_q$ são q faces disjuntas de σ^N tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap ... \cap f(||\tau_q||) \neq \emptyset. \tag{5.102}$$

□

5.3 Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado

O Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado é uma versão do clássico Teorema de Van-Kampen-Flores. Ele foi provado, de forma independente, por Sarkaria (SARKARIA, 1991a) e Volovikov (VOLOVIKOV, 1996b)) A demonstração que será feita nesta seção é baseada no artigo (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014), o qual utiliza um novo método de subcomplexos inevitáveis, que juntamente com o Teorema Topológico de Tveberg (Teorema 5.2.2) fornecem uma prova relativamente simples para este Teorema.

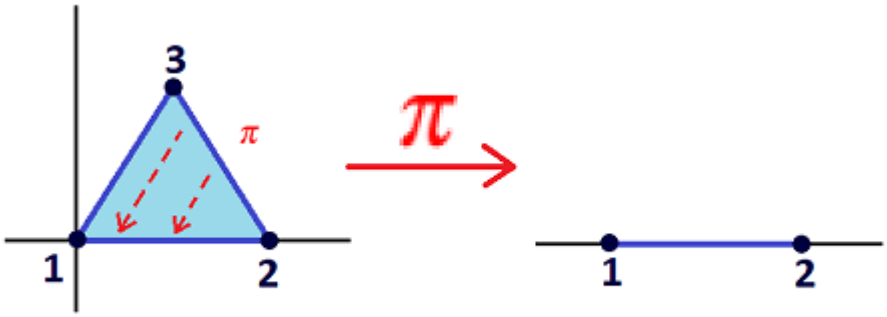
Definição 5.3.1 (r- partições de Tveberg)**.** Sejam $r \geq 2$, $d \geq 1$, $N \geq r-1$ inteiros e $f : ||\sigma_N|| \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua. Uma *r- partição de Tveberg* é um conjunto $\{\tau_1, ..., \tau_r\}$ de r faces de σ^N duas a duas disjuntas tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap ... \cap f(||\tau_r||) \neq \emptyset. \tag{5.103}$$

Definição 5.3.2 (Subcomplexos Tveberg inevitáveis para f)**.** Sejam $r \geq 2$, $d \geq 1$, $N \geq r-1$ inteiros e $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua que contém uma r- partição de Tveberg. Um subcomplexo $\Sigma \subset \sigma^N$ é *Tveberg inevitável para f* se: para toda r- partição de Tveberg $\{\tau_1, ..., \tau_r\}$ para f, existe pelo menos uma face $\tau_j \in \{\tau_1, ..., \tau_r\}$ tal que $\tau_j \in \Sigma$.

Exemplo 5.3.3. Seja $\pi : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ uma projeção a 60°, como ilustrado na Figura 68.

Figura 68 – Exemplo da definição de subcomplexos inevitáveis para uma função.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tome os subcomplexos $\Sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ e $\Sigma' = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}$.

As 2- partições de Tveberg para π são:

$$P_1 = \{\{2,3\}, \{1\}\}, \;\; P_2 = \{\{1,2\}, \{3\}\} \;\text{ e }\; P_3 = \{\{1\}, \{3\}\}. \tag{5.104}$$

Note que:

$$\{1\} \in P_1 \cap \Sigma, \;\; \{1,2\} \in P_2 \cap \Sigma \;\text{ e }\; \{1\} \in P_3 \cap \Sigma, \tag{5.105}$$

logo Σ é Tveberg inveitável para π.

Por outro lado, apesar de $\{3\} \in P_2 \cap \Sigma'$ e $\{3\} \in P_3 \cap \Sigma'$, temos que:

$$\{2,3\},\{1\} \notin \Sigma', \tag{5.106}$$

logo Σ' não é Tveberg inevitável para π, pois P_1 não contém nenhum simplexo de Σ'.

