Cohomologia local formal definida
por um par de ideais

Thiago Henrique de Freitas

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Thiago Henrique de Freitas

Cohomologia local formal definida por um par de ideais

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
Novembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fc Freitas, Thiago Henrique de
Cohomologia local formal definida por um par de
ideais / Thiago Henrique de Freitas; orientador
Victor Hugo Jorge Pérez. -- São Carlos, 2015.
128 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Álgebra Comutativa. 2. Cohomologia local. 3.
Cohomologia local formal. I. Jorge Pérez, Victor
Hugo , orient. II. Título.

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Thiago Henrique de Freitas

Formal local cohomology defined by a pair of ideals

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Víctor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
November 2015

Para minha família.

Don't stop believin' - JOURNEY

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me proteger, zelando por mim nos caminhos escolhidos, me dando saúde, paciência e força para ultrapassar todos os obstáculos.

À minha família, Wanderley, Inês, Hugo e Camila que sempre me apoiaram. Desde a graduação e mestrado, sempre me deram todo o auxílio para que eu atingisse meus objetivos. Peço desculpas pelos momentos de ausência, mas sem vocês com certeza eu não teria vencido mais esta etapa. Vocês são sem dúvida minha maior motivação e o principal pilar desta vitória.

Aos meus amigos, Jorge Luiz (Mendes), Nelson (Madeira), Thales (Telis), Victor (Argola), Rodrigo(Rodrigol), Dione(Jhony), Fábio (Badaró), Mostafa(Mohamed), Rodolfo (Mirna), Northon (Northon), Matheus(PAC), Cesar (Cesão), Mineiro, Alany, Camila e Jaqueline pela força durante os estudos e todos os momentos de descontração.

À todos meus amigos, os quais não citei aqui, que de certa forma contribuíram para que eu chegasse até onde cheguei.

Ao meu orientador e amigo Victor Hugo Jorge Pérez, pela dedicação, a disponibilidade e me de me aceitar para ser seu aluno de doutorado. Me recebeu como um filho em sua casa, me tratando muito bem e me ajudando em todos os momentos. Somente um “muito obrigado”seria muito pouco para tudo o que ele fez por mim. Agradeço de coração esse voto de confiança e sou muito grato por todos os ensinamentos.

Agradeço também aos Professores José Alberto Cuminato e Maria Soares Ruas que me ajudaram em um momento de dificuldade.

Finalmente, à CAPES e a FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho vamos introduzir duas generalizações do conceito de cohomologia local formal, o qual chamaremos de cohomologia local formal e Čech-cohomologia local formal, ambas definidas por um par de ideais. Estudaremos seu comportamento em diversos aspectos, tais como anulamento e não anulamento, artinianidade, finitude, relações com a dualidade de Matlis, entre outros.

Para isto, utilizaremos o conceito da cohomologia local definida por um par de ideais, introduzido em [50]. Estudaremos também o anel de endomorfismo da cohomologia local definida por um par de ideais e analisaremos quando a dualidade de Matlis de certos módulos de cohomologia local definidos por um par de ideais são módulos Cohen-Macaulay.

Palavras-chave: Cohomologia local, cohomologia local definida por um par de ideais, cohomologia local formal.

Abstract

In this work we will introduce two generalizations of the concept of formal local cohomology, called formal local cohomology and Čech formal local cohomology, both defined by a pair of ideals. We study their behavior in several aspects, such as vanishing and non vanishing, artinianness, finiteness, relations with Matlis dual, and others.

For this purpose, we use the concept of local cohomology defined by a pair of ideals, introduced in [50]. Also, we analyze the endomorphism ring of the local cohomology defined by a pair of ideal and when the Matlis dual of certain local cohomology defined by a pair of ideals are Cohen-Macaulay modules.

Keywords: Local cohomology, local cohomology defined by a pair of ideals, formal local cohomology.

SUMÁRIO

Introdução	viii
1 Preliminares	1
1.1 Alguns fatos em álgebra homológica	1
1.1.1 Complexos de cadeia	1
1.1.2 Aplicações de cadeia	2
1.1.3 Módulos injetivos	5
1.1.4 Um pouco sobre categorias e funtores	6
1.2 Cohomologia local	13
2 Cohomologia local com respeito a um par de ideais	24
2.1 Definições e alguns resultados	24
2.2 O complexo de Čech generalizado	33
2.3 Relações entre H_I^i e $H_{I,J}^i$	38
2.4 Resultados de anulamento e não anulamento	41
2.5 O teorema de dualidade local	47
2.6 Temas estudados em cohomologia local	48
3 Sobre o anel de endomorfismo	53
3.0.1 O início da investigação	56
3.0.2 O complexo truncado para um par de ideais	61
3.0.3 Cohomologia local e módulos Cohen-Macaulay	65

4	Cohomologia local formal definida por um par de ideais	69
4.1	Definições e alguns resultados	71
4.2	Dimensão cohomológica	75
4.3	Resultados de anulamento e não anulamento	79
4.4	A sequência de Mayer-Vietoris	81
4.5	Dualidade local	83
4.6	O grade formal com respeito a um par de ideais	89
5	Artinianidade e propriedades de finitude da cohomologia local formal	93
5.1	O filter-depth da cohomologia local formal	93
5.2	Artinianidade da cohomologia local formal	96
5.3	Cossuporte e primos coassociados	103
5.4	Finitude de $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ e $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$	108
	Apêndice	113
5.4.1	Envolvente injetivo	113
5.4.2	Limite direto	118
5.4.3	Limite inverso	120
5.4.4	Dualidade de Matlis	122
	Referências	124

INTRODUÇÃO

Sejam R um anel Noetheriano comutativo com unidade, I, J dois ideais de R e M um R -módulo. A cerne do presente trabalho tem como ferramenta principal a teoria de módulos de cohomologia local, isto é, para um inteiro i considere $H_I^i(M)$ o i -ésimo módulo de cohomologia local.

A cohomologia local foi introduzida por Alexander Grothendieck em meados de 1960, como ferramenta da resposta de uma conjectura de Pierre Samuel sobre quando certos tipos de anéis comutativos são domínios de fatoração única (DFU). Mais especificamente, Samuel perguntou: Seja R um anel local Noetheriano e $\widehat{R}$ seu completamento com respeito ao ideal maximal. Se $\widehat{R}$ é uma interseção completa e para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de R com altura menor ou igual a 3, $R_{\mathfrak{p}}$ de DFU, então R é DFU.

Atribui-se também a origem da cohomologia local também como ferramenta para provar os Teoremas de “Tipo de Lefschetz” na geometria algébrica e também para a resolução de diversas conjecturas em álgebra homológica.

Independentemente de qual foi a motivação inicial, a teoria de cohomologia local tornou-se uma das ferramentas importantes na resolução de diversos problemas em álgebra comutativa e geometria algébrica. Um bom exemplo, o qual a cohomologia local nos dá uma resposta parcial (mas não menos importante), é sobre a questão do menor número de elementos que são necessários para gerar um ideal a menos do radical.

Mediante isto, o entendimento da estrutura destes módulos tornou-se objeto de obsessão de diversos autores. Seu intrigante comportamento fez com que esta ferramenta fosse estudada em diversos aspectos.

Temas como finitude, anulamento e não anulamento, primos associados, suporte, pri-

mos coassociados, cosuporte, anel de endomorfismo, relações com invariantes topológicos e geométricos (multiplicidades, número de Betti, número de Bass por exemplo), relações com anéis Gorenstein e Cohen-Macaulay, dualidade de Matlis e artinianidade, entre (vários) outros foram estudados e vem sendo objeto de investigações atuais. Entenderemos pelo termo “artinianidade” a tudo que se refere ao estudo sobre módulos Artinianos para a cohomologia local (por exemplo, sobre ser ou não um módulo Artinino, caracterização do menor e maior inteiro i tal que a i -ésima cohomologia local seja, ou não um módulo artiniano).

Quando R é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e M um R -módulo finitamente gerado, Peter Schenzel [45] em 2007 introduziu um conceito que pode ser visto como uma extensão da cohomologia local, chamada cohomologia local formal. O intuito inicial de tal ferramenta era vislumbrar a cohomologia local de um diferente ponto de vista. Além disto, notou-se que tal extensão se faz útil na investigação sobre a conexidade do suporte de certos módulos e com isto, diversos autores passaram a investigá-la em diversos aspectos, assim como para a cohomologia local.

Autores como Gu [18], Bijan-Zadeh e Rezaei [4], Asgharzadeh-Divaani-Aazar [10], Mafi [33], Eghbali [16], entre outros, estudaram temas como artinianidade, condições de finitude, anulamento e não anulamento, primos associados e coassociados, relações com anéis Cohen-Macaulay etc.

Diferentemente ao feito por Schenzel para cohomologia local formal, em 2009 Takahashi, Yoshino e Yoshizawa [50] introduziram um conceito que generaliza o conceito de cohomologia local, chamado de cohomologia local definida por um par de ideais. Pela forma com que foi dado tal conceito, torna-se uma natural generalização da cohomologia local. O simples fato de se acrescentar um ideal ao suporte da cohomologia, trouxe a essa generalização bastante destaque justamente pelo fato de como tal acréscimo refletiria em questões geométricas e algébricas.

Apesar de já existir outra generalização da cohomologia local (introduzida por Herzog [20] e chamada cohomologia local definida por um par de módulos), o conceito introduzido por Takahashi, Yoshino e Yoshizawa trouxe consigo uma maior proximidade ao conceito usual da cohomologia local. Mediante isto temas como: artinianidade, condições de finitude,

anulamento e não anulamento, primos associados e coassociados, classes de Serre, anéis de endomorfismo, relações com números de Bass e números de Betti, relações com anéis Cohen-Macaulay, entre outros, vem sendo estudados por diversos autores. Citamos [24], [32], [40], [2], [3], [33], [44], [22], [23], [29], [46], [48], [54], [19], [38], [39] entre outros.

Voltando nosso olhar brevemente ao conceito definido por Schenzel, nota-se que a cohomologia local usual está intimamente ligada a cohomologia local formal. Sendo assim, fazendo uso do conceito de cohomologia local definida por um par de ideais, objetivamos neste trabalho definir um conceito que generaliza o conceito de cohomologia local formal. Devido a uma importante particularidade (ou patologia) do conceito introduzido por Takahashi, Yoshino e Yoshizawa, trabalharemos em duas vertentes, a cohomologia local formal definida por um par de ideais e a Čech-cohomologia local definida por um par de ideais. Veremos que, apesar destas duas novas estruturas serem tão distintas visualmente, em sua essência estão muito próximas. Assim como feito para a cohomologia local (e a definida por um par de ideais), estudaremos também as principais propriedades desta nova ferramenta, tais como anulamento e não anulamento, comportamento com respeito a sequências exatas, artinianidade e uma versão da sequência de Mayer-Vietores.

Além disto, neste trabalho daremos algumas contribuições com respeito ao anel de endomorfismo da cohomologia local definida por um par de ideais e a investigação de quando o dual de Matlis é um módulo Cohen Macaulay. O estudo destas duas frentes se fazem muito relevantes para a usual cohomologia local, uma vez que é um importante caminho para o entendimento dos módulos canônicos que, por sua vez, trazem consigo uma estreita relação com o módulo base.

Em resumo, no Capítulo 1 daremos primeiramente uma breve iniciação em álgebra homológica, abordando temas como complexos de cocadeia, cohomologia, módulos injetivos, funtores. Tais ferramentas serão de suma importância para construir o principal objeto desta capítulo, a cohomologia local. Descreveremos os principais resultados sobre tal ferramenta. Apesar da cohomologia local ter uma interpretação geométrica, nos atentaremos somente ao teor algébrico.

Tendo em mente como se dá a construção da cohomologia local, no Capítulo 2 descrevemos

os principais resultados sobre a cohomologia local definida por um par de ideais. Tais resultados podem ser vistos em [50], o qual foi o precursor da investigação sobre a cohomologia local definida por um par de ideais. Veremos neste capítulo as principais diferenças existentes entre a cohomologia local usual e esta generalização justamente por meio do acréscimo de um ideal.

No Capítulo 3, descrevemos os resultados obtidos com respeito ao estudo do anel de endomorfismo da cohomologia local, bem como na investigação de quando a dualidade de Matlis de certas cohomologias locais definidas por um par de ideais são módulos Cohen-Macaulay. Citamos um dos resultados mais expressivos obtidos, o isomorfismo entre o anel de endomorfismo da cohomologia local definida por um par de ideais e anel de endomorfismo do dual da cohomologia local definida por um par de ideais, em um específico nível.

Na sequência, nos Capítulos 4 e 5 apresentaremos os resultados obtidos por meio da generalização da cohomologia local formal. Após definir a cohomologia local formal definida por um par de ideais, estudaremos a estrutura desta nova extensão em alguns aspectos, tais como anulamento, não anulamento, comportamento com respeito a sequências exatas, sequência de Mayer-Vietores. Um dos resultados mostrados neste âmbito e um dos mais expressivos deste trabalho segue é que o supremo dos níveis i onde as i -ésimas cohomologias locais formais são não nulas é exatamente a dimensão de Krull de um módulo conhecido.

Na sequência, no Capítulo 5 trataremos exclusivamente da artinianidade e finitude desta nova ferramenta. Entre outros resultados, mostramos que a cohomologia local formal quando olhada no nível $\dim M$ é um módulo Artiniano. Ao fim, no apêndice iremos comentar alguns temas que são usualmente utilizados no decorrer do trabalho. Entre eles estão o envolvente injetivo, limite direto, limite inverso e dualidade de Matlis.

Apesar que citamos no trabalho os resultados obtidos sobre o anel de endomorfismo da cohomologia local definida por um par de ideais e após o estudo sobre a generalização da cohomologia local formal, cronologicamente tal desenvolvimento se deu de forma oposta. Após estudo preliminar da cohomologia local usual (e paralelamente a definida por um par de ideais), iniciamos a investigação sobre a generalização da cohomologia local formal. Uma vez definido esta nova ferramenta e visando obter um maior conhecimento sobre a mesma,

fez-se necessário um estudo maciço e mais aprofundado sobre a cohomologia local usual e a definida por um par de ideais.

Motivado assim por algumas questões abertas nesta nova ferramenta, fez-se necessário o estudo do anel de endomorfismo e dualidade de Matlis para a cohomologia local usual, nascendo assim a idéia de generalizar alguns resultados chaves desta teoria, os quais estão presentes no Capítulo 3.

Após este longo trabalho, ficamos ainda com o sentimento que muito mais deve/necessita ser estudado. A teoria de cohomologia local nos mostrou um excelente meio de pesquisa e investigação em álgebra comutativa e sua rica relação com diversos temas, nos intriga a cada vez mais “espremer” tal ferramenta.

Esperamos que este trabalho instigue outras pessoas a adentrar neste vasto mundo da álgebra comutativa, mais precisamente ao da cohomologia local. Uma boa leitura a todos.

Preliminares

1.1 Alguns fatos em álgebra homológica

Nesta seção, vamos fazer uma revisão de conceitos básicos em álgebra homológica. Tais conceitos serão de suma importância na construção dos módulos de cohomologia local na próxima seção, bem como os demais conceitos presentes em todo trabalho. No que segue, R denotará um anel comutativo com unidade. Estamos assumindo prévio conhecimento na teoria de anéis e módulos comutativos para um bom entendimento do que apresentaremos a seguir. Para um estudo mais detalhado sobre os resultados, recomendamos [56], [42] e [49].

1.1.1 Complexos de cadeia

Definição 1.1.1. *Sejam M, N e P três R -módulos, $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ dois R -homomorfismos. Dizemos que a sequência*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

*é **exata** se $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$. Neste caso note que $g \circ f = 0$.*

Denote por 0 o R -módulo nulo. Podemos ver que;

- $0 \rightarrow M \rightarrow N$ é exata $\Leftrightarrow f$ é monomorfismo.
- $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow f$ é epimorfismo.
- $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow f$ é isomorfismo.

Definição 1.1.2. *Sejam $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ uma coleção de R -módulos e $d^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$ R -homomorfismos. Dizemos que uma sequência*

$$\dots \rightarrow M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} M^{i+2} \rightarrow \dots$$

*é um **cocomplexo de R -módulos** (ou complexo de cocadeia) se $d^i \circ d^{i-1} = 0$, para todo i inteiro. Denotaremos tal cocomplexo por $(M^\bullet, d^\bullet)$.*

Note que $d^i \circ d^{i-1} = 0$ equivale a dizer que $\text{Im}(d^{i-1}) \subseteq \text{Ker}(d^i)$. Além disto, dizemos que o cocomplexo de R -módulos é **exato no nível i** , se $\text{Im}(d^{i-1}) = \text{Ker}(d^i)$. O cocomplexo $(M^\bullet, d^\bullet)$ é exato se for exato para todo i inteiro. Os elementos M^n e d^i de $(M^\bullet, d^\bullet)$ são chamados de n -cadeias e diferenciais, respectivamente.

Considere $(M^\bullet, d^\bullet)$ um cocomplexo de cadeia. Os conjuntos $Z^i := \text{Ker}(d^i)$ e $B^i := \text{Im}(d^{i-1})$ são chamados respectivamente de i -coclicos e i -cobordos. Como $d^i \circ d^{i-1} = 0$, segue que $B^i \subseteq Z^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isto, faz sentido a seguinte definição.

Definição 1.1.3. *Dado um cocomplexo de cadeia $(M^\bullet, d^\bullet)$ definimos e denotamos*

$$H^i(M^\bullet, d^\bullet) := \frac{Z^i}{B^i} = \frac{\text{Ker}(d^i)}{\text{Im}(d^{i-1})}$$

como o i -ésimo R -módulo de cohomologia de $(M^\bullet, d^\bullet)$.

1.1.2 Aplicações de cadeia

Definição 1.1.4. *Sejam $(M^\bullet, d^\bullet)$ e $(N^\bullet, e^\bullet)$ dois cocomplexos de cadeia. Um **homomorfismo de cocomplexos***

$$h^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$$

é uma família $(h^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de homomorfismos de R -módulos $h^i : M^i \rightarrow N^i$, tal que para todo $i \in \mathbb{Z}$ temos que

$$h^{i+1} \circ d^i = e^i \circ h^i,$$

isto é, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & M^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & M^i & \xrightarrow{d^i} & M^{i+1} & \xrightarrow{d^{i+1}} & M^{i+2}_M & \xrightarrow{d^{i+2}} & \dots \\ & & h^{i-1} \downarrow & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow & & h^{i+2} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & N^{i-1} & \xrightarrow{e^{i-1}} & N^i & \xrightarrow{e^i} & N^{i+1} & \xrightarrow{e^{i+1}} & N^{i+2} & \xrightarrow{e^{i+2}} & \dots \end{array}$$

é comutativo.

Observação 1.1.5. *Seja $h^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$ um homomorfismo de cocomplexos de R -módulos. Um fácil cálculo mostra que $h^n(\text{Ker}(d^n)) \subseteq \text{Ker}(e^n)$ e $h^n(\text{Im}(d^{n-1})) \subseteq \text{Im}(e^{n-1})$. Assim é possível definir um homomorfismo de R -módulos*

$$\begin{array}{ccc} H^n(M^\bullet, d^\bullet) & \xrightarrow{H^n(h^\bullet)} & H^n(M^\bullet, d^\bullet) \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{\text{Ker}(d^n)}{\text{Im}(d^{n-1})} & \longrightarrow & \frac{\text{Ker}(e^n)}{\text{Im}(e^{n-1})} \\ m + \text{Im}(d^{n-1}) & \mapsto & h^n(m) + \text{Im}(e^{n-1}) \end{array}$$

que é chamado de homomorfismo induzido por $h^\bullet$ na n -ésima cohomologia. Em outras palavras, h^i induz um R -homomorfismo $H(h^i)$ nas cohomologias de nível i .

Considere agora $h^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$ e $l^\bullet : (N^\bullet, e^\bullet) \rightarrow (P^\bullet, f^\bullet)$ dois homomorfismos de cocomplexos de R -módulos. A família $(l^i \circ h^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ define um homomorfismo de cocomplexos de R -módulos

$$l^\bullet \circ h^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (P^\bullet, f^\bullet),$$

chamada de composição de $l^\bullet$ com $h^\bullet$. Além disto, observe que a família $(id_{M_i})_{i \in \mathbb{Z}}$ define um homomorfismo de cocomplexos de R -módulos

$$id_{(M^\bullet, d^\bullet)} : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (M^\bullet, d^\bullet)$$

e que a composição obedece as seguintes leis:

$$\text{a) } id_{(N^\bullet, e^\bullet)} \circ h^\bullet = h^\bullet \circ id_{(M^\bullet, d^\bullet)} = h^\bullet;$$

$$\text{b) } k^\bullet \circ (l^\bullet \circ h^\bullet) = (k^\bullet \circ l^\bullet) \circ h^\bullet$$

onde $h^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$, $l^\bullet : (N^\bullet, e^\bullet) \rightarrow (P^\bullet, f^\bullet)$ e $k^\bullet : (P^\bullet, f^\bullet) \rightarrow (Q^\bullet, g^\bullet)$ são homomorfismos de cocomplexos.

Definição 1.1.6. *Considere dois homomorfismos de cocomplexos $h^\bullet, l^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$.*

*Uma **homotopia** de $h^\bullet$ para $l^\bullet$ é uma família $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de homomorfismos de R -módulos $t_i : M^i \rightarrow N^{i-1}$ tal que para todo $i \in \mathbb{Z}$ temos*

$$h^i - l^i = t_{i+1} \circ d^i + e^{i-1} \circ t_i.$$

Se existe tal homotopia, dizemos que $h^\bullet$ é **homotópico** a $l^\bullet$ e denotaremos por $h^\bullet \sim l^\bullet$. Note que $\sim$ assim definida é uma relação de equivalência em $\text{Hom}((M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet))$, que é o conjunto de todos os homomorfismos de cocomplexos de R -módulos $h^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$.

O fato mais importante que citamos é que homomorfismos de cocomplexos que são homotópicos definem uma equivalência em cohomologia. Em outras palavras, se $h^\bullet, l^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$ são dois homomorfismos de cocomplexos de R -módulos homotópicos então $H^n(h^\bullet) = H^n(l^\bullet)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que um homomorfismo de cocomplexos $f^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$ é um **quase-isomorfismo** se $H^n(M^\bullet, d^\bullet)$ e $H^n(N^\bullet, e^\bullet)$ são isomorfos para todo $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso os cocomplexos $(M^\bullet, d^\bullet)$ e $(N^\bullet, e^\bullet)$ serão chamados de quase-isomorfos. Em outras palavras, um quase-isomorfismo se resume a um homomorfismo de cocomplexos que induz um isomorfismo nas cohomologias em cada nível.

Definição 1.1.7. *Sejam $f^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$ e $g^\bullet : (N^\bullet, e^\bullet) \rightarrow (P^\bullet, p^\bullet)$ dois homomorfismos de cocomplexos de R -módulos. Diremos que a sequência*

$$0 \rightarrow M^\bullet \xrightarrow{f} N^\bullet \xrightarrow{g} P^\bullet \rightarrow 0$$

*é **exata curta**, se para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos que a sequência*

$$0 \rightarrow M^k \xrightarrow{f^k} N^k \xrightarrow{g^k} P^k \rightarrow 0$$

é exata curta, ou seja, dar uma sequência exata curta de cocomplexos é o mesmo que dar sequências exatas curtas em cada nível k .

Lema 1.1.8. *Se a sequência*

$$0 \rightarrow M^\bullet \xrightarrow{f} N^\bullet \xrightarrow{g} P^\bullet \rightarrow 0$$

for exata curta, então existe uma sequência exata longa de cohomologias

$$\cdots \xrightarrow{H^k(f^k)} H^k(N^\bullet) \xrightarrow{H^k(g^k)} H^k(P^\bullet) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(M^\bullet) \xrightarrow{H^{k+1}(f^{k+1})} H^{k+1}(N^\bullet) \rightarrow \cdots,$$

onde δ^i é o homomorfismo conectante em cada nível $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para a demonstração deste fato, veja [56, Teorema 1.3.1].

□

1.1.3 Módulos injetivos

Definição 1.1.9. Um R -módulo I é dito ser **injetivo**, se para todo homomorfismo injetivo $f : M \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow I$ um homomorfismo, existe $h : N \rightarrow I$ tal que $g = h \circ f$. Em outras palavras, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow g & \downarrow h \\ & & I \end{array}$$

Enunciaremos a seguir alguns fatos/resultados básicos sobre módulos injetivos. As provas dos mesmos podem ser encontrados em [56, Capítulo 2, Seção 3].

- Se M é um submódulo injetivo de N , então M é um somando direto de N .
- Seja $\{I_i\}_{i \in \Lambda}$ uma família de R -módulos e $I = \prod_{i \in \Lambda} I_i$. Então I é injetivo se, e somente se, I_i é injetivo para todo $i \in \Lambda$.
- Seja I um R -módulo. Então I é injetivo se, e somente se, toda sequência exata curta

$$0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$$

cinde.

- (Lema de Eckmann-Schopf) Para cada R -módulo M , existe um módulo injetivo I tal que é possível considerar um monomorfismo $M \rightarrowtail I$ de R -módulos.
- (Critério de Baer) Assuma que para cada ideal $\mathfrak{b} \subseteq R$ e cada homomorfismo de R -módulos $h : \mathfrak{b} \rightarrow I$, exista um elemento $e \in I$ tal que $h(a) = ae$, para todo $a \in \mathfrak{b}$. Então I é injetivo.

Definição 1.1.10. Seja M um R -módulo. Uma **resolução à direita de M** significa um cocomplexo de R -módulos $(E^\bullet, e^\bullet)$ e um homomorfismo $b : M \rightarrow E_0$ tal que $E^i = 0$ para todo $i < 0$ e que a sequência de R -módulos

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{b} E^0 \xrightarrow{e_0} E^1 \xrightarrow{e_1} E^2 \rightarrow \dots$$

é exata. Tal resolução à direita será denotada por $((E^\bullet, e^\bullet); b)$.

Como um caso particular da definição anterior, vamos considerar uma resolução específica que será útil na construção da cohomologia local, assunto este presente na próxima seção.

Uma **resolução injetiva de M** é uma resolução à direita $((I^\bullet, d^\bullet); a)$ de M tal que todos os R -módulos I^i são injetivos. Assim, neste caso temos a seguinte sequência exata de R -módulos

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \rightarrow \dots$$

Como a existência de módulos injetivos é garantida pelo Lema de Eckmann-Schopf, a pergunta natural que surge é se existem tais resoluções injetivas para um módulo fixado. O próximo resultado nos mostra uma resposta positiva neste sentido.

Proposição 1.1.11. *Todo R -módulo M admite uma resolução injetiva.*

Demonstração. Aplique recursivamente o Lema de Eckmann-Schopf. □

A seguir temos o principal resultado sobre resoluções injetivas.

Teorema 1.1.12. *Sejam M e N dois R -módulos e $((I^\bullet, d^\bullet); a)$, $((E^\bullet, e^\bullet); b)$ suas respectivas resoluções injetivas. Se $h : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos, então h pode ser estendida para as resoluções $((I^\bullet, d^\bullet); a)$, $((E^\bullet, e^\bullet); b)$. Além disto, quaisquer duas extensões para $((I^\bullet, d^\bullet); a)$ e $((E^\bullet, e^\bullet); b)$ são homotópicas.*

Demonstração. Veja [56, Teorema 2.3.7]. □

Por meio deste resultado é possível provar que quaisquer duas resoluções injetivas de um R -módulo são homotopicamente equivalentes. Em resumo, o teorema anterior nos garante que independente da escolha da resolução injetiva que tomarmos para um módulo, em cada nível as cohomologias de cada resolução são iguais. Assim, não precisamos nos preocupar em tomar uma específica resolução injetiva quando estamos olhando em nível de cohomologias.

1.1.4 Um pouco sobre categorias e funtores

Definição 1.1.13. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste:*

1. De uma classe $Ob(\mathcal{C})$ cujos elementos são chamados de **objetos** de $\mathcal{C}$.

2. Para cada $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ cujos elementos são chamados de **morfismos** de X para Y .
3. Para cada X, Y e $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, existe uma aplicação de **composição**

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

satisfazendo;

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (associatividade);

(ii) Para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, existe $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tal que para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, temos $f \circ \text{Id}_X = f$ e $\text{Id}_X \circ g = g$.

Exemplo 1.1.14. 1. A categoria *Set* cujos objetos são todos os conjuntos e $\text{Hom}(X, Y)$ o conjunto de todas as funções de X para Y , para dados dois conjuntos X e Y . O morfismo $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ é a função identidade (usual) de X e a composição “ $\circ$ ” é a composição usual de funções.

2. A categoria *Vec* cujos objetos são todos os espaços vetoriais (sobre um corpo K) e os morfismos são todas as transformações lineares entre eles.
3. A categoria *Grp* cujos objetos são todos os grupos e os morfismos são todos os homomorfismos entre eles.
4. A categoria *Top* cujos objetos são todos os espaços topológicos e os morfismos são todas as funções contínuas entre eles.
5. A categoria M_R de R -módulos, no qual os objetos são todos os R -módulos (bilaterais) e os morfismos são todos os R -homomorfismos entre eles.
6. A categoria *Comp* dos cocomplexos de cadeia. Dados $(M^\bullet, d^\bullet)$ e $(N^\bullet, e^\bullet)$ cocomplexos de cadeia de R -módulos, temos que $\text{Hom}(M^\bullet, N^\bullet)$ são os homomorfismos de cadeia de $M^\bullet$ para $N^\bullet$.

Definição 1.1.15. Considere $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias. Dizemos que $\mathcal{C}'$ é uma **subcategoria** de $\mathcal{C}$ se $Ob(\mathcal{C}') \subseteq Ob(\mathcal{C})$ e $Hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, isto é, todos os morfismos de X em Y em $\mathcal{C}'$ são induzidos de $\mathcal{C}$. A composição em $\mathcal{C}'$ é a induzida de $\mathcal{C}$ e os morfismos identidade em $\mathcal{C}'$ são também induzidos de $\mathcal{C}$.

Por meio do que foi considerado, estamos aptos agora a definir um importante conceito para o decorrer deste trabalho.

Definição 1.1.16. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um **funtor covariante** é uma correspondência $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que;

1. Para cada $X \in Ob(\mathcal{C})$, F associa a um único elemento $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$.
2. Dados $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, F associa a um único morfismo $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$.

Além disto também;

- (i) F preserva composição, isto é, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, desde que $g \circ f$ esteja definido.
- (ii) F preserva morfismo identidade, isto é, $F(Id_X) = Id_{F(X)}$, para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$.

Daqui em diante vamos apenas considerar a categoria M_R dos R -módulos.

Um funtor covariante $F : M_R \rightarrow M_S$ é dito ser **exato** se sempre que a sequência $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ for exata, temos que

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

é uma sequência exata.

Um funtor covariante $F : M_R \rightarrow M_S$ é dito ser **exato à esquerda** se sempre que a sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ for exata, temos que

$$0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

é uma sequência exata. Analogamente definimos $F : M_R \rightarrow M_S$ ser um funtor **exato à direita** se sempre que a sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ for exata, temos que

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \rightarrow 0$$

é exata.

Exemplo 1.1.17. 1. Os funtores $\text{Hom}(M, -)$ e $\text{Hom}(-, M)$ são funtores exatos à esquerda.

2. $M \otimes_R -$ é um funtor exato à direita.

3. I é um R -módulo injetivo se, e somente se, o funtor $\text{Hom}_R(-, I)$ é exato.

4. O funtor localização é exato.

5. O limite direto é um funtor exato (ver apêndice Propriedade 5.4.16).

6. O limite inverso é um funtor exato à esquerda (ver apêndice Propriedade 5.4.19).

Definição 1.1.18. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias de R -módulos. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é **aditivo** se

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g),$$

para todo f, g morfismo de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}'$ e $\alpha, \beta \in R$.

Faremos agora uma importante observação quando olharmos o conceito de cocomplexos em conjunto ao de funtores.

Observação 1.1.19. (A) Sejam R' um anel e F um funtor covariante aditivo da categoria de R -módulos para R' -módulos. Considere $h : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos, $((E^\bullet, e^\bullet); b)$ resolução à direita de M e $((I^\bullet, d^\bullet); a)$ resolução injetiva de N . Sejam $h^\bullet, l^\bullet : (E^\bullet, e^\bullet) \rightarrow (I^\bullet, d^\bullet)$ duas extensões de h . Para $n \in \mathbb{N}_0$, temos que os homomorfismos

$$H^n(F(h^\bullet)), H^n(F(l^\bullet)) : H^n(F(E^\bullet), F(e^\bullet)) \rightarrow H^n(F(I^\bullet), F(d^\bullet))$$

são iguais, isto é, $H^n(F(h^\bullet)) = H^n(F(l^\bullet))$.

Considere agora $(M^\bullet, d^\bullet)$ um cocomplexo de R -módulos. Assim, fazendo uso do funtor F , obtemos o cocomplexo de R' -módulos

$$(F(M^\bullet), F(d^\bullet)) : \dots \rightarrow F(M^{i-1}) \xrightarrow{F(d^{i-1})} F(M^i) \xrightarrow{F(d^i)} \dots$$

Se $h^\bullet = (h^i)_{i \in \mathbb{Z}} : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$ é um homomorfismo de cocomplexos de R -módulos, então a família $(F(h^i))_{i \in \mathbb{Z}}$ define um homomorfismo de cocomplexos de R' -módulos

$$F(h^\bullet) = (F(M^\bullet), F(d^\bullet)) \rightarrow (F(N^\bullet), F(e^\bullet)).$$

(B) Se considerarmos $h^\bullet, l^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \rightarrow (N^\bullet, e^\bullet)$ dois homomorfismos de cocomplexos de R -módulos que são homotópicos, é possível mostrar que $F(h^\bullet)$ é homotópico a $F(l^\bullet)$. Portanto podemos concluir que se $h^\bullet \sim l^\bullet$, então $H^n(F(h^\bullet)) = H^n(F(l^\bullet))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, considere uma resolução injetiva $\mathbb{I}_M = ((I_M^\bullet, d_M^\bullet); a_M)$ do R -módulo M . Denotamos por $\mathbb{I}_*$ a correspondência

$$M \rightsquigarrow \mathbb{I}_M = ((I_M^\bullet, d_M^\bullet); a_M)$$

e chamamos $\mathbb{I}_*$ de uma “escolha de resoluções injetivas” (de R -módulos).

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(M) := H^n(F(I_M^\bullet), F(d_M^\bullet)),$$

isto é, estamos considerando o cocomplexo de R' -módulos

$$\dots \xrightarrow{F(d_M^{-1})} F(I_M^0) \xrightarrow{F(d_M^0)} F(I_M^1) \xrightarrow{F(d_M^1)} F(I_M^2) \rightarrow \dots$$

e os R' -módulos

$$\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(M) := \frac{\text{Ker}(F(d_M^n))}{\text{Im}(F(d_M^{n-1}))}.$$

Note que se I é um R -módulo injetivo, então $\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(I) = 0$ para todo $n > 0$.

(C) Sejam M e N dois R -módulos e $((I_M^\bullet, d_M^\bullet); a_M)$, $((I_N^\bullet, d_N^\bullet); a_N)$ suas respectivas resoluções injetivas. Vimos no Teorema 1.1.12 que se $h : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos, então h admite uma extensão $h^\bullet$ para as resoluções $((I_M^\bullet, d_M^\bullet); a_M)$, $((I_N^\bullet, d_N^\bullet); a_N)$. Assim temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a_M} & I_M^0 & \xrightarrow{d_M^0} & I_M^1 & \xrightarrow{d_M^1} & I_M^2 & \xrightarrow{d_M^2} & \dots \\ & & h \downarrow & & h^0 \downarrow & & h^1 \downarrow & & h^2 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{a_N} & I_N^0 & \xrightarrow{d_N^0} & I_N^1 & \xrightarrow{d_N^1} & I_N^2 & \xrightarrow{d_N^2} & \dots \end{array}$$

(D) Note que o homomorfismo

$$H^n(F(h^\bullet)) : H^n(F(I_M^\bullet), F(d_M^\bullet)) \rightarrow H^n(F(I_N^\bullet), F(d_N^\bullet))$$

é o mesmo para cada extensão $h^\bullet$ de h . Assim, expandindo a definição da parte A), podemos também definir para todo $n \in \mathbb{N}_0$, o homomorfismo de R' -módulos

$$\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(h) : \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(M) \xrightarrow{H^n(F(h^\bullet))} \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(N),$$

ou melhor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(M) & \xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(h)} & \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(N) \\ \parallel & & \parallel \\ \frac{\text{Ker}(F(d_M^n))}{\text{Im}(F(d_M^{n-1}))} & \longrightarrow & \frac{\text{Ker}(F(d_N^n))}{\text{Im}(F(d_N^{n-1}))} \\ m + \text{Im}(F(d_M^{n-1})) & \mapsto & F(h^n)(m) + \text{Im}(F(d_N^{n-1})). \end{array}$$

(E) Fixe $n \in \mathbb{N}_0$. É possível verificar que a correspondência

$$\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F = \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(M) \xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(h)} \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(N))$$

define um funtor aditivo da categoria de R -módulos para R' -módulos. O funtor $\mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F = \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(\bullet)$ é chamado de **n -ésimo funtor derivado à direita de F com respeito a $\mathbb{I}_*$** .

(F) Considere agora $\mathbb{J}_*$ uma segunda escolha de resoluções injetivas (de R -módulos), tal que para cada R -módulo M corresponde a uma resolução injetiva $\mathbb{J}_M = ((J_M^\bullet, e_M^\bullet); b_M)$ de M . Fixe agora uma R -módulo M e seja $i^\bullet : ((I_M^\bullet, d_M^\bullet)) \rightarrow ((J_M^\bullet, e_M^\bullet))$ a extensão do homomorfismo identidade Id_M de M . Pelo que foi visto anteriormente, devemos ter o isomorfismo

$$H^n(F(i^\bullet)) : H^n(F(I_M^\bullet), F(d_M^\bullet)) \xrightarrow{\cong} H^n(F(J_M^\bullet), F(e_M^\bullet)).$$

Se fixarmos n , o isomorfismo $H^n(F(i^\bullet))$ é o mesmo para cada extensão $i^\bullet : ((I_M^\bullet, d_M^\bullet)) \rightarrow ((J_M^\bullet, e_M^\bullet))$ de id_M (conforme A) e assim, define um isomorfismo de R' -módulos (conforme o Teorema 1.1.12).

$$\varepsilon_{\mathbb{I}_*, \mathbb{J}_*}^{n, M} : \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(M) \xrightarrow{H^n(F(i^\bullet))} \mathcal{R}_{\mathbb{J}_*}^n F(M)$$

que depende somente de $\mathbb{I}_*$ e $\mathbb{J}_*$.

Como já visto anteriormente, e justificado pelo Teorema 1.1.12 que se $h : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos, então h admite uma extensão $h^\bullet$ para as resoluções $((I_M^\bullet, d_M^\bullet); a_M)$, $((I_N^\bullet, d_N^\bullet); a_N)$. Considere agora $l^\bullet$ outra extensão de h e $j^\bullet : (I_N^\bullet, d_N^\bullet) \rightarrow (J_N^\bullet, e_N^\bullet)$ uma extensão de Id_N . Então $j^\bullet \circ h^\bullet, l^\bullet \circ i^\bullet : (I_M^\bullet, d_M^\bullet) \rightarrow (J_N^\bullet, e_N^\bullet)$ são extensões de h e assim temos que

$$H^n(F(j^\bullet \circ h^\bullet)) = H^n(F(l^\bullet \circ i^\bullet))$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ (conforme A).

