Mergulho de produtos de esferas e suas somas conexas em
codimensão 1

Marcio Colombo Fenille

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 17 de janeiro de 2007

Assinatura: _____

Mergulho de produtos de esferas e suas somas conexas em codimensão 1[†]

Marcio Colombo Fenille

Orientador: *Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2007

[†] O autor teve suporte financeiro do CNPq

*Aos meus pais,
Neide e Alfeo.*

Agradecimentos

Quando a injustiça inflamada e inimiga nos tenta sugar a vida e desonra o nosso próximo, por instantes se esvai toda gratidão. Mas tremo de indignação diante de qualquer injustiça em qualquer lugar do mundo, e sei que a solidão, se a trouxesse deveras comigo e para sempre, apenas garantir-me-ia poucas doses de liberdade. Fico com a liberdade de poder fazer amigos e enxergar a cada dia um passo mais adiante. Se minha escolha é segura? As espessas gotas de loucura que me pingam das torneiras mal fechadas da razão me fazem crer que sim, que não ser compreendido, mesmo pelos mais velhos amigos, me garante segurança suficiente; e loucura por loucura, me trás gozo. Por tudo isso, não me rendo as desgraças do mundo como até a luz se rende curvando-se no horizonte de eventos, e estas poucas linhas espero deleitem por minha mais sincera gratidão ao leitor que as mereça. Pararia por aqui; acho que me explico bem! Mas talvez ainda restem lacunas em vossa mente suplantada pelo irreal para que me possas chamar injusto e mal agradecido. Por isso, prossigo a lembrar as pessoas que mais diretamente contribuíram para o meu sucesso até aqui, das mais diversas maneiras, algumas inimagináveis. Neste sentido, honras e terna gratidão à minha família, meus pais e minha irmã, que com seu amor e ensinamentos sempre me transmitiram esperança, confiança e a alegria de poder estar sempre de cabeça erguida. Agradeço ao amigo Renato, companheiro de toda hora, às vezes filho, outras vezes pai, tantas vezes irmão, mais novo ou mais velho, sempre amigo. Ao meu orientador, o professor Oziride, a minha gratidão imensa pela amizade, pela confiança, o companheirismo, pelas lutas que travamos juntos sempre com a maior dignidade e honestidade - adjetivos já tão raros nos homens de hoje - e como não poderia deixar de ser, pela exímia orientação e constantes provas de paixão pela Topologia. Aos amigos e colegas de mestrado Aurélio, Mario e Hartmann, por tudo o que sofremos juntos ou sorrimos juntos, nossos estudos em grupo, as idéias, ideais e experiências partilhadas, a esperança que sempre se buscou fazer florescer no outro mesmo quando já ninguém tinha mais paciência, os momentos de descontração, enfim, pela amizade. Também aos colegas de sala Amanda, Vanessa e Romenique, com os quais tive o maior prazer de dividir a maior parte dos meus dias de trabalho. Aos demais colegas do instituto, mas apenas àqueles que mantêm a amizade como o primordial e nunca se deixaram contaminar pela competitividade. Vale lembrar dos bons professores que tive, e também dos maus professores, tanto os do ICMC quanto os da FCT-Unesp, e em especial os professores Márcio Cardim e José Roberto; todos de alguma forma me ensinaram muito, os primeiros como ser, os últimos como não ser; algum crédito sempre restou. Para pôr fim, gostaria de lembrar do amigo Matheus, que com sua alegria e manias me distraiu e me alegrou deveras. Valeu a pena!

Resumo

Estudamos inicialmente resultados de classificação de difeomorfismos de produtos de esferas de mesma dimensão. Tratado isto, estudamos os mergulhos suaves de produtos de esferas $S^1 \times S^q \times S^r$, com $1 \leq q \leq r$, na esfera S^{q+r+2} , e buscamos a total caracterização do fecho das duas componentes conexas do complementar de tais mergulhos. Tratamos com enfoque especial os mergulhos do toro $T^3 (= S^1 \times S^1 \times S^1)$ na esfera S^4 e, finalmente, estudamos problemas de classificação de mergulhos PL localmente não-enodados de somas conexas de toros em codimensão 1.

Abstract

We study first results of the classification of diffeomorphisms of the cartesian product of spheres of the same dimension. In the sequence we study smooth embeddings of the cartesian product of spheres $S^1 \times S^q \times S^r$, with $1 \leq q \leq r$, in the sphere S^{q+r+2} , to obtain the total characterization of the closure of each of the two connected component of the complement of there embeddings. Special attention is given to the embeddings of tori $T^3 (= S^1 \times S^1 \times S^1)$ into S^4 and, finally we study the classification of the locally unknotted PL embeddings of the connected sum of tori in codimension 1.

Sumário

Introdução	17
1 Preliminares	19
1.1 Homologia e cohomologia	19
1.2 Homotopia e grupo fundamental	25
1.3 Homologia e cohomologia em variedades	29
1.4 Nós e enlaçamentos	31
1.5 Mergulho de produtos de esferas	34
1.6 Topologia Linear por Partes (PL)	37
2 Difeomorfismo de produtos de esferas	39
2.1 Algumas manipulações algébricas	39
2.2 Classificação das matrizes que representam automorfismos	44
3 Mergulho de produtos de três esferas em codimensão 1	53
3.1 Sobre as considerações e as expectativas	53
3.2 Sobre a existência de mergulhos exóticos	54
A construção $\odot$	54
3.3 Sobre a existência de mergulhos não-exóticos	58
3.4 Sobre as homologias das componentes do complementar de um mergulho . . .	70
3.5 O que completa o capítulo	77
4 Mergulhos do toro T^3 na esfera S^4	79
4.1 Os Gêmeos de Montesinos	80
4.2 Um problema envolvendo mergulhos de 3-variedades em S^4	83
4.3 O que responde o problema anterior	83
4.4 O análogo da seção anterior para outras dimensões	89

5	Mergulhos de somas conexas de toros em codimensão 1	91
5.1	O teorema principal do capítulo	91
5.2	Esquema para a prova do teorema principal	92
	Primeira parte	92
	Segunda parte	100
	Terceira parte	104
5.3	A prova do teorema principal	106
	Referências Bibliográficas	107
	Lista de Símbolos	111
	Índice Remissivo	113

Lista de Figuras

3.1	Esquema gráfico da construção ©	55
4.1	Vizinhança regular da 2-esfera S	81
4.2	Vizinhança regular da 2-esfera R	81
4.3	Decomposição por alças dos Gêmeos de Montesinos	82
5.1	O poliedro $X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$	94

Introdução

Este texto trata especialmente dos mergulhos de produtos de esferas e suas somas conexas em codimensão 1. As esferas estão entre os objetos de estudo mais antigos da matemática e desde o surgimento da Topologia o interesse pela pesquisa sobre esferas de dimensões mais altas tem se fortalecido. Quando trabalhamos com mergulhos $f : S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$, ao contrário do que nos possa inicialmente parecer, os problemas de classificação do fecho das componentes conexas de $S^{p+q+r+1} - f(S^p \times S^q \times S^r)$ tornam-se mais simples quando a dimensão de todas as esferas envolvidas no produto é maior ou igual a dois. Neste sentido, decidimos em nosso trabalho tratar especialmente os casos em que $1 = p \leq q \leq r$.

Antes porém de partirmos ao estudo específico a que se propunha este trabalho, dedicamos um capítulo às definições e resultados básicos necessários para o progresso e entendimento do texto. É bastante provável que o leitor já esteja bastante familiarizado com grande parte do conteúdo que compõe este capítulo; no entanto, cremos que seja de demais valia esta breve apresentação, mesmo para fixarmos notações e terminologias. Vale ressaltar que não nos preocupamos em apresentar as demonstrações de tais resultados; antes disso, nossa preocupação consistiu em inserir com maior amplitude os tópicos básicos do desenvolvimento deste trabalho, para que o leitor sinta-se mais confortável com a leitura do restante do texto, sem necessidade freqüente de consulta a outros materiais.

O texto se divide efetivamente em cinco capítulos, sendo o primeiro como já mencionado no parágrafo anterior. Ao segundo capítulo ainda não compete os resultados mais importantes e aos quais se dedicou maior ímpeto ao estudo. Não obstante, é nele apresentado resultados conclusivos de classificação de difeomorfismos de produtos de esferas. O desenvolvimento desta parte do trabalho requer várias ferramentas algébricas, mas todas bastante simples. Alguns tópicos de Topologia Algébrica também aparecem, mas nenhum que não tenha sido apresentado do capítulo preliminar.

No terceiro capítulo iniciamos de fato o estudo da classificação do fecho das componentes conexas do complementar de mergulhos de produtos de esferas em codimensão um, sendo sempre a primeira esfera do produto de dimensão um. Apresentamos alguns resultados de caracterização

propriamente dita, e outros que descrevem maneiras de, sob certas condições, se construir infinitos mergulhos mutuamente distintos de modo que o fecho de nenhuma das componentes de seu complementar seja homotopicamente equivalente a um produto de esferas com um disco. Os resultados deste capítulo classificam totalmente os mergulhos estudados.

No quarto capítulo estudamos mais pormenorizadamente os mergulhos do toro T^3 na esfera S^4 . O resultado principal do capítulo é Teorema 4.3.1, no qual se demonstra a existência de duas 3-variedades que sempre podem ser mergulhadas em S^4 de modo que o fecho de cada componente de $S^4 - f(T^3)$, com f mergulho, seja difeomorfo ao fecho do complementar de um destes mergulhos. Sem dúvida, este é um resultado bastante atraente.

O último capítulo é destinado ao estudo dos mergulhos de somas conexas de toros em codimensão um. Nele apresentados uma série de resultados bastante expressivos que convergem a demonstração do Teorema 5.1.2, o principal do capítulo, que dá uma caracterização, a menos de pseudo-isotopias, dos referidos mergulhos.

✓

Preliminares

1.1 Homologia e cohomologia

Complexo de cadeias e cocadeias - Teoremas dos Coeficientes Universais

Um *complexo de cadeias* $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$ é definido por um par de seqüências de grupos abelianos C_q , $q \in \mathbb{Z}$, e uma seqüência de homomorfismos $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ tal que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$, para todo $q \in \mathbb{Z}$. É definido também $C_q = 0$ se $q < 0$. Diremos que $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$ é *livre* se cada C_q é um grupo abeliano livre. Os elementos de C_q são denominados *q-cadeias* e os homomorfismos ∂_p *operadores bordo*. A um complexo de cadeias $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$ se associa de modo natural certos subgrupos dos grupos de cadeias C_q . O grupo $Z_q(\mathcal{C}) = \text{Ker}(\partial_q)$ é chamado *grupo dos q-ciclos*, e o grupo $B_q(\mathcal{C}) = \text{Im}(\partial_{q+1})$ é chamado *grupo dos q-bordos*. São ambos subgrupos normais de C_q e, sendo $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, temos $B_q(\mathcal{C}) \subset Z_q(\mathcal{C})$.

Definição 1.1.1. O grupo quociente $H_q(\mathcal{C}) = Z_q(\mathcal{C})/B_q(\mathcal{C})$ é chamado *grupo de homologia q-dimensional do complexo $\mathcal{C}$* .

Sejam $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$ um complexo de cadeias e G um grupo abeliano. Considere o *produto tensorial* $\mathcal{C} \otimes G$. Por definição, $\mathcal{C} \otimes G$ é o complexo de cadeias $(C_q \otimes G, \partial_q \otimes 1_G)$, onde $1_G : G \rightarrow G$ é o homomorfismo identidade.

Definição 1.1.2. O grupo de homologia *q-dimensional* $H_q(\mathcal{C} \otimes G) = Z_q(\mathcal{C} \otimes G)/B_q(\mathcal{C} \otimes G)$ é chamado *grupo de homologia q-dimensional de $\mathcal{C}$ com coeficientes em G* e será denotado por $H_q(\mathcal{C}; G)$.

A relação entre $H_q(\mathcal{C}; G)$ e $H_q(\mathcal{C})$ é dada pelo seguinte resultado encontrado em [33, p. 243].

Teorema 1.1.3. (TEOREMA DOS COEFICIENTES UNIVERSAIS PARA HOMOLOGIA) *Sejam $\mathcal{C}$ um complexo de cadeias livre e G um grupo abeliano. Então*

$$H_q(\mathcal{C}; G) \approx (H_q(\mathcal{C}) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{q-1}(\mathcal{C}), G)$$

Agora, se $\mathcal{C}$ é um complexo de cadeias e G um grupo abeliano, formamos o grupo abeliano $C^q = \text{Hom}(C_q, G)$, cujos elementos são todos os homomorfismos $h : C_q \rightarrow G$, os quais serão chamados *q-cocadeias* de $\mathcal{C}$. O *cobordo* de h é uma $(q+1)$ -cocadeia, denotada por $\delta^q h$, e definida por $\delta^q h = (-1)^{q+1} h \circ \partial_{q+1} : C_{q+1} \rightarrow G$. Em outras palavras, temos dito que o operador bordo $\partial_{q+1} : C_{q+1} \rightarrow C_q$ induz homomorfismo $\partial_{q+1}^* : \text{Hom}(C_q, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{q+1}, G)$ e $\delta^q = (-1)^{q+1} \partial_{q+1}^*$. Observe que $\delta^q \circ \delta^{q+1} = 0$. Segue que (C^q, δ^q) é um complexo de cocadeias com coeficientes em G . Denotaremos $\text{Hom}(\mathcal{C}, G) = (\text{Hom}(C_q, G), \delta^q)$.

Definição 1.1.4. *A homologia do complexo $\text{Hom}(\mathcal{C}, G)$ é a cohomologia de $\mathcal{C}$ com coeficientes em G , a qual será denotada por $H^q(\mathcal{C}; G)$, com $H^q(\mathcal{C}; G) = \text{Ker}(\delta^q) / \text{Im}(\delta^{q-1})$. Além disso, um elemento de $\text{Ker}(\delta^q)$ é chamado de *q-cociclo*, e um elemento de $\text{Im}(\delta^{q-1})$ é chamado de *q-cobordo*.*

Para o Teorema a seguir, ver [33, p. 222].

Teorema 1.1.5. (TEOREMA DOS COEFICIENTES UNIVERSAIS PARA COHOMOLOGIA) *Sejam $\mathcal{C}$ um complexo de cadeias livre e G um grupo abeliano. Então*

$$H^q(\mathcal{C}; G) \approx \text{Hom}(H_q(\mathcal{C}), G) \oplus \text{Ext}(H_{q-1}(\mathcal{C}), G)$$

Faremos agora algumas definições que, por ora, parecerão totalmente abstratas, mas que utilizaremos na próxima seção para construirmos objetos e resultados que serão muito utilizados neste trabalho.

Começemos considerando um complexo de cadeia $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$. Por um *sub-complexo de cadeias* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ entendemos uma seqüência de subgrupos normais $D_q \subset C_q$ e de homomorfismos $\partial'_q : D_q \rightarrow D_{q-1}$ tais que $\partial'_q = \partial_q|_{D_q}$. Na verdade, uma seqüência de subgrupos $D_q \subset C_q$ definem um sub-complexo se, e somente se, a seqüência for estável em relação aos operadores bordo, isto é, se $\partial_q D_q \subset D_{q-1}$. Dado, então, um sub-complexo $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$, define-se o *complexo quociente* $\mathcal{E} = \mathcal{C}/\mathcal{D}$ como o complexo de cadeias $\mathcal{E} = (E_q, \bar{\partial}_q)$, onde $E_q = C_q/D_q$ e $\bar{\partial}_q : E_q \rightarrow E_{q-1}$ é definido por passagem ao quociente de ∂_q (visto que $\partial_q D_q \subset D_{q-1}$). Como anteriormente pode-se definir, então, os grupos de homologia do complexo quociente $\mathcal{E}$ por $H_q(\mathcal{E}) = \text{Ker}(\bar{\partial}_q) / \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$, para cada inteiro q . Tudo isto pode ser feito para complexos de cocadeias de maneira semelhante as já adotadas nesta seção.

Chama-se *complexo aumentado* de um complexo $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$ ao complexo de cadeias $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{C}_q, \tilde{\partial}_q)$, para o qual se define $\tilde{C}_q = C_q$ se $q \geq 0$, $\tilde{C}_{-1} = \mathbb{Z}$, e $\tilde{\partial}_q = \partial_q$ se $q \geq 1$, $\tilde{\partial}_0 = \varepsilon_n : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ um homomorfismo conhecido por *Índice de Kronecker*. (Detalhes da construção deste homomorfismo podem ser encontrados em [33]). Completa-se pondo $\tilde{C}_{-q} = 0$

se $q > 1$ e $\tilde{\partial}_{-q} = 0$ se $q \geq 1$. Os grupos de homologia do complexo $\tilde{\mathcal{C}}$ são denominados *grupos de homologia reduzidos do complexo $\mathcal{C}$* e denotados por $\tilde{H}_q(\mathcal{C})$. Uma construção semelhante pode ser realizada a partir desta para complexos de cocadeias de modo que possamos definir os *grupos de cohomologia reduzidos do complexo $\mathcal{C}$* , que denotaremos por $\tilde{H}^q(\mathcal{C})$.

Homologia e cohomologia singular

Em [11] encontramos resultados de homologia e cohomologia singular para um espaço topológico X , descritos nos seguintes termos: Considere os vetores $e_0 = (0, 0, \dots)$, $e_1 = (1, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots \in \mathbb{R}^\infty$. Identificamos $\mathbb{R}^n$ com o subespaço dos vetores nos quais são nulas todas as componentes depois da n -ésima. Para qualquer $q \geq 0$, definimos o q -simplexo padrão Δ_q como sendo o simplexo geométrico q -dimensional gerado por $e_0, \dots, e_q$. Sendo $P_0, \dots, P_q$ pontos em algum espaço afim E , $(P_0 \dots P_q)$ denotará a restrição a Δ_q da única aplicação afim $\mathbb{R}^q \rightarrow E$ aplicando e_0 em P_0 , ..., e_q em P_q . Assim, $(e_0 \dots e_q)$ é a aplicação identidade de Δ_q , denotada por δ_q .

Dado um espaço X , um q -simplexo singular em X é uma aplicação $\Delta_q \rightarrow X$. Definimos $C_q(X)$ como o grupo livre gerado por todos os q -simplexos singulares. Os elementos de $C_q(X)$ são combinações lineares

$$\sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \sigma$$

onde σ corresponde aos q -simplexos singulares e os coeficientes ν_{σ} estão no anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. Estas somas são chamadas *q -cadeias singulares*.

Para $q > 0$, defina $F_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$, para $0 \leq i \leq q$, como sendo a aplicação afim $(e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_q)$, onde $\hat{e}_i$ significa omitir e_i . Para um q -simplexo singular arbitrário σ no espaço X , defina a i -ésima face $\sigma(i)$ de σ como sendo o $(q-1)$ -simplexo singular $\sigma \circ F_q^i$. Assim, F_q^i é a i -ésima face de δ_q , e se $\sigma = (P_0 \dots P_q)$, X afim, então $\sigma(i) = (P_0 \dots \hat{P}_i \dots P_q)$. Além disso, F_q^i aplica Δ_{q-1} afim e homeomorficamente sobre a face de Δ_q oposta ao vértice e_i . Agora, definimos o *bordo de um q -simplexo singular* como a $(q-1)$ -cadeia singular

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma(i)$$

e, por esta definição, mostra-se que $\partial \circ \partial = 0$. Uma q -cadeia singular c tal que $\partial(c) = 0$ é chamada *ciclo*; se $c = \partial(c')$ para alguma $(q+1)$ -cadeia c' , então dizemos que c é um *bordo*. Duas q -cadeias c_1 e c_2 que se diferem por um bordo são ditas *homólogas* e denota-se $c_1 \sim c_2$. Como $\partial \circ \partial = 0$, os bordos formam um subgrupo B_q do grupo Z_q dos ciclos. Chamaremos o grupo quociente Z_q/B_q de *q -ésimo grupo de homologia singular de X* , e vamos denotá-lo $H_q(X)$.

Se Y é um subespaço de X , podemos repetir todo o processo anterior para construirmos o complexo de cadeias com grupos livres $C_q(Y)$, que serão subgrupos de $C_q(X)$ para cada inteiro q , e operadores bordo ∂'_q que para cada inteiro q será a restrição $\partial_q|_Y$ do operador bordo do complexo $\mathcal{C}(X) = (C_q(X), \partial_q)$. Obtemos, deste modo, um sub-complexo

$\mathcal{C}(Y) = (C_q(Y), \partial'_q)$ do complexo $\mathcal{C}(X)$. Denotamos o q -ésimo grupo de homologia do complexo quociente $\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(Y)$ por $H_q(X, Y)$ e o tratamos por *q -ésimo grupo de homologia relativa do par (X, Y)* .

Definimos o grupo $C^q(X)$ de todas as *q -cocadeias singulares sobre X* como sendo o grupo $\text{Hom}(C_q(X), \mathbb{Z})$. Assim, uma *cocadeia singular de dimensão q* é um homomorfismo linear $c : C_q(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Se denotamos o valor desse homomorfismo sobre uma cadeia z por $[z, c]$, vê-se facilmente que $[,]$ é bilinear. Como C_q é um funtor de espaços topológicos em grupos e $\text{Hom}(, \mathbb{Z})$ é um contrafuntor na categoria dos grupos, o funtor composto C^q é um contrafuntor de espaços topológicos em grupos. Além disso tudo, pode-se provar que, para cada inteiro q , existe um único homomorfismo $\delta^q : C^q(X) \rightarrow C^{q+1}(X)$, o *operador cobordo*, satisfazendo $[\partial z, c] = [z, \delta c]$ para toda $(q+1)$ -cadeia z e q -cocadeia c . Ainda mais, $\delta \circ \delta = 0$. Construimos assim um *complexo e cocadeias* $\mathcal{C}^*(X) = (C^q(X), \delta^q)$ e definimos o *q -ésimo grupo de cohomologia singular de X* por $H^q(X) = H_q(\mathcal{C}^*(X)) = \text{Ker}(\delta^q)/\text{Im}(\delta^{q-1})$.

Se Y é um subespaço de X podemos construir em semelhança ao realizado para os grupos de homologia, os grupos de cohomologia relativa $H^q(X, Y)$.

Propriedades dos grupos de homologia

Assuma que grupos abelianos $H_n(X, A)$ estejam sempre definidos para $n = 0, 1, 2, \dots$, quando X é um espaço topológico e A é um subespaço de X . Estes grupos têm as seguintes propriedades fundamentais, que podem ser melhor observadas em [30, p. 99-100].

(1) Se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma aplicação de pares, então existe um homomorfismo natural induzindo $f_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$. *Naturalidade* quer dizer que:

- (a) Se $1 : (X, A) \rightarrow (X, A)$ é a identidade, então $1_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(X, A)$ é isomorfismo.
- (b) Se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ são aplicações de pares, então tem-se $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

(2) Existe um homomorfismo bordo natural $\partial : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \equiv H_{n-1}(A, \emptyset)$. Aqui a naturalidade indica que se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma aplicação entre pares, então é comutativo o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

(3) (*Exatidão*) É exata a seqüência $\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$, onde os homomorfismo não indicados são induzidos por inclusões.

(4) (*Homotopia*) Se $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são homotópicas, então $f_* = g_*$.

(5) (*Excisão*) Suponha que seja $U \subset A$ um aberto tal que seu fecho está contido no interior de A . Então o homomorfismo $H_*(X - U, A - U) \rightarrow H_*(X, A)$ induzido pela inclusão é um isomorfismo.

(6) (*Dimensão*)

$$H_n(pt.) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Definição 1.1.6. *Seja (X, Y, Z) uma tríada de espaços topológicos com Y e Z subespaços de X . Considere as aplicações de pares $k_1 : (Z, Y \cap Z) \rightarrow (Y \cup Z, Y)$ e $k_2 : (Y, Y \cap Z) \rightarrow (Y \cup Z, Z)$. Dizemos que a tríada (X, Y, Z) é exata se as induzidas das inclusões em homologia k_{1*} e k_{2*} são isomorfismos.*

Teorema 1.1.7. (SEQÜÊNCIA DE MAYER-VIETORIS) *Seja (X, Y, Z) uma tríada exata de espaços topológicos com $X = Y \cup Z$. Então existe uma seqüência exata, chamada seqüência de Mayer-Vietoris da tríada (X, Y, Z) ,*

$$\cdots \rightarrow H_n(Y \cap Z) \xrightarrow{\eta_*} H_n(Y) \oplus H_n(Z) \xrightarrow{\xi_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(Y \cap Z) \rightarrow \cdots$$

onde $\eta_*(x) = i_{1*}(x) \oplus -i_{2*}(x)$ e $\xi_*(y \oplus z) = j_{1*}(y) + j_{2*}(z)$, com $i_1 : Y \cap Z \rightarrow Y$, $i_2 : Y \cap Z \rightarrow Z$, $j_1 : Y \rightarrow X$ e $j_2 : Z \rightarrow X$ inclusões.

Teorema 1.1.8. *Se S^n denota a esfera n -dimensional e $1_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ é a identidade, temos:*

(1) $H_q(S^n) = 0$, $q \neq 0, n$;

$$H_n(S^n) \approx \mathbb{Z} \approx H_0(S^n), \quad n > 0;$$

$$H_0(S^0) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

(2) $1_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ é um gerador de $H_n(S^n)$ (sob interpretação geométrica).

Para a afirmação (2) do último teorema veja a interpretação geométrica da Homologia descrita em [30, p. 98].

O seguinte resultado pode ser consultado em [33, p. 230].

Teorema 1.1.9. (FÓRMULA DE KÜNNETH) *Se X e Y são espaços topológicos, existe um isomorfismo natural*

$$H_n(X \times Y) \approx \bigoplus_{p+q=n} (H_p(X) \otimes H_q(Y)) \oplus \bigoplus_{r+s=n-1} \text{Tor}(H_r(X), H_s(Y))$$

O produto de Kronecker

Dados dois complexos de cadeias $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$ e $\mathcal{C}' = (C'_q, \partial'_q)$, chama-se *aplicação de cadeias* $\Lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ a uma família de homomorfismos $\Lambda = \{\Lambda_q : C_q \rightarrow C'_q\}$, tal que $\partial'_q \circ \Lambda_q = \Lambda_{q-1} \circ \partial_q$ para todo inteiro q .

Proposição 1.1.10. *Dado um complexo de cadeias $\mathcal{C}$, existe um homomorfismo, chamado produto Kronecker,*

$$H^n(\mathcal{C}) \otimes H_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z},$$

onde a imagem de $x \otimes y$ se escreve $\langle x, y \rangle$. Além disso, se $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma aplicação de cadeias, e $x \in H^n(\mathcal{D})$ e $y \in H_n(\mathcal{C})$, então $\langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f_*(y) \rangle$.

Note que se são dados um espaço topológico X e um subespaço Y deste, podemos construir os complexos de cadeias $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$ de X e de Y , respectivamente, e a família de inclusão $i_q : C_q(Y) \rightarrow C_q(X)$ constituirá uma aplicação entre as cadeias $\mathcal{C}(Y)$ e $\mathcal{C}(X)$. Deste modo, segundo a proposição anterior, teremos definido um homomorfismo, o *produto de Kronecker*,

$$H^n(Y) \otimes H_n(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

tal que $\langle i^*(y), x \rangle = \langle y, i_*(x) \rangle$, sempre que $y \in H^n(Y)$ e $x \in H_n(X)$.

O resultado apresentado nesta seção pode ser encontrados em [24, p. 164], onde o leitor interessado poderá encontrar, além de sua demonstração, outras propriedades importantes neste mesmo contexto.

Produto cup e cap

Seja $\mathcal{C} = (C_q, \partial_q)$ um complexo de cadeias e $\mathcal{C}_\oplus = \bigoplus_{q \geq 0} C_q$. Seja $\mathcal{C}^\oplus = \bigoplus_{q \geq 0} C^q$, onde $\mathcal{C}^* = (C^q, \delta^q)$ é o complexo de cocadeias dual de $\mathcal{C}$, obviamente com $C^q = \text{Hom}(C_q, \mathbb{Z})$ e $\delta^q : C^q \rightarrow C^{q-1}$ definido por $\delta^q h = (-1)^{q+1} h \circ \partial_{q+1}^* \in C^{q+1}$ se $h \in C^q$. Nestes termos, $H^n(\mathcal{C}) = H_n(\mathcal{C}^*)$.

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são complexos de cadeias, definimos $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ por $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes C'_j$ e $\partial \otimes \partial'(c \otimes c') = \partial c \otimes c' + (-1)^k c \otimes \partial' c'$, se $c \in C_k$. Defina a aplicação chamada *operador slant*

$$/ : (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')_n \otimes C'^k \rightarrow C_{n-k}$$

pela fórmula $a/b = \sum_{i+j=n} b(a'_j) a_i$, onde $a = \bigoplus_{i+j=n} (a_i \otimes a'_j)$ e $b(a'_j) = 0$ sempre que $j \neq k$.

Para ver que esta operação está, de fato, bem definida com imagem em C_{n-k} , note inicialmente que sendo $b \in C'^k = \text{Hom}(C'_k, \mathbb{Z})$, temos que b é um homomorfismo $b : C'_k \rightarrow \mathbb{Z}$. Além disso, definimos $b(a'_j) = 0$ se $j \neq k$. Mas quando $j = k$, com k fixado, nas somas que definem o operador *slant* teremos $i = n - k$. Logo, ficamos com

$$a/b = \sum_{i+j=n} b(a'_j) a_i = b(a'_k) a_{n-k} \in C_{n-k}.$$

Sem muito esforço e como em [5] mostra-se que o operador *slant* é uma aplicação de cadeias; logo induz uma aplicação $H_*((\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \otimes C'^*) \rightarrow H_*(\mathcal{C})$. Composto esta última com a aplicação natural

$$H_*(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \otimes H^*(\mathcal{C}') \rightarrow H_*((\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')),$$

chegamos ao operador *slant*

$$/ : H_n(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \otimes H^k(\mathcal{C}') \rightarrow H_{n-k}(\mathcal{C}).$$

Agora, seja $\mathcal{C}$ um complexo de cadeias aumentado com uma *aplicação diagonal*, digamos $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ tal que $(\varepsilon \otimes 1)\Delta(c) = (1 \otimes \varepsilon)\Delta(c) = c$, onde $\varepsilon : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ é o aumento, e identificamos $\mathcal{C} = \mathcal{C} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \otimes \mathcal{C}$. Então Δ induz em $\mathcal{C}^*$ a estrutura de um anel com unidade

por $\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{C}^* \rightarrow (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C})^* \xrightarrow{\Delta^*} \mathcal{C}^*$, onde $\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{C}^* \rightarrow (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C})^*$ é a inclusão óbvia. Isto é chamado *produto cup*, e em nível de cohomologia induz

$$H^n(\mathcal{C}) \otimes H^k(\mathcal{C}) \rightarrow H^{n+k}(\mathcal{C}),$$

também chamado produto *cap*, $x \otimes y \mapsto x \smile y$. Usando Δ , podemos definir o *produto cap*

$$\smile : C_n \otimes C^k \rightarrow C_{n-k}$$

pela fórmula $a \smile b = (\Delta a)/b$. Como $\smile$ é a composição das aplicação de cadeias Δ e $/$, segue que $\smile$ é uma aplicação de cadeias e induz

$$\smile : H_n(\mathcal{C} \otimes H^k(\mathcal{C})) \rightarrow H_{n-k}(\mathcal{C}).$$

Mais geralmente, suponha que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sejam complexos de cadeias aumentados e seja $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ uma aplicação de cadeias. Então, similarmente ao anterior, obtemos uma aplicação em cohomologia

$$\smile : H^p(\mathcal{B}) \otimes H^q(\mathcal{C}) \rightarrow H^{p+q}(\mathcal{A})$$

e um produto *cap*

$$\smile : H_n(\mathcal{A}) \otimes H^k(\mathcal{C}) \rightarrow H_{n-k}(\mathcal{B})$$

Diversos resultados envolvendo os produtos *cup* e *cap* serão utilizados nos capítulos seguintes deste trabalho; no entanto, não os poremos aqui devido a exaustão e delonga que isso causaria. Antes disso, aqui deixamos [5] e [11] como as duas principais referências ao leitor interessado.

1.2 Homotopia e grupo fundamental

O leitor deve estar bastante habituado com os conceitos envolvendo grupos de homotopia. Nesta convicção, expomos aqui somente algumas identificações destes grupos que faremos, em momentos oportunos, durante boa parte deste texto. Façamo-las:

Seja X um espaço topológico e x_0 um ponto base fixado em X . Se identificamos o bordo do disco D^n a um ponto, o espaço quociente obtido desta identificação é a n -esfera S^n com um ponto distinguido s_0 . Assim, $\pi_n(X, x_0)$ pode ser interpretado como o grupo das classes de homotopia das aplicações de (S^n, s_0) em (X, x_0) . Outra interpretação interessante, que na realidade é a mesma vista de outra forma, é a identificação que se faz de $\pi_n(X, x_0)$ com o grupo das classes de homotopia das aplicações de $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$. Agora, se A é um subespaço fechado e conexo por caminhos de X , os elementos do grupo de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ estão em correspondência com as classes de homotopia das aplicações contínuas $\kappa : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$, onde $\kappa(D^n) \subset X$, $\kappa(S^{n-1}) \subset A$ e $\kappa(s_0) = x_0$. Note que um elemento de $\pi_{n-1}(A, x_0)$ é representado pela restrição $\kappa|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (A, x_0)$.

Os Teoremas de Van Kampen

Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) espaços topológicos com pontos base, e $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação contínua. Vamos denotar por $f_\#$ o *homomorfismo induzido pela aplicação* f no grupo de homotopia, ou seja, $f_\# : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ definida pela equação $f_\#([h]) = [h \circ f]$.

No transcorrer deste trabalho dispostemos principalmente dos resultados relacionados ao grupo fundamental dos espaços que estaremos tratando, não sendo tão importante o estudo dos grupos de homotopia de dimensões mais altas. Nestas situações, um resultado que será sempre de grande valia é o chamado Teorema de Van Kampen que apresentamos agora em duas versões, podendo a primeira ser encontrada em [8, p. 63] e a última em [28, p. 371].

Sejam X, X_0, X_1 e X_2 espaços topológicos com $X = X_1 \cup X_2$ e $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, X_1 e X_2 abertos, X_0, X_1 e X_2 conexos por caminhos e $x_0 \in X_0$ um ponto fixado. Denote $G = \pi_1(X, x_0)$ e $G_i = \pi_1(X_i, x_0)$, $i = 0, 1, 2$. Os homomorfismos induzidos pelas aplicações inclusões formam um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & G_0 & \\
 \theta_1 \swarrow & \downarrow w_0 & \searrow \theta_2 \\
 G_1 & & G_2 \\
 w_1 \searrow & & \swarrow w_2 \\
 & G &
 \end{array}$$

Teorema 1.2.1. (TEOREMA DE VAN KAMPEN) *Os grupos $w_i(G_i)$, $i = 1, 2$, imagens por w_i dos grupos G_i , geram o grupo G . Além disso, se H é um grupo arbitrário e $\psi_i : G_i \rightarrow H$, $i = 0, 1, 2$, são homomorfismos que satisfazem $\psi_0 = \psi_1 \circ \theta_1 = \psi_2 \circ \theta_2$, então existe um único homomorfismo $\Phi : G \rightarrow H$ tal que $\psi_i = \Phi \circ w_i$, $i = 0, 1, 2$.*

Teorema 1.2.2. (TEOREMA DE VAN KAMPEN) *Suponha que os grupos fundamentais de X_0 , X_1 e X_2 tenham as seguintes apresentações:*

$$\pi_1(X_1, x_0) = \langle x_1, x_2, \dots : r_1, r_2, \dots \rangle,$$

$$\pi_1(X_2, x_0) = \langle y_1, y_2, \dots : s_1, s_2, \dots \rangle,$$

$$\pi_1(X_0, x_0) = \langle z_1, z_2, \dots : t_1, t_2, \dots \rangle.$$

Então o grupo fundamental de X é dado por

$$\pi_1(X, x_0) = \langle x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots : r_1, r_2, \dots, s_1, s_2, \dots, \theta_1(z_1) = \theta_2(z_1), \theta_1(z_2) = \theta_2(z_2), \dots \rangle.$$

Observe que se $\pi_1(X_0)$ é trivial, então $\pi_1(X)$ é o produto livre de $\pi_1(X_1)$ e $\pi_1(X_2)$.