Lema 5.3.4. Sejam $r \geq 2$ uma potência de primo, $d \geq 1$ e $c \geq 0$ inteiros. Dados um inteiro $N \geq N_c = (r-1)(d+1+c)$ e funções contínuas $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ e $g : ||\Delta^N|| \to \mathbb{R}^c$, existem r pontos $x_1, ..., x_r$, onde $x_i \in \tau_i$, para $i = 1, ..., r$ e $\tau_1, ..., \tau_r$ são faces de σ^N duas a duas disjuntas, tais que:

$$f(x_1) = \cdots = f(x_r) \ \text{ e } \ g(x_1) = \cdots = g(x_r). \tag{5.107}$$

Demonstração. Inicialmente, vamos definir a função contínua:

$$\begin{aligned} h = (f,g) : ||\sigma^N|| &\to \mathbb{R}^{d+c} \\ x &\mapsto (f(x), g(x)). \end{aligned} \tag{5.108}$$

Temos $N \geq N_c = (r-1)(d+1+c) \geq (r-1)(d+1)$ e $r \geq 0$ potência de primo por hipótese.

Logo, podemos aplicar o Teorema Topológico de Tveberg (Teorema 5.2.2) para obter r faces de σ^N, $\tau_1, ..., \tau_r$, duas a duas disjuntas tais que:

$$h(||\tau_1||) \cap ... \cap h(||\tau_r||) \neq \emptyset, \tag{5.109}$$

o que significa que existem $x_1 \in ||\tau_1||, ..., x_r \in ||\tau_r||$ tais que:

$$h(x_1) = ... = h(x_r). \tag{5.110}$$

Logo:

$$(f(x_1), g(x_1)) = ... = (f(x_r), g(x_r)) \Longrightarrow f(x_1) = ... = f(x_r) \ \text{ e } \ g(x_1) = ... = g(x_r).$$

□

Lema 5.3.5. Sejam $r \geq 2$ uma potência de primo, $d \geq 1$ e $N \geq N_1 = (r-1)(d+2)$ inteiros. Tome $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ contínua e $\Sigma \subset \sigma^N$ um subcomplexo Tveberg inevitável para f.

Então, existem r faces de σ^N, $\tau_1, ..., \tau_r$, duas a duas disjuntas, todas contidas em Σ (isto é, $\tau_i \in \Sigma$, $i = 1, ..., r$) tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap ... \cap f(||\tau_r||) \neq \emptyset. \tag{5.111}$$

Demonstração. Como $||\Sigma|| \subset ||\sigma^N|| \subset \mathbb{R}^{N+1}$, dado um ponto $x \in ||\sigma^N||$, podemos calcular a distância de x a $||\Sigma||$, isto é,

$$\text{dist}\,(x, ||\Sigma||) = \inf\,\{\, ||x-y||\,;\, y \in ||\Sigma||\,\}. \tag{5.112}$$

Assim, podemos definir a função contínua:

$$\begin{aligned} g : ||\sigma^N|| &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{dist}\,(x, ||\Sigma||). \end{aligned} \tag{5.113}$$

Note que $g(x) = 0$ se, e somente se, $x \in ||\Sigma||$, pois $||\Sigma||$ é fechado.

Fixando $c = 1$, temos as hipóteses necessárias para aplicar o Lema 5.3.4 para as funções contínuas $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ e $g : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}$.

Assim, existem pontos $x_1 \in ||\tau_1||, ..., x_r \in ||\tau_r||$ tais que:

$$f(x_1) = \cdots = f(x_r) \;\text{ e }\; g(x_1) = \cdots = g(x_r), \tag{5.114}$$

onde $\tau_1, ..., \tau_r$ são r faces de σ^N, duas a duas disjuntas.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que para todo $i = 1, ..., r$, x_i está no interior relativo de $||\tau_i||$, caso contrário, basta substituir $||\tau_i||$ por $||\tau_i'||$ retirando-se os vértices necessários para que x_i esteja no interior relativo de $||\tau_i'||$.

Por hipótese, Σ é Tveberg inevitável para f, logo existe ao menos uma face $\tau_j \in \Sigma$.

Como $\tau_j \in \Sigma$ e $x_j \in ||\tau_j||$, segue que $x_j \in ||\Sigma||$, logo:

$$g(x_j) = \text{dist}\,(x_j, ||\Sigma||) = 0. \tag{5.115}$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned} g(x_1) = \cdots = g(x_j) = \cdots = g(x_r) \Longrightarrow g(x_1) = \cdots = 0 = \cdots = g(x_r) \Longrightarrow \\ g(x_1) = \cdots = g(x_r) = 0. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Logo, $x_1, ..., x_r \in ||\Sigma||$.