A partir disto podemos concluir que se $h : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos, então

$$\varepsilon_{\mathbb{I}_*, \mathbb{J}_*}^{n, M} \circ \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(h) = \mathcal{R}_{\mathbb{J}_*}^n F(h) \circ \varepsilon_{\mathbb{I}_*, \mathbb{J}_*}^{n, M},$$

e portanto o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(N) & \xrightarrow[\cong]{\varepsilon_{\mathbb{I}_*, \mathbb{J}_*}^{n, N}} & \mathcal{R}_{\mathbb{J}_*}^n F(N) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F(M) & \xrightarrow[\cong]{\varepsilon_{\mathbb{I}_*, \mathbb{J}_*}^{n, M}} & \mathcal{R}_{\mathbb{J}_*}^n F(M) \end{array}$$

Por esta observação, não precisamos nos preocupar com a escolha de uma resolução injetiva $\mathbb{I}_*$ quando estamos trabalhando com funtores derivados à direita. Assim escrevemos

$$\mathcal{R}^n F = \mathcal{R}_{\mathbb{I}_*}^n F$$

e chamamos o funtor $\mathcal{R}^n F$ simplesmente de **n -ésimo funtor derivado à direta de F** .

Para finalizar, pretendemos definir o conceito de cohomologia local. Por meio do que foi construído anteriormente, temos considerado simplesmente as “cohomologias de um módulo”. A pergunta natural que surge é como nascem as cohomologias locais de um módulo. A

observação prévia, será de grande utilidade na construção desde novo conceito, presente na próxima seção.

1.2 Cohomologia local

Nesta seção vamos fazer a construção do conceito da cohomologia local. Tal conceito será de suma importância nos objetos que serão estudados nos demais capítulos deste trabalho. Os resultados que mostraremos a seguir podem ser encontrados em [6], [17], [25] e [48].

No que segue, consideraremos R um anel comutativo com identidade e $\mathfrak{a}$ um ideal de R . Inicialmente relembre que para um R -módulo M e N um submódulo de M , o conjunto

$$(N :_M \mathfrak{a}) := \{m \in M \mid m\mathfrak{a} \subseteq N\}$$

é um submódulo de M .

Definição 1.2.1. *Para um R -módulo M , a $\mathfrak{a}$ -torção de M é definido por*

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M \mathfrak{a}^n).$$

É fácil ver que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é submódulo de M . Além disto temos a seguintes propriedades.

Propriedades 1.2.2. *Seja M um R -módulo e $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideais de R .*

- (a) $\Gamma_0(M) = M$ e $\Gamma_R(M) = 0$.
- (b) Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, então $\Gamma_{\mathfrak{b}}(M) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.
- (c) Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são finitamente gerados e $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, então $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$.
- (d) $\Gamma_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \cap \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$.
- (e) Se N é um R -módulo e $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de módulos, então $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$.
- (f) Se $\mathfrak{a}$ é finitamente gerado ou M é Noetheriano então

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = 0.$$

(g) Se M é Noetheriano então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = (0 :_M \mathfrak{a}^{n_0}).$$

(h) Se R é Noetheriano e M finitamente gerado então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathfrak{a}^n M \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0.$$

Demonstração. Nos atentaremos a provar algumas destas propriedades, uma vez que as demais seguem direto da definição dada.

(e) Seja $y \in f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$. Então existe $x \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ tal que $f(x) = y$. Para $r \in R$, como $r^n f(x) = r^n y$ e $r^n f(x) = f(r^n x) = 0$ segue que $y \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$.

(g) Sabemos que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M \mathfrak{a}^n)$ e que

$$(0 :_M \mathfrak{a}^1) \subseteq (0 :_M \mathfrak{a}^2) \subseteq \dots$$

Como M é Noetheriano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(0 :_M \mathfrak{a}^{n_0}) = (0 :_M \mathfrak{a}^{n_0+k})$ para $k \geq 1$. Fazendo a união obtemos o resultado.

(h) Pelo Lema de Artin-Rees [5, Capítulo 3, Corolário 1], existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$

$$\mathfrak{a}^n M \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \mathfrak{a}^{n-n_0} (\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \cap \mathfrak{a}^{n_0} M) \subseteq \mathfrak{a}^{n-n_0} (\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)).$$

Portanto, para n suficientemente grande, pelo item (g) segue que $\mathfrak{a}^{n-n_0} (\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$, como queríamos. $\square$

Consideremos agora o conjunto de divisores de zero de M em R dado por

$$ZD_R(M) := \{x \in R \mid \exists m \in M \setminus \{0\} \text{ tal que } xm = 0\}.$$

Analogamente, consideremos o conjunto dos não divisores de zero de R em M

$$NZD_R(M) := R \setminus ZD_R(M).$$

Lema 1.2.3. *Seja M um R -módulo.*

(a) Se $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$, então $\mathfrak{a} \subseteq ZD_R(M)$.

(b) Se R é Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e $\mathfrak{a} \subseteq ZD_R(M)$, então $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$.

Demonstração. (a) Faremos esta prova por contrapositiva. Sejam $r \in \mathfrak{a}$ um não divisor de zero em M e $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Então existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n m = 0$, em particular, $r^n m = 0$. Como r^n é não divisor de zero em M segue que $m = 0$. Com isto concluímos que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

(b) É bem conhecido que se R é Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado então o conjunto dos primos associados de M é finito. Seja então $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ os primos associados de M . Como $\mathfrak{a} \subseteq ZD_R(M)$ e $ZD_R(M)$ é a união dos primos associados de M , segue que $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$. Pelo Lema dos Primos Avoidance, existe i tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ e como $\mathfrak{p}_i \in \text{Ass}(M)$, existe $0 \neq v \in M$ tal que $\mathfrak{p}_i = (0 :_R (v))$. Assim $\mathfrak{a}v \subseteq \mathfrak{p}_i v = 0$ implicando assim que $v \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Portanto $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$. □

Proposição 1.2.4. *Seja M um R -módulo Noetheriano.*

(a) $\text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{Ass}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$.

(b) Se R é Noetheriano então $\text{Ass}_R(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{Ass}_R(M) \setminus V(\mathfrak{a})$.

Demonstração. (a) Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$. Como $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é um submódulo de M , segue que $\mathfrak{p}$ é um primo associado de M . Como M é Noetheriano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Como $\text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq V((0 :_R \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)))$ segue que $\mathfrak{a}^n \subseteq (0 :_R \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \mathfrak{p}$. Portanto $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, como queríamos.

Seja agora $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$. Então existe $v \in M$ tal que $(0 : (v)) = \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Assim $\mathfrak{a}v = 0$ implicando que $v \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Portanto $(0 : (v)) = \mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$.

(b) Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M) \setminus V(\mathfrak{a})$. Como $\text{Ass}_R(M) \subseteq \text{Ass}_R(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \cup \text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ e $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, devemos ter que $\mathfrak{p} \notin \text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ pelo item (a). Logo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$.

Seja agora $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$. Como M é um R -módulo noetheriano sabemos pela Propriedade 1.2.2 (f) que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$. Como $M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é também noetheriano, pelo Lema 1.2.3 (b), existe $x \in NZD(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \cap \mathfrak{a}$. Além disto, como R é noetheriano, temos

$\mathfrak{p} \subseteq ZD_R(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ uma vez que $ZD_R(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ é a união dos primos associados de $M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Disto segue que $x \notin \mathfrak{p}$.

Pela escolha de $\mathfrak{p}$, existe $\bar{v} \in M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ tal que $(0 :_R \bar{v}) = \mathfrak{p}$. Assim $\mathfrak{p}v \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Como M é noetheriano, pela Propriedade 1.2.2 item (c), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Com isto $\mathfrak{p}(x^n v) = x^n \mathfrak{p}v \subseteq \mathfrak{a}^n \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ e assim $\mathfrak{p} \subseteq (0 :_R x^n v)$.

Por outro lado, seja $a \in (0 :_R x^n v)$. Como $a(x^n v) = 0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, no quociente $M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ temos $(ax^n)\bar{v} = \bar{0}$ implicando $ax^n \in (0 :_R \bar{v}) = \mathfrak{p}$. Como $x \notin \mathfrak{p}$ temos que $a \in \mathfrak{p}$. Além disto, como $x \in \mathfrak{a}$ segue que $\mathfrak{p} \not\subseteq V(\mathfrak{a})$. Portanto $\mathfrak{p} = (0 :_R x^n v)$, com $x^n v \in M$ e $\mathfrak{p} \not\subseteq V(\mathfrak{a})$, como queríamos. $\square$

Dizemos que um subconjunto $S \subseteq R$ é **multiplicativamente fechado** se $S \neq \emptyset$ e $st \in S$ para $s, t \in S$. Por meio deste conjunto, podemos considerar o módulo das frações $S^{-1}R$. Denotaremos também $S^{-1}M$ o anel das frações com respeito ao R -módulo M .

Proposição 1.2.5. *Sejam $S \subseteq R$ um conjunto multiplicativamente fechado e M um R -módulo. Se $\mathfrak{a}$ é um ideal finitamente gerado, então existe um isomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos*

$$\begin{aligned} f : S^{-1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) &\rightarrow \Gamma_{S^{-1}\mathfrak{a}}(S^{-1}M) \\ \frac{m}{s} &\mapsto f\left(\frac{m}{s}\right) := \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Demonstração. Como $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq M$ é submódulo, existe um homomorfismo injetivo

$$\begin{aligned} f : S^{-1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) &\rightarrow S^{-1}M \\ \frac{m}{s} &\mapsto f\left(\frac{m}{s}\right) := \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Resta mostrar então que a imagem da aplicação f é exatamente $\Gamma_{\mathfrak{a}S^{-1}R}(S^{-1}M)$. Seja então $u \in f(S^{-1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)))$. Podemos escrever $u = m/s$, com $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ e $s \in S$. Como $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n m = 0$, com isto

$$(\mathfrak{a}S^{-1}R)^n u = \mathfrak{a}^n (S^{-1}R) \frac{m}{s} = S^{-1}R \frac{\mathfrak{a}^n m}{s} = 0.$$

Portanto $u \in \Gamma_{\mathfrak{a}S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

Seja agora $v \in \Gamma_{\mathfrak{a}S^{-1}R}(S^{-1}M)$. Escrevamos $v = m/s$ com $m \in M$ e $s \in S$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{a}S^{-1}R)^n \frac{m}{s} = 0$. Como $\mathfrak{a}$ é finitamente gerado, devemos ter que $\mathfrak{a}^n$ é também

finitamente gerado, digamos $\mathfrak{a}^n = (x_1, \dots, x_r)$. Desta forma para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ temos que

$$\frac{sx_i m}{s^2} = \frac{sx_i}{s} \frac{m}{s} = 0.$$

Assim, existe $t_i \in S$ tal que $t_i x_i m = 0$. Considere $t = \prod_{i=1}^r t_i$. Note que $t \in S$ e mais $tx_i m = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Portanto $\mathfrak{a}^n t m = 0$ implicando assim que $tm \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Mais ainda,

$$v = \frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = f\left(\frac{tm}{ts}\right) \in f(S^{-1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))),$$

o que finaliza a prova. □

Seja $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Como $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$, podemos definir o seguinte homomorfismo

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) &\rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \\ m &\mapsto f(m). \end{aligned}$$

Assim, podemos verificar facilmente que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ é um funtor covariante aditivo de R -módulos, chamado de funtor **$\mathfrak{a}$ -torção**.

Proposição 1.2.6. *O funtor $\mathfrak{a}$ -torção $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ é exato à esquerda.*

Demonstração. Seja $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos. Devemos provar que

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(g)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(P)$$

é uma sequência exata.

Como f é injetiva, temos que se $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) := f(m) = 0$ então $m = 0$. Assim $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$ é injetiva. Agora, pela exatidão da sequência temos que $g \circ f = 0$, assim

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(g) \circ \Gamma_{\mathfrak{a}}(f) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(0) = 0,$$

isto é $\text{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)) \subseteq \text{Ker}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(g))$.

Seja $m \in \text{Ker}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(g))$. Note que $g(m) = 0$ e como $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n m = 0$. Considere $y \in N$ tal que $f(y) = m$. Finalizaremos a prova se mostrarmos que $y \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. Para

isto note que para cada $r \in \mathfrak{a}^n$ temos que $f(ry) = rf(y) = rm = 0$. Como f é injetiva devemos ter que $ry = 0$, implicando que $\mathfrak{a}^n y = 0$. Com isto concluímos que $y \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$.

□

Exemplo 1.2.7. *Sejam $R = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = 2\mathbb{Z}$ e a sequência exata*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \rightarrow 0.$$

Note que $\Gamma_{2\mathbb{Z}}(-)$ não é um funtor exato à direita, pois caso contrário teríamos

$$0 \rightarrow \Gamma_{2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Gamma_{2\mathbb{Z}}(2)} \Gamma_{2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma_{2\mathbb{Z}}\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) \rightarrow 0.$$

Por outro lado, $\Gamma_{2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = 0$ e $\Gamma_{2\mathbb{Z}}\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \neq 0$, o que é uma contradição.

Como $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ é um funtor covariante aditivo e exato à esquerda, pela Observação 1.1.19 podemos considerar a seguinte definição.

Definição 1.2.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, M um R -módulo e $\mathfrak{a}$ um ideal de R . Então*

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) := \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$$

é chamado da i -ésima cohomologia local de M com respeito a $\mathfrak{a}$.

Mais detalhadamente, como podemos obter $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$?

Primeiramente, seja $((I^{\bullet}, d^{\bullet}); a)$ uma resolução injetiva de M , ou melhor

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

Aplicando o funtor $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ ao cocomplexo

$$(I^{\bullet}, d^{\bullet}) : 0 \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \dots,$$

obtemos o cocomplexo

$$(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{\bullet}), \Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{\bullet})) : 0 \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{-1})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^0)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^1) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^1)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^2) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^2)} \dots$$

Portanto, considerando a i -ésima cohomologia do complexo $(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{\bullet}), \Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{\bullet}))$ obtemos

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) := \frac{\text{Ker}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i))}{\text{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1}))},$$

o qual chamamos de **i -ésimo módulo de cohomologia local de M com respeito ao ideal $\mathfrak{a}$** .

Agora, seja $h : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Note que, por meio de h , podemos induzir um homomorfismo na i -ésima cohomologia local com respeito a $\mathfrak{a}$ dado por

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{a}}^i(h) : H_{\mathfrak{a}}^i(M) &\rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(N) \\ m + \text{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d_M^{i-1})) &\mapsto h^i(m) + \text{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d_N^{i-1})). \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida uma vez que $h(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$.

Observação 1.2.9. (a) Como uma caso particular da Observação 1.1.19 (B), como $\mathcal{R}^i F(I) = 0$ para I um R -módulo injetivo e $i > 0$, devemos ter $H_{\mathfrak{a}}^i(I) = 0$ para todo $i > 0$.

(b) Considere M um R -módulo e $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ submódulo de M . Faz sentido considerarmos a aplicação inclusão $i_M : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \hookrightarrow M$. Denotando por Id o funtor identidade de R -módulos, temos que a relação

$$M \rightsquigarrow (i_M : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow Id(M) = M)$$

define uma transformação natural

$$i : \Gamma_{\mathfrak{a}} \hookrightarrow Id.$$

É possível também ver o funtor cohomologia local via o funtor Ext . Tal fato será citado no próximo resultado e está presente em [6, Teorema 1.3.8].

Teorema 1.2.10. Existe um único isomorfismo de funtores de R -módulos

$$(\phi_{\mathfrak{a}}^i)_{i \in \mathbb{N}_0} : \left(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, -) \right) \xrightarrow{\cong} (H_{\mathfrak{a}}^i(-))_{i \in \mathbb{N}_0}.$$

Consequentemente, para cada R -módulo M e cada $i \in \mathbb{N}_0$ temos o seguinte isomorfismo

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M) \cong H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

Proposição 1.2.11. $H_{\mathfrak{a}}^0(-) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$, onde $\mathfrak{a}$ é um ideal de R .

Demonstração. Faremos a demonstração deste fato para funtores covariantes aditivos exatos à esquerda, isto é, queremos mostrar que $\mathcal{R}^0 F(-) = F(-)$. Em consequência disto segue nosso resultado desejado, uma vez que $H_a^i(-) := \mathbf{R}\Gamma_a(-)$.

Seja M um R -módulo e $((I^\bullet, d^\bullet); a)$ uma resolução injetiva de M . Note que

$$\mathcal{R}^0 F(M) := \frac{\text{Ker}(F(d_M^0))}{\text{Im}(F(d_M^{-1}))} = \text{Ker}(F(d_M^0)).$$

Como

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

é um cocomplexo exato à esquerda, temos que $d^0 \circ a = 0$. Assim

$$F(d^0 \circ a) = F(d^0) \circ F(a) = F(0) = 0,$$

isto é, $\text{Im}(F(a)) \subseteq \text{Ker}(F(d^0))$. Para cada $m \in M$, podemos então considerar o seguinte homomorfismo

$$\alpha_M^F : F(M) \longrightarrow \mathcal{R}^0 F(M) = \text{Ker}(F(d^0))$$

$$m \mapsto F(a)(m).$$

Em particular temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\alpha_M^F} & \mathcal{R}^0 F(M) \\ & \searrow F(a) & \downarrow i \\ & & F(I^0) \end{array}$$

Seja agora $h : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Então é possível verificar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\alpha_M^F} & \mathcal{R}^0 F(M) \\ F(h) \downarrow & & \downarrow \mathcal{R}^0 F(h) \\ F(N) & \xrightarrow{\alpha_N^F} & \mathcal{R}^0 F(N). \end{array}$$

é comutativo, isto é, $\mathcal{R}^0 F(h) \circ \alpha_M^F = \alpha_N^F \circ F(h)$. Isto nos a seguinte relação

$$M \rightsquigarrow (\alpha_M^F : F(M) \rightarrow \mathcal{R}^0 F(M)).$$

Em outras palavras, mostramos que $\alpha^F : F \rightarrow \mathcal{R}^0 F$ define uma transformação natural. Além disto, como F é exato à esquerda, temos que

$$0 \rightarrow F(M) \xrightarrow{F(a)} F(I^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I^1)$$

é exata. Assim temos que $\text{Ker}(F(d^0)) = \text{Im}(F(a))$. Pelo diagrama anterior segue que

$$\alpha_M^F(F(M)) = \{F(a)(m) \mid m \in F(M)\} = \mathcal{R}^0 F(M).$$

Portanto $\alpha^F : F \rightarrow \mathcal{R}^0 F$ é um isomorfismo, como queríamos demonstrar.

□

Além disto, dada $0 \rightarrow N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos e $\mathfrak{a}$ um ideal de R , como consequência do Lema 1.1.8 devemos ter

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(N) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^0(h)} H_{\mathfrak{a}}^0(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^0(l)} H_{\mathfrak{a}}^0(P) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{r}}^{0,\mathfrak{a}}} H_{\mathfrak{a}}^1(N) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^1(h)} H_{\mathfrak{a}}^1(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^1(l)} \dots,$$

uma sequência exata longa de cohomologias locais.

Observação 1.2.12. *Seja M um R -módulo e $x \in R$. Note que a aplicação multiplicação*

$$\begin{aligned} x. : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto xm \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R -módulos. Se F é um funtor aditivo temos que

$$F(x.) = F(x \text{Id}_M) = xF(\text{Id}_M) = x \text{Id}_{F(M)},$$

com isto concluímos que a aplicação multiplicação é preservada pela aplicação do funtor.

Sendo assim, observe que:

(a) $x \in \text{NZD}_R(M)$ se, e somente se, $M \xrightarrow{x.} M$ é injetiva.

(b) Se $x \in \text{NZD}_R(M)$, da sequência exata

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x.} M \xrightarrow{p} M/xM \rightarrow 0,$$

podemos considerar a sequência exata longa

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^0(x.)=x.} H_{\mathfrak{a}}^0(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^0(p)} H_{\mathfrak{a}}^0(M/xM) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{r}}^{0,\mathfrak{a}}} H_{\mathfrak{a}}^1(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^1(x.)} H_{\mathfrak{a}}^1(M) \xrightarrow{H_{\mathfrak{a}}^1(p)} \dots$$

Definição 1.2.13. *Seja $\mathfrak{a}$ um ideal de R . Um R -módulo M é dito **$\mathfrak{a}$ -torção** se $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$. Ou equivalentemente, se para cada elemento $m \in M$ existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n m = 0$.*

Note que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, concluindo assim que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é $\mathfrak{a}$ -torção.

Proposição 1.2.14. *Considere $\mathfrak{a}$ um ideal de R e M um R -módulo.*

- (a) *Se M é $\mathfrak{a}$ -torção e $N \subseteq M$ um submódulo, então N e M/N são $\mathfrak{a}$ -torção. Mais geralmente, seja $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos. Se $\mathfrak{a}$ é finitamente gerado ou N é Noetheriano, então M é $\mathfrak{a}$ -torção se, e somente se, N e P são R -módulos $\mathfrak{a}$ -torção.*
- (b) *Considere M finitamente gerado. Então M é $\mathfrak{a}$ -torção se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n M = 0$.*
- (c) *Sejam $x \in \mathfrak{a}$ e M um R -módulo $\mathfrak{a}$ -torção. Então $M \xrightarrow{x} M$ é injetiva se, e somente se, $M = 0$.*

Demonstração. (a) $(\Rightarrow)$ Primeiramente, como $N \subseteq M$ então devemos ter que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$. Como M é $\mathfrak{a}$ -torção, para cada $m \in M$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n m = 0$. Em particular, se $x \in N$, $\mathfrak{a}^n x = 0$, implicando assim que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N) = N$.

Por sua vez note que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M/N) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N) = M/N$, como queríamos.

$(\Leftarrow)$ Aplique a definição a sequência exata.

(b) Suponhamos que M é $\mathfrak{a}$ -torção. Como M é finitamente gerado, temos que $M = (x_1, \dots, x_r)$, com $x_i \in M$ e $i = 1, \dots, r$. Assim, para cada i existe um $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^{n_i} m_i = 0$. Tomando $n = \max\{n_1, \dots, n_r\}$ temos que $\mathfrak{a}^n m_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Portanto $\mathfrak{a}^n(x_1, \dots, x_r) = 0$ como queríamos. A outra implicação segue imediatamente da definição de módulo $\mathfrak{a}$ -torção.

(c) Pela Observação 1.2.12, se $M \xrightarrow{x} M$ é injetiva então $x \in NZD_R(M)$. Assim, se $xM = 0$ então devemos ter $M = 0$. Reciprocamente, se $M = 0$ devemos ter que $M \xrightarrow{x} M$ é injetiva. $\square$

Proposição 1.2.15. *Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{a}$ um ideal de R e M um R -módulo. Então o módulo de cohomologia local $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ é $\mathfrak{a}$ -torção.*

Demonstração. Sabemos que $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = \frac{Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^n))}{Im(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{n-1}))}$. Assim para mostrarmos o resultado em questão, uma vez que $Im(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{n-1})) \subseteq Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^n))$, pela Proposição 1.2.14 (a) é suficiente mostrar que $Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^n))$ é $\mathfrak{a}$ -torção.

Considere I_i 's os módulos injetivos presentes na resolução injetiva de M . Como todos os $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^i)$ são $\mathfrak{a}$ -torção e $Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^n))$ é submódulo de $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^n)$ devemos ter que $Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^n))$ é $\mathfrak{a}$ -torção. Isto finaliza a prova. □

Teorema 1.2.16. *Seja R um anel Noetheriano e seja I um módulo injetivo. Então $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ é também injetivo.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{b}$ um ideal de R e $h : \mathfrak{b} \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ um homomorfismo. Pelo critério de Baer, é suficiente mostrar que existe $e \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ tal que $h(b) = be$, para todo $b \in \mathfrak{b}$.

Como I é injetivo, existe um homomorfismo $l : R \rightarrow I$ tal que $h = l \circ i$ onde $i : \mathfrak{b} \rightarrow R$ é o mapa de inclusão. Seja $f := l(1)$, então

$$h(b) = (l \circ i)(b) = l(i(b)) = l(b) = l(b \cdot 1) = bl(1) = bf.$$

Portanto $h(b) = bf$ para todo $b \in \mathfrak{b}$. Em particular $h(\mathfrak{b}) \subseteq Rf$.

Como $h(\mathfrak{b}) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ e $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ é $\mathfrak{a}$ -torção segue que $h(\mathfrak{b})$ é também $\mathfrak{a}$ -torção. Além disto, uma vez que $\Gamma(h(\mathfrak{b})) \subseteq \Gamma(Rf)$ devemos ter $h(\mathfrak{b}) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(Rf)$.

Agora como R é noetheriano devemos ter Rf finitamente gerado, pela Propriedade 1.2.2 (h) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n(Rf) \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}(Rf) = 0$. Mediante isto devemos ter $\mathfrak{a}^n f \cap h(\mathfrak{b}) = 0$ □

No próximo capítulo vamos introduzir uma extensão da cohomologia local, chamada cohomologia local definida por um par de ideais. Veremos que tal generalização se comporta similarmente a usual cohomologia local (definida nesta seção) em diversos aspectos, porém ocorrem importantes “patologias”.

Cohomologia local com respeito a um par de ideais

Neste capítulo, apresentaremos uma extensão do conceito que foi introduzido no capítulo anterior, a cohomologia local. Tal extensão é a principal ferramenta que utilizaremos no decorrer deste trabalho, mais especificamente nos resultados obtidos nos Capítulos 3, 4 e 5. Ficará claro ao longo deste capítulo a similaridade do comportamento desta generalização com respeito a cohomologia local usual, porém vale ressaltar a existência de algumas “diferenças” cruciais. Os resultados presentes neste capítulo são atribuídos a Takahashi, Yoshino e Yoshizawa [50].

2.1 Definições e alguns resultados

Nessa seção apresentaremos alguns resultados sobre cohomologia local com respeito a um par de ideais.

No que segue, vamos assumir que os anéis citados são comutativos, noetherianos com identidade. Para iniciar, seja R um anel e I, J ideais de R .

Definição 2.1.1. *Seja M um R -módulo. Denotaremos por $\Gamma_{I,J}(M)$ o conjunto dos elementos x de M tal que $I^n x \subseteq Jx$ para algum inteiro n . Mais explicitamente,*

$$\Gamma_{I,J}(M) = \{x \in M \mid I^n x \subseteq Jx \text{ para } n \gg 1\}.$$

Note que $x \in \Gamma_{I,J}(M)$ se, e somente se, $I^n \subseteq \text{Ann}(x) + J$ para $n \gg 1$. Com isto temos uma outra caracterização dos elementos de $\Gamma_{I,J}(M)$. Por meio desta caracterização é fácil ver que

$\Gamma_{I,J}(M)$ é um R -submódulo de M .

Observe que se $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos, então $f(\Gamma_{I,J}(M)) \subseteq \Gamma_{I,J}(N)$. Isto mostra que a função $\Gamma_{I,J}(f) : \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow \Gamma_{I,J}(N)$ dada por $\Gamma_{I,J}(f)(x) := f(x)$ esta bem definida.

Com isto $\Gamma_{I,J}$ torna-se um funtor aditivo covariante na categoria de R -módulos. Chamaremos $\Gamma_{I,J}$ como o **funtor (I, J) -torção**.

Se $J = 0$, o funtor $\Gamma_{I,J}$ coincide com o funtor Γ_I definido no Capítulo 1, Seção 2. Assim o funtor $\Gamma_{I,J}$ pode ser visto como uma natural generalização do funtor Γ_I .

Lema 2.1.2. *O funtor $\Gamma_{I,J}$ é um funtor exato à esquerda da categoria de R -módulos.*

Demonstração. Para a sequência exata de R -módulos $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$, precisamos mostrar que

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(L) \xrightarrow{\Gamma_{I,J}(f)} \Gamma_{I,J}(M) \xrightarrow{\Gamma_{I,J}(g)} \Gamma_{I,J}(N)$$

é também exata. Uma vez que f é injetora e $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(f)) \subseteq \text{Ker}(f)$ segue que $\Gamma_{I,J}(f)$ é também injetora. Segue também que $\text{Im}(\Gamma_{I,J}(f)) \subseteq \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(g))$.

Para provar a inclusão contrária seja $x \in \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(g))$. Como $x \in \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(M))$, existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $I^n x \subseteq Jx$. Seja $y \in L$ tal que $f(y) = x$. Precisamos mostrar que $y \in \Gamma_{I,J}(L)$. Note que para cada $a \in I^n$, temos que $f(ay) = af(y) = ax \in I^n x \subseteq Jx$ e com isto, existe um elemento $b \in J$ tal que $ax = bx$. Assim $f((a-b)y) = af(y) - bf(y) = 0$ e consequentemente, por f ser injetora, $(a-b)y = 0$. Logo $ay \in Jy$ e portanto $I^n y \subseteq Jy$, como queríamos. $\square$

Como um caso particular da Observação 1.1.19 (B) e similarmente feito para o funtor Γ_I , temos a seguinte definição.

Definição 2.1.3. *Para um inteiro i , o i -ésimo funtor derivado à esquerda de $\Gamma_{I,J}$ é denotado por $H_{I,J}^i$ e será chamado de **i -ésimo funtor cohomologia local com respeito aos ideais (I, J)** .*

*Para um R -módulo M , chamaremos $H_{I,J}^i(M)$ como o **i -ésimo módulo de cohomologia local de M com respeito a (I, J)** .*

Dizemos que M é (I, J) -**torção** (respectivamente livre de (I, J) -torção) quando $\Gamma_{I,J}(M) = M$ (respectivamente $\Gamma_{I,J}(M) = 0$).

É fácil ver que se $J = 0$, então $H_{I,J}^i$ coincide com o funtor cohomologia local ordinário H_I^i (Definição 1.2.8).

Vamos mostrar agora algumas propriedades importantes a respeito deste novo funtor definido previamente.

Proposição 2.1.4. *Sejam I_1, I_2, J_1, J_2 ideais do anel R e M um R -módulo.*

- 1) $\Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_2, J_2}(M)) = \Gamma_{I_2, J_2}(\Gamma_{I_1, J_1}(M))$.
- 2) Se $I_1 \subseteq I_2$, então $\Gamma_{I_2, J_1}(M) \subseteq \Gamma_{I_1, J_1}(M)$.
- 3) Se $J_1 \subseteq J_2$, então $\Gamma_{I_1, J_1}(M) \subseteq \Gamma_{I_1, J_2}(M)$.
- 4) $\Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_2, J_1}(M)) = \Gamma_{I_1+I_2, J_1}(M)$.
- 5) $\Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_1, J_2}(M)) = \Gamma_{I_1, J_1 J_2}(M) = \Gamma_{I_1, J_1 \cap J_2}(M)$.

Em particular $H_{I_1, J_1 J_2}^i(M) = H_{I_1, J_1 \cap J_2}^i(M)$ para todo inteiro i .

- 6) Se $J_2 \subseteq J_1$, então $H_{I_1+J_2, J_1}^i(M) = H_{I_1, J_1}^i(M)$ para todo inteiro i .

Em particular $H_{I_1+J_1, J_1}^i(M) = H_{I_1, J_1}^i(M)$ para todo inteiro i .

- 7) Se $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$, então $H_{I_1, J_1}^i(M) = H_{I_2, J_1}^i(M)$, para todo inteiro $i \geq 0$.

Em particular $H_{I_1, J_1}^i(M) = H_{\sqrt{I_1}, J_1}^i(M)$, para todo inteiro i .

- 8) Se $\sqrt{J_1} = \sqrt{J_2}$, então $H_{I_1, J_1}^i(M) = H_{I_1, J_2}^i(M)$, para todo inteiro $i \geq 0$.

Em particular $H_{I_1, J_1}^i(M) = H_{I_1, \sqrt{J_1}}^i(M)$, para todo inteiro i .

Demonstração. (1) Seja $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_2, J_2}(M))$. Então $x \in \Gamma_{I_2, J_2}(M)$ e $I_1^n x \subset J_1 x$, para algum inteiro $n \geq 1$. Além disso $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(M)$, assim $I_2^m x \subset J_2 x$ para algum $m \geq 1$ um número inteiro. Portanto $x \in \Gamma_{I_2, J_2}(\Gamma_{I_1, J_1}(M))$. Agora, para $x \in \Gamma_{I_2, J_2}(\Gamma_{I_1, J_1}(M))$, procedendo de maneira análoga temos que $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_2, J_2}(M))$.

(2) Seja $x \in M$ tal que $I_2^n x \subseteq J_1 x$, para algum número inteiro $n \geq 1$. Uma vez que $I_1 \subseteq I_2$ segue que $I_1^n x \subseteq J_1 x$. Portanto $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(M)$.

(3) Seja $x \in M$ tal que $I_1^n x \subseteq J_1 x$. Como $J_1 \subseteq J_2$ segue que $I_1^n x \subseteq J_2 x$. Portanto $x \in \Gamma_{I_1, J_2}(M)$.

(4) Seja $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_2, J_1}(M))$. Por definição existem inteiros $m, n \geq 1$ tais que $I_1^m x \subseteq J_1 x$ e $I_2^n x \subseteq J_1 x$. Como $(I_1 + I_2)^{m+n} x \subseteq I_1^m x + I_2^n x \subseteq J_1 x$, segue que $x \in \Gamma_{I_1+I_2, J_1}(M)$. Por sua vez, seja $x \in \Gamma_{I_1+I_2, J_1}(M)$. Assim, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $(I_1 + I_2)^n x \subseteq J_1 x$. Como $I_1^n x \subseteq (I_1 + I_2)^n x$ e $I_2^n x \subseteq (I_1 + I_2)^n x$, segue que $I_1^n x \subseteq J_1 x$ e $I_2^n x \subseteq J_1 x$, como queríamos.

(5) Seja $x \in M$ tal que $I_1^n x \subseteq (J_1 J_2) x$. Como $J_1 J_2 \subseteq J_1$ e $J_1 J_2 \subseteq J_2$ segue que $I_1^n x \subseteq (J_1 \cap J_2) x$. Por sua vez, seja $x \in M$ tal que $I_1^m x \subseteq J_1 x \cap J_2 x$, para algum inteiro $m \geq 1$. Como $J_1 \cap J_2$ está contido em J_1 e J_2 segue que $I_1^m x \subseteq J_2 x$ e $I_1^m x \subseteq J_1 x$. Portanto $x \in \Gamma_{I_1, J_2}(M)$ e $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_1, J_2}(M))$. Por fim, se $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_1, J_2}(M))$ temos que existem inteiros $m, n \geq 1$, tais que $I_1^m x \subseteq J_2 x$ e $I_1^n x \subseteq J_1 x$. Desta forma $I_1^{m+n} x \subseteq (J_1 J_2) x$, como queríamos.

(6) Usando a mesma idéia de demonstração empregada nos itens anteriores, o resultado segue do fato que $\Gamma_{I_1+J_2, J_1}(M) = \Gamma_{I_1, J_1}$.

(7) Seja $x \in \Gamma_{I_1, J_1}(M)$. Então existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $I_1^n x \subseteq J_1 x$. Como $I_2^n \subseteq \sqrt{I_1}$ temos que $x \in \Gamma_{I_2, J_1}(M)$. De forma análoga prova-se a outra inclusão. O caso particular segue do fato que, $\sqrt{\sqrt{I_1}} = \sqrt{I_1}$.

(8) A demonstração segue imendiatamente do item (3) uma vez que $\Gamma_{I_1, \sqrt{J_1}}(M) = \Gamma_{I_1, \sqrt{J_2}}(M)$. O caso particular segue do fato que $\sqrt{J_1} = \sqrt{\sqrt{J_1}}$. $\square$

Na sequência, vamos definir um conjunto que generaliza a noção dos subconjuntos fechados na topologia de Zariski e dar algumas propriedades essenciais destes conjuntos para o decorrer deste capítulo. Esta definição deve-se a Takahashi, Yoshino e Yoshizawa em [50].

Definição 2.1.5. *Seja I, J ideais do anel R . Definimos $W(I, J)$ como o conjunto dos ideais primos $\mathfrak{p}$ do anel R tais que $I^n \subseteq J + \mathfrak{p}$, para algum inteiro $n \geq 1$. Mais especificamente*

$$W(I, J) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I^n \subseteq J + \mathfrak{p}, \text{ para algum } n \geq 1\}.$$

Note que se $J = 0$, $W(I, 0)$ coincide com o conjunto $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ que

são os subconjuntos fechados na topologia de Zariski. Note também que $W(I, J)$ não é um subconjunto fechado de $\text{Spec}(R)$.

Proposição 2.1.6. *Sejam I_1, I_2, J_1, J_2 ideais do anel R .*

- 1) *Se $I_1 \subseteq I_2$, então $W(I_1, J_1) \supseteq W(I_2, J_1)$.*
- 2) *Se $J_1 \subseteq J_2$, então $W(I_1, J_1) \subseteq W(I_1, J_2)$.*
- 3) *$W(I_1 + I_2, J_1) = W(I_1, J_1) \cap W(I_2, J_1)$.*
- 4) *$W(I_1, J_1 J_2) = W(I_1, J_1 \cap J_2) = W(I_1, J_1) \cap W(I_1, J_2)$.*
- 5) *$W(I_1, J_1) = W(\sqrt{I_1}, J_1) = W(I_1, \sqrt{J_1})$.*
- 6) *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Se I_1 não é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário, então as seguintes igualdades acontecem:*

$$W(\mathfrak{m}, I_1) = \left(\bigcap_{I_1 \subset J_1} W(\mathfrak{m}, J_1) \right) \cap \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \not\subseteq I_1 \}.$$

- 7) *$V(I_1) = \bigcap_{J_1} W(I_1, J_1) = \bigcap_{J_1 \in D(I_1)} W(I_1, J_1)$, onde $D(I_1)$ é o complementar de $V(I_1)$ no $\text{Spec}(R)$.*

Demonstração. (1) Seja $\mathfrak{p} \in W(I_2, J_1)$. Então existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $I_2^n \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$. Como $I_1^n \subseteq I_2^n$ segue que $I_1^n \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$, como queríamos.

(2) Para $\mathfrak{p} \in W(I_1, J_1)$ temos que $I_1^m \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$, para algum inteiro $m \geq 1$. Como $J_1 \subseteq J_2$ temos $I_1^m \subseteq J_2 + \mathfrak{p}$, ou seja, $\mathfrak{p} \in W(I_1, J_2)$.

(3) Seja $\mathfrak{p} \in W(I_1 + I_2, J_1)$. Por definição, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $(I_1 + I_2)^m \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$. Como I_1^m e I_2^m estão contidos em $(I_1 + I_2)^m$ segue que $\mathfrak{p} \in W(I_1, J_1) \cap W(I_2, J_1)$. Por outro lado, se $\mathfrak{p} \in W(I_1, J_1) \cap W(I_2, J_1)$, existem inteiros $m, n \geq 1$ tais que $I_1^m \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$ e $I_2^n \subseteq J_2 + \mathfrak{p}$. Tomando $r = n + m$ segue $(I_1 + I_2)^r \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$ e assim $\mathfrak{p} \in W(I_1 + I_2, J_1)$.

(4) Uma vez que $J_1 J_2 \subseteq J_1 \cap J_2 \subseteq J_1, J_2$, segue pela propriedade (2) desta mesma proposição que $W(I_1, J_1 J_2) \subseteq W(I_1, J_1 \cap J_2) \subseteq W(I_1, J_1) \cap W(I_1, J_2)$. Seja agora $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ tal que $\mathfrak{m} \in W(I_1, J_1) \cap W(I_2, J_1)$. Assim, existem inteiros $m, n \geq 1$ tais que $I_1^m \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$ e $I_1^n \subseteq J_2 + \mathfrak{p}$. Portanto $I_1^{m+n} \subseteq (J_1 + \mathfrak{p})(J_2 + \mathfrak{p}) \subseteq (J_1 J_2) + \mathfrak{p}$ e com isso segue $\mathfrak{p} \in W(I_1, J_1 J_2)$, como queríamos.