Estes teoremas serão utilizados nas duas versões apresentadas conforme o contexto e a necessidade. Será especificado, quando não trivialmente claro, que versão esta sendo utilizada.

Os Teoremas de Hurewicz

Outros resultados muito importantes são aqueles que relacionam os grupos de homotopia com os grupos de homologia. Estes resultados, que aqui apresentamos sumarizados, podem ser encontrados em [33], Seções 4 e 5 do Capítulo 7, e levam o mérito à Hurewicz.

Teorema 1.2.3. (TEOREMA DO HOMOMORFISMO DE HUREWICZ) *Considere dois espaços topológicos com ponto base (X, x_0) e (Y, y_0) , um subespaço A de X contendo x_0 e uma aplicação $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, A, y_0)$. Se $n \geq 2$, ou se $n = 1$ e $A = \{x_0\}$, existe um homomorfismo φ que faz comutar o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_n(Y, A, y_0) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, A) \end{array}$$

Teorema 1.2.4. *Se X é um espaço conexo por caminhos, então o homomorfismo de Hurewicz $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ é sobrejetor e seu núcleo é o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$.*

Teorema 1.2.5. (TEOREMA DE HUREWICZ) *Seja X um espaço simplesmente conexo. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

$$\begin{aligned} \pi_j(X) &= 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n-1, \\ H_j(X) &= 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Além disso, no caso de uma das condições acima for satisfeita, tem-se $H_n(X) \approx \pi_n(X)$.

O Teorema de Whitehead

Definição 1.2.6. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma equivalência de homotopia fraca se f induz uma correspondência bi-unívoca entre as componentes conexas por caminhos de X e de Y e se para todo $n \geq 1$ e $x \in X$, $f_\# : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ é um isomorfismo.*

Observe que se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, então f é uma equivalência de homotopia fraca. Além disso, se X e Y forem variedades infinitamente diferenciáveis, então ambas têm estrutura de complexos CW e os conceitos de equivalência de homotopia e equivalência de homotopia fraca coincidem, pelo Corolário 24 da página 405 de [33]. Para maiores detalhes consulte esta referência. Considerando este fato juntamente com o Teorema 7.15 de [35, p. 182], decorre o seguinte resultado, freqüentemente chamado Teorema de Whitehead.

Teorema 1.2.7. (TEOREMA DE WHITEHEAD) *Sejam X e Y complexos CW finitos simplesmente conexos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua tal que $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ é um isomorfismo para todo n . Então f é uma equivalência de homotopia.*

O produto Wedge

Dados espaços X e Y com pontos escolhidos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, o produto *wedge* $X \vee Y$ é o espaço quociente obtido da união disjunta $X \sqcup Y$ identificando-se os pontos x_0 e y_0 a um único ponto. Mais geralmente, podemos formar o produto *wedge* $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ de uma coleção arbitrária de espaços X_{α} identificando no espaço $\sqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ pontos escolhidos $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$. No caso dos espaços X_{α} serem complexos celulares e os pontos x_{α} serem 0-células, o produto $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ é um complexo celular, já que é obtido do complexo celular $\sqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ colapsando-se um subcomplexo a um ponto. Para qualquer complexo celular X , o quociente X^n/X^{n-1} , onde X^j denota o j -ésimo esqueleto de X , é um produto *wedge* de n -esferas, $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$, com uma esfera para cada n -célula de X .

O produto de Whitehead

Considere o produto *wedge* $S^p \vee S^q = S^p \times \{q_0\} \cup \{p_0\} \times S^q \subset S^p \times S^q$, onde $p_0 \in S^p$, $q_0 \in S^q$, $p, q \geq 2$. Os elementos de $\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star)$ estão em correspondência com as classes de homotopia das aplicações contínuas $\kappa : (D^p \times D^q, \partial(D^p \times D^q), w) \rightarrow (S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star)$, com $w \in S^{p-1} \times S^{q-1} = \partial D^p \times \partial D^q \subset \partial(D^p \times D^q)$ e $\star = (p_0, q_0)$. Assim, cada elemento $\gamma \in \pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star)$ é representado por uma aplicação contínua

$$\kappa : (D^p \times D^q, \partial(D^p \times D^q), w) \rightarrow (S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star).$$

Observe que $H_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star) \approx \mathbb{Z}$. Segue-se do Teorema de Hurewicz relativo, enunciado em [33, p. 397], que

$$\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star) \approx H_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star) \approx \mathbb{Z}$$

pois $S^p \times S^q$ e $S^p \vee S^q$ são simplesmente conexos. Defina o homomorfismo bordo

$$d : \pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star) \rightarrow \pi_{p+q-1}(S^p \vee S^q, \star)$$

como sendo $d(\gamma) = \sigma$, onde σ é a classe de homotopia representada pela aplicação restrição

$$h|_{\partial(D^p \times D^q)} : (\partial(D^p \times D^q), w) \rightarrow (S^p \vee S^q, \star).$$

Definição 1.2.8. Considere as classes de homotopia $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ e $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ representadas pelas aplicações $\kappa_1 : (S^p, p_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $\kappa_2 : (S^q, q_0) \rightarrow (X, x_0)$, respectivamente, e a aplicação $\kappa_1 \vee \kappa_2 : (S^p \vee S^q, \star) \rightarrow (X, x_0)$ com $\kappa_1 \vee \kappa_2(p_0, q_0) = x_0$, $\kappa_1 \vee \kappa_2(x, q_0) = \kappa_1(x)$ e $\kappa_1 \vee \kappa_2(p_0, y) = \kappa_2(y)$. Seja γ um gerador de $\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star) \approx \mathbb{Z}$ escolhido através da fixação de uma orientação adequada de $S^p \times S^q$. Para a composta abaixo

$$\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, \star) \xrightarrow{d} \pi_{p+q-1}(S^p \vee S^q, \star) \xrightarrow{\kappa_1 \vee \kappa_2} \pi_{p+q-1}(X, x_0)$$

defina

$$[\alpha, \beta] = ((\kappa_1 \vee \kappa_2)_{\#} \circ d)(\gamma) = (\kappa_1 \vee \kappa_2)_{\#}(\sigma) \in \pi_{p+q-1}(X, x_0).$$

O elemento $[\alpha, \beta]$ assim definido é denominado *produto de Whitehead* dos elementos α e β .

Observe que $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$ apenas depende das classes de homotopia α e β e não dos particulares representantes κ_1 e κ_2 .

Uma propriedade do produto de Whitehead que será utilizada no próximo capítulo deste texto é a “bilinearidade”, isto é, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$\llbracket a\alpha, b\beta \rrbracket = ab\llbracket \alpha, \beta \rrbracket.$$

Esta propriedade e outras mais sobre o produto de Whitehead podem ser encontradas em [35], esta especificamente no Capítulo 7, p. 478.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [7].

Proposição 1.2.9. *A aplicação contínua $\kappa_1 \vee \kappa_2 : S^p \vee S^q \rightarrow X$ se estende a uma aplicação contínua $\mathfrak{K} : S^p \times S^q \rightarrow X$ se, e somente se, $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket = 0$ em $\pi_{p+q-1}(X, x_0)$.*

H-espços

Definição 1.2.10. *Seja (X, x_0) um espaço topológico com ponto base $x_0 \in X$. Dizemos que X é um H-espço se existe uma aplicação contínua $f : X \times X \rightarrow X$, com $f(x_0, x_0) = x_0$ e tal que as aplicação $f_1 : X \rightarrow X$, $f_1(x) = f(x, x_0)$, e $f_2 : X \rightarrow X$, $f_2(x) = f(x_0, x)$, são ambas homotópicas a aplicação identidade $1_X : X \rightarrow X$. O ponto $x_0 \in X$ é o elemento neutro de X a menos de homotopia.*

Foi demonstrado em [1] que S^p tem estrutura de H-espço se, e somente se, $p = 1, 3$ ou 7 . Nestes casos, a aplicação $f : S^p \times S^p \rightarrow S^p$ é a multiplicação dos complexos, dos quaternions e dos octônios unitários, respectivamente.

Proposição 1.2.11. *Se p é um inteiro positivo ímpar, $p \neq 1, 3$ e 7 , e neste caso S^p não é um H-espço, então o produto de Whitehead $\llbracket \beta, \beta \rrbracket$ é um elemento de ordem 2 de $\pi_{2p-1}(S^p)$, onde β é um gerador de $\pi_p(S^p) \approx \mathbb{Z}$.*

1.3 Homologia e cohomologia em variedades

Dualidades

Os próximos resultados podem ser encontrados em [27, p. 419] e [13, p. 254], respectivamente, e serão de grande utilidade para os propósitos deste trabalho.

Teorema 1.3.1. (DUALIDADE DE POINCARÉ-LEFSCHETZ) *Seja M uma n -variedade compacta com bordo ∂M . Se $(M, \partial M)$ é orientável, então*

$$H^p(M, \partial M) \approx H_{n-p}(M) \quad e \quad H^p(M) \approx H_{n-p}(M, \partial M).$$

Teorema 1.3.2. (DUALIDADE DE ALEXANDER) *Seja $X \neq \emptyset$ um subconjunto próprio da esfera S^n . Suponha que X seja um retrato de alguma vizinhança. Então*

$$\tilde{H}^{n-k}(X) \approx \tilde{H}_{k-1}(S^n - X).$$

O Teorema do h-cobordismo

Para os enunciados desta subseção veja [25].

Definição 1.3.3. *Uma terna (W, V_0, V_1) é uma tríada de variedades se W é uma variedade compacta e seu bordo é a reunião disjunta das variedades sem bordo V_0 e V_1 .*

Definição 1.3.4. *Seja W uma variedade diferenciável compacta com duas componentes de bordo V_0 e V_1 , tais que V_0 e V_1 são ambas retratos por deformação de W . Então W é dito um h-cobordismo entre V_0 e V_1 .*

Definição 1.3.5. *Uma tríada de variedades (W, V_0, V_1) é chamada cobordismo produto se for difeomorfa à terna $(V_0 \times [0, 1], V_0 \times \{0\}, V_0 \times \{1\})$.*

O Teorema a seguir é um resultado sensacional e será muito útil para o nosso trabalho.

Teorema 1.3.6. (TEOREMA DO H-COBORDISMO) *Considere uma tríada (W, V_0, V_1) com as seguintes propriedades:*

1. W , V_0 e V_1 são simplesmente conexas,
2. $H_*(W, V_0) = 0$,
3. $\dim W \geq 6$.

Então (W, V_0, V_1) é um cobordismo produto.

Teorema 1.3.7. (CONJECTURA DE POINCARÉ GENERALIZADA). *Se M é uma n -variedade fechada, conexa e simplesmente conexa, e $n \geq 4$, então M é homeomorfa a esfera S^n .*

Grau de uma aplicação diferenciável

Sejam M e N variedades diferenciáveis orientadas de dimensão n , ambas sem bordo, com M compacta e N conexa. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$ e $x \in M$ um ponto regular de f . Observe que, nestas condições, a derivada de f no ponto x , denotada por $Df(x)$, é um isomorfismo entre o espaço tangente a M em x e o espaço tangente a N em $f(x)$. Dizemos que f *preserva a orientação em x* se $Df(x)$ aplica uma base de $\mathcal{T}_x M$ da orientação de M numa base de $\mathcal{T}_{f(x)} N$ da orientação de N . Se isto não ocorre dizemos que f *inverte a orientação em x* .

Seja $x \in M$ um ponto regular. Dizemos que o grau de f no ponto x é igual a 1 se f preserva a orientação em x . Denotaremos $\deg_x f = 1$. Se f inverte a orientação em x , então o grau de f no ponto x é dito ser igual a -1 , e denotamos $\deg_x f = -1$. Para cada valor regular $y \in N$ definimos também o grau de f sobre y como sendo

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x f.$$

Se $f^{-1}(y)$ for vazio, então diremos que $\deg(f, y) = 0$. Observe que $f^{-1}(y)$ tem um número finito de pontos, pois M é compacta.

O grau de uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$, denotado por $\deg f$, é definido como sendo o grau de uma aplicação h , $\deg(h, z)$, onde $h : M \rightarrow N$ é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ homotópica a f e $z \in N$ é um valor regular para h . Por resultados de Hirsch [14], uma tal aplicação h existe e $\deg f$ independe da escolha de h e z . Se N é compacta, então $f_*[M] = (\deg f)[N]$ em $H_n(N; \mathbb{Z})$, com $[M]$ e $[N]$ classes fundamentais de M e N respectivamente.

1.4 Nós e enlaçamentos

Todos as definições e resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [28].

Considerações gerais

Definição 1.4.1. *Um subconjunto K de um espaço X é um nó p -dimensional em X se K é homeomorfo a uma esfera S^p . Mais geralmente, K é um enlaçamento se é homeomorfo a uma união disjunta $S^{p_1} \sqcup \dots \sqcup S^{p_r}$ de uma ou mais esferas. Dois nós ou enlaçamentos K e K' são equivalentes se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $h(K) = K'$.*

Alguns autores consideram nós como mergulhos de $K : S^p \rightarrow S^n$ preferivelmente à subconjuntos como na definição anterior. Quando o espaço X da definição anterior for a esfera S^n , será, em geral, mais conveniente usarmos esta definição. Não obstante, usaremos o mesmo símbolo K para denotar tanto a aplicação K quanto sua imagem $K(S^p)$ em S^n .

Definição 1.4.2. *Seja V uma subvariedade da variedade M . Uma isotopia de V em M é uma família de mergulhos f_t , $t \in [0, 1]$, de V em M , tal que f_0 é a aplicação inclusão e a função F definida por $F(t, x) = f_t(x)$ é simultaneamente contínua em t e em x . As aplicações f_0 e f_1 são chamadas mergulhos isotópicos. Quando $V = M$ e cada f_t é um difeomorfismo com f_0 igual a aplicação identidade em M , então F é chamada difeotopia ou isotopia ambiente.*

Definição 1.4.3. *Dois nós K e K' num espaço X são ditos isotópicos se existe uma isotopia ambiente $\{h_t\}$ de X tal que $h_1(K) = K'$.*

Obviamente, se dois nós são isotópicos, então eles são equivalentes.

Será comum falarmos nesta seção do tipo de um nó; pois bem, diremos que dois nós têm o mesmo tipo se eles são equivalentes, e que são de tipos distintos se não são equivalentes.

Teorema 1.4.4. (TEOREMA DA SEPARAÇÃO E BROUWER) *Se K é um nó $(n-1)$ -dimensional em $\mathbb{R}^n$ (ou S^n), então $\mathbb{R}^n - K$ (ou $S^n - K$) tem exatamente duas componentes conexas e K é o bordo de cada uma delas.*

Definição 1.4.5. *Seja X uma variedade de dimensão n e M uma variedade de dimensão m , $n < m$, ambas sem bordo. Por uma vizinhança tubular de X em M entendemos um mergulho $\mathcal{N} : X \times D^{m-n} \rightarrow M$ tal que $\mathcal{N}(x, 0) = x$ para todo $x \in X$.*

Nesta definição, como em todo este trabalho, entendemos D^{m-n} como o disco unitário $(m-n)$ -dimensional em $\mathbb{R}^{m-n}$ com centro na origem. Por exemplo, uma vizinhança tubular

de um nó K de dimensão 1 em $\mathbb{R}^3$ é um toro sólido $S^1 \times D^2$ cujo *cerne* é K . Entendemos por *cerne* de um toro $S^1 \times D^2$ o subconjunto $S^1 \times \{0\}$ deste.

Notação: Em casos em que a variedade X da definição anterior for um nó K , denotaremos sua vizinhança tubular por $\mathcal{N}_K$.

Definição 1.4.6. *Seja M uma variedade n -dimensional e $f : D^k \rightarrow M$ um mergulho. Dizemos que f é liso se f estende a um mergulho $\bar{f} : U \rightarrow M$, onde U é uma vizinhança de D^k em $\mathbb{R}^n$ ($D^k \subset \mathbb{R}^n$ da maneira trivial). Também dizemos, neste caso, que o subconjunto $f(D^k)$ de M é um disco liso.*

Teorema 1.4.7. *Um nó k -dimensional K em S^n , $k < n$, é equivalente ao nó trivial $S^k \subset S^n$ se, e somente se, K é o bordo de um $(k+1)$ -disco liso em S^n .*

Definição 1.4.8. *Seja K um nó k -dimensional numa n -variedade M . Diremos que K é localmente liso em $x \in K$ se existe uma vizinhança fechada V de x em M tal que $(V, K \cap V)$ é homeomorfo, como um par, ao par de discos usuais (D^n, D^k) . Se tal propriedade é válida para todo ponto de K diremos que K é liso. Ainda mais, diremos que um nó K em M é suave se é diferenciável.*

O Grupo de um nó

Se K é um nó (ou um enlaçamento) $(n-2)$ -dimensional em $\mathbb{R}^n$, o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^n - K)$ do seu complementar será chamado, simplesmente, o *grupo de K* . Note que o grupo é o mesmo, a menos de isomorfismo, se consideramos o nó em S^n ao invés de em $\mathbb{R}^n$. Deveras, temos o seguinte:

Proposição 1.4.9. *Se B é qualquer subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n - B$ é conexo por caminhos e $n \geq 3$, então a inclusão induz um isomorfismo $i_\# : \pi_1(\mathbb{R}^n - B) \rightarrow \pi_1(S^n - B)$.*

A inclusão natural $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$ é o nó trivial (ou não-enodamento) de codimensão 2.

Proposição 1.4.10. *O nó trivial tem grupo $\pi_1(S^n - S^{n-2}) \approx \mathbb{Z}$.*

Observação 1.4.11. *O grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ de um nó suave é isomorfo aos grupos $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathcal{N}_K)$ e $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathring{\mathcal{N}}_K)$. De fato, o complementar $\mathbb{R}^3 - K$ e o exterior $\mathbb{R}^3 - \mathring{\mathcal{N}}_K$ tem o mesmo tipo de homotopia por uma retração de deformação óbvia.*

Nós toroidais

Uma aplicação $f : S^1 \rightarrow T^2$, onde T^2 é o toro $S^1 \times S^1$, pode ser considerada, uma vez que S^1 é orientada, como um laço representando um elemento $[f]$ de $\pi_1(T^2) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pontos bases são imateriais neste caso, já que $\pi_1(T^2)$ é abeliano. Então $[f]$ pode ser escrito em termos da base longitude-meridiano como $[f] = \prec a, b \succ$. Assim a longitude tem classe $\prec 1, 0 \succ$ e o meridiano $\prec 0, 1 \succ$.

Observação 1.4.12. *Diferentemente do comum, estamos denotando classes em $\pi_1(T^2)$ com os símbolos $\prec \cdot, \cdot \succ$ não apenas para que não haja confusão com demais notações semelhantes e que já são utilizadas neste trabalho para outros fins, mas porque, uma vez de posse do próximo resultado que apresentamos, passaremos a tratar os mergulhos de S^1 em T^2 especificando sua classe em $\pi_1(T^2)$. Desta forma, a notação $\prec \cdot, \cdot \succ$ servirá, sobretudo, para representar nós específicos em T^2 .*

Teorema 1.4.13. *Uma classe $\prec a, b \succ$ em $\pi_1(T^2)$ é representada por um mergulho $S^1 \rightarrow T^2$ se, e somente se, $a = b = 0$ ou $\text{mdc}(a, b) = 1$.*

Escolhidos inteiros p e q primos entre si, o nó toroidal $T_{p,q}$ de tipo $\prec p, q \succ$ é o nó que “enrola” em torno do toro sólido p vezes na direção longitudinal e q vezes na direção meridional. O grupo de um tal nó $T_{p,q}$ pode ser determinado sem muito trabalho encontrando-se sua apresentação que, nestes termos, é dada por

$$G_{p,q} = \langle x, y : x^p = y^q \rangle.$$

Pode-se classificar os tipos de nós toroidais observando-se que: $T_{\pm 1, q}$ e $T_{p, \pm 1}$ são de tipo trivial; e o tipo de $T_{p,q}$ é imutável por mudança de sinal de p ou de q , ou por permutação de p e q .

Teorema 1.4.14. *Se $1 < p < q$, então o grupo $G_{p,q}$ determina o par p, q .*

Corolário 1.4.15. *Existem infinitos tipos de nós toroidais.*

Dado um grupo G vamos denotar por $Z(G)$ o seu *centro*, ou seja, o subgrupo $Z(G) = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}$. Além disso, dado um elemento qualquer $g \in G$ vamos escrever $\langle g \rangle$ para expressar o *subgrupo de G gerado por g* , ou seja, $\langle g \rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Se C é o subgrupo cíclico (infinito) de $G = G_{p,q}$ gerado pelo elemento $x^p (= y^q)$, pode-se demonstrar facilmente que C é subgrupo de $Z(G)$, que C é normal em G e que G/C é o produto livre dos grupos cíclicos $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{Z}_q$. Escrevemos $G/C \approx \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$. Além disso, é apenas um simples exercício de Álgebra provar que o centro de um produto livre de quaisquer dois grupos não triviais consiste apenas do elemento identidade. Sendo assim, $Z(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q) = 1$. Concluimos daí que o grupo C é exatamente o centro de G . Este resultado será utilizado no terceiro capítulo deste texto e, por isso, o apresentamos sumariamente no seguinte:

Lema 1.4.16. $Z(G_{p,q}) \approx \langle x^p \rangle = \langle y^q \rangle$ e $G_{p,q}/Z(G_{p,q}) \approx \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$.

Nós girados

Em $\mathbb{R}^4$, considere os subconjuntos $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_3 \geq 0\}$, obviamente com bordo, e $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 0, 0)\}$. Podemos rotacionar um ponto $x = (x_1, x_2, x_3, 0)$ de $\mathbb{R}_+^3$ em torno de $\mathbb{R}^2$ de acordo com a fórmula

$$x_\theta = (x_1, x_2, x_3 \cos \theta, x_3 \sin \theta).$$

Defina o *giro* X° de qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}_+^3$ como sendo o subconjunto do $\mathbb{R}^4$

$$X^\circ = \{x_\theta : x \in X, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Para obter um nó em $\mathbb{R}^4$, escolha um arco A em $\mathbb{R}_+^3$ com pontos finais em $\mathbb{R}^2$. Então A° é uma 2-esfera em $\mathbb{R}^4$, que diremos ser um *nó girado*. A próxima proposição mostra que o grupo de A° é isomorfo a $\pi_1(\mathbb{R}_+^3 - A)$ que é por sua vez isomorfo ao grupo do nó $A \cup L$ em $\mathbb{R}^3$, onde $L \subset \mathbb{R}^2$ é o segmento ligando os pontos finais de A .

Proposição 1.4.17. *O nó girado A° em $\mathbb{R}^4$ tem o mesmo grupo do nó $A \cup L$ em $\mathbb{R}^3$.*

Agora, se A é pontualmente linear e intercepta $\mathbb{R}^2$ transversalmente, é fácil ver que A° é localmente liso.

Proposição 1.4.18. *Existem infinitos nós localmente lisos não-equivalentes de S^2 em $\mathbb{R}^4$.*

Proposição 1.4.19. *Se X é um subconjunto aberto e conexo por caminhos de $\mathbb{R}_+^3$, tal que $X \cap \mathbb{R}^2 \neq \emptyset$, então a inclusão $i : X \rightarrow X^\circ$ induz um isomorfismo $i_\# : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X^\circ)$.*

Será interessante em nosso trabalho considerarmos $X^\circ \subset \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} \cong S^4$. Note que isto pode ser feito com total naturalidade e que, em face da Proposição 1.4.9, temos provado que o grupo de um nó girado visto como subconjunto de $\mathbb{R}^4$ ou de S^4 é o mesmo, ou seja, $\pi_1(S^4 - A^\circ) \approx \pi_1(\mathbb{R}^4 - A^\circ)$ e este último, pela Proposição 1.4.17, é homeomorfo a $\pi_1(\mathbb{R}^3 - A \cup L)$ que é por sua vez homeomorfo a $\pi_1(S^3 - A \cup L)$.

Para pormos fim a esta seção observe que o processo de giro de um nó pode ser iterado de modo a se obter, a partir de um nó 1-dimensional em $\mathbb{R}_+^3$, um nó $(n-2)$ -dimensional em S^n , qualquer que seja o inteiro $n \geq 4$ previamente fixado. Construções neste sentido serão realizadas no Capítulo 3 e constituirão uma ferramenta essencial para demonstrarmos alguns dos mais importantes resultados daquele capítulo.

1.5 Mergulho de produtos de esferas

Dedicamos esta última seção deste capítulo para inserirmos algumas terminologias e resultados envolvendo a existência de mergulhos de produtos de três esferas em codimensão 1, bem como algumas de suas propriedades invariantes.

Em todo o texto, diremos que um mergulho é suave se é um difeomorfismo.

Sobre a existência de mergulhos de $S^p \times S^q \times S^r$ em $S^{p+q+r+1}$

Nesta seção e em diversas ocasiões neste trabalho, vamos identificar as esferas S^{p+q+1} com $S^p \times D^{q+1} \cup D^{p+1} \times S^q$, através dos seguintes difeomorfismos:

$$\begin{aligned} S^{p+q+1} &\cong \partial D^{p+q+2} \\ &\cong \partial(D^{p+1} \times D^{q+1}) \\ &\cong \partial D^{p+1} \times D^{q+1} \cup D^{p+1} \times \partial D^{q+1} \\ &\cong S^p \times D^{q+1} \cup D^{p+1} \times S^q. \end{aligned}$$

Considere as inclusões

$$i : S^p \times S^q \rightarrow S^p \times D^{q+1} \quad \text{e} \quad j : S^p \times D^{q+1} \rightarrow S^p \times D^{q+1} \cup D^{p+1} \times S^q \cong S^{p+q+1}$$

onde identificamos $S^p \times S^q$ com $\partial(S^p \times D^{q+1})$. Tomando-se a composição abaixo

$$f : S^p \times S^q \xrightarrow{i} S^p \times D^{q+1} \xrightarrow{j} S^{p+q+1}$$

conclui-se sobre a existência de um mergulho diferenciável de $S^p \times S^q$ em S^{p+q+1} .

Foi demonstrado em [19, 21, 34] que, se $p, q \geq 2$, então mergulhos de $S^p \times S^q$ em S^{p+q+1} são únicos a menos de difeomorfismo. Abordamos neste trabalho exatamente os casos que não cumprem estes quesitos sobre p e q , a saber, os casos $1 = p \leq q$.

Definição 1.5.1. *Um mergulho $g : S^m \rightarrow S^n$, com $m < n$, é dito trivial se $g(S^m)$ é isotópico à imagem do mergulho dado pela composta de inclusões*

$$S^m \cong S^m \times \{0\} \hookrightarrow S^m \times D^{n-m} \hookrightarrow S^m \times D^{n-m} \cup D^{m+1} \times S^{n-m-1} \cong S^n$$

Neste caso, dizemos que S^m está mergulhada trivialmente em S^n .

Definição 1.5.2. *Um mergulho $g : S^m \times S^n \rightarrow S^{p+q+r+1}$, com $m, n = p, q$ ou r , é trivial se $g(S^m \times S^n)$ é isotópico ao bordo de uma vizinhança tubular da esfera S^m (ou da esfera S^n) mergulhada trivialmente em $S^{p+q+r+1}$. Um tal mergulho pode ser construído com a composta de inclusões*

$$S^m \times S^n \hookrightarrow S^m \times D^{n+1} \hookrightarrow S^m \times D^{n+1} \cup D^{m+1} \times S^n \cong S^{m+n+1} \subset S^{p+q+r+1}$$

onde a última inclusão é um mergulho trivial. Neste caso, dizemos que $S^m \times S^n$ está mergulhada trivialmente em $S^{p+q+r+1}$.

Definição 1.5.3. *Considere um mergulho diferenciável $f : S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$. Dizemos que f é trivial se $f(S^p \times S^q \times S^r)$ é isotópico ao bordo de uma vizinhança tubular de $S^m \times S^n$, com $m, n = p, q$ ou r , mergulhada trivialmente em $S^{p+q+r+1}$. Diremos, neste caso, que $S^p \times S^q \times S^r$ está mergulhada trivialmente em $S^{p+q+r+1}$.*

Proposição 1.5.4. *Existem mergulhos de $S^p \times S^q \times S^r$ em $S^{p+q+r+1}$.*

Prova: Pela Definição 1.5.2, escolhendo-se m e n apropriadamente, encontramos mergulhos triviais $S^p \times S^q \rightarrow S^{p+q+r+1}$, $S^p \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$ e $S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$. Tomando-se os bordos de vizinhanças regulares desses mergulhos se obtém três mergulhos triviais de $S^p \times S^q \times S^r$ em $S^{p+q+r+1}$.

□

Sobre a unicidade de mergulhos triviais

Que mergulhos triviais $S^m \rightarrow S^n$, com $m < n$, são únicos a menos de isotopia (ou de difeomorfismo) segue imediatamente da Definição 1.5.1. Mas quanto aos mergulhos que se referem as outras definições, ou seja, mergulhos $S^m \times S^n \rightarrow S^{p+q+r+1}$, com $m, n = p, q$ ou r , e $S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$, estes podem não ser únicos.

Pode-se mostrar, por exemplo, que para mergulhos $f : S^m \times S^n \rightarrow S^{p+q+r+1}$, temos no máximo dois mergulhos triviais a menos de difeomorfismo. Isto se deve ao fato de que para um tal mergulho podemos fazer duas escolhas, do Tipo 1 ou do Tipo 2, sendo a de Tipo 1 quando $f(S^m \times S^n)$ borda $S^m \times D^{n+1}$ em $S^{p+q+r+1}$, e a de Tipo 2 quando $f(S^m \times S^n)$ borda $D^{m+1} \times S^n$ em $S^{p+q+r+1}$. Em [21] foi mostrado que, para $r = 0$ e $p, q \geq 2$, todo mergulho $S^p \times S^q \rightarrow S^{p+q+1}$ é trivial. Também naquele trabalho, foi mostrado que, para $r = 1$, considerando um mergulho $f : S^p \times S^q \rightarrow S^{p+q+2}$, pode ocorrer que f seja do Tipo 1 e não seja do Tipo 2, e que a coincidência entre os dois tipos somente ocorre sob algumas condições adicionais, as quais não mencionamos aqui, mas podem também ser encontradas em [21, Teorema 1.9 e Observação 6.3].

No caso de mergulhos $f : S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$, temos seis mergulhos triviais a menos de difeomorfismo. Isto se deve ao fato de, neste caso, termos três escolhas para a imagem de f , a saber, as de: Tipo 1: quando $f(S^p \times S^q \times S^r)$ borda $S^p \times S^q \times D^{r+1}$ em $S^{p+q+r+1}$; Tipo 2: quando $f(S^p \times S^q \times S^r)$ borda $S^p \times D^{q+1} \times S^r$ em $S^{p+q+r+1}$; e Tipo 3: quando $f(S^p \times S^q \times S^r)$ borda $D^{p+1} \times S^q \times S^r$ em $S^{p+q+r+1}$; e para cada destes temos ainda duas escolhas para o mergulho trivial $S^m \times S^n \rightarrow S^{p+q+r+1}$, como já temos visto.

O fato é que não sabemos se a unicidade é ou não válida para mergulhos triviais de produtos de duas ou de três esferas, com $S^m \times S^n \rightarrow S^{p+q+r+1}$ e $S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$, e um problema natural é analisar as relações entre os seis tipos de mergulhos triviais. Neste trabalho, como já ressaltamos, vamos estudar os mergulhos $S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$ no caso em que $p = 1$.

Sobre o número de componentes de $S^{p+q+r+1} - f(S^p \times S^q \times S^r)$

Vamos mostrar, neste penúltimo tópico preliminar, que apesar de todas as particularidades que possa ter um mergulho suave $S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$, com $1 \leq p \leq q \leq r$, ele sempre desconecta a esfera $S^{p+q+r+1}$ em duas componentes.

Proposição 1.5.5. *Seja $f : S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$ um mergulho suave. Então $S^{p+q+r+1} - f(S^p \times S^q \times S^r)$ possui duas componentes conexas.*

Prova: Vamos calcular o grupo de homologia $H_0(S^{p+q+r+1} - f(S^p \times S^q \times S^r))$. Por simplicidade, denote $X = S^p \times S^q \times S^r$ e $Y = S^{p+q+r+1}$. Sabemos que

$$\tilde{H}_0(Y - f(X)) \oplus \mathbb{Z} \approx H_0(Y - f(X)).$$

Além disso, pela Dualidade de Alexander, tem-se

$$\tilde{H}^n(f(X)) \approx \tilde{H}_{p+q+r-n}(Y - f(X))$$

E em particular $\tilde{H}^{p+q+r}(f(X)) \approx \tilde{H}_0(Y - f(X))$. Onde $\tilde{H}_0(Y - f(X)) \approx \mathbb{Z}$. Portanto, $H_0(Y - f(X)) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $Y - f(X)$ possui duas componentes conexas. Isto completa a prova. $\square$

1.6 Topologia Linear por Partes (PL)

Muitas definições e resultados de Topologia Linear por Partes (PL) serão utilizados principalmente no último capítulo deste trabalho. Não poremos aqui tal conteúdo, mas gostaríamos de deixar registrado que as notações, terminologias e resultados básicos que utilizaremos são os mesmos apresentados por C. P. Rourke e B. J Sanderson em [30].

Concluimos aqui nossa breve exposição e argumentação sobre os resultados básicos que serão utilizados no limiar do restante de todo este trabalho.

✓

Difeomorfismo de produtos de esferas

O objetivo deste capítulo é caracterizar todos os automorfismos de $H_p(M; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^n$ que são realizados como isomorfismos induzidos por difeomorfismos de M , onde $M = \prod_n S^p$, $p \geq 1$, $n \geq 2$. Isto foi desenvolvido por L. A. Lucas em [20]. Antes, porém, de nos embrenharmos nesta empresa, dedicaremos a primeira seção deste capítulo às construções algébricas que nos serão úteis na empreita da classificação das matrizes que representam automorfismos de M . Desde já fixamos $GL(n; \mathbb{Z})$ para denotar o grupo das matrizes de ordem n cujo determinante é ± 1 , com as operações usuais de matrizes.

2.1 Algumas manipulações algébricas

Definição 2.1.1. *Seja $\mathcal{S}_n$ o grupo das permutações de ordem n , ou seja, $\mathcal{S}_n$ é o grupo das bijeções $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Para cada $\sigma \in \mathcal{S}_n$, defina a matriz $A_\sigma = (a_{ij}) \in GL(n; \mathbb{Z})$ fazendo*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Vamos construir um argumento para identificarmos o grupo das permutações $\mathcal{S}_n$ com um subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z})$. Nossa construção se inicia com o seguinte lema:

Lema 2.1.2. A aplicação $\gamma : \mathcal{S}_n \rightarrow GL(n; \mathbb{Z})$ dada por $\gamma(\sigma) = A_\sigma$ é um monomorfismo.

Prova: Provemos inicialmente que γ é um homomorfismo. Para tanto, considere permutações arbitrárias σ e μ em $\mathcal{S}_n$, com respectivas matrizes $A_\sigma = (a_{ij})$ e $A_\mu = (b_{jk})$ dadas em acordo com a definição anterior, ou seja,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad e \quad b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \mu(k) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Denotando $A_\sigma A_\mu = C = (c_{ik})$ podemos escrever $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$. Agora, pelas definições de A_σ e A_μ , temos

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i\mu(k)} b_{\mu(k)k} = a_{i\mu(k)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} c_{ik} = 1 &\iff a_{i\mu(k)} = 1 \iff i = \sigma(\mu(k)) \\ c_{ik} = 0 &\iff a_{i\mu(k)} = 0 \iff i \neq \sigma(\mu(k)). \end{aligned}$$

Mas isto implica em $C = A_{\sigma \circ \mu} = \gamma(\sigma \circ \mu)$. Temos, então,

$$\gamma(\sigma) \cdot \gamma(\mu) = A_\sigma A_\mu = A_{\sigma \circ \mu} = \gamma(\sigma \circ \mu).$$

E portanto γ é um homomorfismo.