Para todo $i \in [r]$, como x_i está no interior relativo de $||\tau_i||$, temos $x_i = \sum_{k=1}^{m} t_k\, e_{i_k}$, onde $\{e_{i_1}, ..., e_{i_m}\} = V(\tau_i) \subset \{e_1, ..., e_{N+1}\}$, $t_k > 0$, $k = 1, ..., m$, $\sum_{k=1}^{m} t_k = 1$ e $m < N+1$.

Como $x_i \in ||\Sigma||$, existe $\tau \in \Sigma$ tal que $x_i \in ||\tau||$, logo $e_{i_1}, ..., e_{i_m} \in V(\tau)$, isto é, $V(\tau_i) \subset V(\tau)$. Portanto, τ_i é face de τ e como $\tau \in \Sigma$, segue que $\tau_i \in \Sigma$.

Assim, $\tau_1, ..., \tau_r \in \Sigma$ e $f(||\tau_1||) \cap ... \cap f(||\tau_r||) \neq \emptyset$, pois $f(x_1) = \cdots = f(x_r)$, onde $x_i \in ||\tau_i||$, para todo $i \in [r]$. $\square$

Lema 5.3.6. Sejam $d \geq 1$, $r \geq 2$ e $N \geq r-1$ inteiros. Tome $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua que possui uma r-partição de Tveberg. Se k é um inteiro tal que $r(k+2) > N+1$, então o k-esqueleto $(\sigma^N)^{\leq k}$ de σ^N é Tveberg inevitável para f.

Demonstração. Suponha que o k-esqueleto $(\sigma^N)^{\leq k}$ de σ^N não seja Tveberg inevitável para f. Desta forma, existe uma r-partição de Tveberg $\{\tau_1, ..., \tau_r\}$ tal que:

$$\tau_i \notin (\sigma^N)^{\leq k}, \forall i \in [r], \tag{5.117}$$

isto é,

$$\dim \sigma_i > k \text{ ou, equivalentemente, } |V(\tau_i)| > k+1. \tag{5.118}$$

Assim, devem existir r faces de σ^N, $\{\tau_1, ..., \tau_r\}$, duas a duas disjuntas, tais que $|V(\tau_i)| \geq k+2$.

Como $\tau_1, ..., \tau_r$ são disjuntas duas a duas, temos que $V(\tau_1), ..., V(\tau_r)$ são disjuntos dois a dois. Logo:

$$|\sqcup_{i=1}^r V(\tau_i)| \geq r(k+2) > N+1. \tag{5.119}$$

Porém, como $\sqcup_{i=1}^r V(\tau_i) \subset \sigma^N$, devemos ter:

$$|\sqcup_{i=1}^r V(\tau_i)| \leq N+1, \tag{5.120}$$

o que é uma contradição com (5.119). □

Teorema 5.3.7 (Teorema de Van-Kampen Flores generalizado)**.** Sejam $r \geq 2$ uma potência de primo, $d \geq 1$, $N \geq N_1 = (r-1)(d+2)$, e $k \geq \lceil \frac{r-1}{r} d \rceil$. Então, para qualquer função contínua $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$, existem r faces de σ^N, $\tau_1, ..., \tau_r$, duas a duas disjuntas, com $\dim \tau_i \leq k$, para todo $1 \leq i \leq r$, tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap ... \cap f(||\tau_r||) \neq \emptyset. \tag{5.121}$$

Observação 5.3.8. Para todo $x \in \mathbb{R}$, denotamos:

$$\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{Z} \,;\, n \geq x\}. \tag{5.122}$$

Demonstração. Podemos aplicar o Lema 5.3.6, pois:

$$\begin{aligned} r(k+2) \geq r\left(\lceil \tfrac{r-1}{r} d \rceil + 2\right) \geq r\left[\left(\tfrac{r-1}{r}\right) d + 2\right] = (r-1)d + 2r = \\ (r-1)d + 2(r-1) + 2 = (r-1)(d+2) + 2 = N_1 + 2 > N_1 + 1. \end{aligned} \tag{5.123}$$

Assim, $(\sigma^N)^{\leq k}$ é Tveberg inevitável para f.