(5) Como $I_1 \subseteq \sqrt{I_1}$, segue pela propriedade (1) desta proposição que $W(\sqrt{I_1}, J_1) \subseteq W(I_1, J_1)$. Analogamente pelo item (2), $W(I_1, J_1) \subseteq W(I_1, \sqrt{J_1})$.

Resta mostrar que $W(I_1, \sqrt{J_1}) \subseteq W(\sqrt{I_1}, J_1)$. Para isto, seja $\mathfrak{p} \in W(I_1, \sqrt{J_1})$. Então existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $I_1^n \subseteq \sqrt{J_1} + \mathfrak{p}$. Aplicando o radical em ambos os lados temos o desejado.

(6) Seja $\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, I_1)$. Assim temos que $\mathfrak{m}^n \subseteq I_1 + \mathfrak{p}$ para algum inteiro $n \geq 1$ e portanto podemos concluir que $\mathfrak{m} = \sqrt{I_1 + \mathfrak{p}}$, uma vez que $\mathfrak{m}$ é ideal maximal de R , isto é, $I_1 + \mathfrak{p}$ é $\mathfrak{m}$ -primário. Se $I_1 \not\subseteq J_1$ então $J_1 + \mathfrak{p}$ é também $\mathfrak{m}$ -primário e consequentemente $\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J_1)$. Como I_1 não é $\mathfrak{m}$ -primário, temos que $\mathfrak{p} \not\subseteq I_1$. Para provar a inclusão contrária, seja $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ tal que $P \in \bigcap_{I_1 \not\subseteq J_1} W(\mathfrak{m}, J_1)$ e $P \not\subseteq I_1$. Denotando $J_1 = I_1 + \mathfrak{p} \not\subseteq I_1$, note que como $\mathfrak{m}^n \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$ para algum inteiro $n \geq 1$, segue que $\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, I_1 + \mathfrak{p})$. Desta forma $I_1 + \mathfrak{p}$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Portanto, $\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, I_1)$.

(7) Note que se $\mathfrak{p} \in V(I_1)$ então $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ e $I_1 \subseteq P$. Como $I_1 \subseteq I_1 + J_1$ temos $I_1 \subseteq \mathfrak{p} + J_1$, o que implica $\mathfrak{p} \in \bigcap_{J_1} W(I_1, J_1)$. Então $I_1^n \subseteq J_1 + \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p} \in \bigcap_{J_1 \in D(I_1)} W(I_1, J_1)$. Agora suponha que $\mathfrak{p} \notin V(I_1)$. Logo $\mathfrak{p} \in D(I_1)$ e consequentemente $\mathfrak{p} \notin W(I_1, \mathfrak{p})$. Portanto segue que $\mathfrak{p} \notin \bigcap_{J_1 \in D(I_1)} W(I_1, J_1)$. $\square$

Proposição 2.1.7. *Seja I, J ideais do anel R e M um R -módulo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- 1) M é um R -módulo de (I, J) -torção.
- 2) $\text{Min}(M) \subseteq W(I, J)$, onde $\text{Min}(M)$ é o conjunto dos primos associados que são minimais em $\text{Ass}(M)$.
- 3) $\text{Ass}(M) \subseteq W(I, J)$.
- 4) $\text{Supp}(M) \subseteq W(I, J)$.

Demonstração. Note primeiramente que as implicações $4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2)$ são triviais. Agora vamos mostrar que $(2) \Rightarrow (4)$. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$. Como R é anel noetheriano e $M \neq 0$, devemos ter $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$. Assim podemos assumir sem perda de generalidade que existe

$\mathfrak{q} \in \text{Min}(M)$ e $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{q} \in W(I, J)$ segue que $I^n \subseteq J + \mathfrak{q}$, para algum inteiro $n \geq 1$. Desta forma $I^n \subseteq J + \mathfrak{q} \subseteq J + \mathfrak{p}$. Portanto $\mathfrak{p} \in W(I, J)$.

1) $\Rightarrow$ 3) Se $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ temos que $\mathfrak{p} = \text{Ann}(x)$, para algum $x \in M$. Uma vez que M é (I, J) -torção existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $I^n x \subseteq Jx$. Logo $I^n - J \subseteq \text{Ann}(x)$, ou seja, $I^n \subseteq J + \mathfrak{p}$, como queríamos.

4) $\Rightarrow$ 1) É suficiente mostrar que $M \subseteq \Gamma_{I,J}(M)$. Como R é um anel noetheriano, o número de ideais primos minimais de R é finita. Assim para $x \in M$, definimos $\text{Min}(xR) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$. Como $\text{Min}(xR) \subseteq \text{Min}(M) \subseteq \text{Ass}(M) \subseteq \text{Supp}(M) \subseteq W(I, J)$, existe um inteiro n tal que $I^n \subseteq J + \mathfrak{p}_i$, para todo i e consequentemente $I^{ns} \subseteq J + (\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_s)$. Como $\sqrt{\text{Ann}(x)} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \dots \cap \mathfrak{p}_s \supseteq \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_s$ segue que, para algum inteiro $m \geq 1$, $(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_s)^m \subseteq \text{Ann}(x)$. Portanto temos $I^{mns} \subseteq J + \text{Ann}(x)$ e assim $x \in \Gamma_{I,J}(M)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 2.1.8. 1) Para $x \in M$, as seguintes afirmações são equivalentes.

a) $x \in \Gamma_{I,J}(M)$.

b) $\text{Supp}(xR) \subseteq W(I, J)$.

2) Seja $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos. Então, M é um R -módulo (I, J) -torção se, e somente se, L e N são R -módulos (I, J) -torção.

Demonstração. 1) Seja $x \in \Gamma_{I,J}(M)$. Por definição que $I^n x \subseteq Jx$, para algum inteiro $n \geq 1$. Logo para todo $r \in R$, $I^n rx \subseteq Jrx$ e assim $(xR) \subseteq \Gamma_{I,J}((xR))$. Portanto $\Gamma_{I,J}((xR)) = (xR)$ e assim pela proposição anterior obtemos que $\text{Supp}((xR)) \subseteq W(I, J)$. Reciprocamente, como temos $\text{Supp}((xR)) \subseteq W(I, J)$, podemos usar a proposição anterior e obter que $(xR) = \Gamma_{I,J}((xR))$. Portanto $\Gamma_{I,J}((xR)) \subseteq \Gamma_{I,J}(M)$.

2) Sendo $M = \Gamma_{I,J}(M)$, segue da proposição anterior que $\text{Supp}(M) \subseteq W(I, J)$. Uma vez que a sequência é exata curta, temos que $\text{Supp}(M) = \text{Supp}(L) \cup \text{Supp}(N)$. Logo, $\text{Supp}(L) \subseteq W(I, J)$ e então $L = \Gamma_{I,J}(L)$. Analogamente $N = \Gamma_{I,J}(N)$. Reciprocamente, usando a mesma idéia anterior teremos que $M = \Gamma_{I,J}(M)$. $\square$

Corolário 2.1.9. Se M é um R -módulo de (I, J) -torção, então M/JM é um R -módulo de I -torção. A recíproca vale se M é um R -módulo finitamente gerado.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Uma vez que M é um R -módulo de (I, J) -torção, segue pela proposição anterior que $\text{Supp}(M) \subseteq W(I, J)$. Então temos que $\text{Supp}(M/JM) \subseteq \text{Supp}(M) \cap V(J) \subseteq W(I, J) \cap V(J) \subseteq V(I)$. Segue novamente pela proposição anterior que M/JM é um R -módulo de I -torção.

($\Leftarrow$) Suponha agora que M é um R -módulo finitamente gerado e M/JM é um R -módulo de I -torção. Sendo $x \in M$, queremos mostrar que $x \in \Gamma_{I,J}(M)$. Pelo lema de Artin-Rees, existe um inteiro $n \geq 1$ suficientemente grande tal que $J^n M \cap (x) \subseteq Jx$. Como por hipótese M/JM é um R -módulo de I -torção, temos $\text{Supp}(M/JM) \subseteq V(I)$. Sendo M finitamente gerado sobre R segue que

$$\text{Supp}(M/J^n M) = \text{Supp}(M) \cap V(J^n) = \text{Supp}(M) \cap V(J) = \text{Supp}(M/JM) \subseteq V(I).$$

Logo pela proposição anterior, $M/J^n M$ é um R -módulo de I -torção. Então existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $I^m M \subseteq J^n M$. Além disto, para todo $x \in M$, temos $I^m x \subseteq J^n M$. Disto segue que $I^m x \subseteq J^n M \cap (x) \subseteq Jx$ e portanto $x \in \Gamma_{I,J}(M)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 2.1.10. *Seja M um R -módulo. Então*

$$\text{Ass}(M) \cap W(I, J) = \text{Ass}(\Gamma_{I,J}(M)).$$

Em particular, $\Gamma_{I,J}(M) \neq 0$ se, e somente se, $\text{Ass}(M) \cap W(I, J) \neq \emptyset$.

Demonstração. Primeiramente, segue da Proposição 2.1.4, ítem (4) que $\Gamma_{I,J}(M)$ é um R -módulo de (I, J) -torção. Assim pela Proposição 2.1.7, obtemos que $\text{Ass}(\Gamma_{I,J}(M)) \subseteq W(I, J)$ e como $\Gamma_{I,J}(M)$ é R -submódulo de M , temos $\text{Ass}(\Gamma_{I,J}(M)) \subseteq \text{Ass}(M)$. Desta forma $\text{Ass}(\Gamma_{I,J}(M)) \subseteq W(I, J) \cap \text{Ass}(M)$. Para provar a inclusão contrária, seja um ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) \cap W(I, J)$. Então existe um elemento não nulo $x \in M$ tal que $\mathfrak{p} = \text{Ann}(x)$ e um inteiro $n \geq 1$ tal que $I^n \subseteq J + \mathfrak{p}$, ou seja, $I^n \subseteq J + \text{Ann}(x)$. Consequentemente $x \in \Gamma_{I,J}(M)$. Portanto como $\mathfrak{p} = \text{Ann}(x)$ segue que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(\Gamma_{I,J}(M))$. $\square$

Proposição 2.1.11. *Seja $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Se $\mathfrak{p} \in W(I, J)$, então $E(R/\mathfrak{p})$ é um R -módulo de (I, J) -torção. Por outro lado, se $\mathfrak{p} \notin W(I, J)$ então $E(R/\mathfrak{p})$ é um R -módulo livre de (I, J) -torção.*

Demonstração. Uma vez que $\text{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \text{Ass}(E(R/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$ (veja Apêndice) e a hipótese $\mathfrak{p} \in W(I, J)$, segue que $\text{Ass}(E(R/\mathfrak{p})) \subseteq W(I, J)$. Então temos que $\Gamma_{I,J}(E(R/\mathfrak{p})) = E(R/\mathfrak{p})$. Por outro lado, se $\mathfrak{p} \notin W(I, J)$ então $\text{Ass}(E(R/\mathfrak{p})) \cap W(I, J) = \{\mathfrak{p}\} \cap W(I, J) = \emptyset$ e assim pela proposição anterior obtemos $\Gamma_{I,J}(E(R/\mathfrak{p})) = 0$. $\square$

Proposição 2.1.12. *Seja M um R -módulo (I, J) -torção. Então existe uma resolução injetiva de M em que cada termo da resolução é um R -módulo (I, J) -torção.*

Demonstração. Primeiramente note que o envelope injetivo E^0 de M é também um módulo (I, J) -torção. De fato, como M é (I, J) -torção temos que $\text{Ass}(E^0) = \text{Ass}(M) \subseteq W(I, J)$ (Proposição 2.1.7) implicando assim que E^0 é (I, J) -torção. Além disso vemos que M pode ser imerso em um R -módulo injetivo E^0 (I, J) -torção.

Suponha indutivamente que construímos uma sequência exata

$$0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow \dots \rightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n$$

de R -módulos injetivos, onde cada E^i é (I, J) -torção, para $i = 0, \dots, n$. Seja C o cokernel do mapa d^{n-1} . Como E^n é um R -módulo (I, J) -torção, segue do Corolário 2.1.8 (2) que C é também (I, J) -torção. Aplicando o argumento do primeiro parágrafo à C , podemos mergulhar C em um módulo E^{n+1} injetivo (I, J) -torção. Isto finaliza a prova. $\square$

Corolário 2.1.13. *Seja M um R -módulo.*

- (1) *Se M é um R -módulo (I, J) -torção, então $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo $i > 0$.*
- (2) *$H_{I,J}^i(\Gamma_{I,J}(M)) = 0$ para todo $i > 0$.*
- (3) *$M/\Gamma_{I,J}(M)$ é um R -módulo de (I, J) -torção livre.*
- (4) *Existe um isomorfismo $H_{I,J}^i(M) \cong H_{I,J}^i(M/\Gamma_{I,J}(M))$ para todo $i > 0$.*
- (5) *$H_{I,J}^i(M)$ é um R -módulo (I, J) -torção para todo $i \geq 0$.*

Demonstração. Veja que (1) segue imediatamente da proposição prévia. Como $\Gamma_{I,J}(M)$ é um R -módulo (I, J) -torção, (2) segue de (1). A partir da seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_{I,J}(M) \rightarrow 0$$

e do fato que $H_{I,J}^i(\Gamma_{I,J}(M)) = 0$ para $i > 0$ (item (2) da mesma proposição), segue a sequência exata longa de cohomologias que

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(\Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow \Gamma_{I,J}(M/\Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow 0$$

e os isomorfismos

$$H_{I,J}^i(M) \cong H_{I,J}^i(M/\Gamma_{I,J}(M))$$

para todo $i > 0$. Assim temos provado o item (4). O item (3) segue do fato que $\Gamma_{I,J}(\Gamma_{I,J}(M)) = \Gamma_{I,J}(M)$ (Proposição 2.1.4(4)) e a sequência exata anterior.

Para provar (5), primeiramente note que por (3) e a sequência exata prévia temos que $\Gamma_{I,J}(H_{I,J}^0(M)) \cong H_{I,J}^0(M)$, isto é, $H_{I,J}^0(M)$ é (I, J) -torção. Portanto, como $H_{I,J}^i(M)$ ($i \geq 0$) é um subquociente de um (I, J) -torção, temos que ele é também um módulo (I, J) -torção pelo Corolário 2.1.8 (2).

□

Observação 2.1.14. *Considere R um anel local e M um R -módulo finitamente gerado. Se $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i > 0$, então M é um R -módulo (I, J) -torção. Em outras, a recíproca do corolário anterior, item (1), é válido com estas hipóteses. Este resultado será provado mais a frente.*

2.2 O complexo de Čech generalizado

Por meio da breve introdução feita na seção anterior, nesta seção apresentaremos uma generalização do complexo de Čech. Semelhantemente feito ao [6, Teorema 5.1.19], o principal objetivo é mostrar que a cohomologia local com respeito à um par de ideais é obtida das cohomologias de um complexo de Čech generalizado.

Definição 2.2.1. Para um elemento $a \in R$, seja $S_{a,J}$ o subconjunto de R consistindo de todos os elementos da forma $a^n + j$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $j \in J$. Mais explicitamente

$$S_{a,J} = \{a^n + j \mid n \in \mathbb{N}, j \in J\}.$$

Note que $S_{a,J}$ é um subconjunto multiplicativamente fechado de R . De fato, $1 = a^0 + 0$ e para $a^{n_1} + j_1$, $a^{n_2} + j_2$ em $S_{a,J}$ temos que $(a^{n_1} + j_1)(a^{n_2} + j_2) = a^{n_1+n_2} + j_3$, com $j_3 \in J$. Assim, para um R -módulo M , vamos denotar por $M_{a,J}$ o módulo de frações do módulo M com respeito ao conjunto multiplicativo $S_{a,J}$, ou melhor, $M_{a,J} = S_{a,J}^{-1}M$.

Definição 2.2.2. Para um elemento $a \in R$, o cocomplexo $C_{a,J}^\bullet$ é definido como

$$C_{a,J}^\bullet = \left(0 \rightarrow R \xrightarrow{\iota} R_{a,J} \rightarrow 0\right),$$

onde ι é o mapa de localização canônico, R e $R_{a,J}$ estão situados na posição 0 e 1 respectivamente no cocomplexo. Agora, para $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_s$ uma sequência de elementos de R , definimos o cocomplexo $C_{\mathbf{a},J}^\bullet$ como segue:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{a},J}^\bullet &= \bigotimes_{i=1}^s C_{a_i,J}^\bullet \\ &= \left(0 \rightarrow R \rightarrow \prod_{i=1}^s R_{a_i,J} \rightarrow \prod_{i < j} (R_{a_i,J})_{a_j,J} \rightarrow \dots \rightarrow (\dots (R_{a_1,J}) \dots)_{a_s,J} \rightarrow 0\right). \end{aligned}$$

Este cocomplexo é chamado **cocomplexo de Čech generalizado com respeito a sequência** $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_s$. Observe que se $J = 0$, temos que $C_{\mathbf{a},J}^\bullet$ coincide com o cocomplexo de Čech ordinário $C_{\mathbf{a}}^\bullet$ com respeito a sequência de elementos $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_s$ do anel R . Para mais detalhes, veja [6, Capítulo 5].

Daremos agora algumas propriedades básicas referentes ao complexo de Čech generalizado.

Proposição 2.2.3. Seja $a \in R$.

- (1) $0 \in S_{a,J}$, se, e somente se, $a \in \sqrt{J}$.
- (2) Se $a \in \sqrt{J}$, então $C_{a,J}^\bullet \cong R$ como complexo de cadeias.
- (3) Um ideal primo $\mathfrak{p}$ pertence à $W(I, J)$ se, e somente se, $\mathfrak{p} \cap S_{a,J} \neq \emptyset$ para qualquer $a \in I$.

(4) Se $a \in I$, então $H_{I,J}^i(M_{a,J}) = 0 \ \forall \ i \geq 0$.

(5) Se $\sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \dots, a_s)}$, então a sequência

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow M \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{a_i,J}$$

é exata.

Demonstração. (1) Se $0 \in S_{a,J}$ então $0 = a^n + j$ para algum natural n e $j \in J$. Então, como $a^n = -j \in J$ temos que $a \in \sqrt{J}$. Reciprocamente, se $a \in \sqrt{J}$, existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $a^n = j \in J$. Então $0 = a^n + (-j) \in S_{a,J}$.

(2) Se $a \in \sqrt{J}$ segue do item (1) que $0 \in S_{a,J}$. Assim $R_{a,J} = 0$ e portanto $C_{a,J}^\bullet = 0 \rightarrow R \rightarrow 0$, como queríamos.

(3) Sejam $\mathfrak{p} \in W(I, J)$ e $a \in I$. Então $I^n \subseteq J + \mathfrak{p}$ para um inteiro $n \geq 0$. Como $a^n \in I^n \subseteq J + \mathfrak{p}$, existe um $j \in J$ e $c \in \mathfrak{p}$ tal que $a^n = j + c$. Portanto segue que $c = a^n + (-j) \in \mathfrak{p} \cap S_{a,J}$.

Reciprocamente, suponha $\mathfrak{p} \cap S_{a,J} \neq \emptyset$ para qualquer $a \in I$. Correspondendo a cada $a \in I$, seja $c(a)$ um elemento de $\mathfrak{p} \cap S_{a,J}$ (que é da forma $c(a) = a^{n(a)} + j(a)$, para algum natural $n(a)$ e $j(a) \in J$). Então $a^{n(a)} = j(a) + c(a) \in J + \mathfrak{p}$. Como este fato ocorre para qualquer $a \in I$ e I é finitamente gerado, temos que $I^n \subseteq J + \mathfrak{p}$ para algum n . Portanto $\mathfrak{p} \in W(I, J)$.

(4) Seja $E^\bullet$ uma resolução injetiva de um R -módulo M . Então $(E^\bullet)_{a,J}$ é uma R -resolução injetiva de $M_{a,J}$. Assim $H_{I,J}^i(M_{a,J}) = H^i(\Gamma_{I,J}((E^\bullet)_{a,J}))$. Descrevendo cada E^i como uma soma direta de módulos injetivos indecomponíveis $E^i = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)}$, temos que

$$(E^i)_{a,J} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E_{R_{a,J}}(R_{a,J}/\mathfrak{p}R_{a,J})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)}.$$

Portanto, de (3) e o fato que $a \in I$, temos a igualdade

$$\Gamma_{I,J}((E^i)_{a,J}) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in W(I, J)} E_{R_{a,J}}(R_{a,J}/\mathfrak{p}R_{a,J})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)} = 0.$$

Disto segue que $H_{I,J}^i(M_{a,J}) = 0$.

(5) Para provar esta afirmação é suficiente provar que $x \in \Gamma_{I,J}(M)$ se, e somente se, $x \in \text{Ker}(M \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{a_i,J})$. Se $x \in \Gamma_{I,J}(M)$, então existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $a_i^n x = Jx$, para todo $a_i \in I$, uma vez que I é finitamente gerado. Assim, como $(a_i^n - b_i)x = 0$ para algum

$b_i \in J$ e $a_i^n - b_i \in S_{a_i, J}$, segue que $x \in \text{Ker}(M \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{a_i, J})$. Reciprocamente se $x \in \text{Ker}(M \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{a_i, J})$, então para cada i , existe um inteiro $n_i \neq 0$ e $b_i \in J$ tal que $(a_i^{n_i} - b_i)x = 0$. Então podemos concluir que existe um inteiro $n \neq 0$ suficientemente grande tal que $a_i^n \in Jx$ para todo i . Uma vez que $\sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \dots, a_s)}$, concluímos que $I^n x \subseteq \sqrt{(a_1, \dots, a_s)} \subseteq Jx$, isto é, $x \in \Gamma_{I, J}(M)$. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sejam M um R -módulo e $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_s$ uma sequência de elementos de R que geram o ideal I . Então para algum inteiro i , existe um isomorfismo natural*

$$H_{I, J}^i(M) \cong H^i(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes_R M).$$

Demonstração. Pela Proposição 2.2.3 (5) temos que $\Gamma_{I, J}(M) = \text{Ker}(M \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{a_i, J})$ e como $\text{Ker}(M \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{a_i, J}) \cong H^0(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes M)$, segue que

$$H^0(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes M) \cong \Gamma_{I, J}(M).$$

Como $\{H^i(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes -) \mid i \geq 0\}$ é uma sequência de funtores cohomológicos, por [6, Teorema 1.35] é suficiente provar que $H^i(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes E) = 0$ para qualquer $i > 0$ e qualquer R -módulo injetivo E . Para provar isso, uma vez que todo módulo injetivo é soma direta de envoltentes injetivos(ver Apêndice), podemos assumir que $E = E(R/\mathfrak{p})$ onde $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R . Procederemos por indução sobre o comprimento s da sequência de elementos $\mathbf{a}$.

Se $s = 1$ então

$$C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes E = (0 \rightarrow E_R(R/\mathfrak{p}) \rightarrow E_R(R/\mathfrak{p})_{a_1, J} \rightarrow 0),$$

onde $E_R(R/\mathfrak{p})_{a_1, J}$ é isomorfo a $E_R(R/\mathfrak{p})$ se $\mathfrak{p} \notin W((a_1), J)$ e (0) se $\mathfrak{p} \in W((a_1), J)$, pela Proposição 2.1.11. Em ambos os casos, temos que $H^i(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes E) = 0$.

Na sequência, assumamos $s > 1$ e defina $\mathbf{a}' = a_2, \dots, a_s$. Então temos a igualdade $C_{\mathbf{a}, J}^\bullet = C_{a_1, J}^\bullet \otimes_R C_{\mathbf{a}', J}^\bullet$. Portanto existe uma sequência espectral de Grothendieck ([56, Teorema 5.8.3])

$$E_2^{p, q} = H^p(C_{a_1, J}^\bullet \otimes H^q(C_{\mathbf{a}', J}^\bullet \otimes E(R/\mathfrak{p}))) \Rightarrow H^{p+q}(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes E(R/\mathfrak{p})).$$

Como $H^q(C_{\mathbf{a}', J}^\bullet \otimes E(R/\mathfrak{p})) = 0$ para $q > 0$ por hipótese de indução, a sequência espectral se degenera, obtendo assim os isomorfismos

$$H^n(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes E(R/\mathfrak{p})) = H^n(C_{a_1, J}^\bullet \otimes H^0(C_{\mathbf{a}', J}^\bullet \otimes E(R/\mathfrak{p})))$$

$$\begin{aligned}
&= H^n(C_{a_1, J}^\bullet \otimes \Gamma_{\mathbf{a}', J}(E(r/\mathfrak{p}))) \\
&= H^n(0 \rightarrow \Gamma_{\mathbf{a}', J}(E(r/\mathfrak{p})) \rightarrow (\Gamma_{\mathbf{a}', J}(E(r/\mathfrak{p})))_{a_1, J} \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $H^n(C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes E(R/\mathfrak{p})) = 0$ para $n \geq 2$. Note a partir da Proposição 2.1.11 que $\Gamma_{\mathbf{a}', J}(E(R/\mathfrak{p}))$ é igual a $E(R/\mathfrak{p})$ ou (0) . Resta então mostrar que $H^1(C_{a_1, J}^\bullet \otimes E(R/\mathfrak{p})) = 0$, mas isto já foi feito no caso $s = 1$, o que finaliza a prova. $\square$

Corolário 2.2.5. *Sejam $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_s$ uma sequência de elementos de R tal que $I = (\mathbf{a})$ e M um R -módulo J -torção. Então existe um isomorfismo natural $C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes_R M \cong C_{\mathbf{a}}^\bullet \otimes_R M$. Portanto, para qualquer inteiro i temos $H_{I, J}^i(M) \cong H_I^i(M)$.*

Demonstração. Para um elemento $a \in I$, existe um mapa natural $\varphi : M_a \rightarrow M_{a, J}$ definido por $\varphi(z/a^n) = z/a^n$. Primeiramente vamos mostrar, sob as condições do enunciado, que φ é um isomorfismo.

Suponha que $\varphi(z/a^n) = 0 \in M_{a, J}$. Então $(a^m - b)z = 0$ para um inteiro $m \geq 0$ e $b \in J$. Como $a^m - b$ divide $(a^{2^l m} - b^{2^l})$, vemos que $(a^{2^l m} - b^{2^l})z = 0$ para todo inteiro $l \geq 0$. Como M é J -torção temos que $b^{2^l}z \in J^{2^l}z = 0$ para um l suficientemente grande. Então $a^{2^l m}z = 0$ e com isto concluímos que $z/a^n = 0 \in M_a$, o que mostra a injetividade de φ .

Para mostrar a sobrejetividade de φ , seja $w = z/(a^n - b) \in M_{a, J}$, onde $z \in M$ e $b \in J$. Como M é J -torção, existe um inteiro l tal que $b^{2^l}z = 0$. Escrevendo $a^{2^l n} - b^{2^l} = c(a^n - b)$, para $c \in R$, segue que $a^{2^l n}z = c(a^n - b)z \in M$. Portanto $w = z/(a^n - b) = cz/a^{2^l n} \in M_{a, J}$, como queríamos.

Com isto mostramos que $M_a \cong M_{a, J}$, para qualquer $a \in I$. Então segue que $C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes_R M \cong C_{\mathbf{a}}^\bullet \otimes_R M$, para qualquer $a \in I$. Note agora os seguintes isomorfismos de complexos de cadeia:

$$\begin{aligned}
C_{\mathbf{a}, J}^\bullet \otimes_R M &\cong C_{a_1, J}^\bullet \otimes C_{a_2, J}^\bullet \otimes \dots \otimes C_{a_s, J}^\bullet \otimes M \\
&\cong C_{a_1}^\bullet \otimes C_{a_2}^\bullet \otimes \dots \otimes C_{a_s}^\bullet \otimes M \\
&= C_{\mathbf{a}}^\bullet \otimes M.
\end{aligned}$$

Por meio disto e do Teorema 2.2.4, segue que $H_{I, J}^i(M) \cong H_I^i(M)$ para qualquer inteiro i . $\square$

Proposição 2.2.6. *Se $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ é um sistema direto de R -módulos, então para qualquer $i \geq 0$ existe um isomorfismo natural*

$$H_{I, J}^i(\varinjlim_\lambda M_\lambda) \cong \varinjlim_\lambda H_{I, J}^i(M_\lambda).$$

Demonstração. Uma vez que produto tensorial comuta com limite direto (ver Propriedade 5.4.16), temos que $C_{\mathbf{a},J}^\bullet \otimes_R (\varinjlim_\lambda M_\lambda) \cong \varinjlim_\lambda (C_{\mathbf{a},J}^\bullet \otimes_R M_\lambda)$. O resultado segue do fato que limite direto comuta com cohomologias e do Teorema 2.2.4. $\square$

O próximo resultado é uma extensão do “Teorema da base de independência do anel” para cohomologia local ordinária [6, Teorema 4.2.1].

Teorema 2.2.7. *Considere $\varphi : R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis e M' um R' -módulo. Suponha que φ satisfaz $\varphi(J) = JR'$. Então existe um isomorfismo natural $H_{I,J}^i(M') \cong H_{IR',JR'}^i(M')$ como R' -módulos para qualquer inteiro $i \geq 0$.*

Demonstração. Considere $I = (\mathbf{a}) = (a_1, \dots, a_s)$ e $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s)$. Por hipótese temos que

$$\varphi(S_{a_i,J}) = S_{\varphi(a_i),JR'},$$

para algum subconjunto multiplicativo S em R' e para todo $0 \leq i \leq s$. Portanto podemos concluir que

$$H_{I,J}^i(M') \cong H^i(C_{\mathbf{a},J}^\bullet \otimes_R M') \cong H^i(C_{\varphi(\mathbf{a}),JR'}^\bullet \otimes_R' M') \cong H_{IR',JR'}^i(M').$$

$\square$

Pelo comentário abaixo do [50, Teorema 2.7], a hipótese $\varphi(J) = JR'$ não pode ser removida. Além disso na [50, Observação 2.8], se $\varphi : R \rightarrow R'$ é um homomorfismo plano de anéis, ele induz um mapa natural $H_{I,J}^i(M) \otimes_R R' \rightarrow H_{IR',JR'}^i(M \otimes_R R')$, para qualquer $i \geq 0$. Tal mapa entre cohomologias locais definidas por um par de ideais nem sempre é um isomorfismo, diferentemente da cohomologia local usual ([6, Teorema 4.3.2]).

2.3 Relações entre H_I^i e $H_{I,J}^i$

Uma vez definido o conceito de cohomologia local definido por um par de ideais, há de se perguntar quais são as relações existentes com a cohomologia local usual. Nesta seção vamos dar alguns resultados presentes em [50] a fim de analisar relações entre os funtores cohomologia local H_I^i e $H_{I,J}^i$. O Teorema 2.3.2 será de suma importância para a obtenção de

resultados de anulamento e não anulamento das cohomologias locais definidas por um par de ideais.

Definição 2.3.1. *Seja $\widetilde{W}(I, J)$ o conjunto dos ideais $\mathfrak{a}$ de R tal que $I^n \subseteq \mathfrak{a} + J$ para algum inteiro n . Definimos uma ordem parcial em $\widetilde{W}(I, J)$ como $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ se $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, para $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \widetilde{W}(I, J)$.*

Note que se $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ então $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$, implicando que esta relação de ordem em $\widetilde{W}(I, J)$ juntamente aos mapas de inclusão, fazem com que $\{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)\}_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)}$ torne-se um sistema direto de R -módulos. Assim podemos enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.3.2. *Seja M um R -módulo. Então, para qualquer inteiro i , existe um isomorfismo natural*

$$H_{I,J}^i(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que $\Gamma_{I,J}(M) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Seja $x \in \Gamma_{I,J}(M)$. Então existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $I^n \subseteq \text{Ann}(x) + J$. Definindo $\mathfrak{a} = \text{Ann}(x)$ segue que $\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)$ com $x \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.

Reciprocamente seja $x \in \bigcup_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Então existe um ideal $\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)$ com $x \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Assim $I^m \subseteq \mathfrak{a} + J$ e $\mathfrak{a}^n x = 0$ para inteiros $m, n \geq 0$. Como $I^{mn} \subseteq (\mathfrak{a} + J)^n \subseteq \mathfrak{a}^n + J$, temos $I^{mn}x \subseteq Jx$. Portanto $x \in \Gamma_{I,J}(M)$.

Seja agora $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos. Esta sequência induz uma sequência exata longa de cohomologias locais

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(L) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(N) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^1(L) \rightarrow \dots,$$

para cada $\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)$. Uma vez que o funtor limite direto é um funtor exato, obtemos a seguinte sequência exata longa

$$0 \rightarrow \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} H_{\mathfrak{a}}^0(L) \rightarrow \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} H_{\mathfrak{a}}^0(M) \rightarrow \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} H_{\mathfrak{a}}^0(N) \rightarrow \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} H_{\mathfrak{a}}^1(L) \rightarrow \dots.$$

Isto mostra que $\{\varinjlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} H_{\mathfrak{a}}^i(-) \mid i = 0, 1, \dots\}$ é um sistema de funtores derivados à direita. Além disso, para qualquer R -módulo injetivo E e qualquer inteiro $i > 0$, temos que $H_{\mathfrak{a}}^i(E) = 0$ para cada $\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)$. Portanto $\varinjlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} H_{\mathfrak{a}}^i(E) = 0$, para todo $i > 0$. A demonstração se conclui aplicando [6, Teorema 1.3.5]. $\square$

O próximo resultado mostrará que, em um anel local R com ideal maximal $\mathfrak{m}$, o funtor Γ_I é descrito como um limite inverso de funtores $\Gamma_{\mathfrak{m},J}$. Para isto necessitamos do seguinte lema.

Lema 2.3.3. *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Então*

$$V(J) = \bigcap_{I \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}).$$

Demonstração. Se $\mathfrak{p} \in V(J)$ e $I \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, J)$, então $\mathfrak{m}^n \subseteq I + J \subseteq I + \mathfrak{p}$ para um inteiro $n > 0$ e com isto concluímos que $\mathfrak{p} \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)$. Assim $V(J) \subseteq \bigcap_{I \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, I)$. Como $W(\mathfrak{m}, J) \subseteq \widetilde{W}(\mathfrak{m}, J)$ temos que

$$\bigcap_{I \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, I) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}).$$

Com isto, precisamos somente mostrar que $\bigcap_{\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}) \subseteq V(J)$. Suponha então que $\bigcap_{\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}) \not\subseteq V(J)$. Então existe um ideal primo $\mathfrak{q} \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)} W(\mathfrak{m}, \mathfrak{p})$ tal que $\mathfrak{q} \notin V(J)$. Tomando um elemento $x \in J \setminus \mathfrak{q}$ e definindo $r = \dim R/\mathfrak{q}$. Note agora alguns fatos:

(i) Se $\bar{t} \in R/\mathfrak{q}$ então $x\bar{t} \neq \bar{0}$, pois caso contrário $x \in \mathfrak{q}$, fato que esse que não ocorre;

(ii) $xR/\mathfrak{q} \neq R/\mathfrak{q}$ pois caso contrário, pelo lema de Nakayama, $R/\mathfrak{q} = 0$, o que também não ocorre.

Por meio disto podemos concluir que x é um elemento $R/\mathfrak{q}$ -regular e disto segue também que $\dim R/(\mathfrak{q} + (x)) = r - 1$. Então existe $y_1, \dots, y_{r-1} \in \mathfrak{m}$ tal que $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{r-1} \in \mathfrak{m}/(\mathfrak{q} + (x))$ é um sistema de parâmetros de $R/(\mathfrak{q} + (x))$. Assim, $\mathfrak{q} + (x, y_1, \dots, y_{r-1})$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário e $\mathfrak{q} + (y_1, \dots, y_{r-1})$ não.

Desta forma, podemos encontrar um ideal primo $\mathfrak{p}$ com $\mathfrak{q} + (y_1, \dots, y_{r-1}) \subseteq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Por outro lado $J + \mathfrak{p}$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário, uma vez que $\mathfrak{q} + (x, y_1, \dots, y_{r-1}) \subseteq (x) + \mathfrak{p} \subseteq J + \mathfrak{p}$. Portanto $\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)$ e assim devemos ter $\mathfrak{q} \in W(\mathfrak{m}, \mathfrak{p})$. Concluímos então que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário, o que é uma contradição. $\square$

Relembre que definimos uma ordem parcial em $\widetilde{W}(I, J)$ como $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ se $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, para $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \widetilde{W}(I, J)$. Note que esta mesma relação $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ naturalmente implica que $\Gamma_{I,\mathfrak{a}}(M) \supseteq \Gamma_{I,\mathfrak{b}}(M)$ pela Proposição 2.1.4. Isto faz do conjunto $\{\Gamma_{I,\mathfrak{a}}(M)\}_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)}$ um sistema inverso de R -módulos.

Proposição 2.3.4. *Sejam R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e M um R -módulo. Temos então a seguinte igualdade*

$$\Gamma_I(M) = \varprojlim_{J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)} \Gamma_{\mathfrak{m}, J}(M).$$

Demonstração. Vamos mostrar que $\Gamma_I(M) = \bigcap_{J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)} \Gamma_{\mathfrak{m}, J}(M)$. Para isto, seja $x \in \Gamma_I(M)$ e $J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)$. Então existem inteiros $m, n \geq 0$ com $I^m x = (0)$ e $\mathfrak{m}^n \subseteq J + I$. Assim $\mathfrak{m}^{mn} x \subseteq Jx$ e portanto $x \in \Gamma_{\mathfrak{m}, J}(M)$. Segue então que $x \in \bigcap_{J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)} \Gamma_{\mathfrak{m}, J}(M)$.

Reciprocamente, seja $x \in \bigcap_{J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)} \Gamma_{\mathfrak{m}, J}(M)$. Para $J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)$, existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $\mathfrak{m}^n x \subseteq \text{Ann}(x) + J$ e assim $J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, \text{Ann}(x))$. Então temos que $\widetilde{W}(\mathfrak{m}, I) \subseteq \widetilde{W}(\mathfrak{m}, \text{Ann}(x))$. Pelo lema anterior segue que

$$V(\text{Ann}(x)) = \bigcap_{J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, \text{Ann}(x))} W(\mathfrak{m}, J) \subseteq \bigcap_{J \in \widetilde{W}(\mathfrak{m}, I)} W(\mathfrak{m}, J) = V(I).$$

Portanto $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}(x)}$, concluindo assim que $x \in \Gamma_I(M)$, como queríamos.

□

2.4 Resultados de anulamento e não anulamento

Nesta seção vamos mostrar alguns resultados presentes em [50] sobre anulamento e não anulamento da cohomologia local com respeito à um par de ideais. Adotaremos como convenção que $\inf \emptyset = \infty$ para um subconjunto vazio de $\mathbb{N}$ e $\text{depth} 0 = \infty$, $\dim 0 = -1$ para o R -módulo trivial.

Teorema 2.4.1. *Para M um R -módulo finitamente gerado temos a igualdade*

$$\inf\{i \mid H_{I, J}^i(M) \neq 0\} = \inf\{\text{depth} M_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\}.$$

Demonstração. Defina $n = \inf\{\text{depth} M_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\}$ e seja $E^\bullet(M)$ uma resolução injetiva minimal de M . Se $\mathfrak{p} \in W(I, J)$, então $n \leq \text{depth} M_{\mathfrak{p}} = \inf\{i \mid \mu_i(\mathfrak{p}, M) \neq 0\}$. Assim, pela Proposição 2.1.11 temos a igualdade

$$\Gamma_{I, J}(M)(E^i(M)) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in W(I, J)} E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)} = 0, \quad (1)$$

para algum inteiro $i < n$. Note também que $\Gamma_{I,J}(M)(E^n(M)) \neq 0$. Segue então que $H_{I,J}^i(M) = 0$ se $i < n$.