Provemos agora a injetividade de γ . Sejam $\gamma(\sigma) = A_\sigma = (a_{ij})$ e $\gamma(\mu) = A_\mu = (b_{ij})$, com σ distinta de μ . Sendo assim, existe um inteiro l , $1 \leq l \leq n$, tal que $\sigma(l) \neq \mu(l)$. Escreva $k = \sigma(l)$. Então temos $a_{kl} = 1$, mas $b_{kl} = 0$. Logo, $a_{kl} \neq b_{kl}$ e, deste modo, $A_\sigma \neq A_\mu$. Portanto $\gamma(\sigma) \neq \gamma(\mu)$ e γ é injetivo. $\square$

Tendo provado este lema, obtemos um isomorfismo $\gamma : \mathcal{S}_n \rightarrow \gamma(\mathcal{S}_n)$, o qual nos permitirá, a partir de agora, identificarmos o grupo das permutações $\mathcal{S}_n$ com o subgrupo $\gamma(\mathcal{S}_n)$ de $GL(n; \mathbb{Z})$. Que $\gamma(\mathcal{S}_n)$ é de fato um subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z})$ segue diretamente do fato de ser $\mathcal{S}_n$ um grupo e γ um homomorfismo.

Seja $\eta : GL(n; \mathbb{Z}) \rightarrow GL(n; \mathbb{Z}_2)$, onde $\mathbb{Z}_2$ é o grupo cíclico de ordem 2, o homomorfismo canônico definido por $\eta(A) = \bar{A}$, para toda matriz A em $GL(n; \mathbb{Z})$, isto é, dada $A = (a_{ij})$ em $GL(n; \mathbb{Z})$, fazemos $\eta(A) = (\bar{a}_{ij})$, onde $\bar{a}_{ij}$ indica a classe de a_{ij} em $\mathbb{Z}_2$. Note que, para quaisquer $A, B \in GL(n; \mathbb{Z})$, tem-se:

$$\eta(AB) = \overline{AB} = \bar{A}\bar{B} = \eta(A)\eta(B)$$

Sendo assim, η um homomorfismo e $\eta(\mathcal{S}_n)$ é um subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z}_2)$.

Agora vamos definir, através do homomorfismo η , um subconjunto de $GL(n; \mathbb{Z})$ que provaremos, logo após formalizada sua definição, ser também um subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z})$.

Definição 2.1.3. Defina $G' = \eta^{-1}(\eta(\mathcal{S}_n))$.

Note que uma matriz A de $GL(n; \mathbb{Z})$ está em G' se, e somente se, cada uma de suas linhas e colunas contém exatamente um inteiro ímpar.

Lema 2.1.4. G' munido da multiplicação usual de matrizes é um subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z})$.

Prova: Denote por I_n a matriz identidade de ordem n , a qual é o elemento neutro do grupo $GL(n; \mathbb{Z})$ e, conseqüentemente, do grupo $\mathcal{S}_n$. Claramente $I_n \in G'$, pois $\eta(I_n) = \bar{I}_n = I_n$.

Sejam $A, B \in G'$; então $\eta(A)$ e $\eta(B)$ estão em $\eta(\mathcal{S}_n)$, e temos: $\eta(AB) = \eta(A)\eta(B) \in \eta(\mathcal{S}_n)$, pois, como vimos, $\eta(\mathcal{S}_n)$ é um grupo. Logo $AB \in G'$.

Seja $A \in G'$; então $\eta(A) \in \eta(\mathcal{S}_n)$. Sendo $\eta(\mathcal{S}_n)$ um grupo, $[\eta(A)]^{-1} \in \eta(\mathcal{S}_n)$. Agora, como η é homomorfismo segue $[\eta(A)]^{-1} = \eta(A^{-1})$. Portanto $A^{-1} \in G'$.

Isto prova que G' é um subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z})$. □

Lema 2.1.5. η é um epimorfismo.

Prova: Já vimos que η é homomorfismo. Basta-nos então provar que η é sobrejetor. Para isto, seja A uma matriz arbitrária em $GL(n; \mathbb{Z}_2)$. Então A tem apenas entradas $\bar{0}$ e $\bar{1}$, e seu determinante é não nulo. Tome a matriz B tal que suas entradas correspondam às de A com 1 no lugar de $\bar{1}$ e 0 no lugar de $\bar{0}$. Claramente $B \in GL(n; \mathbb{Z})$ e $\eta(B) = A$. □

Notação: Se H é um subgrupo de um grupo G , denotaremos por $[G : H]$ o índice de H em G , o qual, pelo teorema de Lagrange, é igual a $\frac{|G|}{|H|}$, onde $|G|$ denota a ordem do grupo G e $|H|$ a ordem do grupo H . Resumindo, $[G : H]|H| = |G|$.

Lema 2.1.6. $|GL(n; \mathbb{Z}_2)| = 2^{(n^2-n)/2}(2^1 - 1)(2^2 - 1) \cdots (2^n - 1)$

Prova: Para se construir uma matriz A em $GL(n; \mathbb{Z}_2)$, observe inicialmente que seu determinante deve ser não-nulo, ou seja, A é não singular. Escreva A como matriz linha de seus vetores coluna, $A = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n]$. Sendo A não singular, $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ deve ser um conjunto linearmente independente sobre $\mathbb{Z}_2$. Com isso, vemos que existem $2^n - 1$ escolhas possíveis para C_1 , já que este não pode ser o vetor nulo. Uma vez escolhidos os vetores $C_1, \dots, C_k$, o vetor C_{k+1} pode ser escolhido como qualquer vetor que não pertença ao espaço gerado pelos vetores linearmente independentes $C_1, \dots, C_k$. Como este espaço contém 2^k vetores e existem 2^n vetores no total, C_{k+1} pode ser escolhido de $2^n - 2^k$ modos distintos. Segue que a matriz A pode ser construída de $(2^n - 1)(2^n - 2) \cdots (2^n - 2^{n-1})$ maneiras. Portanto, a ordem do grupo $GL(n; \mathbb{Z}_2)$ é:

$$\begin{aligned} |GL(n; \mathbb{Z}_2)| &= (2^n - 1)(2^n - 2) \cdots (2^n - 2^{n-1}) \\ &= (2^n - 1)2(2^{n-1} - 1) \cdots 2^{n-1}(2^1 - 1) \\ &= 2^{1+\cdots+n-1}(2^1 - 1)(2^2 - 1) \cdots (2^n - 1) \\ &= 2^{(n^2-n)/2}(2^1 - 1)(2^2 - 1) \cdots (2^n - 1) \end{aligned} \quad \square$$

Lema 2.1.7. $[GL(n; \mathbb{Z}) : G'] = [GL(n; \mathbb{Z}_2) : \eta(\mathcal{S}_n)]$

Prova: Seja $m = [GL(n; \mathbb{Z}_2) : \eta(\mathcal{S}_n)]$. Considere as classes laterais à direita de $\mathcal{S} = \eta(\mathcal{S}_n)$ em $GL(n; \mathbb{Z}_2)$ dadas por $\mathcal{S}k_1, \mathcal{S}k_2, \dots, \mathcal{S}k_m$, onde $k_1, k_2, \dots, k_m \in GL(n; \mathbb{Z}_2)$ são representantes de classes. Como η é um epimorfismo, existem elementos $g_1, g_2, \dots, g_m \in GL(n; \mathbb{Z})$ tais que $\eta(g_j) = k_j$, para todo $j = 1, \dots, m$.

Afirmamos que $G'g_1, G'g_2, \dots, G'g_m$ são classes laterais à direita de G' em $GL(n; \mathbb{Z})$, todas distintas. De fato: se $G'g_i = G'g_j$ então $g_j g_i^{-1} \in G'$. E segue $\eta(g_j g_i^{-1}) = \eta(g_j) \eta(g_i^{-1}) = \eta(g_j) \eta(g_i)^{-1} = k_j k_i^{-1} \in \mathcal{S}$. Logo, $\mathcal{S}k_i = \mathcal{S}k_j$ e, portanto, $i = j$. Isto prova que as classes $G'g_1, G'g_2, \dots, G'g_m$ são todas distintas.

Para completar a prova do lema resta-nos provar que $G'g_1, G'g_2, \dots, G'g_m$ são as únicas classes à direita de G' em $GL(n; \mathbb{Z})$. Para tanto, seja $g \in GL(n; \mathbb{Z})$ fixado arbitrariamente; vamos mostrar que $g \in G'g_j$ para algum j , $1 \leq j \leq m$. Ora, temos $\eta(g) \in GL(n; \mathbb{Z}_2)$, então temos também $\eta(g) \in \mathcal{S}k_j$ para algum inteiro j , $1 \leq j \leq m$, ou seja, existe algum $\sigma \in \mathcal{S}$ tal que $\eta(g) = \sigma k_j$. Tome $x = g g_j^{-1}$. Temos, então, $\eta(x) = \eta(g) \eta(g_j)^{-1} = \sigma k_j k_j^{-1} = \sigma \in \mathcal{S}$. Logo $x \in \eta^{-1}(\eta(\mathcal{S}_n)) = G'$, ou seja, $g g_j^{-1} \in G'$, donde $g \in G'g_j$.

Provado tudo isto, segue que $\{G'g_1, G'g_2, \dots, G'g_m\}$ consiste de todas as classes à direita de G' em $GL(n; \mathbb{Z})$ e, portanto,

$$[GL(n; \mathbb{Z}) : G'] = [GL(n; \mathbb{Z}_2) : \eta(\mathcal{S}_n)].$$

□

Proposição 2.1.8. $[GL(n; \mathbb{Z}) : G'] = \frac{2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^n-1)}{n!}$

Prova: Sabemos que $|\mathcal{S}_n| = n!$. Assim, como η é homomorfismo, também $|\eta(\mathcal{S}_n)| = n!$. Agora, utilizando os dois lemas precedentes e o Teorema de Lagrange, temos:

$$[GL(n; \mathbb{Z}) : G'] = [GL(n; \mathbb{Z}_2) : \eta(\mathcal{S}_n)] = \frac{|GL(n; \mathbb{Z}_2)|}{|\eta(\mathcal{S}_n)|} = \frac{2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^n-1)}{n!}$$

□

Notação: Daqui por diante, dada uma matriz X de ordem n_1 e outra Y de ordem n_2 , denotaremos por $X \oplus Y$ a matriz de ordem $n = n_1 + n_2$ definida como

$$X \oplus Y = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

Notação: Denotaremos por R , em todo este capítulo, a matriz diagonal de ordem n definida como

$$R = [-1] \oplus I_{n-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

Note que sendo R definida desta forma, temos $R^2 = I_n$, de modo que o conjunto $R' = \{I_n, R\}$, munido da multiplicação usual de matrizes, é um grupo, o qual é subgrupo tanto de G' quanto de $GL(n; \mathbb{Z})$. Além disso, é óbvio que $R' \approx \mathbb{Z}_2$.

Definição 2.1.9. *Seja G'' o subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z})$ gerado pelos subgrupos $\mathcal{S}_n$ e R' . Denotamos, como comumente, $G'' = \langle \mathcal{S}_n \cup R' \rangle$.*

Escrevamos o conjunto $\mathcal{S}_n \cup R'$ explicitando os seus elementos com a seguinte notação:

$$\mathcal{S}_n \cup R' = \{R, I_n, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}, \dots, A_{\sigma_{n!}}\}.$$

Como é sabido, o subgrupo gerado por um subconjunto não vazio é o conjunto de todas as suas palavras. Sendo assim,

$$\langle \mathcal{S}_n \cup R' \rangle = \{B_1^{r_1} B_2^{r_2} \cdots B_m^{r_m} : B_s \in \mathcal{S}_n \cup R', r_s = \pm 1, 1 \leq s \leq m, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Denote $\mathcal{S}_n R = \{AR : A \in \mathcal{S}_n\}$. Vamos provar que $\langle \mathcal{S}_n R \rangle = \langle \mathcal{S}_n \cup R' \rangle = G''$. Com efeito, é evidente que $\mathcal{S}_n R \subset \langle \mathcal{S}_n \cup R' \rangle$. Logo $\langle \mathcal{S}_n R \rangle$ é subgrupo de $\langle \mathcal{S}_n \cup R' \rangle$. Por outro lado, para todo $A \in \mathcal{S}_n \cup R'$ podemos escrever

$$A = AI_n = A(R^2) = (AR)(I_n R) \in \langle \mathcal{S}_n R \rangle.$$

Desse modo, temos provado que $\mathcal{S}_n \cup R' \subset \langle \mathcal{S}_n R \rangle$ e, assim, $\langle \mathcal{S}_n \cup R' \rangle$ é subgrupo de $\langle \mathcal{S}_n R \rangle$. E portanto, $\langle \mathcal{S}_n R \rangle = \langle \mathcal{S}_n \cup R' \rangle = G''$.

Note que uma matriz A de $GL(n; \mathbb{Z})$ pertence ao subgrupo G'' se, e somente se, cada uma de suas linhas e colunas contém exatamente um inteiro não nulo, sendo estes iguais a ± 1 . Esta importante observação será lembrada oportunamente.

Proposição 2.1.10. *O grupo G'' é finito de ordem $2^n n!$. Ainda mais, G'' é isomorfo ao produto direto de $(\mathbb{Z}_2)^n$ com $\mathcal{S}_n$.*

Prova: Inicialmente, considere o grupo $\mathbb{Z}_2$ em sua forma multiplicativa, isto é, $\mathbb{Z}_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$. Faça a identificação de $(\mathbb{Z}_2)^n$ com um subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z}_2)$ através do homomorfismo $\nu : (\mathbb{Z}_2)^n \rightarrow GL(n; \mathbb{Z}_2)$ dado por

$$(z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{\nu} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

Considere a seqüência

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^n \xrightarrow{\nu} G'' \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}_n \longrightarrow 1$$

onde ω é o homomorfismo dado pela congruência módulo 2, ou seja, $\omega(A) = \bar{A}$, onde $-1 \equiv 1 \pmod{2}$. Deste modo, é fácil ver que a seqüência acima é uma seqüência exata curta, já que $\omega(A) = I_n$ se, e somente se, $A = (a_{ij})$ é uma matriz diagonal tal que $a_{ii} = \pm 1$ para todo i , com $i = 1, \dots, n$. E sendo assim, temos $A = \nu(a_{11}, \dots, a_{nn})$, com $(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in (\mathbb{Z}_2)^n$.

Considere a inclusão $G'' \xleftarrow{j} \mathcal{S}_n$. Ficamos então com a seqüência

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^n \xrightarrow{\nu} G'' \xrightleftharpoons[j]{\omega} \mathcal{S}_n \longrightarrow 1$$

onde $\omega \circ j = 1_{\mathcal{S}_n}$. Logo, esta seqüência cinde e, portanto, G'' é produto direto dos grupos $(\mathbb{Z}_2)^n$ e $\mathcal{S}_n$. Agora, uma vez que $|(\mathbb{Z}_2)^n| = 2^n$ e $|\mathcal{S}_n| = n!$, segue $|G''| = 2^n n!$. $\square$

Os grupos definidos nesta seção, juntamente com suas propriedades demonstradas nos lemas e proposições precedentes, serão bastante úteis na próxima seção, onde faremos uma classificação das matrizes que representam automorfismos. Antes, porém, de nos empenharmos neste propósito, introduzimos mais um importante resultado para o qual não apresentamos a prova que se resume em manipulações algébricas de matrizes e pode ser encontrada na integral em [20].

Notação: Denotaremos no decorrer deste capítulo, a partir de agora, por T e U as seguintes matrizes de $GL(n; \mathbb{Z})$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$$

Note que $\det T = 1 = \det U$.

Lema 2.1.11. *Com as notações acima, temos que $GL(n; \mathbb{Z})$ é gerado por $\mathcal{S}_n$, $\{R\}$ e $\{T\}$, enquanto G' é gerado por $\mathcal{S}_n$, $\{R\}$ e $\{U\}$.*

2.2 Classificação das matrizes que representam automorfismos

Denote por $\star$ um ponto base da esfera S^p , esta com uma orientação fixada, e considere α_i , com $i = 1, \dots, n$, classes de homologia que geram $H_p(M; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^n$, representadas por

$$S^p \times \{\star\} \times \dots \times \{\star\}, \{\star\} \times S^p \times \{\star\} \times \dots \times \{\star\}, \dots, \{\star\} \times \dots \times \{\star\} \times S^p$$

onde $M = \prod^n S^p$ é a variedade definida no início do capítulo.

Definição 2.2.1. *Seja $f : S^p \rightarrow S^p$ uma aplicação; então f induz um homomorfismo no p -ésimo grupo de homologia $f_* : H_p(S^p) \rightarrow H_p(S^p)$. Sendo $H_p(S^p) \approx \mathbb{Z}$, dado um gerador α de $H_p(S^p)$, temos que $f_*(\alpha) = d\alpha$, para algum $d \in \mathbb{Z}$. Este tal inteiro d independe da escolha do gerador α e é denominado o grau da aplicação f . Escrevemos $d = \deg f$.*

Vale observar que esta definição de grau de uma aplicação coincide, nestas particularidades, com aquela dada na Seção 1.3.

Definição 2.2.2. *Seja $\phi : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e defina $\phi_* : H_p(M) \rightarrow H_p(M)$ por*

$$\phi_*(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i$$

onde cada a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, é o grau da aplicação $\phi_{ij} : S^p \rightarrow S^p$ definida pela composição

$$S^p \xrightarrow{k_j} M \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{p_i} S^p$$

onde k_j é a inclusão no j -ésimo fator de M e p_i a i -ésima projeção. Neste termos, chamamos a matriz $A = (a_{ij})$ de matriz da induzida por ϕ na base $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ de $H_p(M; \mathbb{Z})$.

Definição 2.2.3. Dizemos que uma matriz A de $GL(n; \mathbb{Z})$ é realizada por um difeomorfismo de M se existe um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ tal que $[\phi_*] = A$ para ϕ_* definida na base canônica $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ de $H_p(M)$.

Lema 2.2.4. Seja $\phi : M \rightarrow M$ o difeomorfismo que permuta as duas primeiras coordenadas, ou seja, $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$. Então a matriz da induzida por ϕ na base canônica $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ de $H_p(M)$ é dada por

$$[\phi_*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$$

Prova: Escreva $[\phi_*] = (a_{ij})$. De acordo com a Definição 2.2.2, para cada $1 \leq i, j \leq n$, temos $a_{ij} = \deg \phi_{ij}$, onde ϕ_{ij} é dada pela composição $S^p \xrightarrow{k_j} M \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{p_i} S^p$. Pois bem, para $j = 1$, dado $x \in S^p$, $\phi_{i1}(x)$ é, então, obtido pela sequência de aplicações

$$x \xrightarrow{k_1} (x, \star, \dots, \star) \xrightarrow{\phi} (\star, x, \star, \dots, \star) \xrightarrow{p_i} \begin{cases} x & \text{se } i = 2 \\ \star & \text{se } i \neq 2 \end{cases}.$$

Logo, $a_{21} = 1$ enquanto $a_{i1} = 0$ para todo $i \neq 2$. Já $\phi_{i2}(x)$ é dado da seguinte forma:

$$x \xrightarrow{k_2} (\star, x, \star, \dots, \star) \xrightarrow{\phi} (x, \star, \dots, \star) \xrightarrow{p_i} \begin{cases} x & \text{se } i = 1 \\ \star & \text{se } i \neq 1 \end{cases}.$$

De modo que $a_{12} = 1$ e $a_{i2} = 0$ para todo $i \neq 1$. Agora, para $j \geq 3$, não é difícil ver que $\phi_{jj}(x)$ é a aplicação identidade e que, sempre que $i \neq j$, a aplicação ϕ_{ij} será constante, já que a permutação realizada por ϕ ocorre somente entre as duas primeiras posições de $k_j(x)$. Assim, para $j \geq 3$ temos $a_{jj} = 1$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Isto conclui a prova do lema. $\square$

Definição 2.2.5. Considere $S^p = \{x \in \mathbb{R}^{p+1} : \|x\| = 1\}$. Para $1 \leq t \leq p+1$ defina a t -ésima reflexão $r_t : S^p \rightarrow S^p$ por $r_t(x_1, \dots, x_{p+1}) = (x_1, \dots, x_{t-1}, -x_t, x_{t+1}, \dots, x_{p+1})$. O grau de r_t é obviamente igual a -1 .

Lema 2.2.6. Seja $\phi : M \rightarrow M$ o difeomorfismo $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (r_t(x_1), x_2, \dots, x_n)$. Então, qualquer que seja o inteiro t , $1 \leq t \leq p+1$, a matriz da induzida de ϕ na base canônica $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ de $H_p(M)$ é a matriz $R = [-1] \oplus I_{n-1}$.

Prova: Escreva $[\phi_*] = (b_{ij})$. Então, como definido, $b_{ij} = \deg \phi_{ij}$, onde mais uma vez tem-se ϕ_{ij} definido pela composição $S^p \xrightarrow{k_j} M \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{p_i} S^p$. Para $j = 1$, temos, para $x \in S^p$,

$$x \xrightarrow{k_1} (x, \star, \dots, \star) \xrightarrow{\phi} (r_t(x), \star, \dots, \star) \xrightarrow{p_i} \begin{cases} r_t(x) & \text{se } i = 1 \\ \star & \text{se } i \neq 1 \end{cases}.$$

Logo, como o difeomorfismo r_t tem grau -1 , segue que $b_{11} = -1$ e $b_{i1} = 0$ para todo $i > 1$. Já para $j > 1$, note que a primeira posição do vetor $k_j(x)$ será igual a $\star$. Deste modo

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} r_t(\star) & \text{se } i = 1 < j \\ x & \text{se } i = j > 1 \\ \star & \text{se } j \neq i > 1 \end{cases}.$$

Assim, $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j > 1 \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Isto basta para provar que $[\phi_*] = [-1] \oplus I_{n-1}$. □

Vimos na Seção 1.2 que a esfera S^p possui estrutura de H -espaço se, e somente se, $p = 1, 3$ ou 7 . Para $x, y \in S^p$, $p = 1, 3$ ou 7 , denotaremos por xy o produto induzido pela estrutura de H -espaço em S^p . Note que, nestes casos, para todo $x \in S^p$ existe o elemento “inverso” que será denotado por x^{-1} .

Lema 2.2.7. *Para $p = 1, 3$ ou 7 , a aplicação $\lambda : S^p \rightarrow S^p$, $\lambda(x) = x^{-1}$, é de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Prova: Faremos a prova separadamente para cada valor de $p = 1, 3$ e 7 .

1° Caso: Se $p = 1$, temos a aplicação $\lambda : S^1 \rightarrow S^1$. Faça a identificação usual do plano real $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$. Desta maneira, a esfera S^1 consiste dos números complexos unitários, ou seja, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Agora, sabemos que todo complexo unitário $z = a + bi$ possui inverso multiplicativo z^{-1} o qual é idêntico ao conjugado de z , isto é, $z^{-1} = a - bi$, o qual tem ainda norma 1. Como sabido, a aplicação $\lambda_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda_1(x, y) = (x, -y)$ é infinitamente diferenciável. Como além disso S^1 é uma subvariedade $\mathcal{C}^\infty$ do $\mathbb{R}^2$, a aplicação $\lambda = \lambda_1|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ é também infinitamente diferenciável.

2° Caso: Seja $\lambda : S^3 \rightarrow S^3$, $\lambda(x) = x^{-1}$. Podemos agora identificar o espaço $\mathbb{R}^4$ com os quatérnios $\mathcal{Q}$ através da aplicação $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto w = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$. Assim, os elementos da esfera S^3 são identificados com os quatérnios de norma 1. Dado um quatérnio $w = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$, não é difícil notar que $w^{-1} = \overline{w} = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k$, e este é ainda unitário. Segue que a aplicação infinitamente diferenciável $\lambda_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\lambda_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, tem por restrição a S^3 a aplicação $\lambda = \lambda_3|_{S^3} : S^3 \rightarrow S^3$ que, por ser S^3 subvariedade $\mathcal{C}^\infty$ do $\mathbb{R}^4$, é também de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3° Caso: O conjunto dos octônios $\mathcal{O}$ é definido como $\mathcal{O} = \{c = (w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \mathcal{Q}\}$. A multiplicação de dois octônios $c_1 = (w_1, w'_1)$ e $c_2 = (w_2, w'_2)$ é definido por

$$c_1 c_2 = (w_1, w'_1)(w_2, w'_2) = (w_1 w'_2 - \overline{w'_2} w'_1, w'_2 w_1 + w'_1 \overline{w_2}).$$

Os octônios têm um elemento neutro $e = (1, 0)$, o qual satisfaz $ec = ce = c$, para todo $c \in \mathcal{O}$. É natural identificar tal elemento com $1 \in \mathbb{R} \subset \mathcal{O}$. Definimos o conjugado $\bar{c}$ de um octônio $c = (w, w')$ como sendo $\bar{c} = (\overline{w}, -w')$. Então $c\bar{c} = |c|^2 e = (|w|^2 + |w'|^2)e$ pode ser identificado com o número não negativo $|c|^2$. Além disso, $|c|^2 = 0$ se, e somente se, $c = (0, 0)$. Observe que a multiplicação dos octônios é distributiva com relação a adição e que o mesmo constitui uma álgebra de divisão, isto é, valem todos os axiomas de um corpo exceto a comutatividade e a associatividade. De modo semelhante ao realizado nos casos anteriores, os octônios podem ser identificados com o $\mathbb{R}^8$, e a esfera S^7 com os octônios unitários. Para um tal octônio c , é fácil ver que $c^{-1} = \bar{c}$. Segue de modo similar aos anteriores que $\lambda : S^7 \rightarrow S^7$, $\lambda(x) = x^{-1}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

Lema 2.2.8. Para $p = 1, 3$ ou 7 , a aplicação $\phi : M \rightarrow M$ dada por $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2, x_2, \dots, x_n)$ é um difeomorfismo.

Prova: Assuma $p = 1, 3$ ou 7 . É claro que ϕ é diferenciável. Agora, note que a aplicação $\phi^{-1} : M \rightarrow M$, definida como $\phi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2^{-1}, x_2, \dots, x_n)$, é a aplicação inversa de ϕ . Além disso, podemos escrever $\phi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \lambda(x_2), x_2, \dots, x_n)$. Logo, pelo lema anterior, segue que ϕ^{-1} é infinitamente diferenciável. Portanto, ϕ é um difeomorfismo. $\square$

Lema 2.2.9. Considere $p = 1, 3$ ou 7 . A matriz $[\phi_*]$ da induzida pelo difeomorfismo ϕ do lema anterior é a matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$$

Prova: Mais uma vez vamos determinar a matriz $[\phi_*]$ escrevendo $[\phi_*] = (a_{ij})$, onde, pela definição, $a_{ij} = \deg \phi_{ij}$, com ϕ_{ij} definida pela composição $S^p \xrightarrow{k_j} M \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{p_i} S^p$. Neste termos, é fácil notar que

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} \star x & \text{se } i = j = 1, 2, \text{ ou } i = 1 \text{ e } j = 2 \\ x & \text{se } i = j > 2 \\ \star & \text{se } i \neq j \neq 2 \end{cases}$$

E portanto, $[\phi_*] = T$. $\square$

Definição 2.2.10. Para cada $x \in S^p$ fixado, defina as aplicações infinitamente diferenciáveis

$$\theta_x : S^p \rightarrow S^p, \theta_x(y) = y - 2\langle x, y \rangle x \quad \text{e} \quad \varphi_x : S^p \rightarrow S^p, \varphi_x(y) = x - 2\langle x, y \rangle y$$

para y em S^p , e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotando o produto interno usual em $\mathbb{R}^{p+1}$.

Note que realmente as aplicações θ_x e φ_x têm, para todo $x \in S^p$, imagem ainda em S^p . De fato: para todo $y \in S^p$, temos:

$$\begin{aligned} (i) \quad \|\theta_x(y)\|^2 &= \langle \theta_x(y), \theta_x(y) \rangle \\ &= \langle y - 2\langle x, y \rangle x, y - 2\langle x, y \rangle x \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - 2\overline{\langle x, y \rangle} \langle y, x \rangle - 2\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, x \rangle \\ &= \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle^2 - 2\langle x, y \rangle^2 + 4\langle x, y \rangle^2 \|x\|^2 \\ &= 1 - 4\langle x, y \rangle^2 + 4\langle x, y \rangle^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $\|\varphi_x(y)\| = 1$, similarmente ao anterior.

Além disso, θ_x tem a seguinte importante propriedade, da qual não dispõe φ_x :

(iii) θ_x é reflexiva. Com efeito:

$$\begin{aligned}
 \theta_x(\theta_x(y)) &= \theta_x(y) - 2\langle x, \theta_x(y) \rangle x \\
 &= y - 2\langle x, y \rangle x - 2\langle x, y - 2\langle x, y \rangle x \rangle x \\
 &= y - 2\langle x, y \rangle x - 2\langle x, y \rangle x - 2\langle x, -2\langle x, y \rangle x \rangle x \\
 &= y - 4\langle x, y \rangle x + 4\langle x, y \rangle \|x\|^2 x \\
 &= y
 \end{aligned}$$

Lema 2.2.11. Para cada $x \in S^p$, as aplicações θ_x e φ_x tem graus -1 e $1 + (-1)^{p+1}$, respectivamente.

Prova: A primeira afirmação segue diretamente do fato de ser θ_x uma reflexão, o que vê-se por (iii). Para provar a segunda parte, antes de qualquer coisa, observe que, para quaisquer $x, x' \in S^p$, φ_x e $\varphi_{x'}$ são aplicações homotópicas, pois S^p é conexa por caminhos. Agora, como o grau de uma aplicação é invariante por homotopia, por simplicidade, vamos calcular o grau de φ_x para $x = (0, \dots, 0, 1) \in S^p$. Pois bem, neste caso, para $y = (y_1, \dots, y_{p+1}) \in S^p$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varphi_x(y) &= x - 2\langle x, y \rangle y \\
 &= (0, \dots, 0, 1) - 2y_{p+1}(y_1, \dots, y_{p+1}) \\
 &= (-2y_{p+1}y_1, \dots, -2y_{p+1}y_p, 1 - 2y_{p+1}^2).
 \end{aligned}$$

Seja $q = (0, \dots, 0, -1) \in S^p$. Então

$$\varphi_x(y) = q \iff (-2y_{p+1}y_1, \dots, -2y_{p+1}y_p, 1 - 2y_{p+1}^2) = (0, \dots, 0, -1).$$

Isto implica em $\varphi_x^{-1}(q) = \{(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, -1)\}$. Denotamos, agora, $q_+ = (0, \dots, 0, 1)$ e $q_- = (0, \dots, 0, -1)$. Para calcularmos $D\varphi_x(q_+)$ e $D\varphi_x(q_-)$, as derivadas de φ_x aplicadas em q_+ e q_- respectivamente, vamos primeiro especificar os espaços tangentes $\mathcal{T}_{q_+}S^p$ e $\mathcal{T}_{\varphi_x(q_+)}S^p = \mathcal{T}_qS^p = \mathcal{T}_{q_-}S^p$. Como sabido, o espaço tangente a S^p num ponto $u \in S^p$, $\mathcal{T}_uS^p$, consiste dos vetores normais a u no ponto u . Então, $\mathcal{T}_{q_+}S^p$ é o espaço p -dimensional cuja base é $\{\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2, \dots, \partial/\partial y_p\}$. Aqui estamos denotando $(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})$ como coordenadas de $\mathbb{R}^{p+1}$. Vamos fixar a orientação por esta base ordenada. Então, a base orientada dos espaços $\mathcal{T}_qS^p = \mathcal{T}_{q_-}S^p$ é

$$\{\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2, \dots, -\partial/\partial y_p\}.$$

Agora vamos determinar a matriz de $D\varphi_x(q_+)$ em relação às bases acima. Usando a equação $\varphi_x(y) = (-2y_{p+1}y_1, \dots, -2y_{p+1}y_p, 1 - 2y_{p+1}^2)$, tem-se:

$$D\varphi_x(q_+)(\partial/\partial y_1) = (-2y_{p+1}, 0, \dots, 0)|_{y=q_+} = (-2, 0, \dots, 0) = -2(\partial/\partial y_1),$$

$$\vdots$$

$$D\varphi_x(q_+)(\partial/\partial y_{p-1}) = (0, \dots, 0, -2y_{p+1}, 0, 0)|_{y=q_+} = (0, \dots, 0, -2, 0, 0) = -2(\partial/\partial y_{p-1}),$$

$$D\varphi_x(q_+)(\partial/\partial y_p) = (0, \dots, 0, -2y_p, 0)|_{y=q_+} = (0, \dots, 0, -2, 0) = -2(\partial/\partial y_p) = 2(-\partial/\partial y_p).$$

Na forma matricial, podemos escrever $D\varphi_x(q_+)$ como sendo a matriz de ordem p

$$-2I_{p-1} \oplus 2I_1 = \begin{bmatrix} -2I_{p-1} & 0 \\ 0 & 2I_1 \end{bmatrix}.$$

Donde conclui-se que q_+ é um ponto regular e $\deg(\varphi_x, q_+) = (-1)^{p-1} = (-1)^{p+1}$. Com argumentos similares mostra-se que a matriz de $D\varphi_x(q_-)$ é representada pela matriz $2I_p$. Assim, q_- também é um ponto regular e $\deg(\varphi_x, q_-) = 1$. Portanto, q é um valor regular e $\deg \varphi_x = 1 + (-1)^{p+1}$. Isto completa a prova do lema. $\square$

Lema 2.2.12. *Considere p um inteiro positivo ímpar. A matriz da induzida pelo difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$, definido por $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\theta_{x_2}(x_1), x_2, \dots, x_n)$, é a matriz produto UR , ou seja,*

$$[\phi_*] = UR = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$$

Prova: Escrevendo ϕ_{ij} para indicar a composição $S^p \xrightarrow{k_j} M \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{p_i} S^p$, vemos que

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} \theta_*(x) & \text{se } i = j = 1 \\ \theta_x(\star) & \text{se } i = 1 \text{ e } j = 2 \\ x & \text{se } i = j \geq 2 \\ \pm \star & \text{se } i \neq j \neq 2 \end{cases}$$

onde, pelo lema anterior, $\deg \theta_*(x) = -1$. Logo, se escrevemos $[\phi_*] = (a_{ij})$, já temos determinado $a_{11} = -1$. Além disso, é claro que $a_{kk} = 1$ para $k \geq 2$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j \neq 2$. Falta apenas determinar a_{12} . Para tanto, note que

$$\theta_x(\star) = \star - 2\langle x, \star \rangle x = \star - 2\langle \star, x \rangle x = \varphi_*(x)$$

Assim, como p é ímpar, segue do lema anterior que $a_{22} = \deg \varphi_*(x) = 2$. E portanto, $[\phi_*] = UR$. $\square$

Enunciaremos agora um resultado bastante evidente, mas que gostaríamos de deixar formalmente registrado para futuras alusões demais necessárias.