Logo, pelo Lema 5.3.5 existem r faces $\tau_1, \ldots, \tau_r$ de $(\sigma^N)^{\leq k}$ tais que:

$$f(||\tau_1||) \cap \ldots \cap f(||\tau_r||) \neq \emptyset. \tag{5.124}$$

Portanto, $\tau_1, \ldots, \tau_r$ é a r-partição de Tveberg procurada, pois como $\tau_i \in (\sigma^N)^{\leq k}$, segue que $\dim \tau_i \leq k$, para todo $i \in [r]$. □

Observação 5.3.9. Note que substuituindo d por $2d$ e tomando $r = 2$ no Teorema de Van-Kampen-Flores generalizado (Teorema 5.3.7), obtemos o Teorema de Van-Kampen-Flores (Teorema 5.1.17).

ÍNDICE

$G[A_1,A_2]$, 126
$G[A_1,A_2]$ é completo, 126
$\mathbb{Z}_2$ -aplicação, 125
$\mathbb{Z}_2$-espaço livre dado pelo (duplo) *join* deletado de X, 131
$\mathbb{Z}_2$-*espaço*, 125
σ-álgebra, 74
σ-álgebra $\mathscr{L}$, 75
σ-álgebra de Borel, 74
d- dimensional crosspolytope, 35
k-conexo, 129
k-simplexo, 28
m-colorável, 99
m-coloração de um hipergrafo, 99
n- *join*, 47
n-coloração de um grafo, 93
p-simplexo padrão, 28
r- partição de Tveberg, 149
r- partições de Tveberg, 149
x,y-curva, 110
(Duplo) *join* deletado de complexos simpliciais, 131
(Duplo) *join* deletado de espaços topológicos, 131
Join deletado de k folhas, 139
Posets, 44
equador de x, 97
join $K * L$, 47
join de aplicações continuas $f * g$, 50
minor topológico, 123
poset face, 44

Grafo de Schrijver $\mathrm{SG}_{n,k}$, 107
antípoda, 53
aplicação antipodal, 53
aplicação de cadeias natural, 65
aplicação monótona, 45
aplicação simplicial, 38
aresta complementar, 59
arestas de um grafo, 92

Borel-mensurável, 76

cadeia $C_i(G^{\times};\mathbb{Z}_2)$, 112
classe de obstrução de um grafo, 114
cocadeia simétrica, 112
cohomologia simetrica, 112
complexo caixa $\mathrm{B}(G)$, 126
complexo ordem de um *poset*, 44
complexo simplicial, 30
complexo simplicial abstrato, 36
Complexo simplicial abstrato $\Diamond^{n-1}$, 37
complexo simplicial do tabuleiro de xadrez $\mathbb{R}_{m,n}$, 37
cone do espaço topológico X, 48
Conjectura de Kneser, 92, 96
Conjectura Topológica de Tveberg, 139
conjunto convexo, 28
conjunto em posição geral, 83
conjuntos balanceados, 91
conjuntos de Borel, 74
conjuntos mensuráveis, 74
curva momento, 41
curva simples, 109

deesenho de um grafo, 110
defeito de m-coloração $cd_m(\mathscr{F})$, 99
dimensão de um complexo simplicial, 31

distribuição de massa, 76
Dual combinatorial de Alexander K^*, 135

Esfera de Bier, 136
espaço mensurável, 74

face de um simplexo, 28
fecho convexo de um conjunto, 28
Função φ_f, 113
função contável aditiva, 75
Funtor covariante B, 127

geometricamente independentes, 27
Grafo, 92
grafo K_5, 40
grafo bipartido completo $K_{m,n}$, 92
grafo completo K_m, 92
Grafo de Kneser, 94
grafo planar, 110
Grau de $f : S^n \to S^n$ contínua, 65

hipergrafo, 98
hiperplano que bissecta um conjunto, 82
Homomorfismo de grafos, 93

interior relatico de um simplexo, 29
isomorfismo de complexos simpliciais abstratos, 38
isomorfismo de grafos, 93