É suficiente mostrar que $H_{I,J}^n(M) \neq 0$. Pela equação (1) o complexo $\Gamma_{I,J}(M)(E^\bullet(M))$ inicia a partir do n -ésimo termo. Assim temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{I,J}^n(M) & \longrightarrow & \Gamma_{I,J}(E^n(M)) & \longrightarrow & \Gamma_{I,J}(E^{n+1}(M)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & E^n(M) & \xrightarrow{d^{n-1}} & E^n(M) & \xrightarrow{d^n} & E^{n+1}(M) \end{array}$$

com linhas exatas. Uma vez que $\text{Ker} d^n = \text{Im} d^{n-1} \subseteq E^n(M)$ é uma extensão essencial (ver Apêndice), segue que $H_{I,J}^n(M) = \Gamma_{I,J}(E^n(M)) \cap \text{Ker} d^n \neq 0$. $\square$

Como um caso especial do teorema anterior, se $J = 0$, obtemos a conhecida igualdade

$$\inf\{i \mid H_I^i(M) \neq 0\} = \text{grade}(I, M) = \inf\{\text{depth} M_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in V(I)\},$$

para um R -módulo finitamente gerado ([6, Teorema 6.2.7]).

Corolário 2.4.2. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local R com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) M é um R -módulo (I, J) -torção.
- (2) $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i > 0$.

Demonstração. A implicação (1) $\Rightarrow$ (2) segue diretamente do Corolário 2.1.13(1). Para provar (2) $\Rightarrow$ (1), denote $N = M/\Gamma_{I,J}(M)$. Suponha por absurdo que $N \neq 0$. Pelo Corolário 2.1.13 (3) e (4) segue que $\Gamma_{I,J}(N) = 0$ e $H_{I,J}^i(N) \cong H_{I,J}^i(M) = 0$ se $i > 0$. Por outro lado, como $\mathfrak{m} \in W(I, J)$ a desigualdade

$$\inf\{\text{depth} N_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\} \leq \text{depth} N_{\mathfrak{m}} = \text{depth} N (< \infty)$$

acontece. Portanto pelo Teorema 2.4.1, $H_{I,J}^i(N) \neq 0$ para algum inteiro $i \leq \text{depth} N$. Isto é uma contradição e obtemos assim $N = 0$, completando a prova. $\square$

Teorema 2.4.3. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local R . Suponha que $J \neq R$. Então $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo $i > \dim M/JM$.*

Demonstração. Procederemos por indução sobre $r = \dim M/JM$. Se $r = -1$ então $M = JM$, implicando pelo lema de Nakayama que $M = 0$. Portanto $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i \geq 0$.

Assuma agora que $r \geq 0$. Existe uma filtração finita $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_s = M$ de M tal que $M_j/M_{j-1} \cong R/\mathfrak{p}_j$ para $\mathfrak{p}_j \in \text{Supp}(M)$ e $j = 1, \dots, s$. Para a sequência exata $0 \rightarrow M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow R/\mathfrak{p}_j \rightarrow 0$ para $j = 1, \dots, s$ temos a seguinte sequência exata

$$H_{I,J}^i(M_{j-1}) \rightarrow H_{I,J}^i(M_j) \rightarrow H_{I,J}^i(R/\mathfrak{p}_j),$$

para todo inteiro i e j com $i \geq 0$ e $1 \leq j \leq s$. Note que

$$\dim R/(\mathfrak{p}_j + J) \leq \dim R/(\text{Ann}(M) + J) = \dim M/JM = r.$$

Então podemos assumir que $M = R/\mathfrak{q}$ com $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(R)$. Mostramos no Teorema 2.2.7 que $H_{I,J}^i(R/\mathfrak{q}) \cong H_{I(R/\mathfrak{q}), J(R/\mathfrak{q})}^i(R/\mathfrak{q})$, assim trocando R por $R/\mathfrak{q}$ podemos assumir que R é um domínio integral e $M = R$.

Suponha, por absurdo, que $H_{I,J}^l(R) \neq 0$ para algum inteiro $l > r$. Note que neste caso $\text{Ass}_R(H_{I,J}^l(R)) \neq \emptyset$. Primeiramente assumamos que $\text{Ass}_R(H_{I,J}^l(R))$ contém um primo $\mathfrak{Q}$ não nulo. Seja então $0 \neq x \in \mathfrak{Q}$. A partir da sequência exata

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{x} R \rightarrow R/(x) \rightarrow 0$$

temos a sequência exata

$$H_{I,J}^{l-1}(R/(x)) \rightarrow H_{I,J}^l(R) \xrightarrow{x} H_{I,J}^l(R).$$

Note que $\dim R/(J + (x)) = r - 1 < l - 1$, assim por hipótese de indução temos $H_{I,J}^{l-1}(R/(x)) = 0$. Isto mostra que o elemento x é $H_{I,J}^l(R)$ -regular. Entretanto o elemento x está no primo associado $\mathfrak{Q}$ de $H_{I,J}^l(R)$, logo é um divisor de zero em $H_{I,J}^l(R)$.

Esta contradição força $\text{Ass}_R(H_{I,J}^l(R)) = \{(0)\}$. Note, pela Proposição 2.1.7 e 2.1.13 (5), que $\text{Ass}_R(H_{I,J}^l(R)) \subseteq W(I, J)$. Assim temos $(0) \in W(I, J)$. Uma vez que o conjunto $W(I, J)$ é fechado com respeito a especialização, segue que $W(I, J) = \text{Spec}(R)$. Neste caso é fácil ver que $H_{I,J}^l(R) = 0$ para todo $l > 0$, o que é uma contradição. $\square$

Corolário 2.4.4. *Sejam R um anel local e M um R -módulo não necessariamente finitamente gerado e $J \neq R$. Então $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo $i > \dim R/J$.*

Demonstração. Uma vez que todo R -módulo é um limite direto de submódulos finitamente gerados, podemos escrever $M = \varinjlim_{\lambda} M_{\lambda}$, onde cada M_{λ} é um R -módulo finitamente gerado. Note que $i > \dim R/J \geq \dim M_{\lambda}/JM_{\lambda}$. Portanto, pela Proposição 2.2.6, temos que $H_{I,J}^i(M) = \varinjlim_{\lambda} H_{I,J}^i(M_{\lambda}) = 0$, para $i > \dim R/J$. $\square$

O teorema de não anulamento de Grothendieck [6, Teorema 6.1.4] diz que a cohomologia local ordinária $H_{\mathfrak{m}}^r(M)$ não se anula, sempre que R é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e M um R -módulo finitamente gerado de dimensão r . O próximo teorema, encontrado em [50, Teorema 4.5], pode ser visto como uma generalização deste resultado atribuído a Grothendieck.

Teorema 2.4.5. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local R com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Suponha que $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Então temos a igualdade*

$$\sup\{i \mid H_{I,J}^i(M) \neq 0\} = \dim M/JM.$$

Demonstração. Em virtude do Teorema 2.4.3, devemos somente mostrar que $H_{I,J}^r(M) \neq 0$ para $r = \dim M/JM$. Como $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário, pela Proposição 2.1.4 (6) e (7) temos que $H_{I,J}^i(M) = H_{\mathfrak{m},J}^i(M)$ para todo inteiro i . Podemos então assumir que $I = \mathfrak{m}$. A sequência exata $0 \rightarrow JM \rightarrow M \rightarrow M/JM \rightarrow 0$ induz a sequência exata

$$H_{\mathfrak{m},J}^r(M) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^r(M/JM) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^{r+1}(JM).$$

Uma vez que $\dim JM/J^2M \leq \dim M/J^2M = \dim M/JM = r$, segue do Teorema 2.4.3 que $H_{\mathfrak{m},J}^{r+1}(JM) = 0$. Além disto, pelo Corolário 2.2.5 e o Teorema de Não anulamento de Grothendieck [6, Teorema 6.1.4], segue que

$$H_{\mathfrak{m},J}^r(M/JM) = H_{\mathfrak{m}}^r(M/JM) \neq 0.$$

Consequentemente, pela sequência exata temos que $H_{\mathfrak{m},J}^r(M) \neq 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Se $J = R$ então a afirmação do Teorema 2.4.3 não necessariamente acontece. Para $\dim M/JM = -1 < 0$ temos $H_{I,J}^0(M) \cong \Gamma_{I,J}(M) = M$.

Considerando agora R um anel não local, temos o seguinte resultado sobre anulamento da cohomologia local com respeito ao par de ideais.

Teorema 2.4.6. *Seja M um R -módulo finitamente gerado. Então*

- (1) $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i > \dim M$.
- (2) $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i > \dim M/JM + 1$.

Demonstração. (1) Segue imediatamente do Teorema 2.3.2 e o Teorema de anulamento de Grothendieck [6, Teorema 6.1.4].

(2) Provaremos por indução em $r = \dim M/JM$. Quando $r = -1$, pelo Teorema de Nakayama diz que $(1 + a)M = 0$ para algum $a \in J$. Assim temos que $Jx = Rx$ para algum $x \in M$, implicando assim que o R -módulo M é (I, J) -torção. O Corolário 2.1.13 mostra que $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i > 0 = r + 1$, como queríamos. Quando $r \geq 0$, podemos provar essa afirmação como feito no Teorema 2.4.3. $\square$

Lema 2.4.7. *Seja n um inteiro não negativo. Suponha que $H_{I,J}^i(R) = 0$ para todo inteiro $i > n$. Então, para um R -módulo M , não necessariamente finitamente gerado, as seguintes afirmações acontecem.*

- (1) $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i > n$.
- (2) $H_{I,J}^n(M) \cong H_{I,J}^n(R) \otimes_R M$.

Demonstração. Primeiramente devemos notar que, em virtude da Proposição 2.2.6, devemos somente mostrar o lema para um R -módulo finitamente gerado M .

(1) Mostramos pelo teorema anterior que $H_{I,J}^i(M) = 0$ se $i > \dim M$. Provaremos essa afirmação por indução sobre i . Para um R -módulo finitamente gerado N e m um inteiro, considere a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow N \rightarrow R^m \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Esta sequência induz a sequência exata

$$H_{I,J}^i(R^m) \rightarrow H_{I,J}^i(M) \rightarrow H_{I,J}^{i+1}(N).$$

Por hipótese de indução temos que $H_{I,J}^{i+1}(N) = 0$. Então devemos ter que $H_{I,J}^i(M) = 0$, como queríamos.

(2) Pela afirmação (1) temos que $H_{I,J}^n(-)$ é um funtor exato à direita sobre a categoria de R -módulos. Assim, considere a apresentação

$$R^m \rightarrow R^p \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Primeiramente, tensorizando esta sequência por $H_{I,J}^n(R)$ obtemos

$$R^m \otimes_R H_{I,J}^n(R) \rightarrow R^p \otimes_R H_{I,J}^n(R) \rightarrow M \otimes_R H_{I,J}^n(R) \rightarrow 0.$$

Por outro lado, aplicando $H_{I,J}^n(-)$ a sequência exata inicial, obtemos

$$H_{I,J}^n(R^m) \rightarrow H_{I,J}^n(R^p) \rightarrow H_{I,J}^n(M) \rightarrow 0.$$

Como $H_{I,J}^n(R^m) \cong H_{I,J}^n(R)^m \cong R^m \otimes_R H_{I,J}^n(R)$ e $H_{I,J}^n(R^p) \cong H_{I,J}^n(R)^p \cong R^p \otimes_R H_{I,J}^n(R)$, comparando as duas sequências obtidas anteriormente, devemos ter que $H_{I,J}^n(M) \cong H_{I,J}^n(R) \otimes_R M$, isto é, $H_{I,J}^n(-)$ é representado como funtor tensor. $\square$

Relembre que o posto aritmético de um ideal I , denotado por $\text{ara}(I)$, é definido como o menor número de elementos de R que são necessários para gerar um ideal que tem o mesmo radical de I [6, Definição 3.3.2]. Um resultado bastante conhecido diz que a cohomologia local $H_I^i(M) = 0$ para todo $i > \text{ara}(I)$ [6, Corolário 3.3.3]. Neste sentido, para a cohomologia local definida por um par de ideais é conhecido o seguinte resultado.

Proposição 2.4.8. *Seja M um R -módulo. Então $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo inteiro $i > \text{ara}(I\bar{R})$, onde $\bar{R} = R/\sqrt{J + \text{Ann}(M)}$.*

Demonstração. Denote $R' = R/\text{Ann}_R(M)$. Então $\bar{R} = R'/\sqrt{JR'}$ e $\text{Ann}_{R'}(M) = 0$. Como, pelo Teorema 2.2.7, temos $H_{I,J}^i(M) \cong H_{IR',JR'}^i(M)$, podemos assumir que $\text{Ann}_R(M) = 0$. Denote agora $s = \text{ara}(I\bar{R})$. Então, podemos encontrar uma sequência $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_s$ de s elementos em R tal que $\sqrt{I\bar{R}} = \sqrt{\mathbf{a}\bar{R}}$. Pela Proposição 2.1.4 temos a igualdade

$$H_{I,J}^i(M) = H_{\mathbf{a}R,J}^i(M) = H^i(C_{\mathbf{a},J}^\bullet \otimes M)$$

para qualquer inteiro i . Como o complexo $C_{\mathbf{a},J}^\bullet$ tem comprimento s , vemos que

$$H^i(C_{\mathbf{a},J}^\bullet \otimes M) = 0$$

para todo inteiro $i > s = \text{ara}(I\bar{R})$, como queríamos demonstrar. $\square$

2.5 O teorema de dualidade local

Nesta seção falaremos um pouco sobre a cohomologia local e o funtor de dualidade local de Matlis. Mais especificamente falaremos sobre o Teorema de Dualidade de Matlis. Vale ressaltar que a dualidade de Matlis estreita uma ponte existente entre módulos finitamente gerados e módulos Artinianos [6, Teorema 10.2.12]. Assim, este funtor faz um papel importante no estudo destas duas vertentes em cohomologia local. Os resultados apresentados aqui estão presentes em [50].

Mais especificamente, considere o funtor de dualidade de Matlis

$$D(-) := \text{Hom}_R(-, E_R(R/\mathfrak{m})).$$

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel completo, local e Cohen-Macaulay de dimensão d . Então pelo Teorema de Dualidade Local existe os isomorfismos

$$D(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(M)) \cong \text{Ext}_R^i(M, K_R),$$

para um R -módulo M finitamente gerado e qualquer $i \geq 0$. Note que K_R é o módulo canônico de R dado por $K_R = D(H_{\mathfrak{m}}^d(R))$. Tal resultado pode ser encontrado em [6, Teorema 11.2.8].

O próximo teorema pode ser visto como uma generalização deste teorema anteriormente citado e a prova é atribuída a Takahashi, Yoshino e Yoshizawa [50, Teorema 5.1]. Para isto, se faz necessário um prévio resultado auxiliar.

Lema 2.5.1. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel completo, local e Cohen Macaulay de dimensão d e J um ideal perfeito de R de grade t . Então a desigualdade $\text{ht} \mathfrak{p} \geq d - t$ acontece para todo $\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)$.*

Demonstração. Se $\mathfrak{p} + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário, então $R/\mathfrak{p} \otimes_R R/J$ tem comprimento finito e assim, pelo Teorema de Interseção implica que $\dim R/\mathfrak{p} \leq \text{pd}_R R/J = t$. Portanto $\text{ht} \mathfrak{p} \geq d - t$.

□

Teorema 2.5.2. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel completo, local e Cohen Macaulay de dimensão d e J um ideal perfeito de R de grade t , isto é, $\text{pd}_R R/J = \text{grade}(J, R) = t$. Então para um R -módulo M finitamente gerado, existe o isomorfismo*

$$D(H_{\mathfrak{m}, J}^{d-i}(M)) \cong \text{Ext}_R^{i-t}(M, K),$$

para todo inteiro i , onde $K = D(H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(R))$.

Demonstração. Denote inicialmente $T^i(-) = D(H_{\mathfrak{m},J}^{d-t-i}(-))$. Devemos mostrar o isomorfismo entre os funtores $T^i(-)$ e $\text{Ext}_R^i(-, K)$, para todo inteiro i .

Note que R/J é um anel Cohen-Macaulay de dimensão $d - t$. Assim, pelo Corolário 2.4.4, temos que $H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(-)$ é um funtor exato à direita sobre a categoria de R -módulos. Note também, pelo Lema 2.4.7 que existe um isomorfismo natural $M \otimes_R H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(R) \cong H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(M)$, para qualquer R -módulo M . Então temos

$$T^0(M) \cong D(M \otimes_R H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(R)) \cong \text{Hom}(M, K).$$

Seja $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos. Então a seguinte sequência exata longa de cohomologias

$$\cdots \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^{d-t-1}(N) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(L) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(M) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(N) \rightarrow 0,$$

induz a sequência exata longa

$$0 \rightarrow T^0(N) \rightarrow T^0(M) \rightarrow T^0(L) \rightarrow T^1(N) \rightarrow \cdots \cdots.$$

Além disto, a prova estará completa se mostrarmos que $T^i(F) = 0$ para qualquer inteiro $i > 0$ e qualquer R -módulo livre F [6, Teorema 1.3.5]. Para isto, é suficiente mostrar $H_{\mathfrak{m},J}^{d-t-i}(R) = 0$ para $i > 0$. Se $\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)$, temos que $\text{depth} R_{\mathfrak{p}} = \text{ht} \mathfrak{p} \geq d - t$ pelo lema anterior. Vemos então pelo Teorema 2.4.1, que $H_{\mathfrak{m},J}^j(R) = 0$ para todo inteiro $j < d - t$, como queríamos.

□

2.6 Temas estudados em cohomologia local

Nesta seção vamos comentar de uma formal geral, temas que são fortemente investigados dentro da cohomologia local definida por um par ideais. Vale ressaltar que o estudo de tais temas se faz necessário no intuito de investigar o comportamento desta nova ferramenta perante os fatos já conhecidos da cohomologia local usual. Além da generalização natural dos fatos obtidos na cohomologia local usual, a cohomologia local definida por um par de ideais

traz consigo um novo caminho de investigação de problemas em aberto da cohomologia local usual.

Uma vez que para a cohomologia local usual existe uma vasta gama de trabalhos, vamos nos preocupar na sequência em citar resultados e autores que vem dando contribuições para a cohomologia local definida por um par de ideais. Tais resultados que citaremos são indispensáveis para este trabalho, bem como para o entendimento de uma forma geral da promissora área de pesquisa que é a cohomologia local definida por um par de ideais.

No início de 2010, Takahashi, Yoshino e Yoshizawa [50] introduziram o conceito de cohomologia local definida por um par de ideais. Desde então temas como: artinianidade, condições de finitude, anulamento e não anulamento, primos associados e coassociados, classes de Serre, anéis de endomorfismo, relações com números de Bass e números de Betti, relações com anéis Cohen-Macaulay, entre outros, vem sendo estudados por diversos autores. Citamos [24], [32], [2], [3], [33], [44], [22], [23], [29], [46], [48], [54], [19], [38], [39] entre outros.

Como uma estreita ponte entre questões geométricas e algébricas, o tema artinianidade se faz presente. Sobre a artinianidade da ordinária cohomologia local, Huneke em [24] pergunta quando $H_I^i(M)$ é Artiniano para algum inteiro i . Foi mostrado que tal questão nem sempre é verdade (veja [35] e [21]). Neste sentido alguns resultados vem sendo obtidos, tais como, (1) se $\dim M = d$, $H_I^d(M)$ é Artiniano para qualquer R -módulo M finitamente gerado; (2) a caracterização do menor inteiro s tal que $H_I^s(M)$ é não Artiniano; (3) $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ é sempre Artiniano quando $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e M finitamente gerado.

Para cohomologia local definida por um par de ideais, Chu e Wang [10] generalizam (1) e (2) e deram outros resultados neste contexto. Mais especificamente foram mostrados os seguintes resultados:

Teorema 2.6.1 (Chu e Wang). *Assuma que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e I, J ideais de R . Seja M um R -módulo finitamente gerado com $\dim M = d$. Então $H_{I,J}^d(M)$ é Artiniano.*

Proposição 2.6.2 (Chu e Wang). *Assuma que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e I, J ideais de R . Então existe a igualdade*

$$\inf\{i \mid H_{I,J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\} = \inf\{i \mid H_{I,J}^i(M) \not\subseteq H_{\mathfrak{m}}^i(M)\},$$

para qualquer R -módulo M finitamente gerado.

Vale ressaltar que se $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário, $d = \dim M/JM = \sup\{i \mid H_{I,J}^i(M) \neq 0\}$, devemos ter que $H_{I,J}^d(M)$ nem sempre é Artiniano (veja observação após [10, Teorema 2.1] ou [50, Observação 5.3]).

Por meio desta observação, foi possível se questionar se para a cohomologia local definida para um par de ideais, a questão (3) também é verdadeira. Neste sentido, Tehranian e Talemi [51, Teorema 2.10] mostraram uma “patologia” que ocorre em nível de cohomologias locais definidas por um par de ideais. Tal resultado segue a seguir.

Teorema 2.6.3 (Tehranian e Talemi). *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R -módulo finitamente gerado. Se J é um ideal não nilpotente, então $H_{\mathfrak{m},J}^i(M)$ é não artiniano para algum $i \in \mathbb{N}_0$.*

Note que o fato do ideal J ser não nilpotente, reflete simplesmente de que não podemos reduzir a cohomologia local definida por um par de ideais para a cohomologia local usual. Tais resultados prévios serão de suma importância para o decorrer do trabalho.

Com respeito ao tema finitude da cohomologia local definida por um par de ideais, citamos alguns resultados presentes em [40] importantes neste sentido.

Teorema 2.6.4 (Payrovi e Parsa). *Seja R um anel local e M um R -módulo finitamente gerado. Suponha que exista um inteiro não negativo t tal que $H_{I,J}^i(M)$ é finitamente gerado para todo $i > t$. Então $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo $i > t$.*

Uma consequência imediata deste fato segue abaixo.

Corolário 2.6.5 (Payrovi e Parsa). *Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local, $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário e M um R -módulo finitamente gerado com $\dim M/JM = d > 0$, então $H_{I,J}^d(M)$ é não finitamente gerado.*

Um outro resultado importante que podemos citar é o seguinte.

Teorema 2.6.6 (Payrovi e Parsa). *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário e M um R -módulo finitamente gerado não nulo com $\dim M/JM = d > 0$. Então*

$$H_{I,J}^d(M)/JH_{I,J}^d(M)$$

é não finitamente gerado.

Sobre a investigação do anel de endomorfismo da cohomologia local, autores como P. Schenzel, M. Hellus e K. Khashyarmanesh fizeram diversos avanços significativos. Citamos [22], [46], [44], [29], [23] como os principais trabalhos e abaixo, alguns resultados mais expressivos neste sentido.

Considere $\text{depth}(I, M)$ como sendo o menor inteiro tal que a cohomologia local definida por um ideal I com respeito ao módulo M é não nula. Relembre que

$$D(-) := \text{Hom}_R(-, E_R(R/\mathfrak{m}))$$

é o funtor dualidade de Matlis já considerado anteriormente.

Teorema 2.6.7. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo de dimensão n e I um ideal de R . Para um R -módulo M , existe um isomorfismo natural*

$$\text{Hom}_R(H_I^t(M), H_I^t(M)) \cong \text{Hom}_R(D(H_I^t(M)), D(H_I^t(M))),$$

onde $\text{depth}(I, M) = t$.

Este resultado prévio mostra a relação entre o anel de endomorfismos $\text{End}_R(H_I^t(M))$ e $\text{End}_R(D(H_I^t(M)))$ [46, Teorema 1.1]. O próximo resultado, presente em [34, Lema 2.4] é uma generalização do famoso teorema de dualidade local de Grothendieck. Este resultado generaliza [50, Teorema 5.1] e [26, Teorema 6.4].

Teorema 2.6.8. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e I, J dois ideais de R . Suponha que $H_I^i(M) = 0$ para todo $i \neq t = \text{depth}(I, M)$. Então para qualquer R -módulo M e $i \in \mathbb{Z}$, valem os isomorfismos:*

$$(a) \quad \text{Tor}_{t-i}^R(M, H_I^t(R)) \cong H_I^i(M).$$

$$(b) \quad D(H_I^i(M)) \cong \text{Ext}_R^{t-i}(M, D(H_I^t(R))).$$

Voltando nossos olhos para a cohomologia local definida por um par de ideais, não era conhecido qualquer contribuição com respeito ao comportamento do anel de endomorfismos. Tais resultados foram inicialmente estudados por [53] para anéis, e paralelamente, pelo autor deste trabalho e seu orientador de doutorado para módulos. Além disto, foi explorado e

analisado para que condições o dual da cohomologia local definida por um par de ideais é um módulo Cohen-Macaulay.

Os resultados obtidos neste sentido estão presentes em [28] e serão mostrados no próximo capítulo.

Sobre o anel de endomorfismo

Neste capítulo iremos mostrar os resultados envolvendo a investigação do anel de endomorfismo da cohomologia local definida por um par de ideais. Tal estudo generaliza alguns resultados presentes em [53], [34], [22], [46], [44], [29] e [23].

Para iniciar, sabemos pelo [6, Teorema 6.2.7] que, para um ideal $\mathfrak{a}$ de R (não necessariamente um anel local) e M um R -módulo finitamente gerado com $\mathfrak{a}M \neq M$, o $\text{depth}(\mathfrak{a}, M)$ é o menor inteiro i tal que $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \neq 0$. Tal definição traz uma motivação natural, presente em [1, Proposição 2.3], quando é vista no sentido da cohomologia local definida por um par de ideais.

Definição 3.0.9. *Sejam I, J dois ideais de R e M um R -módulo. Definimos o depth de (I, J) sobre M por*

$$\text{depth}(I, J, M) = \inf\{i \in \mathbb{N}_0 \mid H_{I,J}^i(M) \neq 0\}$$

se este ínfimo existe e ∞ caso contrário.

Se $J \neq (R, \mathfrak{m})$, pelo Teorema 2.4.3 e a definição prévia temos que se $H_{I,J}^i(M) \neq 0$ então

$$\text{depth}(I, J, M) \leq i \leq \dim M/JM.$$

Além disto, no Teorema 2.4.1, para qualquer R -módulo finitamente gerado, foi mostrado que

$$\text{depth}(I, J, M) = \inf\{\text{depth}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\}.$$

Antes do próximo resultado e como já dito na Seção 2.5, lembre que para $(R, \mathfrak{m}, k)$ sendo um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d com módulo canônico K_R , é bem conhecido a

existência dos isomorfismos

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) = D(\text{Ext}_R^{d-i}(M, K_R))$$

para $0 \leq i \leq d$, onde $D(-) = \text{Hom}_R(-, E_R(k))$ e $H_{\mathfrak{m}}^d(R) \cong D(K_R)$. Este resultado é chamado de Teorema de Dualidade Local. Existem generalizações deste resultados em [50, Teorema 5.1] (ver também Teorema 2.5.2) e [26, Teorema 6.4].

Com estes comentários podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 3.0.10 (Dualidade Local Generalizada). *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e I, J ideais de R . Assuma que $H_{I,J}^i(R) = 0$ para todo $i \neq t = \text{depth}(I, J, R)$. Então para qualquer R -módulo M e $i \in \mathbb{Z}$, valem os isomorfismos:*

$$(a) \text{ Tor}_{t-i}^R(M, H_{I,J}^t(R)) \cong H_{I,J}^i(M).$$

$$(b) D(H_{I,J}^i(M)) \cong \text{Ext}_R^{t-i}(M, D(H_{I,J}^t(R))).$$

Demonstração. Se (a) é verdadeiro, segue pelo Lema 3.0.15 que

$$D(H_{I,J}^i(M)) \cong D(\text{Tor}_{t-i}^R(M, H_{I,J}^t(R))) \cong \text{Ext}_R^{t-i}(M, D(H_{I,J}^t(R))),$$

e nós obtemos (b).

Assim é suficiente provar (a). Para fazer isto, usaremos o [6, Teorema 1.3.5]. Considere as famílias de funtores $\{H_{I,J}^i(-) \mid i \geq 0\}$ e $\{\text{Tor}_{t-i}^R(-, H_{I,J}^t(R)) \mid i \geq 0\}$. Gostaríamos de mostrar o isomorfismo destas duas famílias. Primeiramente, se $i = t$ segue que

$$\text{Tor}_0^R(N, H_{I,J}^t(R)) \cong H_{I,J}^t(N),$$

uma vez que $H_{I,J}^t(N) \cong H_{I,J}^t(R) \otimes_R N$ (pelo Lema 2.4.7). Como ambas as famílias são uma sequência de funtores cohomológicos, para provar o teorema devemos somente mostrar que para um módulo projetivo M ,

$$H_{I,J}^i(M) = 0 = \text{Tor}_{t-i}^R(M, H_{I,J}^t(R))$$

para todo $i \neq t$.

Se $M = R$, a afirmação é verdadeira. Como qualquer R -módulo projetivo sobre um anel local é isomorfo a uma soma direta de R e os funtores $\text{Tor}_{t-i}^R(-, H_{I,J}^t(R))$ e $H_{I,J}^i(-)$ comutam com somas diretas, concluímos a afirmação. $\square$

Observação 3.0.11. Se $J = 0$, este resultado generaliza [34, Lema 2.4], Teorema 2.5.2 e [26, Teorema 6.4].

Para o próximo resultado, considere a seguir a definição de módulos (I, J) -Cohen-Macaulay introduzido em [1, Definição 3.5].

Definição 3.0.12. Quando $\text{depth}(\mathfrak{m}, J, M) = \dim M/JM$, o R -módulo $M \neq 0$ é chamado de $(\mathfrak{m}, J)$ -**Cohen-Macaulay** (ou se $M = 0$). Se R sobre ele mesmo é um R -módulo $(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay dizemos que R é um anel $(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay.

Corolário 3.0.13. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado. Suponha que R é (I, J) -Cohen-Macaulay com $I + J$ um ideal $\mathfrak{m}$ -primário e $\dim R/J = t$. Então para qualquer R -módulo M e $i \in \mathbb{Z}$, temos:

- (a) $\text{Tor}_{t-i}^R(M, H_{I,J}^t(R)) \cong H_{I,J}^i(M)$.
- (b) $D(H_{I,J}^i(M)) \cong \text{Ext}_R^{t-i}(M, D(H_{I,J}^t(R)))$.

Demonstração. A prova segue pelo [1, Corolário 3.13] e o teorema anterior.

□

O próximo resultado mostra a relação entre o completamento J -ádico de $H_{\mathfrak{m},J}^n(R)$ e a dualidade de Matlis de certos módulos. Este resultado generaliza [50, Teorema 5.4].

Corolário 3.0.14. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e I, J ideais de R tal que $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Assuma que $H_{I,J}^i(R) = 0$ para todo $i \neq t = \text{depth}(I, J, R)$. Então existe um isomorfismo natural

$$\varprojlim \frac{H_{I,J}^t(R)}{J^s H_{I,J}^t(R)} \cong D(\Gamma_J(D(H_{\mathfrak{m}}^t(R)))).$$

Em particular, se R é um anel local Cohen-Macaulay completo de dimensão n obtemos que

$$\varprojlim \frac{H_{I,J}^t(R)}{J^s H_{I,J}^t(R)} \cong D(\Gamma_J(K_R)),$$

onde K_R é o módulo canônico de R .

Demonstração. Primeiramente, como $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário temos que $H_{I,J}^t(R) \cong H_{\mathfrak{m},J}^t(R)$ (Propriedade 2.1.4 (6) e (7)). Podemos agora considerar os seguintes isomorfismos

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{m},J}^t(R)/J^s H_{\mathfrak{m},J}^t(R) &\cong H_{\mathfrak{m},J}^t(R) \otimes_R R/J^s \\ &\cong H_{\mathfrak{m},J}^t(R/J^s) && \text{(pelo Lema 2.4.7)} \\ &\cong H_{\mathfrak{m}}^t(R/J^s) && \text{(pelo Corolário 2.2.5)} \\ &\cong D(\text{Ext}^0(R/J^s, D(H_{\mathfrak{m}}^t(R)))) && \text{(pelo Teorema 3.0.10).} \end{aligned}$$

aplicando o limite inverso obtemos

$$\varprojlim \frac{H_{\mathfrak{m},J}^t(R)}{J^s H_{\mathfrak{m},J}^t(R)} \cong \varprojlim D(\text{Ext}^0(R/J^s, D(H_{\mathfrak{m}}^t(R)))).$$

Uma vez que

$$\varprojlim D(\text{Ext}^0(R/J^s, D(H_{\mathfrak{m}}^t(R)))) \cong D(\Gamma_J(D(H_{\mathfrak{m}}^t(R)))),$$

finalizamos a prova combinando os isomorfismos.

□

O leitor pode ver em [50, Observação 5.5] que o isomorfismo prévio nem sempre é verdadeiro.

3.0.1 O início da investigação

Nesta seção vamos iniciar a investigação sobre o anel de endomorfismo de $H_{I,J}^t(M)$, denotado por $\text{End}_R(H_{I,J}^t(M))$. Vamos dar uma caracterização alternativa do menor inteiro tal que a cohomologia local definida por um par de ideais é não nula. Também vamos mostrar a relação entre $\text{End}_R(H_{I,J}^t(M))$ e $\text{End}_R(D(H_{I,J}^t(M)))$ e condições necessárias e suficientes para que o homomorfismo

$$R \rightarrow \text{Hom}_R(D(H_{I,J}^t(M)), D(H_{I,J}^t(M)))$$

seja um isomorfismo. Primeiramente, alguns resultados preliminares são necessários.

Lema 3.0.15. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M, N dois R -módulos. Existem os seguintes isomorfismos para todo $i \in \mathbb{Z}$:*

$$(a) \operatorname{Ext}_R^i(N, D(M)) \cong D(\operatorname{Tor}_i^R(N, M)).$$

(b) Se N é finitamente gerado, então

$$D(\operatorname{Ext}_R^i(N, M)) \cong \operatorname{Tor}_i^R(N, D(M)).$$

Demonstração. Veja [49, Teorema 3.4.14]. □

Lema 3.0.16. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e I, J dois ideais de R . Considere M, N dois R -módulos. Suponha que $\operatorname{Supp}_R M \subseteq W(I, J)$. Então existe os isomorfismos naturais:*

$$(a) \operatorname{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(N)) \cong \operatorname{Hom}_R(M, N).$$

$$(b) M \otimes \operatorname{Hom}_R(\Gamma_{I,J}(N), E_R(k)) \cong M \otimes \operatorname{Hom}_R(N, E_R(k)).$$

Demonstração. Primeiramente, $\Gamma_{I,J}(N) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I,J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ (veja prova do Teorema 2.3.2). Pela hipótese e a Proposição 2.1.7, M é (I, J) -torção, então novamente pelo Teorema 2.3.2 M é $\mathfrak{a}$ -torção, para todo $\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)$. Logo o resultado é verdadeiro. Para a afirmação (b), considere inicialmente que M é finitamente gerado.

Pelo [6, Lema 10.2.16], temos o seguinte isomorfismo

$$M \otimes_R \operatorname{Hom}_R(\Gamma_{I,J}(N), E_R(k)) \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(N)), E_R(k)).$$

Então, pelo item (a) nós concluímos a demonstração.

Agora, suponha que M não é finitamente gerado. Então $M \cong \varinjlim M_\alpha$, com M_α R -módulos finitamente gerados. A prova de (b) está finalizada usando básicas propriedades envolvendo comutatividade do limite direto com Hom e produto tensorial. □

Nosso próximo resultado generaliza [46, Teorema 2.3], [34, Proposição 2.1] e [53, Teorema 2.4 (a)].

Teorema 3.0.17. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e I, J ideais de R . Considere M e N dois R -módulos tais que $\operatorname{depth}(I, J, N) = t$ e $\operatorname{Supp}_R M \subseteq W(I, J)$. Então:*

$$(a) \operatorname{Ext}_R^t(M, N) \cong \operatorname{Hom}_R(M, H_{I,J}^t(N)) \text{ e } \operatorname{Ext}_R^i(M, N) = 0 \text{ para todo } i < t.$$

(b) $\text{Tor}_t^R(M, D(N)) \cong M \otimes_R D(H_{I,J}^t(N))$ e $\text{Tor}_i^R(M, D(N)) = 0$ para todo $i < t$.

Demonstração. Seja $E_R^\bullet$ uma resolução injetiva minimal do R -módulo N . Podemos descrever cada E_R^i como uma soma direta de módulos injetivos indecomponíveis

$$E_R^i = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, N)},$$

onde $E_R(R/\mathfrak{p})$ denota o envolvente injetivo de $R/\mathfrak{p}$, e $\mu_i(\mathfrak{p}, N)$ é o i -ésimo número de Bass de N com respeito a $\mathfrak{p}$.

Como $\text{depth}(I, J, N) = \inf\{\text{depth}(N_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\}$ e $\text{depth}(N_{\mathfrak{p}}) = \inf\{i \mid \mu_i(\mathfrak{p}, N) \neq 0\}$, segue que $\mu_i(\mathfrak{p}, N) = 0$ para todo $i < t$ e $\mathfrak{p} \in W(I, J)$. Assim podemos concluir que $\text{Hom}_R(M, E_R^i) = 0$ para todo $i < t$. Uma vez que $\text{Supp}_R M \subseteq W(I, J)$, pelo Lema 3.0.16 segue o isomorfismo de complexos

$$\text{Hom}_R(M, E_R^\bullet) \cong \text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet)).$$

Pela sequência exata $0 \rightarrow H_{I,J}^t(N) \rightarrow \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet)^t \rightarrow \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet)^{t+1}$ e o isomorfismo anterior de complexo, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}_R(M, H_{I,J}^t(N)) & \rightarrow & \text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet)^t) & \rightarrow & \text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet)^{t+1}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Ext}_R^t(M, N) & \rightarrow & \text{Hom}_R(M, E_R^\bullet)^t & \rightarrow & \text{Hom}_R(M, E_R^\bullet)^{t+1} \end{array}$$

com linhas exatas. Pelo Lema 3.0.16, as duas últimas setas verticais são isomorfismos, portanto a primeira seta vertical é também um isomorfismo. Isto completa a prova de (a).

Para a afirmação (b), aplicando o funtor de dualidade de Matlis $D(-)$ na sequência exata prévia obtemos

$$D(\Gamma_{I,J}(E_R^{t+1})) \rightarrow D(\Gamma_{I,J}(E_R^t)) \rightarrow D(H_{I,J}^t(N)) \rightarrow 0.$$

Como $D(\Gamma_{I,J}(E_R^\bullet))$ é um complexo de R -módulos planos, ele é o início de uma resolução plana de $D(H_{I,J}^t(N))$. Além disto, $D(E_R^\bullet) \xrightarrow{\cong} E$ é uma resolução plana de $E := E(k)$. Usando o fato que $M \cong \varinjlim M_\alpha$ com M_α R -módulos finitamente gerados, pelo Lema 3.0.16 obtemos os isomorfismos de complexos

$$M \otimes_R D(E_R^\bullet) \cong M \otimes_R D(\Gamma_{I,J}(E_R^\bullet)) \cong \varinjlim \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M_\alpha, \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet)), E).$$

Uma vez que $\text{Hom}_R(M, E_R^i) = 0$ para todo $i < t$, segue que $H_i(M \otimes_R D(E_R^\bullet)) = 0$ para todo $i < t$. Isto mostra que $\text{Tor}_i^R(M, D(N)) = 0$ para todo $i < t$.

Portanto, pelo diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes_R D(E_R^{t+1}) & \rightarrow & M \otimes_R D(E_R^t) & \rightarrow & \text{Tor}_t^R(M, D(N)) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M \otimes_R D(\Gamma_{I,J}(E_R^{t+1})) & \rightarrow & M \otimes_R D(\Gamma_{I,J}(E_R^t)) & \rightarrow & M \otimes_R D(H_{I,J}^t(N)) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

finaliza a prova de (b) uma vez que as duas últimas setas verticais são isomorfismos. Assim $\text{Tor}_t^R(M, D(N)) \cong M \otimes_R D(H_{I,J}^t(N))$. $\square$

Como uma consequência do resultado anterior, vamos mostrar uma caracterização do depth de M definido por um par de ideais.