Lema 2.2.13. *Toda matriz do grupo $\mathcal{S}_n$ é realizada por um difeomorfismo de M .*

Prova: Dada uma matriz A em $\mathcal{S}_n$ considere a permutação σ que gera esta matriz através do homomorfismo γ introduzido na primeira seção deste capítulo. Dado um ponto $(x_1, \dots, x_n)$ de M , podemos identificar $\mathcal{S}_n$ com o grupo de permutações do conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$. Portanto, é fácil ver que a matriz A é realizada pelo difeomorfismo $\phi_\sigma : M \rightarrow M$ definido por $\phi_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n))$. $\square$

Proposição 2.2.14. *Seja $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ a base canônica de $H_p(M)$. Temos:*

- (a) *Se $p = 1, 3$ ou 7 , então toda matriz de $GL(n; \mathbb{Z})$ é realizada por um difeomorfismo de M .*
- (b) *Se p é ímpar, $p \neq 1, 3, 7$, então toda matriz de G' é realizada por um difeomorfismo de M .*
- (c) *Se p é par, então toda matriz de G'' é realizada por um difeomorfismo de M .*

Prova: O item (a) segue dos Lemas 2.1.11, 2.2.6, 2.2.9 e 2.2.13. O item (b) segue dos Lemas 2.1.11, 2.2.6 e 2.2.13. O item (c) segue dos Lemas 2.2.6, 2.2.13 e da definição de G'' . $\square$

Lema 2.2.15. *Sejam A uma matriz em $GL(n; \mathbb{Z})$ e p um inteiro positivo ímpar, $p \neq 1, 3, 7$. Se A é realizada por um difeomorfismo de M , então $A \in G'$.*

Prova: Seja $A = (a_{ij})$ em $GL(n; \mathbb{Z})$. Sendo assim, $\det A = \pm 1$. Considere a composição

$$S^p \times S^p \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\pi} S^p$$

onde β é a inclusão no i -ésimo e no k -ésimo fatores, $i \neq k$, π é a j -ésima projeção e ϕ é um difeomorfismo que realiza A . Considere os geradores canônicos $w_1, w_2 \in \pi_p(S^p \times S^p) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $w \in \pi_p(S^p) \approx \mathbb{Z}$, e o homomorfismo

$$(\pi \circ \phi \circ \beta)_\# : \pi_p(S^p \times S^p) \rightarrow \pi_p(S^p)$$

definido por

$$(\pi \circ \phi \circ \beta)_\#(w_1) = a_{ij}w,$$

$$(\pi \circ \phi \circ \beta)_\#(w_2) = a_{jk}w.$$

Tomemos a restrição de $\pi \circ \phi \circ \beta$ a $S^p \vee S^p = S^p \times \{u\} \cup \{u\} \times S^p \subset S^p \times S^p$, onde $u \in S^p$. $(\pi \circ \phi \circ \beta|_{S^p \vee S^p})_\#$ determina um elemento de $\pi_{2p-1}(S^p)$, a saber, o produto de Whitehead, o qual é dado por

$$\llbracket a_{ij}w, a_{jk}w \rrbracket = a_{ij}a_{jk}\llbracket w, w \rrbracket.$$

Como p é ímpar, $p \neq 1, 3$ e 7 , segue da Proposição 1.2.11 que $\llbracket w, w \rrbracket \neq 0$ é um elemento de ordem 2. Como $\pi \circ \phi \circ \beta|_{S^p \vee S^p}$ pode ser estendida a $S^p \times S^p$, por [7, Proposição 2],

$$a_{ij}a_{jk}\llbracket w, w \rrbracket = 0 \iff a_{ij}a_{jk} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Portanto, o produto de dois elementos quaisquer de uma mesma coluna de A é sempre um número par. Sendo assim, cada linha e coluna da matriz A tem exatamente uma entrada ímpar. Isto implica que $\eta(A) \in \eta(\mathcal{S}_n)$, ou seja, $A \in \eta^{-1}(\eta(\mathcal{S}_n)) = G'$. $\square$

Lema 2.2.16. *Sejam A uma matriz em $GL(n; \mathbb{Z})$ e p um inteiro positivo par. Se A é realizada por um difeomorfismo de M , então $A \in G''$.*

Prova: Seja $A = (a_{ij})$ e $\{\alpha_i^*\}_{i=1}^n$ a base de $H^p(M) \approx \text{Hom}(H_p(M), \mathbb{Z})$, dual da base canônica $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ de $H_p(M)$. Por dualidade mostra-se que

$$\alpha_1^* \smile \alpha_1^* = \alpha_2^* \smile \alpha_2^* = \cdots = \alpha_n^* \smile \alpha_n^* = 0$$

e $\{\alpha_i^* \smile \alpha_j^* : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ é uma base para $H^{2p}(M)$. Note que a matriz da induzida de ϕ na cohomologia $H^p(M)$, a qual denotaremos por $[\phi^*]$, relativamente a base dual, é a matriz transposta da matriz A , que aqui denotamos por A^t . Como p é par, $\alpha_i^* \smile \alpha_j^* = \alpha_j^* \smile \alpha_i^*$, para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$. Deste modo, para cada k , $1 \leq k \leq n$, temos $\phi^*(\alpha_k^*) = \sum_{i=1}^n a_{ki} \alpha_i^*$. Ainda mais,

$$0 = \phi^*(0) = \phi^*(\alpha_k^* \smile \alpha_k^*) = \phi^*(\alpha_k^*) \smile \phi_*(\alpha_k^*) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2a_{ki}a_{kj}(\alpha_i^* \smile \alpha_j^*).$$

Logo, $a_{ki}a_{kj} = 0$ quaisquer que sejam os inteiros i, j, k , positivos e menores que n . Disto e do fato que $\det A = \pm 1$, segue que cada linha e coluna de A tem exatamente uma entrada não nula, sendo esta igual a ± 1 . Portanto $A \in G''$. $\square$

Proposição 2.2.17. *Sejam $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ a base canônica de $H_p(M)$ e $\phi : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Temos as seguintes relações:*

- (a) *Se $p = 1, 3$ ou 7 , então $[\phi_*] \in GL(n; \mathbb{Z})$;*
- (b) *Se p é ímpar, $p \neq 1, 3$ e 7 , então $[\phi_*] \in G'$;*
- (c) *Se p é par, então $[\phi_*] \in G''$.*

Prova: O item (a) é trivial, já que $[\phi_*]$ é realizada pelo difeomorfismo ϕ . O item (b) segue do Lema 2.2.15, e o item (c) segue do Lema 2.2.16. $\square$

Enunciaremos agora o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2.18. *Seja $\mathcal{D}_p$ o subgrupo de $GL(n; \mathbb{Z})$ consistindo de todas as matrizes A de $GL(n; \mathbb{Z})$ tais que $[\phi_*] = A$ para algum difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$. Temos:*

- (a) *Se $p = 1, 3$ ou 7 , então $\mathcal{D}_p = GL(n; \mathbb{Z})$;*
- (b) *Se p é ímpar, $p \neq 1, 3$ e 7 , então $\mathcal{D}_p = G'$;*
- (c) *Se p é par, então $\mathcal{D}_p = G''$;*

Prova: Segue diretamente das Proposições 2.2.14 e 2.2.17. $\square$

Mergulho de produtos de três esferas em codimensão 1

3.1 Sobre as considerações e as expectativas

Seja $f : S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$ um mergulho suave com $1 \leq p \leq q \leq r$. Para $p \geq 2$, L.A. Lucas e O. Saeki [22] demonstraram que se $p + q \neq r$, ou $p + q = r$ com r par, então o fecho de uma das duas componentes conexas de $S^{p+q+r+1} - f(S^p \times S^q \times S^r)$ é difeomorfa a $S^p \times S^q \times D^{r+1}$ ou $S^p \times D^{q+1} \times S^r$ ou $D^{p+1} \times S^q \times S^r$. Além disso, a condição sobre p, q e r é essencial, isto é, se ela não for satisfeita, então existe uma infinidade de mergulhos suaves que não gozam de tal propriedade. Este último resultado é verdadeiramente surpreendente, já que o mergulho de uma esfera ou do produto de duas esferas em codimensão 1 tem sempre a propriedade anteriormente mencionada, com possíveis exceções em certas dimensões envolvendo a Conjectura de Poincaré (generalizada) onde “difeomorfo” é devidamente substituído por “homeomorfo”. Por esta razão, dizemos que o mergulho f é *exótico* se o fecho de nenhuma das duas componentes conexas de $S^{p+q+r+1} - f(S^p \times S^q \times S^r)$ é difeomorfa ao produto de duas esferas e um disco. Caso contrário, diremos que o mergulho é *não-exótico*. O propósito deste capítulo é estudar o caso $p = 1$. Para tanto vamos nos basear principalmente na referência [23] de L. A. Lucas e O. Saeki.

3.2 Sobre a existência de mergulhos exóticos

Iniciamos o estudo dos mergulhos suaves $f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$ buscando demonstrar a existência de uma infinidade de tais mergulhos cujo fecho de nenhuma das componentes conexas de seu complementar seja homotopicamente equivalente a um produto de esferas. O resultado principal desta seção é o seguinte:

Teorema 3.2.1. *Se $1 \leq q \leq r$, então existem infinitos mergulhos mutuamente distintos $f_n : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$, $n = 1, 2, \dots$, tais que o fecho de nenhuma das duas componentes conexas de $S^{q+r+2} - f_n(S^1 \times S^q \times S^r)$ é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.*

A prova deste teorema será efetivamente realizada somente no final desta seção. Contudo, todos os resultados que demonstraremos a partir de agora nos direcionarão à sua conclusão.

A construção ©

Dados inteiros $q, r \geq 1$, vamos introduzir um método para se construir mergulhos suaves $f_n : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$ tais que o fecho de nenhuma das duas componentes conexas de $S^{q+r+2} - f_n(S^1 \times S^q \times S^r)$ é homotopicamente equivalente a um produto de esferas. Não assumiremos $q \leq r$ por enquanto.

Iniciamos com um mergulho suave K de uma esfera r -dimensional em S^{r+2} ; em outras palavras, K é um nó r -dimensional em codimensão 2. Seja $\mathcal{N}_K \cong D^2 \times S^r$ uma vizinhança tubular de K , e seja $E_K = S^{r+2} - \overset{\circ}{\mathcal{N}}_K$. Seja D_0 um $(r+2)$ -disco em $\overset{\circ}{\mathcal{N}}_K$, e seja ainda $D_1 = S^{r+2} - \overset{\circ}{D}_0$. Note que D_1 é difeomorfo ao $(r+2)$ -disco D^{r+2} . Considere o mergulho suave

$$g : S^1 \times S^r \xrightarrow{\cong} \partial \mathcal{N}_K \xrightarrow{i} D_1 \cong D^{r+2}$$

onde i é a aplicação inclusão. Então a composição

$$f : S^1 \times S^q \times S^r \xrightarrow{\delta} S^1 \times S^r \times S^q \xrightarrow{g \times 1_{S^q}} D^{r+2} \times S^q \hookrightarrow (D^{r+2} \times S^q) \cup (S^{r+1} \times D^{q+1}) \cong S^{q+r+2}$$

é um mergulho suave em codimensão 1, onde δ é o difeomorfismo que simplesmente permuta os dois fatores S^q e S^r , e $\hookrightarrow$ é a inclusão natural.

Note que $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$ sempre consiste de duas componentes conexas. Vamos denotar os seus fechos em S^{q+r+2} por C_1 e C_2 .

A Figura 3.1 a seguir garante uma simples, porém eficiente ilustração desta construção, e nos facilita em muito a percepção de que podemos assumir

$$C_1 \cong E_K \times S^q \tag{3.1}$$

$$C_2 \cong [(\mathcal{N}_K - \overset{\circ}{D}_0) \times S^q] \bigcup_{\partial D_0 \times S^q} [S^{r+1} \times D^{q+1}] \tag{3.2}$$

Figura 3.1: Esquema gráfico da construção ©

Vamos determinar as homologias de C_1 e de C_2 .

Utilizando o fato de termos $E_K = S^{r+2} - \overset{\circ}{N}_K$ e $N_K \cong D^2 \times S^r$, e aplicando a Dualidade de Alexander, obtemos a seguinte seqüência de isomorfismos:

$$\tilde{H}_{i-1}(E_K) \approx \tilde{H}_{i-1}(S^{r+2} - \overset{\circ}{N}_K) \approx \tilde{H}^{r+2-i}(N_K) \approx \tilde{H}^{r+2-i}(D^2 \times S^r) \approx \tilde{H}^{r+2-i}(S^r).$$

Agora, como os grupos de homologias $H_*(S^r)$ são livres, pela fórmula de Künneth obtemos

$$\tilde{H}_{i-1}(E_K) \approx \tilde{H}_{r+2-i}(S^r).$$

De posse deste último isomorfismo, as homologias de E_K ficam determinadas através da seguinte tabela

i	$i-1$	$r+2-i$	$H_{r+2-i}(S^r)$	$H_{i-1}(E_K)$
0	-1	$r+2$	0	0
1	0	$r+1$	0	$\mathbb{Z}$
2	1	r	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	0
$r+2$	$r-1$	0	$\mathbb{Z}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	0

Ficamos assim com

$$H_*(E_K) \approx H_*(S^1).$$

Agora, uma vez que $C_1 \cong E_K \times S^q$, a Fórmula de Künneth para homologia aplicada a este produto nos dá:

$$\begin{aligned} H_n(C_1) &\approx \bigoplus_{i+j=n} (H_i(E_K) \otimes H_j(S^q)) \oplus \bigoplus_{s+t=n-1} \text{Tor}(H_s(E_K), H_t(S^q)) \\ &\approx \bigoplus_{i+j=n} (H_i(S^1) \otimes H_j(S^q)) \oplus \bigoplus_{s+t=n-1} \text{Tor}(H_s(S^1), H_t(S^q)) \\ &\approx H_n(S^1 \times S^q), \end{aligned}$$

onde o último isomorfismo também se deve a Fórmula de Künneth. Obtemos, portanto,

$$H_n(C_1) \approx H_n(S^1 \times S^q) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, q = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 2, q = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, q, q + 1, q \neq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Como os grupos de homologia $H_*(C_1)$ são todos livres, assim são os grupos de cohomologia $H^*(C_1)$, e temos $H_*(C_1) \approx H^*(C_1)$. Este fato e o conhecimento que já temos sobre homologias de C_1 serão agora utilizadas para determinarmos as homologias de C_2 , as quais se relacionam com as de C_1 através da Dualidade de Alexander da seguinte maneira:

$$\tilde{H}_n(C_2) \approx \tilde{H}^{q+r+1-n}(S^{q+r+1} - C_2) \approx \tilde{H}^{q+r+1-n}(C_1).$$

Vamos, desta vez, utilizar uma tabela para facilitar o cálculo das homologias. Construamos uma tabela onde possamos fazer os cálculos separadamente para os casos em $q = 1$ e $q \neq 1$.

		$q = 1$		$q \neq 1$	
n	$q + r + 1 - i$	$\tilde{H}^{q+r+1-n}(C_1)$	$H_n(C_2)$	$\tilde{H}^{q+r+1-n}(C_1)$	$H_n(C_2)$
0	$q + r + 1$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
1	$q + r$	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	0	0	0	0
r	$q + 1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$r + 1$	q	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	$\vdots$	$\parallel$	$\parallel$	0	0
$r + q$	1	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	$\vdots$	0	0	0	0

Temos assim expressos os grupos de homologia da componente C_2 , os quais apresentamos, noutros termos, abaixo:

$$H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, r \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = r + 1, q = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = r + 1, q \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = r + q, q \neq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Construímos, portanto, um mergulho suave $f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$ de modo que o fecho C_1 de uma das componentes conexas de $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$ tem os mesmos grupos de homologia do produto $S^1 \times S^q$, e o fecho C_2 da outra componente tem os grupos de homologia indicados em 3.4.

Lema 3.2.2. *Temos:*

- (a) *Se $\pi_1(S^{r+2} - K)$ é não-abeliano, então C_1 não é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.*
- (b) *Se $q \leq r$, então C_2 não é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.*

Prova: (a) Se C_1 fosse homotopicamente equivalente a um produto de esferas, então teríamos $\pi_1(C_1)$ abeliano. Agora, $C_1 \cong E_K \times S^q$ e $\pi_1(S^{r+2} - K) \approx \pi_1(E_K)$. Logo

$$\pi_1(C_1) \approx \pi_1(E_K \times S^r) \approx \pi_1(S^{r+2} - K) \times \pi_1(S^r).$$

Donde teríamos $\pi_1(S^{r+2} - K)$ abeliano.

(b) Basta notar através de 3.4 que sendo $q \leq r$, os grupos de homologia de C_2 jamais coincidem com os de qualquer produto de esferas. $\square$

Vamos agora construir uma infinidade de mergulhos mutuamente distintos utilizando a construção acima. Para este propósito, considere o nó toroidal k_n de tipo $\prec n, 2n+1 \succ$, com $n \geq 1$, em S^3 , e seja K_n o nó r -dimensional em S^{r+2} construído a partir de k_n através de iterações do processo de giro descrito na Seção 1.4 do primeiro capítulo deste texto. Pelas Proposições 1.4.1 e 1.4.3 daquela mesma seção, segue que $\pi_1(S^3 - k_n) \approx \pi_1(S^{r+2} - K_n)$. Além disso, estes grupos são não-abelianos.

Lema 3.2.3. *Temos $\pi_1(S^{r+2} - K_n) \times \mathbb{Z} \approx \pi_1(S^{r+2} - K_m) \times \mathbb{Z}$ se, e somente se, $n = m$.*

Prova: Sabemos que $G_n = \pi_1(S^3 - k_n)$ tem apresentação $G_n = \{x, y : x^2 = y^{2n+1}\}$, e que o centro deste grupo $Z(G_n) = \langle x^2 \rangle = \langle y^{2n+1} \rangle$. Do mesmo modo, $G_m = \pi_1(S^3 - k_m)$ tem apresentação $G_m = \{x, y : x^2 = y^{2m+1}\}$ e $Z(G_m) = \langle x^2 \rangle = \langle y^{2m+1} \rangle$.

Pois bem, é claro que $Z(G_n \times \mathbb{Z}) \approx Z(G_n) \times \mathbb{Z}$. Agora, considere a composição

$$G_n \times \mathbb{Z} \xrightarrow{p_1} G_n \xrightarrow{p_2} \frac{G_n}{Z(G_n)}$$

onde p_1 e p_2 são as projeções óbvias. Pelo Teorema do Isomorfismo, segue que

$$\frac{G_n \times \mathbb{Z}}{Z(G_n) \times \mathbb{Z}} \approx \frac{G_n}{Z(G_n)} \approx \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_{2n+1}$$

sendo o último isomorfismo devido ao Lema 1.4.16. O mesmo processo pode ser realizado com grupo G_m para obtermos

$$\frac{G_m \times \mathbb{Z}}{Z(G_m) \times \mathbb{Z}} \approx \frac{G_m}{Z(G_m)} \approx \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_{2m+1}.$$

Agora, como $Z(G_n) = \langle x^2 \rangle = Z(G_m)$, temos que, se $G_n \approx G_m$, então,

$$\frac{G_n \times \mathbb{Z}}{Z(G_n) \times \mathbb{Z}} \approx \frac{G_m \times \mathbb{Z}}{Z(G_m) \times \mathbb{Z}}$$

o que implica em $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_{2n+1} \approx \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_{2m+1}$. Portanto, $n = m$. A recíproca é óbvia. $\square$

Com os resultados até aqui demonstrados já podemos fazer a prova do Teorema 3.2.1, tendo sempre em vista os resultados do primeiro capítulo deste trabalho. Façamos a prova:

Prova do Teorema 3.2.1: Para $1 \leq q \leq r$, considere $f_n : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$, $n \geq 1$, o mergulho suave em codimensão 1 construído a partir do r -nó suave K_n , utilizando as construções anteriores. Pelo Lema 3.2.2, o fecho de nenhuma das componentes conexas de $S^{q+r+2} - f_n(S^1 \times S^q \times S^r)$ é homotopicamente equivalente a um produto de esferas. Além disso, se $S^{q+r+2} - f_n(S^1 \times S^q \times S^r)$ é homotopicamente equivalente a $S^{q+r+2} - f_m(S^1 \times S^q \times S^r)$, então, claro, devemos ter $\pi_1(S^{r+2} - K_n) \approx \pi_1(S^{r+2} - K_m)$ para $q > 1$ ou $\pi_1(S^{r+2} - K_n) \times \mathbb{Z} \approx \pi_1(S^{r+2} - K_m) \times \mathbb{Z}$ para $q = 1$. Então, em ambos os casos, pelo Lema anterior, segue $n = m$. Portanto, os mergulhos f_n são mutuamente distintos, ou mais precisamente, não existem difeomorfismos de S^{q+r+2} aplicando a imagem de f_n à imagem de f_m sempre que $n \neq m$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

Para finalizarmos esta seção façamos algumas breves, porém importantes, observações sobre o que até aqui fora construído neste capítulo.

Observação 3.2.4. *Os mergulhos construídos acima tem a propriedade que o fecho de uma das duas componentes conexas do complemento referente a C_2 é sempre difeomorfo a mesma variedade, a saber, $((D^2 \times S^r) - D^{r+2}) \times S^q \cup (S^{r+1} \times D^{q+1})$.*

Observação 3.2.5. *Quando o nó K é trivial, o mergulho construído é também trivial (ver [22, §8]). Em particular, a variedade anterior jamais será o fecho de uma das componentes conexas do complemento do mergulho trivial de $S^1 \times S^q \times S^r$ em S^{q+r+2} .*

Observação 3.2.6. *Semelhantemente se $q \geq r$, podemos utilizar a mesma construção como na prova do Teorema 3.2.1 para obter o resultado desejado, embora a conclusão para o caso $q = r + 1$ requeira alguns argumentos mais sofisticados. Faremos detalhes no momento oportuno.*

3.3 Sobre a existência de mergulhos não-exóticos

Apresentamos nesta seção um resultado que dá condições essenciais para que o fecho de uma das componentes do complementar de um mergulho suave $f : (S^1 \times S^q \times S^r) \rightarrow S^{q+r+2}$ seja difeomorfo a um produto de duas esferas com um disco. A essencialidade das hipóteses de tal proposição será demonstrada mais tarde, nesta mesma seção, através de outras proposições.

Proposição 3.3.1. *Seja $f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$, $2 \leq q \leq r$, e C_1 o fecho de uma das componentes conexas de $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$.*

- (a) *Suponha $r \neq q + 1$. Se $H_*(C_1; \mathbb{Z}) \approx H_*(S^q \times S^r; \mathbb{Z})$, então C_1 é difeomorfo a $D^2 \times S^q \times S^r$.*
- (b) *Suponha $r = q + 1$. Se C_1 tem o mesmo anel de cohomologia de $S^q \times S^r$, então C_1 é difeomorfo a $D^2 \times S^q \times S^r$.*

Para a prova desta proposição utilizaremos vários resultados que passamos a enunciar e demonstrar agora.

Utilizaremos com frequência o espaço

$$Y = f(\{\star\} \times S^q \times S^r) \subset \partial C_1.$$

Prossigamos com o primeiro destes importantes resultados.

Lema 3.3.2. *Se $r \neq q + 1$, então $H_n(C_1, Y) = 0$ para $n = q, r$.*

Prova: Considere a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_n(\partial C_1, Y) \rightarrow H_n(C_1, Y) \rightarrow H_n(C_1, \partial C_1) \rightarrow H_{n-1}(\partial C_1, Y) \rightarrow \cdots \quad (3.5)$$

da tríada $(C_1, \partial C_1, Y)$. Pela Dualidade e Poincaré-Lefschetz obtemos

$$H_n(C_1, \partial C_1) \approx H^{q+r+2-n}(C_1) \approx H_{q+r+2-n}(C_1), \quad (3.6)$$

onde o último isomorfismo se deve ao Teorema dos Coeficientes Universais e ao fato das homologias de C_1 serem livres de torção em qualquer dimensão. Além disso, como

$$(\partial C_1, Y) \cong (S^1 \times S^q \times S^r, \{\star\} \times S^q \times S^r) \cong (S^1, \{\star\}) \times (S^q \times S^r),$$

a Fórmula de Künneth mostra que

$$\begin{aligned} H_n(\partial C_1, Y) &\approx \bigoplus_{i+j=n} (H_i(S^1, \{\star\}) \otimes H_j(S^q \times S^r)) \oplus \bigoplus_{k+l=n-1} \text{Tor}(H_k(S^1, \{\star\}), H_l(S^q \times S^r)) \\ &\approx \bigoplus_{i+j=n} (H_i(S^1, \{\star\}) \otimes H_j(S^q \times S^r)), \end{aligned}$$

uma vez que os grupos de homologias envolvidos na fórmula são todos livres.

Podemos, agora, expressar as homologias relativas do par $(\partial C_1, Y)$, uma vez conhecidas as homologias de $S^q \times S^r$ e as homologias relativas do par $(S^1, \{\star\})$, as quais são de determinação bastante simples. É o que fazemos através da tabela impressa na página seguinte, onde particularizamos os casos em que se tem $q = r$ ou $q \neq r$.

Dos resultados expressos na tabela concluímos que

$$H_n(\partial C_1, Y) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, q + 1, r + 1, q + r + 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}.$$

O conhecimento destes grupos de homologia relativa nos possibilitará a conclusão do lema.

n	$H_n(S^1, \{\star\})$	$r = q$		$r \neq q$	
		$H_n(S^q \times S^r)$	$H_n(\partial C_1, Y)$	$H_n(S^q \times S^r)$	$H_n(\partial C_1, Y)$
0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
1	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0	0	0	0
q	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$q+1$	0	$\parallel$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	$\parallel$	$\parallel$	0	0
r	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\parallel$	$\mathbb{Z}$	0
$r+1$	0	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0	0	0	0
$q+r$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$q+r+1$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0	0	0	0

Provemos que $H_q(C_1, Y) = 0$.

Considere, por ora, $q \neq 2$. Utilizando as já calculadas homologias do par $(\partial C_1, Y)$ e o isomorfismo 3.6, obtemos:

$$H_q(\partial C_1, Y) = 0 = H_{r+2}(C_1) \approx H_{q+r+2-q}(C_1) \approx H_q(C_1, \partial C_1).$$

E pela exatidão da seqüência 3.5 segue que $H_q(C_1, Y) = 0$.

Para $q = 2$, considere a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_1(C_1) \rightarrow H_1(C_1, Y) \rightarrow H_0(Y) \rightarrow H_0(C_1) \rightarrow H_0(C_1, Y) \rightarrow \cdots$$

do par (C_1, Y) . Calculadas e substituídas nesta seqüência os grupos de homologia nela expressos obtemos a seqüência exata

$$0 \rightarrow H_1(C_1, Y) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donde vemos que $H_1(C_1, Y) = 0$. Pelo isomorfismo 3.6 temos $H_2(C_1, \partial C_1) \approx H_{q+r}(C_1) \approx \mathbb{Z}$. Disto e uma vez que já temos calculado $H_1(\partial C_1, Y) \approx \mathbb{Z}$, a seqüência 3.5 gera a seqüência exata

$$0 \rightarrow H_2(C_1, Y) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

e fica provado que $H_2(C_1, Y) = 0$. Isto conclui a prova de que $H_q(C_1, Y) = 0$.

Provemos agora que $H_r(C_1, Y) = 0$.

Ora, se $r = 2$, então $q = 2$ e já temos provado deveras que $H_2(C_1, Y) = 0$. Suponha $2 \neq r \neq q + 2$. Visto que $r \neq q + 1$, o isomorfismo 3.6 nos dá

$$H_r(\partial C_1, Y) = 0 = H_{q+2}(C_1) \approx H_{q+r+2-r}(C_1) \approx H_r(C_1, \partial C_1).$$

Assim, a exatidão da seqüência 3.5 implica em $H_r(C_1, Y) = 0$. Para $2 \neq r = q + 2$ note inicialmente que o isomorfismo 3.6 nos dá

$$H_r(C_1, Y) \approx H_{q+2}(C_1, Y) \approx H_{q+r+2-(q+2)}(C_1) \approx H_r(C_1) \approx \mathbb{Z}.$$

Considere a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(C_1) \rightarrow H_{q+1}(C_1, Y) \rightarrow H_q(Y) \rightarrow H_q(C_1) \rightarrow H_q(C_1) \rightarrow \cdots$$

do par (C_1, Y) . Substituindo as homologias já conhecidas obtemos a seqüência exata

$$0 \rightarrow H_{q+1}(C_1, Y) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

E assim mostramos que $H_{q+1}(C_1, Y) = 0$. Agora, a seqüência 3.5 gera

$$0 \rightarrow H_{q+2}(C_1, Y) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Portanto, $H_{q+2}(C_1, Y) = 0$, ou seja, $H_r(C_1, Y) = 0$. Isto conclui a prova do Lema. $\square$

Lema 3.3.3. *Suponha $r \neq q + 1$ e $H_*(C_1) \approx H_*(S^q \times S^r)$. Se a inclusão $j : Y \rightarrow C_1$ induz isomorfismo j^* na cohomologia de dimensão $q + r$, então induz isomorfismo j_* na homologia desta mesma dimensão. A recíproca é verdadeira.*

Prova: Sabemos que $H^{q+r}(C_1) \approx \text{Hom}(H_{q+r}(C_1), \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$. Lembremo-nos que, dadas f e g em $\text{Hom}(H_{q+r}(C_1), \mathbb{Z})$, a soma $f + g \in \text{Hom}(H_{q+r}(C_1), \mathbb{Z})$ é definida fazendo-se $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in C_1$.

Suponha $j^* : H^{q+r}(C_1) \rightarrow H^{q+r}(Y)$ seja um isomorfismo, onde $j : Y \rightarrow C_1$ é a inclusão. Seja $\xi \in H^{q+r}(C_1) \approx \mathbb{Z}$ um gerador deste grupo. Então $\xi = [\varphi]^*$, para algum homomorfismo $\varphi : H^{q+r}(C_1) \rightarrow \mathbb{Z}$. Mas sendo ξ gerador de $H^{q+r}(C_1) \approx \mathbb{Z} \approx \text{Hom}(H_{q+r}(C_1), \mathbb{Z})$, necessariamente φ é um gerador de $\text{Hom}(H_{q+r}(C_1), \mathbb{Z})$, ou seja, $\varphi = \pm 1_{\mathbb{Z}}$, onde $1_{\mathbb{Z}}$ denota o homomorfismo identidade em $\mathbb{Z}$, já que $H_{q+r}(C_1) \approx \mathbb{Z}$.

Note que sendo j_* um homomorfismo entre $H_{q+r}(Y) \approx \mathbb{Z}$ e $H_{q+r}(C_1) \approx \mathbb{Z}$, temos que $j_* \in \text{Hom}(H_{q+r}(C_1), \mathbb{Z})$. Considere, então, a composição

$$\varphi \circ j_* : H_{q+r}(Y) \xrightarrow{j_*} H_{q+r}(C_1) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}.$$

Como j^* é isomorfismo precisamos ter $\pm \xi = j^*(\xi) \in H^{q+r}(Y) \approx \text{Hom}(H_{q+r}(Y), \mathbb{Z})$. Vê-se, então, que $\pm \xi = j^*(\xi) = [\varphi \circ j_*]^* = [j_*]^*$. Logo $j_* = \pm 1_{\mathbb{Z}}$ e, portanto, um isomorfismo.

A recíproca é totalmente análoga. $\square$

Lema 3.3.4. *Se $H_*(C_1) \approx H_*(S^q \times S^r)$, então $H_1(C_2) \approx \mathbb{Z}$ e $H_{q+r}(C_2) = 0$*

Prova: Sabemos que C_2 é uma variedade compacta com bordo $\partial C_2 \cong f(S^1 \times S^q \times S^r) \cong \partial C_1$, em S^{q+r+2} . Pelo Teorema 3.42 de [13], podemos construir uma variedade $\widehat{C}_2$ homeomorfa a C_2 e cujo interior contém C_2 , e termos $H_*(\widehat{C}_2) \approx H_*(C_2) \approx H_*(\widehat{C}_2)$.

Mais ainda, $\widehat{C_2} - \overset{\circ}{C_2}$ é homotopicamente equivalente a $\partial C_2 \cong \partial C_1$. Por simplicidade denote $X = S^{q+r+2}$. Temos:

$$H_2(X, C_2) \approx H_2(X, \widehat{C_2}) \approx H_2(X - \overset{\circ}{C_2}, \widehat{C_2} - \overset{\circ}{C_2}) \approx H_2(C_1, \partial C_1) \approx H_{q+r}(C_1) \approx \mathbb{Z}$$

onde o segundo isomorfismo é obtido por excisão e o quarto pela Dualidade de Poincaré-Lefschetz. De modo análogo obtemos $H_{q+r+1}(X, C_2) \approx H_1(C_1) = 0$. Considere a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, C_2) \rightarrow H_{n-1}(C_2) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

do par (X, C_2) . Substituindo as homologias conhecidas obtemos a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{q+r}(C_2) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_1(C_2) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Portanto, $H_1(C_2) \approx \mathbb{Z}$ e $H_{q+r}(C_2) = 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 3.3.5. *A inclusão $j : \partial C_2 \rightarrow C_2$ induz isomorfismo $j_* : H_1(\partial C_2) \rightarrow H_1(C_2)$.*

Prova: Começamos esta prova relembando que $\partial C_2 \cong f(S^1 \times S^q \times S^r)$ com f suave. Logo, $H_1(\partial C_2) \approx H_1(S^1 \times S^q \times S^r) \approx \mathbb{Z} \approx H_1(C_2)$, sendo o último isomorfismo garantido no lema anterior. Considere a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_{q+r+1}(C_2) \rightarrow H_{q+r+1}(C_2, \partial C_2) \rightarrow H_{q+r}(\partial C_2) \rightarrow H_{q+r}(C_2) \rightarrow \cdots$$

do par $(C_2, \partial C_2)$. Como $H_{q+r}(C_2) = 0$, o que também decorre do lema anterior, existe um $(q+r+1)$ -ciclo $(\Gamma, \partial\Gamma)$ em $(C_2, \partial C_2)$ cujo bordo é homólogo a $\Sigma_{qr} = f(\{\star\} \times S^q \times S^r)$ em ∂C_2 . Então, o *número de intersecção* entre $(\Gamma, \partial\Gamma)$ e o ciclo obtido “empurrando-se” $\Sigma_1 = f(S^1 \times \{\star\} \times \{\star\})$ para o interior de C_2 é obviamente igual ao *número de intersecção* entre $\partial\Gamma$ e Σ_1 em ∂C_2 , a menos de sinal, o qual é igual a ± 1 . Logo, $j_*[\Sigma_1] \in H_1(C_2)$ é uma classe de homologia não nula e primitiva. Portanto, $j_*[\Sigma_1]$ é gerador de $H_1(C_2)$. Mas como Σ_1 é gerador de $H_1(\partial C_2)$ e $H_1(\partial C_2) \approx \mathbb{Z} \approx H_1(C_2)$, o resultado segue. $\square$

Observação 3.3.6. *Utilizamos na prova acima a seguinte terminologia: um elemento g de um grupo abeliano G é primitivo se $g = nh$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $h \in G$ implicar em $n = \pm 1$.*

Lema 3.3.7. *C_1 é simplesmente conexo.*

Prova: A efeito desta demonstração, denote $X = f(S^1 \times S^q \times S^r)$. Considere o diagrama comutativo abaixo, onde i_1, i_2, j_1, j_2 e i são as inclusões óbvias.

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(X) & & \\ & \swarrow i_{1\#} & \downarrow i_{\#} & \searrow i_{2\#} & \\ \pi_1(C_1) & & & & \pi_1(C_2) \\ & \searrow j_{1\#} & & \swarrow j_{2\#} & \\ & & \pi_1(S^{q+r+2}) & & \end{array}$$

Pelo Lema 3.3.5, temos que $i_{2*} : H_1(X) \rightarrow H_1(C_2)$ é um isomorfismo. Agora, pelo Teorema de Hurewicz, é comutativo o seguinte diagrama, onde φ é o homomorfismo, neste caso bijetor, de Hurewicz.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{i_{2\#}} & \pi_1(C_2) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H_1(X) & \xrightarrow{i_{2*}} & H_1(C_2) \end{array}$$

Logo, $i_{2\#} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(C_2)$ é injetiva. Suponha que também $i_{1\#}$ seja injetiva. Então vemos que $\pi_1(S^{q+r+2})$ é o produto livre amalgamado de $\pi_1(C_1)$ e $\pi_1(C_2)$ com $i_{1\#}(\pi_1(X))$ e $i_{2\#}(\pi_1(X))$, identificado pelo Teorema de Van Kampen. Como $i_{1\#}$ e $i_{2\#}$ são injetivas, $j_{1\#}$ e $j_{2\#}$ devem também ser injetivas (ver, por exemplo, [21, Lema 4.1]). Mas isto é uma contradição, pois $\pi_1(X) \approx \mathbb{Z}$ e $\pi_1(S^{q+r+2}) = 1$. Portanto, $i_{1\#}$ não pode ser injetiva.

Seja t um gerador de $\pi_1(X)$ representado por $f(S^1 \times \{\star\} \times \{\star\})$. Como $i_{1\#}$ é não injetiva, $i_{1\#}(t^{s'}) = 1$ para algum inteiro positivo s' . Seja s o menor dos inteiros positivos satisfazendo tal propriedade. Vamos provar que $s = 1$.