Lebesgue-mensurável, 76
Lema de Gale, 102
Lema de Tucker, 58, 59
Lema de Tucker refourmulado, 59

medida absolutamente contínua, 75
medida de Borel, 75
medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, 75
medida exterior, 75
medida finita, 75
medida positiva, 75
medidas balanceadas, 76
mergulho topológico, 37
multipartições coloridas, 88

Número cromático de um grafo, 94
número cromático do hipergrafo, 99

operador cobordo da cohomologia simétrica, 113
operadores bordo da cohomologia simétrica, 112

poliedro de um complexo simplicial, 31
politopo alvo, 79
politopo alvo truncado, 79
politopo convexo, 76
pontos finais da curva, 110
preserva pontos antípodas, 53
Produto deletado de um grafo, 111
Propriedade Borsuk-Ulam para grupos, 145

realização geométrica de um complexo simplicial abstrato, 36

subcomplexo simplicial, 34
Subcomplexos Tveberg inevitáveis para f, 149
subconjunto s-estável, 106
subdivisão baricêntrica de um complexo simplicial K, 45
Subdivisão de um grafo, 122
subdivisão semi-baricêntrica de J com respeito a $K * L$, 135
Subgrafo, 93
subgrafo induzido de G no subconjunto S, 93
sucomplexo $\Delta^{\leq k}$, 34
Superfície fechada, 109
suporte de x, 32
suspensão do espaço topológico X, 48

Teorema da convergência dominada, 77
Teorema da curva de Jordan, 40
Teorema da Realização geométrica, 43

Teorema de Borsuk-Ulam, 53
Teorema de Cayley, 140
Teorema de Dol'nikov, 99
Teorema de Lovász-Kneser, 96
Teorema de Radó, 44
Teorema de Radon, 134, 139
Teorema de Schrijver, 107
Teorema de Van-Kampen Flores generalizado, 152
Teorema de Van-Kampen-Flores, 137
Teorema do colar, 87
Teorema do hambúrguer, 77
Teorema do hamburguer, versão discreta, 91
Teorema do sanduíche de presunto para conjuntos finitos de pontos, 83
Teorema do sanduíche de presunto para medidas, 76
Teorema Topológico de Tveberg, 139
triangulação antipodalmente simétrica na fronteira de B^n, 58
triangulação de um espaço topológico, 34
triangularização de uma superficie, 43

vértices de um complexo simplicial, 31
vértices de um grafo, 92
vizinhança comum de A, $CN(A)$, 126

REFERÊNCIAS

AKIYAMA, J.; ALON, N. Disjoint simplices and geometric hypergraphs. **Annals of the New York Academy of Sciences**, Wiley Online Library, v. 555, n. 1, p. 1–3, 1989. Citado na página 88.

BAJMÓCZY, E. G.; BÁRÁNY, I. On a common generalization of Borsuk's and Radon's theorem. **Acta Mathematica Hungarica**, v. 34, n. 3-4, p. 347–350, 1979. Citado nas páginas 24, 134 e 139.

BÁRÁNY, I.; SHLOSMAN, S. B.; SZÜCS, A. On a topological generalization of a theorem of Tverberg. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 158–164, 1981. Citado nas páginas 24 e 139.

BEYER, W. A.; ZARDECKI, A. The early history of the ham sandwich theorem. **American Mathematical Monthly**, JSTOR, p. 58–61, 2004. Citado na página 74.

BLAGOJEVIĆ, P. V.; FRICK, F.; ZIEGLER, G. M. Tverberg plus constraints. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 46, n. 5, p. 953–967, 2014. Citado nas páginas 25 e 149.

DOL'NIKOV, V. Transversals of families of sets. **Studies in the theory of functions of several real variables (Russian)**, p. 30–36, 1981. Citado na página 99.

FLORES, A. Über n-dimensionale komplexe, die im $\mathbb{R}^{2n+1}$ absolut selbstverschlungen sind. In: **Ergeb. Math. Kolloq**. [S.l.: s.n.], 1933. v. 34, p. 4–6. Citado na página 131.

FRICK, F. Counterexamples to the topological Tverberg conjecture. **arXiv preprint arXiv:1502.00947**, 2015. Citado nas páginas 24 e 139.