Corolário 3.0.18. *Seja N um R -módulo finitamente gerado.*

$$\text{depth}(I, J, N) = \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid \text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}, D(N)) \neq 0 \text{ e } \mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)\}.$$

Demonstração. Primeiramente note que pela [1, Proposição 2.3],

$$\text{depth}(I, J, N) = \inf\{\text{depth}(\mathfrak{a}, N) \mid \mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)\}.$$

Então, aplicando a versão do Teorema 3.0.17 ou [34, Corolário 2.3], temos que

$$\text{depth}(\mathfrak{a}, N) = \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid \text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}, D(N)) \neq 0\}.$$

Isto finaliza a demonstração. $\square$

O próximo resultado mostra a estreita relação entre $\text{End}_R(H_{I,J}^t(M))$ e $\text{End}_R(D(H_{I,J}^t(M)))$. Este resultado e o próximo corolário são uma generalização de [46, Teorema 1.1] e [34, Lema 3.2].

Teorema 3.0.19. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo de dimensão n . Para um R -módulo finitamente gerado M , existe um isomorfismo natural*

$$\text{Hom}_R(H_{I,J}^t(M), H_{I,J}^t(M)) \cong \text{Hom}_R(D(H_{I,J}^t(M)), D(H_{I,J}^t(M))),$$

onde $\text{depth}(I, J, M) = t$.

Demonstração. Primeiramente, pelo Lema 3.0.15 segue o isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_R(D(H_{I,J}^t(M)), D(H_{I,J}^t(M))) \cong D(H_{I,J}^t(M) \otimes_R D(H_{I,J}^t(M))).$$

Como $H_{I,J}^t(M)$ é (I, J) -torção (Corolário 2.1.13,(5) e Proposição 2.1.7), podemos aplicar o Teorema 3.0.17 (b) e obter que

$$\begin{aligned} D(H_{I,J}^t(M) \otimes_R D(H_{I,J}^t(M))) &\cong D(\mathrm{Tor}_t^R(H_{I,J}^t(M), D(M))) \\ &\cong \mathrm{Ext}_R^t(H_{I,J}^t(M), D(D(M))). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Dualidade de Matlis [6, Teorema 10.2.12], segue que $D(D(M)) \cong M$. Aplicando novamente o Teorema 3.0.17 (a) temos que

$$\mathrm{Ext}_R^t(H_{I,J}^t(M), D(D(M))) \cong \mathrm{Hom}_R(H_{I,J}^t(M), H_{I,J}^t(M))$$

e isto completa a demonstração. □

Corolário 3.0.20. *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 3.0.19. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(a) *O homorfismo natural*

$$R \rightarrow \mathrm{Hom}_R(H_{I,J}^t(M), H_{I,J}^t(M))$$

é um isomorfismo.

(b) *O homomorfismo natural*

$$R \rightarrow \mathrm{Hom}_R(D(H_{I,J}^t(M)), D(H_{I,J}^t(M)))$$

é um isomorfismo.

(c) *O homomorfismo natural*

$$H_{I,J}^t(M) \otimes_R D(H_{I,J}^t(M)) \rightarrow E$$

é um isomorfismo, onde $E := E(R/\mathfrak{m})$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, a dualidade de Matlis e o Lema 3.0.15 (a) seguem as afirmações. □

3.0.2 O complexo truncado para um par de ideais

Relembre que o complexo truncado foi introduzido em [22, Seção 2] quando $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local Gorenstein de dimensão d e em uma diferente vertente em [43] e [34]. Vamos generalizar este conceito usando a cohomologia local definida por um par de ideais. Esta nova definição será a chave da prova de um dos principais resultados desta seção (Teorema 3.0.23).

Seja então $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de dimensão d e $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado. Considere I, J dois ideais de R tal que $\text{depth}(I, J, M) = t$ e $\dim M/JM = n$.

Seja $E_R^\bullet(M)$ uma resolução injetiva minimal do R -módulo M . É conhecido que podemos descrever cada $E_R^i(M)$ como uma soma direta de módulos injetivos indecomponíveis

$$E_R^i(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)},$$

onde $E_R(R/\mathfrak{p})$ denota o envolvente injetivo de $R/\mathfrak{p}$ e $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ é o i -ésimo número de Bass de M com respeito a $\mathfrak{p}$. Pela Proposição 2.1.11 segue que

$$\Gamma_{I,J}(E_R^i(M)) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in W(I,J)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)}.$$

Como $\text{depth}(I, J, M) = \inf\{\text{depth}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\}$ e $\text{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = \inf\{i \mid \mu_i(\mathfrak{p}, M) \neq 0\}$, obtemos que $\mu_i(\mathfrak{p}, M) = 0$ para todo $i < t$ e $\mathfrak{p} \in W(I, J)$. Então para todo $i < t$, temos que $\Gamma_{I,J}(E_R^i(M)) = 0$.

Portanto $H_{I,J}^t(M)$ é isomorfo ao núcleo de

$$\Gamma_{I,J}(E_R^t(M)) \rightarrow \Gamma_{I,J}(E_R^{t+1}(M))$$

e assim, existe uma imersão de complexos de R -módulos

$$H_{I,J}^t(M)[-t] \rightarrow \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet(M)).$$

Isto nos motiva a considerar a seguinte definição.

Definição 3.0.21. Chamamos de **complexo truncado com respeito ao par de ideais** (I, J) o conúcleo da imersão anterior e o denotamos por $C_M^\bullet(I, J)$. Podemos então considerar a sequência exata curta de complexos de R -módulos

$$0 \rightarrow H_{I,J}^t(M)[-t] \rightarrow \Gamma_{I,J}(E_R^\bullet(M)) \rightarrow C_M^\bullet(I, J) \rightarrow 0.$$

Note que por esta definição, $H^i(C_M^\bullet(I, J)) = 0$ para todo $i < t$. Além disto, se $i > n$ (pelo Teorema 2.4.3 com $J \neq R$) e $i > \dim R/J$ temos também que $H^i(C_M^\bullet(I, J)) = 0$. Esta definição também generaliza [53, Definição 2.1].

Lema 3.0.22. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo de dimensão n . Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\text{depth}(I, J, M) = t$ e $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo $i \neq t$. Então para todo inteiro $i \neq t$ fixado:*

(a) *Os seguintes isomorfismos são válidos:*

$$(i) \text{Ext}_R^{i-t}(H_{I,J}^t(M), H_{I,J}^t(M)) \cong \text{Ext}_R^i(H_{I,J}^t(M), M).$$

$$(ii) \text{Tor}_{i-t}^R(H_{I,J}^t(M), D(H_{I,J}^t(M))) \cong \text{Tor}_i^R(H_{I,J}^t(M), D(M)).$$

(b) *As seguintes condições são equivalentes:*

$$(i) \text{Ext}_R^{i-t}(H_{I,J}^t(M), H_{I,J}^t(M)) = 0.$$

$$(ii) \text{Ext}_R^{i-t}(D(H_{I,J}^t(M)), D(H_{I,J}^t(M))) = 0.$$

$$(iii) \text{Tor}_{i-t}^R(H_{I,J}^t(M), D(H_{I,J}^t(M))) = 0.$$

Demonstração. Seja $E_R^\bullet(M)$ um resolução injetiva minimal do R -módulo M . Note que o complexo $\Gamma_{I,J}(E_R^\bullet(M))$ é uma resolução injetiva minimal de $H_{I,J}^t(M)[-t]$, uma vez que $H_{I,J}^i(M) = 0$ para todo $i \neq t$. Pelo Corolário 2.1.13 e Proposição 2.1.7 temos que

$$\text{Supp}_R(H_{I,J}^t(M)) \subseteq W(I, J).$$

Assim, pelo Lema 3.0.16 temos o isomorfismo

$$\text{Ext}_R^{i-t}(H_{I,J}^t(M), H_{I,J}^t(M)) \cong \text{Ext}_R^i(H_{I,J}^t(M), M)$$

para todo inteiro i . Então obtemos a primeira parte da afirmação (a). Para a segunda afirmação, primeiramente note que os complexos $D(E_R^\bullet(M))$ e $D(\Gamma_{I,J}(E_R^\bullet(M)))$ são resoluções planas de $D(M)$ e $D(H_{I,J}^t(M)[t])$ respectivamente.

Como $\text{Supp}_R(H_{I,J}^t(M)) \subseteq W(I, J)$ e pelo Lema 3.0.16, temos o isomorfismo

$$H_{I,J}^t(M) \otimes_R D(E_R^\bullet(M)) \cong H_{I,J}^t(M) \otimes_R D(\Gamma_{I,J}(E_R^\bullet(M))),$$

que induz para todo inteiro i , o isomorfismo em homologias

$$\mathrm{Tor}_{i-t}^R(H_{I,J}^t(M), D(H_{I,J}^t(M))) \cong \mathrm{Tor}_i^R(H_{I,J}^t(M), D(M)).$$

Isto finaliza a prova de (a).

Para (b), pelo Lema 3.0.15 existem os isomorfismos

$$\mathrm{Ext}_R^{i-t}(D(H_{I,J}^t(M)), D(H_{I,J}^t(M))) \cong D(\mathrm{Tor}_{i-t}^R(D(H_{I,J}^t(M)), H_{I,J}^t(M))) \quad (1) \text{ e}$$

$$D(\mathrm{Tor}_i^R(H_{I,J}^t(M), D(M))) \cong \mathrm{Ext}_R^i(H_{I,J}^t(M), M) \quad (2),$$

para todo inteiro i . Portanto, por (a) e os isomorfismos (1) e (2), obtemos os anulamentos presentes na afirmação (b). $\square$

Nosso próximo resultado generaliza [34, Teorema 3.4] e é o principal resultado desta seção.

Teorema 3.0.23. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local d -dimensional completo Cohen-Macaulay. Se $\mathrm{depth}(I, J, R) = t$ e $H_{I,J}^i(R) = 0$ para todo $i \neq t$, então*

(a) *O homomorfismo natural*

$$R \rightarrow \mathrm{Hom}_R(H_{I,J}^t(K_R), H_{I,J}^t(K_R))$$

é um isomorfismo e para todo $i \neq t$

$$\mathrm{Ext}_R^{i-t}(H_{I,J}^t(K_R), H_{I,J}^t(K_R)) = 0.$$

(b) *O homomorfismo natural*

$$R \rightarrow \mathrm{Hom}_R(D(H_{I,J}^t(K_R)), D(H_{I,J}^t(K_R)))$$

é um isomorfismo e para todo $i \neq t$

$$\mathrm{Ext}_R^{i-t}(D(H_{I,J}^t(K_R)), D(H_{I,J}^t(K_R))) = 0.$$

(c) *O homomorfismo natural*

$$H_{I,J}^t(K_R) \otimes_R D(H_{I,J}^t(K_R)) \rightarrow E$$

é um isomorfismo e para todo $i \neq c$

$$\mathrm{Tor}_{i-t}^R(H_{I,J}^t(K_R), D(H_{I,J}^t(K_R))) = 0.$$

Demonstração. Note que é suficiente mostrar a afirmação (a) pelo Lema 3.0.22, Teorema 3.0.19 e Corolário 3.0.20. Pela [1, Proposição 2.3], temos que

$$\text{depth}(I, J, N) = \inf\{\text{depth}(\mathfrak{a}, N) \mid \mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)\}.$$

Uma vez que o módulo canônico K_R de R existe e

$$\text{depth}(\mathfrak{a}, K_R) = \dim_R(K_R) - \dim_R(K_R/\mathfrak{a}K_R),$$

para todo $\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)$, segue que $\text{depth}(\mathfrak{a}, K_R) = \text{depth}(\mathfrak{a}, R)$ e assim, $t = \text{depth}(I, J, K_R)$.

Seja $E_R^\bullet(K_R)$ um resolução injetiva minimal de K_R . Aplicando o funtor $\text{Hom}_R(-, E_R^\bullet(K_R))$ a sequência exata curta do complexo truncado de K_R com respeito aos ideais (I, J) , obtemos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(C_{K_R}^\bullet(I, J), E_R^\bullet(K_R)) &\rightarrow \text{Hom}_R(\Gamma_{I,J}(E_R^\bullet(K_R)), E_R^\bullet(K_R)) \\ &\rightarrow \text{Hom}_R(H_{I,J}^t(K_R), E_R^\bullet(K_R))[t] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.3.2, a componente do meio desta sequência é isomorfa a

$$\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} \text{Hom}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(E_R^\bullet(K_R)), E_R^\bullet(K_R)) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \widetilde{W}(I, J)} \varprojlim (R/\mathfrak{a}^r \otimes_R Y).$$

onde $Y := \text{Hom}(E_R^\bullet(K_R), E_R^\bullet(K_R))$.

No isomorfismo anterior, note que $R/\mathfrak{a}^r$ é um R -módulo finitamente gerado para todo $r \geq 1$. Além disto, existe um quasi-isomorfismo entre Y e $\text{Hom}(K_R, E_R^\bullet(K_R))$.

Segue da definição do Hom de complexos que

$$Y^j \cong \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(E_R^i(K_R), E_R^{i+j}(K_R)),$$

e assim para todo $j \in \mathbb{Z}$, Y^j é um R -módulo plano. Como R é Cohen-Macaulay de dimensão d , $H_{\mathfrak{m}}^i(R) = 0$ para todo $i \neq d$. Aplicando o Teorema 3.0.10 para $I = \mathfrak{m}$ e $J = 0$, segue que $H^j(Y) \cong \text{Ext}_R^j(K_R, K_R) = 0$ para todo $j \neq 0$ e $H^0(Y) = \text{Hom}_R(K_R, K_R) \cong R$. Também, se $\mathfrak{p} \in \text{Spec} R$, podemos ver que

$$E_R^i(K_R) \cong \bigoplus_{\text{height} \mathfrak{p} = i} E_R(R/\mathfrak{p}).$$

Uma vez que R é Cohen Macaulay, K_R tem dimensão injetiva finita. Assim $Y^j = 0$ para todo $k > 0$. Por isto podemos concluir que Y torna-se uma resolução plana de R . Logo podemos ver que as cohomologias do complexo

$$\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \overline{W}(I, J)} \varprojlim (R/\mathfrak{a}^r \otimes_R \text{Hom}(E_R^\bullet(K_R), E_R^\bullet(K_R)))$$

são nulas para todo $i \neq 0$ e, como R é completo, para $i = 0$ é R . Além disto, $H_{I, J}^i(K_R) = 0$ para todo $i \neq t$. Então o complexo $\text{Hom}_R(C_{K_R}^\bullet(I, J), E_R^\bullet(K_R))$ é um complexo exato.

Considerando a sequência exata longa de cohomologias a partir da sequência exata anterior, obtemos o isomorfismo

$$R \rightarrow \text{Ext}_R^t(H_{I, J}^t(K_R), K_R)$$

e para todo $i \neq t$

$$\text{Ext}_R^i(H_{I, J}^t(K_R), K_R) = 0.$$

Pelo Teorema 3.0.17 e Lema 3.0.22 (a), temos finalizado a prova da afirmação (a). $\square$

3.0.3 Cohomologia local e módulos Cohen-Macaulay

Nesta seção, vamos mostrar alguns resultados envolvendo a cohomologia local definida por um par de ideais, dualidade de Matlis e anéis Cohen-Macaulay. Mais especificamente, vamos investigar quando o dual de certas cohomologias locais definidas por um par de ideais é um anel Cohen-Macaulay.

Relembre que, para $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo, o funtor de dualidade de Matlis $D(-) = \text{Hom}(-, E(R/\mathfrak{m}))$ estabelece uma relação entre módulos Artinianos e módulos finitamente gerados [6, Teorema 10.2.12].

Para a cohomologia local definida por um par de ideais, Chu e Wang [10] mostraram que, se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e M um R -módulo finitamente gerado de dimensão d , então $H_{I, J}^d(M)$ é Artiniano.

Estes fatos serão importantes para nosso próximo resultado.

Lema 3.0.24. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo e I, J dois ideais de R . Considere M um R -módulo finitamente gerado não nulo de dimensão d . Se $d \leq 2$ e $H_{I, J}^d(M) \neq 0$, então*

$\text{Hom}(H_{I,J}^d(M), E(R/\mathfrak{m}))$ é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão d .

Demonstração. Pelo [8, Teorema 2.3] existe um módulo quociente L de M satisfazendo $\text{Supp}_R L \subseteq V(J)$ e $\dim L = d$ tal que $H_{I,J}^d(M) \cong H_I^d(L)$. Como $\text{Hom}(H_I^d(L), E(R/\mathfrak{m}))$ é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão d [31, Lema 3.3] e

$$\text{Hom}(H_{I,J}^d(M), E(R/\mathfrak{m})) \cong \text{Hom}(H_I^d(L), E(R/\mathfrak{m})),$$

temos a afirmação desejada. $\square$

O resultado anterior é uma generalização de [31, Lema 3.3]. Para o próximo resultado, precisamos de um conceito generalizado de “filter-depth” para a cohomologia local definida por um par de ideais. Relembre que Chu e Wang [10, Teorema 2.4 e Proposição 2.4] introduziram o conceito de filter-depth definido por um par de ideais, denotado por $\text{f-depth}(I, J, M)$. Este conceito foi também estudado por Tehranian e Talemi [52]. Mais especificamente, para $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, I, J dois ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado, Chu e Wang mostraram que

$$\begin{aligned} \text{f-depth}(I, J, M) &= \inf\{i \mid H_{I,J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\} \\ &= \inf\{i \mid H_{I,J}^i(M) \not\cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)\}. \end{aligned}$$

O próximo resultado generaliza [31, Teorema 3.5] e [43, Teorema 4.3].

Teorema 3.0.25. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo e I, J dois ideais de R . Considere M um R -módulo finitamente gerado não nulo de dimensão d tal que $\text{f-depth}(I, J, M) \geq d$. Se $\text{depth}(\text{Hom}(H_{\mathfrak{m}}^i(M), E(R/\mathfrak{m}))) \geq i - 1$ para todo $2 \leq i < d$ e $H_{I,J}^d(M) \neq 0$, então*

$$\text{Hom}(H_{I,J}^d(M), E(R/\mathfrak{m}))$$

é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão d .

Demonstração. Vamos usar indução sobre d . Se $d = 3$, pela nossa hipótese, Corolário 2.1.13 (4) e Proposição 2.1.4 (3), existe $x \in \mathfrak{m} \setminus (\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}) \cup (\bigcup_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R(D(H_{\mathfrak{m}}^2(M)))} \mathfrak{q})$, onde $D(-) = \text{Hom}(-, E(R/\mathfrak{m}))$. Note que, uma vez que $\text{f-depth} \geq 3$, a aplicação $D(H_{I,J}^2(M)) \xrightarrow{x} D(H_{I,J}^2(M))$ pode ser reescrita como $D(H_{\mathfrak{m}}^2(M)) \xrightarrow{x} D(H_{\mathfrak{m}}^2(M))$. Além disto, como x é um

não divisor de zero de $D(H_{\mathfrak{m}}^2(M))$), a aplicação x . deve ser injetora (Observação 1.2.12) e como $H_{\mathfrak{m}}^2(M) \cong H_{I,J}^2(M)$, devemos ter que $D(H_{I,J}^2(M)) = 0$. Assim, a partir da sequência exata

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

podemos considerar a sequência exata

$$0 \rightarrow D(H_{I,J}^3(M)) \xrightarrow{x} D(H_{I,J}^3(M)) \rightarrow D(H_{I,J}^2(M/xM)) \rightarrow 0$$

e conseqüentemente o isomorfismo

$$D(H_{I,J}^3(M))/xD(H_{I,J}^3(M)) \cong D(H_{I,J}^2(M/xM)).$$

Pelo lema anterior e o [7, Teorema 2.1.3], temos que $D(H_{I,J}^3(M))$ é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão d . Vamos assumir agora que $d > 3$ e que a afirmação é verdadeira para todos os valores menores que d . Como feito anteriormente, existe $x \in \mathfrak{m} \setminus (\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}) \cup (\bigcup_{i=1}^{d-1} \bigcup_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R(D(H_{\mathfrak{m}}^i(M)))} \mathfrak{q})$, tal que a sequência exata

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

induz a sequência exata longa

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow D(H_{I,J}^d(M)) \xrightarrow{x} D(H_{I,J}^d(M)) \rightarrow D(H_{I,J}^{d-1}(M/xM)) \\ \rightarrow D(H_{I,J}^{d-1}(M)) \xrightarrow{x} D(H_{I,J}^{d-1}(M)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Logo, pela sequência exata anterior e que $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ se $i < d$ [10, Teorema 2.4 e Proposição 2.5] obtemos o isomorfismo

$$D(H_{I,J}^d(M))/xD(H_{I,J}^d(M)) \cong D(H_{I,J}^{d-1}(M/xM))$$

e $D(H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M))/xD(H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M)) \cong D(H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM))$ para todo $2 \leq i \leq d-2$.

Pelas hipóteses e o segundo isomorfismo, podemos concluir que

$$\text{depth} D(H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM)) \geq i-1.$$

Assim por indução, $D(H_{I,J}^{d-1}(M/xM))$ é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão $d-1$. Portanto, $D(H_{I,J}^d(M))$ é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão d pelo primeiro isomorfismo. Isto finaliza a demonstração. $\square$

O próximo resultado é uma imediata consequência do teorema anterior. Além disto este resultado generaliza [31, Corolário 3.7, Corolário 3.8 e Corolário 3.9], [11, Teorema 1.1 e Lema 3.5] e [12, Proposição 2.5].

Corolário 3.0.26. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo e I, J dois ideais de R . Considere M um R -módulo finitamente gerado não nulo de dimensão d tal que $\mathfrak{f}\text{-depth}(I, J, M) \geq d$. Se $\text{Hom}(H_{\mathfrak{m}}^i(M), E(R/\mathfrak{m}))$ é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão i para todo $1 \leq i < d$ e $H_{I,J}^d(M) \neq 0$, então*

$$\text{Hom}(H_{I,J}^d(M), E(R/\mathfrak{m}))$$

é um R -módulo Cohen-Macaulay de dimensão d .

Cohomologia local formal definida por um par de ideais

Neste capítulo vamos introduzir duas generalizações do módulo de cohomologia local, o qual chamaremos de módulo de cohomologia local formal e o Čech módulo de cohomologia local formal, ambos definidos por um par de ideais. Mas, o que de fato é a cohomologia local formal?

O nascimento do termo “cohomologia local formal” foi atribuído a Peter Schenzel em [45] com o intuito de generalizar o conceito de cohomologia local já conhecido e, além disto, dar algumas contribuições geométricas. Fazendo uso desta nova ferramenta, foi proposto um diferente caminho para o entendimento da cohomologia local e questões envolvendo a mesma. Notou-se uma hábil aplicabilidade desta nova ferramenta na busca de respostas sobre a conexidade do espectro de módulos. Por esses motivos, tal estrutura tornou-se objeto de estudo de diversos autores em diferentes vertentes, o qual comentaremos abaixo.

A construção da cohomologia local formal é dada da seguinte forma. Seja $\underline{x} = x_1, \dots, x_r$ um sistema de elementos (isto é, uma sequência de elementos) do anel local $(R, \mathfrak{m})$, $\mathfrak{b} = \text{Rad}(\underline{x}R)$ e $\check{C}_{\underline{x}}$ denota o complexo de Čech de R com respeito à $\underline{x}$. O sistema projetivo de R -módulos $\{M/\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ induz um sistema projetivo de R -complexos $\{\check{C}_{\underline{x}} \otimes M/\mathfrak{a}^n M\}$. Considere o limite projetivo $\varprojlim (\check{C}_{\underline{x}} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)$.

Para um inteiro $i \in \mathbb{Z}$, a cohomologia $H^i(\varprojlim (\check{C}_{\underline{x}} \otimes M/\mathfrak{a}^n M))$ é chamada de i -ésimo $\mathfrak{a}$ -cohomologia local formal com respeito a $\mathfrak{b}$, denotado por $\check{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}^i(M)$. No caso em que $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$ falaremos simplesmente de i -ésima $\mathfrak{a}$ -cohomologia formal.

Agora, considere a família de módulos de cohomologia local $\{H_{\mathfrak{b}}^i(M/\mathfrak{a}^n M)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para todo inteiro n , existe um homomorfismo natural $H_{\mathfrak{b}}^i(M/\mathfrak{a}^{n+1}M) \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ tal que a família forma um sistema projetivo. O limite projetivo deste sistema $\varprojlim H_{\mathfrak{b}}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ é chamado de i -ésimo módulo de cohomologia local formal de M com respeito à $\mathfrak{b}$ e é denotado por $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}^i(M)$.

Em [45], quando $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$ Schenzel provou o seguinte isomorfismo $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}^i(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}^i(M)$, mostrando a relação entre a cohomologia local formal e limites projetivos de certas cohomologias locais.

Diversos autores tais como Gu [18], Bijan-Zadeh e Rezaei [4], Asgharzadeh-Divaani-Aazar [10], Mafi [33] e Eghbali [16] vem estudando temas como artinianidade, condições de finitude, anulamento e não anulamento, primos associados e coassociados, relações com anéis Cohen-Macaulay, entre outros.

Como pode-se ver, a cohomologia local está intrinsecamente ligada ao conceito da cohomologia local formal. Assim, tendo em mente a generalização da cohomologia local apresentada no Capítulo 2, surgiram algumas perguntas as quais motivaram este trabalho. Entre as questões levantadas, citamos:

Questões:

1. É possível generalizar a definição da cohomologia local formal usando o conceito de cohomologia local definida por um par de ideais?
2. Uma vez definido este conceito, é possível generalizar os resultados de Schenzel e estudar os demais temas já abordados para esta ferramenta?
3. Quais as possíveis aplicações álgebricas/geométricas?

Sendo assim neste capítulo, uma vez definido os conceitos que generalizam a cohomologia local formal, vamos estudar sua estrutura e dar várias propriedades tais como: condições de anulamento e não anulamento, comportamento com respeito a sequências exatas, entre outros.

Daremos uma versão da sequência de Mayer–Vietoris para esta nova estrutura definida. Daremos também outras demonstrações da versão generalizada do teorema de dualidade local,

para anéis Gorenstein e Cohen-Macaulay. Além disto, vamos mostrar uma generalização do teorema de dualidade de Grothendieck para anéis Gorenstein. Por fim, neste capítulo vamos analisar o menor inteiro tal que o módulo de cohomologia local formal e o Čech módulo de cohomologia local formal são não nulos e dar alguns resultados neste sentido.

4.1 Definições e alguns resultados

No que se segue, seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local, $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ um sistema de elementos de R e $I = (\underline{x}), J$ dois ideais de R . Seja $\check{C}_{\underline{x}, J}$ o complexo de Čech de R com respeito a (I, J) definido na Seção 2.2. Para M um R -módulo finitamente gerado e um ideal $\mathfrak{a}$, o sistema projetivo de R -módulos $\{M/\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ induz um sistema projetivo de R -complexos $\{\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M\}$. Considere o limite projetivo $\varprojlim (\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)$. Agora estamos aptos a definir um novo objeto de estudo.

Definição 4.1.1. *Usando a construção prévia, para um inteiro $i \in \mathbb{Z}$, o módulo de cohomologia $H^i(\varprojlim (\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M))$ é chamado de i -ésimo Čech módulo de $\mathfrak{a}$ -cohomologia formal com respeito a (I, J) , denotado por $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$.*

Se $J = 0$, $\check{C}_{\underline{x}, J}$ coincide com o usual complexo de Čech $\check{C}_{\underline{x}}$ com respeito a $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$. Assim $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, 0}^i(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I}^i(M)$. Agora, se $J = 0$ e $I = \mathfrak{m}$, temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, 0}^i(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}^i(M)$. Esta nova definição é uma natural generalização de $\mathfrak{a}$ -cohomologia formal com respeito a $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}$ -cohomologia formal, ambas introduzidas por Schenzel [45] e discutidas por Mafi [33], Asgharzadeh e Divaani-Aazar [3], Eghbali[16], entre outros.

Proposição 4.1.2. *Seja M um R -módulo finitamente gerado. Se M é um R -módulo J -torsão, então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I}^i(M)$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.2.5, temos que

$$(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M) \cong (\check{C}_{\underline{x}} \otimes M/\mathfrak{a}^n M).$$

Aplicando o limite inverso segue que

$$\varprojlim (\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M) \cong \varprojlim (\check{C}_{\underline{x}} \otimes M/\mathfrak{a}^n M).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) &= H^i(\varprojlim(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)) \\
 &= H^i(\varprojlim(\check{C}_{\underline{x}} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)) \\
 &= \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I}^i(M).
 \end{aligned}$$

□

O próximo resultado é uma generalização do teorema de independência da base de anéis, para a usual cohomologia local formal. O leitor pode comparar este resultado com Teorema 2.2.7, [3, Teorema 2.7] e [42, Teorema 4.2.1].

Teorema 4.1.3. *Sejam $\phi : R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis tal que $\phi(J) = JR'$ e M' um R' -módulo finitamente gerado. Então existe um isomorfismo natural $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M') \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}R',IR',JR'}^i(M')$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração. Sejam $I = (x_1, \dots, x_s)R$ e $\phi(\underline{x}) = \phi(x_1), \dots, \phi(x_s)$. Considere também $S_{x_i,J}$ o subconjunto multiplicativamente fechado de R , descrito no Capítulo 2, Seção 2. Pela hipótese, $\phi(S_{x_i,J}) = S_{\phi(x_i),JR'}$ para todo i com $1 \leq i \leq s$. Usando o mapa ϕ , podemos considerar M' como um R -módulo e assim o complexo de Čech $\check{C}_{\underline{x},J}$ é o mesmo se considerarmos M' como um R -módulo ou um R' -módulo. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \check{C}_{\underline{x},J} \otimes_R M'/\mathfrak{a}^n M' &\cong \check{C}_{\underline{x},J} \otimes_R (R' \otimes_{R'} M'/\mathfrak{a}^n M') \\
 &\cong (\check{C}_{\underline{x},J} \otimes_R R') \otimes_{R'} M'/\mathfrak{a}^n M' \\
 &\cong \check{C}_{\phi(\underline{x}),JR'} \otimes_{R'} M'/\mathfrak{a}R'^n M'.
 \end{aligned}$$

Aplicando o limite inverso e a Definição 4.1.1 segue a afirmação.

□

É importante lembrar que a hipótese $\phi(J) = JR'$ no teorema prévio não pode ser removida. Para mais detalhes veja [50, Observação 2.8].

Agora, seja $\{H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de módulos de cohomologia local. Existe um homomorfismo natural $H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^{n+1}M) \rightarrow H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$, para todo n , tal que a família forma um sistema projetivo. O seu limite projetivo $\varprojlim H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ é chamado de *i -ésimo módulo de cohomologia local formal de M com respeito ao par de ideais I, J* ,

denotado por $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$. No caso que $I = \mathfrak{m}$ e $J = 0$, Schenzel mostrou que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},0}^i(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},0}^i(M)$ [45, Proposição 3.2].

Um pergunta natural se faz presente: Quando $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$ é isomorfo a $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$? O próximo resultado generaliza [45, Proposição 3.2] e tenta responder a questão levantada anteriormente.

Proposição 4.1.4. *Fazendo uso da notação precedente, existe uma sequência exata curta*

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H_{I,J}^{i-1}(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow H^i(\varprojlim(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)) \rightarrow \varprojlim H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow 0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, seja o epimorfismo natural $M/\mathfrak{a}^{n+1}M \rightarrow M/\mathfrak{a}^n M$. Como o complexo de Čech $\check{C}_{\underline{x},J}$ é um complexo de R -módulos planos, temos um R -morfismo de R -complexos

$$\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^{n+1}M \rightarrow \check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M.$$

Por [56, Definição 3.5.1 e Lema 3.5.3] segue a sequência exata curta de complexos

$$0 \rightarrow \varprojlim(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow \prod(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow \prod(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow 0.$$

Assim, existe a sequência exata longa de cohomologias

$$\cdots \rightarrow H^i(\varprojlim(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)) \rightarrow H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\phi^i} H^i(K^\bullet) \rightarrow \cdots$$

where $K^\bullet = \prod(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)$. Uma vez que a cohomologia comuta com produtos diretos, obtemos o morfismo

$$\phi^i : \prod H^i(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow \prod H^i(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M),$$

onde o mapa é induzido pelo mapa de transição de sistemas inversos de complexos. Agora, é conhecido que o kernel de ϕ^i e cokernel de ϕ^{i-1} são respectivamente $\varprojlim H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ e $\varprojlim^1 H_{I,J}^{i-1}(M/\mathfrak{a}^n M)$ [56, Definição 3.5.1]. Isto conclui a demonstração. □

Para responder a questão levantada anteriormente, precisamos saber quando a cohomologia local definida por um par de ideais é um R -módulo Artiniano para todo $i \in \mathbb{Z}$. Recentemente, Tehranian e Talemi [51, Teorema 2.10], mostraram que para J um ideal não nilpotente de um anel local $(R, \mathfrak{m})$ e M um R -módulo finitamente gerado, $H_{\mathfrak{m},J}^i(M)$ é não Artiniano para algum i inteiro positivo. Tal resultado também pode ser visto no Capítulo 2, Seção 2.6. Mostramos a seguir alguns casos em que a cohomologia local definida por um par de ideais é um R -módulo Artiniano.

Observação 4.1.5. *Seja M um R -módulo finitamente gerado.*

- (a) *Se M é um R -módulo J -torsão, então $H_{\mathfrak{m},J}^i(M)$ é um R -módulo Artiniano para todo inteiro i . Isto segue porque $H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ (Corolário 2.2.5 e [6, Teorema 7.1.3]).*
- (b) *Se M é um R -módulo J -torsão e $\sqrt{I+J} = \mathfrak{m}$, então $H_{I,J}^i(M)$ é um R -módulo Artiniano para todo inteiro i . Pela Propriedade 2.1.4 (6) e (7), $H_{I,J}^i(M) = H_{\sqrt{I+J},J}^i(M) = H_{\mathfrak{m},J}^i(M) = H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ que é um R -módulo Artiniano.*

Estamos aptos agora a dar algumas condições para que o isomorfismo entre cohomologia local formal e a Čech cohomologia local formal com respeito a um par de ideais.

Corolário 4.1.6. *Seja M um R -módulo finitamente gerado.*

- (a) *Se M é um R -módulo J -torsão, então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*
- (b) *Se M é um R -módulo J -torsão e $\sqrt{I+J} = \mathfrak{m}$, então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*
- (c) *Se M é um R -módulo Artiniano, então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para provar a afirmação (a) note que, como M é um R -módulo J -torsão, $M/\mathfrak{a}^n M$ é também um R -módulo J -torsão. Então pela observação anterior, $H_{\mathfrak{m},J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ é um R -módulo Artiniano para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim a família $\{H_{\mathfrak{m},J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$ satisfaz a condição de Mittag-Leffler (ver apêndice). Pela Proposição 4.1.4 e usando o fato que $\varinjlim^1$ se anula sobre sistemas projetivos de R -módulos Artinianos, segue a demonstração. A prova do item (b) é análoga.

Para o item (c), use a observação prévia para provar que $H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ é um R -módulo Artiniano para todo $i \in \mathbb{Z}$. Aplicando a idéia anterior finaliza a prova. $\square$

Corolário 4.1.7. *Sejam $\phi : R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis tal que $\phi(J) = JR'$ e M' um finitamente gerado R' -módulo.*

- (a) *Se M' é um R' -módulo J -torsão, então $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M') = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}R',\mathfrak{m}R',JR'}^i(M')$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*
- (b) *Se M' é um R' -módulo J -torsão e $\sqrt{I+J} = \mathfrak{m}$, então $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M') = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}R',IR',JR'}^i(M')$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*
- (c) *Se M' é um R' -módulo Artiniano, então $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M') = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}R',IR',JR'}^i(M')$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Como M' é também JR' -torsão, pelo corolário prévio e o Teorema 4.1.3 temos a prova do item (a). A mesma idéia pode ser empregada nas afirmações (b) e (c). $\square$

4.2 Dimensão cohomológica

Nesta seção, vamos estudar alguns resultados prévios sobre a dimensão cohomológica de um R -módulo M com respeito a um par de ideais e dar algumas sequências exatas envolvendo a cohomologia local formal com respeito a um par de ideais.

Primeiramente, é conhecido que Divaani-Aazr, Naghipour e Tousi [13] foram os precursores do termo “dimensão cohomológica”, defina por

$$\text{cd}(\mathfrak{a}, M) = \sup\{i \in \mathbb{Z} : H_{\mathfrak{a}}^i(M) \neq 0\}.$$

Se tratando de cohomologia local definida por um par de ideais, Chu e Wang [10] definem a dimensão cohomológica de um R -módulo M com respeito a um par de ideais (I, J) por

$$\text{cd}(I, J, M) = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid H_{I,J}^i(M) \neq 0\}$$

e também dão uma caracterização sobre este inteiro.

Chu e Wang [10] também generalizam o resultado de P. Schenzel [45, Lema 2.1] usando este novo conceito. Este resultado é dado pela seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. *Sejam I um ideal próprio de R e M, N R -módulos finitamente gerados tais que $\text{Supp}_R N \subseteq \text{Supp}_R M$. Então*

$$\text{cd}(I, J, N) \leq \text{cd}(I, J, M).$$

Com isto obtivemos o seguinte resultado.

Corolário 4.2.2. *Seja M um R -módulo finitamente gerado. Então*

$$\text{cd}(I, J, M) = \max\{\text{cd}(I, J, R/\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \text{Min} M\}$$

Demonstração. A prova é similar a [45, Corolário 2.2].

□

Lema 4.2.3. *Sejam $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ seja um sistema de elementos de uma anel local $(R, \mathfrak{m})$, $\mathfrak{a} = (\underline{x})$, J ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado. Então*

$$\text{cd}((\mathfrak{a}, yR), J, M) \leq \text{cd}(\mathfrak{a}, J, M) + 1$$

para qualquer elemento $y \in \mathfrak{m}$.

Demonstração. Pela construção feita no Capítulo 2, Seção 2.2, podemos considerar o complexo de Čech

$$\check{C}_{\underline{x}, y, J} = \left(\bigotimes_{i=1}^s \check{C}_{x_i, J} \right) \otimes \check{C}_{y, J}.$$

Agora, para o homomorfismo natural $\check{C}_{\underline{x}, J} \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes R_y$, seja o complexo $M(f) = \check{C}_{\underline{x}, J} \oplus (\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes R_y[-1])$ chamado de “mapping cone”. Note que o mapping cone $M(f)$ é isomorfo a $\check{C}_{\underline{x}, y, J}$, assim nós podemos considerar a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes R_y[-1] \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, y, J} \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \rightarrow 0.$$

Pelo [48, Lema 1.1] e Teorema 2.2.4, para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow H_{yR, J}^1(H_{\mathfrak{a}, J}^{n-1}(M)) \rightarrow H_{(\mathfrak{a}, yR), J}^n(M) \rightarrow H_{yR, J}^0(H_{\mathfrak{a}, J}^n(M)) \rightarrow 0.$$

Seja $j = \text{cd}(\mathfrak{a}, J, M)$, então pela sequência exata anterior e a definição de dimensão cohomológica com respeito a um par de ideais segue que $H_{(\mathfrak{a}, yR), J}^{i+1}(M) = 0$ para todo $i > j$. Portanto $\text{cd}((\mathfrak{a}, yR), J, M) \leq j + 1$, e a demonstração esta completa. □

Estes dois resultados anteriores estendem [45, Corolário 2.2 e Lema 2.3]. Vamos agora analisar como a Čech cohomologia local formal com respeito a um par de ideais se comporta com em relação a sequências exatas curtas. Usaremos a seguir um argumento análogo ao feito por Schenzel [45, Observação 3.12].