Considere o seguinte diagrama comutativo, onde T é o subgrupo (normal) de $\pi_1(X)$ gerado por t^s , N é o subgrupo normal gerado por $i_{2\#}(t^s)$ e $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ e ω são as aplicações óbvias induzidas por i_1, i_2, j_1, j_2 e i , respectivamente.

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(X)/T & & \\ & \swarrow \alpha & \downarrow \omega & \searrow \beta & \\ \pi_1(C_1) & & & & \pi_1(C_2)/N \\ & \searrow \bar{\alpha} & \downarrow & \swarrow \bar{\beta} & \\ & & \pi_1(S^{q+r+2}) & & \end{array}$$

Note que, pela definição de s , α é injetiva. Agora, suponha que β não seja injetiva. Então, existe um inteiro a com $0 < a < r$ tal que $(i_2)_*(t^a) \in N$. Assim, pela definição de N , temos

$$i_{2\#}(t^a) = a_1(i_{2\#}(t^s))^{\pm 1} a_1^{-1} \cdots a_m(i_{2\#}(t^s))^{\pm 1} a_m^{-1}$$

para certos $a_1, \dots, a_m \in \pi_1(C_2)$. Então, no grupo abelianizado H de $\pi_1(C_2)$, temos

$$i_{2\#}(t^a) = i_{2\#}(t^r)^b$$

para algum inteiro b . Mas como bem sabido, H é isomorfo a $H_1(C_2) \approx \mathbb{Z}$. Além disso, sabemos da prova do Lema 3.3.5 que $H_1(C_2)$ é gerado por $i_{2\#}(t)$. Então, a última equação implica em $a - sb = 0$, já que $i_{2\#}(t)^{a-sb} = 1$ em H . Isto contradiz o assumido $0 < a < s$. Logo β precisa ser injetiva.

Então, pelo Teorema de Van Kampen, segue que ω é também injetiva. Assim, r deve ser igual a ± 1 , pois a ordem de $\pi_1(X)/T$ é igual a r e $\pi_1(S^{q+r+2}) = 1$. Novamente pelo Teorema

de Van Kampen, vemos que $\pi_1(S^{q+r+2})$ é isomorfo ao produto livre de $\pi_1(C_1)$ e $\pi_1(C_2)/N$. Isto implica que $\pi_1(C_1)$ é trivial e completa a prova deste lema. $\square$

Dispomos já de resultados suficientes para que possamos provar a primeira parte da Proposição 3.3.1. Façamos a prova.

Prova da Proposição 3.3.1 (a): Seja $f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$, $2 \leq q \leq r$, um mergulho suave, e suponha que o fecho C_1 de uma das componentes conexas de $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$ seja tal que $H_*(C_1) \approx H_*(S^q \times S^r)$. Vamos provar que se $r \neq q + 1$ então C_1 é difeomorfo a $D^2 \times S^q \times S^r$. Considere a seqüência exata

$$\cdots \longrightarrow H_n(Y) \rightarrow H_n(C_1) \rightarrow H_n(C_1, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

do par (C_1, Y) . Pelo Lema 3.3.2, temos que $H_n(C_1, Y) = 0$, para $n = q, r$. Assim, a seqüência acima torna-se

$$\cdots \rightarrow H_q(Y) \xrightarrow{j_q} H_q(C_1) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow H_r(Y) \xrightarrow{j_r} H_r(C_1) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

onde, por hipótese, $H_q(Y) \approx H_q(C_1)$ e $H_r(Y) \approx H_r(C_1)$. Da exatidão desta seqüência segue que a inclusão $j : Y \rightarrow C_1$ induz isomorfismo nos grupos de homologia de dimensões q e r . Além disso, uma vez que os grupos de homologias aqui apresentados são todos livres, eles coincidem com os respectivos grupos de cohomologia, e com argumentos puramente análogos aos utilizados no Lema 3.3.3 prova-se que j induz isomorfismo também nos grupos de cohomologia de dimensões q e r .

Considere o seguinte diagrama comutativo, onde $\smile$ indica o produto *cup*.

$$\begin{array}{ccc} H^q(C_1) \otimes H^r(C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^{q+r}(C_1) \\ j^* \otimes j^* \downarrow & & j^* \downarrow \\ H^q(Y) \otimes H^r(Y) & \xrightarrow{\smile} & H^{q+r}(Y) \end{array}$$

Como a linha de baixo é um epimorfismo, também $j^* : H^{q+r}(C_1) \rightarrow H^{q+r}(Y)$ é um epimorfismo. Logo, como $H^{q+r}(Y) \approx H^{q+r}(C_1)$, segue que j^* é um isomorfismo. Pelo Lema 3.3.3, também $j_* : H_{q+r}(Y) \rightarrow H_{q+r}(C_1)$ é isomorfismo.

Portanto, temos provado, uma vez que $H_n(C_1) \approx H_n(Y) = 0$ para todo $n \neq q, r, q+r$, que a inclusão $j : Y \rightarrow C_1$ induz isomorfismo dos grupos de homologia em todas as dimensões. Por outro lado, pelo Lema 3.3.7, temos que C_1 é simplesmente conexo. Logo, C_1 pode ser entendido como um h -cobordismo com bordo entre $f(J_1 \times S^q \times S^r)$ e $f(J_2 \times S^q \times S^r)$, onde J_1 e J_2 são mergulhos disjuntos de intervalos fechados em S^1 . Agora, como $\dim C_1 = q+r+2 \geq 6$, pelo Teorema do h -cobordismo, concluímos que C_1 é difeomorfo a $D^2 \times S^q \times S^r$. Isto prova a primeira parte da Proposição 3.3.1. $\square$

Vamos agora prepararmo-nos para demonstrar a segunda parte da Proposição 3.3.1. Começamos introduzindo novos resultados técnicos.

Lema 3.3.8. *Suponha que C_1 tenha o mesmo anel de cohomologia de $S^q \times S^r$, com $r = q + 1$. Então a inclusão $i : \partial C_1 \rightarrow C_1$ induz isomorfismo $i_* : H_n(\partial C_1) \rightarrow H_n(C_1)$, para $n = q, q + r$.*

Prova: Considere a composição

$$\varphi : \{\star\} \times S^q \times S^{q+1} \xrightarrow{j} S^1 \times S^q \times S^{q+1} \cong \partial C_1 \xrightarrow{i} C_1$$

onde i e j são as aplicações inclusão. Como $i_*[S^1 \times \{\star\} \times S^{q+1}] = 0$ em $H_{q+2}(C_1) = 0$, existe uma $(q + 3)$ -cadeia $[\Gamma, \partial\Gamma]$ em $(C_1, \partial C_1)$, tal que $\partial\Gamma$ é homólogo a $S^1 \times \{\star\} \times S^{q+1}$ em ∂C_1 . Agora, o número de intersecção entre $[\Gamma, \partial\Gamma]$ e $i_*[S^1 \times \{\star\} \times S^{q+1}]$ em C_1 é igual ao número de intersecção entre $[S^1 \times \{\star\} \times S^{q+1}]$ e $[\{\star\} \times S^q \times \{\star\}]$ em ∂C_1 . Sendo este último número igual a ± 1 , segue que $\varphi_* : H_q(\{\star\} \times S^q \times S^{q+1}) \rightarrow H_q(C_1)$ é isomorfismo, já que $H_q(\{\star\} \times S^q \times S^{q+1}) \approx \mathbb{Z}$ é gerado por $[\{\star\} \times S^q \times \{\star\}]$, e $\varphi_*[\{\star\} \times S^q \times \{\star\}]$ deve ser uma classe de homologia primitiva em $H_q(C_1) \approx \mathbb{Z}$. Mas $\varphi = i \circ j$; logo φ_* é a composição

$$\varphi_* : H_q(\{\star\} \times S^q \times S^{q+1}) \xrightarrow{j_*} H_q(\partial C_1) \xrightarrow{i_*} H_q(C_1).$$

Então i_* é um epimorfismo e, portanto, isomorfismo, já que $H_q(\partial C_1) \approx H_q(C_1) \approx \mathbb{Z}$.

Por outro lado, como $i_*[S^1 \times \{\star\} \times \{\star\}] = 0$ em $H_1(C_1) = 0$, existe uma 2-cadeia $[\Upsilon, \partial\Upsilon]$ em $(C_1, \partial C_1)$, tal que $\partial\Upsilon$ é homólogo a $[S^1 \times \{\star\} \times \{\star\}]$ em ∂C_1 . Como antes, é fácil perceber que o número de intersecção entre $[\Upsilon, \partial\Upsilon]$ e $i_*[\{\star\} \times S^q \times S^{q+1}]$ em C_1 deve ser igual, a menos de sinal, ao número de intersecção entre $[S^1 \times \{\star\} \times \{\star\}]$ e $[\{\star\} \times S^q \times S^{q+1}]$ em ∂C_1 , que por sua vez é igual a ± 1 . Isto implica que $\varphi_* : H_{2q+1}(\partial C_1) \rightarrow H_{2q+1}(C_1)$ é um isomorfismo. Agora, com argumentos totalmente similares aos já utilizados nesta mesma prova, concluímos que $i_* : H_{2q+1}(\partial C_1) \rightarrow H_{2q+1}(C_1)$ é também um isomorfismo. $\square$

Lema 3.3.9. *Se C_1 tem o mesmo anel de cohomologia de $S^q \times S^r$, com $r = q + 1$, então $H_r(C_1)$ é gerado por $i_*[\{\star\} \times \{\star\} \times S^r]$, onde $i : \partial C_1 \rightarrow C_1$ é a aplicação inclusão.*

Prova: Vimos no Lema 3.3.8 que $i_* : H_n(\partial C_1) \rightarrow H_n(C_1)$ é um isomorfismo para $n = q, q + r$. Denote:

$$\alpha^* = [S^1 \times S^q \times \{\star\}]^*, \beta^* = [\{\star\} \times \{\star\} \times S^r]^* \in H^r(\partial C_1) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$\gamma^* = [\{\star\} \times S^q \times \{\star\}]^* \in H^q(\partial C_1) \approx \mathbb{Z},$$

$$\delta^* = [\{\star\} \times S^q \times S^r]^* \in H^{q+r}(\partial C_1) \approx \mathbb{Z},$$

e seja $\xi_q \in H^q(C_1) \approx \mathbb{Z}$ e $\xi_r \in H^r(C_1) \approx \mathbb{Z}$, ambos geradores, onde $[\cdot]^*$ indica a base dual. Note que $\gamma^* \smile \beta^* = \pm \delta^*$ e $\gamma^* \smile \alpha^* = 0$.

Considere o diagrama comutativo abaixo, onde $\smile$ indica o produto *cup*.

$$\begin{array}{ccc} H^q(C_1) \otimes H^r(C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^{q+r}(C_1) \\ i^* \otimes i^* \downarrow & & \downarrow i^* \\ H^q(\partial C_1) \otimes H^r(\partial C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^{q+r}(\partial C_1) \end{array}$$

Temos:

- (i) A classe de cohomologia $\xi_q \smile \xi_r$ gera $H^{q+r}(C_1)$, já que C_1 tem o mesmo anel de cohomologia de $S^q \times S^r$.
- (ii) $i^*(\xi_q) = \pm[\{\star\} \times S^q \times S^r] = \pm\delta^*$, pois $i^* : H^q(C_1) \rightarrow H^q(\partial C_1)$ é um isomorfismo (o que se prova facilmente tendo em vista do lema anterior e utilizando argumentos similares aos adotados na prova do Lema 3.3.3).
- (iii) A classe de cohomologia $i^*(\xi_q \smile \xi_r)$ gera $H^{q+r}(\partial C_1)$, uma vez que a segunda linha do diagrama é um isomorfismo, por hipótese.
- (iv) Podemos por $i^*(\xi_r) = a\alpha^* + b\beta^*$ para certos inteiros a e b . Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 i^*(\xi_q \smile \xi_r) &= i^*(\xi_q) \smile i^*(\xi_r) = \pm\delta^* \smile (a\alpha^* + b\beta^*) \\
 &= \pm a(\gamma^* \smile \alpha^*) \pm b(\gamma^* \smile \beta^*) \\
 &= \pm b(\gamma^* \smile \beta^*) \\
 &= \pm b\delta^*
 \end{aligned}$$

O que implica, por (iii), em $b = \pm 1$.

- (v) Por (iv),

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_r, i_*[\{\star\} \times \{\star\} \times S^r] \rangle &= \langle i^*\xi_r, [\{\star\} \times \{\star\} \times S^r] \rangle \\
 &= \langle a[S^1 \times S^q \times \{\star\}]^* \pm [\{\star\} \times \{\star\} \times S^r]^*, [\{\star\} \times \{\star\} \times S^r] \rangle \\
 &= \langle \pm [\{\star\} \times \{\star\} \times S^r]^*, [\{\star\} \times \{\star\} \times S^r] \rangle \\
 &= \pm 1
 \end{aligned}$$

sendo a última igualdade da definição de base dual, e onde $\langle , \rangle$ denota o Produto de Kronecker.

Portanto, pelo Teorema dos Coeficientes Universais, $i^*[\{\star\} \times \{\star\} \times S^r]$ gera $H_r(C_1)$. $\square$

Prossigamos com a prova da segunda parte da Proposição 3.3.1.

Prova da Proposição 3.3.1 (b): Suponha que C_1 tenha o mesmo anel de cohomologia de $S^q \times S^r$, com $r = q + 1$. Considere a composição de inclusões

$$\varphi : \{\star\} \times S^q \times S^r \xrightarrow{j} S^1 \times S^q \times S^r \cong \partial C_1 \xrightarrow{i} C_1$$

Pelo Lema 3.3.9, $H_r(C_1)$ é gerado por $i_*[\{\star\} \times \{\star\} \times S^r]$. Logo, $\varphi_* : H_r(\{\star\} \times S^q \times S^r) \rightarrow H_r(C_1)$ é isomorfismo. No Lema 3.3.8 vimos que $\varphi_* : H_n(\{\star\} \times S^q \times S^r) \rightarrow H_n(C_1)$ é isomorfismo para $n = q, q + r$. Mais ainda, $H_n(C_1) \approx H_n(\{\star\} \times S^q \times S^r) = 0$, para todo $n \neq 0, q, r, q + r$. Para $n = 0$, o gerador $[\{\star\} \times \{\star\} \times \{\star\}]$ de $H_0(\{\star\} \times S^q \times S^r) \approx \mathbb{Z}$ é, obviamente, aplicado por φ_* num dos geradores de $H_0(C_1) \approx \mathbb{Z}$; noutras palavras, tem-se $\varphi_*[\{\star\} \times \{\star\} \times \{\star\}] = \pm[\{\star\} \times \{\star\} \times \{\star\}]$. Portanto, temos provado que φ_* é um isomorfismo em qualquer dimensão. Sendo assim, como $\{\star\} \times S^q \times S^r$ e C_1 são ambos simplesmente conexos, segue, pelo Teorema de Whitehead, que φ é uma equivalência de homotopia.

Seja $Y = f(\{\star\} \times S^q \times S^r) \subset \partial C_1 \cong S^1 \times S^q \times S^r$. Podemos “empurrar” Y para o interior de C_1 usando um campo de vetores normais para dentro, de ∂C_1 em C_1 , e obtemos

uma variedade Y' . Seja G uma vizinhança tubular fechada suficientemente pequena de Y' no interior de C_1 . Claramente, vemos que G é difeomorfa a $D^2 \times S^q \times S^r$.

Por excisão e por ser φ uma equivalência de homotopia, vemos que a variedade $V = C_1 - \overset{\circ}{G}$ é um h -cobordismo entre ∂G e ∂C_1 . Como $\dim V = q + r + 2 = 2q + 3 > 6$, haja visto que $q \geq 2$, segue do Teorema do h -cobordismo que V é difeomorfa a $\partial G \times [0, 1]$. Portanto, $C_1 = V \cup G \cong (\partial G \times [0, 1]) \cup G \cong G \cong D^2 \times S^q \times S^r$, onde $\cong$ lê-se “é difeomorfo a”.

Isto conclui definitivamente a prova da Proposição 3.3.1. $\square$

Como já anunciado no início desta seção, a condição $r \neq q + 1$ do item (a) da Proposição 3.3.1 é essencial. Para provarmos isto vamos proceder como na construção © para encontrarmos um mergulho suave $S^1 \times S^q \times S^{q+1} \rightarrow S^{2q+3}$ que não satisfaça o primeiro item daquela proposição. Mais que isso, provaremos o seguinte:

Proposição 3.3.10. *Para $1 \leq q$, existem infinitos mergulhos mutuamente distintos, $f_n : S^1 \times S^q \times S^{q+1} \rightarrow S^{2q+3}$, $n = 1, 2, \dots$, tais que:*

- (a) *Uma das duas componentes de $S^{2q+3} - f_n(S^1 \times S^q \times S^{q+1})$ tem os mesmos grupos de homologia de $S^q \times S^{q+1}$, e a outra tem os grupos de homologia de $S^1 \times S^{q+1}$, mas*
- (b) *O fecho de nenhuma das duas componentes de $S^{2q+3} - f_n(S^1 \times S^q \times S^{q+1})$ é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.*

Prova: Se repetimos a construção © com q no lugar r e $q + 1$ no lugar de q , e evitamos a utilização do difeomorfismo δ que permuta as duas primeiras esferas do produto $S^1 \times S^q \times S^r$, partimos então de um nó q -dimensional K em S^{q+2} é chegamos a um mergulho suave

$$f : S^1 \times S^q \times S^{q+1} \rightarrow D^{q+2} \times S^{q+1} \hookrightarrow (D^{q+2} \times S^{q+1}) \cup (S^{q+1} \times D^{r+1}) \cong S^{2q+3}.$$

Se chamamos C_1 e C_2 aos fechos das componentes conexas do complementar deste mergulho como antes, pelo isomorfismo 3.3 vê-se que C_1 tem os grupos de homologia do produto $S^1 \times S^{q+1}$, enquanto o isomorfismo 3.4 nos garante que os grupos de homologia de C_2 coincidem com os de $S^q \times S^{q+1}$. Isto concorda com o item (a).

Agora, se o nó K é escolhido de modo que se tenha $\pi_1(S^{q+2} - K)$ não-abeliano, o que é de veras possível, então C_1 não pode ser homotopicamente equivalente a um produto de esferas, como mostra o Lema 3.2.2 item (a).

Para mostrar que também C_2 não é homotopicamente equivalente a um tal produto, assumamos inicialmente $q > 1$. Pela construção realizada não há grande dificuldade em se perceber que $j_* : H_{2q+1}(\partial C_2) \rightarrow H_{2q+1}(C_2)$ é um isomorfismo, onde $j : \partial C_2 \rightarrow C_2$ é a aplicação inclusão. Além disso, $j_* : H_{q+1}(\partial C_2) \rightarrow H_{q+1}(C_2)$ aplica a classe de homologia $[S^1 \times S^q \times \{\star\}]$ no gerador de $H_{q+1}(C_2)$ e $j_*[\{\star\} \times \{\star\} \times S^{q+1}] = 0$. Decorre destes fatos que as induzidas em cohomologia $j^* : H_{2q+1}(\partial C_2) \rightarrow H_{2q+1}(C_2)$ é um isomorfismo e $j^* : H_{q+1}(\partial C_2) \rightarrow H_{q+1}(C_2)$ aplica o gerador de $H^{q+1}(C_2) \approx \mathbb{Z}$ em $\pm[S^1 \times S^q \times \{\star\}]^*$, onde, claro, $\{[S^1 \times S^q \times \{\star\}]^*, [\{\star\} \times \{\star\} \times S^{q+1}]^*\}$ constitui uma base de $H^{q+1}(\partial C_2) \approx \text{Hom}(H_{q+1}(\partial C_2), \mathbb{Z})$, dual da base

$\{[S^1 \times S^q \times \{\star\}], [\{\star\} \times \{\star\} \times S^{q+1}]\}$ de $H_{q+1}(\partial C_2)$. Então, considerando o diagrama comutativo do produto *cup*

$$\begin{array}{ccc} H^q(C_2) \otimes H^{q+1}(C_2) & \xrightarrow{\smile} & H^{2q+1}(C_2) \\ j^* \otimes j^* \downarrow & & \downarrow j^* \\ H^q(\partial C_2) \otimes H^{q+1}(\partial C_2) & \xrightarrow{\smile} & H^{2q+1}(\partial C_2) \end{array}$$

vemos que a primeira linha deve ser o homomorfismo nulo, já que $H^q(\partial C_2)$ é gerado pelo dual $[\{\star\} \times S^q \times \{\star\}]^*$ de $[\{\star\} \times S^q \times \{\star\}]$, gerador de $H_q(C_2)$, mas, por outro lado, $H^{q+1}(C_2)$ é gerado por $[S^1 \times S^q \times \{\star\}]^*$ e temos $[\{\star\} \times S^q \times \{\star\}]^* \smile [S^1 \times S^q \times \{\star\}]^* = 0$. Logo, C_2 não é homotopicamente equivalente a um produto de esferas, pois caso contrário o produto *cup* induziria isomorfismo no anel graduado de cohomologia.

Quando $q = 1$ um argumento similar pode ser aplicado. Pouparemos maiores detalhes.

Portanto, como na Seção 2.2, podemos construir infinitos mergulhos suaves mutuamente distintos satisfazendo as propriedades (a) e (b) desta proposição que, por isso, tem sua prova concluída. $\square$

Na Proposição 3.3.1 assumimos $2 \leq q \leq r$. Quando $q = 1$ temos o seguinte resultado similar a Proposição 3.3.10.

Proposição 3.3.11. *Para $1 \leq r$, existem infinitos mergulhos mutuamente distintos, $f_n : S^1 \times S^1 \times S^r \rightarrow S^{r+3}$, $n = 1, 2, \dots$, tais que*

- (a) *Uma das duas componentes de $S^{r+3} - f_n(S^1 \times S^1 \times S^r)$ tem os mesmos grupos de homologia de $S^1 \times S^r$, mas*
- (b) *O fecho de nenhuma das duas componentes de $S^{r+3} - f_n(S^1 \times S^1 \times S^r)$ é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.*

Prova: Os mergulhos satisfazendo esta proposição serão construídos, novamente, de forma semelhante aos da construção © da Seção 2.2, usando desta vez r no lugar de q e 1 no lugar de r , e como na prova anterior poupando a utilização do difeomorfismo δ .

Partindo de um nó 1-dimensional K em S^3 obtemos, então, um mergulho suave

$$f : S^1 \times S^1 \times S^r \rightarrow D^3 \times S^r \hookrightarrow (D^3 \times S^r) \cup (S^2 \times D^{r+1}) \cong S^{r+3}.$$

Com as mesmas notações até aqui utilizadas, o isomorfismo 3.3 nos garante que C_1 possui os grupos de homologia de $S^1 \times S^r$. Já os grupos de homologia de C_2 , segundo o isomorfismo 3.4, se expressam da seguinte maneira:

$$H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 2, r = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 2, r \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = r + 1, r \neq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Sendo assim, se mais uma vez escolhemos, com podemos, o nó K de modo que seu grupo seja não-abeliano, o Lema 3.2.2 já nos garante que C_1 não é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.

Para provarmos que também C_2 não é homotopicamente equivalente a um tal produto, vamos trabalhar separadamente os casos $r = 2$ e $r \neq 2$. Deveras, temos também o caso $r = 1$, mas para este, o Lema 3.2.2 item (b) já nos dá o resultado. Para $r > 2$, note que os grupos de homologia de C_2 se reduzem a

$$H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 1, 2, r + 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

E estes não representam, obviamente, grupos de homologia de um produto de esferas. Para $r = 2$, C_2 tem grupos de homologia de $S^1 \times S^q$, mas a Proposição 3.3.10 enunciada para $q = 1$ garante que, ainda assim, C_2 não é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.

A infinidade de mergulho satisfazendo as propriedades (a) e (b) da proposição segue, agora, das construções da Seção 2.2. $\square$

Mais uma vez utilizando construção semelhante àquela da Seção 2.2 podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 3.3.12. *Para $1 \leq q, r$, existem infinitos mergulhos mutuamente distintos, $f_n : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$, $n = 1, 2, \dots$, tais que*

- (a) *Uma das duas componentes de $S^{q+r+2} - f_n(S^1 \times S^q \times S^r)$ tem o mesmo grupo de homologia de $S^1 \times S^r$, mas*
- (b) *O fecho de nenhuma das duas componentes de $S^{q+r+2} - f_n(S^1 \times S^q \times S^r)$ é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.*

Prova: Fazemos aqui a mesma adaptação da construção © já realizada nas duas provas anteriores, desta vez trocando q por r e r por q . Sendo assim, partimos de um nó q -dimensional K em S^{q+2} e vamos dar num mergulho suave

$$f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow D^{q+2} \times S^r \hookrightarrow (D^{q+1} \times S^r) \cup (S^{q+1} \times D^{r+1}) \cong S^{q+r+1}.$$

O isomorfismo 3.3 nos garante, nas notações comuns, que $H_*(C_1) \approx H_*(S^1 \times S^r)$, enquanto os grupos de homologia de C_2 são dados pelo isomorfismo 3.4 da forma que aparece abaixo.

$$H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, q \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = q + 1, r = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = q + 1, r \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = q + r, r \neq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Novamente pelo Lema 3.2.2, uma vez escolhido K de modo que se tenha $\pi_1(S^{q+2} - K)$ não-abeliano, segue que C_1 não é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.

Para provar igual propriedade para a componente C_2 , basta mais uma vez analisarmos suas homologias. Vejamos: Se $r = 1$, então temos

$$H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, q \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = q + 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Tais homologias não coincidem com a de qualquer produto de esferas e, por isso, C_2 não pode ser homotopicamente equivalente a um tal produto. Se $r \neq 1$, ficamos com

$$H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, q, q + 1, q + r \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo, se $r = q + 1$, então C_2 não tem homologia de um produto de esferas e o resultado fica provado nesta particularidade. Já para $r = q + 1$, C_2 tem sim homologia de um produto de esferas, a saber, $H_*(C_2) \approx H_*(S^q \times S^r)$. Não obstante, pela Proposição 3.3.10, ainda assim, C_2 não é homotopicamente equivalente a um produto de esferas.

Portanto, está concluída a prova da proposição. $\square$

Passamos agora a próxima seção, aquela que nos permitirá concluir sobre a abrangência dos resultados da seção que encerramos agora.

3.4 Sobre as homologias das componentes do complementar de um mergulho

Provaremos nesta seção que não importa quais especificidades possua um mergulho suave $f : S^1 \times S^q \times S^r \longrightarrow S^{q+r+2}$, com $1 \leq q \leq r$, sua imagem sempre divide a esfera S^{q+r+2} em duas componentes conexas, como mostra o Proposição 1.5.5, uma das quais possui os mesmos grupos de homologia de um produto de duas esferas escolhidas entre aquelas que compõem do domínio do mergulho. Apresentamos este resultado formalmente no seguinte:

Teorema 3.4.1. *Seja $f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$, $1 \leq q \leq r$, um mergulho suave. O fecho de uma das duas componentes conexas de $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$ tem as homologias de $S^1 \times S^q$ ou $S^1 \times S^r$ ou $S^q \times S^r$.*

Prova: Denotaremos, como comumente, por C_1 e C_2 os fechos das componentes de $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$. Vamos dividir a prova deste teorema em seis casos, de acordo com relações entre os inteiros positivos $1, q$ e r .

Antes, porém, de partimos às particularidades de cada caso, notemos que, dado um mergulho suave $f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$ como no enunciado do teorema, temos, obviamente, $C_1 \cup C_2 = S^{q+r+2}$ e $\partial C_1 = \partial C_2 = f(S^1 \times S^q \times S^r)$. Disto e da Dualidade de Alexander segue que, qualquer que seja o inteiro $n > 0$,

$$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx H_n(S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)) \approx \tilde{H}_{q+r+1-n}(f(S^1 \times S^q \times S^r)).$$

Ainda, por ser f suave, esta expressão resulta, para $n > 0$, no isomorfismo

$$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \tilde{H}_{q+r+1-n}(S^1 \times S^q \times S^r). \quad (3.7)$$

Novamente pela Dualidade de Alexander, temos, para $n > 0$,

$$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx H_n(C_1) \oplus \tilde{H}^{q+r+1-n}(S^{q+r+2} - C_2) \approx H_n(C_1) \oplus \tilde{H}^{q+r+1-n}(C_1).$$

E pelo Teorema dos Coeficientes Universais, uma vez que os grupos de homologia aqui envolvidos são todos livres, chegamos a:

$$H_n(C_1) \oplus \tilde{H}_{q+r+1-n}(C_1) \approx H_n(C_1) \oplus H_n(C_2), \quad (3.8)$$

sempre com $n > 0$.

As equações 3.7 e 3.8 que acabamos de obter serão adaptadas, segundo as relações entre $1, q$ e r em cada caso que passamos a detalhar agora.

1º Caso: $q = r = 1$. Aqui, temos f como o mergulho suave do toro T^3 na esfera S^4 , ou seja, $f : S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow S^4$. Nestas condições, em função da equação 3.7, temos a seguinte tabela:

n	$\tilde{H}_{3-n}(S^1 \times S^1 \times S^1)$	$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
1	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0

Pela equação 3.8 e resultados expressos nesta tabela, concluimos que, para $n > 0$,

$$H_n(C_1) \oplus H_{3-n}(C_1) \approx H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Com isso, eliminamos 12 casos do total de 16 possibilidades para as homologias de C_1 , restando apenas as que satisfazem uma das seguinte relações:

$$(H_1(C_1), H_2(C_1)) \approx \begin{cases} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0) \\ (0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Quando ocorre $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, vê-se claramente que C_1 tem homologias de $S^1 \times S^1$.

Se ocorre $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, então, pelas conhecidas relações entre as homologias de C_1 e C_2 , descobrimos que $(H_1(C_2), H_2(C_2)) \approx (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ e, desta vez, C_2 é que tem as homologias de $S^1 \times S^1$.

Assuma que ocorra o caso $(H_1(C_1), H_2(C_1)) \approx (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0)$. Considere a seqüência exata de cohomologia

$$\cdots \rightarrow H^1(C_1) \xrightarrow{i^*} H^1(\partial C_1) \xrightarrow{\delta^*} H^2(C_1, \partial C_1) \rightarrow H^2(C_1) \rightarrow \cdots$$

do par $(C_1, \partial C_1)$, onde $i : C_1 \rightarrow \partial C_1$ é a aplicação inclusão e δ^* é o operador cobordo. Pela Dualidade de Poincaré-Lefschetz, $H^2(C_1, \partial C_1) \approx H_2(C_1) = 0$. Logo, i^* é um epimorfismo na seqüência acima. Considere, agora, o diagrama comutativo do produto *cup* abaixo.

$$\begin{array}{ccc} H^1(C_1) \otimes H^1(C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^2(C_1) \\ \downarrow i^* \otimes i^* & & \downarrow i^* \\ H^1(\partial C_1) \otimes H^1(\partial C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^2(\partial C_1) \end{array}$$

Como $i^* : H^1(C_1) \rightarrow H^1(\partial C_1)$ é epimorfismo na seqüência exata do par $(C_1, \partial C_1)$, segue que $i^* \otimes i^*$ é epimorfismo na primeira coluna deste diagrama. Deste modo, é não nula a linha de baixo do diagrama; do que segue uma contradição, uma vez que $H^2(C_1) = 0$ e o diagrama comuta. Portanto, não pode ocorrer o caso $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0)$.

Para que ocorra o caso $(0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, deve ocorrer $(H_1(C_2), H_2(C_2)) \approx (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0)$. Sendo assim, com argumentos análogos os que acabamos de adotar, mostra-se que também este caso é de impossível ocorrência.

Isto completa o 1º caso da demonstração.

2º Caso: $1 < q = r$. Nestas especificações, o mergulho proposto é $f : S^1 \times S^q \times S^q \rightarrow S^{2q+2}$. Calculando as homologias $H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$ a luz da equação 3.7, confeccionamos a seguinte tabela:

n	$\tilde{H}_{2q+1-n}(S^1 \times S^q \times S^q)$	$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0
q	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$q+1$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0
$2q$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0

De posse dos resultados expressos nesta tabela, a equação 3.8 nos mostra que, para $n > 0$,

$$H_n(C_1) \oplus H_{2q+1-n}(C_1) \approx H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = q, q+1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, 2q \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim, das 36 possibilidades para as homologias de C_1 apenas nos cumpre analisar as que satisfazem esta última relação; e são elas:

$$(H_1(C_1), H_q(C_1), H_{q+1}(C_1), H_{2q}(C_1)) \approx \begin{cases} (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0) \\ (0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ (0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0) \\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, 0) \\ (0, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Quando ocorre $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$, é fácil ver que C_1 tem os mesmos grupos de homologia do produto $S^1 \times S^q$.

Se ocorre $(0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, então $(H_1(C_2), H_q(C_2), H_{q+1}(C_2), H_{2q}(C_2)) \approx (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$ e, assim, C_2 tem homologias de $S^1 \times S^q$.

Somente ocorre $(0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$ no caso em que C_1 tem homologias de $S^q \times S^q$. E se ocorre $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0)$, é porque $(H_1(C_2), H_q(C_2), H_{q+1}(C_2), H_{2q}(C_2)) \approx (0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$ e, então, C_2 tem as homologias de $S^q \times S^q$.

Assuma que ocorra o caso $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, 0)$. Considere a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H^q(C_1) \xrightarrow{i^*} H^q(\partial C_1) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(C_1, \partial C_1) \rightarrow H^{q+1}(C_1) \rightarrow \cdots$$

de cohomologia do par $(C_1, \partial C_1)$ com as mesmas notações do 1º caso. Pela Dualidade de Poincaré-Lefschetz tem-se $H^{q+1}(C_1, \partial C_1) \approx H_{2q+2-(q+1)}(C_1) \approx H_{q+1}(C_1) = 0$. Logo i^* é epimorfismo. Considere o diagrama comutativo do produto *cup*.

$$\begin{array}{ccc} H^q(C_1) \otimes H^q(C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^{2q}(C_1) \\ \downarrow i^* \otimes i^* & & \downarrow i^* \\ H^q(\partial C_1) \otimes H^q(\partial C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^{2q}(\partial C_1) \end{array}$$

Como i^* é epimorfismo na seqüência exata acima, assim é a coluna da esquerda do diagrama. Mas sendo $H^{2q}(C_1) = 0$, com o mesmo argumento do caso anterior chega-se a uma contradição e, portanto, este caso não pode ocorrer.

De modo similar mostra-se que também o caso $(0, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ não procede; já que se o mesmo ocorresse, teríamos $(H_1(C_2), H_q(C_2), H_{q+1}(C_2), H_{2q}(C_2)) \approx (\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, 0)$ e o argumento anterior igualmente aplicar-se-ia para C_2 no lugar de C_1 .

Isto conclui o 2º caso da prova.

3º Caso: $q = 1$ e $r = 2$ ($r = q + 1$). Desta vez, ficamos com um mergulho suave da forma $f : S^1 \times S^1 \times S^2 \rightarrow S^5$, e os grupos de homologia $H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$, relacionadas na equação 3.7, estão apresentadas na tabela abaixo.

n	$\tilde{H}_{4-n}(S^1 \times S^1 \times S^2)$	$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
1	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
3	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0

Neste termos, a equação 3.8 nos permite afirmar que, para $n > 0$,

$$H_n(C_1) \oplus H_{4-n}(C_1) \approx H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim, eliminamos 24 das 27 possibilidades para as homologias de C_1 , restando-nos apenas as abaixo relacionadas.

$$(H_1(C_1), H_2(C_1), H_3(C_1)) \approx \begin{cases} (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0) \\ (0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Se ocorre $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, então também $(H_1(C_2), H_2(C_2), H_3(C_2)) \approx (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ e, sendo assim, ambos, C_1 e C_2 , tem as homologias de $S^1 \times S^2$ ou $S^1 \times S^2$.

Quando ocorre $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$, C_1 tem as homologias do toro T^2 , ou seja, do produto $S^1 \times S^1$. Se ocorre $(0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, então $(H_1(C_2), H_2(C_2), H_3(C_2)) \approx (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$ e, desta vez, C_2 tem as homologias de $S^1 \times S^1$.