GALE, D. Neighboring vertices on a convex polyhedron. **Linear inequalities and related system**, Princeton University Press Princeton, NJ, v. 38, p. 255–263, 1956. Citado na página 102.

GREENBERG, M.; HARPER, J. **Algebraic Topology: A First Course. Addision**. [S.l.]: Wesley Publishing Company, Inc, 1980. Citado nas páginas 69 e 70.

GREENE, J. E. A new short proof of Kneser's conjecture. **The American mathematical monthly**, JSTOR, v. 109, n. 10, p. 918–920, 2002. Citado nas páginas 63 e 96.

HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Citado nas páginas 25, 53, 65, 66 e 68.

KAMPEN, E. R. V. Komplexe in euklidischen räumen. In: SPRINGER. **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**. [S.l.], 1933. v. 9, n. 1, p. 72–78. Citado nas páginas 23 e 131.

KANO, M.; KYNČL, J. The hamburger theorem. **Computational Geometry**, Elsevier, v. 68, p. 167–173, 2018. Citado nas páginas 25, 77, 80 e 91.

KANO, M.; SUZUKI, K.; UNO, M. Properly colored geometric matchings and 3-trees without crossings on multicolored points in the plane. In: SPRINGER. **Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs**. [S.l.], 2013. p. 96–111. Citado na página 90.

LONGUEVILLE, M. D. **A course in topological combinatorics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado nas páginas 25, 109, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 131, 135, 138, 139 e 140.

LONGUEVILLE, M. de. 25 years proof of the Kneser conjecture the advent of topological combinatorics. **EMS Newsletter**, v. 53, p. 16–19, 2004. Citado na página 92.

LOVÁSZ, L. Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 319–324, 1978. Citado nas páginas 23 e 96.

LUSTERNIK, L.; SCHNIRELMAN, L. Topological methods in variational calculus. **Issledowatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri OMGU, Moscow**, 1930. Citado na página 54.

MATOUSEK, J. **Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado nas páginas 24, 25, 27, 31, 32, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 47, 48, 51, 53, 55, 60, 76, 77, 83, 85, 87, 89, 92, 95, 106, 107, 109, 125, 126 e 128.

MAULDIN, R. D. **The Scottish Book**. [S.l.]: Springer, 1981. Citado na página 74.

MUNKRES, J. R. **Topology**. [S.l.]: Prentice Hall, 2000. Citado nas páginas 40 e 56.

ÖZADIN, M. Equivariant maps for the symmetric group. **University of Wisconsin, Madison**, unpublished preprint, p. 17, 1987. Citado nas páginas 24, 131, 139 e 145.

RADÓ, T. Über den begriff der riemannschen fläche. **Acta Litt. Sci. Szeged**, v. 2, n. 101-121, p. 10, 1925. Citado na página 44.

RUDIN, W. **Real and complex analysis**. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 1987. Citado nas páginas 74, 76 e 77.

SARKARIA, K. S. A generalized Van-Kampen-Flores theorem. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 111, n. 2, p. 559–565, 1991. Citado nas páginas 24, 131 e 149.

____. A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 73, n. 1, p. 79–89, 1991. Citado na página 109.

____. Tverberg partitions and Borsuk-Ulam theorems. **Pacific Journal of Mathematics**, Mathematical Sciences Publishers, v. 196, n. 1, p. 231–241, 2000. Citado na página 145.

SCHRIJVER, A. Vertex-critical subgraphs of kneser-graphs:(preprint). **Stichting Mathematisch Centrum. Zuivere Wiskunde**, Stichting Mathematisch Centrum, n. ZW 108/78, 1978. Citado na página 108.

TUTTE, W. T. Toward a theory of crossing numbers. **Journal of Combinatorial Theory**, Academic Press, v. 8, n. 1, p. 45–53, 1970. Citado na página 109.

VOLOVIKOV, A. Y. On a topological generalization of the tverberg theorem. **Mathematical Notes**, Springer, v. 59, n. 3, p. 324–326, 1996. Citado na página 145.

____. On the Van-Kampen-Flores theorem. **Mathematical Notes**, Springer, v. 59, n. 5, p. 477–481, 1996. Citado nas páginas 24, 131, 139 e 149.

ICMC USP
SÃO CARLOS