Teorema 4.2.4. *Seja $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos finitamente gerados. Então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(A) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(B) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(C) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^{i+1}(A) \rightarrow \cdots$$

Demonstração. Sabemos que a sequência exata curta citada anteriormente induz um sistema projetivo de sequências exatas curtas

$$0 \rightarrow \check{C}_{\underline{x},J} \otimes A/B \cap \mathfrak{a}^n A \rightarrow \check{C}_{\underline{x},J} \otimes B/\mathfrak{a}^n B \rightarrow \check{C}_{\underline{x},J} \otimes C/\mathfrak{a}^n C \rightarrow 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\check{C}_{\underline{x},J}$ é um complexo de R -módulos R -módulos planos e os mapas

$$A/B \cap \mathfrak{a}^{n+1} A \rightarrow A/B \cap \mathfrak{a}^n A$$

são sobrejetores, segue que o sistema projetivo de R -complexos $\{\check{C}_{\underline{x},J} \otimes A/B \cap \mathfrak{a}^n A\}$ satisfaz a condição de Mittag-Leffler (ver apêndice). Assim, aplicando o limite inverso temos a sequência exata de complexos

$$0 \rightarrow \varprojlim \check{C}_{\underline{x},J} \otimes A/B \cap \mathfrak{a}^n A \rightarrow \varprojlim \check{C}_{\underline{x},J} \otimes B/\mathfrak{a}^n B \rightarrow \varprojlim \check{C}_{\underline{x},J} \otimes C/\mathfrak{a}^n C \rightarrow 0.$$

Neste caso, $\{B \cap \mathfrak{a}^n A\}$ é equivalente a topologia $\mathfrak{a}$ -ádica sobre A e, além disto, pelo Lema de Artin-Rees [5, Cap. III, §3, Cor. 1], temos que

$$\cdots \rightarrow H^i(\varprojlim \check{C}_{\underline{x},J} \otimes A/\mathfrak{a}^n A) \rightarrow H^i(\varprojlim \check{C}_{\underline{x},J} \otimes B/\mathfrak{a}^n B) \rightarrow H^i(\varprojlim \check{C}_{\underline{x},J} \otimes C/\mathfrak{a}^n C) \rightarrow \cdots.$$

Usando a definição de Čech cohomologia local formal definida por um par de ideais finalizamos a demonstração. □

Corolário 4.2.5. *Considere as mesmas hipóteses do teorema anterior. Existe uma sequência exata longa para os seguintes casos a seguir.*

(a) Se B é um R -módulo J -torção, então

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(A) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(B) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(C) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{i+1}(A) \rightarrow \cdots$$

(b) Se B é um R -módulo J -torção e $\sqrt{I + J} = \mathfrak{m}$, então

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(A) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(B) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(C) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^{i+1}(A) \rightarrow \cdots$$

(c) Se B é um R -módulo Artiniano, então

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(A) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(B) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(C) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^{i+1}(A) \rightarrow \cdots$$

Demonstração. Para provar todos os casos, aplique Corolário 4.1.6 e o teorema anterior. □

Nosso próximo resultado pode ser considerado como uma suave extensão do [45, Corolário 3.13].

Proposição 4.2.6. *Sejam M um R -módulo finitamente gerado, $N \subseteq M$ um R -módulo tal que $\text{Supp} N \cap V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{m})$ e $\overline{M} = M/N$. Então, existe uma sequência exata curta*

$$0 \rightarrow N^{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^0(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^0(\overline{M}) \rightarrow 0$$

e isomorfismos $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(\overline{M})$ para todo $i \geq 1$.

Demonstração. Considere a sequência exata curta $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0$. Assim como no Teorema 4.2.4, existe a seguinte sequência exata longa

$$0 \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes N/\mathfrak{a}^n N \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \overline{M}/\mathfrak{a}^n \overline{M} \rightarrow 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sequência induz uma sequência exata longa de cohomologias dada por

$$\cdots \rightarrow H^i(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes N/\mathfrak{a}^n N) \rightarrow H^i(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow H^i(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \overline{M}/\mathfrak{a}^n \overline{M}) \rightarrow \cdots$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.2.4 segue que $H^i(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes X) \cong H_{I, J}^i(X)$ para todo R -módulo X , assim obtemos a sequência

$$\cdots \rightarrow H_{I, J}^i(N/\mathfrak{a}^n N) \rightarrow H_{I, J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow H_{I, J}^i(\overline{M}/\mathfrak{a}^n \overline{M}) \rightarrow \cdots$$

A hipótese $\text{Supp} N \cap V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{m})$ implica que $N/\mathfrak{a}^n N$ é um R -módulo de comprimento finito, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.4.6, $H_{I,J}^i(N/\mathfrak{a}^n N) = 0$ para todo $i > 0$. Portanto temos a sequência

$$0 \rightarrow H_{I,J}^0(N/\mathfrak{a}^n N) \rightarrow H_{I,J}^0(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow H_{I,J}^0(\overline{M}/\mathfrak{a}^n \overline{M}) \rightarrow 0$$

e isomorfismos $H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \cong H_{I,J}^i(\overline{M}/\mathfrak{a}^n \overline{M})$ para todo $i > 0$.

Note que a família $\{H_{I,J}^0(N/\mathfrak{a}^n N)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de R -módulos Artinianos (Teorema 2.4.6 e Corolário 2.4.2 mostram que $H_{I,J}^0(N/\mathfrak{a}^n N)$ é Artiniano), satisfaz a condição de Mittag-Leffler (ver apêndice). Aplicando o limite inverso na sequência exata anterior obtemos

$$0 \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^0(N) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^0(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^0(\overline{M}) \rightarrow 0$$

e isomorfismos $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(\overline{M})$ para todo $i \geq 1$. Agora, para $i > 0$ $H_{I,J}^i(N/\mathfrak{a}^n N) = 0$, pelo Corolário 2.4.2 temos que M é um R -módulo (I, J) -torção. Portanto, $H_{I,J}^0(N/\mathfrak{a}^n N) = N/\mathfrak{a}^n N$ e $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^0(N) = \varprojlim N/\mathfrak{a}^n N = N^{\mathfrak{a}}$.

□

Corolário 4.2.7. *Considere as mesmas hipóteses da proposição anterior.*

(a) *Se M é um R -módulo J -torção, existe uma sequência exata curta*

$$0 \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(N) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(\overline{M}) \rightarrow 0$$

e isomorfismos $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(\overline{M}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

(b) *Se M é um R -módulo J -torção e $\sqrt{I+J} = \mathfrak{m}$, existe uma sequência exata curta*

$$0 \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^0(N) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^0(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^0(\overline{M}) \rightarrow 0$$

e isomorfismos $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(\overline{M}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Demonstração. Aplique o Corolário 4.1.6 e a proposição anterior.

□

4.3 Resultados de anulamento e não anulamento

Nesta seção iremos discutir sobre anulamento e não anulamento da cohomologia local formal com respeito a um par de ideais. Seja M um R -módulo finitamente gerado. Nosso

principal objetivo nesta seção será conhecer o inteiro $\sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \neq 0\}$. Para iniciar, um simples mas importante resultado auxiliar que generaliza [45, Proposição 4.4].

Proposição 4.3.1. *Considere um ideal $\mathfrak{a}$ tal que $\dim(M/\mathfrak{a}M) = 0$. Então*

$$(a) \quad \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq 0 \\ M^{\mathfrak{a}} & \text{se } i = 0, \end{cases}$$

$$(b) \quad \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = \tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M), \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Para o item (a), note que $H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) = 0$ para $i \neq 0$ (Teorema 2.4.6) e $M/\mathfrak{a}^n M$ é um R -módulo (I, J) -torção pelo Corolário 2.4.2. Assim

$$H_{I,J}^0(M/\mathfrak{a}^n M) = \Gamma_{I,J}(M/\mathfrak{a}^n M) = M/\mathfrak{a}^n M.$$

Aplicando o limite inverso finaliza a prova. Para a demonstrar (b), use a Proposição 4.1.4. □

Como um breve comentário, relembre que o teorema de não anulamento de Grothendieck diz que $H_{\mathfrak{m}}^r(M) \neq 0$, quando R é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e M é um R -módulo finitamente gerado de dimensão r [6, Teorema 6.1.2]. Takahashi, Yoshino e Yoshizawa [50, Teorema 4.5] mostraram um teorema que pode ser visto como uma generalização deste famoso resultado (presente no Capítulo 2, Seção 2.5). Schenzel [45, Teorema 4.5] estabeleceu um resultado similar ao de Grothendieck para a cohomologia local formal. O próximo resultado é uma generalização do resultado feito por Schenzel.

Teorema 4.3.2. *Seja M um R -módulo finitamente gerado sobre um anel local $(R, \mathfrak{m})$. Sejam $\mathfrak{a}, I, J$ ideais de R tais que $J \neq R$ e $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Então,*

$$\dim_R M/(\mathfrak{a} + J)M = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \neq 0\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.3, temos que $H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) = 0$ para todo $i > \dim \frac{M/\mathfrak{a}^n M}{J(M/\mathfrak{a}^n M)}$. Mas, $\dim \frac{M/\mathfrak{a}^n M}{J(M/\mathfrak{a}^n M)} = \dim \frac{M}{(J+\mathfrak{a})M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$\dim M/(\mathfrak{a} + J)M \geq \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \neq 0\}.$$

Por outro lado, considere $r := \dim(\frac{M/\mathfrak{a}^n M}{J(M/\mathfrak{a}^n M)}) = \dim(\frac{M}{(J+\mathfrak{a})M})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário, segue que $H_{I,J}^i(M) = H_{\mathfrak{m},J}^i(M)$ para qualquer inteiro i . Então, podemos assumir que $I = \mathfrak{m}$. Note que a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}^n M / \mathfrak{a}^{n+1} M \rightarrow M / \mathfrak{a}^{n+1} M \rightarrow M / \mathfrak{a}^n M \rightarrow 0$$

induz a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^i(M/\mathfrak{a}^{n+1}M) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^i(M/\mathfrak{a}^{n+1}M) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^{i+1}(\mathfrak{a}^n M / \mathfrak{a}^{n+1} M) \rightarrow \cdots.$$

Denote agora $\overline{M} = \mathfrak{a}^n M / \mathfrak{a}^{n+1} M$. Como $\dim \overline{M} / J\overline{M} \leq \dim \frac{M}{(J+\mathfrak{a})M} = r$, temos que $H_{\mathfrak{m},J}^{r+1}(\overline{M}) = 0$ pelo Teorema 2.4.3 e $H_{\mathfrak{m},J}^r(M/\mathfrak{a}^n M) \neq 0$ pelo Teorema 2.4.5. Portanto temos um epimorfismo

$$H_{\mathfrak{m},J}^r(M/\mathfrak{a}^{n+1}M) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^r(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow 0$$

de R -módulos não nulos para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^r(M) \neq 0$.

□

Observação 4.3.3. Considere M um R -módulo finitamente gerado. Segue a seguir algumas propriedades sobre anulamento da cohomologia local formal definida por um par de ideais.

- (a) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = 0$ para qualquer $i > \dim(M/\mathfrak{a}M)$ (Teorema 2.4.6).
- (b) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = 0$ para qualquer $i > \dim(M/(\mathfrak{a} + J)M)$, se $J \neq R$ (Teorema 2.4.3).
- (c) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = 0$ para qualquer $i > \dim R/J$ (Corolário 2.4.4).
- (d) Se M é um R -módulo (I, J) -torção, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) = 0$ para qualquer i inteiro (Corolário 2.1.13).

4.4 A sequência de Mayer-Vietoris

É conhecido dos leitores com pré-requisitos em álgebra homológica, o importante papel que desempenha a sequência de Mayer-Vietoris. No contexto de cohomologia local definida por um par de ideais ainda não se conhece uma versão da sequência de Mayer-Vietoris. O próximo teorema pode ser visto como uma generalização do [45, Teorema 5.1] onde Schenzel mostrou um resultado similar a sequência de Mayer-Vietoris para a cohomologia local formal.

Teorema 4.4.1. *Sejam $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, I, J$ ideais do anel local $(R, \mathfrak{m})$ e M um R -módulo finitamente gerado. Para $i \in \mathbb{Z}$, existe a sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \oplus \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), I, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots.$$

Demonstração. Primeiramente, para $n \in \mathbb{Z}$, considere a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow M/(\mathfrak{a}^n M \cap \mathfrak{b}^n M) \rightarrow M/\mathfrak{a}^n M \oplus M/\mathfrak{b}^n M \rightarrow M/(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}^n)M \rightarrow 0.$$

Ela induz a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{(\mathfrak{a}^n M \cap \mathfrak{b}^n M)} \rightarrow \left(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{\mathfrak{a}^n M} \right) \oplus \left(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{\mathfrak{b}^n M} \right) \rightarrow \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}^n)M} \rightarrow 0.$$

Como $\check{C}_{\underline{x}, J}$ é um complexo de R -módulos planos e os mapas

$$M/(\mathfrak{a}^{n+1} \cap \mathfrak{b}^{n+1})M \rightarrow M/(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}^n)M$$

são sobrejetores, segue que o sistema projetivo de R -complexos $\{\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes M/(\mathfrak{a}^n M \cap \mathfrak{b}^n M)\}$ satisfaz a condição de Mittag-Leffler. Portanto, aplicando o limite inverso, obtemos a sequência exata de complexos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{(\mathfrak{a}^n M \cap \mathfrak{b}^n M)} &\rightarrow \varprojlim \left(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{\mathfrak{a}^n M} \right) \oplus \varprojlim \left(\check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{\mathfrak{b}^n M} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \varprojlim \check{C}_{\underline{x}, J} \otimes \frac{M}{(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}^n)M} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Podemos observar que a filtração $(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}^n)$ -ádica é equivalente a filtração $\{(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}^n)M\}_{n \in \mathbb{N}}$. Assim, é suficiente prova que a filtração $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ -ádica sobre M é equivalente a filtração $\{(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}^n)M\}_{n \in \mathbb{N}}$. Note que $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^n M \subseteq (\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}^n)M \subseteq \mathfrak{a}^n M \cap \mathfrak{b}^n M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere $m \in \mathbb{N}$ um inteiro. Pelo Lema de Artin-Rees [5, Cap. III, §3, Cor. 1], existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^n M \cap \mathfrak{b}^m M \subseteq \mathfrak{a}^{n-k} \mathfrak{b}^m M$ para todo $n \geq k$. Note também que a topologia $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ -ádica e a topologia $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ -ádica sobre M são equivalentes. Se considerarmos a sequência exata longa de cohomologias e a definição de Čech cohomologia local formal definida por um par de ideais conclui-se a prova. □

O próximo resultado é uma consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 4.4.2. *Sejam $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, I, J$ ideais de uma anel local $(R, \mathfrak{m})$. Seja M um R -módulo finitamente gerado e $i \in \mathbb{Z}$.*

(a) *Se M é um R -módulo J -torção, então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \oplus \mathfrak{F}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots$$

(b) *Se M é um R -módulo J -torção e $\sqrt{I + J} = \mathfrak{m}$, então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \oplus \mathfrak{F}_{\mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), I, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots$$

(c) *Se M é um R -módulo Artiniano, existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \oplus \mathfrak{F}_{\mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), I, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots.$$

Demonstração. Demonstraremos o item (a) e os outros casos seguem analogamente. Como M é J -torção, qualquer quociente de M é também J -torção. Assim, pelo Corolário 4.1.6 e o teorema anterior temos a afirmação.

□

4.5 Dualidade local

O objetivo desta seção é de mostrar uma generalização do teorema de dualidade de Grothendieck para anéis Gorenstein. Além disto, dar uma outra versão para o Teorema de Dualidade Local, para anéis Gorenstein e Cohen-Macaulay. Para ambos os casos usaremos a cohomologia local definida por um par de ideais.

Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d com módulo canônico K_R e $\mathfrak{T} = R/\mathfrak{m}$. Então, para $0 \leq i \leq d$, é conhecido a existência dos isomorfismos

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) = D(\text{Ext}_R^{d-i}(M, \omega))$$

onde $D(-) := \text{Hom}_R(-, E_R(k))$ e $H_{\mathfrak{m}}^d(R) \cong D(K_R)$. Este resultado é chamado de Teorema de Dualidade Local. Existe uma generalização desse resultado em [50, Teorema 5.1] (presente neste trabalho em Teorema 2.5.2) para cohomologia local definida por um par de ideais.

Lema 4.5.1. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local, $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ um sistema de elementos de R tal que $\mathfrak{m} = (\underline{x})$ e J um ideal de R . Se M é um R -módulo finitamente gerado, então para todo $i \in \mathbb{Z}$, existe os isomorfismos*

$$H_{\mathfrak{m}, J}^i(M) \cong \text{Hom}_R(H^{-i}(\text{Hom}_R(M, D_{\underline{x}, J})), E)$$

onde E denota o envolvente injetivo de $k := R/\mathfrak{m}$ e $D_{\underline{x}, J} = \text{Hom}_R(\check{C}_{\underline{x}, J}, E)$.

Demonstração. Procedendo analogamente a construção feita em [48, Teorema 1.7], trocando $D_{\underline{x}}$ por $D_{\underline{x}, J}$ obtemos o resultado. $\square$

Vamos agora mostrar uma generalização do teorema de dualidade de Grothendieck e na sequência uma generalização do Teorema de Dualidade Local, ambos para anéis Gorenstein.

Teorema 4.5.2. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local de dimensão d , J um ideal perfeito de R com grade t , isto é, $\text{pd}_R R/J = \text{grade}(J, R) = t$. Se R é um anel Gorenstein então*

$$H_{\mathfrak{m}, J}^i(R) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq d - t \\ \bigoplus_{\substack{\text{ht } \mathfrak{p} = d - t \\ \mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)}} E_R(R/\mathfrak{p}) & \text{se } i = d - t \end{cases}.$$

Demonstração. Seja $I^\bullet$ uma resolução injetiva minimal de R . Como R é Gorenstein, para cada i temos o isomorfismo

$$I^i = \bigoplus_{\text{ht } \mathfrak{p} = i} E_R(R/\mathfrak{p}).$$

Aplicando o funtor $\Gamma_{\mathfrak{m}, J}(-)$ e a Proposição 2.1.11 obtemos o complexo

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{\text{ht } \mathfrak{p} = 0 \\ \mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)}} E_R(R/\mathfrak{p}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\text{ht } \mathfrak{p} = 1 \\ \mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)}} E_R(R/\mathfrak{p}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\text{ht } \mathfrak{p} = 2 \\ \mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)}} E_R(R/\mathfrak{p}) \rightarrow \dots$$

Agora, aplicando Corolário 2.4.4 e Lema 2.5.1, obtemos que $H_{\mathfrak{m}, J}^i(R) = 0$ para $i \neq d - t$ e

$$H_{\mathfrak{m}, J}^{d-t}(R) = \bigoplus_{\substack{\text{ht } \mathfrak{p} = d - t \\ \mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)}} E_R(R/\mathfrak{p}).$$

Isto finaliza a demonstração. $\square$

Teorema 4.5.3. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Gorenstein de dimensão d , J um ideal perfeito de R de grade t , isto é, $\text{pd}_R R/J = \text{grade}(J, R) = t$. Se M é um R -módulo finitamente gerado, existem os isomorfismos*

$$H_{\mathfrak{m}, J}^i(M) \cong D(\text{Ext}_R^{d-t-i}(M, S))$$

para todo $0 \leq i \leq d - t$, onde $D(-) := \text{Hom}_R(-, E_R(k))$ e $S = D(H_{\mathfrak{m}, J}^{d-t}(R))$.

Demonstração. Seja $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ elementos de R tal que $\mathfrak{m} = (\underline{x})$. Uma vez que $H^i(\check{C}_{\underline{x}, J}) \cong H_{\mathfrak{m}, J}^i(R)$, pelo Teorema 4.5.2 temos que

$$H^i(\check{C}_{\underline{x}, J}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq d - t \\ \bigoplus_{\substack{ht\mathfrak{p}=d-t \\ \mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)}} E_R(R/\mathfrak{p}) & \text{se } i = d - t \end{cases}.$$

Denote $\overline{E} = \bigoplus_{\substack{ht\mathfrak{p}=d-t \\ \mathfrak{p} \in W(\mathfrak{m}, J)}} E_R(R/\mathfrak{p})$. Segue que $\check{C}_{\underline{x}, J}$ é uma resolução plana de $\overline{E}$ shiftado $d - t$ à direita. Portanto $D_{\underline{x}, J} = \text{Hom}_R(\check{C}_{\underline{x}, J}, E_R(k))$ é uma resolução injetiva de $\text{Hom}_R(\overline{E}, E)$ shiftada $d - t$ à direita. Como

$$H^{-i}(\text{Hom}_R(M, D_{\underline{x}, J})) \cong \text{Ext}_R^{d-t-i}(M, \text{Hom}_R(\overline{E}, E))$$

e $\text{Hom}_R(\overline{E}, E) = D(H_{\mathfrak{m}, J}^i(R))$ pelo Teorema 4.5.2, aplicando o Lema 4.5.1 temos a afirmação. $\square$

Note que o isomorfismo em Teorema 2.5.2 pode ser obtido por dualidade a partir do teorema anterior. Uma questão natural surge: O mesmo teorema pode ser obtido se considerarmos um anel Cohen-Macaulay? Para responder esta questão precisamos de algumas observações preliminares.

Relembre que

$$\text{depth}(I, J, M) = \inf\{i \in \mathbb{N}_0 \mid H_{I, J}^i(M) \neq 0\}.$$

Se considerarmos M um R -módulo finitamente gerado sobre um anel local $(R, \mathfrak{m})$ e $J \neq R$, pelo Teorema 2.4.5 e definição anterior, temos que se $H_{\mathfrak{m}, J}^i(M) \neq 0$ então

$$\text{depth}(\mathfrak{m}, J, M) \leq i \leq \dim M/JM.$$

Isto motiva a seguinte definição, que também está presente na página 55.

Definição 4.5.4. Quando $\text{depth}(\mathfrak{m}, J, M) = \dim M/JM$, o R -módulo $M \neq 0$ é chamado de **$(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay** (ou se $M = 0$). Se R é um R -módulo $(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay dizemos que R é um anel $(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay.

Note que se $J = 0$, esta natural definição de módulos $(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay coincide com a definição módulos Cohen-Macaulay. A mesma definição pode ser feita para quaisquer dois ideais I, J e para mais detalhes recomendamos ver [1]. Por meio destes comentários, vamos provar agora uma generalização do Teorema de Dualidade Local para anéis Cohen-Macaulay, que estende o Teorema 4.5.3.

Teorema 4.5.5. *Seja $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado sobre um anel local $(R, \mathfrak{m}, k)$. Suponha que R é um anel (I, J) -Cohen-Macaulay onde $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Então existem os isomorfismos*

$$H_{I,J}^i(M)^\vee \cong \text{Ext}_R^{\widehat{d}-i}(M, S)$$

para todo $0 \leq i \leq \widehat{d}$, onde $(-)^\vee = \text{Hom}_R(-, E_R(k))$, $S = D(H_{I,J}^{\widehat{d}}(R))$ e $\widehat{d} := \dim(M/JM)$.

Demonstração. Primeiramente note que, $H_{I,J}^i(R) = H_{\mathfrak{m},J}^i(R)$ para qualquer i inteiro, uma vez que $I + J$ é $\mathfrak{m}$ -primário (Propriedade 2.1.4 (6) e (7)). Assim neste caso R é (I, J) -Cohen-Macaulay se, e somente se, R é $(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay. Então, podemos assumir que $I = \mathfrak{m}$.

Seja $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ elementos de R tal que $\mathfrak{m} = (\underline{x})$. Como $H^i(\check{C}_{\underline{x},J}) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(R)$ e R é $(\mathfrak{m}, J)$ -Cohen-Macaulay, $\check{C}_{\underline{x},J}$ é uma resolução plana de $H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R)$ shiftada $\widehat{d}$ vezes à direita. Isto segue também do fato que $H_{\mathfrak{m},J}^i(R) = 0$ para todo $i \neq \widehat{d}$ (Teorema 2.4.5 ou [1, Corolário 4.13]). Agora temos que

$$H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H^i(\check{C}_{\underline{x},J}[-\widehat{d}] \otimes_R M) \cong H_{\widehat{d}-i}(\check{C}_{\underline{x},J} \otimes_R M) \cong \text{Tor}_{\widehat{d}-i}^R(H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R), M).$$

Seja $K^\bullet$ uma resolução livre de M . Como

$$H_{\widehat{d}-i}(K^\bullet \otimes_R H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R)) \cong \text{Tor}_{\widehat{d}-i}^R(M, H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R)),$$

segue que $H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H_{\widehat{d}-i}(K^\bullet \otimes_R H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R))$. Portanto para todo inteiro i , temos que

$$\begin{aligned} D(H_{\mathfrak{m},J}^i(M)) &\cong D(H_{\widehat{d}-i}(K^\bullet \otimes_R H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R))) \\ &\cong H^{\widehat{d}-i}D((K^\bullet \otimes_R H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R))) \\ &\cong H^{\widehat{d}-i}(\text{Hom}_R(K^\bullet \otimes_R H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R), E_R(k))) \\ &\cong H^{\widehat{d}-i}(\text{Hom}_R(K^\bullet, D(H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R)))) \\ &\cong \text{Ext}_R^{\widehat{d}-i}(M, D(H_{\mathfrak{m},J}^{\widehat{d}}(R))). \end{aligned}$$

□

No que se segue, estaremos interessados na caracterização da cohomologia local formal definida por um par de ideais em termos da cohomologia local e o funtor de dualidade de Matlis. O próximo resultado mostra esta relação bem como generaliza [45, Teorema 3.5].

Teorema 4.5.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ um sistema de elementos de R tal que $\mathfrak{m} = (\underline{x})$ e J um ideal de R . Se M é um R -módulo finitamente gerado, então para todo $i \in \mathbb{Z}$, existem os isomorfismos*

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \cong \text{Hom}_R(H_{\mathfrak{a}}^{-i}(\text{Hom}_R(M, D_{\underline{x}, J})), E_R(k)).$$

Demonstração. Pelo Lema 4.5.1, existem os isomorfismos

$$H_{\mathfrak{m}, J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \cong \text{Hom}_R(H^{-i}(\text{Hom}_R(M/\mathfrak{a}^n M, D_{\underline{x}, J})), E_R(k))$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o limite inverso e o usando o fato que

$$\varinjlim \text{Hom}_R(M/\mathfrak{a}^n M, D_{\underline{x}, J}) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(\text{Hom}_R(M, D_{\underline{x}, J}))$$

obtemos o desejado. □

Observação 4.5.7. Por outro lado, sendo R completo e fazendo uso das mesmas hipóteses do Teorema 4.5.5 obtemos que

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \cong \text{Hom}_R(\varinjlim \text{Ext}_R^{\widehat{d}-i}(M/\mathfrak{a}^n M, S), E_R(k)).$$

Note que para todo $i \in \mathbb{Z}$, $\varinjlim \text{Ext}_R^{\widehat{d}-i}(M/\mathfrak{a}^n M, S)$ é exatamente a cohomologia local generalizada com respeito ao ideal $\mathfrak{a}$ (denotada por $H_{\mathfrak{a}}^{\widehat{d}-i}(M, S)$), introduzida por Herzog [20].

Portanto

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \cong D(H_{\mathfrak{a}}^{\widehat{d}-i}(M, S))$$

onde $D(-) := \text{Hom}_R(-, E_R(k))$, $i \in \mathbb{Z}$. Este isomorfismo mostra a relação existente entre a cohomologia local formal definida por um par de ideais e a dualidade de Matlis de certos cohomologias locais generalizadas com respeito ao ideal $\mathfrak{a}$.

Para o próximo resultado, precisaremos de algumas considerações. Usando o homomorfismo natural $R \rightarrow \widehat{R}$, onde $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ denota o completamento $\mathfrak{m}$ -ádico de $(R, \mathfrak{m}, k)$, pelo Teorema 4.1.3 podemos assumir a existência do complexo $D_{\underline{x}, J} = \text{Hom}_R(\check{C}_{\underline{x}, J}, E_R(k))$. Para $x \in \mathfrak{m}$, estamos interessados em descrever como estão conectadas os módulos de $\mathfrak{a}$ -cohomologia local formal e a $(\mathfrak{a}, x)$ -cohomologia local formal, ambos definidos por um par de ideais. O próximo resultado mostra esta relação, bem como generaliza [45, Teorema 3.15].

Teorema 4.5.8. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local, $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ e $\underline{y} = y_1, \dots, y_n$ dois sistemas de elementos de R tais que $\mathfrak{m} = (\underline{x})$, $\mathfrak{a} = (\underline{y})$ e J um ideal de R . Se M é um R -módulo finitamente gerado e $x \in \mathfrak{m}$ um elemento de R , existe a sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}_R(R_x, \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M)) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{(\mathfrak{a}, x), \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \cdots$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Pelo comentário anterior, podemos considerar o complexo $D_{\underline{x}, J}$. Seja $\check{C}_x$ o complexo de Čech para um elemento $x \in \mathfrak{m}$. Assim, existe uma sequência exata curta de R -módulos planos

$$0 \rightarrow R_x[-1] \rightarrow \check{C}_x \rightarrow R \rightarrow 0.$$

Denote $\widetilde{H} = \text{Hom}_R(M, D_{\underline{x}, J})$. Tensorizando a sequência exata anterior por $\check{C}_{\underline{y}} \otimes \widetilde{H}$, obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \check{C}_{\underline{y}} \otimes \widetilde{H} \otimes R_x[-1] \rightarrow \check{C}_{\underline{y}, x} \otimes \widetilde{H} \rightarrow \check{C}_{\underline{y}} \otimes \widetilde{H} \rightarrow 0.$$

Agora, considerando a sequência exata longa induzida pela sequência exata anterior combinada com o Teorema 2.2.4 obtemos para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\cdots \rightarrow H_{(\mathfrak{a}, xR)}^i(\widetilde{H}) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(\widetilde{H}) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(\widetilde{H}) \otimes R_x \rightarrow \cdots.$$

Aplicando o funtor $\text{Hom}_R(-, E_R(k))$ e o Teorema 4.5.6 obtemos o resultado. $\square$

Um consequência natural e aplicação do teorema anterior segue ao tomarmos $\mathfrak{a} = 0$. O próximo resultado relaciona a cohomologia local formal com respeito a um ideal gerado por um elemento e a cohomologia local.

Corolário 4.5.9. *Considere as mesmas hipóteses do teorema anterior. Existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R_x, H_{\mathfrak{m},J}^i(M)) \rightarrow H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{xR,\mathfrak{m},J}^i(M) \rightarrow \cdots$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

4.6 O grade formal com respeito a um par de ideais

Conceito de grade formal foi introduzido por Peskine and Szpiro [41] e até o presente momento não se sabe muito sobre ele. Em nosso contexto, como somente para alguns casos temos o isomorfismo $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$, precisamos dar duas definições de grade formal, diferentemente ao feito por Schenzel [45].

Definição 4.6.1. *Para um ideal $\mathfrak{a}$ de R definimos por*

$$\operatorname{fgrade}(\mathfrak{a}, I, J, M) = \inf\{i \in \mathbb{Z} : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \neq 0\}$$

e

$$\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, M) = \inf\{i \in \mathbb{Z} : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \neq 0\}.$$

Note que $\operatorname{fgrade}(\mathfrak{a}, I, J, M) \geq \check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, M)$ pela Proposição 4.1.4. O próximo resultado estende [30, Proposição 2.2 e Corolário 2.4].

Proposição 4.6.2. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Se $0 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ é uma sequência exata de R -módulos finitamente gerados, então as seguintes afirmações acontecem.*

- (a) $\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, M) \geq \min\{\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, P), \check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, N)\}.$
- (b) $\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, P) \geq \min\{\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, M), \check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, N) + 1\}.$
- (c) $\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, N) \geq \min\{\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, P) - 1, \check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, M)\}.$
- (d) *Uma das igualdades acontece:*

$$\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, M) = \check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, P),$$

$$\check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, M) = \check{\operatorname{fgrade}}(\mathfrak{a}, I, J, N),$$

$$\begin{aligned}\check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, M) &= \check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, N) = \check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, P), \\ \check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, N) &= \check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, P) - 1.\end{aligned}$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.4 segue que

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(P) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(N) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^{i+1}(P) \rightarrow \cdots.$$

Então temos imediatamente as afirmações (a), (b) and (c). Denote $\check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, M) = t$, $\check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, N) = s$ e $\check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, P) = r$. Para provar (d), suponha que nenhuma das igualdades ocorrem. Então uns dos casos a seguir acontecem:

$$(i) \ r < s < t \quad (ii) \ s < r < t \quad (iii) \ t < r < s$$

$$(iv) \ t < s < r \quad (v) \ s < t < r \quad (vi) \ r < t < s.$$

Mostraremos somente dois casos, e os demais seguem analogamente. Se $r < s < t$, então $s + 1 \leq t$. Portanto por (b), $s + 1 \leq r < s$ e isto é uma contradição.

Se $s < r < t$, então $s \leq r - 1 < t$. Assim por (c) temos que $r - 1 \leq s$. Isto é novamente uma contradição pois $s = r - 1$. $\square$

Corolário 4.6.3. *Sejam $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ dois ideais de R . Então*

$$\begin{aligned}(a) \quad & \check{f}\text{grade}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J, M) \geq \\ & \min\{\check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, M), \check{f}\text{grade}(\mathfrak{b}, I, J, M), \check{f}\text{grade}((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), I, J, M) + 1\}. \\ (b) \quad & \check{f}\text{grade}((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), I, J, M) \geq \\ & \min\{\check{f}\text{grade}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J, M) - 1, \check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, M), \check{f}\text{grade}(\mathfrak{b}, I, J, M)\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.4.1, existe a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) \oplus \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{b}, I, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), I, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, I, J}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots.$$

Portanto, analogamente ao feito na Proposição 4.6.2 o resultado segue. $\square$

Observação 4.6.4. *É claro que $\check{f}\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, M) = f\text{grade}(\mathfrak{a}, I, J, M)$, para todos os casos presentes no Corolário 4.1.6.*

O leitor pode comparar o próximo resultado com [3, Corolário 4.2] e [45, Lema 4.8 (d)].

Teorema 4.6.5. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, \mathbb{K})$ um anel local completo e Cohen-Macaulay de dimensão d e $J \neq 0$ um ideal perfeito de R de grade t , i.e., $\text{pd}_R(R/J) = \text{grade}(J, R) = t$. Então, para um R -módulo M finitamente gerado,*

$$\text{fgrade}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) + \text{cd}_{\mathfrak{a}}(M, S) + \text{grade}(J, R) = \dim R,$$

onde $S = H_{\mathfrak{m}, J}^{d-t}(R)^{\vee}$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.5.5 temos que $H_{\mathfrak{m}, J}^i(M) \cong \text{Hom}_R(\text{Ext}_R^{d-t-i}(M, S), E_R)$. Assim

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, m, J}^i(M) &= \varprojlim H_{\mathfrak{m}, J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \\ &\cong \varprojlim \text{Hom}_R(\text{Ext}_R^{d-t-i}(M/\mathfrak{a}^n M, S), E_R(\mathbb{K})) \cdot \\ &= \text{Hom}_R(\varinjlim \text{Ext}_R^{d-t-i}(M/\mathfrak{a}^n M, S), E_R(\mathbb{K})) \end{aligned}$$

Como $H_{\mathfrak{a}}^i(M, S) = \varinjlim \text{Ext}_R^{d-t-i}(M/\mathfrak{a}^n M, S)$ [20], para todo $i \in \mathbb{Z}$, existem os isomorfismos

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, m, J}^i(M) \cong \text{Hom}_R(H_{\mathfrak{a}}^{d-t-i}(M, S), E_R(\mathbb{K})).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \inf\{i \in \mathbb{Z} : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, m, J}^i(M) \neq 0\} &= \inf\{i \in \mathbb{Z} : H_{\mathfrak{a}}^{d-t-i}(M, S) \neq 0\} \\ &= \inf\{d - t - j : H_{\mathfrak{a}}^j(M, S) \neq 0\} \\ &= d - t - \sup\{j : H_{\mathfrak{a}}^j(M, S) \neq 0\} \\ &= \dim R - \text{grade}(J, R) - \text{cd}_{\mathfrak{a}}(M, S). \end{aligned}$$

□

Segue abaixo um exemplo que faz uso de alguns resultados obtidos neste capítulo. O leitor pode comparar este exemplo com o [45, Lema 5.4].

Exemplo 4.6.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e completo, $\underline{x} = x_1, \dots, x_s$ um sistema de elementos de R , $I = (\underline{x})$, J ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado.*

- (a) Se M é um R -módulo J -torção indecomponível e $\text{fgrade}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \geq 2$ para um ideal $\mathfrak{a}$ de R , então $\text{Supp}_R M/\mathfrak{a}M \setminus \{\mathfrak{m}\}$ é conexo.

(b) Se M é um R -módulo J -torção indecomponível, $\sqrt{I+J} = \mathfrak{m}$ e

$\text{fgrade}(\mathfrak{a}, I, J, M) \geq 2$ para um ideal $\mathfrak{a}$ de R , então $\text{Supp}_R M / \mathfrak{a}M \setminus \{\mathfrak{m}\}$ é conexo.

Demonstração. Para a prova do item (a), suponha por contradição que $\text{Supp}_R M / \mathfrak{a}M \setminus \{\mathfrak{m}\}$ é não conexo. Isto significa que existem ideais L, K em R tais que,

$$(1) \quad L \cap K \subseteq \sqrt{(0)};$$

$$(2) \quad \sqrt{L+K} = \mathfrak{m};$$

$$(3) \quad \sqrt{L} \neq \mathfrak{m} \text{ e } \sqrt{K} \neq \mathfrak{m}.$$

Pela sequência de Mayer - Vietoris (Corolário 4.4.2 (a)) e a hipótese que $\text{fgrade}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \geq 2$, temos que

$$\mathfrak{F}_{L,\mathfrak{m},J}^0(M) \oplus \mathfrak{F}_{K,\mathfrak{m},J}^0(M) \simeq \mathfrak{F}_{(L,K),\mathfrak{m},J}^0(M).$$

Pelo item (2) e Proposição 4.3.1 (a) segue que $\mathfrak{F}_{(L,K),\mathfrak{m},J}^0(M) \simeq M$. Como M é indecomponível segue que, sem perda de generalidade,

$$\mathfrak{F}_{L,\mathfrak{m},J}^0(M) \simeq M \text{ e } \mathfrak{F}_{K,\mathfrak{m},J}^0(M) = 0.$$

Além disto, uma vez que M é J -torção, pela Proposição 4.1.6 segue que $\mathfrak{F}_{L,\mathfrak{m},J}^0(M) = \mathfrak{F}_{L,\mathfrak{m}}^0(M)$ e $\mathfrak{F}_{K,\mathfrak{m},J}^0(M) = \mathfrak{F}_{K,\mathfrak{m}}^0(M)$. Assim, pelo [45, Lema 4.1 (c) e (b)] temos que

$$\text{Ass}_R M = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R M : \dim R/(\mathfrak{p}, L) = 0\}.$$

Portanto

$$\mathfrak{m} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R M} \text{Rad}(L, \mathfrak{p}) = \text{Rad} L,$$

mas isto não ocorre por causa do item (3).

Usando a Proposição 2.1.4 (6),(7) e o Corolário 4.4.2 (b) a demonstração do item (b) é análoga.

□

Artinianidade e propriedades de finitude da cohomologia local formal

Nesta seção, nosso objetivo principal é estudar algumas propriedades de finitude e artinianidade de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$ e $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$. Vale lembrar que tais investigações são motivadas pelo o estudo de tais temas na cohomologia local. Vamos analisar o máximo e mínimo inteiro $i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ e $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ são Artinianos. Além disto, obteremos resultados envolvendo os primos atachados, coassociados e o cossuporte da cohomologia local formal definida por um par de ideais. Os resultados que aqui estão, podem ser encontrados em [27].