Isso completa a prova do teorema para o 3º caso.

4º Caso: $1 < q \neq r \neq q + 1$. Agora nenhum dos inteiros q e r são dados numericamente e, por isso, o mergulho que assumimos é da forma geral $f : S^1 \times S^q \times S^r \longrightarrow S^{q+r+2}$, a menos das relações sobre q e r para o caso.

Utilizando mais uma vez a equação 3.7 nos cálculos das homologias $H_*(C_1) \oplus H_*(C_2)$, poupando desta vez a confecção de uma tabela, expressamos-las da seguinte forma:

$$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, q, q + 1, r, r + 1, q + r, q + r + 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A partir destas expressões a equação 3.8 nos mostra que, para $n > 0$, tem-se

$$H_n(C_1) \oplus H_{q+r+1-n}(C_1) \approx H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, q, r, q + 1, r + 1, q + r \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Isto faz com que, das $2^6 = 64$ possibilidades para as homologias de C_1 , apenas os casos a seguir requeiram investigação.

$$(H_1(C_1), H_q(C_1), H_q(C_1), H_{q+1}(C_1), H_{q+r}(C_1), H_{r+1}(C_1)) \approx \begin{cases} (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0, 0) \\ (\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z}) \\ (0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0) \\ (0, 0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ (0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0) \\ (\mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Pois bem, investiguemos a ocorrência destes casos:

Quando ocorrem os casos $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0, 0)$, $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z})$ e $(0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0)$, C_1 tem as homologias de $S^1 \times S^q$, $S^1 \times S^r$ e $S^q \times S^r$, respectivamente.

Quando ocorrem os casos $(0, 0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $(0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$ e $(\mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$, C_2 tem as homologias dos casos do parágrafo anterior e, portanto, as homologias de $S^1 \times S^q$, $S^1 \times S^r$ e $S^q \times S^r$, respectivamente.

Considerando o diagrama comutativo do produto *cup* para as cohomologias de dimensão 1 e q (e obviamente $q + 1$), concluímos, com argumentos puramente análogos aos utilizados nos primeiros casos desta prova, que os casos $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ não podem ocorrer.

Fica assim provado mais um caso deste teorema.

5° Caso: $1 = q \neq r \neq q + 1$. Neste caso temos o mergulho $f : S^1 \times S^1 \times S^r \rightarrow S^{r+3}$, e a equação 3.7 nos permite gerar a tabela

n	$\tilde{H}_{r+2-n}(S^1 \times S^1 \times S^r)$	$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
1	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0
r	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$r + 1$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0

Da equação 3.8 segue, para $n > 0$,

$$H_n(C_1) \oplus H_{r+2-n}(C_1) \approx H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, r + 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 2, r \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esta relação descarta 30 dentre as 36 possibilidades para as homologias de C_1 , restando-nos apenas as seguintes:

$$(H_1(C_1), H_2(C_1), H_r(C_1), H_{r+1}(C_1)) \approx \begin{cases} (\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0) \\ (0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \\ (0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0) \end{cases}$$

Quando ocorre $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, C_1 tem homologias de $S^1 \times S^r$.

Se ocorre $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$, então $(H_1(C_2), H_2(C_2), H_r(C_2), H_{r+1}(C_2)) \approx (\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, donde C_2 tem homologias de $S^1 \times S^r$.

Quando ocorre $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0)$, C_1 tem as homologias de $S^1 \times S^1$.

Se ocorre $(0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, então $(H_1(C_2), H_2(C_2), H_r(C_2), H_{r+1}(C_2)) \approx (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0)$ e, neste caso, C_2 tem as homologias de $S^1 \times S^1$.

Com argumentos análogos aos já trabalhados nesta demonstração prova-se que os casos $(0, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ e $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, 0)$ não ocorrem.

Isso completa o 5º caso.

6º Caso: $1 < q$ e $r = q + 1$. Agora temos por considerar um mergulho suave da forma $f : S^1 \times S^q \times S^{q+1} \rightarrow S^{2q+3}$. A equação 3.7 ajustada para os inteiros positivos aqui considerados nos possibilita a construção da tabela abaixo.

n	$\tilde{H}_{2q+2-n}(S^1 \times S^q \times S^{q+1})$	$H_n(C_1) \oplus H_n(C_2)$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0
q	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$q + 1$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$q + 2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0
$2q + 1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	0	0

Esta, junto com a equação 3.8, nos dá a seguinte relação, para $n > 0$:

$$H_n(C_1) \oplus H_{r+2-n}(C_1) \approx H_n(C_1) \oplus H_n(C_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = q + 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, q, q + 2, 2q + 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

que elimina de vez 44 possibilidades para as homologias de C_1 das 48 inicialmente possíveis. As quatro possibilidades que restam são as seguintes:

$$(H_1(C_1), H_q(C_1), H_{q+1}(C_1), H_{q+2}(C_1), H_{2q+1}(C_1)) \approx \begin{cases} (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0) \\ (0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0) \\ (0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Quando ocorre $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0)$, é fácil ver que C_1 tem homologias de $S^1 \times S^q$.

Se ocorre $(0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, então tem-se $(H_1(C_2), H_q(C_2), H_{q+1}(C_2), H_{q+2}(C_2), H_{2q+1}(C_2)) \approx (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0)$ e, neste caso, C_2 tem as homologias de $S^1 \times S^q$.

Se ocorre $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$, então tem-se $(H_1(C_2), H_q(C_2), H_{q+1}(C_2), H_{q+2}(C_2), H_{2q+1}(C_2)) \approx (0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$ e, deste modo, vê-se que C_1 tem as homologias de $S^1 \times S^{q+1}$, enquanto C_2 tem as homologias de $S^q \times S^{q+1}$.

Se C_1 tem as homologias $(0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$, então ocorre o contrário do caso do parágrafo anterior.

Isso completa o 6º caso e, finalmente, a prova do teorema. □

3.5 O que completa o capítulo

Seja $f : S^1 \times S^q \times S^r \rightarrow S^{q+r+2}$ um mergulho suave com $1 \leq q \leq r$. Mostramos no Teorema 3.4.1 da seção anterior que o fecho de uma das duas componentes conexas do complementar de um tal mergulho tem sempre os mesmos grupos de homologia de $S^1 \times S^q$ ou $S^1 \times S^r$ ou $S^q \times S^r$.

Pois muito bem, ponhamos em uma tabela quais são as reais possibilidades para as homologias de uma componente C_j , $j = 1$ ou 2 , à luz daquele teorema e segundo as relações particulares entre os inteiros $1, q$ e r abordadas nas Proposições 3.3.1 à 3.3.12.

Proposição	Relação	Caso(s) abordado(s): para $j = 1$ ou 2 , $H_*(C_j) \approx$
3.3.1	$2 \leq q \leq r \neq q + 1$	$H_*(S^q \times S^r)$
3.3.10	$1 \leq q = r - 1$	$H_*(S^1 \times S^{q+1})$ e $H_*(S^q \times S^{q+1})$
3.3.11	$1 = q \leq r$	$H_*(S^1 \times S^r)$
3.3.12	$1 \leq q, r$	$H_*(S^1 \times S^r)$

Note que para quaisquer inteiros q e r com $1 \leq q \leq r$, o que concorre com todas as hipóteses deste capítulo, q e r estão relacionados em uma, e em mais de uma, das linhas da segunda coluna da tabela. Esta flexibilidade que temos em perceber os inteiros q e r em mais de uma relação das expressas nas hipóteses das Proposições 3.3.1 à 3.3.12 é que nos permitirá concluir sobre o abrangência total daquelas proposições. Vejamos como isso se dá:

Nas relações referentes a terceira linha da tabela restam analisar os casos em que (i) $H_*(C_j) \approx H_*(S^1 \times S^1)$ para $j = 1$ ou 2 . Mas este é apenas um caso especial da Proposição 3.3.11 quando trocamos r por 1 .

Já na quarta e última linha da tabela há que se analisar ainda os casos em que (ii) $H_*(C_j) \approx H_*(S^1 \times S^q)$ ou (iii) $H_*(C_j) \approx H_*(S^q \times S^r)$ para $j = 1$ ou 2 . Mas note que o primeiro destes decorre da Proposição 3.3.12 suposta uma troca de r por q , e o segundo procede da Proposição 3.3.1, uma vez que os casos em que $q = 1$ já se esgotaram em (ii) e da própria Proposição 3.3.12.

Na segunda linha apenas um caso ainda não aparece automaticamente suprido, aquele em que (iv) $H_*(C_j) \approx H_*(S^1 \times S^q)$ para $j = 1$ ou 2 . Para englobar também este, basta notar que é o mesmo que (ii) com a sutileza de termos $r = q + 1$.

Finalmente, das duas possibilidades restantes na primeira linha, a primeira, (v) $H_*(C_j) \approx H_*(S^1 \times S^q)$ é o mesmo que (ii) visto quando $q \geq 2$, e segunda, (vi) $H_*(C_j) \approx H_*(S^1 \times S^r)$ procede diretamente da Proposição 3.3.12, também aqui para $q \geq 2$.

Isto mostra que as Proposições 3.3.1 à 3.3.12 contemplam todas as possibilidades para a homologia daquela componente de $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$ que tem homologia de um produto de duas esferas. Portanto este trabalho extingue todas as dúvidas com respeito as possibilidades de serem as componentes $S^{q+r+2} - f(S^1 \times S^q \times S^r)$ difeomorfas a um produto de duas esferas e um disco.

✓

Mergulhos do toro T^3 na esfera S^4

O propósito deste capítulo é estudar os mergulhos do toro $T^3 (= S^1 \times S^1 \times S^1)$ na esfera S^4 com maiores detalhes.

A maneira mais trivial de se mergulhar T^3 em S^4 é primeiro mergulhar o toro 2-dimensional $T^2 (= S^1 \times S^1)$ em S^4 e, então, tomar o bordo de uma vizinhança tubular do mesmo em S^4 . Para um tal mergulho, o fecho de uma das duas componentes conexas do complementar é claramente difeomorfa a $T^2 \times D^2$, enquanto o fecho da outra é conhecido como *Gêmeos de Montesinos* e será denotado por E^4 .

Em [18, Exemplo 4.6], A. Katanaga e O. Saeki mostraram que existem muitos mergulhos de T^3 em S^4 . De fato, existem mergulhos destes tais que o fecho de nenhuma das componentes do complementar é homeomorfo a $T^2 \times D^2$ ou a E^4 . Não obstante, mostraremos neste capítulo que sempre existem mergulhos topológicos de $T^2 \times D^2$ e de E^4 em S^4 de modo que C_2 e C_1 , ou vice-versa, são homeomorfos, cada um, ao complementar do interior de um destes mergulhos em S^4 . Para tanto, faremos uma seção inicial para tratar um pouco mais pormenorizadamente da variedade conhecida por *Gêmeos de Montesinos*, que definiremos com o mesmo rigor encontrado em [26], uma vez que o conhecimento de algumas de suas propriedades topológicas será assaz importante para a conclusão dos principais resultados deste capítulo.

As principais referências para as definições e algumas construções da primeira seção deste capítulo são [26] e [30].

4.1 Os Gêmeos de Montesinos

Para que possamos bem compreender a estrutura topológica da variedade que aqui chamaremos *Gêmeos de Montesinos*, vamos iniciar esta seção apresentando (ou relembrando) algumas importantes definições, que vêm a garantir ao menos uma razoável visão geométrica da 4-variedade em questão.

Alças em uma variedade

Seja M uma n -variedade e H uma n -bola tal que $M \cap H \subset \partial M$, e suponha que exista um homeomorfismo $h : I^p \times I^{n-p} \rightarrow H$, tal que $h(\dot{I}^p \times I^{n-p}) = H \cap M$. Então, diremos que (H, h) é uma *alça de índice p* em M , ou simplesmente que H é uma *p -alça*.

Note que $M' = M \cup H$ é também uma n -variedade. Se escrevemos $f = h|_{\dot{I}^p \times I^{n-p}}$, então podemos identificar $M \cup H$ com $M \cup_f I^n$. Assim, diremos que M' é obtida de M colando-se a esta uma alça por meio de f . Reciprocamente, dado qualquer mergulho $f : \dot{I}^p \times I^{n-p} \rightarrow \partial M$, $M' = M \cup_f I^n$ pode ser considerada como M com uma p -alça colada de maneira óbvia. Escrevemos variavelmente

$$M' = M \cup H = M \cup H^{(p)} = M \cup_f H.$$

Seja (H, h) uma p -alça. Então chamamos $h(I^p \times 0)$ o *cerne* de H e $h(0 \times \dot{I}^{n-p})$ o *cocerne*. Chamamos ainda $h(\dot{I}^p \times 0)$ de *esfera de colagem* e $h(0 \times \dot{I}^{n-p})$ de *esfera-cinta*. Temos também o *a-tubo* $h(\dot{I}^p \times I^{n-p})$ e o *b-tubo* $h(I^p \times \dot{I}^{n-p})$. Finalmente, h é a *aplicação característica da alça H* , e $f = h|_{\dot{I}^p \times I^{n-p}}$ é a *aplicação de colagem*.

Vizinhança regular de uma 2-esfera

Uma *vizinhança regular* de uma 2-esfera S^2 consiste de uma vizinhança formada por um 4-disco D^4 localmente liso com uma 2-alça atada ao longo de um nó em seu bordo ∂D^4 . Reciprocamente, qualquer 4-variedade que é composta de um 4-disco localmente liso com uma 2-alça atada contém uma 2-esfera mergulhada naturalmente consistindo do cerne da 2-alça junto com o cone em D^4 na curva de colagem da 2-alça.

Os Gêmeos de Montesinos

Seja M uma 4-variedade fechada. Por um *par de Gêmeos* em M entendemos um subconjunto $R \cup S$ de M que consiste de duas 2-esferas encontrando-se em exatamente dois pontos, transversalmente e com sinais opostos.

Na 4-variedade $S^4 \cong \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$, tome o conjunto

$$E^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ ou } x_3^2 + x_4^2 \leq 1\} \cup \{\infty\}.$$

Veja que E^4 é uma vizinhança regular da união dos planos coordenados $R = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cup \{\infty\}$ e $S = \{0\} \times \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, que se encontram transversalmente em 0 e ∞ .

Considerando $S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, E^4 pode ser visto também como uma vizinhança regular dos Gêmeos $R \cup S$. Veremos isso com mais detalhes um pouco mais adiante. Por ora, chamaremos *Gêmeos de Montesinos* a terna (E^4, R, S) , ou mais simplesmente a E^4 .

O complemento $S^4 - \overset{\circ}{E}^4$ é uma vizinhança regular do toro

$$F^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 2 = x_3^2 + x_4^2\}.$$

Logo, ∂E^4 é homeomorfo ao toro T^3 . Um homeomorfismo explícito $T^3 \rightarrow \partial E^4$ pode ser encontrado em [26].

Vamos agora encontrar uma apresentação de E^4 através de colagens de alças em um 4-disco D^4 , o qual é obviamente uma 0-alça.

Sabemos que uma vizinhança regular de S consiste de um 4-disco D^4 com uma 2-alça colada ao longo de um nó em sua borda. Seja, então, D^4 uma vizinhança regular em E^4 de um arco simples em S conectando os pontos de $R \cap S$. Agora adicione uma 2-alça a D^4 para completar uma vizinhança regular de S . Veja a Figura 4.1 abaixo.

Figura 4.1: Vizinhança regular da 2-esfera S

Figura 4.2: Vizinhança regular da 2-esfera R

Agora fazemos o mesmo para obter uma vizinhança regular de R , mas desta vez com D^4 visto como duas cópias, D_1^4 e D_2^4 de D^4 , conectadas por um tubo não-enodado $D^1 \times D^3$ ao longo de dois 3-discos, cada um localizado no bordo de uma das cópias de D^4 . Ainda mais, consideramos cada uma das cópias D_1^4 e D_2^4 de modo que cada um dos dois pontos de $R \cap S$ esteja no interior de uma delas, e ambas sejam suficientemente pequenas de modo que estejam contidos no disco D^4 que compõe a vizinhança regular de S . Esta construção está representada na Figura 4.2 impressa acima.

A reunião destas vizinhanças regulares de R e S gera uma vizinhança regular de $R \cup S$, a qual é homeomorfa ao próprio E^4 . Então, os Gêmeos de Montesinos podem agora serem vistos como a composição de uma 0-alça, uma 1-alça e duas 2-alças. Maiores detalhes desta decomposição de E^4 podem ser encontrados em [26], e uma representação gráfica da mesma está expressa na Figura 4.3 a seguir.

Figura 4.3: Decomposição por alças dos Gêmeos de Montesinos

Visto E^4 com esta apresentação, e ainda com detalhes apresentados em [26], não é difícil notar que

$$H_n(E^4) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Vamos agora encontrar o grupo fundamental dos Gêmeos de Montesinos, ou seja, $\pi_1(E^4)$. Para tanto, vamos escrever E^4 como reunião de dois subconjuntos conexos por caminhos tais que sua intersecção é ainda conexa por caminhos, e o grupo fundamental de todos eles são conhecidos. Esta decomposição de E^4 pode ser encontrada com detalhes mais precisos em [26]; faremos aqui apenas uma breve descrição.

Seja $\mathcal{N}_R$ uma vizinhança tubular de R em E^4 . Então, é fácil ver que $\partial\mathcal{N}_R \cong S^1 \times S^2$ separa E^4 em duas regiões. Uma delas é $\mathcal{N}_R \cong D^2 \times S^2$ e a outra é $S^1 \times V^3$, onde V^3 é um toro sólido com um buraco em seu interior, ou seja, $(D^2 \times S^1) - \overset{\circ}{D}_0^3$, onde $\overset{\circ}{D}_0^3$ é um 3-disco contido no interior de $D^2 \times S^1$. O bordo de $S^1 \times V^3$ é a união disjunta de $S^1 \times S^2$ e $T^3 \cong \partial E^4$.

Considere o diagrama abaixo, onde i_1, i_2, j_1 e j_2 são aplicações inclusão:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(S^1 \times S^2) & \\ i_{1\#} \swarrow & & \searrow i_{2\#} \\ \pi_1(D^2 \times S^2) & & \pi_1(S^1 \times V^3) \\ j_{1\#} \searrow & & \swarrow j_{2\#} \\ & \pi_1(E^4) & \end{array}$$

Uma vez que $\pi_1(D^2 \times S^2) = 0$, é óbvio que as aplicações $i_{1\#}$ e $j_{1\#}$ são ambas nulas. Por outro lado, temos $\pi_1(S^1 \times S^2) \approx \mathbb{Z}$ e $\pi_1(S^1 \times V^3) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e a aplicação $i_2 : S^1 \times S^2 \rightarrow S^1 \times V^3$ é

a aplicação identidade na primeira coordenada. Logo $i_{2\sharp}$ é um monomorfismo e, pelo Teorema de Van Kampen, $\pi_1(E^4) \approx \mathbb{Z}$.

4.2 Um problema envolvendo mergulhos de 3-variedades em S^4

Sejam Γ e Δ poliedros conexos e compactos. Suponha que existam mergulhos “triviais” $\varphi : \Gamma \rightarrow S^4$ e $\psi : \Delta \rightarrow S^4$, tais que $\varphi(\Gamma) \cap \psi(\Delta) = \emptyset$, $\mathcal{N}_\Gamma \cup \mathcal{N}_\Delta = S^4$ e $\mathcal{N}_\Gamma \cap \mathcal{N}_\Delta = \partial\mathcal{N}_\Gamma = \partial\mathcal{N}_\Delta$, onde $\mathcal{N}_\Gamma$ e $\mathcal{N}_\Delta$ são vizinhanças regulares de $\varphi(\Gamma)$ e $\psi(\Delta)$, respectivamente. Considere a variedade fechada conexa e orientável $M = \partial\mathcal{N}_\Gamma = \partial\mathcal{N}_\Delta$.

Problema 4.2.1. *Seja $f : M \rightarrow S^4$ um mergulho localmente liso arbitrário e C_1 e C_2 os fechos das componentes conexas de $S^4 - f(M)$. Então, existem mergulhos $\varphi : \Gamma \rightarrow S^4$ e $\psi : \Delta \rightarrow S^4$ tais que C_1 e C_2 (ou C_2 e C_1) são homeomorfos aos fechos de $S^4 - \mathcal{N}_\Gamma$ e $S^4 - \mathcal{N}_\Delta$ respectivamente, onde $\mathcal{N}_\Gamma$ e $\mathcal{N}_\Delta$ são vizinhanças regulares de $\varphi(\Gamma)$ e $\psi(\Delta)$ em S^4 , respectivamente?*

4.3 O que responde o problema anterior

Daqui por diante, em toda esta seção, trabalharemos à responder o problema levantado em [18, Problema 4.1] e reproduzido na seção anterior, para o caso em que a 3-variedade M é o toro T^3 , ou seja, para mergulhos de T^3 em S^4 na categoria topológica, o que integra os propósitos deste capítulo.

Deveras, a resposta ao problema é revelada no seguinte teorema.

Teorema 4.3.1. *Seja $f : T^3 \rightarrow S^4$ um mergulho liso e denote por C_1 e C_2 os fechos das duas componentes conexas de $S^4 - f(T^3)$. Então, existem mergulhos topológicos $\varphi : T^2 \times D^2 \rightarrow S^4$ e $\psi : E^4 \rightarrow S^4$ tais que:*

(a) C_2 é homeomorfo a $S^4 - \varphi(T^2 \times D^2)$, e

(b) C_1 é homeomorfo a $S^4 - \psi(E^4)$

após permutação entre C_1 e C_2 , se necessário.

Prova: Seja $f : T^3 \rightarrow S^4$ um mergulho localmente liso e C_1 e C_2 os fechos das duas componentes conexas de $S^4 - f(T^3)$. Pelo Teorema 3.4.1, um destes fechos, digamos C_1 , tem os mesmos grupos de homologia do toro T^2 , enquanto o outro, agora C_2 , tem os grupos de homologia dos Gêmeos de Montesinos E^4 .

No que segue, vamos identificar ∂C_1 e ∂C_2 com T^3 . Mostremos que existe um homeomorfismo

$$\varphi : T^3 \cong \partial(T^2 \times D^2) \rightarrow \partial C_2 \cong T^3$$

tal que a 4-variedade fechada $M = C_2 \cup_\varphi (T^2 \times D^2)$, obtida colando-se C_2 e $T^2 \times D^2$ pelo homeomorfismo φ , é homeomorfa a S^4 .

Ora, como o homeomorfismo de colagem φ de C_2 e $T^2 \times D^2$ é realizado ao longo do bordo comum $T^3 \cong \partial C_2 \cong \partial T^2 \times D^2$, temos que

$$\chi(M) = \chi(C_2) + \chi(T^2 \times D^2) - \chi(T^3)$$

onde χ denota a Característica de Euler. Mas uma vez conhecidas as homologias de todos os espaços envolvidos, ou seja, os grupos de homologia de C_2 , de $T^2 \times D^2$ e de T^3 , a Característica de Euler $\chi(M)$ torna-se perfeitamente calculável. Relembrando que, se Y é um espaço topológico, sua Característica de Euler é definida por

$$\chi(Y) = \sum (-1)^n \text{posto} H_n(Y; \mathbb{Z}),$$

obtemos pelas homologias conhecidas

$$\chi(C_2) = 1 - 1 + 2 = 2, \quad \chi(T^2 \times D^2) = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \chi(T^3) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

E portanto,

$$\chi(M) = \chi(C_2) + \chi(T^2 \times D^2) - \chi(T^3) = 2.$$

Sendo, então, a Característica de Euler de M igual a 2, vemos facilmente que M é homeomorfa a S^4 se, e somente se, M é simplesmente conexa. Logo, pela solução da Conjectura de Poincaré 4-dimensional na categoria topológica (Freedman [9]), precisamos somente provar que M é simplesmente conexa para algum homeomorfismo φ .

Fixemos, então, um homeomorfismo φ como acima mencionado. Pela definição de C_1 e de C_2 , existe um homeomorfismo $g : T^3 \cong \partial C_1 \rightarrow \partial C_2 \cong T^3$ tal que $C_2 \cup_g C_1 \cong S^4$.

Considere o seguinte diagrama:

Neste, as aplicações $i_1, i_2, j, w_0, w_1, w_2, w_3, w_4$ e w_5 são inclusões, id_1 e id_2 são aplicações identidades, e $\gamma : \pi_1(C_1) \rightarrow \pi_1(T^2 \times D^2)$ é a composição $\gamma = \beta \circ \alpha$ do homomorfismo

de Hurewicz $\alpha : \pi_1(C_1) \rightarrow H_1(C_1)$, o qual é obviamente sobrejetor, e um isomorfismo $\beta : H_1(C_1) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \approx \pi_1(T^2 \times D^2)$. Note que, nestes termos, γ é um epimorfismo.

$$\begin{aligned} \text{Denote : } \phi_0 &= w_{3\#} \circ \zeta_1 = w_{4\#} \circ j_{\#} \circ id_{2\#} \circ \zeta_1 = w_{5\#} \circ i_{2\#} \circ \varphi_{\#} \circ \zeta_1, \\ \phi_1 &= w_{4\#} \circ \gamma \text{ e} \\ \phi_2 &= w_{5\#} \end{aligned}$$

Se a comutatividade $\phi_0 = \phi_1 \circ i_{1\#} \circ id_{1\#} = \phi_2 \circ i_{2\#} \circ g_{\#}$ for válida, então, pelo Teorema de Van Kampen, existe um único homomorfismo $\Theta : \pi_1(S^4) \rightarrow \pi_1(M)$ tal que $\phi_i = \Theta \circ w_{i\#}$, $i = 0, 1, 2$. Ou seja, será comutativo o diagrama abaixo.

Vamos provar que Θ é um epimorfismo.

Considere $\delta : \pi_1(T^3) \rightarrow \pi_1(C_1)$ a aplicação definida pela composição $\delta = i_{1\#} \circ id_{1\#} \circ g_{\#}^{-1}$, e $\lambda : \pi_1(T^3) \rightarrow \pi_1(T^2 \times D^2)$ definida pela composição $\lambda = j_{\#} \circ id_{2\#} \circ \varphi_{\#}^{-1}$. Estas aplicações, vistas no primeiro diagrama desta prova, fornecem, lá mesmo, dois diagramas como no Teorema de Van Kampen, ambos com a aplicação $i_{2\#} : \pi_1(T^3) \rightarrow \pi_1(C_2)$ em comum. Tais diagramas juntos nos fornecem o diagrama abaixo.

Pelo Teorema de Van Kampen, $\pi_1(M)$ é gerado pelas imagens $\text{Im}(\phi_2)$ e $\text{Im}(w_{4\#})$. Agora:

(i) Como $\phi_2 = \Theta \circ w_{2\#}$, temos $\text{Im}(\phi_2) \subset \text{Im}(\Theta)$.

(ii) Como γ é sobrejetora, temos $\text{Im}(w_{4\#}) = \text{Im}(w_{4\#} \circ \gamma)$. Logo, como $\phi_1 = w_{4\#} \circ \gamma$, segue que $\text{Im}(w_{4\#}) = \text{Im}(\phi_1)$. Ainda, como $\phi_1 = \Theta \circ w_{1\#}$, ficamos com $\text{Im}(\phi_1) \subset \text{Im}(\Theta)$. Donde $\text{Im}(w_{4\#}) \subset \text{Im}(\Theta)$.

Portanto, $\pi_1(M)$ é gerado pela imagem de Θ , o que prova que Θ é sobrejetor.

Ora, sendo Θ sobrejetor, uma vez que $\pi_1(S^4)$ é trivial, seguirá que $\pi_1(M)$ é também trivial. Assim, temos somente que provar que existe, de fato, um homeomorfismo $\varphi : T^3 \rightarrow T^3$ de tal modo que tenhamos a comutatividade $\phi_0 = \phi_1 \circ i_{1\#} \circ id_{1\#} = \phi_2 \circ i_{2\#} \circ g_{\#}$, a qual é equivalente a comutatividade $j_{\#} \circ (\varphi_{\#}^{-1} \circ g_{\#}) = \gamma \circ i_{1\#}$.

É bem sabido que todo automorfismo de $\pi_1(T^3)$ é realizado por um homeomorfismo de T^3 . Portanto, se existe um automorfismo $\kappa : \pi_1(T^3) \rightarrow \pi_1(T^3)$ tal que $j_{\#} \circ \kappa = \gamma \circ i_{1\#}$, então podemos encontrar um homeomorfismo $\varphi : T^3 \rightarrow T^3$ tal que $\varphi_{\#} = g_{\#} \circ \kappa^{-1}$, e a comutatividade requerida vale para todo φ . (Veja o diagrama comutativo abaixo).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1(C_1) & & \\
 & \nearrow \alpha & & \searrow \beta & \\
 \pi_1(C_1) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(T^2 \times D^2) & & \\
 \uparrow i_{1\#} & & \uparrow j_{\#} & & \\
 \pi_1(T^3) & \xrightarrow{\kappa} & \pi_1(T^3) & & \\
 \searrow g_{\#} & & \swarrow \varphi_{\#} & & \\
 & & \pi_1(T^3) & &
 \end{array}$$

Como β é um isomorfismo e $\gamma = \beta \circ \alpha$, temos somente que mostrar a existência de um automorfismo κ tal que $\beta^{-1} \circ j_{\#} \circ \kappa = \alpha \circ i_{1\#}$. Mostremos primeiro que a composição $\alpha \circ i_{1\#}$ é um epimorfismo. Para isto, considere a seqüência exata

$$\dots \rightarrow H_1(T^3) \xrightarrow{i_{1*}} H_1(C_1) \rightarrow H_1(C_1, T^3) \rightarrow H_0(T^3) \rightarrow \dots$$

do par $(C_1, \partial C_1) \cong (C_1, T^3)$. Por excisão, temos $H_1(C_1, T^3) \approx H_1(S^4, C_2) = 0$. Isto implica que $i_{1\#}$ é um epimorfismo. Então, pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(T^3) & \xrightarrow{\alpha'} & H_1(T^3) \\
 \downarrow i_{1\#} & & \downarrow i_{1*} \\
 \pi_1(C_1) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(C_1)
 \end{array}$$

vemos que $\alpha \circ i_{1\#}$ é um epimorfismo, onde α e α' são os homomorfismos de Hurewicz apropriados, que são epimorfismos. Finalmente, para um isomorfismo arbitrário

$$\beta' : \ker(\alpha \circ i_{1\#}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \ker j_{\#}$$

temos o seguinte digrama comutativo com linhas exatas, para algum isomorfismo κ ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(T^3) & \xrightarrow{\alpha \circ i_{1\#}} & H_1(C_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta' & & \downarrow \kappa & & \downarrow \beta \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(T^3) & \xrightarrow{j_{\#}} & \pi_1(T^2 \times D^2) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Assim, temos um automorfismo κ que satisfaz a comutatividade requerida. Por consequência, $M = C_2 \cup_{\varphi} (T^2 \times D^2)$ é homeomorfa a esfera S^4 . Isto completa a prova da parte (a) do teorema, já que ficamos com

$$C_2 = M - \varphi(T^2 \times D^2) \cong S^4 - \varphi(T^2 \times D^2).$$

A prova da parte (b) é bastante similar e, por isso, pouparemos apologias que sejam deveras semelhantes as já apresentados na demonstração da parte (a).

Dado mergulho $f : T^3 \rightarrow S^4$ localmente liso e C_1 e C_2 os fechos das duas componentes conexas de $S^4 - f(T^3)$, temos visto que, digamos, C_1 tem homologias do toro T^2 , enquanto C_2 tem as homologias de E^4 . Precisamos mostrar que existe um homeomorfismo

$$\psi : T^3 \cong \partial(T^2 \times D^2) \rightarrow \partial C_2 \cong T^3$$

tal que a 4-variedade fechada $M = C_1 \cup_{\psi} E^4$ seja homeomorfa a S^4 .

Das já conhecidas homologias de C_1 , E^4 e T^3 , obtemos

$$\chi(C_1) = 1 - 2 - 1 = 0, \quad \chi(E^4) = 1 - 1 + 2 = 2 \quad \text{e} \quad \chi(T^3) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

E portanto,

$$\chi(M) = \chi(C_1) + \chi(E^4) - \chi(T^3) = 2.$$

Logo, como antes, precisamos somente provar que M é simplesmente conexa para algum homeomorfismo ψ . Fixado, então, um tal homeomorfismo ψ e outro $g : T^3 \cong \partial C_1 \rightarrow \partial C_2 \cong T^3$ tal que $C_2 \cup_g C_1 \cong S^4$, considere o diagrama abaixo, onde utilizamos as mesmas notações do diagrama análogo a este na demonstração da parte (a).

Com as mesmas notações anteriores, obviamente substituindo φ por ψ , se a comutatividade $\phi_0 = \phi_1 \circ i_{1\#} \circ id_{1\#} = \phi_2 \circ i_{2\#} \circ g_{\#}$ for válida, então, pelo Teorema de Van Kampen, existe um único homomorfismo $\Theta : \pi_1(S^4) \rightarrow \pi_1(M)$ tal que $\phi_i = \Theta \circ w_{i\#}$, $i = 0, 1, 2$. De modo puramente análogo ao utilizado na primeira parte, mostra-se que tal homomorfismo, se existe, é então um epimorfismo; donde seguirá que M é simplesmente conexa. Assim, temos somente que provar que existe um homeomorfismo $\psi : T^3 \rightarrow T^3$ de tal modo que se tenha a comutatividade $\phi_0 = \phi_1 \circ i_{1\#} \circ id_{1\#} = \phi_2 \circ i_{2\#} \circ g_{\#}$, a qual é equivalente a comutatividade $j_{\#} \circ (\psi_{\#}^{-1} \circ g_{\#}) = \gamma \circ i_{1\#}$. Mas uma vez que todo automorfismo de $\pi_1(T^3)$ é realizado por um homeomorfismo de T^3 , se existe um automorfismo $\kappa : \pi_1(T^3) \rightarrow \pi_1(T^3)$ tal que $j_{\#} \circ \kappa = \gamma \circ i_{1\#}$, então podemos encontrar um homeomorfismo $\psi : T^3 \rightarrow T^3$ de maneira que se tenha $\psi_{\#} = g_{\#} \circ \kappa^{-1}$, e a comutatividade requerida valha para todo ψ . (Veja o diagrama comutativo abaixo).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1(C_2) & & \\
 & \nearrow \alpha & & \searrow \beta & \\
 \pi_1(C_2) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(E^4) & & \\
 \uparrow i_{1\#} & & \uparrow j_{\#} & & \\
 \pi_1(T^3) & \xrightarrow{\kappa} & \pi_1(T^3) & & \\
 \searrow g_{\#} & & \swarrow \psi_{\#} & & \\
 & \pi_1(T^3) & & &
 \end{array}$$

Como β é um isomorfismo e $\gamma = \beta \circ \alpha$, temos somente que mostrar a existência de um automorfismo κ tal que $\beta^{-1} \circ j_{\#} \circ \kappa = \alpha \circ i_{1\#}$. Mostremos, por ora, que a composição $\alpha \circ i_{1\#}$ é um epimorfismo. Para isto, considere a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_1(T^3) \xrightarrow{i_{1\#}} H_1(C_2) \rightarrow H_1(C_2, T^3) \rightarrow H_0(T^3) \rightarrow \cdots$$

do par $(C_2, \partial C_2) \cong (C_2, T^3)$. Por excisão, temos $H_1(C_2, T^3) \approx H_1(S^4, C_1) = 0$. Isto implica que $i_{1\#}$ é um epimorfismo. Então, pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(T^3) & \xrightarrow{\alpha'} & H_1(T^3) \\
 \downarrow i_{1\#} & & \downarrow i_{1*} \\
 \pi_1(C_2) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(C_2)
 \end{array}$$

vemos que $\alpha \circ i_{1\#}$ é um epimorfismo, onde α' é o homomorfismo de Hurewicz, que é um epimorfismo. Finalmente, para um isomorfismo arbitrário

$$\beta' : \ker(\alpha \circ i_{1\#}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \ker j_{\#}$$

temos o seguinte digrama comutativo com linhas exatas, para algum isomorfismo κ ,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(T^3) & \xrightarrow{\alpha \circ i_{1\sharp}} & H_1(C_1) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \approx \beta' & & \downarrow \approx \kappa & & \downarrow \approx \beta \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(T^3) & \xrightarrow{j_{\sharp}} & \pi_1(E^4) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Portanto, temos um automorfismo κ que satisfaz a comutatividade requerida. Por consequência, $M = C_1 \cup_{\varphi} (E^4)$ é homeomorfa a S^4 . Isto completa a prova da parte (b) do Teorema, pois ficamos com

$$C_1 = M - \overset{\circ}{\psi}(E^4) \cong S^4 - \overset{\circ}{\psi}(E^4).$$

Isto finaliza a prova do teorema. □

4.4 O análogo da seção anterior para outras dimensões

Seja $f : S^p \times S^q \times S^r \rightarrow S^{p+q+r+1}$ um mergulho suave trivial, isto é, $f(S^p \times S^q \times S^r)$ é o bordo de uma vizinhança tubular de um mergulho trivial de $S^p \times S^q$ ou $S^q \times S^r$ ou $S^p \times S^r$ em $S^{p+q+r+1}$. Sejam C_1 e C_2 os fechos das duas componentes de $S^{p+q+r+1} - f(S^p \times S^q \times S^r)$. Então um deles, digamos C_1 , é claramente difeomorfo a $S^p \times S^q \times D^{r+1}$, que é uma vizinhança tubular de um mergulho de $S^p \times S^q$ em $S^{p+q+r+1}$, após uma apropriada permutação de p, q e r , se necessário. O outro, então C_2 , que é difeomorfo a

$$[(D^{p+1} \times S^r) - \overset{\circ}{D}^{p+r+1}] \times S^q \cup [S^{p+r} \times D^{q+1}]$$

(para $p = 1$ veja a Observação 3.2.4), é uma vizinhança regular da união de duas esferas, S^{p+r} e S^{q+r} , mergulhadas em $S^{p+q+r+1}$, interceptando uma a outra transversalmente ao longo de S^{r-1} . (Em particular, C_2 tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet $S^{p+r} \vee S^{q+r} \vee S^r$). Então, é natural perguntar se um resultado similar ao Teorema 4.3.1 vale para p, q e r inteiros positivos arbitrários. De acordo com [22], quando $2 \leq p \leq q \leq r$, se $r \neq p + q$, ou se $r = p + q$ é par, a resposta é afirmativa.