5.1 O filter-depth da cohomologia local formal

Sejam R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e M um R -módulo finitamente gerado. Por [9], lembre que uma sequência $x_1, \dots, x_n$ de elementos de R é dita ser uma sequência **M -filter regular** se, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M) \setminus \mathfrak{m}$, a sequência $x_1/1, \dots, x_n/1$ de elementos de $R_{\mathfrak{p}}$ é uma sequência filter M -regular. Para um ideal I de R , o f -depth de I sobre M é definido como o comprimento de qualquer sequência M -filter regular maximal em I , denotada por $f\text{-depth}(I, M)$. Quando uma sequência M -filter regular maximal em I não existe, entenderemos que o comprimento é ∞ .

Proposição 5.1.1. *Seja M um R -módulo finitamente gerado. Considere t um inteiro não negativo tal que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i < t$. Então $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,K}^i(M)$ é Artiniano para*

todo $K \subset J$ e todo $i < t$. Em particular,

$$\inf\{i \mid \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\} \leq f\text{-depth}(I, M).$$

Demonstração. Procederemos por indução sobre t . Se $t = 0$, não temos nada o que provar. Seja $t = 1$. Como $\Gamma_{I,K}(M/\mathfrak{a}^n M) \subseteq \Gamma_{I,J}(M/\mathfrak{a}^n M)$ (Proposição 2.1.4 (3)), temos que $\varprojlim \Gamma_{I,K}(M/\mathfrak{a}^n M) \subseteq \varprojlim \Gamma_{I,J}(M/\mathfrak{a}^n M)$ para todo $K \subseteq J$, e assim a afirmação segue.

Suponha agora que $t > 1$. Uma vez que $H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \cong H_{I,J}^i\left(\frac{M/\mathfrak{a}^n M}{\Gamma_{I,J}(M/\mathfrak{a}^n M)}\right)$ para todo $i > 0$ (Corolário 2.1.13 (4)), segue que para todo $i \geq 0$

$$\varprojlim H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \cong \varprojlim H_{I,J}^i\left(\frac{M/\mathfrak{a}^n M}{\Gamma_{I,J}(M/\mathfrak{a}^n M)}\right)$$

e assim podemos assumir que $\Gamma_{I,J}(M/\mathfrak{a}^n M) = 0$. Seja E o envolvente injetivo de $\overline{M} := M/\mathfrak{a}^n M$ para cada n e considere $N_n = E/\overline{M}$. Então $H_{I,J}^{i+1}(M/\mathfrak{a}^n M) \cong H_{I,J}^i(N_n)$ e $H_{I,K}^{i+1}(M/\mathfrak{a}^n M) \cong H_{I,K}^i(N_n)$ para todo $i \geq 0$. Assim $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^{i+1}(M) \cong \varprojlim H_{I,J}^i(N_n)$ e $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,K}^{i+1}(M) \cong \varprojlim H_{I,K}^i(N_n)$ para todo $i \geq 0$. Portanto N_n satisfaz a hipótese de indução. Podemos então concluir que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,K}^i(M)$ é Artiniano para todo $K \subset J$ e $i < t$. Se $K = 0$, a última afirmação segue pelo [36, Teorema 3.1]. $\square$

Este prévio resultado nos motiva a considerar a seguinte definição.

Definição 5.1.2. *Seja $\mathfrak{a}$ um idela do anel local $(R, \mathfrak{m})$. O menor inteiro tal que a cohomologia local formal e a Čech-cohomologia local formal são não Artinianas são chamadas, respectivamente, por **formal filter depth** e **formal Čech-filter depth com respeito a um par de ideais** (I, J) . Mais especificamente*

$$ff\text{-depth}(\mathfrak{a}, I, J, M) := \inf\{i \mid \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\},$$

$$f\check{f}\text{-depth}(\mathfrak{a}, I, J, M) := \inf\{i \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\}.$$

Analogamente, definimos o maior inteiro tal que a cohomologia local formal e a Čech-cohomologia local formal são não Artinianas por

$$gg\text{-depth}(\mathfrak{a}, I, J, M) := \sup\{i \mid \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\},$$

$$g\check{g}\text{-depth}(\mathfrak{a}, I, J, M) := \sup\{i \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\}.$$

Estas definições são generalizações naturais da formal filter depth dada em [18, Definição 2.1] e [4, Definição 2.11]. Pela Proposição 4.1.4 é fácil ver que

$$ff\check{-depth}(\mathfrak{a}, I, J, M) \leq ff-depth(\mathfrak{a}, I, J, M)$$

$$gg-depth(\mathfrak{a}, I, J, M) \leq g\check{g}-depth(\mathfrak{a}, I, J, M).$$

O próximo resultado mostra que a formal filter depth é invariante por radicais.

Proposição 5.1.3. *Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de R tais que $\text{Rad}(\mathfrak{a}) = \text{Rad}(\mathfrak{b})$. Então temos que $ff-depth(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) = ff-depth(\mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J, M)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.5.6 temos que

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \cong \text{Hom}_R(H_{\mathfrak{a}}^{-i}(\text{Hom}_R(M, D_{\underline{x}, J})), E_R(\mathbb{K})) \quad \text{e}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \cong \text{Hom}_R(H_{\mathfrak{b}}^{-i}(\text{Hom}_R(M, D_{\underline{x}, J})), E_R(\mathbb{K})).$$

Uma vez que a cohomologia local usual é invariante por radicais, o resultado segue. $\square$

Proposição 5.1.4. $ff-depth(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) = ff-depth(\widehat{\mathfrak{a}R}, \widehat{\mathfrak{m}R}, J\widehat{R}, \widehat{M})$.

Demonstração. Uma vez que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \cong \mathfrak{F}_{\widehat{\mathfrak{a}R}, \widehat{\mathfrak{m}R}, J\widehat{R}}^i(\widehat{M})$ (Teorema 4.1.3), o resultado segue. $\square$

Proposição 5.1.5. *Sejam $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ideais de R . Então temos que*

$$ff-depth(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \leq ff-depth(\mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J, M) + \text{ara}(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}).$$

Demonstração. Pela Proposição 5.1.3, podemos assumir que existe $x_1, \dots, x_n \in R$ tal que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (x_1, \dots, x_n)$. Vamos proceder por indução sobre n , entretanto é suficiente mostrar somente para o caso $n = 1$. Pelo Teorema 4.5.8, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \text{Hom}_R(R_{x, J}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{i+1}(M)) \rightarrow \cdots. \quad (5.1)$$

Para todo $i < ff-depth(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) - 1$, pela Definição 5.1.2 devemos ter $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M)$ e $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{i+1}(M)$ são Artinianos. Então $\text{Hom}_R(R_{x, J}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{i+1}(M))$ é Artiniano pela sequência exata 5.1. Portanto $ff-depth(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \leq ff-depth(\mathfrak{b}, \mathfrak{m}, J, M) + 1$. $\square$

Proposição 5.1.6. *Sejam $\mathfrak{a}, J$ ideais de $(R, \mathfrak{m})$. Se $f - \text{depth} M < \infty$, então*

$$f - \text{depth}(\mathfrak{a}, I, J, M) \leq \min\{f - \text{depth}(I, M), \dim M/(\mathfrak{a} + J)M\}.$$

Demonstração. Primeiramente note que

$$f - \text{depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \leq \sup\{i \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \text{ é não Artiniano}\}$$

$$\leq \sup\{i \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \neq 0\} = \dim M/(\mathfrak{a} + J)M.$$

A última igualdade segue pelo Teorema 4.3.2. Agora, pela Proposição 5.1.1 temos que $f - \text{depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \leq \inf\{i \mid H_{\mathfrak{m}}^i(M) \text{ é não Artiniano}\}$, o que completa a demonstração. $\square$

5.2 Artinianidade da cohomologia local formal

Um dos mais importantes problemas em cohomologia local é investigar propriedades de artinianidade. Partindo disto, o principal propósito desta seção é dar alguns resultados sobre a artinianidade dos módulos de cohomologia local formal e a Čech-cohomologia local formal, ambos com respeito a um par de ideais. Seja t um inteiro. Yan Gu [18] e A. Mafi [32], mostraram que $\check{\mathfrak{F}}_I^i(M)$ é Artiniano para todo $i < t$ (respectivamente para $i > t$) se, e somente se, existe um inteiro $r > 0$ tal que $I^r \check{\mathfrak{F}}_I^i(M) = 0$ para todo $i < t$ (respectivamente para $i > t$).

Para o nosso caso temos a seguinte versão deste resultado.

Teorema 5.2.1. *Sejam $\mathfrak{a}, J$ ideais de um anel local $(R, \mathfrak{m})$, M um R -módulo finitamente gerado e t um inteiro não nulo. Se $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é um R -módulo J -torção, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i > t$;

(b) $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M))$ para todo $i > t$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Seja $i > t$. Como $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M)$ é Artiniano e R um anel local, temos que $\mathfrak{a}^j \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) = 0$ para algum inteiro positivo j . Então $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M))$ para todo $i > t$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Provaremos usando indução sobre $\dim M = d$. Se $d = 0$ temos pela Proposição 4.1.4 que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ para todo $i > 0$. Assim o resultado é verdadeiro. Agora, suponha que $d > 0$ e que a afirmação é verdadeira para todos os valores menores que d . Primeiramente, como $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é $\mathfrak{a}$ -torção e J -torção, temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$. Então, a partir da sequência exata

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow 0,$$

segue do Teorema 4.2.4 a sequência exata longa

$$\dots \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \dots (\#).$$

Assim, se $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ é Artiniano para todo $i > t$ temos a afirmação. Por (#) podemos ver que $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)))$ para todo $i > t$. Então podemos assumir $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Seja $x \in \mathfrak{a}$ um elemento M -regular. Por hipótese, para todo $i > t$, existe um inteiro positivo j_i tal que $x^{j_i} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$. A sequência exata

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x^{j_i}} M \rightarrow M/x^{j_i}M \rightarrow 0$$

induz a sequência exata

$$0 \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/x^{j_i}M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^{i+1}(M)$$

para todo $i > t$. Esta sequência mostra que $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/x^{j_i}M))$ e, pela hipótese de indução, $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/x^{j_i}M)$ é Artiniano para todo $i > t$. Portanto $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i > t$. $\square$

Como uma imediata consequência do resultado prévio, temos a seguinte caracterização.

Corolário 5.2.2. *Sejam $\mathfrak{a}, J$ ideais de um anel local $(R, \mathfrak{m})$. Considere M um R -módulo finitamente gerado e t um inteiro não negativo. Se $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é um R -módulo J -torção, então*

$$g\check{g}\text{-depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) = \sup\{i : \mathfrak{a} \not\subseteq \text{Rad}(0 : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M))\}.$$

Observação 5.2.3. 1) Pelo prévio resultado e a Proposição 4.1.4 é possível mostrar que:

Se $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M))$ para todo $i > t$ então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i > t$.

Por outro lado, para a cohomologia local formal $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ a afirmação (a) $\Rightarrow$ (b) também é verdadeira.

Note também que, para todos os casos em Corolário 4.1.6, as equivalências entre (a) e (b) acontecem para $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$.

- 2) Usando a mesma idéias do teorema prévio, é possível mostrar também que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i < t$ se, e somente se, $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M))$ para todo $i < t$.

Corolário 5.2.4. *Sejam $\mathfrak{a}, J$ ideais do anel local $(R, \mathfrak{m})$. Considere M um R -módulo finitamente gerado e t um inteiro não negativo. Se $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é um R -módulo J -torção, então*

$$f\check{f}\text{-depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) = \inf\{i : \mathfrak{a} \not\subseteq \text{Rad}(0 : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M))\}.$$

Vamos dar agora um interessante resultado que generaliza [16, Proposição 2.1], [8, Teorema 2.1, Teorema 2.2]. Relembre que um ideal primo $\mathfrak{p}$ de R é dito ser um primo **atachado de M** se, para todo ideal finitamente gerado $I \subseteq \mathfrak{p}$, existe $x \in M$ tal que $I \subseteq (0 :_R x) \subset \mathfrak{p}$. Denotaremos por $\text{Att}_R(M)$ o conjunto de todos os primos atachados do R -módulo M .

Teorema 5.2.5. *Assuma que $\mathfrak{a}$ é um ideal do anel local $(R, \mathfrak{m})$. Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\dim M = d$. Então $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^d(M)$ é Artiniano para todos ideais I, J de R . Além disto*

$$\text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^d(M)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R M \cap V(J) \mid \text{cd}(I, R/\mathfrak{p}) = d\} \cap V(\mathfrak{a}),$$

onde $\text{cd}(I, R/\mathfrak{p})$ é a dimensão cohomológica do R -módulo $R/\mathfrak{p}$ com respeito a I .

Em particular $\text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^d(M)) \subset \text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I}^d(M))$.

Demonstração. Seja $\overline{R} = R/\text{Ann}_R M$. Como $H_{I,J}^d(M) \cong H_{\overline{I},\overline{J}}^d(M)$ [8, Lema 2.1] podemos considerar que $\text{Ann} M = 0$ e assim $d = \dim R$. Uma vez que $H_{I,J}^i(R) = 0$ para todo $i > d$ (Teorema 2.4.6), pelo Lema 2.4.7 temos

$$\begin{aligned} H_{I,J}^d(M/\mathfrak{a}^n M) &\cong H_{I,J}^d(R) \otimes_R M/\mathfrak{a}^n M \cong H_{I,J}^d(M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \\ &\cong H_{I,J}^d(M)/\mathfrak{a}^n H_{I,J}^d(M). \end{aligned}$$

Pelo [10, Teorema 2.1] (também citado no Capítulo 2, Seção 2.6), $H_{I,J}^d(M)$ é um R -módulo Artiniano. Então, existe um inteiro n_0 tal que, para todo inteiro $t \geq n_0$, temos que $\mathfrak{a}^t H_{I,J}^d(M) = \mathfrak{a}^{n_0} H_{I,J}^d(M)$. Como

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^d(M) \cong H_{I,J}^d(M) / \mathfrak{a}^{n_0} H_{I,J}^d(M)$$

segue que é um R -módulo Artiniano. Para a segunda afirmação, use [37, Proposição 5.2], [8, Teorema 2.1] e a equação anterior. $\square$

Teorema 5.2.6. *Assuma $\mathfrak{a}$ e J ideais do anel local $(R, \mathfrak{m})$. Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\dim M = d$. Então*

$$\text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^d(M)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R M \cap V(J) \mid \dim R/\mathfrak{p} = d\} \cap V(\mathfrak{a}).$$

Demonstração. A prova segue por [8, Teorema 2.2] e Teorema 5.2.5. $\square$

Agora uma imediata consequência do Teorema 5.2.5.

Corolário 5.2.7. *Considere $\mathfrak{a}, I, J$ ideais do anel local $(R, \mathfrak{m})$. Sejam M e N dois R -módulos finitamente gerados de dimensão d tal que $\text{Supp}_R M = \text{Supp}_R N$. Então $\text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^d(M)) = \text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^d(N))$.*

Para o próximo resultado, lembre que um R -módulo não nulo S é chamado de **secundário** quando $S \neq 0$ e, para cada $r \in R$, $rS = S$ ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n S = 0$. Uma **representação secundária para um R -módulo M** é uma expressão de M como uma soma finita de submódulos secundários de M . Se tal representação existe, dizemos que M é **representável**. Se M admite uma representação secundária minimal $M = S_1 + \dots + S_n$, então o conjunto $\text{Att}_R(M)$ dos primos atachados de M é o conjunto $\{\text{Rad}(0 :_R S_i) : i = 1, \dots, n\}$ [6, Definição 7.2.2]. Em alguns resultados nós usaremos o seguinte resultado elementar.

Lema 5.2.8. *Sejam R um anel comutativo e M, N dois R -módulos. Então $\text{Ann}_R(M) \cup \text{Ann}_R(N) \subset \text{Ann}_R \text{Ext}_R^i(M, N)$ para todo inteiro i .*

Demonstração. Sejam $x \in \text{Ann}_R(M) \cup \text{Ann}_R(N)$ e $\chi_x^N : N \rightarrow N$ definido por $n \mapsto xn$. Este mapa induz o mapa

$$\text{Ext}_R^i(M, \chi_x^N) : \text{Ext}_R^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, N)$$

que é dado pela multiplicação por x . Assuma agora que $x \in \text{Ann}_R(N)$. Então o mapa χ_x^N é o mapa nulo, e assim isto implica que o mapa induzido $\text{Ext}_R^i(M, \chi_x^N)$ é também o mapa nulo. Em outras palavras, multiplicação por x sobre $\text{Ext}_R^i(M, N)$ é zero, como queríamos. O caso onde $x \in \text{Ann}_R(M)$ é feito similarmente, usando o mapa χ_x^M . $\square$

Teorema 5.2.9. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, $\mathfrak{a}, I, J$ ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado. Se $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$ é não nulo e representável, para um inteiro i , então $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M))$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M) = S_1 + \dots + S_n$ uma representação secundária minimal de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$, onde S_k é $\mathfrak{p}_k$ -secundário para $k = 1, \dots, n$. Suponha, por contradição, que $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_k$ para um inteiro $k \in \{1, \dots, n\}$. Então existe um elemento $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}_j$. Podemos assumir um elemento $0 \neq y = (y_j) \in S_k \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$ com $y_j \in S_k$ sendo da primeira componente não nula de y .

Note que $xS_k = S_k$ uma vez que $x \notin \mathfrak{p}_j$. Como $x^j S_k \subseteq x^j \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$, segue que $S_k \subseteq x^j \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$. Além disto, $x^j H_{I, J}^i(M/\mathfrak{a}^j M) = 0$ pelo Lema 5.2.8, então podemos concluir que a j -ésima componente de cada elemento de $x^j \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$ é zero. Assim temos uma contradição devido ao fato que $y \in x^j \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$ e $y_j \in S_k$ são não nulos. Isto finaliza a prova da afirmação. $\square$

Uma consequência imediata do resultado prévio mostra que a $\mathfrak{a}$ -cohomologia local formal com respeito a um par de ideais, quando são representáveis, são módulos de $\mathfrak{a}$ -torção.

Corolário 5.2.10. *Considere as mesmas hipóteses do resultado anterior. Se $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$ é não nulo e representável, para um inteiro i , então $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M))$.*

Demonstração. Como $\text{Rad}(0 : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)) = \cap_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M))} \mathfrak{p}$, pela mesma idéia da [6, Proposição 7.2.11] e o teorema prévio segue que $\mathfrak{a} \subseteq \cap_{\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M))} \mathfrak{p}$. Assim temos a afirmação. $\square$

Observação 5.2.11. *Pelo corolário anterior, podemos concluir também que, se $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i > t$ (respectivamente $i < t$), então $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}(0 : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^i(M))$ para todo $i > t$ (respectivamente $i < t$), uma vez que módulos Artinianos são representáveis. Portanto temos que*

$$\sup\{i : \mathfrak{a} \not\subseteq \text{Rad}(0 : \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M))\} \leq g\check{g}\text{-depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \leq \dim M / (J + \mathfrak{a})M$$

e

$$0 \leq ff\text{-depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M) \leq \inf\{i : \mathfrak{a} \notin \text{Rad}(0 : \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M))\}.$$

Note que neste caso não estamos assumindo que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é um R -módulo J -torção. O leitor pode comparar este resultado com a Observação 5.2.3.

Na sequência damos um dos nossos principais resultados desta seção.

Teorema 5.2.12. *Assuma $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $\mathfrak{a}, J$ ideais de R . Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é J -torção. Se para algum inteiro t , $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i > t$, então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)/\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)$ é Artiniano.*

Demonstração. Vamos provar por indução sobre $\dim M := n$.

Se $n = 0$, temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^0(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^0(M)$ (Proposição 4.1.4). Então pelo Teorema 5.2.5, $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^0(M)$ é Artiniano como queríamos. Agora assuma que $n > 0$ e que a afirmação é verdadeira para todos os valores menores que n . A partir da sequência exata

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow 0$$

pelo Teorema 4.2.4 temos a sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{i+1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \cdots.$$

Uma vez que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é $\mathfrak{a}$ -torção segue que

$$\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = H^i(\varprojlim (\check{C}_{\mathfrak{x}, J} \otimes \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)/\mathfrak{a}^n \Gamma_{\mathfrak{a}}(M))) \cong H_{\mathfrak{m}, J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)).$$

Pela hipótese, temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ é Artiniano para todo i . Assim $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ é Artiniano para todo $i > t$.

Agora tomando a sequência exata

$$H_{\mathfrak{m}}^t(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \xrightarrow{\varphi} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \xrightarrow{\psi} H_{\mathfrak{m}}^{t+1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \quad (5.2)$$

podemos quebrar nas seguintes sequências exatas

$$0 \rightarrow \text{Ker}\varphi \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M) \rightarrow \text{Im}\varphi \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad (5.3)$$

$$0 \rightarrow \text{Im}\varphi \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \text{Im}\psi \rightarrow 0.$$

A partir disto podemos deduzir as seguintes as seguintes sequências exatas

$$\frac{\text{Ker}\varphi}{\mathfrak{a}\text{Ker}\varphi} \rightarrow \frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)}{\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)} \rightarrow \frac{\text{Im}\varphi}{\mathfrak{a}\text{Im}\varphi} \quad (1) \quad \text{e}$$

$$\text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{a}, \text{Im}\psi) \rightarrow \frac{\text{Im}\varphi}{\mathfrak{a}\text{Im}\varphi} \rightarrow \frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))}{\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))}. \quad (2)$$

Como $\text{Ker}\varphi$ e $\text{Im}\psi$ são Artinianos, de (1) e (2) que, se $\frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))}{\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))}$ é Artiniano, então $\frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)}{\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)}$ é Artiniano. A partir disto, podemos assumir que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

Seja $x \in \mathfrak{a} \setminus \cup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R M} \mathfrak{p}$ e assim temos $\dim M/xM = n - 1$. Então, a sequência exata

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

induz a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \xrightarrow{x} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \xrightarrow{\alpha} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/xM) \xrightarrow{\beta} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots. \quad (5.4)$$

Uma vez que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i > t$, a prévia sequência exata nos diz que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/xM)$ é Artiniano para todo $i > t$. Então pela hipótese de indução temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/xM)/\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/xM)$ é Artiniano. A partir desta sequência exata longa, podemos considerar as seguintes sequências exatas

$$0 \rightarrow \text{Im}\alpha \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/xM) \rightarrow \text{Im}\beta \rightarrow 0 \quad \text{e}$$

$$\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M) \xrightarrow{x} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M) \rightarrow \text{Im}\alpha \rightarrow 0$$

que induzem as seguintes duas sequências exatas

$$\text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{a}, \text{Im}\beta) \rightarrow \frac{\text{Im}\alpha}{\mathfrak{a}\text{Im}\alpha} \rightarrow \frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/xM)}{\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M/xM)} \quad (3) \quad \text{e}$$

$$\frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)}{\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)} \xrightarrow{x} \frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)}{\mathfrak{a}\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)} \rightarrow \frac{\text{Im}\alpha}{\mathfrak{a}\text{Im}\alpha} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Pelo escolha de x , por (4) segue que $\frac{\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)}{\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)} \cong \frac{Im\alpha}{\mathfrak{a}Im\alpha}$. Como $Im\beta$ é Artiniana, $Tor_1^R(R/\mathfrak{a}, Im\beta)$ é Artiniano. Pela sequência exata (3) a demonstração esta completa. $\square$

Corolário 5.2.13. *Considere as mesmas hipóteses do resultado anterior. Se $t = g\check{g} - \text{depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M)$, então $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)/\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)$ é Artiniano.*

Corolário 5.2.14. *Considere $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $\mathfrak{a}, J$ ideais de R . Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é J -torção.*

- (1) *Com a mesma idéias da prova do Teorema 5.2.12 é possível mostra que: Se para algum inteiro t , $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i < t$, então $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)/\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)$ é Artiniano.*
- (2) *Pelo item anterior e a definição de $f\check{f}$ -depth temos que, Se $t = f\check{f} - \text{depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M)$, então $\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)/\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M)$ é Artiniano.*

5.3 Cossuporte e primos coassociados

Um dos conceitos também estudados em módulos cohomologia local formal são os de primos coassociados e de cossuporte. Vale lembrar que tais temas nasceram como um conceito “dual” ao de primos associados e de suporte de um módulo. Apesar do conceito de suporte e de primos associados da cohomologia local terem sido estudados em muitos detalhes, é de pouco conhecimento e investigação tais conceitos para a cohomologia local formal. Sendo assim, o objetivo desta seção é investigar e dar alguns resultados sobre o cossuporte e primos coassociados dos módulos de cohomologia local formal com respeito a um par de ideais.

Primeiramente um resultado técnico.

Proposição 5.3.1. *Se M é um R -módulo finitamente gerado, então $\cap_{t>0} \mathfrak{a}^t \tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Note que $\mathfrak{a} \varprojlim_t N_t \subseteq \varprojlim_t \mathfrak{a} N_t$ se $\{N_t\}$ é um sistema inverso. Assim

$$\cap_{t>0} \mathfrak{a}^t \tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \cong \varprojlim_t \mathfrak{a}^t \varprojlim_n H_{I,J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \subseteq \varprojlim_t \varprojlim_n \mathfrak{a}^t H_{\mathfrak{m},J}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$$

$$\cong \varprojlim_n \varprojlim_t \mathfrak{a}^t H_{\mathfrak{m},J}^i(M/\mathfrak{a}^n M).$$

Como $H_{\mathfrak{m},J}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \cong \varinjlim_{\tilde{\mathfrak{a}} \in \widetilde{W}(\mathfrak{m},J)} H_{\tilde{\mathfrak{a}}}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ (veja Teorema 2.3.2) segue que

$$\begin{aligned} \cap_{t>0} \mathfrak{a}^t \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) &\cong \varprojlim_n \varprojlim_t \mathfrak{a}^t \varinjlim_{\tilde{\mathfrak{a}} \in \widetilde{W}(\mathfrak{m},J)} H_{\tilde{\mathfrak{a}}}^i(M/\mathfrak{a}^n M) \\ &\subseteq \varprojlim_n \varprojlim_t \sum_{\tilde{\mathfrak{a}} \in \widetilde{W}(\mathfrak{m},J)} \mathfrak{a}^t H_{\tilde{\mathfrak{a}}}^i(M/\mathfrak{a}^n M). \end{aligned}$$

Como para todo $t \geq n$ temos $\mathfrak{a}^t H_{\tilde{\mathfrak{a}}}^i(M/\mathfrak{a}^n M) = 0$ pelo Lema 5.2.8, a prova está completa. $\square$

Lema 5.3.2. *Sejam $\mathfrak{a}, J$ ideais do anel local $(R, \mathfrak{m})$, M um R -módulo e S um conjunto multiplicativo de R tal que $S \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$. Então $\text{Hom}_R(S^{-1}R, \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)) = 0$ para todo i inteiro.*

Demonstração. Seja s_1 um elemento de $S \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$. Se $f \in \text{Hom}_R(S^{-1}R, \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M))$ então $f(r/s) = s_1^j f(r/s_1^j s) \in \mathfrak{a}^j \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ para todo $r/s \in S^{-1}R$ e $j > 0$. Então $f(r/s) \in \cap_{j>0} \mathfrak{a}^j \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ pela Proposição 5.3.1. Portanto $f = 0$ e isto prova a afirmação. $\square$

Em [37], Melkerson e Schenzel definem o conceito de **cosuporte** para um R -módulo M dado por

$$\text{CoSupp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec} R ; \text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, M) \neq 0\}.$$

Neste sentido, o lema anterior é útil para provar o seguinte resultado.

Proposição 5.3.3. *Sejam $\mathfrak{a}, J$ ideais do anel local $(R, \mathfrak{m})$, M um R -módulo. Então para todo i inteiro*

$$\text{CoSupp}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)) \subset V(\mathfrak{a}).$$

.

Demonstração. Seja $\mathfrak{p} \in \text{CoSupp}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M))$. Então $\text{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)) \neq 0$ e assim, pelo Lema 5.3.2 segue que $\mathfrak{a} \cap (R/\mathfrak{p}) = \emptyset$. Portanto $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ e assim temos o desejado. $\square$

O Teorema 5.2.12 também mostra uma outra consequência envolvendo a noção de primos coassociados. Um ideal primo $\mathfrak{p} \in R$ é chamado ser um ideal primo **coassociado** de um R -módulo M , se existe uma imagem cocíclica de M , digamos L , tal que $\mathfrak{p} = \text{Ann}(L)$. O conjunto de todos os ideais primos coassociados de M é denotado por $\text{Coass}_R(M)$ ([55]). Em outras palavras, quando consideramos um anel local $(R, \mathfrak{m})$, $\text{Coass}_R(M) = \text{Ass}(M^\vee)$ onde $M^\vee = \text{Hom}(M, E(R/\mathfrak{m}))$. Além disto, se $\mathfrak{a}$ é um ideal de R , as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) $\text{Coass}_R(M/\mathfrak{a}M) = \text{Coass}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$ [55, Teorema 1.21];
- (ii) Se M é Artiniano, então $\text{Coass}_R(M)$ é finito [55, Lema 1.22];
- (iii) $\text{Coass}_R M \subset \text{CoSupp}_R(M)$ [55, Teorema 2.2].

Teorema 5.3.4. *Assuma que $\mathfrak{a}$ é um ideal do anel local $(R, \mathfrak{m})$. Seja M um R -módulo finitamente gerado com $\dim M = d$. Então*

$$\text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^d(M)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R M \cap V(J) \mid \text{cd}(I, R/\mathfrak{p}) = d\} \cap V(\mathfrak{a}),$$

onde $\text{cd}(I, R/\mathfrak{p})$ é a dimensão cohomologia do R -módulo $R/\mathfrak{p}$ com respeito a I . Em particular,

$$\text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^d(M)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R M \cap V(J) \mid \dim R/\mathfrak{p} = d\} \cap V(\mathfrak{a}).$$

Demonstração. A afirmação segue imediatamente do Teorema 5.2.5, Teorema 5.2.6 e [55, Teorema 1.14]. $\square$

Analogamente ao Corolário 5.2.7, pelo teorema prévio temos o seguinte resultado.

Proposição 5.3.5. *Considere $\mathfrak{a}, I, J$ ideais do anel local $(R, \mathfrak{m})$. Sejam M e N dois R -módulos finitamente gerados de dimensão d tal que $\text{Supp}_R M = \text{Supp}_R N$. Então*

$$\text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^d(M)) = \text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^d(N)).$$

Proposição 5.3.6. *Assuma $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $\mathfrak{a}, J$ ideais de R . Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é J -torção. Se para algum inteiro t , $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i > t$ (respectivamente $i < t$) então $\text{Coass}_R \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \cap V(\mathfrak{a})$ é finito.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.12 e comentário (i) e (ii) anterior, o resultado segue. $\square$

Observação 5.3.7. *Se $t = g\check{g} - \text{depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M)$ (resp. $t = f\check{f} - \text{depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M)$), pelo Corolário 5.2.13 (resp. Corolário 5.2.14) segue que $\text{Coass}_R \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \cap V(\mathfrak{a})$ é finito.*

Note que, com as mesmas hipóteses da Proposição 5.3.6, pela Proposição 4.1.4 e [55, Corolário 1.10] temos que $\text{Coass}_R \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \cap V(\mathfrak{a})$ é finito. Portanto, pelo comentário (iii) anterior e Proposição 5.3.3 segue que $\text{Coass}_R \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)$ é finito.

Quando M é J -torção temos um resultado similar para módulos de cohomologia local formal com respeito a uma par de ideais.

Corolário 5.3.8. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, $\mathfrak{a}, J$ ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado J -torção. Se $t = \sup\{\text{ara}(\tilde{\mathfrak{a}}) ; \tilde{\mathfrak{a}} \in \tilde{W}(\mathfrak{m}, J)\}$ então $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \otimes R/\mathfrak{a}$ é Artiniano e $\text{Coass}_R \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)$ é finito.*

Demonstração. Como M é J -torção, temos que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é J -torção e $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)$ (Corolário 4.1.6). Além disto, pelo Teorema 2.3.2,

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \cong \varprojlim_n \varinjlim_{\tilde{\mathfrak{a}} \in \tilde{W}(\mathfrak{m}, J)} H_{\tilde{\mathfrak{a}}}^t(M/\mathfrak{a}^n M).$$

A afirmação segue pelo [6, Corolário 3.3.3], Teorema 5.2.12, Proposição 5.3.6 e comentário anterior.

□

Corolário 5.3.9. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, $\mathfrak{a}, J$ ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado J -torção. Então $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^d(M) \otimes R/\mathfrak{a}$ é Artiniano e $\text{Coass}_R \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^d(M)$ é finito, onde $d = \dim M/(\mathfrak{a} + J)M$.*

Demonstração. Pela mesma idéia do resultado anterior temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)$ (Corolário 4.1.6). O resultado segue da Proposição 5.3.6, Proposição 5.3.3 e $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^j(M) = 0$ para todo $d < j$ (Teorema 4.3.2).

□

Lema 5.3.10. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de dimensão d , $\mathfrak{a}, I, J$ ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado. Então*

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^n(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a}, I, J}^n(R) \otimes_R M$$

onde $n := \dim R/\mathfrak{a} + J$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.2, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^n(-)$ é um funtor exato à direita. Além disto pela definição de limite inverso, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(-)$ preserva somas diretas finitas. Portanto a afirmação segue do Teorema de Watt's [42, Teorema 5.45].

□

Por este resultado podemos ver que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^n(M) = 0$ se, e somente se, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^n(R) = 0$.

O [16, Lema 4.2] mostra que, para um anel local $(R, \mathfrak{m})$ e M um R -módulo, o conjunto de primos minimais do $\text{CoSupp}_R(M)$ é finito, se e somente se, $\text{CoSupp}_R(M)$ é um subconjunto fechado do $\text{Spec} R$. A partir disto e o [55, Teorema 2.6], podemos concluir que $\text{CoSupp}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M))$ é fechado se, e somente se, $\text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^i(M))$ é finito, para algum inteiro i . Pelo Teorema 5.2.5 segue que $\text{CoSupp}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},I,J}^d(M))$ é fechado, onde $\dim M = d$.

Observação 5.3.11. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay completo de dimensão d e J um ideal perfeito de R , i.e, $\text{grade}(J, R) = \text{pd}_R R/J = t$. Então, se M é um R -módulo finitamente gerado, pela construção na Seção 3 temos o isomorfismo*

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{a}}^{d-t-i}(M, S)^\vee$$

where $(-)^\vee = \text{Hom}_R(-, E_R(\mathbb{K}))$, $S = H_{\mathfrak{m},J}^{d-t}(R)^\vee$, $i \in \mathbb{Z}$.

Portanto, pelo [55, Corolário 1.18] (respectivamente [55, Corolário 2.9]) segue que

$$\text{CoSupp}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)) = \text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^{d-t-i}(M, S)) \quad \text{e}$$

$$\text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)) = \text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^{d-t-i}(M, S))$$

se $H_{\mathfrak{a}}^{d-t-i}(M, S)$ é um módulo finitamente gerado.

Proposição 5.3.12. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay completo de dimensão d e J um ideal perfeito de R , i.e, $\text{grade}(J, R) = \text{pd}_R R/J = t$. Então, se M é um R -módulo finitamente gerado, então*

$$\text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^n(M)) = \text{Supp}_R(M) \cap \text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^{d-t-n}(S))$$

onde $n := \dim R/\mathfrak{a} + J$.

Demonstração. Note que, pelo Lema 5.3.10, [55, Teorema 1.21] e comentário prévio segue que

$$\begin{aligned} \text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^n(M)) &= \text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^n(R) \otimes_R M) \\ &= \text{Supp}_R(M) \cap \text{Coass}_R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^n(R)) \\ &= \text{Supp}_R(M) \cap \text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^{d-t-n}(S)). \end{aligned}$$

□

5.4 Finitude de $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ e $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$

Nesta seção, vamos investigar a finitude dos módulos Čech cohomologia local formal e cohomologia local formal definidos por um par de ideais. Vamos dar um importante critério neste sentido e mostrar um específico caso da não finitude da cohomologia local formal e Čech-cohomologia local formal. O próximo resultado generaliza [18, Teorema 2.8].

Teorema 5.4.1. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $\mathfrak{a}, J$ ideais de R . Sejam M um R -módulo finitamente gerado e $t \geq 1$ um inteiro fixado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ para todo $i \geq t$.
- (2) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é finitamente gerado para todo $i \geq t$.
- (3) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(R/\mathfrak{p}) = 0$ para todo $i \geq t$, $\mathfrak{p} \in \text{Supp}M$.
- (4) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(R/\mathfrak{p})$ é finitamente gerado para todo $i \geq t$, $\mathfrak{p} \in \text{Supp}M$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) segue imediatamente.

(2) $\Rightarrow$ (1) Considere $d = \dim M \geq \dim(M/\mathfrak{a}M)$ e vamos proceder por indução sobre d . Se $d = 0$ temos pela Proposição 4.1.4 que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ para todo $i \geq 1$. Assim, suponha que $d > 0$ e que o resultado tem sido provado para valores menores que d . Vamos assumir primeiramente que $\text{depth}M > 0$. Então existe x um elemento M -regular em $\mathfrak{m}$ tal que a partir da sequência exata curta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

podemos deduzir a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \xrightarrow{x} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/xM) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots.$$

Pela hipótese de indução temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/xM) = 0$ para todo $i \geq t$ e então $x\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ para todo $i \geq t$. Como para todo $i \geq t$, $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é finitamente gerado temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ para todo $i \geq t$.

Agora assuma que $\text{depth} M = 0$ e considere $N = H_{\mathfrak{m}}^0(M)$. Note que

$$\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(N) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(N) = \varprojlim_n H_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(N/\mathfrak{a}^n N) = N,$$

e $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(N) = 0$ para todo $i \geq 1$, uma vez que N é também $(\mathfrak{m}, J)$ -torção e Artiniano. A partir da sequência exata curta $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ obtemos $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/N)$ para todo $i \geq 1$. Assim, podemos assumir que M é $\mathfrak{m}$ -torção livre e afirmação segue da primeira etapa desta prova.

(1) $\Rightarrow$ (3) Pela Proposição 4.1.4 e o Teorema 4.3.2 temos que

$$\dim_R M/(\mathfrak{a} + J)M = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \neq 0\} \leq \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \neq 0\}.$$

Como $\dim \frac{R}{(\mathfrak{a}+J)+\mathfrak{p}} \leq \dim \frac{M}{(\mathfrak{a}+J)M}$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{Supp} M$, podemos concluir que

$$\sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(R/\mathfrak{p}) \neq 0\} \leq \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \neq 0\}.$$

Portanto, $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(R/\mathfrak{p}) = 0$ para todo $i \geq t$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Considere uma filtração $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_s = M$ de submódulos de M tal que $M_j/M_{j-1} \cong R/\mathfrak{p}_j$ onde $\mathfrak{p}_j \in \text{Supp} M$ e $1 \leq j \leq s$. Por indução sobre j e a sequência exata

$$\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M_{j-1}) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M_j) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(R/\mathfrak{p}_j),$$

segue que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ para todo $i \geq t$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) A prova é análoga a prova de (1) $\Leftrightarrow$ (2).

□

Uma consequência imediata do resultado prévio segue abaixo.