✓

Mergulhos de somas conexas de toros em codimensão 1

Problemas de classificação de mergulhos de um toro $S^p \times S^q$ em S^{p+q+1} foram estabelecidos na categoria diferencial e linear por partes (PL) por R. Z. Goldstein [10] e A. Kosinski [19]. O objetivo deste último capítulo deste texto é, com base no trabalho de D. R. Anderson [3], detalhar como se estende estes resultados na categoria PL para mergulhos localmente não-enodados de somas conexas de toros em uma esfera de codimensão 1.

5.1 O teorema principal do capítulo

Definição 5.1.1. *Sejam M e V variedades PL e sejam $f, g : M \rightarrow V$ mergulhos PL localmente não-enodados. Então f é pseudo-isotópica a g , escrevemos $f \sim g$, se existe um homeomorfismo PL, $H : V \times I \rightarrow V \times I$ com $H(x, 0) = (x, 0)$ e $H(x, 1) = (h(x), 1)$ tal que $h(f(M)) = g(M)$. Claramente $\sim$ é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de um mergulho localmente não-enodado $f : M \rightarrow V$ é chamada classe de pseudo-isotopia de f , e o conjunto de todas as classes de pseudo-isotopia é denotado por $Pseudo-Iso(M, V)$.*

Nosso objetivo é estudar as pseudo-isotopias nos casos em que M é uma soma conexa de toros mergulhada em uma esfera de codimensão 1. Neste sentido temos o seguinte teorema, o principal deste capítulo, a cuja prova se dedicam as próximas seções.

Teorema 5.1.2. *Seja $n \geq 5$ e seja*

$$M^n = (\#_{i=1}^{r_1} S_i^{p_1} \times S_i^{q_1}) \# \cdots \# (\#_{i=1}^{r_s} S_i^{p_s} \times S_i^{q_s})$$

onde $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_s \leq q_s < \cdots < q_2 < q_1$, $p_j + q_j = n$, $j = 1, \dots, s$, e $\#$ denota soma conexa. Então

$$|Pseudo-Iso(M^n, S^{n+1})| = \lfloor \frac{1}{2}(r_1 + 1) \cdots (r_s + 1) \rfloor \text{ se } n \text{ é ímpar, ou se } n \text{ é par e } p_s \neq \frac{n}{2}$$

e

$$|Pseudo-Iso(M^n, S^{n+1})| = \lfloor \frac{1}{2}(r_1 + 1) \cdots (r_{s-1} + 1) \rfloor \text{ se } n \text{ é par e } p_s = \frac{n}{2}$$

onde a notação de valor absoluto indica cardinalidade e $\lfloor x \rfloor$ é o menor inteiro $\geq x$.

Uma vez provado este teorema, seguem como casos especiais os seguintes corolários que sequer demonstraremos neste texto por serem realmente imediatos.

Corolário 5.1.3. *Seja $n = p + q \geq 5$ com $p, q \geq 2$. Se n é ímpar ou se n é par com $p \neq \frac{n}{2}$, então existem $\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor$ classes de pseudo-isotopia de mergulhos de $\#_{i=1}^r S_i^p \times S_i^q$ em S^{p+q+1} .*

Corolário 5.1.4. *Seja $n = 2p$ com $p \geq 3$. Então quaisquer dois mergulhos de $\#_{i=1}^r S_i^p \times S_i^p$ em S^{2p+1} são pseudo-isotópicos.*

5.2 Esquema para a prova do teorema principal

Primeira parte

Seja M^n uma variedade simplesmente conexa e $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ um mergulho localmente não-enodado. Pela Dualidade de Alexander $S^{n+1} - f(M)$ tem duas componentes cujos fechos vamos denotar, no decorrer deste capítulo, por A e B . Como f é localmente não-enodada, A e B são variedades PL e $\partial A = f(M) = \partial B$.

Lema 5.2.1. *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ um mergulho localmente não-enodado. Então:*

- (a) *As inclusões $f(M) \subset A$ e $f(M) \subset B$ induzem isomorfismos $H_j(f(M)) \rightarrow H_j(A) \oplus H_j(B)$, para $0 < j < n$.*
- (b) *$H_j(A) \approx H_j(B) = 0$, para $j = n, n + 1$.*
- (c) *Se M é $(p - 1)$ -conexa, $p \geq 2$, então assim são A e B .*

Prova: Note inicialmente que o homomorfismo bordo $H_{n+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{\partial} H_n(A \cap B) \approx H_n(M)$ é um isomorfismo.

Agora considere a seqüência de Mayer-Vietoris da tríada própria $(S^{n+1}; A, B)$, a saber

$$\cdots \rightarrow H_j(A \cap B) \rightarrow H_j(A) \oplus H_j(B) \rightarrow H_j(S^{n+1}) \xrightarrow{\partial} H_{j-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

observando que M precisa ser orientável e identificando M a $A \cap B = f(M)$. Para todo inteiro positivo j , $j < n$, tem-se $H_{j+1}(S^{n+1}) \approx H_j(S^{n+1}) = 0$. Logo, o item (a) segue da exatidão desta seqüência.

Uma vez que o homomorfismo bordo $H_{n+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{\partial} H_n(A \cap B)$ é um isomorfismo, como já temos visto, ainda da seqüência de Mayer-Vietoris segue que $H_j(A) \oplus H_j(B) = 0$ para $j = n, n+1$, o que prova o item (b).

Para concluir (c) note primeiro que M é simplesmente conexa; logo, pelo Teorema de Van Kampen A e B também o são. O resultado, então, segue de (a) e do isomorfismo de Hurewicz φ que faz comutar o diagrama abaixo, para qualquer $j > 0$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_j(f(M)) & \longrightarrow & \pi_j(A) \oplus \pi_j(B) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H_j(f(M)) & \longrightarrow & H_j(A) \oplus H_j(B) \end{array}$$

□

Para o restante desta seção vamos especificar

$$M^n = (\#_{i=1}^{r_1} S_i^{p_1} \times S_i^{q_1}) \# \cdots \# (\#_{i=1}^{r_s} S_i^{p_s} \times S_i^{q_s})$$

onde p_j, q_j , com $j = 1, \dots, s$, são inteiros arbitrários, porém fixados, satisfazendo $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_s \leq q_s < \cdots < q_2 < q_1$, e $p_j + q_j = n \geq 5$ para todo $j = 1, \dots, s$. Então M é simplesmente conexa e

$$H_i(M) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, n \\ \mathbb{Z}^{r_j} & \text{se } i = p_j, q_j, j = 1, \dots, s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim, pelo Lema 5.2.1,

$$H_i(A) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{u_j} & \text{se } i = p_j, j = 1, \dots, s \\ \mathbb{Z}^{v_j} & \text{se } i = q_j, j = 1, \dots, s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $0 \leq u_j \leq r_j$ e $0 \leq v_j \leq r_j$, $j = 1, \dots, s$.

Então segue da Dualidade de Alexander que $u_j + v_j = r_j$, $j = 1, \dots, s$, e do Lema 5.2.1 que

$$H_i(B) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{v_j} & \text{se } i = p_j, j = 1, \dots, s \\ \mathbb{Z}^{u_j} & \text{se } i = q_j, j = 1, \dots, s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Seja $0 \leq u_j \leq r_j$ e $0 \leq v_j \leq r_j$, $j = 1, \dots, s$, e construa um poliedro $X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$ como segue: Sejam

$$S_1^{p_1}, \dots, S_{u_1}^{p_1}, S_1^{p_2}, \dots, S_{u_2}^{p_2}, \dots, S_1^{p_s}, \dots, S_{u_s}^{p_s}, S_1^{q_s}, \dots, S_{v_s}^{q_s}, \dots, S_1^{q_2}, \dots, S_{v_2}^{q_2}, S_1^{q_1}, \dots, S_{v_1}^{q_1},$$

esferas da dimensão indicada com pontos base

$$b_1, \dots, b_{u_1},$$

$$b_{u_1+1}, \dots, b_{u_1+u_2},$$

$$\vdots$$

$$b_{u_1+\dots+u_{s-1}+1}, \dots, b_{u_1+\dots+u_s},$$

$$b_{u_1+\dots+u_s+1}, \dots, b_{u_1+\dots+u_s+v_s},$$

$$\vdots$$

$$b_{u_1+\dots+u_s+v_s+\dots+v_3+1}, \dots, b_{u_1+\dots+u_s+v_s+\dots+v_2},$$

$$b_{u_1+\dots+u_s+v_s+\dots+v_2+1}, \dots, b_{u_1+\dots+u_s+v_s+\dots+v_1}$$

respectivamente, e seja $\mathbb{I}$ o intervalo fechado $[1, u_1 + \dots + u_s + v_s + \dots + v_1]$.

Então $X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$ é obtido da união disjunta das esferas e o intervalo $\mathbb{I}$ identificando o ponto base b_i com o ponto $i \in \mathbb{I}$, $i = 1, \dots, u_1 + \dots + u_s + v_1 + \dots + v_s$.

Assim, $X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$ tem o tipo de homotopia do *wedge* de u_j esferas de dimensão p_j e v_j esferas de dimensão q_j , $j = 1, \dots, s$.

Uma representação gráfica do poliedro $X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$ é feita através da Figura 5.1 mostrada abaixo.

Figura 5.1: O poliedro $X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$

Na seqüência será freqüente identificarmos a esfera $S_1^{p_1}$, ou $S_1^{p_2}$, e o intervalo $[1, 2]$ com suas imagens em $X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$. Também suprimiremos os argumentos $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s$ e escreveremos simplesmente X quando não houver risco de confusão.

Teorema 5.2.2. (a) *Seja $h : M^n \rightarrow S^{n+1}$ um mergulho localmente não-enodado e suponha que a homologia de A seja como em 5.1. Então existe um mergulho*

$$f : X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s) \rightarrow S^{n+1}$$

tal que A é uma vizinhança regular de $f(X)$.

(b) *Reciprocamente, se $f : X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s) \rightarrow S^{n+1}$ é um mergulho e N é uma vizinhança regular de $f(X)$, então*

$$N \cong \left(\natural_{i=1}^{u_1} S_i^{p_1} \times B_i^{q_1+1} \right) \natural \cdots \natural \left(\natural_{i=1}^{u_s} S_i^{p_s} \times B_i^{q_s+1} \right) \natural \\ \natural \left(\natural_{i=1}^{v_s} S_i^{q_s} \times B_i^{p_s+1} \right) \natural \cdots \natural \left(\natural_{i=1}^{v_1} S_i^{q_1} \times B_i^{p_1+1} \right)$$

onde $\natural$ denota soma conexa ao longo do bordo e os B_i são bolas (discos) da dimensão indicada. Logo $\partial N \cong M$.

A prova deste teorema requer vários resultados preliminares que passamos a enunciar e demonstrar agora. Neste empreendimento, vamos denotar $X = X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$, $X_1 = S_1^{p_1} \subset X$ se $u_1 \geq 1$ e $X_1 = S_1^{p_2} \subset X$ se $u_1 = 0$, e $X_2 = X - (X_1 \cup [1, 2])$.

Lema 5.2.3. *Seja $f : X \rightarrow S^{n+1}$ um mergulho e seja N uma vizinhança regular de $f(X)$ em S^{n+1} . Então existe uma vizinhança regular N_i de $f(X_i)$ em N , $i = 1, 2$, e uma bola $B^{n+1} \subset N$ tal que:*

(a) $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

(b) $N_i \cap B$ é uma face de B em ∂N_i , $i = 1, 2$.

(c) $N = N_1 \cup B \cup N_2$.

Prova: Pela unicidade da vizinhança regular é suficiente provar o lema no primeiro caso. Portanto, seja $(J; K, K_1, K_2, L)$ uma triangulação de $(S^{n+1}; f(X), f(X_1), f(X_2), f([1, 2]))$ com K, K_1, K_2 e L completos em J , e sejam

$$N = \bigcup_{v \in K'} st(v, J'')$$

$$N_i = \bigcup_{v \in K'_i} st(v, J''), \quad i = 1, 2$$

$$B = \bigcup_{v \in L' - (f(1) \cup f(2))} st(v, J'')$$

onde $'$ denota o primeiro complexo derivado, $''$ o segundo complexo derivado, e $st(v, J'')$ é a estrela fechada de vértice v em J'' .

Então N, N_1 e N_2 são vizinhanças regulares de $f(X), f(X_1)$ e $f(X_2)$, respectivamente, e $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Mais ainda, B é uma vizinhança regular do complexo L_1 obtido de L' removendo-se $f(1), f(2)$ e os 1-simplexos abertos σ_1 e σ_2 contendo estes pontos. Assim, como L_1 é ou um ponto ou homeomorfo a um intervalo fechado, L_1 colapsa a um ponto e B é uma bola.

Agora, $N_1 \cap B = \bigcup(st(v, J'') \cap st(w, J''))$, onde a união se dá sobre todos os vértices $v \in K'_1$ e $w \in L' - (f(1) \cup f(2))$. Como $v, w \in J'$, $st(v, J'') \cap st(w, J'') \neq \emptyset$ se, e somente se, v e w geram um 1-simplexo de J' . Mas se $v = \hat{\sigma}$ e $w = \hat{\tau}$, onde $\sigma, \tau \in J$ e $\hat{\sigma}$ ($\hat{\tau}$) é o ponto de $\overset{\circ}{\sigma}$ ($\overset{\circ}{\tau}$) em que σ (τ) é estrelado formando J' , então v e w geram um 1-simplexo de J' se, e somente se, $\tau \prec \sigma$ ou $\sigma \prec \tau$, onde $\prec$ significa “é uma face de”. Suponha $\tau \prec \sigma$. Então, como um ponto de $\overset{\circ}{\tau}$, a saber $w = \hat{\tau}$, está em $L' - (f(1) \cup f(2))$, $\tau \in L$. Similarmente, $\tau \in K_1$. Assim, $\tau \in K_1 \cap L$ e como $K_1 \cap L = f(1)$, $\tau = f(1)$. Logo, $w = \hat{\tau} = f(1) \notin L' - (f(1) \cup f(2))$, o que é uma contradição. Assim, $\sigma \prec \tau$.

Por um argumento similar ao anterior segue que $\sigma = f(1)$. Portanto, como $\sigma \prec \tau \in L$ e como L é uma triangulação de $f([1, 2])$, τ é um 1-simplexo de J .

Finalmente, como $f : [1, 2] \rightarrow S^{n+1}$ é um mergulho, existe um único 1-simplexo τ de L com $f(1) \prec \tau$. Assim,

$$B \cap N_1 = st(f(1), J'') \cap st(\hat{\tau}, J'')$$

que é justamente a célula B^n dual ao 1-simplexo de J' gerado por $f(1)$ e $\hat{\tau}$. Como é claro que $B^n \subset \partial B$ e $B^n \subset \partial N_1$, a afirmação (b) vale para $N_1 \cap B$.

Similarmente prova-se que (b) vale para $N_2 \cap B$.

Como a afirmação (c) segue da construção de N, N_1, N_2 e B , a prova do lema está completa. $\square$

Corolário 5.2.4. *Seja $f : X \rightarrow S^{n+1}$ um mergulho e seja N uma vizinhança regular de $f(X)$ em S^{n+1} . Então*

$$N \cong \left(\mathfrak{h}_{i=1}^{u_1} S_i^{p_1} \times B_i^{q_1+1} \right) \mathfrak{h} \cdots \mathfrak{h} \left(\mathfrak{h}_{i=1}^{u_s} S_i^{p_s} \times B_i^{q_s+1} \right) \mathfrak{h} \left(\mathfrak{h}_{i=1}^{v_s} S_i^{q_s} \times B_i^{p_s+1} \right) \mathfrak{h} \cdots \mathfrak{h} \left(\mathfrak{h}_{i=1}^{v_1} S_i^{q_1} \times B_i^{p_1+1} \right)$$

Prova: A prova é por indução sobre $r = u_1 + \cdots + u_s + v_s + \cdots + v_1$.

Se $r = 1$, então $X = S^p$ com $2 \leq p \leq q$ e $p + q = n \geq 5$. Assim, $(n + 1) - p = q + 1 \geq 3$ e, portanto, por [36, Teorema 2], X não enoda em S^{n+1} e o resultado procede.

Suponha que o corolário seja válido para $r - 1$. Então, no lema anterior,

$$N_1 \cong S_1^{p_1} \times B^{q_1+1} \quad (\text{ou } S_1^{p_2} \times B^{q_2+1} \text{ se } u_1 = 0) \quad \text{por [36], e}$$

$$N \cong \left(\mathfrak{h}_{i=2}^{u_1} S_i^{p_1} \times B_i^{q_1+1} \right) \mathfrak{h} \cdots \mathfrak{h} \left(\mathfrak{h}_{i=1}^{u_s} S_i^{p_s} \times B_i^{q_s+1} \right) \mathfrak{h} \left(\mathfrak{h}_{i=1}^{v_s} S_i^{q_s} \times B_i^{p_s+1} \right) \mathfrak{h} \cdots \mathfrak{h} \left(\mathfrak{h}_{i=1}^{v_1} S_i^{q_1} \times B_i^{p_1+1} \right)$$

O corolário então segue do Lema 5.2.1 e da definição de soma conexa de bordo. $\square$

Lema 5.2.5. *Sejam M^n uma variedade orientável e $B_i \subset \overset{\circ}{M}$, $i = 1, 2$, duas n -bolas. Seja $P \subset M - (B_1 \cup B_2)$ um poliedro que não desconecta M . Se $h : B_1 \rightarrow B_2$ é um homeomorfismo de grau 1, então existe um homeomorfismo $k : M \rightarrow M$ isotópico a 1_M estendendo h , tal que $k|_P = 1_P$.*

Prova: Este é o Teorema 3 de [12]. $\square$

Lema 5.2.6. *Seja M^n uma variedade orientável e seja $B_i \subset \partial M$, $i = 1, 2$, $(n-1)$ -bolas com $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Se $h : M \rightarrow M$ é um homeomorfismo de grau 1, então existe um homeomorfismo k de M em M isotópico a h e tal que $k|_{B_i} = 1_{B_i}$, $i = 1, 2$.*

Prova: Pelo Lema 5.2.5, como $h^{-1}|_{h(B_1)} : h(B_1) \rightarrow B_1$ é de grau 1, existe um homeomorfismo $k_1 : \partial M \rightarrow \partial M$ isotópico a $1_{\partial M}$ com $k_1|_{h(B_1)} = h^{-1}|_{h(B_1)}$. Seja $K : \partial M \times [0, 1] \rightarrow \partial M \times [0, 1]$ a isotopia entre k_1 e $1_{\partial M}$ e estenda k_1 a um homeomorfismo $k'_1 : M \rightarrow M$ sendo $k'_1 = K$ em um colar em torno de ∂M e $k'_1 = \text{identidade}$ fora do colar. Claramente k'_1 é isotópico a 1_M .

Por uma segunda aplicação do Lema 5.2.5, existe um homeomorfismo $k_2 : \partial M \rightarrow \partial M$ isotópico a $1_{\partial M}$ tal que $k_2|_{k_1 h(B_2)} = (k_1 h)^{-1}|_{k_1 h(B_2)}$ e $k_2|_{B_1} = 1_{B_1}$. Estenda k_2 a um homeomorfismo $k'_2 : M \rightarrow M$ isotópico a 1_M como acima.

Tomando $k = k'_2 k'_1 h$ completamos a prova. $\square$

Lema 5.2.7. *Seja $V = \natural_{i=1}^r S^q \times B^p$, com $p \geq 3$ e $q \geq 2$. Então qualquer automorfismo $\sigma : H_q(V) \rightarrow H_q(V)$ pode ser realizado por um homeomorfismo $h : V \rightarrow V$.*

Prova: Sejam $e_1, \dots, e_r \in H_q(V)$ um sistema de geradores correspondendo as zero-seções $S_i^q \times 0 \subset S_i^q \times B_i^p \subset V$, $i = 1, \dots, r$, e sejam R, S e T_i , $i = 1, \dots, r-1$, automorfismos de $H_q(V)$ satisfazendo:

$$R(e_1) = -e_1, \quad R(e_j) = e_j, \quad j \neq 1$$

$$S(e_1) = e_1 + e_2, \quad S(e_j) = e_j, \quad j \neq 1$$

$$T_i(e_i) = e_{i+1}, \quad T_i(e_{i+1}) = e_i, \quad T_i(e_j) = e_j, \quad j \neq i, i+1$$

Vamos provar primeiro o lema para σ igual a R, S ou T_i . Para simplificar a prova nestes casos, assumimos sem perda de generalidade que, em V , $(S_i^q \times B_i^p) \cap (S_j^q \times B_j^p) = C_{i,j}$ é uma $(p+q-1)$ -bola em $\partial(S_i^q \times B_i^p) \cap \partial(S_j^q \times B_j^p)$ se $j = i-1$ ou $i+1$, e é vazio se $j \neq i-1, i, i+1$.

Suponha $\sigma = R$. Sejam $f : S_1^q \rightarrow S_1^q$ e $g : B_1^p \rightarrow B_1^p$ homeomorfismo de grau -1 . Então $f \times g : S_1^q \times B_1^p \rightarrow S_1^q \times B_1^p$ tem grau 1 e, pelo Lema 5.2.6, existe um homeomorfismo $k : S_1^q \times B_1^p \rightarrow S_1^q \times B_1^p$ tal que $k|_{C_{1,2}} = 1|_{C_{1,2}}$. Então k estende a um homeomorfismo $h : V \rightarrow V$, sendo h igual a identidade fora de $S_1^q \times B_1^p$. Claramente h realiza R .

Suponha $\sigma = S$ e que $V = S_1^q \times B_1^p \natural S_2^q \times B_2^p$. Seja $a : [1, 2] \rightarrow V$ um mergulho tal que $a([1, 2]) \cap (S_i^q \times 0) = a(i)$, $i = 1, 2$, e seja

$$K = S_1^q \times 0 \cup S_2^q \times 0 \cup a([1, 2]).$$

Seja $N \subset \overset{\circ}{V}$ vizinhança regular de K . Então, pela prova do Lema 5.2.3, $N = N_1 \cap D \cup N_2$, onde $N_i = S_i^q \times B^p$ é uma vizinhança regular de $S_i^q \times 0$ em V , $i = 1, 2$; $N_1 \cap N_2 = \emptyset$; D é uma $(p+q)$ -bola; e $D \cap N_i$ é uma face de D em ∂N_i , $i = 1, 2$.

Seja $B^p = E_1^p \cup E_2^p$ onde E_i^p , $i = 1, 2$, são bolas tais que $E_1^p \cap E_2^p$ é uma face comum. Então existe um homeomorfismo $f : S^q \times B^p \rightarrow S_2^q \times B_2^p$ tal que $C_{1,2} \subset f(S^q \times B^p)$ e tal que $f(S^q \times 0)$ representa e_2 . Então

$$V' = (S_1^q \times B_1^p) \cup f(S^q \times E_1^p)$$

é homeomorfo a V . Assim, pelo Teorema de Irwin [17], existe um mergulho $g_1 : S^q \rightarrow V$ com $g_1(S^q) \subset \overset{\circ}{V}'$ que representa $e_1 + e_2$.

Seja M_1 uma vizinhança regular de $g_1(S^q)$ em $\overset{\circ}{V}'$. Então como V' mergulha em S^{p+q} (isto é, em codimensão zero), M_1 é também uma vizinhança regular de $g_1(S^q)$ em S^{p+q} . Como $p \geq 3$, [36, Teorema 2] implica que M_1 é homeomorfo a $S^q \times B^p$. Seja $h_1 : N_1 \rightarrow M_1$ um homeomorfismo de grau 1, tal que $h_1|_{S_1^q \times 0} = g_1$.

Agora, seja $g_2 : S^q \rightarrow V$ a composição

$$S^q \cong S^q \times 0 \subset S^q \times E_2^p \xrightarrow{f|} V.$$

Por argumentos similares ao anterior existe um homeomorfismo $h_2 : N_2 \rightarrow M_2$ de grau 1 tal que $h_2|_{S_2^q \times 0} = g_2$, onde $M_2 \subset \overset{\circ}{V}$ é uma vizinhança regular de $g_2(S^q)$ que não encontra M_1 .

Seja $x_i \in (N_i \times D)^\circ$, $i = 1, 2$, e seja

$$b : [1, 2] \rightarrow \overline{V - (M_1 \cup M_2)} = W$$

um mergulho tal que $b(i) = h_i(x_i)$, $i = 1, 2$. Seja D' uma vizinhança regular de $b([1, 2])$ em W que encontra ∂W regularmente. Então D' é uma $(p+q)$ -bola e segue da teoria de vizinhança regular (ver, por exemplo, [15, Lema 2.19]) que podemos assumir $D' \cap \partial M_i = h_i(N_i \cap D)$, $i = 1, 2$. Agora, como $h_i|_{N_i \cap D}$ é de grau 1, não é muito difícil ver que estas aplicações podem ser estendidas a um homeomorfismo $h_3 : D \rightarrow D'$.

Seja $h_4 : N_1 \cup D \cup N_2 \rightarrow M_1 \cup D' \cup M_2$ o homeomorfismo obtido pondo h_1, h_2 e h_3 juntos. Então h_4 tem grau 1. Finalmente, como

$$\overline{V - (N_1 \cup D \cup N_2)} \quad \text{e} \quad \overline{V - (M_1 \cup D' \cup M_2)}$$

são ambos homeomorfos a $\partial V \times [0, 1]$, pelo Teorema do h -cobordismo, h_4 pode ser estendido a um homeomorfismo $h : V \rightarrow V$ de grau 1.

Se $V = \natural_{i=1}^r S_i^q \times B_i^p$ com $r \geq 2$, podemos utilizar a prova do Lema 5.2.6 para assumir que o homeomorfismo h construído acima mantém $C_{2,3}$ pontualmente fixado. Então h pode ser estendido a um homeomorfismo de V sendo $h(x) = x$ se $x \notin (S_1^q \times B_1^p) \cup (S_2^q \times B_2^p)$.

Segue da construção que h realiza S .

Suponha $\sigma = T_i$ e seja $V' = S_i^q \times B_i^p \natural S_{i+1}^q \times B_{i+1}^p \subset V$. Então existe, obviamente, um homeomorfismo $k : V' \rightarrow V'$ de grau 1 que permuta $S_i^q \times B_i^p$ e $S_{i+1}^q \times B_{i+1}^p$. Pelo Lema 5.2.6, existe um tal homeomorfismo com $k|_{C_{i-1,i} \cup C_{i,i+1}} = \text{identidade}$. Estenda k a um homeomorfismo $h : V \rightarrow V$ sendo $h(x) = x$ se $x \in V - V'$ e $h|_{V'} = k$. Então h realiza T_i .

O lema agora segue notando-se que R, S e T_i , $i = 1, \dots, r-1$ geram $\text{Aut}(H_q(V))$. □

Corolário 5.2.8. *Seja $V = \natural_{i=1}^r S_i^q \times B_i^p$, com $p \geq 3$ e $q \geq 2$. Qualquer sistema de geradores $g_1, \dots, g_r \in H_q(V)$ pode ser representado por mergulhos $f_i : S^q \rightarrow V$ com imagens mutuamente disjuntas, $i = 1, \dots, r$.*

Prova: É fácil ver que cada g_i pode ser representado por uma q -esfera mergulhada. É a disjunção mútua que requer algum esforço para a prova.

Sejam $e_1, \dots, e_r \in H_q(V)$ o conjunto de geradores da prova do lema anterior e seja σ o automorfismo de $H_q(V)$ que aplica e_i a g_i , $i = 1, \dots, r$. Então σ pode ser realizado por um homeomorfismo de V . Portanto, como e_i , $i = 1, \dots, r$, pode ser representado por q -esferas mergulhadas mutuamente disjuntas, também o pode cada g_i , $i = 1, \dots, r$. $\square$

Prova do Teorema 5.2.2: Vamos mostrar que se $e_1, \dots, e_r \in \tilde{H}_*(A)$ geram $\tilde{H}_*(A)$, onde $r = u_1 + \dots + u_s + v_1 + \dots + v_s$, então estes geradores podem ser representados por esferas mergulhadas mutuamente disjuntas em $\mathring{A}$. (Note que como $\tilde{H}_*(A)$ tem posto r este é um sistema minimal de geradores). Na prova desta etapa distinguiremos entre os geradores de dimensão $\leq p_s$ e os geradores de dimensão $> p_s$.

Sejam $e_1, \dots, e_t \in \tilde{H}_*(A)$ os geradores de $\tilde{H}_*(A)$ de dimensão $\leq p_s$. Assim, $t = u_1 + \dots + u_s$ se $p_s \neq q_s$, e $t = u_1 + \dots + u_s + v_s$ se $p_s = q_s$. Como $\tilde{H}_*(M)$ aplica sobrejetivamente em $\tilde{H}_*(A)$ e como toda classe em $\tilde{H}_*(M)$ é “esférica”, toda classe em $\tilde{H}_*(A)$ é “esférica”. Assim, existem aplicações $f_i : S_i^{p_j} \rightarrow A$, $i = 1, \dots, u_j$, $j = 1, \dots, s$ (ou se $p_s = q_s$, $i = 1, \dots, u_s + v_s$ para $j = s$) representando os geradores $e_1, \dots, e_t$. Por resultados de Irwin [17], podemos assumir que os f_i são mergulhos. Como $\dim A \geq 2p_s + 1$, estes mergulhos podem ser construídos mutuamente disjuntos por argumentos de posicionamento gerais.

Suponha agora que $f_i : S_i \rightarrow \mathring{A}$, $i = 1, \dots, t$, são mergulhos com imagens mutuamente disjuntas representando os geradores $e_1, \dots, e_t \in \tilde{H}_*(A)$ de dimensão menor que m , onde $m \geq p_s$, e que $N_1, \dots, N_t$ são vizinhanças regulares mutuamente disjuntas das imagens com mesmo índice. Sejam $e_{t+1}, \dots, e_{t+w} \in H_m(A)$ geradores de dimensão m . (Note que $w = v_j$ se $m = q_j$.)

Se tomamos certo cuidado na formação da soma conexa, é claro que os mergulhos $S_i^{q_j} \cong x_i \times S_i^{q_j} \subset S_i^{p_j} \times S_i^{q_j}$, onde $x_i \in S_i^{p_j}$, produzem mergulhos $S_i^{q_j} \rightarrow M^n$, $i = 1, \dots, r_j$, representando um sistema de geradores de $H_{q_j}(M)$ que são mutuamente disjuntos. Utilize um colar de M em $A' = A - (\mathring{N}_1 \cup \dots \cup \mathring{N}_t)$ para obter mergulhos $g_i : S^{q_j} \rightarrow \mathring{A}'$ com imagens mutuamente disjuntas, $i = 1, \dots, r_j$. Agora, seja $y_i \in g_i(S^{q_j})$, $i = 1, \dots, r_j$, pontos quaisquer e seja $a_i : [i, i+1] \rightarrow \mathring{A}'$, $i = 1, \dots, r_j - 1$, mergulhos tais que

$$a_i([i, i+1]) \cap g_k(S^{q_j}) = \begin{cases} y_i & \text{se } k = i \\ y_{i+1} & \text{se } k = i+1 \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Como $\dim A \geq 6$, é possível selecionar um mergulho a_i tal que

$$a_i([i, i+1]) \cap a_k([k, k+1]) = \begin{cases} y_i & \text{se } k = i-1 \\ y_{i+1} & \text{se } k = i+1 \\ \emptyset & \text{se } k \neq i-1, i, i+1 \end{cases}$$

Assim, os mergulhos g_i , $i = 1, \dots, r_j$ “cabem juntos” a um dado mergulho $g : X(r_j) \rightarrow A'$.

Seja N uma vizinhança regular de $g(X(r_j))$ em $\overset{\circ}{A}'$. Então N é também uma vizinhança regular de $g(X(r_j))$ em S^{n+1} . Logo, pelo Corolário 5.2.4

$$N = \natural_{i=1}^r S_i^{q_j} \times B^{p_j+1}.$$

Como a inclusão $M \subset A$ induz epimorfismo $H_{q_j}(M) \rightarrow H_{q_j}(A)$, segue da construção de N que $H_{q_j}(N) \rightarrow H_{q_j}(A)$ é também um epimorfismo.

Agora, sejam $e'_1, \dots, e'_{r_j} \in H_{q_j}(N)$ um conjunto de geradores tal que e'_j projeta a $e_{i+1} \in H_{q_j}(A)$ para $i = 1, \dots, r_j$ e a zero caso contrário. O Corolário 5.2.8 mostra que $e'_1, \dots, e'_{r_j}$ podem ser representados por q_j -esferas mergulhadas mutuamente disjuntas em N . Logo, existem mergulhos $f_i : S_i^{q_j} \rightarrow \overset{\circ}{A}$, $i = t+1, \dots, t+v_j$, representando $e_{t+1}, \dots, e_{t+v_j}$, cujas imagens são mutuamente disjuntas e não encontram qualquer das outras esferas mergulhadas $f_i(S_i)$, $i = 1, \dots, t$.

Por indução, portanto, existem mergulhos $f_i : S_i \rightarrow \overset{\circ}{A}$ representando e_i , $i = 1, \dots, r$, com imagens mutuamente disjuntas. O mergulho

$$f : X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s) \rightarrow \overset{\circ}{A}$$

é obtido dos f_i por argumentos similares aos utilizados anteriormente para a construção do mergulho $g : X(r_j) \rightarrow \overset{\circ}{A}'$. Note que segue da construção de f que $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(A)$ é isomorfismo.

Agora, seja N uma vizinhança regular de $f(X)$ em $\overset{\circ}{A}$. Então $\pi_1(\partial N) = 1$ pelo Corolário 5.2.4. Como $\pi_1(A)$ e $\pi_1(N)$ também são triviais, segue do Teorema de Van Kampen que $\pi_1(A - \overset{\circ}{N}) = 1$. Mas também $H_i(A - \overset{\circ}{N}, \partial N) \approx H_i(A, N) = 0$ para todo i , já que f_* é isomorfismo. Logo, a inclusão $\partial N \subset A - \overset{\circ}{N}$ é uma equivalência de homotopia.

Como $\pi_1(M) = 1$ e $H_i(A - \overset{\circ}{N}, M) = 0$, pela Dualidade de Lefschetz, a inclusão $M \subset A - \overset{\circ}{N}$ é também uma equivalência de homotopia. Logo, pelo Teorema do h -cobordismo, $A - \overset{\circ}{N} \cong \partial N \times I$ e A é uma vizinhança regular de $f(X)$. Isto conclui a prova da afirmação (a).

Como a afirmação (b) segue do Corolário 5.2.4, a prova do teorema está completa. $\square$

Segunda parte

Teorema 5.2.9. *Sejam $f, g : X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s) \rightarrow S^{n+1}$ mergulhos e sejam P e Q vizinhanças regulares de $f(X)$ e $g(X)$ respectivamente. Então existe um homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1, tal que $h(P) = Q$.*

Antes de provar este teorema, vamos fixar a notação e provar dois lemas preliminares. Nestes e na demonstração do Teorema 5.2.9 denotamos $X = X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$ e se $u_1 \geq 1$, $X_1 = S_1^{p_1}$ e $X_2 = X - (X_1 \cup [1, 2))$.

Lema 5.2.10. *Seja $u_1 \geq 1$. Seja $f : X \rightarrow S^{n+1}$ um mergulho e seja N (N_2) uma vizinhança regular de $f(X)$ em S^{n+1} (de $f(X_2)$ em $\overset{\circ}{N}$). Então existe um mergulho $f' : X \rightarrow N$ e uma bola $B^{n+1} \subset S^{n+1}$ tal que:*

(a) *N é uma vizinhança regular de $f'(X)$ em S^{n+1}*

(b) *$f(X_1) \subset B$ e $B \cap N_2 = \emptyset$*

Prova: Como N (respectivamente N_2) colapsa a X (respectivamente a X_2) e $u_1 \geq 1$, a seqüência exata do par (N, N_2)

$$\cdots \rightarrow H_i(N_2) \rightarrow H_i(N) \rightarrow H_i(N, N_2) \rightarrow H_{i-1}(N_2) \rightarrow \cdots$$

mostra que $H_{p_1}(N, N_2) \approx \mathbb{Z}$ e $H_i(N, N_2) = 0$ se $i \neq p_1$. Com efeito, uma vez que $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_s \leq q_s < \cdots < q_2 < q_1$ segue $H_{p_1}(N) \approx \mathbb{Z}^{u_1}$ e $H_{p_1}(N_2) \approx \mathbb{Z}^{u_1-1}$. Além disso, é fácil notar que a inclusão $N_2 \subset N$ induz isomorfismo $H_i(N_2) \rightarrow H_i(N)$ para todo $i > p_1$. Assim, ficamos com a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_{p_1+1}(N_2) \xrightarrow{\cong} H_{p_1+1}(N) \rightarrow H_{p_1+1}(N, N_2) \rightarrow \mathbb{Z}^{u_1-1} \rightarrow \mathbb{Z}^{u_1} \rightarrow H_{p_1}(N, N_2) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

donde vemos que, de fato,

$$H_i(N, N_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = p_1 \\ 0 & \text{se } i \neq p_1 \end{cases}.$$

Pelo Teorema 5.2.1, $H_{p_1-1}(N, N_2) = 0$. Assim, são exatas as duas linhas de cima no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{p_1}(N_2) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_{p_1}(N) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_{p_1}(N, N_2) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow k_{1*} & & \uparrow k_{2*} & & \uparrow k_{3*} \\ 0 & \longrightarrow & H_{p_1}(\partial N_2) & \xrightarrow{i_{2*}} & H_{p_1}(N - \overset{\circ}{N}_2) & \xrightarrow{j_{2*}} & H_{p_1}(N - \overset{\circ}{N}_2, \partial N_2) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow k_{4*} & & \\ & & H_{p_1}(\partial N_2) & \xrightarrow{i_{3*}} & H_{p_1}(S^{n+1} - \overset{\circ}{N}_2) & & \end{array}$$

Note que k_{3*} é um isomorfismo, por excisão. Agora, considere a seqüência de Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H_{p_1+1}(S^{n+1}) \rightarrow H_{p_1}(\partial N_2) \xrightarrow{\nu} H_{p_1}(N_2) \oplus H_{p_1}(S^{n+1} - \overset{\circ}{N}_2) \rightarrow H_{p_1}(S^{n+1}) \rightarrow \cdots$$

da tríada $(S^{n+1}; N_2, S^{n+1} - \overset{\circ}{N}_2)$. Sendo, obviamente, $H_{p_1+1}(S^{n+1}) \approx H_{p_1}(S^{n+1}) = 0$, é um isomorfismo a aplicação ν . Disto segue que são epimorfismos as aplicações k_{1*} e i_{3*} do diagrama.

O diagrama, então, mostra que existe uma classe $x \in H_{p_1}(N - \overset{\circ}{N}_2)$ que não é imagem por i_{2*} e tal que $k_{4*}(x) = 0$ em $H_{p_1}(S^{n+1} - \overset{\circ}{N}_2)$. Sendo assim, a comutatividade do quadrado superior esquerdo do diagrama, onde i_{1*} é claramente injetivo e aplica gerador a gerador, mostra que $(j_{1*} \circ k_{2*})(x)$ é um gerador de $H_{p_1}(N, N_2)$. Ainda, pela exatidão da seqüência referente a primeira linha do digrama, $H_{p_1}(N)$ é gerado pela imagem de i_{1*} e $k_{2*}(x)$.

O mergulho $f' : X \rightarrow N$ é agora obtido notando-se que, como $N - \overset{\circ}{N}_2$ é $(p_1 - 1)$ -conexo, x é esférico e pode ser representado por um mergulho $g : S^{p_1} \rightarrow (N - \overset{\circ}{N}_2)^\circ$, sendo $f'|_{S^{p_1}} = g$, $f'|_{X_2} = f|_{X_2}$; e estendendo f' sobre o intervalo $[1, 2] \subset X$ como na prova do Teorema 5.2.2. Então claramente $f'_* : H_i(X) \rightarrow H_i(N)$ é um isomorfismo se $i \neq p_1$ e tem imagem gerada pela imagem de i_{1*} e por $k_{2*}(x)$. Assim, $f'_* : H_{p_1}(X) \rightarrow H_{p_1}(N)$ é um epimorfismo. Mas como ambos os grupos aí envolvidos são abelianos livres em u_1 geradores, segue que f'_* é isomorfismo também na dimensão p_1 .

Portanto, a afirmação (a) segue do Teorema do h -cobordismo.

Para provar a segunda afirmação, note primeiro que $S^{n+1} - \overset{\circ}{N}_2$ é $(p_1 - 1)$ -conexo. Assim, como $k_{4*}(x) = 0$, o mergulho composto

$$g : S^{p_1} \rightarrow (N - \overset{\circ}{N}_2)^\circ \subset S^{n+1} - \overset{\circ}{N}_2$$

é homotopicamente nulo. Como $q_1 \geq 2$, a codimensão deste mergulho é ≥ 3 ($n = p_1 + q_1$). A prova do Teorema 7.4 de [15] então mostra que existe uma bola $B^{n+1} \subset S^{n+1} - \overset{\circ}{N}_2$ tal que $f'(X_1) = g(S^{p_1}) \subset B^{n+1}$, provando o item (b). $\square$

Lema 5.2.11. *Sejam $u_1 \geq 1$, $n \geq 5$ e sejam $f, g : X \rightarrow S^{n+1}$ mergulhos tais que $f|_{X_i} = g|_{X_i}$, $i = 1, 2$; e sejam P e Q vizinhanças regulares de $f(X)$ e $g(X)$ respectivamente. Então existe um homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 e tal que $h(P) = Q$.*

Prova: Alterando os mergulhos $f|_{[1,2]}$ e $g|_{[1,2]}$ se necessário, podemos assumir que $f|_{[1,2]} \cap g|_{[1,2]}$ consiste de dois pontos $f(1) = g(1)$ e $f(2) = g(2)$. (Como S^{n+1} , P e Q têm dimensão ≥ 6 , é sempre possível alterar f e g desta maneira). Logo $f|_{[1,2]}$ e $g|_{[1,2]}$ combinadas dão um mergulho $\xi : S^1 \rightarrow S^{n+1}$. Seja $\Phi : S^1 \times I \rightarrow S^{n+1}$ um mergulho com $\Phi|_{S^1 \times 0} = \xi$ e $\Phi(S^1 \times 1) \subset S^{n+1} - (f(X_1) \cup f(X_2))$. (Claramente um tal mergulho existe). Então, como $S^{n+1} - (f(X_1) \cup f(X_2))$ é simplesmente conexo, $\Phi|_{S^1 \times 1}$ estende a uma aplicação

$$\Phi^1 : B^2 \rightarrow S^{n+1} - (f(X_1) \cup f(X_2)).$$

Ainda do fato de $n+1 \geq 6$, podemos assumir que Φ^1 é um mergulho e que $\Phi(S^1 \times I) \cap \Phi^1(B^2) = \Phi(S^1 \times 1)$. Assim, Φ e Φ^1 juntos dão um mergulho $\Psi : D^2 \rightarrow S^{n+1}$, onde D^2 é o 2-disco $(S^1 \times I) \bigcup_{S^1 \times 1} B^2$, com

$$\Psi(\partial B^2) = f([1, 2]) \cup g([1, 2]).$$

Seja B^{n+1} uma vizinhança regular de $\Psi(D^2)$ relativa a $f(X_1) \cup f(X_2)$. Então B^{n+1} é uma bola pelo Lema 1 de [16], e $f|_{[1,2]} : [1, 2] \rightarrow B^{n+1}$ e $g|_{[1,2]} : [1, 2] \rightarrow B^{n+1}$ são mergulhos

próprios. Pelo não-enodamento de bolas em bolas [36], então, existe um homeomorfismo $h_1 : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ de grau 1 tal que

$$h_1 f([1, 2]) = g([1, 2]) \quad \text{e} \quad h_1|_{\partial B^{n+1}} = \text{identidade}$$

Estenda h_1 a um homeomorfismo de S^{n+1} tomando $h_1 = \text{identidade}$ fora de B^{n+1} . Claramente h_1 tem grau 1. Então, como $f(X_i) \cap B^{n+1} = f(i)$ e $g|_{X_i} = f|_{X_i}$, $i = 1, 2$, $h_1 f(X) = g(X)$. Assim, $h_1(P)$ é uma vizinhança regular de $g(X)$. Pela unicidade da vizinhança regular, então, existe um homeomorfismo $h_2 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 com $h_2(h_1(P)) = Q$. Tomando-se $h = h_2 h_1$ completa-se a prova. $\square$

Prova do Teorema 5.2.3: Faremos esta prova por indução sobre o número $r (= u_1 + \dots + u_s + v_1 + \dots + v_s)$ de esferas em $X = X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$.

Se $r = 1$, então $X = S^p$, com $2 \leq p \leq q$ e $p + q = n \geq 5$. Assim, $(n + 1) - p = q + 1 \geq 3$ e, portanto, pelo Teorema 2 de [36], X não enoda em S^{n+1} . Logo $f(X)$ e $g(X)$ não são enodamentos e o resultado segue da unicidade da vizinhança regular.

Agora, suponha válido o teorema para $r - 1$ esferas e seja X com r esferas. Existem dois casos a se considerar:

1º Caso: $X = X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$ com $u_1 \geq 1$. Neste caso assumimos, sem perda de generalidade, que f e g satisfazem (a) e (b) do Lema 5.2.10 e que, como no Lema 5.2.3, $P = P_1 \cup C \cup P_2$, $Q = Q_1 \cup D \cup Q_2$, onde P_1 (Q_1) é uma vizinhança regular de $f(X_1)$ (de $g(X_1)$), P_2 (Q_2) é uma vizinhança regular de $f(X_2)$ (de $g(X_2)$), C e D são bolas, e $P_1 \cap P_2 = \emptyset = Q_1 \cap Q_2$. Como P_1 colapsa a $f(X_1)$ e existe uma $(n + 1)$ -bola B_1 com $f(X_1) \subset B_1$, podemos engolfar P_1 em B_1 e assumir pelo Lema 7.1 de [15] que $P_1 \subset B_1$. Portanto, podemos assumir que $B_1 \cap P_2 = \emptyset$. Similarmente, assumimos que existe uma $(n + 1)$ -bola B_2 com $Q_1 \subset B_2$ e $B_2 \cap Q_2 = \emptyset$.

Agora, pelo Lema 5.2.5, existe um homeomorfismo $h_1 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 com $h_1(B_1) = B_2$ e $h_1(Q_2) = Q_2$, uma vez que $Q_2 \subset S^{n+1} - (B_1 \cup B_2)$ não desconecta S^{n+1} . Pela hipótese de indução existe um homeomorfismo $h_2 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 com $h_2 h_1(P_2) = Q_2$. Afirmamos que h_2 pode ser escolhido tal que $h_2|_{B_2} = \text{identidade}$. Com efeito: se esta afirmação não fosse certa, então teríamos B_2 e $h(B_2)$ duas bolas distintas em S^{n+1} , e Q_2 um poliedro em $S^{n+1} - (B_2 \cup h_2(B_2))$ que não desconecta S^{n+1} . Considere o homeomorfismo $h_2^{-1} : h_2(B_2) \rightarrow B_2$, obviamente de grau 1, inverso do homomorfismo h_2 restrito a $h_2(B_2)$. Pelo Lema 5.2.5, existe um homeomorfismo $k : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 (isotópico a $1_{S^{n+1}}$), tal que $k|_{Q_2}$ é a identidade e $k|_{h_2(B_2)} = h_2^{-1}$. Logo,

$$k h_2 h_1(P_2) = k(Q_2) = Q_2 \quad \text{e} \quad k h_2|_{B_2} = h_2^{-1} h_2 = \text{identidade}.$$

Substituindo h_2 por $k h_2$ verifica-se a afirmação.

Similarmente, como $S^{n+1} - \overset{\circ}{B}_2$ é uma $(n + 1)$ -bola, existe um homeomorfismo $h_3 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 tal que $h_3 h_2 h_1(P_1) = Q_1$ e $h_3|_{S^{n+1} - \overset{\circ}{B}_2}$ é a identidade. Assim, se $h' = h_3 h_2 h_1$, $h'(P_1) = Q_1$ e $h'(P_2) = Q_2$.

Defina um mergulho $f' : X \rightarrow h'(P)$ fazendo $f'|_{X_i} = g|_{X_i}$, $i = 1, 2$, e fazendo $f'|_{[1,2]}$ descrevendo um caminho em $h'(P)$ entre $g(1)$ e $g(2)$ não interceptando $g(X_1) \cup g(X_2)$. Como $h'(P_i) = Q_i$ colapsa a $g(X_i)$, $i = 1, 2$, não é muito difícil verificar que $f' : X \rightarrow h'(P)$ é uma equivalência de homotopia e que $h'(P)$ é, portanto, uma vizinhança regular de $f'(X)$. Ficamos, então, com mergulhos $f', g : X \rightarrow S^{n+1}$ com $f'|_{X_i} = g|_{X_i}$, $i = 1, 2$, sendo Q vizinhança regular de $g(X)$ e $h'(P)$ vizinhança regular de $f'(X)$. Pelo Lema 5.2.11, existe um homeomorfismo $h_4 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 tal que $h_4 h'(P) = Q$.

Tomando-se $h = h_4 h'$ completa-se a prova do 1º caso.

2º Caso: $X = X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$ com $u_1 = 0$. Neste caso, como

$$\partial P = (\#_{i=1}^{r_1} S_i^{p_1} \times S_i^{q_1}) \# \dots \# (\#_{i=1}^{r_s} S_i^{p_s} \times S_i^{q_s}),$$

segue do Lema 5.2.1 e Teorema 5.2.2 que existem mergulhos

$$f', g' : X'(u'_1, \dots, u'_s, v'_1, \dots, v'_s) \rightarrow S^{n+1}$$

tais que $S^{n+1} - \overset{\circ}{P}$ e $S^{n+1} - \overset{\circ}{Q}$ são vizinhanças regulares de $f'(X)$ e $g'(X)$ respectivamente, onde $u'_j = r_j - u_j$ e $v'_j = r_j - v_j$.

Agora, se $v_1 \geq 1$, então $u'_1 \geq 1$ e existe, pelo 1º caso, um homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 tal que $h(S^{n+1} - \overset{\circ}{P}) = S^{n+1} - \overset{\circ}{Q}$. Mas então $h(P) = Q$, completando a prova do 2º caso e do teorema. Por outro lado, se $v_1 = 0$, então não se tem esferas em dimensões p_1 e q_1 . Logo, podemos renumerar as esferas chamando p_2 de p_1 , $\dots$, p_n de p_{n-1} , e o mesmo com os q_j , $j = 1, \dots, n$. Repetimos este processo (um número claramente finito de vezes) até que se obtenha $u_1 \geq 1$ ou $v_1 \geq 1$, aplicando na seqüência o 1º ou o 2º caso respectivamente, e concluindo o teorema. $\square$

Terceira parte

Teorema 5.2.12. *Sejam $f : X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s) \rightarrow S^{n+1}$ e $g : X'(u'_1, \dots, u'_s, v'_1, \dots, v'_s) \rightarrow S^{n+1}$ mergulhos, e sejam P e Q vizinhanças regulares de $f(X)$ e $g(X')$ respectivamente. Para que exista um homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 tal que $h(\partial P) = \partial Q$ é necessário e suficiente que $u_j + v_j = u'_j + v'_j$, $j = 1, \dots, s$, e que uma das seguintes afirmações seja válida:*

- (i) *Se n é ímpar ou se n é par e $p_s \neq \frac{n}{2}$, $u_j = u'_j$ e $v_j = v'_j$, $j = 1, \dots, s$, ou $u_j = v'_j$ e $v_j = u'_j$, $j = 1, \dots, s$.*
- (ii) *Se n é par e $p_s = \frac{n}{2}$, $u_j = u'_j$ e $v_j = v'_j$, $j = 1, \dots, s-1$, ou $u_j = v'_j$ e $v_j = u'_j$, $j = 1, \dots, s-1$.*

Prova: Separamos os casos.

(i) Suponha que exista um homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 tal que $h(\partial P) = \partial Q$. Então ∂P e ∂Q têm homologias isomorfas e como, pelo Teorema 5.2.2, $H_{p_j}(\partial P)$ é abeliano livre de posto $u_j + v_j$ enquanto $H_{p_j}(\partial Q)$ é abeliano livre de posto $u'_j + v'_j$, segue que

$u_j + v_j = u'_j + v'_j$, $j = 1, \dots, s$. Também como h é um homeomorfismo e ∂P e ∂Q separam S^{n+1} em duas componentes, ou $h(P) = Q$ ou $h(P) = S^{n+1} - \overset{\circ}{Q}$. Se $h(P) = Q$, então P e Q tem as mesmas homologias. Além disso, pelo Lema 5.2.1, temos:

$$H_i(P) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{u_j} & \text{se } i = p_j, j = 1 \dots, s \\ \mathbb{Z}^{v_j} & \text{se } i = q_j, j = 1 \dots, s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{ou} \quad H_i(P) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{v_j} & \text{se } i = p_j, j = 1 \dots, s \\ \mathbb{Z}^{u_j} & \text{se } i = q_j, j = 1 \dots, s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$H_i(Q) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{v'_j} & \text{se } i = p_j, j = 1 \dots, s \\ \mathbb{Z}^{u'_j} & \text{se } i = q_j, j = 1 \dots, s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{ou} \quad H_i(Q) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{u'_j} & \text{se } i = p_j, j = 1 \dots, s \\ \mathbb{Z}^{v'_j} & \text{se } i = q_j, j = 1 \dots, s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

o que mostra que $u_j = u'_j$ e $v_j = v'_j$, $j = 1, \dots, s$, ou $u_j = v'_j$ e $v_j = u'_j$, $j = 1, \dots, s$. Se, por outro lado, $h(P) = S^{n+1} - \overset{\circ}{Q}$, um argumento similar usando as homologias de P e $S^{n+1} - \overset{\circ}{Q}$ e o Lema 5.2.1 mostra que, também neste caso, $u_j = u'_j$ e $v_j = v'_j$, $j = 1, \dots, s$, ou $u_j = v'_j$ e $v_j = u'_j$, $j = 1, \dots, s$.

Agora, suponha que (i) valha. Então se $u_j = u'_j$ e $v_j = v'_j$, $j = 1, \dots, s$, X e X' são homeomorfos e existe um homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 com $h(\partial P) = \partial Q$, pelo Teorema 5.2.9. Por outro lado, suponha $u_j = v'_j$ e $v_j = u'_j$, $j = 1, \dots, s$. Então pelo Lema 5.2.1, $H_{p_j}(S^{n+1} - \overset{\circ}{Q})$ e $H_{q_j}(S^{n+1} - \overset{\circ}{Q})$ são abelianos livres de posto u_j e v_j , respectivamente, $j = 1, \dots, s$; já que $H_{p_j}(\partial Q)$ e $H_{q_j}(\partial Q)$ são abelianos livres de posto $u'_j + v'_j$ pelo Teorema 5.2.2, e $H_{p_j}(Q)$ e $H_{q_j}(Q)$ são abelianos livres de posto u'_j e v'_j , respectivamente. Logo, pelo Teorema 5.2.2 existe um mergulho

$$g' : X(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s) \rightarrow S^{n+1}$$

tal que $S^{n+1} - \overset{\circ}{Q}$ é uma vizinhança regular de $g'(X)$. Outra aplicação do Teorema 5.2.9 dá o homeomorfismo h .

(ii) A prova da condição necessária é idêntica a do caso anterior. Já a condição suficiente, repare, não impõe condições de relação entre os valores u_s, v_s, u'_s e v'_s . Pois muito bem, sendo n par e $p_s = n/2$, uma vez que $p_s + q_s = n$, é também $q_s = n/2$. Logo, assumindo $u_s + v_s = u'_s + v'_s$, tanto $f(X)$ quanto $g(X')$ possui o mesmo número de esferas de dimensão $n/2 = p_s = q_s$.

Agora, se denotamos por $X(u_s, v_s)$ o subconjunto de X formando somente pelas esferas de dimensão p_s e q_s coladas no intervalo $[u_1 + \dots + u_{s-1} + 1, u_1 + \dots + u_s + v_s]$ reunido com o intervalo $(u_1 + \dots + u_s + v_s, u_1 + \dots + u_s + v_s + 1]$, e denotamos por $X'(u'_s, v'_s)$ o subconjunto de X' formando somente pelas esferas de dimensão p_s e q_s coladas no intervalo $[u'_1 + \dots + u'_{s-1} + 1, u'_1 + \dots + u'_s + v'_s]$ reunido com o intervalo $(u'_1 + \dots + u'_s + v'_s, u'_1 + \dots + u'_s + v'_s + 1]$; então $X(u_s, v_s)$ é naturalmente homeomorfo a $X'(u_s, v_s)$. Logo, se $P_s \subset \overset{\circ}{P}$ e $Q_s \subset \overset{\circ}{Q}$ são vizinhanças

regulares de $X(u_s, v_s)$ e $X'(u_s, v_s)$ respectivamente, segue da unicidade da vizinhança regular que existe um homeomorfismo $h_1 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1, tal que $h_1(P_s) = Q_s$.

Seja $\hat{X}$ o espaço quociente obtido de

$$(X - \{X(u_s, v_s) \cup [u_1 + \cdots + u_s + v_s, u_1 + \cdots + u_s + v_s + 1]\}) \cup \{u_1 + \cdots + u_{s-1} + 1\}$$

segundo a relação $u_1 + \cdots + u_{s-1} + 1 \equiv u_1 + \cdots + u_s + v_s + 1$. Seja $\hat{X}'$ o espaço construído de modo análogo partindo de X' . Pela prova da primeira parte do teorema, se $\hat{P} \subset \overset{\circ}{P}$ e $\hat{Q} \subset \overset{\circ}{Q}$ são vizinhanças regulares de $f(\hat{X})$ e $g(\hat{X}')$ respectivamente, então existe um homeomorfismo $h_2 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1, tal que $h_2(\hat{P}) = \hat{Q}$.

Agora, não é difícil notar que $P_s \cup \hat{P} \subset \overset{\circ}{P}$ e $Q_s \cup \hat{Q} \subset \overset{\circ}{Q}$ são vizinhanças regulares de $f(X)$ e $g(X')$, respectivamente. Logo, pela unicidade da vizinhança regular $P \cong P_s \cup \hat{P}$ e $Q \cong Q_s \cup \hat{Q}$. Vê-se, então, que h_1 e h_2 dão juntos um homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1, tal que $h(P) = Q$, o que conclui a prova do teorema. $\square$

5.3 A prova do teorema principal

Concluídas as provas dos três teoremas apresentados na seção anterior, estamos preparados para proceder a prova do teorema principal, que agora pode ser feita de forma bastante simples utilizando apenas os resultados apresentados nos referidos teoremas e argumentos básicos de análise combinatória. Vamos a prova.

Prova do Teorema 5.1.1: Como qualquer homeomorfismo $h : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ de grau 1 é ambiente isotópico a identidade, os Teoremas 5.2.2 - 5.2.12 estabelecem uma correspondência um a um entre elementos de $\text{Pseudo-Iso}(M^n, S^{n+1})$ e seqüências de inteiros $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s$, $0 \leq u_j \leq r_j$, $0 \leq v_j \leq r_j$, $j = 1, \dots, s$, satisfazendo somente as relações $u_j + v_j = r_j$, $j = 1, \dots, s$, e (i) ou (ii) do Teorema 5.2.12.

Um cálculo simples completa a prova. $\square$

✓

Referências Bibliográficas

- [1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. (2) 72 (1960) 20 - 104.
- [2] J. W. Alexander, *On the subdivision of a 3-space by a polyhedron*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 10 (1924) 6 - 8.
- [3] D. R. Anderson, *Embedding connected sums of tori in codimension one*, Illinois J. Math. 15 (1971) 122 - 134.
- [4] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R^4* , Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ. 4 (1926) 174 - 177.
- [5] W. Browder, *Surgery on simple-connected manifolds*, Ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete, Band 65, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [6] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, second ed., de Gruyter Stud. in Math., v. 5, de Gruyter, Berlin, 2003.
- [7] H. Cartan, *Suspension et invariant de Hopf*, Exposé 5, Séminaire H. Cartan, 11e. année, 1958/59. Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, École Normale Supérieure, Paris, 1959.
- [8] R. H. Crowell, R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn, Boston, 1963.
- [9] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. 17 (1982) 357 - 453.
- [10] R. Z. Goldstein, *Piecewise linear unknotting of $S^p \times S^q$ in S^{p+q+1}* , Michigan Math. J. 14 (1967) 405 - 415.
- [11] M. J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Northeastern University, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1967.

- [12] V. K. A. M. Gugenheim, *Piecewise linear isotopy and embeddings of elements and spheres (I)*, Proc. London Math. Soc., v. 3 (1953) 29-53
- [13] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Corwel University, Cambridge University Press, 2002.
- [14] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.
- [15] J. F. P. Hudson, *Piecewise linear topology*, Lecture Notes, University of Chicago, 1967.
- [16] J. F. P. Hudson and E. C. Zeeman, *On regular neighborhoods*, Proc. London Math. Soc. (3), v. 14 (1964) 719-745.
- [17] M. C. Irwin, *Combinatorial embeddings of manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 68 (1962) 25-27.
- [18] A. Katanaga, O. Saeki, *Embeddings of quaternion space in S^4* , J. Austral. Math. Soc. Ser. A 65 (1998) 313-325.
- [19] A. Kosinski, *On Alexander's theorem and knotted spheres*, in M. K. Fort Jr (Ed.), *Topology of 3-manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1961, 55-57.
- [20] L. A. Lucas, *Mergulhos em codimensão um de produto cartesiano de três esferas*, Tese, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos SP, Junho 1998.
- [21] L. A. Lucas. O. M. Neto, O. Saeki, *A generalization of Alexander's torus theorem to high dimensions and an unknotting theorem for $S^p \times S^q$ embedded in S^{p+q+2}* , Kobe J. Math. 13 (1996) 145-165.
- [22] L. A. Lucas, O. Saeki, *Embeddings of $S^p \times S^q \times S^r$ in $S^{p+q+r+1}$* , Pacific J. Math. 207 (2002) 447-462.
- [23] L. A. Lucas, O. Saeki, *Codimension one embeddings of product of three spheres*, Topology and Applications 146-147 (2005) 409-419.
- [24] C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, Dover publications, Inc. Mineola, New York, 1970.
- [25] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Math. Notes, princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.
- [26] J. M. Montesinos, *On twins in the four-spheres I*, Quart. J. Math. Oxford 34 (1983) 171-199.
- [27] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1984.
- [28] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lecture Ser., v. 7, Publish or Perish, Berkeley, CA, 1976.

- [29] J. J. Rotman, *The theory of groups: an introduction*, Allyn and Bacon, 1965.
- [30] C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete, Band 69, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [31] J. H. Rubinstein, *Dehn's lemma and handle decompositions of some 4-manifolds*, Pacific J. Math. 86 (1980) 565-569.
- [32] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. 84 (1962) 387-399.
- [33] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag New York, Inc. 1966.
- [34] C. T. C. Wall, *Unknotting tori in condimension one and spheres in codimension two*, Proc Cambridge Philos. Soc. 61 (1965) 659-664.
- [35] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag New York, Inc. 1978.
- [36] E. C. Zeeman, *Unknotting combinatorial balls*, Ann. of Math., v. 78 (1963) 501-526.

Lista de Símbolos

$\mathbb{Z}$	os inteiros
$\mathbb{Z}_p$	os inteiros módulo p
$\mathbb{Z}^n$	grupo livre em n geradores
$\mathbb{R}$	o corpo dos reais
$\mathbb{C}$	o corpo dos complexos
$\mathcal{Q}$	os quatérnios
$\mathcal{O}$	os octônios
S^n	esfera n -dimensional
T^n	toro n -dimensional
E^4	os Gêmeos de Montesinos
I_n	matriz identidade de ordem n
I^p	cubo unitário p -dimensional
$\dot{I}^p$	fronteira do cubo unitário p -dimensional
$\star$	um ponto base
$\approx$	isomorfismo entre objetos algébricos
$\cong$	homeomorfismo (ou difeomorfismo) entre objetos topológicos
$\smile$	produto <i>cup</i>
$\frown$	produto <i>cap</i>
$\otimes$	produto tensorial
$\oplus$	soma direta de grupos
$\times$	produto cartesiano de espaços
$\prod$	produto de espaços
$*$	produto livre de grupos
$\#$	soma conexa de variedades sem bordo
$\natural$	soma conexa de variedades ao longo do bordo
$\curvearrowright$	é face de

1_X	aplicação identidade em X
f_*	aplicação entre grupos de homologia induzida por f
f^*	aplicação entre grupos de cohomologia induzida por f
$f_\#$	aplicação entre grupos de homotopia induzida por f
$\deg f$	grau da aplicação f
$\lfloor x \rfloor$	menor inteiro maior ou igual a x
$\langle , \rangle$	produto interno usual do $\mathbb{R}^n$
$\leq , \geq$	produto de Kronecker
$[\ ,]$	produto de Whitehead
$\prec , \succ$	tipo de um nó toroidal
K_n	nó toroidal do tipo $\prec n, 2n+1 \succ$
$\mathcal{N}_K$	vizinhança tubular do nó K
X°	o giro de um conjunto X
$\overset{\circ}{A}$	interior de A
$\bar{A}$	fecho de A
∂A	bordo (ou fronteira) de A
Ker	núcleo
Im	imagem
Tor	produto Torção
Ext	produto Extensão
$Df(x)$	derivada de f no ponto x
$\mathcal{T}_x M$	espaço tangente a M no ponto x
$\chi(M)$	Característica de Euler de M
$\dim M$	dimensão da variedade M
$[M]$	classe fundamental de M (em homologia)
$[M]^*$	classe fundamental de M (em cohomologia)
$Z(G)$	centro do grupo G
$\pi_n()$	grupo de homotopia n -dimensional
$H_n()$	grupo de homologia n -dimensional
$\tilde{H}_n()$	grupo de homologia reduzida n -dimensional
$H^n()$	grupo de cohomologia n -dimensional com coeficientes em $\mathbb{Z}$
$\tilde{H}^n()$	grupo de cohomologia reduzida n -dimensional com coeficientes em $\mathbb{Z}$
$H_n(,)$	grupo de homologia relativa n -dimensional
$H^n(,)$	grupo de cohomologia relativa n -dimensional com coeficientes em $\mathbb{Z}$
$H^n(; G)$	grupo de cohomologia n -dimensional com coeficientes em G
$\text{Aut}(X)$	grupo dos automorfismos de X
$\text{Hom}(X, Y)$	grupo dos homomorfismo de X em Y
$\text{Pseudo-Iso}(X, Y)$	conjunto das classes de Pseudo-Isotopia de X em Y

Índice Remissivo

- alça, 80
- aplicação
 - de colagem, 80
 - característica, 80
- bordo, 19
 - de um simplexo singular, 21
- cadeia
 - (s) homólogas, 21
 - singular, 21
- Característica de Euler, 84, 87
- centro de um grupo, 33
- cerne, 80
- ciclos, 19
- classe de Pseudo-Isotopia, 91
- cobordismo produto, 30
- cobordo, 20
- cocadeia, 20
 - singular, 22
- cocerne, 80
- complexo
 - aumentado, 20
 - quociente, 20
 - de cadeias, 19
 - derivado, 95
- Conjetura de Poincaré generalizada, 30
- disco liso, 32
- Dualidade
 - de Alexander, 29
 - de Poincaré-Lefschetz, 29
- elemento primitivo, 62
- enlaceamento, 31
- equivalência de homotopia, 27
 - fraca, 27
- esfera
 - cinta, 80
 - de colagem, 80
- espaço tangente, 48
- estrela, 95
- exatidão, 22
- excisão, 22
- face, 96
- Fórmula de Künneth, 23
- grau de uma aplicação, 30, 44
- grupo de cohomologia
 - reduzido, 21
 - singular, 22
 - com coeficientes em G , 20
- grupo de homologia, 19
 - reduzido, 21
 - relativa, 22
 - singular, 21
 - com coeficientes em G , 19
- grupo de permutações, 39
- grupo de um nó, 32

- Gêmeos de Montesinos, 79, 81
- h-cobordismo, 30
- H-espacos, 29
- homotopia, 22
- Índice de Kronecker, 20
- isotopia ambiente, 31
- matriz
 - induzida por difeomorfismo, 44
 - realizada por um difeomorfismo, 45
- mergulho
 - (s) isotópicos, 31
 - exótico, 53
 - não-exótico, 53
 - liso, 32
 - suave, 34
- nó, 31
 - girado, 33
 - liso, 32
 - localmente liso, 32
 - suave, 32
 - toroidal, 32
 - trivial, 32
- número de intersecção, 62, 65
- Octônios, 46
- operador
 - bordo, 19
 - cobordo, 22
 - slant, 24
 - cobordo, 20
- par de Gêmeos, 80
- produto
 - cap, 25
 - cup, 25
 - de Kronecker, 23
 - de Whitehead, 28, 50
 - livre amalgamado, 63
 - wedge, 28
 - tensorial, 19
- Pseudo-Isotopia, 91
- Quatérnios, 46
- reflexão, 45
- Seqüência de Mayer-Vietoris, 23
- simplexo
 - padrão, 21
 - singular, 21
- soma conexa ao longo do bordo, 95
- sub-complexo de cadeias, 20
- Teorema
 - da separação de Brouwer, 31
 - de Hurewicz, 27
 - de Van Kampen, 26
 - de Whitehead, 27
 - do h-cobordismo, 30
 - do homorfismo de Hurewicz, 27
 - dos coeficientes universais para homologia, 20
 - dos coeficientes universais para cohomologia, 20
- triangulação, 95
- tríada
 - de variedades, 30
 - exata, 23
- vizinhança
 - regular de uma 2-esfera, 80
 - regular, 95
 - tubular, 31
- vértice, 95
- wedge, 94