Corolário 5.4.2. *Seja $\dim_R M/(\mathfrak{a} + J)M = d > 0$ com $J \neq R$. Então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^d(M)$ é não finitamente gerado.*

Demonstração. Se $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^d(M)$ é finitamente gerado, temos que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é finitamente gerado para todo $i \geq d$. Portanto pelo teorema anterior $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ para todo $i \geq d$. Relembre que $d = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \neq 0\} \leq \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \neq 0\}$. Como $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^d(M) = 0$, pela Proposição 4.1.4 segue que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^d(M) = 0$ e assim temos uma contradição. $\square$

Com respeito a finitude da cohomologia local formal definida por um par de módulos damos o seguinte resultado.

Corolário 5.4.3. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $\mathfrak{a}, J$ ideais de R . Seja M um R -módulo finitamente gerado e $t \geq 1$ um inteiro fixado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) = 0$ para todo $i \geq t$.
- (2) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é finitamente gerado para todo $i \geq t$.
- (3) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(R/\mathfrak{p}) = 0$ para todo $i \geq t$, $\mathfrak{p} \in \text{Supp} M$.
- (4) $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(R/\mathfrak{p})$ é finitamente gerado para todo $i \geq t$, $\mathfrak{p} \in \text{Supp} M$.

Além disto, se $\dim_R M/(\mathfrak{a} + J)M = d > 0$ com $J \neq R$, então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^d(M)$ é não finitamente gerado.

Demonstração. A prova segue pelo Teorema 5.4.1 e a sequência exata da Proposição 4.1.4. A segunda afirmação segue pela mesma idéia do corolário anterior. $\square$

Teorema 5.4.4. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $\mathfrak{a}, J$ ideais de R . Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ é J -torção. Então $\text{Hom}(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^t(M))$ é finitamente gerado, onde $t = f\check{f}\text{-depth}(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J, M)$.*

Demonstração. Vamos usar indução sobre t . Quando $t = 0$, uma vez que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M) \cong \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}\hat{R},\mathfrak{m}\hat{R},J\hat{R}}^0(\hat{M})$ e $\dim(M/\mathfrak{a}M) = \dim(\hat{M}/\mathfrak{a}\hat{R}\hat{M})$, podemos assumir que M é completo na topologia $\mathfrak{m}$ -ádica. Assim, M é também completo na topologia $\mathfrak{a}$ -ádica.

Então $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M) = H^0(\varprojlim(\check{C}_{\mathfrak{x},J} \otimes M/\mathfrak{a}^n M)) \subseteq \varprojlim(M/\mathfrak{a}^n M) = M$. Isto implica que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M)$ é finitamente gerado como um $\hat{R}$ -módulo. Logo $\text{Hom}(\hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M))$ é finitamente como $\hat{R}$ -módulo. Além disto $\text{Hom}(\hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M))$ é um $R/\mathfrak{m}$ -espaço vetorial de dimensão finita.

Por outro lado, como $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M)$ tem a estrutura de um $\hat{R}$ -módulo, temos o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M)) &\cong \text{Hom}_{\hat{R}}(R/\mathfrak{m} \otimes \hat{R}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M)) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \text{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M))) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M)). \end{aligned}$$

Então, $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^0(M))$ é finitamente gerado.

Na sequência, vamos supor que $t > 0$ e que a afirmação tem sido provada para valores menos que t . A partir da sequência exata

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow 0,$$

pelo Teorema 4.2.4 obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \xrightarrow{\alpha} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M) \xrightarrow{\beta} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^{i+1}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \rightarrow \cdots \quad (1)$$

Também, pela hipótese temos que

$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) &= H^i(\varprojlim(\check{C}_{\mathfrak{x},J} \otimes \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)/\mathfrak{a}^n \Gamma_{\mathfrak{a}}(M))) \\ &\cong H_{\mathfrak{m},J}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \\ &\cong H_{\mathfrak{m}}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)), \end{aligned}$$

Segue então que para algum inteiro s , $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)$ é Artiniano para todo $i < s$ se, e somente se, $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ é Artiniano.

A partir das sequência exata (1), temos a seguinte sequência exata

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \text{Ker}\alpha) \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m},J}^i(M)) \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \text{Im}\alpha) \\ \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{m}, \text{Ker}\alpha) \rightarrow \cdots, \end{aligned}$$

$$\cdots \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \operatorname{Im}\beta) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \operatorname{Im}\beta).$$

Note que $\operatorname{Ker}\alpha$ e $\operatorname{Im}\beta$ são Artinianos, então as sequência anteriores mostram que

$$\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M))$$

é finitamente gerado se, e somente se,

$\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^i(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)))$ é finitamente gerado. Portanto, podemos assumir $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

Assim existe x um elemento M -regular tal que $x \in \mathfrak{a}$.

Pelo Teorema 4.2.4, sequência exata curta $0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$ implica na sequência (5.4). Isto implica também que $\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M/xM)$ é Artiniano para todo $i < t-1$. Assim pela hipótese de indução, $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M/xM))$ é finitamente gerado. Por outro lado, a sequência exata

$$0 \rightarrow \frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)}{x\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)} \rightarrow \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M/xM) \rightarrow (0 :_{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)} x) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M/xM)) &\rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, (0 :_{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)} x)) \\ \text{induz a sequência} &\rightarrow \operatorname{Ext}_R^1\left(R/\mathfrak{m}, \frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)}{x\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)}\right) \end{aligned}$$

Como $\frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)}{x\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)}$ é Artiniano, $\operatorname{Ext}_R^1\left(R/\mathfrak{m}, \frac{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)}{x\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^{t-1}(M)}\right)$ é finitamente gerado por [9, Lema 2.2].

Então segue que $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, (0 :_{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)} x))$ é finitamente gerado. Como $x \in \mathfrak{m}$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, (0 :_{\check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)} x)) &\cong \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m} \otimes R/xR, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M)) \end{aligned}$$

Portanto $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \check{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}, J}^t(M))$ é finitamente gerado.

□

APÊNDICE

Neste apêndice, iremos descrever alguns conceitos que são usualmente utilizados no decorrer deste trabalho. Mais especificamente, vamos falar sobre a extensão essencial, envolvente injetivo, limite inverso e direto de um módulo, dualidade de Matlis, bem como propriedades envolvendo estes temas. Vale ressaltar que tais resultados podem ser encontrados em [42], [7] e [25].

5.4.1 Envolvente injetivo

A fim de definir o que é o envolvente injetivo de um módulo, inicialmente vamos falar sobre a extensão essencial de um módulo.

Definição 5.4.5 (Extensão Essencial). *Sejam $M \subseteq N$ dois R -módulos não nulos. Dizemos que N é uma **extensão essencial** do R -submódulo M se uma das seguintes condições equivalentes valem:*

- (i) $M \cap \tilde{N} \neq \{0\}$, para todo $\tilde{N} \subset N$ R -submódulo não nulo.
- (ii) Para todo $0 \neq n \in N$, existe um elemento $r \in R$ tal que $rn \neq 0$ está em M .
- (iii) Se Q é um R -módulo, para todo R -homomorfismo $\Phi : N \rightarrow Q$, se $\Phi|_M : M \rightarrow Q$ é injetiva, então $\Phi : N \rightarrow Q$ é injetiva.

Se além disso tivermos $M \neq N$, então dizemos que N é uma **extensão essencial própria** de M .

Note que de fato temos equivalências na definição anterior: (i) $\Rightarrow$ (ii) seja n um elemento não nulo qualquer em N . Tomando o R -submódulo Rn de N , pela hipótese temos que $M \cap Rn \neq \{0\}$. Logo existe t não nulo em $M \cap Rn$ e $r \in R$ tal que $t = rn$. Assim $rn \in M$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $\Phi : N \rightarrow Q$ um R -homomorfismo e suponha que existe $n \neq 0$ em $\text{Ker}(\Phi)$. Pela hipótese, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rn \in M$ e como $\Phi(n) = 0$, temos $\Phi(rn) = 0$. Então $rn \in \text{ker}(\Phi|_M)$ e como $\Phi|_M$ é injetor, segue que $\text{ker}(\Phi|_M) = \{0\}$. Consequentemente $rn = 0$, o que gera uma contradição. Portanto, $\text{ker}(\Phi) = \{0\}$ e então $\Phi : N \rightarrow Q$ é injetivo.

(iii) $\Rightarrow$ (i): fica de exercício para o leitor.

Definição 5.4.6 (Extensão Essencial Maximal). *Sejam $M \subseteq N$ R -módulos não nulos. Se N é uma extensão essencial de M tal que N não possui extensão essencial própria, então $M \subseteq N$ é chamada uma **extensão essencial maximal**.*

A seguinte proposição caracteriza um R -módulo injetivo em termos de extensão essencial.

Proposição 5.4.7. (1) *Um R -módulo E é injetivo se, e somente se, ele não possui extensão essencial própria.*

(2) *As seguintes condições sobre um R -módulo E contendo um R -módulo M são equivalentes:*

- (i) *E é uma extensão essencial maximal de M ;*
- (ii) *E é uma extensão essencial de M e E é injetivo;*
- (iii) *E é injetivo e não existe R -módulo injetivo $\tilde{E}$ com $M \subset \tilde{E} \subset E$ e $\tilde{E} \subset E$ propriamente.*

Além disso, um tal R -módulo E sempre existe.

Demonstração. (1) Assuma que o R -módulo E é injetivo e que $E \subset M$ é uma extensão essencial própria de E . Pelo [42, Teorema 3.19] temos que E é um somando direto de M e assim existe um submódulo não nulo N de M com $M = E \oplus N$. Logo $N \cap E = \{0\}$, o que contraria M ser uma extensão essencial. Portanto, E não possui extensão essencial própria.

Agora, assumamos que E não possui extensão essencial própria e seja M um R -módulo injetivo contendo E . Pelo Lema de Zorn, existe um submódulo N de M maximal com $E \cap N = \{0\}$. Considerando a composição $E \hookrightarrow M \rightarrow M/N$, temos que é um monomorfismo (uma vez que $E \cap N = \{0\}$) e além disso M/N é uma extensão essencial de E . De fato, se S/N é um submódulo não nulo de M/N então $S \supset N$ propriamente e da maximalidade de N vale que

$S \cap E \neq \{0\}$. Segue então que S/N intersecta E . Pela hipótese, a composição $E \hookrightarrow M \rightarrow M/N$ é um isomorfismo, de onde $M = E + N$. Como $E \cap N = \{0\}$, temos E um somando direto de M e portanto E é um R -módulo injetivo pelo [42, Teorema 3.19].

(2) (i) $\Rightarrow$ (ii): Sendo E uma extensão essencial maximal de M , temos que E não possui extensão essencial própria. Assim pela parte (1), segue que E é um R -módulo injetivo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponha a existência do R -módulo $\tilde{E}$. Desta forma $\tilde{E}$ deve ser um somando direto de E , digamos $E = \tilde{E} \oplus \bar{E}$. Uma vez que $M \subset \tilde{E}$, temos que $\tilde{E} \cap \bar{E} = \{0\}$ o que implica $M \cap \bar{E} = \{0\}$ contrariando o fato de E ser uma extensão essencial de M .

(iii) $\Rightarrow$ (i) Assuma somente que E é um R -módulo injetivo contendo M e considere a família de todas as extensões essenciais de M que estão contidas em E . Sabemos que se $M \subset E$ e $\{E_i : i \in \Omega\}$ uma família de R -submódulos de E , com a relação de ordem parcial dada pela inclusão $\subseteq$ usual de conjuntos, em que cada E_i é uma extensão essencial para M devemos ter que $\bigcup_i E_i$ é uma extensão essencial para M (ver [42]). Note que o Lema de Zorn nos fornece que a família $\{E_i : i \in \Omega\}$ possui um elemento maximal, digamos $\tilde{E}$. Afirmamos que $\tilde{E}$ é uma extensão essencial maximal de M .

De fato, suponha que N é uma extensão essencial de M que contém $\tilde{E}$. Uma vez que E é um R -módulo injetivo, existe uma aplicação $\Phi : N \rightarrow E$ com $\Phi|_{\tilde{E}} = i$, onde $i : \tilde{E} \rightarrow E$ é a aplicação de inclusão, devemos ter que Φ fixa $\tilde{E}$. Como $M \subset \tilde{E} \subset N$ e tanto $\tilde{E}$ como N são extensões essenciais para M , então N é uma extensão essencial para $\tilde{E}$. Assim, pela definição de extensão essencial temos que $\Phi : N \rightarrow E$ é um monomorfismo. Além disso, $\Phi(N)$ é uma extensão essencial de M contida em E . A maximalidade de $\tilde{E}$ nos fornece que $\Phi(N) = \tilde{E}$, de onde $\tilde{E} = N$. Concluimos que $\tilde{E}$ é uma extensão essencial maximal de M , ou seja, $\tilde{E}$ não possui extensão essencial própria. Pela parte (1) temos que $\tilde{E}$ é R -módulo injetivo. Pela hipótese, devemos ter $\tilde{E} = E$, como desejado.

Por fim, para provar a existência do R -módulo E basta mergulhar M em um R -módulo injetivo e tomar o R -submódulo $\tilde{E}$ como construído. $\square$

Definição 5.4.8. Um R -módulo E satisfazendo qualquer uma das condições equivalentes do item (2) da proposição anterior é denominado uma **envolvente injetivo** do R -módulo M . Este envolvente injetiva de um R -módulo M será denotada por $E_R(M)$ ou $E(M)$.

Desta forma pelo que foi feito anteriormente temos que para um dado um R -módulo M , sempre existe envolvente injetivo para M . Provemos agora a unicidade deste envolvente.

Teorema 5.4.9. *Considere E um envolvente injetivo de um R -módulo M .*

(1) *Se D é um R -módulo injetivo contendo M , então existe um monomorfismo $\Phi : E \rightarrow D$ que fixa M .*

(2) *Se $M \subseteq E$ e $M \subseteq \tilde{E}$ são duas extensões essenciais maximais para o R -módulo M , então existe um isomorfismo $E \cong \tilde{E}$ que fixa M .*

Demonstração. (1) Como D é um R -módulo injetivo temos que existe um R -homomorfismo $\Phi : E \rightarrow D$ tal que $\Phi|_M = i$, onde $i : M \rightarrow D$ é a aplicação de inclusão. É conhecido que se E é uma extensão essencial para o R -módulo M e $\Phi : E \rightarrow D$ é um R -homomorfismo com $\Phi|_M$ sendo um monomorfismo, então $\Phi : E \rightarrow D$ é um monomorfismo [42]. Desta forma segue que $\Phi : E \rightarrow D$ é um monomorfismo, uma vez que E é uma extensão essencial de M .

(2) O item anterior nos fornece que existe um monomorfismo $\Phi : E \rightarrow \tilde{E}$ que fixa M . Afirmamos que por $\tilde{E}$ ser uma extensão essencial de M , o monomorfismo Φ também é um epimorfismo. De fato, suponha que Φ não seja sobrejetor. Então $\Phi(E)$ é um somando direto de $\tilde{E}$, uma vez que este é um R -módulo injetivo (pelo [42, Teorema 3.19]) e $\Phi(E) \supset \Phi(M) = M$. Agora, note que se tomarmos o R -submódulo $N = \tilde{E} \setminus \Phi(E)$ de $\tilde{E}$ temos que $M \cap N = \{0\}$, o que contraria $\tilde{E}$ ser extensão essencial de M . $\square$

Lema 5.4.10. *Seja R um anel noetheriano, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ e M um R -módulo finitamente gerado. Então $\text{Ass}(M) = \text{Ass}(E(M))$. Em particular, temos*

$$\text{Ass}(E(R/\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}.$$

Demonstração. Como $M \subseteq E(M)$, segue que $\text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(E(M))$. Reciprocamente, suponha que $Q \in \text{Ass}(E(M))$. Desta forma, pela definição, existe um R -submódulo $U \subset E(M)$ tal que U é isomorfo à R/Q . Desde que $M \subset E(M)$ é uma extensão essencial temos que $U \cap M \neq \{0\}$ e assim $Q \in \text{Ass}(U \cap M) \subset \text{Ass}(M)$. Portanto, $\text{Ass}(M) = \text{Ass}(E(M))$. Observe agora que para $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, temos que $\text{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. De fato, pela definição

temos que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R/\mathfrak{p})$. Agora se $Q \in \text{Ass}(R/\mathfrak{p})$, existe $m + \mathfrak{p}$ não nulo em $R/\mathfrak{p}$ tal que $Q = \text{Ann}(m + \mathfrak{p}) = \{a \in R \mid am \in \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p}\}$. Portanto, em particular, $\text{Ass}(E_R(R/\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. $\square$

Vamos provar agora um teorema de estrutura para módulos injetivos.

Teorema 5.4.11. *Seja E um R -módulo injetivo sobre um R é um anel noetheriano. Então existe uma decomposição em soma direta*

$$E \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_{\mathfrak{p}}},$$

e os números $\mu_{\mathfrak{p}}$ são independentes da decomposição.

Demonstração. Pelo Lema de Zorn, existe uma família maximal $\{E_i\}_{i \in \Omega}$ de R -submódulos injetivos de E tal que $E_i \cong E(R/\mathfrak{p}_i)$ e $\sum E_i$ é uma soma direta, digamos $\tilde{E}$. Pela [25, Proposição A.18] temos que o R -módulo $\tilde{E}$ é injetivo e então $E = \tilde{E} \oplus \hat{E}$. Suponha que $\hat{E}$ é não nulo. Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo associado ao R -módulo $\hat{E}$ e considere um mergulho $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow \hat{E}$. Isto nos fornece uma cópia de $E_R(R/\mathfrak{p})$ que está contida em $\hat{E}$, o que contradiz a maximalidade de $\{E_i\}$. Isto prova a existência de uma tal decomposição. $\square$

Definição 5.4.12. *Seja R um anel noetheriano, M um R -módulo e $E^\bullet(M)$ a resolução injetiva minimal de M . Para cada inteiro $i \geq 0$, o teorema anterior nos fornece uma decomposição*

$$E^i(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)}.$$

O número $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ é o i -ésimo número de Bass de M com respeito ao ideal primo $\mathfrak{p}$.

A título de curiosidade, cada $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ considerado anteriormente está bem definido, ou melhor, para $k(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, temos que

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \text{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^i(k(\mathfrak{p}), M_{\mathfrak{p}}).$$

Para a prova deste resultado, veja [25, Teorema A.24].

5.4.2 Limite direto

Nesta seção vamos dar a definição de limite direto de uma família de módulos e algumas propriedades que são usadas com frequência neste trabalho. Para iniciar, precisamos de uma importante definição.

Definição 5.4.13. *Seja $(\Omega, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado (ou seja, a relação $\leq$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva). Dizemos que $(\Omega, \leq)$ é um **conjunto dirigido** se dados dois elementos $i, \tilde{i} \in \Omega$, existe $\hat{i} \in \Omega$ tal que $i \leq \hat{i}$ e $\tilde{i} \leq \hat{i}$.*

Por exemplo, seja X um conjunto e $\Omega = \wp(X)$ o conjunto das partes de X , parcialmente ordenado pela relação de inclusão: $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$. Então, $(\wp(X), \leq)$ é um conjunto dirigido.

Um segundo exemplo que citamos é quando consideramos X um espaço topológico e tomamos $\Omega = \{K \subset X \mid K \text{ é compacto}\}$. Defina em Ω a relação de ordem parcial $K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_1 \subset K_2$. Então, $(\Omega, \leq)$ é um conjunto dirigido. De fato, dados K_1, K_2 compactos de X , tome o compacto $K_1 \cup K_2 \in \Omega$ e assim temos $K_1 \leq K_1 \cup K_2$ e $K_2 \leq K_1 \cup K_2$.

Definição 5.4.14. *Seja $(\Omega, \leq)$ um conjunto dirigido. Um **sistema direto** de R -módulos, denotado por $(M_i, \Phi_{\tilde{i}, i})_{i \in \Omega}$, é uma família de R -módulos $(M_i)_{i \in \Omega}$ indexada no conjunto dirigido $(\Omega, \leq)$ juntamente com uma família de R -homomorfismos: $\{\Phi_{\tilde{i}, i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}, \forall i \leq \tilde{i}\}$ tal que*

(1) $\Phi_{i, i} : M_i \rightarrow M_i$ é o R -homomorfismo identidade;

(2) Se $i \leq \tilde{i} \leq \hat{i}$, tomando os R -homomorfismos $\Phi_{\tilde{i}, i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$ e $\Phi_{\hat{i}, \tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow M_{\hat{i}}$ temos que

$$\Phi_{\hat{i}, i} \equiv \Phi_{\hat{i}, \tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i}, i}$$

Definição 5.4.15. *Um **limite direto** de um sistema direto de R -módulos $(M_i, \Phi_{\tilde{i}, i})_{i \in \Omega}$ é um R -módulo M juntamente com uma família de R -homomorfismos $\{\Phi_i : M_i \rightarrow M \mid i \in \Omega\}$ tal que:*

(I) Para cada $i \leq \tilde{i}$, tomando os R -homomorfismos $\Phi_i : M_i \rightarrow M$, $\Phi_{\tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow M$ e $\Phi_{\tilde{i}, i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$ temos $\Phi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i}, i} \equiv \Phi_i$, se $i \leq \tilde{i}$.

(II) (Propriedade Universal) Para cada R -módulo N e para qualquer família de homomorfismos de R -módulos: $\{\Psi_i : M_i \rightarrow N \mid i \in \Omega\}$ tal que vale $\Psi_{\tilde{i}} \equiv \Phi_{\tilde{i}, i} \circ \Psi_i$, $\forall i \leq \tilde{i}$, onde $\Psi_i : M_i \rightarrow N$,

$\Psi_i : M_i \rightarrow M$ e $\Phi_{i,i} : M_i \rightarrow M_i$, então existe um único R -homomorfismo $\Psi : M \rightarrow N$ com a seguinte propriedade $\forall i \in \Omega$, $\Psi \circ \Phi_i \equiv \Psi_i$.

Propriedades 5.4.16. *Segue abaixo as principais propriedades do limite direto.*

- (a) *Dado um sistema direto de R -módulos $(M_i, \Phi_{i,i})_{i \in \Omega}$, sempre existe o seu limite direto [42, Teorema 2.17].*
- (b) *Quaisquer dois limites diretos de um mesmo sistema direto de R -módulos são R -isomorfos.*
- (c) *O limite direto é funtor exato, quando o conjunto de índices é dirigido e quasi-ordenado [42, Teorema 2.18].*
- (d) *Se B é um R -módulo à esquerda o funtor $B \otimes_R -$ preserva limite direto [42, Corolário 2.20].*
- (e) *Quaisquer dois limites diretos comutam (até mesmo indexado por dois conjuntos distintos) [42, Teorema 2.21].*

Desde que o limite direto é único a menos de R -isomorfismo, vamos usar as notações $M = \varinjlim_i M_i$ para o limite direto (M, Φ_i) e o único R -homomorfismo $\Psi : M \rightarrow N$, dado na propriedade universal da definição anterior, será denotado por $\Psi = \varinjlim_i \Psi_i$.

Podemos visualizar o limite direto via uma construção alternativa. Considere I um conjunto dirigido de índices e $\{A_i, \varphi_j^i\}$ sistema direto sobre I . Se X é a união disjunta $\bigcup A_i$, para $a_i \in A_i$ e $a_j \in A_j$, considere a relação de equivalência em X dada por: $a_i \sim a_j$ se existe um índice $k \geq i, j$, com $\varphi_k^i(a_i) = \varphi_k^j(a_j)$. A classe de equivalência será denotada por $[a_i]$.

Considere agora o R -módulo L cujos elementos são as classes de equivalência $[a_i]$ definidas anteriormente juntamente com as operações

- $r[a_i] = [ra_i]$, se $r \in R$.
- $[a_i] + [a'_j] = [a_k + a'_k]$, onde $k \geq i, j$, com $\varphi_k^i(a_i) = \varphi_k^j(a'_j)$

Mediante isto, é possível mostrar que quando o conjunto de índices I é um conjunto dirigido, o mapa $\varinjlim A_i \rightarrow L$ definido por $\lambda_i a_i + L \mapsto [a_i]$, é um isomorfismo.

5.4.3 Limite inverso

Nesta seção vamos falar de uma noção dual ao de limite direto, que é o de limite inverso. Tal conceito será primordial para definir a extensão da cohomologia local formal, presente no capítulo 4.

Definição 5.4.17. *Seja I um conjunto parcialmente ordenado e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um **sistema inverso** em $\mathfrak{C}$ indexado em I é um funtor contravariante $F : I \rightarrow \mathfrak{C}$ tal que, para cada $i \in I$, existe um objeto F_i e sempre que $i \leq j$ existe o morfismo $\psi_i^j : F_j \rightarrow F_i$ tal que*

(1) $\psi_i^i : F_i \rightarrow F_i$ é o R -homomorfismo identidade para todo $i \in I$;

(2) Se $i \leq j \leq k$, devemos ter que

$$\psi_i^j \circ \psi_j^k = \psi_i^k.$$

Por exemplo, se I é o conjunto dos inteiros positivos com a ordem usual, então um sistema inverso sobre I é a sequência

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow \cdots.$$

Definição 5.4.18. *Seja $F = \{F_i, \psi_i^j\}$ um sistema inverso em $\mathfrak{C}$. O **limite inverso** deste sistema inverso, denotado por $\varprojlim F_i$, é um objeto e uma família de morfismos $\alpha_i : \varprojlim F_i \rightarrow F_i$, com $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$, satisfazendo o seguinte: para cada objeto X e morfismos $f_i : X \rightarrow F_i$, existe um único morfismo $\beta : X \rightarrow \varprojlim F_i$ tal que*

$$\alpha_i \beta = f_i.$$

Propriedades 5.4.19. *Segue abaixo as principais propriedades/fatos sobre o limite inverso.*

(a) *O limite inverso de um sistema inverso de módulos existe e é único a menos de isomorfismo [42, Teorema 2.22].*

- (b) Considere $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de submódulos de um módulo M ordenados pela inclusão reversa e seus respectivos mapas de inclusão. Desta maneira esta família define um sistema inverso e $\varprojlim A_i \cong \bigcap_{i \in I} A_i$, quando I é dirigido [42, Exemplo 2.50].
- (c) O limite inverso é um funtor exato à esquerda [42, Teorema 2.23].
- (d) Se B é um R -módulo à esquerda, o funtor $\text{Hom}(B, -)$ preserva limite inverso [42, Corolário 2.25].
- (e) Quaisquer dois limites inversos comutam (até mesmo indexado por dois conjuntos distintos) [42, Teorema 2.26].
- (f) Para qualquer R -módulo B , $\text{Hom}(\varprojlim A_j, B) \cong \varinjlim \text{Hom}(A_j, B)$.

Uma vez que o limite inverso é um funtor exato à esquerda, há de se perguntar sobre os funtores derivados à direita deste funtor. Em [56], Seção 3.5, existe uma construção alternativa do limite inverso e consequentemente do seu funtor derivado a direita. Mais especificamente, dado uma cadeia de grupos abelianos $\cdots \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0$ temos que

$$\varinjlim^n A_i := (\mathcal{R}^n \varinjlim)(A_i).$$

Não entraremos em muitos detalhes sobre estes funtores derivados à direita, deixando ao cargo do leitor uma consulta detalhada em [56, Seção 3.5]. Porém, nos atentaremos a seguinte condição abaixo.

Definição 5.4.20. Uma cadeia de grupos abelianos $\cdots \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0$ satisfaz a **condição de Mittag-Leffler** se para cada k , existe $j \geq k$ tal que a imagem $A_i \rightarrow A_k$ é igual a imagem de $A_j \rightarrow A_k$ para todo $i \geq j$. Dizemos que esta cadeia satisfaz condição trivial de Mittag-Leffler se para cada k , existe $j > k$ tal que o mapa $A_j \rightarrow A_k$ é nulo.

Vale ressaltar que módulos Artinianos satisfazem a condição de Mittag-Leffler. Na sequência, citamos um importante resultado ao se falar de cadeias que satisfazem esta condição prévia.

Proposição 5.4.21. Seja cadeia de grupos abelianos $\cdots \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0$ satisfazendo a **condição de Mittag-Leffler**. Então

$$\varinjlim^1 A_i = 0.$$

Demonstração. Veja [56, Proposição 3.5.7]. □

Por fim, consideremos a seguinte construção, presente em [25, Apêndice A, Seção 4]. Seja I um ideal de um anel comutativo R . Então como sabemos,

$$I^n = \left\{ \sum a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in I \right\}$$

é um ideal e vale $I = I^1 \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \cdots$. Se M é um R -módulo, então $M \supset IM \supset I^2 M \supset \cdots$. A família de módulos quocientes $M/I^i M$, $i = 1, \dots$ e os mapas $\psi_i^j : M/I^j M \rightarrow M/I^i M$, para $i \geq j$, dado por $x + I^j M \mapsto x + I^i M$, formam um sistema inverso indexado por inteiros positivos. Assim faz sentido a seguinte definição.

Definição 5.4.22. *O **completamento I -ádico** de M , denotado por $\widehat{M}$, é $\varprojlim M/I^i M$.*

Existe um homomorfismo canônico de R -módulos $M \rightarrow \widehat{M}$ tal que:

- (a) $\text{Ker}(M \rightarrow \widehat{M}) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I^i M$.
- (b) $\widehat{R}$ é um anel e $R \rightarrow \widehat{R}$ é um homomorfismo

Quando R é um anel Noetheriano e M um R -módulo temos ainda que

- (a) $\widehat{R}$ é Noetheriano.
- (b) Se $(R, \mathfrak{m})$ é local, então $\widehat{R}$ é local com ideal maximal $\mathfrak{m}\widehat{R}$.
- (c) Quando M é finitamente gerado, temos que $\widehat{M} = \widehat{R} \otimes_R M$. Desta forma $\widehat{M}$ é também um $\widehat{R}$ -módulo finitamente gerado.

5.4.4 Dualidade de Matlis

Nesta seção, vamos falar brevemente sobre a dualidade de Matlis. Tal conceito se faz importante pois é uma estreita ponte entre módulos Noetherianos e Artinianos. Mais especificamente, seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo e $E := E(R/\mathfrak{m})$ o envolvente injetivo do corpo residual. O funtor

$$D(-) := \text{Hom}_R(-, E)$$

é chamado de **funtor de dualidade de Matlis**. Como E é injetivo, temos que este funtor torna-se um funtor exato da categoria de R -módulos. O próximo teorema é o principal resultado desta seção.

Teorema 5.4.23 (Dualidade de Matlis). *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local completo e o funtor $D(-) := \text{Hom}_R(-, E)$. Considere M um R -módulo.*

(a) *Se M é Noetheriano, respectivamente Artiniano, então $D(M)$ é Artiniano, respectivamente Noetheriano.*

(b) *Se M é Artiniano ou Noetheriano, então o mapa $M \rightarrow D(D(M))$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Para esta prova, veja [25, Teorema A.35]. □

A seguir alguns fatos importantes sobre este funtor.

Proposição 5.4.24. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local.*

(a) *O mapa $M \rightarrow D(D(M))$ é injetor. Além disto o comprimento de $D(M)$ é igual ao comprimento de M [25, Lema A.27].*

(b) *Se $\widehat{R}$ é o completamento $\mathfrak{m}$ -ádico de R e $E = E_R(k)$, o mapa*

$$\widehat{R} \rightarrow D(E)$$

$$r \mapsto (e \mapsto re)$$

é um isomorfismo [25, Teorema A.31].

REFERÊNCIAS

- [1] M. Aghapournahr, KH. Ahmadi-Amoli and M.Y. Sadegui, *The concept of (I, J) -Cohen-Macaulay modules*, Journal of Algebraic Systems, (accepted), (2015).
- [2] M. Aghapournahr and L. Melkersson, *Local cohomology and Serre subcategories*, J. Algebra, **320**, (2008), 1275-1287.
- [3] M. Asgharzadeh and K. Divaani-Aazr, *Finiteness Properties of Formal Local Cohomology modules and Cohen-Macaulayness*, Com. Algebra, **39-3** (2011), 1082-1103.
- [4] M. H. Bijan-Zadeh and S. Rezaei, *Artinianness and Attached Primes of Formal Local Cohomology Modules*, Algebra Colloquium, **21:2** (2014), 307-316.
- [5] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris, 1961-1965.
- [6] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local cohomology- an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [7] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, rev. ed., Cambridge Stud. Adv. Math., 39, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [8] L. Chu, *Top local cohomology modules with respect to a pair of ideals* Proc. Amer. Math. Soc., **139-3** (2010), 777-782.
- [9] L. Chu, *Some results of formal local cohomology modules* Communication in Math. Research, **26(1)** (2010), 1-21.
- [10] L. Chu and Q. Wang, *Some results on local cohomology modules defined by a pair of ideals* J. Math. Kyoto Univ, **49-1** (2009), 193-200.

-
- [11] N. T. Cuong and V. T. Khoi, *Modules whose local cohomology modules have Cohen-Macaulay Matlis duals*, in: D.Eisenbud(Ed.), Proc. of Hanoi Conf. on Commutative Algebra, Algebraic Geometry, and Computational Methods, Springer-Verlag, (1999), 223-231.
 - [12] S. Goto, *Approximately Cohen-Macaulay rings*, J. Algebra, **76**, (1982), 214-225.
 - [13] K. Divaani-Aazr, R. Naghipour and M. Touse, *Cohomological dimension of certain algebraic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 3537-3544.
 - [14] K. Divaani- Aazr and P. Schenzel, *Ideal Topology, local cohomology and connectedness*, Math. Proc. Cambridge philos. Soc., **131** (2001), 211-226.
 - [15] G. Faltings, *Algebraization of some formal vector bundles*, Ann. of Math. 110 (1979) 501-514.
 - [16] M. Eghbali, *On Formal local cohomology, colocalization and endomorphism ring of top local cohomology modules*, (2011) Thesis, Universitat Halle-Wittenberg.
 - [17] A. Grothendieck, *Local Cohomology*, Notes by R. Hartshorne, Lecture Notes in Math., vol 20, Springer, 1966.
 - [18] Gu. Y, *The Artinianness of Formal Local Cohomology Modules*, (accepted), (2012).
 - [19] Gu, Yan *On the weak Artinianness and minimax generalized local cohomology modules* Bull. Korean Math. Soc., 50 (2013), no. 6, 1855-1861.
 - [20] J. Herzog, *Komplexe, Auflösungen und Dualität in der lokalen Algebra*, Habilitationsschrift, Universität Regensburg, 1970.
 - [21] M. Hellus and J. Stuckrad, *Artiniannes of local cohomology* , J. Commut.Algebra, **1** (2009), 269-274.
 - [22] M. Hellus and P. Schenzel, *On cohomologically complete intersections*, J. Algebra, **320**, (2008), 3733-3748.

-
- [23] M. Hellus and J. Stuckrad, *On Endomorphism Rings of Local Cohomology Modules*, Proc. Am. Math. Soc., **136**, (2008), 2333-2341.
 - [24] C. Huneke, *Problems on local cohomology, Free resolutions in commutative algebra and algebraic geometry*, (Sundance, UT, 1990), Jones and Bartlett, (1992), 93-108.
 - [25] S. B. Iyengar, G.J. Leuschke, A. Leykin, C. Miller, E. Miller, A.K. Singh, and U. Walther, *Twenty-Four Hours of Local Cohomology*, Graduate Studies in Mathematics 87, Amer. Math. Soc. (2007).
 - [26] V.H. Jorge Perez and T.H. Freitas, *On formal local cohomology defined by a pair of ideals*, Journal of Commutative Algebra, (accepted), (2015).
 - [27] V.H. Jorge Perez and T.H. Freitas, *Artinianness and Finiteness Properties of Formal Local Cohomology Modules Defined by a Pair of Ideals*, (submitted).
 - [28] V.H. Jorge Perez T.H. Freitas, *On the Endomorphism Ring and Cohen—Macaulayness of Local Cohomology Defined by a Pair of Ideals*, (submitted).
 - [29] K. Khashyarmanesh, *On the Endomorphism Rings of Local Cohomology Modules*, Canad. Math. Bull. **53** (2010), no. 4, 667-673.
 - [30] A. Kianezhad, A. J. Taherizadeh and A. Tehranian, *Formal Local Cohomology Modules and Serre Subcategories*, J. Sci. Kharazmi University, **13** (2013), 337-346.
 - [31] A. Mafi, *Some Criteria for the Cohen-Macaulay Property and Local Cohomology*, Acta Mathematica Sinica, English Series 25.6 (2009), 917-922.
 - [32] A. Mafi, *Some results on the local cohomology modules*, Arch Math (Basel), **87** (2006), 211-216.
 - [33] A. Mafi, *Results on formal local cohomology modules*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc, (2) **36**, nÂ° 1, (2013), 173-177.
 - [34] W. Mahmood, *On Endomorphism Ring of Local Cohomology Modules*, (2013), arXiv:1308.2584.

-
- [35] T. Marley and J.C Vassilev, *Local cohomology modules with infinite dimension socles*, Proc. Amer. Math. Soc, **132** (2004), 3485-3490.
 - [36] L. Melkerson, *Some applications of a criterion of artiniannes of a module*, J. Pure and Applied Algebra, **101** (1995), 291-303.
 - [37] L. Melkerson and P. Schenzel, *The co-localization of an Artinian module*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **38** (1995), 121-131.
 - [38] T.T Nam, *On the non-vanishing and the Artinianness of generalized local cohomology modules*, J. Algebra Appl., 12 (2013), no. 4, 1250203.
 - [39] T.T Nam and N. M. Tri, *Some properties of generalized local cohomology modules with respect to a pair of ideals*, (2013), arXiv:1011.4141 .
 - [40] Sh. Payrovi and M. Lofti Parsa, *Finiteness of local cohomology modules defined by a pair of ideals*, Comm. Algebra, **41** (2013), 627-637.
 - [41] C. Peskine and L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale*, Publ. Math. I.H.E.S, **42** (1972), 47-119.
 - [42] J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Second Edition, Academic Press, Orlando, FL, 1979.
 - [43] P. Schenzel, *On Macaulayfications and Cohen-Macaulay canonical modules*, J. Algebra **275** (2004), 751-770.
 - [44] P. Schenzel, *On Endomorphism Rings and Dimensions of Local Cohomology Modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1315-1322.
 - [45] P. Schenzel, *On formal local cohomology and connectedness*, J.Algebra, **315** (2007) 897-923.
 - [46] P. Schenzel, *Matlis Dual of Local Cohomology Modules and their Endomorphism Rings*, Arch. Math., **95** (2010), 115-123.

-
- [47] P. Schenzel, *On the Structure of the Endomorphism Rings of a Certain Local Cohomology Module*, J. Algebra, **344** (2011), 229-245.
 - [48] P. Schenzel, *On the use of local cohomology in Algebra and Geometry*, Notes.
 - [49] J. R. Strooker, *Homological Questions in Local Algebra*, London mathematical society, Lectures Notes Sries. Cambridge University Press (1990).
 - [50] T. Takahashi, Y. Yoshino, and T. Yoshizawa, *Local cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals*, J. Pure Appl. Algebra, **213**, (2009), 582-600.
 - [51] A. Tehranian and A.P.E Talemi, *Non-Artinian Local Cohomology with Respect to a Pair of Ideals*, A. Colloquium, **20**: 4 (2013), 637-642.
 - [52] A. Tehranian and A. P. E. Talemi, *Filter Depth and cofiniteness of Local Cohomology Modules defined by a Pair of Ideals*, A. Colloquium, **21**: 4 (2014), 597-604.
 - [53] A. Tehranian and A. P. E. Talemi, *Local Cohomology with Respect to a Cohomologically Complete Intersection Pair of Ideals*, Iranian J. of Math. Sci. and Informatics, vol 9 **2**, (2014), 7-13.
 - [54] A. Vahidi and M. Aghapournahr, *Some Results on Generalized Local Cohomology Modules*, Comm. Algebra 43 (2015), no. 5, 2214-2230.
 - [55] S. Yassemi, *Coassociated primes*, Comm. Algebra, **23** (4), (1995), 1473-1498.
 - [56] C.A, Weibel , *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, (1994).